Ce document s'adresse à une personne qui maîtrise les mathématiques du secondaire sauf éventuellement celles du programme de mathématiques expertes. On y introduit les matrices, vues comme des tableaux de nombre, et on décrit d'abord les opérations que l'on peut faire avec. Enfin, on énumère quelques types de matrices que l'on rencontrera systématiquement.

Définition : Soient n et p deux entiers naturels non nul. On appelle matrice de taille (n, p) à coefficients réels un tableau à n lignes et p dont les cellules contiennent un réel. On appellera coefficient d'indice (i, j) le coefficient présent à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. L'ensemble des matrices à coefficients réels de taille (n, p) sera noté $M_{n,p}(R)$. Dans le cas particulier où $n = p$, on écrira $M_n(R)$ à la place de $M_{n,n}(R)$ et une matrice de $M_n(R)$ sera appelée « matrice carrée ». Les coefficients d'indice (i, i) d'une matrice carrée sont ce qu'on appelle les coefficients diagonaux.

Notation : Une matrice est déterminée par la donnée de $n * p$ coefficients (p coefficients par lignes). On notera donc une matrice $M\left(m_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n\ 1\leq j\leq p}$ ou parfois $\left(m_{i,j}\right)$.

Une matrice sera représentée par n lignes contenant p chiffres que l'on mettra entre parenthèses.

Exemple : $(3\ 1.33\ 4\ 6\ 321\ 55\ )$ est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes. Le coefficient d'indice $(2, 1)$ est 4.

Somme de matrices : Dans $M_{n,p}(R)$, on appelle somme des matrices M et N la matrice dont le coefficient d'indice (i, j) est la somme du coefficient d'indice (i, j) de M et de N. On la note $M + N$. On remarquera que les sommes $N + M$ et $M + N$ sont les mêmes.

Exemple : La matrice $(1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ 4\ 4\ 1\ ) + (2\ 0\ 0\ 4\ 3\ 2\ 1\ 0\ 3\ )$ est $(1 + 2\ 2 + 0\ 1 + 0\ 2 + 4\ 3 + 3\ 3 + 2\ 4 + 1\ 4 + 0\ 1 + 3\ )$, c'est-à-dire $(3\ 2\ 1\ 6\ 6\ 5\ 5\ 4\ 4\ )$.

On peut sommer autant de matrices qu'on le veut, et le résultat de la somme ne dépend ni de l'ordre dans lequel on somme les matrices (on peut placer les parenthèses où l'on veut), ni de la place des termes (on peut permuter les termes).
Par exemple, si M, N et P sont trois matrices, on peut faire la somme $M + N + P$ en calculant $M + (N + P)$ ou $(M + N) + P$ ou $N + (M + P)$ ou $(P + M) + N$...
Pour la somme, la matrice de $M_{n,p}(R)$ dont les coefficients sont tous nuls joue un rôle important : l'ajout de cette matrice à toute matrice M de $M_{n,p}(R)$ vaut M. On la notera $0_{M_{n,p}(R)}$ ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté. Pour toute matrice $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n\ 1\leq j\leq p}$ de $M_{n,p}(R)$, la somme de M avec la matrice $\left(- m_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n\ 1\leq j\leq p}$ est nulle. On note $- M$ cette matrice qu'on appelle « opposé de M » : $M + (- M) =- M + M = 0$.
Notation : pour tout entier k, on appelle kM la somme $M + ... + M$ (le terme M apparaît k fois). Parce qu'on peut sommer dans l'ordre qu'on veut, pour tous entiers k et l, $(k + l)M = kM + lM$.

Produit matriciel : Dans le cas particulier où $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\le i\le n\ 1\le j\le p}$ est une matrice de $M_{n,p}(R)$ et $N = \left(n_{i,j}\right)_{1\le i\le p\ 1\le j\le q}$ est une matrice de $M_{p,q}(R)$, on définit le produit MN par la matrice de $M_{n,q}(R)$ dont le coefficient (i, j) vaut $\sum_{k=1}^{p} m_{i,k}n_{k,j}$.

Exemple : Le produit $(1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ )(3\ 1\ 2\ 2\ 2\ 0\ 4\ 1\ 4\ 2\ 1\ 4\ )$ est une matrice de taille $(2, 4)$. Le coefficient d'indice $(1, 2)$ vaut $(1\ +\ 1) + (2\ +\ 0) +\ (1\ +\ 2)$, c'est-à-dire **7** ; le coefficient d'indice $(2, 3)$ vaut $(2\ +\ 2)\ + (3\ +\ 4) + (3\ +\ 1)$, c'est-à-dire 15. Le produit de ces deux matrices est $(12\ 6\ 12\ 12\ 24\ 8\ 19\ 19\ )$.

Le produit de matrices doit être manipulé avec énormément de précautions. Vous remarquerez que si le produit précédent est bien défini, celui formé en permutant les deux matrices ne l'est **PAS** ; sauf dans le cas où $n = p$, on ne sait pas multiplier deux matrices de $M_{n,p}(R)$. Dans $M_n(R)$, le produit de deux matrices est donc bien défini. Lorsqu'on multiplie des matrices carrées, l'ordre dans lequel on fait les opérations ne change pas le résultat. En revanche, la place des termes importe, même dans les cas les plus simples.
Par exemple, $(1\ 2\ 3\ 1\ )(1\ 3\ 1\ 4\ ) = (3\ 11\ 4\ 13\ )$ **mais** $(1\ 3\ 1\ 4\ )(1\ 2\ 3\ 1\ ) = (10\ 5\ 13\ 6\ )$.
Il existe une matrice carrée qui est au produit de matrices carrées ce que le chiffre 1 est au produit de nombres : la matrice identité. Cette matrice ne contient que des 1 sur sa diagonale et ses autres coefficients sont nuls ; on la note I_n. Pour toute matrice M de $M_n(R)$, $MI_n = I_nM = M$.
Si M est une matrice carrée et qu'il existe une matrice carrée N telle que $MN = I_n$, on dira que M est l'inverse de M et on l'écrira M^{-1}. Nous reviendrons plus tard sur cette notion.
Notation : pour tout entier k, on appelle M^k le produit $M...M$ (le facteur M apparaît k fois). Parce qu'on peut faire les produits dans l'ordre qu'on veut, pour tous entiers k et l, $M^{k+l} = M^kM^l$.

Produit d'une matrice par un réel : Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice. Pour tout réel λ, on définit la matrice notée $\lambda.M$ ou λM par $\lambda M = (\lambda m_{i,j})$. On remarquera que dans le cas où λ est entier relatif, cette définition coïncide avec la somme de M avec lui-même λ fois. En particulier, $0.M = 0_{M_{n,p}(R)}$.

Transposée d'une matrice : Une dernière opération utilisée sur les matrices est la transposition. Elle transforme une matrice M de $M_{n,p}(R)$ en une matrice de $M_{p,n}(R)$ que l'on note M^t définie en échangeant la première colonne avec la première ligne et ainsi de suite. Par exemple, la transposée de la matrice $(1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 3\ )$ est la matrice $(1\ 2\ 2\ 3\ 1\ 3\ )$. Par définition, appliquer deux fois la transposition ne change pas la matrice.

Les opérations précédemment définies sont liées entre elles par les formules suivantes :

- Pour toute matrice M de $M_{n,p}(R)$, pour toutes matrices N et P de $M_{p,q}(R)$ N et pour tout réel λ, $M(\lambda N + P) = \lambda MN + MP$.
- Pour toutes matrices M et N de $M_{n,p}(R)$ et pour toute matrice M de $M_{p,q}(R)$, $(\lambda M + N)P = \lambda MP + NP$
- Pour toutes matrices M et N et pour tout réel λ, $(M + \lambda N)^t = M^t + \lambda N^t$
- Pour toute matrice M de $M_{n,p}(R)$, pour toute matrice N de $M_{p,q}(R)$ et pour tout réel λ, $M(\lambda N) = (\lambda M)N = \lambda(MN)$ et $(M(\lambda N))^t = \lambda N^tM^t$

Remarque : Vous savez que pour tous réels x et y, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ grâce à la formule de double distributivité. On oublie assez vite qu'elle est vraie parce que $xy = yx$. Or, pour les matrices carrées, nous n'avons pas $MN = NM$ en général. On a donc $(M + N)^2 = M^2 + MN + NM + N^2$ et pas plus quand MN et NM sont différents.

Identités remarquables : Pour toutes matrices carrées M et N telles que $MN = NM$ et pour tout entier n, on a les formules suivantes.

- $(M + N)^2 = M^2 + 2MN + N^2$
- $(M + N)(M - N) = M^2 - N^2$
- $(M + N)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} M^k N^{n-k}$
- $M^n - N^n = (M - N)\left(\sum_{k=1}^{n-1} M^k N^{n-k} \right)$

Catégories de matrice : Trois types de matrices doivent être connus ; nous les rencontrerons tout le temps.

- **Les matrices diagonales sont celles dont tous les coefficients sont nuls sauf peut-être les coefficients diagonaux. Soient D une matrice diagonale et M une matrice carrée. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D. Faire le produit DM revient à multiplier les coefficients de la i-ème de M par λ_i tandis que faire le produit MD revient à multiplier la i-ème colonne de M par λ_i. On comprend ainsi que le produit de deux matrices diagonales est encore diagonale et qu'une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nulles. Un cas particulier très important dont nous verrons l'intérêt plus tard est celui où les coefficients diagonaux sont tous nuls à l'exception de celui d'indice (i, i) par exemple. Dans ce cas-là, le produit DM laisse inchangées les lignes sauf celle d'indice i qu'on multiplie par λ_i.**
- **Les matrices triangulaires supérieures sont les matrices sont les coefficients en dessous de la diagonale sont nuls. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure. Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.**
- **Les matrices triangulaires inférieures sont les matrices sont les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure. Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. On notera que la transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure.**