МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»

РТУ МИРЭА

Методические указания к выполнению практических работ

Моделирование информационно-аналитических систем
Практическая работа 6

(наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом)

Уровень	специалитет *(бакалавриат, магистратура, специалитет)*
Форма обучения	очная *(очная, очно-заочная, заочная)*
Направление(-я) подготовки	10.05.04 Информационно-аналитические системы безопасности, специализации: специализация №1 "Автоматизация информационно-аналитической деятельности"; специализация №3 "Технологии информационно-аналитического мониторинга». *(код(-ы) и наименование(-я))*
Институт	Кибербезопасности и цифровых технологий *(полное и краткое наименование)*
Кафедра	Информационно-аналитические системы кибербезопасности (КБ-2) *(полное и краткое наименование кафедры, реализующей дисциплину (модуль))*
Лектор	к.т.н., доцент Лебедев Владимир Владимирович *(сокращенно – ученая степень, ученое звание; полностью – ФИО)*

Используются в данной редакции с учебного года 2022/23
(учебный год цифрами)

Проверено и согласовано «____» ________20___г. ____________ ____________________
(подпись директора Института/Филиала с расшифровкой)

Москва 20__ г.

<u>Практическое занятие №6.</u>

Имитационное моделирование случайных процессов обработки сообщений в дискретных стохастических системах с применением математических схем систем массового обслуживания

Применение моделей к процессам обработки потока событий информационного взаимодействия в автоматизированных информационных системах и системах защиты информации

<u>Теоретические основы</u>

Модели систем массового обслуживания (СМО) представляют типовые математические модели очередей – так называемые Q-схемы (от англ. queue – очередь).

Модели относят к классу моделей марковских процессов, т.е. случайных процессов без последействия с непрерывным временем.

В общей постановке в СМО имеет место непрерывная в стохастическом смысле череда событий во времени. События на входе в систему возникают в случайные моменты времени, причём случайность моментов проистекает из случайности промежутков времени между любыми двумя последовательными событиями в потоке. Длина последовательности в общем случае представляется неограниченной.

Модель системы представляет собой модель простой системы массового обслуживания (СМО) с неограниченной очередью, с ординарным однородным рекуррентным потоком заявок без последействия, см. рис. 1. Такой поток называют простейшим.

В классической схеме СМО, как правило, статистический закон распределения интервалов времени между поступающими в систему заявками – экспоненциальный, функция плотности распределения которого определяется по формуле: $\mathrm{f}_{requ}(\mathrm{t}) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}}$, где λ – интенсивность потока заявок, 1/с (мин, час, сут…). Интенсивность потока заявок – параметр статистического закона непрерывного экспоненциального распределения. Этот параметр для ординарного потока событий приобретает смысл средней скорости событий в потоке, величина ему обратная равна математическому ожиданию значений интервалов времени между событиями, т.е. точной оценке среднего значения по неограниченной по длине выборке в потоке: $T = \int_0^{\infty} t \cdot f_{requ}(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot dt = {}^{1}/_{\lambda}$, с (мин, час, сут…).

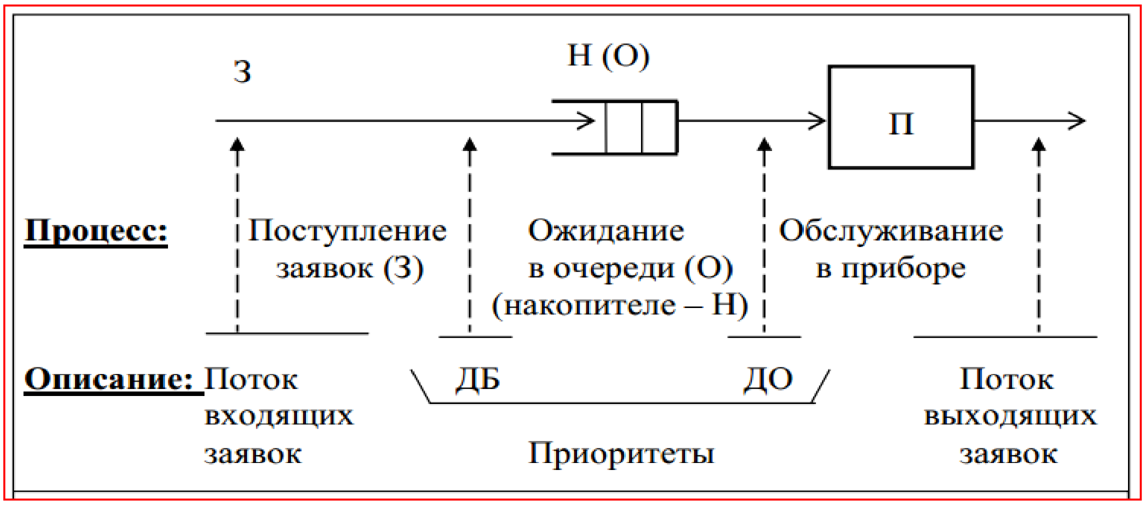


Рисунок 1. Модель простой СМО
Приборы, входящие в модель простой СМО:
- накопитель заявок;
- прибор обслуживания (сервер).

Если в этой модели нет ограничений на количество мест в очереди, то она называется также моделью простой очереди. Вероятность поступления в такую систему за время t k заявок подчиняется закону Пуассона: $P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

Задержки времени на обслуживания заявок также являются случайными величинами, которые в классической модели также распределены по экспоненциальному закону. Функция плотности распределения длительности обслуживания определяется по формуле $\mathrm{f}_{serv}(\mathrm{t}) = \mu \mathrm{e}^{-\mu \mathrm{t}}$, где μ – интенсивность потока обслуживания заявок, 1/с (мин, час, сут…).

В общем случае законы распределения промежутков времени могут быть различными, например, дискретными или непрерывными.

Имитационное моделирование задержек времени – интервалов между событиями в потоке событий – производят, используя методы обратных функций, усечения Неймана, интервальной гистограммы, или специальных методов имитационного моделирования нормальных случайных чисел таких как метод ЦПТ или метод Бокса-Мюллера.

Дискретные законы распределения значений промежутков времени имеют место, например, в случае, когда временные интервалы кратны некоторому такту Δτ. Это характерно, например, для временных процессов внутри цифровых микросхем и компьютеров. В этом случае используют геометрическое распределение. Исходы, определяющие случайные значения количества тактов k, формирующих случайное значение интервала $t_k = k \cdot \Delta\tau$, распределяются согласно таблице 1.

Таблица 1 Геометрическое распределение

N	1	2	…	k	…	∞
$\boldsymbol{P_N}$	$\boldsymbol{P_1 = q^0 p = 1p = p}$	$\boldsymbol{P_2 = q^1 p = qp}$	…	$\boldsymbol{P_k = q^{k-1} p}$	…	$\boldsymbol{P_\infty = q^\infty p = 0}$

Здесь p и q – параметры распределения, имеющие свойства вероятностей успешного и неуспешного исходов в серии повторных испытаний, т.е. $0 \le p, q \le 1$ и $p + q = 1$. Имитационное моделирование количества тактов k производят методом «жребия».

Сумма всех вероятностей по множеству исходов равна:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

1. Генерируем базовое случайное число r. Оно попадает равновероятно в какую-нибудь точку отрезка $[0; 1]$.

2. Проверяем последовательно, начиная, например, с левого края отрезка $[0; 1]$, в какой интервал разбиения указанного отрезка попадает сгенерированное число, и делаем выбор по схеме:

Если $0 \le r < P_1 = p = 1 - q$, то производим выбор $N = 1$

Если $P_1 = p = 1 - q \le r < P_1 + P_2 = p\frac{1-q^2}{1-q} = 1 - q^2$, то производим выбор $N = 2$

Если $P_1 + P_2 = 1 - q^2 \le r < P_1 + P_2 + P_3 = p\frac{1-q^3}{1-q} = 1 - q^3$, то производим выбор $N = 3$

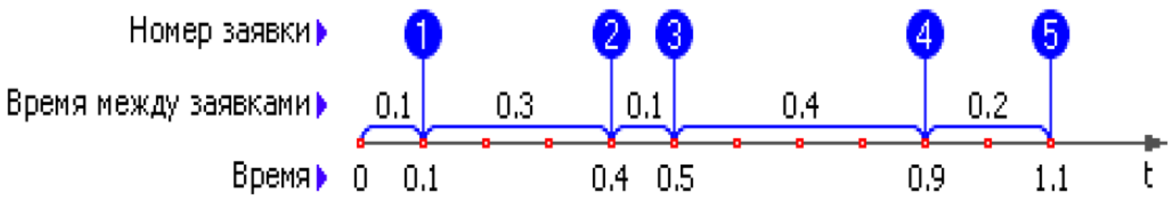
…

Если $P_1 + P_2 + \dots + P_{k-1} = 1 - q^{k-1} \le r < P_1 + P_2 + \cdots P_{k-1} + P_k = 1 - q^k$, то производим выбор $N = k$

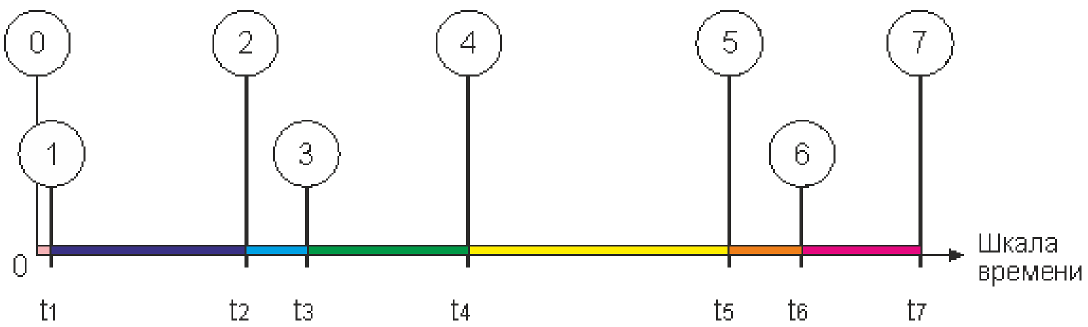
…

и так далее. Перебор условий прерывается при установлении актуального выбора.

Интервалы времени между поступающими в систему запросами формируют шкалу времени случайных событий, связанных с возникновением заявок в системе, см. рис. 3.



а) Случайный процесс прихода заявок в СМО в случае кратной зависимости промежутков времени от такта (дискретное геометрическое распределение промежутков времени)



b) 0 **…** 7 - индикаторы (флажки) событий; $\boldsymbol{t1}$ … $\boldsymbol{t7}$ – моменты времени фиксации событий (непрерывное распределение промежутков времени)

Рисунок 3. Шкала случайных событий в ИС (модель СМО – Q-схема)

В модели принимают следующие идеализирующие допущения:

1) заявки мгновенно без задержек возникают в очереди (накопителе) системы и мгновенно без задержек поступают в обслуживающий прибор, если он свободен;

2) если прибор занят, то заявка дожидается своей очереди на обслуживание;

3) после окончания обслуживания заявка мгновенно покидает систему.

Схема-граф модели Марковского процесса в этой системе представлена на рис. 4.

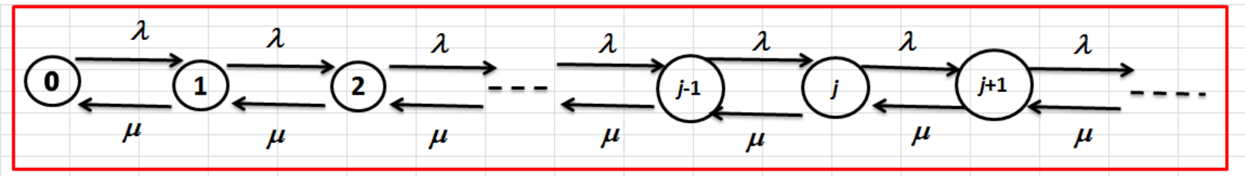


Рисунок 4. Граф модели Марковского процесса в простой СМО с одним каналом и неограниченной очередью

Состояние системы маркируется количеством заявок, присутствующих в системе одномоментно, т.е. целым положительным числом. По этому признаку модель системы дискретная.

Динамику процесса изменения вероятностей состояний моделирует система уравнений Колмогорова. Она описывает неэргодический процесс динамики распределения вероятностей состояний в системе:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu$$

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -P_j(t)(\lambda + \mu) + P_{j-1}(t)\lambda + P_{j+1}(t)\mu$$

$$\mathrm{j} = 1, \dots \infty$$

Начальные условия распределения задаются вектором:

$$\{P_0(0), P_1(0), \dots, P_j(0), \dots\},\ \mathrm{j} = 0,1, \dots \infty$$

При условии $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ решение асимптотически сходится к эргодическому распределению:

$$\boldsymbol{P_j = (1-\rho)\rho^j}$$

$$\mathrm{j} = 0,1, \dots \infty$$

При этом математическое ожидание количества заявок, находящихся в системе, определяется по формуле:

$$\boldsymbol{K_{mid} = (1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}}$$

Эта модель не отражает дискретность единичной реализации процесса, а описывает обобщённый вероятностный процесс.

В действительности процесс событий представляемый временным рядом последовательности значений количества заявок в системе дискретный: число заявок в системе меняется дискретно в моменты времени поступления очередной заявки в систему (+1) и в моменты времени окончания обслуживания очередной заявки, когда она покидает систему (-1).

1. Параметры случайного процесса.

Заявки поступают в систему в случайные моменты времени: длительность интервалов между поступлениями заявок – случайная величина, распределенная по заданному закону.

Длительность обслуживания заявки – случайная величина, распределенная по заданному закону.

Длительность интервала между поступлениями заявок распределена по экспоненциальному закону. Функция вероятности экспоненциального закона определяется по формуле: $F_{requ}(T < t) = \int_0^t f_{requ}(t) \cdot dt = 1 - e^{-\lambda t}$, а имитационное моделирование последовательности случайных чисел производим по формуле обратной функции закона:

$t = \frac{1}{\lambda} ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$, где $r = \mathrm{PP}[0,1]$ – генератор псевдослучайных чисел.

Интенсивность поступления заявок в задании представлена вариантой:

$\lambda = {}^1/_{15}; {}^1/_{20}; {}^1/_{25}$ с$^{-1}$.

Длительность обслуживания распределена также по экспоненциальному закону с параметром μ. Функция вероятности определяется по формуле: $F_{serv}(T < t) = 1 - e^{-\mu t}$, а имитационное моделирование последовательности случайных чисел производим по формуле:

$t = \frac{1}{\mu} ln\left(\frac{1}{1-r}\right)$, где $r =$ PP[0,1] – генератор псевдослучайных чисел.

Интенсивность обслуживания в задании представлена вариантой:

$\mu = {}^{1}/_{20}$; ${}^{1}/_{15}$; ${}^{1}/_{22}$ $с^{-1}$.

В разрабатываемой стохастической имитационной модели мы имеем два независимых статистических параметра λ и μ.

Параметр λ статистического экспоненциального закона непрерывного распределения промежутков времени между поступлениями заявок в систему определяет значение математического ожидания моделируемых случайных промежутков времени: $M(\Delta t_k^{\text{пост}}) = \frac{1}{\lambda}$.

Для ординарного потока величина, обратная $\frac{1}{M(\Delta t_k^{\text{пост}})} = \lambda$ представляет оценку средней скорости поступления заявок. Поэтому её также называют интенсивностью поступления заявок.

Параметр μ статистического экспоненциального закона непрерывного распределения затрат времени на обработку поступающих в систему заявок определяет значение математического ожидания моделируемых случайных затрат времени на обслуживание: $M\left(\Delta t_k^{\text{обсл}}\right) = \frac{1}{\mu}$.

Для ординарного потока величина, обратная $\frac{1}{M(\Delta t_k^{\text{обсл}})} = \mu$ представляет оценку средней скорости обработки (обслуживания) заявок. Поэтому её также называют интенсивностью обслуживания (обработки) заявок.

Таким образом, все статистические результаты, получаемые при прогоне имитационной модели, будут так или иначе зависеть от 2–х параметров: λ и μ.

Исследование модели проведём методом статистических испытаний Монте-Карло. Для этого построим последовательность N-ого количества случайных событий (объём задания N устанавливает преподаватель). Случайные события в модели связаны с поступлением заявок, или сообщений, в систему и выходом их из неё. Во время пребывания заявок внутри системы они могут находиться в состоянии ожидания обслуживания или в процессе обслуживания. Случайный процесс в модели представляется последовательностью случайных чисел. Эти числа моделируют временные интервалы между поступлениями заявок в систему, длительности обслуживания поступающих заявок, моменты времени поступления заявок в систему, моменты времени поступления заявок на обслуживание, длительности ожидания, моменты времени окончания обслуживания.

Моделирование случайных чисел, распределенных по экспоненциальному закону $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, см. графики функции распределения на рис. 5, плотность распределения, которых имеет следующее определение: $f(t) = \frac{dP(T<t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$, см. рис. 6, производим ***методом обратных функций***.

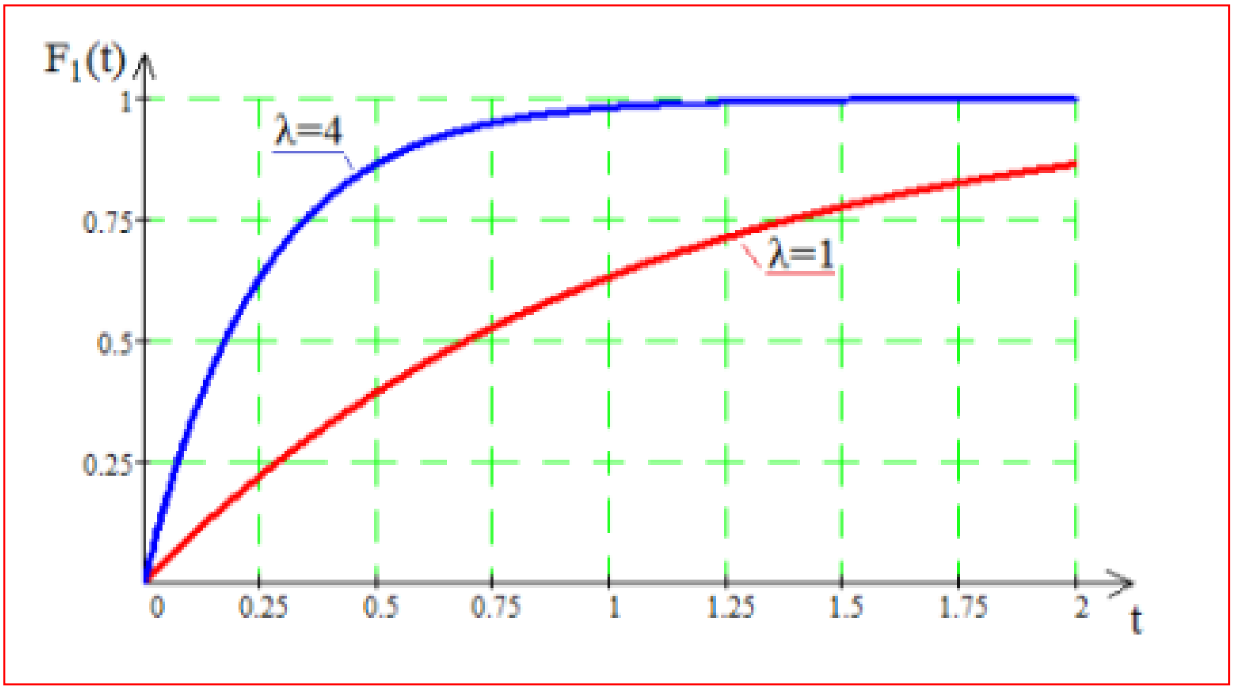


Рисунок 5. Графики функций экспоненциального распределения

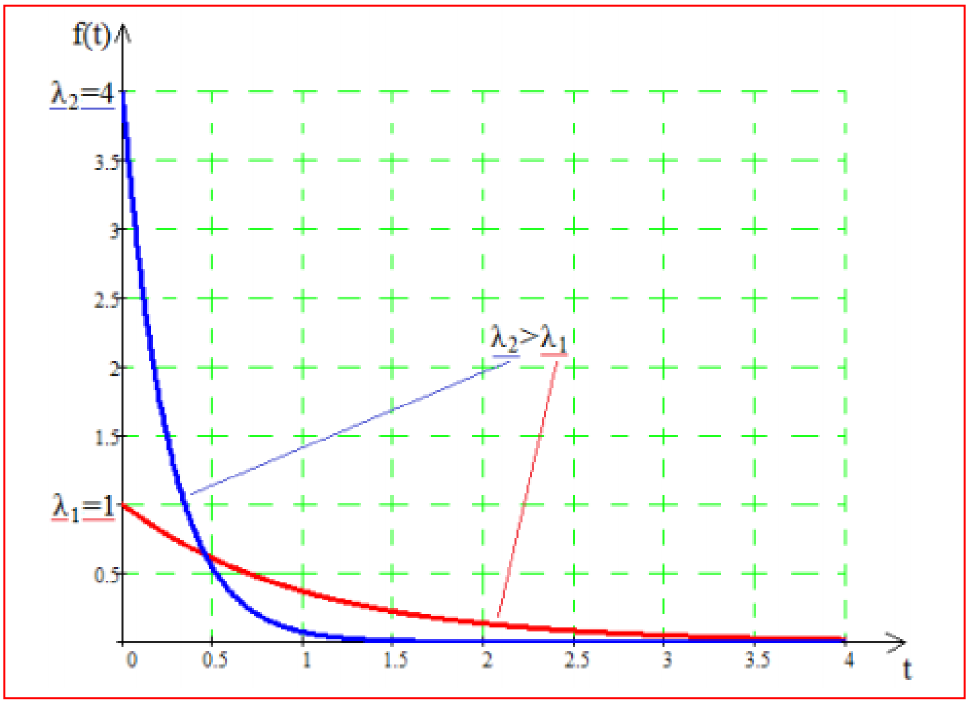


Рисунок 6. Графики функций плотности экспоненциального распределения

2. Моделирование случайных значений процесса производится с использованием ***формул обратных функций*** закона распределения, которые получают согласно следующему алгоритму:

1). Поскольку $\xi = \int_0^t f(t)\,dt = P(T < t)$ – случайная величина, которая имеет равномерное распределение в диапазоне [0;1], то моделируются ряды случайных чисел $\xi = P = r$, распределенных по равномерному закону с использованием программного генератора псевдослучайных чисел.

2). Затем определяются соответствующие им числа t, распределенные по экспоненциальному закону по формуле обратной функции, которая получается путём решения следующего уравнения:

$r = P = 1 - e^{-\lambda t}$ – формула вероятности закона распределения.

Уравнение преобразуем перестановкой его членов из правой части равнения в левую часть и, наоборот, к виду:

$e^{-\lambda t} = 1 - P$

Прологарифмируем его правую и левую часть. Получим уравнение:

$-\lambda t = Ln(1 - P)$, из которого получаем формулу ***обратной функции*** для моделирования экспоненциального распределения:

$$t = \frac{1}{\lambda} Ln\left(\frac{1}{1-P}\right)$$

Моделируем значения первичных случайных процессов модели:

1. Для интервалов между поступлениями заявок $\Delta t_k^{\text{пост}} = \frac{1}{\lambda}\ln(\frac{1}{1-r1_k})$, где $r1_k$ – сгенерированное случайное число (базовое число), распределённое по равномерному закону, из ряда для моделирования интервалов между поступлениями заявок;

2. Для длительностей обслуживания поступающих заявок $\Delta t_k^{\text{обсл}} = \frac{1}{\mu}\ln(\frac{1}{1-r2_k})$, где $r2_k$ – сгенерированное случайное число (базовое число), распределённое по равномерному закону, из ряда для моделирования длительностей обслуживания поступающих заявок.

Другие временные и прочие параметры модели, которые уже представляют значения и характеристики вторичных случайных процессов, зависящие от значений первичных случайных процессов, рассчитываем, используя формулы:

1. Время поступления:

$$t_k^{пост} = t_{k-1}^{пост} + \Delta t_k^{пост}$$

2. Время ожидания начала обслуживания:

$$\Delta t_k^{ож} = \begin{cases} t_{k-1}^{ок\,обсл} - t_k^{пост} \;\; \forall t_{k-1}^{ок\,обсл} > t_k^{пост} \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

3. Время поступления на обслуживание:

$$t_k^{нач\,обсл} = t_k^{пост} + \Delta t_k^{ож}$$

4. Время окончания обслуживания:

$$t_k^{ок\,обсл} = t_k^{нач\,обсл} + \Delta t_k^{обсл}$$

5. Время пребывания заявки в системе (время жизни):

$$\Delta t_k^{жизни} = \Delta t_k^{ож} + \Delta t_k^{обсл}$$

6. Средняя длина очереди:

$$n_{ср}^{оч} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{ож}}{t_N^{ок\,обсл}}$$

7. Среднее количество заявок в системе:

$$n_{ср}^{сист} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{t_N^{ок\ обсл}}$$

8. Средняя длительность пребывания заявки в системе:

$$\Delta t_{ср}^{жизни} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{N}$$

9. Средняя длительность ожидания обслуживания:

$$\Delta t_{ср}^{ож} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{ож}}{N}$$

10. Средний интервал поступлений:

$$\Delta t_{ср}^{пост} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{пост}}{N}$$

11. Средняя интенсивность потока заявок:

$$\lambda_{ср} = \frac{1}{\Delta t_{ср}^{пост}}$$

12. Среднее время обслуживания заявок:

$$\Delta t_{ср}^{обсл} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{обсл}}{N}$$

13. Средняя интенсивность обслуживания:

$$\mu_{ср} = \frac{1}{\Delta t_{ср}^{обсл}}$$

3. Используя все описанные выше формулы и алгоритмы, моделируется журнал регистрации событий, представленный ниже.

Задание:

1. Разработать численную имитационную модель потока случайных событий, связанных с поступлением и обслуживанием заявок в автоматизированной информационной системе.

2. Построить модель журнала регистрации событий в системе, определив следующие значения случайного процесса:

- моментов поступления заявок в систему;
- моментов поступления заявок на обслуживание;

- длительности ожидания обслуживания в очереди;

- длительности обслуживания в приборе;

- длительности пребывания в системе;

- времени окончания обслуживания.

3. Построить диаграммы потоков событий.

Моделируем с использованием табличного процессора типа Excel, см. рис. 7, используя смоделированные в журнале значения моментов поступления заявок в систему и длительности пребывания в системе каждой заявки (количество последовательных событий принять 20).

4. Определить: среднюю длину очереди, среднюю интенсивность поступления, среднюю интенсивность обслуживания.

Расчетные зависимости, представленные ниже, используем для оценки средних характеристик процессов по значениям выборок, полученных в столбцах таблицы при моделировании. Значения этих величин укажите также не только внизу таблицы, но и в формулах ниже после знака «=».

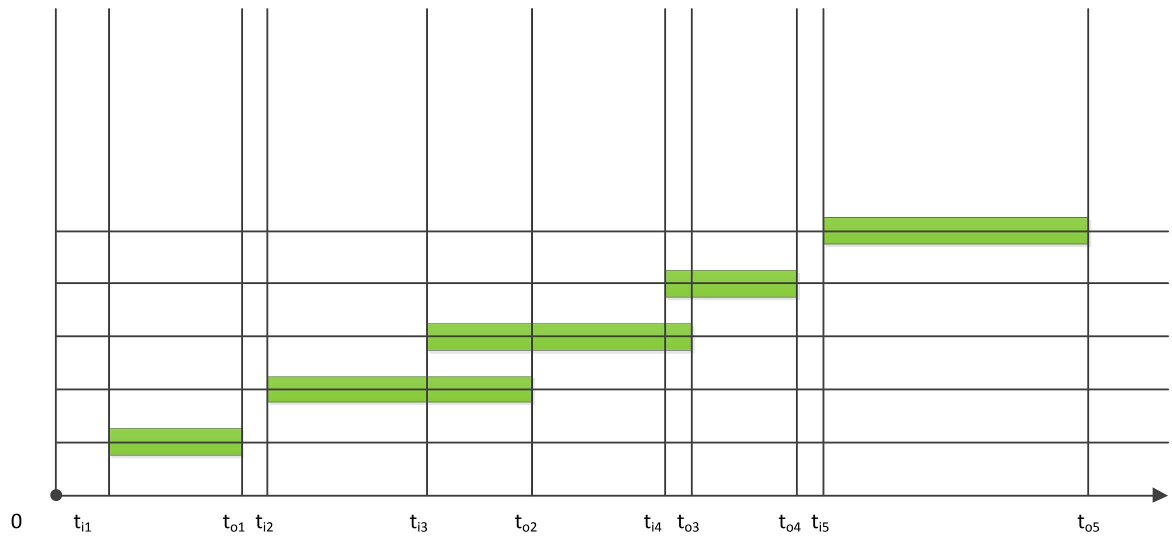


Рисунок 7. Диаграмма событий в системе обслуживания

1. Средняя длина очереди: $n_{ср}^{оч} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{ож}}{t_N^{ок\ обсл}} =$

2. Среднее количество заявок в системе: $n_{ср}^{сист} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{t_N^{ок\ обсл}} =$

3. Средняя длительность пребывания заявки в системе:

$$\Delta t_{ср}^{жизни} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{N} =$$

4. Средняя длительность ожидания обслуживания:

$$\Delta t_{ср}^{ож} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{ож}}{N} =$$

5. Средний интервал поступлений:

$$\Delta t_{ср}^{пост} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{пост}}{N} =$$

6. Средняя интенсивность потока заявок: $\lambda_{ср} = \frac{1}{\Delta t_{ср}^{пост}} =$

7. Среднее время обслуживания заявок: $\Delta t_{ср}^{обсл} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{обсл}}{N} =$

8. Средняя интенсивность обслуживания: $\mu_{ср} = \frac{1}{\Delta t_{ср}^{обсл}} =$

Диаграмма потока событий поступления заявок в систему и пребывания заявок в системе в связи с ожиданием обслуживания и обслуживанием представлена на рис. 8.

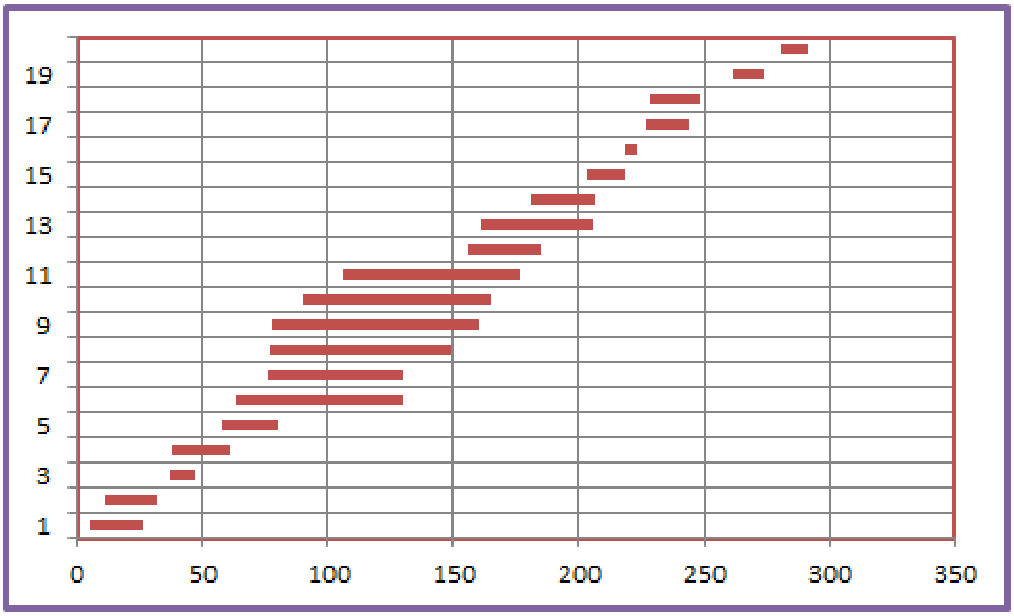


Рисунок 8. Диаграмма потока событий

Ниже представлена модель журнала регистрации событий в системе, полученная в результате моделирования, см. табл. 2.

Таблица 2 Модель журнала регистрации событий.

интенсивность поступлений заявок в систему				интенсивность обслуживания			
0,0666				0,0500			
случайные числа 1	случайные числа 2	интервалы между возникновениями заявок в системе	длительности обслуживания заявок в системе	моменты поступления заявок в систему	моменты выхода заявок из системы	время ожидания обслуживания	время жизни заявки в системе
0,2661	0,6557	5	21	5	26	0	21
0,3408	0,3409	6	6	11	32	15	21
0,8239	0,4753	26	10	37	47	0	10
0,0695	0,5940	1	14	38	61	9	23
0,7414	0,7104	20	19	58	80	3	22
0,3483	0,9635	6	50	64	130	16	66
0,5408	0,0120	12	0	76	130	54	54
0,0724	0,7190	1	19	77	149	53	72
0,0468	0,5062	1	11	78	160	71	82
0,5629	0,2987	12	5	90	165	70	75
0,6454	0,5473	16	12	106	177	59	71
0,9650	0,4113	50	8	156	185	21	29
0,2644	0,7572	5	21	161	206	24	45
0,7378	0,0744	20	1	181	207	25	26
0,7622	0,5083	22	11	203	218	4	15
0,6360	0,2717	15	5	218	223	0	5
0,4576	0,6706	9	17	227	244	0	17
0,0691	0,2142	1	4	228	248	16	20
0,8986	0,5599	34	12	262	274	0	12
0,7112	0,5152	19	11	281	292	0	11
	Суммы столб. >:	281	257			440	697
Число опытов↓↓:		средний интервал между поступлениями заявок↓↓:	средняя длительность обслуживания заявок↓↓:			среднее время ожидания обслуживания↓↓:	среднее время пребывания заявок в системе↓↓:
20		14,05	12,85			22	34,85
		средняя интенсивность поступления заявок в системе↓↓:	средняя интенсивность обслуживания заявок в системе↓↓:			средняя длина очереди↓↓:	
		0,0711	0,0778			2,6666	

5. Определить статистические и частотные параметры распределения интервалов времени пребывания заявок в системе.

Выборка значений интервалов времени пребывания заявок в системе находится в результате прогона модели, например, при использовании табличного расчёта в соответствующем столбце таблицы, см., например, в столбце «время жизни заявки в системе» таблицы, представленной выше.

Приводим полученную гистограмму распределения частот наблюдения значений по выборке, см. рис. 9.

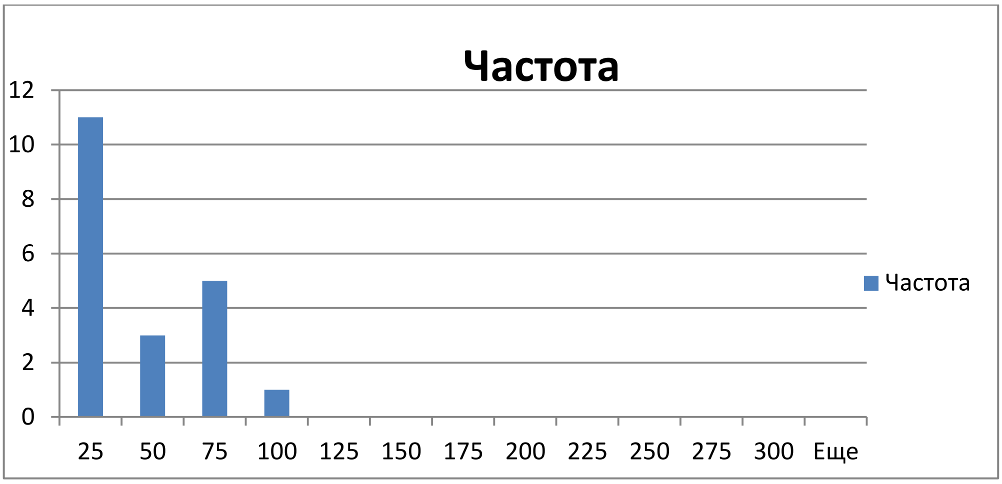


Рисунок 9. Гистограмма распределения значений времени пребывания заявок в системе.

Для построения гистограммы распределения частот появления значений в диапазоне наблюдений исследуемого случайного процесса можно использовать инструмент надстройки Excel – Анализ данных→гистограмма, или аналогичные возможности других приложений. Для построения гистограммы надо задать шкалу карманов, которая покрывает наблюдаемый диапазон значений $\Delta t^{жизни}$ в выборке.

Шкала карманов, или разбивка интервала значений от t_{min} до t_{max} производится после определения рекомендуемого числа отрезков разбиения (карманов), которое производят по формуле:

$$k = \lfloor \sqrt{N} + 1 \rfloor$$

Затем вычисляют длину отрезка разбиения (кармана) по формуле:

$$h = \frac{t_{max} - t_{min}}{k - 1}$$

Узлы сетки разбиения интервала значений выборки (шкалы карманов) определяют по формуле:

$$t_j = t_{min} + j \cdot h; \quad j = 0,1,2, \dots, k - 1$$

Указываем значения выборочного математического ожидания $\langle \Delta t^{\text{жизни}} \rangle = \Delta t_{ср}^{жизни}$, выборочной дисперсии $\langle \Delta t^{\text{жизни}} \rangle^2 = \frac{N}{(N-1)} \left(\overline{\Delta t^{\text{жизни}^2}} - \Delta t_{ср}^{жизни^2} \right)$, где $\overline{\Delta t^{\text{жизни}^2}}$ – средний квадрат значений времени пребывания по выборке.

6. Исследовать влияние соотношения $\boldsymbol{\rho = \frac{\mu}{\lambda}}$, или $\boldsymbol{\mu}$ на оценку среднего времени пребывания в системе методом регрессионного анализа.

Наша модель зависит от двух параметров: интенсивности поступления заявок в систему λ и интенсивности обслуживания μ. Будем менять значения интенсивности обслуживания μ, приняв этот параметр за независимый фактор эксперимента, и исследовать его влияние на зависимый фактор модели – отклик, в качестве которого рассмотрим среднее время пребывания заявок в системе $\Delta t_{ср}^{жизни}$.

Для этого при фиксированном значении $\lambda = const$ варьировать значения ρ по определённому плану и вычислять значение $\mu = \rho \times \lambda$:

$\boldsymbol{\rho(x_j)}$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\boldsymbol{\mu}$	$\mathbf{0,7 \times \lambda}$	$\mathbf{0,8 \times \lambda}$	$\mathbf{0,9 \times \lambda}$	$\mathbf{1,0 \times \lambda}$	$\mathbf{1,1 \times \lambda}$	$\mathbf{1,2 \times \lambda}$	$\mathbf{1,3 \times \lambda}$

Независимые факторы эксперимента по плану эксперимента представлены в таблице 3.

Таблица 3 Независимые факторы эксперимента

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{x_6}$	$\boldsymbol{x_7}$
$\boldsymbol{\mu}$	$\mathbf{0,7 \times \lambda}$	$\mathbf{0,8 \times \lambda}$	$\mathbf{0,9 \times \lambda}$	$\mathbf{1,0 \times \lambda}$	$\mathbf{1,1 \times \lambda}$	$\mathbf{1,2 \times \lambda}$	$\mathbf{1,3 \times \lambda}$

Полученные значения варианты подставить в имитационную модель процесса и получить отклики по оценкам средней длительности пребывания заявок в системе:

$\Delta t_{cp}^{жизни} = \frac{\sum_k^N \Delta t_k^{жизни}}{N} = y_j$, которые соответствуют значениям μ_j варианты μ из плана эксперимента.

Провести m серий экспериментов. Количество параллельных экспериментов m устанавливает преподаватель.

Полученные данные свести в таблицу 4, и вычислить средние значения столбцов. По этим усреднённым откликам модели далее получаем уравнения регрессии.

Таблица 4 Сводная таблица результатов эксперимента

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y_1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}
y_2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}	y_{25}	y_{26}	y_{27}
…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	y_{m1}	y_{m2}	y_{m3}	y_{m4}	y_{m5}	y_{m6}	y_{m7}
$y_{ср}$	$y_{ср1}$	$y_{ср2}$	$y_{ср3}$	$y_{ср4}$	$y_{ср5}$	$y_{ср6}$	$y_{ср7}$

На основании полученных данных восстановить уравнение регрессии, связывающее среднее время жизни и значение μ или $\rho = \frac{\mu}{\lambda}$.

Уравнение регрессии восстанавливает зависимость между независимыми факторами и зависимыми факторами эксперимента (иначе данными эксперимента), аппроксимируя параметрические функции определённого класса методом наименьших квадратов.

В приложениях используется инструмент получения коэффициентов для линейной регрессии, поскольку в этом случае получаются аналитические формулы для получения коэффициентов. В этом случае сумма квадратов отклонений значений функции регрессии от экспериментальных значений в тех же точках представляет функцию экспериментальных данных и коэффициентов имеет вид:

$$E(\{X_i\},\{Y_i\},B,A)=\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-Y(X_i)\right)^2=\sum_{i=1}^{N}(Y_i-AX_i-B)^2$$

Коэффициенты регрессии получают **методом наименьших квадратов**:

$$(B,A)=\mathrm{Arg}\min_{(A_0,A_1)\in\Re^2}E(\{X_i\},\{Y_i\},B,A)$$

Коэффициенты являются решениями системы уравнений:

$$\frac{\partial E}{\partial B}=-2\sum_{i=1}^{N}(Y_i-B-AX_i)=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial A}=-2\sum_{i=1}^{N}(Y_i-B-AX_i)X_i=0$$

Формулы для определения коэффициентов линейной регрессии:

$$B=\frac{\sum_{i=1}^{N}Y_i\sum_{i=1}^{N}{X_i}^2-\sum_{i=1}^{N}X_iY_i\sum_{i=1}^{N}X_i}{N\sum_{i=1}^{N}{X_i}^2-(\sum_{i=1}^{N}X_i)^2}$$

$$A=\frac{N\sum_{i=1}^{N}X_iY_i-\sum_{i=1}^{N}Y_i\sum_{i=1}^{N}X_i}{N\sum_{i=1}^{N}{X_i}^2-(\sum_{i=1}^{N}X_i)^2}$$

Линейная регрессия не всегда аппроксимирует зависимость между данными с хорошей точностью. Точность аппроксимации устанавливается по критерию R-квадрат. Если зависимость между данными близка к линейной, см. рис. 10, то аппроксимация получается с хорошей точностью.

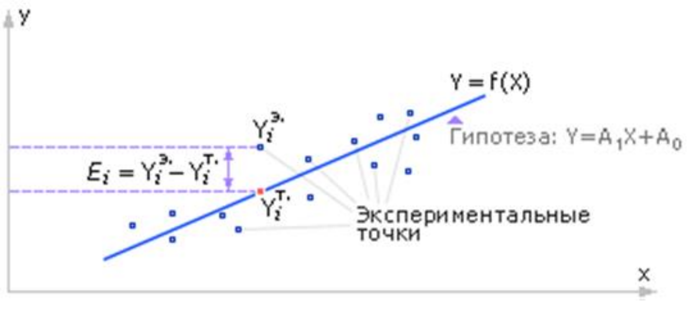


Рисунок 70

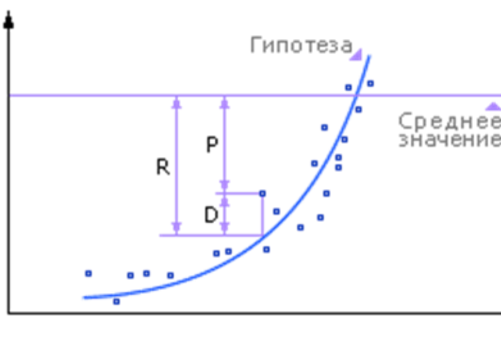


Рисунок 71

Если зависимость между данными проявляет явную нелинейность, см. рис. 11, то применяют некоторые приёмы, чтобы улучшить аппроксимацию при использовании инструмента линейной регрессии.

К линейной регрессии может быть приведена степенная зависимость:

$$YR = C \cdot X^m \rightarrow lnYR = lnC + m \cdot lnX$$

В итоге, мы получаем линейную регрессию между логарифмами факторов и откликов экспериментальной модели в форме: $Y = A \cdot X + B$.

Вычислив значения $A = m$ и $B = lnC$, вычислим C по формуле $C = e^B$. Таким образом, мы получим коэффициенты для уравнения степенной регрессии.

В качестве параметрических функций для уравнения регрессии исследовать два вида:

$YL = A \cdot X + B$ – линейная регрессия;

$YR = C \cdot X^m$ – степенная регрессия.

Для получения коэффициентов регрессии представим данные в виде таблицы 5.

По результатам обработки данных, вычислив коэффициенты и значения функций в столбцах таблицы 5, строим графики функций регрессии YL, YR и экспериментальных точек Y, см. рис 12.

Таблица 5

Y	X	LNY	LNX	YL	YR
$\boldsymbol{y}_{\text{ср}\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{x_1}$				
$\boldsymbol{y}_{\text{ср}\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{x_2}$				
$\boldsymbol{y}_{\text{ср}\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{x_3}$				
$\boldsymbol{y}_{\text{ср}\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{x_4}$				
$\boldsymbol{y}_{\text{ср}\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{x_5}$				
$\boldsymbol{y}_{\text{ср}\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{x_6}$				
$\boldsymbol{y}_{\text{ср}\mathbf{1}}$	$\boldsymbol{x_7}$				

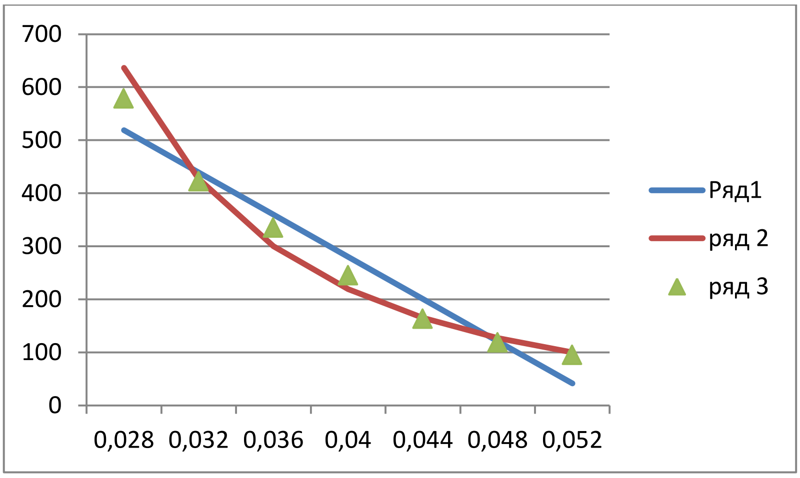


Рисунок 12. Графики линий регрессии и экспериментальных точек

Получаемые в форме уравнений регрессии зависимости отражают законы, связывающие между собой такие параметры модели, как интенсивность обслуживания и средняя продолжительность пребывания заявок в системе. Это уравнение само представляет модель зависимости производительности системы обработки заявок при заданной скорости их поступления в систему от интенсивности обслуживания.

Выводы

Объяснить полученные результаты.

Вопросы для самоконтроля:

1. Объясните принципы имитационного моделирования.

2. Опишите алгоритм имитационного моделирования дискретно распределённых случайных чисел. Приведите пример реализации метода «жребия».

3. Опишите алгоритм имитационного моделирования непрерывно распределённых случайных методом обратных функций.

4. Опишите алгоритм моделирования непрерывно распределённых случайных чисел методом усечения Неймана.

5. Опишите алгоритм имитационного моделирования непрерывно распределённых случайных чисел методом ступенчатой аппроксимации по гистограмме функции.

6. Алгоритм ЦПТ имитационного моделирования нормально распределенных чисел.

7. Алгоритм Бокса-Мюллера имитационного моделирования нормально-распределённых чисел.

8. Дайте определение формулы случайного процесса.

9. Что такое нормальное распределение?

10. Определение стационарного и нестационарного случайного процесса.

11. Эргодические и неэргодические процессы.

12. Прогнозное имитационное моделирование.

13. Опишите модель простой системы массового обслуживания.

14. Почему модель СМО относится к моделям марковских процессов?

15. Почему процесс в СМО рассматривают как процесс в непрерывном времени?

16. Охарактеризуйте принципы имитационного моделирования задержек времени в модели СМО.

17. В чём различие вероятностно-событийного и событийно-временного моделирования процессов в дискретных стохастических системах?

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорошенко А.Н. Математическое и имитационное моделирование дискретных процессов и систем [Электронный ресурс]: учебное пособие /А. Н. Дорошенко. — М.: МИРЭА, 2018. — 151 с. Электрон, опт. диск (ISO)
2. В.В. Лозовецкий. Защита автоматизированных систем обработки информации и телекоммуникационных сетей: учебное пособие для вузов/ В.В. Лозовецкий, Е.Г. Комаров, В.В. Лебедев; под редакцией В.В. Лозовецкого. – Санкт-Петербург: Лань, 2023, -448 с: ил. – Текст: непосредственный.
3. Ермакова А.Ю. Моделирование автоматизированных систем в защищённом исполнении [Электронный ресурс]: Учебное пособие, ч.1./ Ермакова А.Ю., Лебедев В.В. — М.: МИРЭА – Российский технологический университет, 2024. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM)..
4. Пестриков В.М., Дудкин В.С., Петров Г.А.. Дискретная математика./Уч. пос.. – СПб.: СПб ГТУРП, 2013.- 136 с.
5. Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А.. Методы моделирования случайных величин и случайных процессов: уч. пос. – СПб.: Изд-во ПГПУ, 2012. — 217 с.
6. Васильев К.К., Служивый М.Н. Математическое моделирование систем связи: учеб, пособие. — УлГТУ, 2008 — 168 с.
7. Карпов Ю.Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. — СПб.: БХВ - Петербург, 2006. — 400 с.
8. Полянский Д.И. Оценка защищённости./Уч. пос. – Владимир: изд-во Владим. гос. ун-та, 2005. – 80 с.
9. Шмидт Б. Введение в имитационное моделирование в системе Simplex3 / пер. с нем. Ю.А. Ивашкина. — М.: Наука, 2003. — 30 с.
10. Шмидт Б. Искусство моделирования и имитации. Введение в имитационную систему Simplex3 : пер. с нем.: SCS-Европа BVBA, Гент. Бельгия. 2003. — 550 с.

11. Харин Ю.С. и др. Основы имитационного и статистического моделирования. Учебное пособие – Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 288 с.
12. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978.