МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«МИРЭА – Российский технологический университет»**

**РТУ МИРЭА**

# Методические указания к выполнению практических работ

## Моделирование информационно-аналитических систем
## Практическая работа 5

*(наименование дисциплины (модуля) в соответствии с учебным планом)*

| | |
|---|---|
| Уровень | специалитет<br>*(бакалавриат, магистратура, специалитет)* |
| Форма обучения | очная<br>*(очная, очно-заочная, заочная)* |
| Направление(-я) подготовки | 10.05.04 Информационно-аналитические системы безопасности, специализации:<br>специализация №1 "Автоматизация информационно-аналитической деятельности";<br>специализация №3 "Технологии информационно-аналитического мониторинга».<br>*(код(-ы) и наименование(-я))* |
| Институт | Кибербезопасности и цифровых технологий<br>*(полное и краткое наименование)* |
| Кафедра | Информационно-аналитические системы кибербезопасности (КБ-2)<br>*(полное и краткое наименование кафедры, реализующей дисциплину (модуль))* |
| Лектор | к.т.н., доцент Лебедев Владимир Владимирович<br>*(сокращенно – ученая степень, ученое звание; полностью – ФИО)* |

Используются в данной редакции с учебного года 2022/23
*(учебный год цифрами)*

Проверено и согласовано «____» ________20___г. ____________ ____________________
*(подпись директора Института/Филиала с расшифровкой)*

Москва 20__ г.

## Практическое занятие №5

**Тема**: Вероятностно-событийное и имитационное дискретно-событийное моделирование случайных процессов в дискретных стохастических системах с использованием схем конечных вероятностных автоматов

**Цель**: Изучить применение математических схем вероятностных автоматов (P-схем) для моделирования случайных процессов в системах

**Назначение**: Случайный процесс в системах можно представить как изменение их состояния. Математическая схема вероятностного автомата является моделью изучаемой системы. Вероятностные автоматы, таким образом, позволяют:

1. Формировать структуру пространства случайных событий в системе на конечном множестве состояний, и моделировать сценарии случайного поведения систем, а также динамики изменения статистики распределения состояний в пространстве модельного времени.
2. Исследовать эргодические свойства стохастических систем, определять финитные состояния стохастического процесса.

### Схема автомата

На рис. 1 изображен в качестве примера орграф вероятностного автомата, генерирующего (моделирующего) Марковскую цепь (последовательность – двоичный код) с вероятностью появления 1 в позициях $Z_2$ и $Z_3$ – 0,5652. Поскольку события, связанные с пребыванием системы в отдельных состояниях ($Z_0$, $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$, $Z_4$) являются несовместными, то сумма вероятностей пребывания системы в любой момент времени в одном из возможных состояний равна 1:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

### Описание элементов графа

Цифры около узлов графа, обозначающих состояния автомата, можно считать символами выходного алфавита, поэтому это вероятностный автомат

Мура. Если алфавит двоичный и включает символы 1 (автомат находится в данном состоянии) и 0 (автомат не находится в данном состоянии) то случайные последовательности 0 и 1 в каждой позиции выступают индикаторами состояния и показывают процесс их смены.

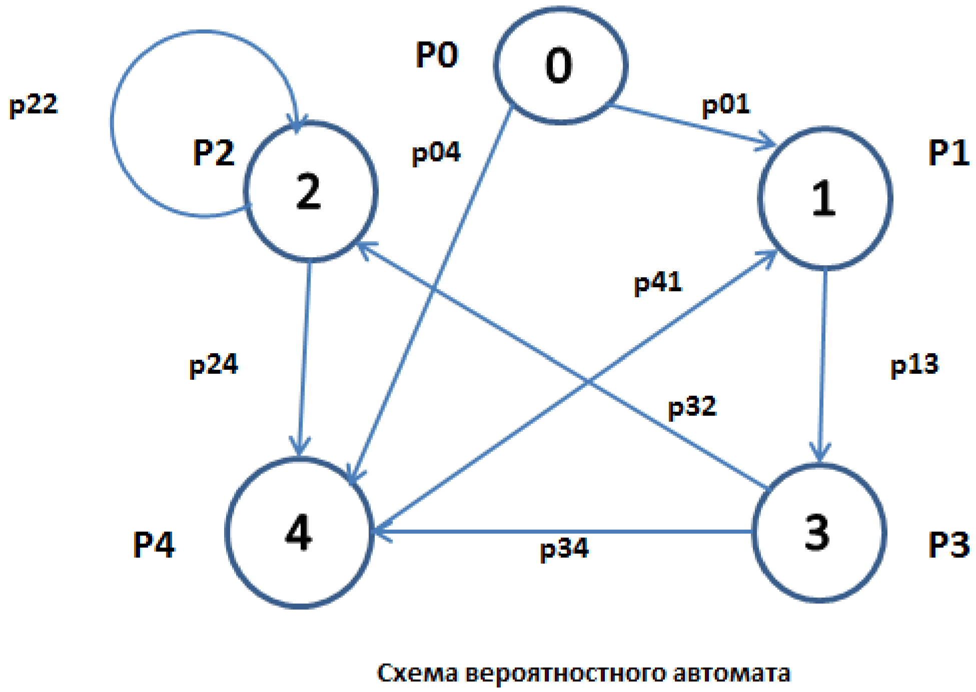



*Рисунок 1. Граф вероятностного автомата, генерирующего (моделирующего) Марковскую цепь (последовательность – двоичный код) с вероятностью появления 1 в позициях Z2 и Z3 – 0,5652*, если матрица значений условных вероятностей приведена ниже.

**Как функционирует автомат**

Работа автомата определяется схемой переходов на графе и матрицей переходных вероятностей:

$$p_Y = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}50 & 0 & 0 & 0{,}50 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}00 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0{,}40 & 0 & 0{,}60 \\ 0 & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

, где $p_{i,j}$ $i,j = 1,2,\ldots,N$;

$N$ – число состояний системы.

Номера строк и столбцов соответствуют номерам состояний системы.

Строки матрицы содержат вероятности переходов из состояния, соответствующего номеру строки в состояние, соответствующее номеру столбца, а столбцы содержат вероятности переходов в состояние, соответствующее номеру столбца, из состояний, соответствующих номеру строки. Сумма вероятностей переходов в строках матрицы равна 1, как полная вероятность суммы несовместных событий:

$$\sum_{j=0}^{j=N-1} p_{i,j} = 1$$

При работе вероятностного автомата в моменты модельного времени осуществляется смена состояний согласно вероятностному выбору. При каждом запуске автомата он проходит непредсказуемую заранее последовательность состояний. Многократные запуски вероятностного автомата позволяют **экспериментально оценивать частоту нахождения автомата в том или ином состоянии** на каждом шаге модельного времени.

**Статистику распределения** вероятности состояний на каждом шаге модельного времени **можно определять** и **теоретически**. Система уравнений Чэпмена-Колмогорова для вычисления вероятности состояний, сменяемых в результате переходов, имеет вид (цепь Маркова):

${P^k}_i = \sum_{j=0}^{j=N-1} p_{j,i} \cdot {P^{k-1}}_j$, где $k = 0,1,2,3,4,\ldots$ – моменты модельного времени, в которые запускаются переходы в системе из текущего состояния. При запуске перехода в системе происходят изменения, связанные с возможной сменой состояний в ней. Назовём переменные ${P^k}_i$ элементами вектора распределения вероятностей нахождения системы в состояниях, причём отдельный элемент ${P^k}_i$ обозначает вероятность нахождения системы на шаге модельного времени $k$ в состоянии $i = 1,2,\ldots,N$.

Это обосновывается общим правилом марковских схем: вероятность перехода в очередное состояние в данный момент модельного времени зависит только от вероятности нахождения в конкретном состоянии до перехода: если система находилась на шаге модельного времени $(k-1)$ в состоянии $I$ с вероятностью $P_I^{k-1}$, то вероятность попасть в состояние $J$ на шаге модельного времени $k$ будет равна: $P_J^k = p_{I,J} \cdot P_I^{k-1}$, где $p_{I,J}$ – условная вероятность перехода из $I$ – го состояния в $J$ – ое состояние (элемент матрицы условных вероятностей перехода: индекс $I$ обозначает номер строки, а индекс $J$ – номер столбца элемента). Для статистической оценки полной вероятности обнаружить систему на $(k-1)$ -ом шаге модельного времени в состоянии $J$ надо просуммировать все вероятности попадания системы в это состояние из всех возможных состояний на предыдущем шаге модельного времени: $P_J^k = \sum_{I=0}^{I=N-1} p_{I,J} \cdot P_I^{k-1}$, т.е. поэлементно умножить $J$ -ый столбец матрицы условных вероятностей перехода на элементы вектора распределения вероятностей нахождения системы в состояниях на $(k-1)$ -ом шаге модельного времени, а произведения сложить.

Узел графа “0” – соответствует начальному состоянию системы перед стартом.

Все **значения вероятностей состояний** после каждого перехода **вычисляются рекуррентно** по распределению вероятностей в предыдущем состоянии. Можно сказать, что состояние системы определяется между переходами распределением вероятностей.

Если автомат инициального типа, то работу он всегда начинает из начального 0-го состояния.

Наш автомат – инициальный. Начальное распределение вероятностей состояний (перед началом работы автомат находится в состоянии $Z_0$) задаётся вектор-столбцом:

$$P^0 = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Если стохастическая система, моделируемая вероятностным автоматом, имеет финитное состояние, при котором все переходы более не изменяют распределение вероятностей состояний, то такое состояние можно назвать статистически устойчивым или стабильным. Стохастические системы, находящиеся в этих состояниях, и процессы в них называют эргодическими.

Система, имеющая такое свойство, может перейти в финитное состояние после старта через какое-то количество переходов. В данной задаче количество переходов бесконечно, т.е. система асимптотически стремится к эргодическому состоянию.

**Смоделируйте несколько шагов** рекуррентных вычислений по описанному правилу (до $k = 7$).

Система уравнений для определения финитных вероятностей:

$P_0 = 0 \cdot (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$=0

$$P_1 = 0{,}50 \cdot P_0 + 1{,}00 \cdot P_4$$

$$P_2 = 0{,}75 \cdot P_2 + 0{,}40 \cdot P_3$$

$$P_3 = 1{,}00 \cdot P_1$$

$$P_4 = 0{,}50 \cdot P_0 + 0{,}25 \cdot P_2 + 0{,}60 \cdot P_3$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

Таким образом:

$$P_1 = 1{,}00 \cdot P_4$$

$$P_2 = 0{,}75 \cdot P_2 + 0{,}40 \cdot P_3$$

$$P_3 = 1{,}00 \cdot P_1$$

$$P_4 = 0{,}25 \cdot P_2 + 0{,}60 \cdot P_3$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$

получаем систему для вычисления финитных вероятностей. Обычно последним уравнением заменяют одно из уравнений переходов, а затем находят решение:

$$P_0 = 0$$

$$P_1 = 0{,}2174$$

$$P_2 = 0{,}3478$$

$$P_3 = 0{,}2174$$

$$P_4 = 0{,}2174$$

Сумма вероятностей пребывания системы в состояниях $Z_2$ и $Z_3$ равна:

$$P_2 + P_3 = 0{,}3478 + 0{,}2174 = 0{,}5652$$

**Решите систему самостоятельно**.

Для определения стационарных вероятностей аналитически нужно составить систему из $n$ алгебраических уравнений:

$P_i = \sum_j^n P_j * p_{ij},\ i = 1, n$

заменить в ней одно из уравнений следующим:

$$\sum_j^n \mathrm{Pj} = 1$$

решить полученную систему относительно $P_i$.

В левой части – вероятности финитных состояний, соответствующие рассматриваемым вершинам графа.

В правой части – сумма произведений, число слагаемых равно числу дуг. Слагаемое – произведение финитной вероятности того состояния, из которого выходит дуга, на вероятность соответствующего перехода.

Схема алгоритма рекуррентного вычисления векторов распределения вероятностей состояний по методу Чэпмена-Колмогорова для автомата с 5-ью состояниями показана на рис. 2. Она также позволяет представить схему получения системы уравнений для вычисления финитных вероятностей асимптотического эргодического процесса автомата.

Рекуррентная процедура вычисления вектора распределения вероятностей состояний на следующем шаге автоматного времени по методу Чэпмена-Колмогорова по схеме на рис. 2 работает следующим образом: строки столбца вектора распределения получаются поэлементным умножением и сложением попарных произведений элементов столбцов матрицы условных вероятностей (МУВП) и вектора распределения вероятностей (ВРВ) на предыдущем шаге.

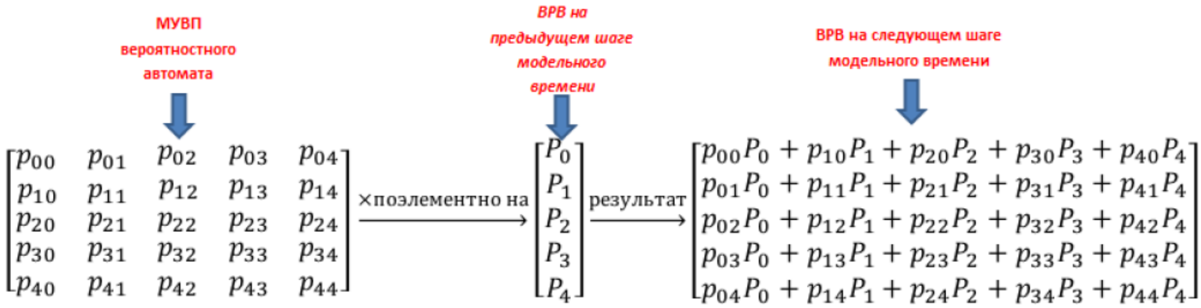



*Рисунок 2. Схема вычислений*

Таблицу векторов распределения вероятностей состояний (ВРВ) моделируем, вычисляя каждый столбец таблицы в определённый момент автоматного времени рекуррентно по уравнениям Чэпмена-Колмогорова ${P^k}_i = \sum_{j=0}^{j=N-1} p_{j,i} \cdot {P^{k-1}}_j$, где $k = 0,1,2,3,4, \ldots$:

$$P(N,m) = \begin{bmatrix} P_0^0 & P_0^1 & P_0^2 & \ldots & P_0^m \\ P_1^0 & P_1^1 & P_1^2 & \ldots & P_1^m \\ P_2^0 & P_2^1 & P_2^2 & \ldots & P_2^m \\ P_3^0 & P_3^1 & P_3^2 & \ldots & P_3^m \\ P_4^0 & P_4^1 & P_4^2 & \ldots & P_4^m \end{bmatrix}$$

$P(N,m)$ – элемент таблицы, где $N$ – номер состояния вероятностного автомата, $m$ – значение модельного времени, определяющее порядковый номер переходов в автомате.

Вычисления можно выполнить согласно схеме на рис. 2, используя матричные операции табличного процессора или по программе.

Алгоритм программной процедуры Чэпмена-Колмогорова рекуррентного расчета распределения вероятности состояний автомата представлен на рис. 3.

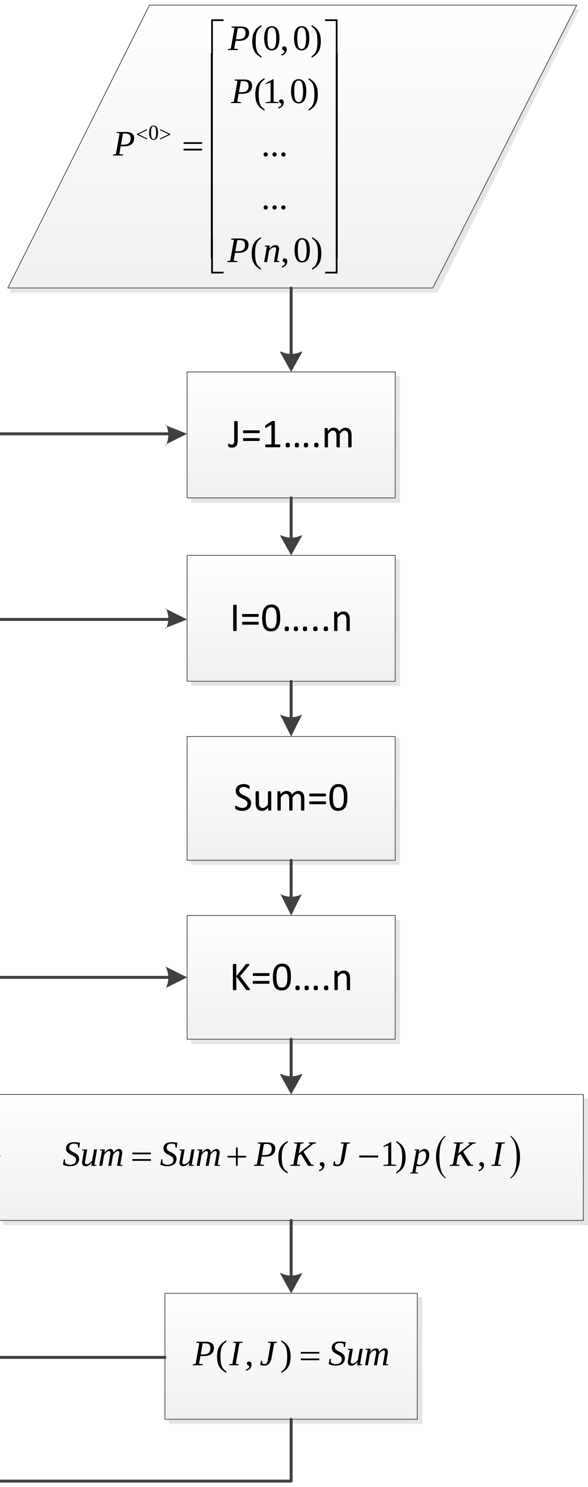



*Рисунок 3. Алгоритм рекуррентного расчета статистики состояний*

Пример текста программы см. на рис. 4. В процедуре рекуррентного расчёта начальный вектор ВРВ задан, исходя из условия, что автомат инициальный, и начинает работу из состояния 0.

Если промоделировать векторы распределения состояний на каждом шаге модельного времени, начиная с инициального состояния на достаточно большой последовательности шагов, то можно увидеть тенденцию к стабилизации значений вероятностей в ВРВ. Следовательно, наблюдать асимптотическую сходимость к эргодическому процессу можно, сравнивая между собой значения вероятности в соседних столбцах.

```
Sub Ch_Kolm_()
 Dim P(5, 5) As Single, PP() As Single
 m = Cells(8, 1)
 ReDim PP(5, m)
 For I = 0 To 4
    For J = 0 To 4
        P(I, J) = Cells(3 + I, 3 + J)
        Cells(16 + I, 1 + J) = P(I, J)
    Next J
 Next I
 For I = 0 To 4
    PP(I, 0) = Cells(10 + I, 2)
 Next I
 ' Моделирование распределения вероятностей состояний на шагах модельного времени
 ' по алгебраическим рекуррентным уравнениям Чэпмена-Колмогорова
  For J = 0 To m - 1
   For I = 0 To 4
    Sum = 0
        For K = 0 To 4
            Sum = Sum + PP(K, J) * P(K, I)
        Next K
    PP(I, J + 1) = Sum
    Next I
   Next J
   'вывод результатов моделирования
   For T = 0 To m
    For I = 0 To 4
        Cells(23 + T, 1) = T
        Cells(23 + T, 2 + I) = PP(I, T)
    Next I
   Next T
End Sub
```

*Рисунок 4. Текст программы рекуррентной процедуры Чэпмена-Колмогорова*

При достаточно большом количестве шагов $k$ наступает стационарный режим, при котором $P_i(k)$ становятся независимыми от времени и равны $P_i$. Вектор $(P_i)_n$ – вектор финитных вероятностей. До наступления стационарного режима имеет место переходный режим, длительность которого можно определить, задавшись величиной отклонения $\Delta_i = |P_i - P_i(k)|$, если $\Delta_i < \Delta_{доп}$ – условие наступления стационарного процесса ($\Delta_{доп}$ – величина допустимой ошибки). Если это условие достижимо, то процесс асимптотически сходится к финитному состоянию, а случайный процесс смены состояний дискретной стохастической системы становится стационарным эргодическим.

Каждая компонента $P_i$ вектора финитного распределения вероятностей в эргодическом процессе характеризует среднюю долю времени процесса, в течение которого система находится в состоянии $S_i$.

Условием эргодичности однородной Марковской цепи является то, что все ее состояния являются сообщающимися, а граф системы сильно связан (возможен переход $S_iS_j$ за конечное число шагов).

Система уравнений для определения финитных вероятностей может быть получена по схеме, представленной на рис. 2, путём приравнивания элементов ВРВ с предыдущего шага (средний столбец) и строк ВРВ на следующем шаге (правый столбец).

Схема матричной процедуры решения системы уравнений для определения финитных вероятностей изображена в общем виде для задачи данной размерности представлена на рис. 5.

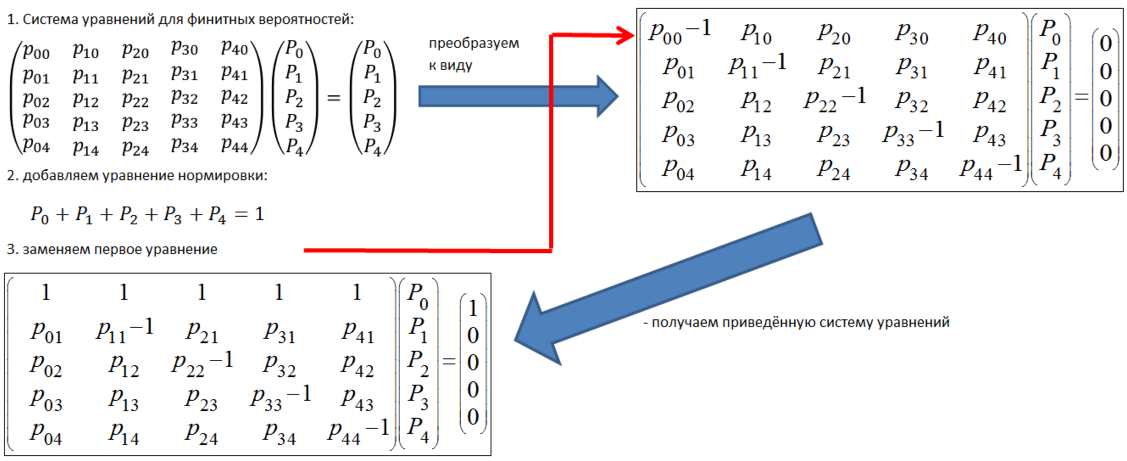



*Рисунок 5. Схема получения системы уравнений для определения финитных вероятностей*

Для реализации матричной процедуры решения исходную матрицу условных вероятностей надо транспонировать. Это будет матрица исходной системы уравнений. Затем преобразуем систему, вычитая левый столбец поэлементно из обоих частей системы. Затем заменим первое уравнение системы на уравнение нормирования $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$. Получим окончательно систему уравнений, решение которой – финитные вероятности.

Пример решения.

Аналитическое определение финитных вероятностей модели, рис. 1.

1. Исходная матрица условных вероятностей:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 0,5 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0,75 | 0 | 0,25 |
| 3 | 0 | 0 | 0,4 | 0 | 0,6 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

2. Транспонированная матрица - исходная матрица системы:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0,75 | 0,4 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0,5 | 0 | 0,25 | 0,6 | 0 |

3. Преобразованная матрица для решения системы:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0,5 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | -0,25 | 0,4 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| 4 | 0,5 | 0 | 0,25 | 0,6 | -1 |

4. Вектор свободных членов системы:

| 0 | 1 |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 0 |
| 4 | 0 |

5. Обратная матрица системы (вычисление обратной матрицы выполнено на табличном процессоре):

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0,217 | -0,326 | 0,761 | 0,457 | -0,109 |
| 2 | 0,348 | -0,522 | -2,783 | -0,870 | -0,174 |
| 3 | 0,217 | -0,326 | 0,761 | -0,543 | -0,109 |
| 4 | 0,217 | 0,174 | 0,261 | -0,043 | -0,609 |

Решение – вектор финитных вероятностей получается матричным умножением обратной матрицы системы на вектор свободных членов.

6. Решение – вектор финитных вероятностей состояний:

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0,2174 |
| 2 | 0,3478 |
| 3 | 0,2174 |
| 4 | 0,2174 |

**Имитационное моделирование случайного процесса в дискретной стохастической системе**

**Схему** вероятностного автомата **можно применять** для **имитационного моделирования** поведения дискретных **стохастических** систем и случайных процессов в них.

В целях имитации развития случайного процесса переходов в системе, сопряженных со сменой ее состояний, необходимо применить алгоритм определения случайного выбора направления перехода в каждом очередном состоянии на каждом предстоящем шаге. Этот выбор производится на дискретном распределении состояний, заданных в строке матрицы условных вероятностей перехода из заданного состояния. Имитацию случайных исходов по дискретным распределениям мы осуществляем с помощью **выбора по жребию**.

Применим **метод розыгрыша жребия**. Используем **генератор случайных чисел** $X \in [0,1] \subset R$, **распределенных по равномерному закону** (ГПСЧ), для случайного розыгрыша направления перехода по разметке отрезка [0;1]. Если на очередном шаге автоматного времени система находится в $i$-ом состоянии, то для случайного розыгрыша направления следующего перехода методом розыгрыша жребия мы используем $i$-ую строку матрицы переходных вероятностей для разметки отрезка [0;1]. Поскольку сумма вероятностей перехода из каждого состояния $i$ в другие равна 1 ($\sum_{j=0}^{j=N-1} p_{i,j} = 1$, т.е. сумма значений в строке), то разделим отрезок $[0,1]$ на отрезки, равные $p_{i,j}$, и разыграем направление следующего перехода на этой разметке, используя полученное значение $x$ ГПСЧ, по правилу:

$$\forall x \in X$$

$\forall x \in [0, p_{i,0}) \Rightarrow$ переход $i \longrightarrow 0$;

$\forall x \in \left[p_{i,0}, \left(p_{i,0} + p_{i,1}\right)\right) \Rightarrow$ переход $i \longrightarrow 1$;

$\forall x \in \left[\left(p_{i,0} + p_{i,1}\right), \left(p_{i,0} + p_{i,1} + p_{i,2}\right)\right) \Rightarrow$ переход $i \longrightarrow 2$;

…

$\forall x \in \left[\left(p_{i,0} + p_{i,1} + \dots + p_{i,N-3}\right), \left(p_{i,0} + p_{i,1} + \dots + p_{i,N-2}\right)\right) \Rightarrow$ переход $i \longrightarrow (N-2)$;

$\forall x \in \left[\left(p_{i,0} + p_{i,1} + \dots + p_{i,N-2}\right), \left(p_{i,0} + p_{i,1} + \dots + p_{i,N-1}\right)\right] \Rightarrow$ переход $i \longrightarrow (N-1)$;

, что эквивалентно более компактной записи:

$\forall x \in \left[\sum_{j=0}^{j=K-1} p_{i,j}, \sum_{j=0}^{j=K} p_{i,j}\right) || (K \in [1,2,3, \dots, (N-1)] \wedge K \neq (N-1)) \Rightarrow$ переход $i \longrightarrow K$;

$\forall x \in \left[\sum_{j=0}^{j=K-1} p_{i,j}, \sum_{j=0}^{j=K} p_{i,j}\right] || (K \in [1,2,3, \dots, (N-1)] \wedge K = (N-1)) \Rightarrow$ переход $i \longrightarrow (N-1)$;

Фиксируем новое состояние после перехода, которое будет стартовым для следующего перехода.

Процедура моделирования траектории продвижения автомата по состояниям на переходах в моменты автоматного времени $(t = 0,1,2,3, \dots, m, \dots)$ также имеет рекуррентный характер.

Используя, предложенное правило, можно организовать проигрывание поведения системы в пространстве автоматного времени $(t = 0,1,2,3, \dots, m, \dots)$, реализуя численно единичный сценарий поведения системы.

Метод позволяет разработать имитационную модель случайного процесса работы вероятностного автомата. Модель определяет, таким образом, индивидуальную траекторию продвижения дискретной стохастической системы в пространстве состояний. Продвижение строится, начиная с начального состояния, в соответствии со шкалой модельного времени (шагами).

Многократный прогон модели, позволяющий получать различные единичные траектории, нарабатывать статистику пребывания дискретной стохастической системы в состояниях на различных шагах автоматного времени (сечениях времени процесса), называется методом статистических испытаний (или методом Монте-Карло).

Текст программы имитационной модели построения единичной траектории случайного процесса продвижения вероятностного автомата по состояниям представлен на рис. 6.

```
Sub Traectory_()
Dim Tr(), P(0 To 4, 0 To 4), R1()
' Имитационное моделирование продвижения системы по состояниям
T = 100
ReDim Tr(0 To T), R1(0 To T)
For I = 0 To 4
    For J = 0 To 4
        P(I, J) = Cells(3 + I, 3 + J)
        Cells(16 + I, 7 + J) = P(I, J)
    Next J
Next I
Tr(0) = 0
R1(0) = 1
For J = 1 To T
    Randomize
    R1(J) = Rnd()
'Динамическая разметка для розыгрыша жребием
    S1 = 0
    For I = 0 To 4
        S2 = S1 + P(Tr(J - 1), I)
        If R1(J) >= S1 And R1(J) < S2 Then
            Tr(J) = I
        End If
        S1 = S1 + P(Tr(J - 1), I)
    Next I
Next J
' Вывод результатов расчёта
For J = 0 To T
    Cells(23 + J, 11) = J
    Cells(23 + J, 12) = R1(J)
    Cells(23 + J, 13) = Tr(J)
Next J
End Sub
```

*Рисунок 6. Текст программы имитационного моделирования продвижения автомата по состояниям*

В силу стохастического характера процесса выполнения единичного сценария при каждом повторном запуске уникальна будет траектория продвижения агента по состояниям, см. рис. 7.

Рассмотренный пример также показывает, что оценку вероятностей нахождения стохастической системы в состояниях можно получить как вероятностно-событийным моделированием (метод Чэпмена-Колмогорова), так и событийно-вероятностным имитационным моделированием (метод статистических испытаний).

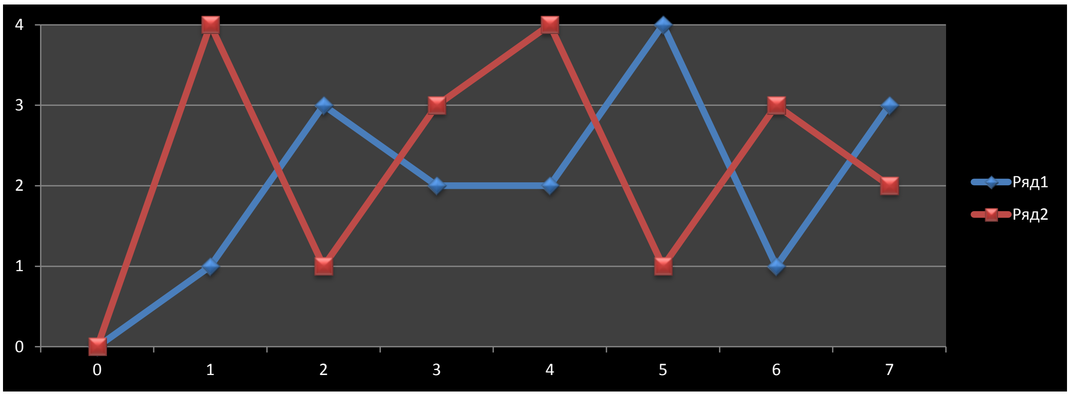



*Рисунок 7. Возможные случайные траектории продвижения системы по состояниям*

**Задание**

1. Смоделировать алгоритм численной процедуры имитации продвижения агента в пространстве состояний системы на протяжении заданного конечного числа $M$ шагов на шкале автоматного времени $t = 0,1,2,3, \dots, m, \dots, M-1, M$.
2. Разработать программу численной процедуры на ЭВМ.
3. Смоделировать по программе траекторию движения агента в пространстве состояний методом имитационного моделирования.
4. Определить последовательность меняющегося от состояния к состоянию двоичного кода, который соответствует вектору состояний, характеризуемых их индикаторными значениями.
5. Разработать программу рекуррентной процедуры Чэпмена-Колмогорова расчёта распределений вероятностей состояний. Составить таблицу векторов распределения вероятностей состояний на каждом шаге автоматного времени в дискретном процессе смены состояний системы.
6. Рассчитать значения вероятностей финитного состояния (при наличии такового у модели системы).

7. Разметить граф состояний автомата (для разметки взять схему из таблицы 1 пособия)

8. Составить отчет, который должен включать:

- описание задачи;
- описание алгоритма;
- описание программы расчета;
- график смены состояний (траекторию продвижения агента) при реализации имитационной модели на ЭВМ;
- матрицу векторов распределения состояний в моменты автоматного времени;
- вероятности финитного состояния.

Варианты схем конечных вероятностных автоматов для выполнения расчётных заданий, приведены в таблице 2.

Пример результатов моделирования.

Смоделирована таблица векторов распределений вероятностей состояний системы на 20-ти шагах автоматного времени:

| PP= | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ----- | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ------ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,3 | 0,35 | 0,0875 | 0,245 | ------ | 0,240 | 0,198 | 0,217 | 0,230192 | 0,207 | 0,216 | 0,224 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0,2 | 0,35 | 0,262 | 0,316 | 0,377 | ------ | 0,341 | 0,344 | 0,354 | 0,344973 | 0,345 | 0,351 | 0,346 |
| 3 | 0 | 0 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0,3 | 0,35 | 0,087 | ------ | 0,219 | 0,240 | 0,198 | 0,217415 | 0,230 | 0,207 | 0,216 |
| 4 | 0 | 0,5 | 0 | 0,3 | 0,35 | 0,087 | 0,245 | 0,289 | ------ | 0,198 | 0,217 | 0,230 | 0,207419 | 0,216 | 0,224 | 0,212 |

По таблице построены графики изменения вероятностей состояний с течением автоматного времени, см. рис. 8.

Динамика вероятностного процесса, показанная на рис. 8, выявляет его асимптотическую сходимость к эргодическому процессу.

Смоделированы методом имитационного моделирования траектории прохождения автоматом состояний. Результат, т.е. графики 4-ех траекторий, показан на рис. 9.

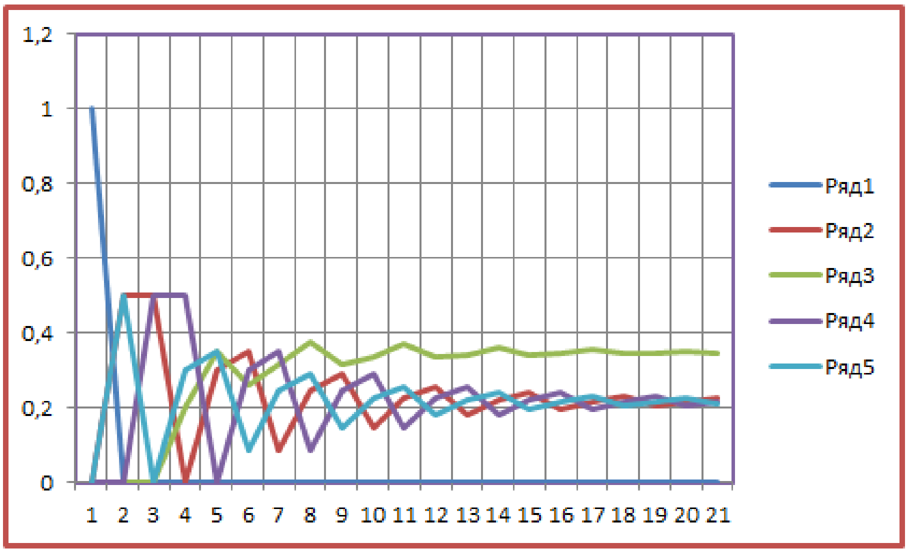



*Рисунок 8. Динамика изменения вероятностей состояний в процессе*

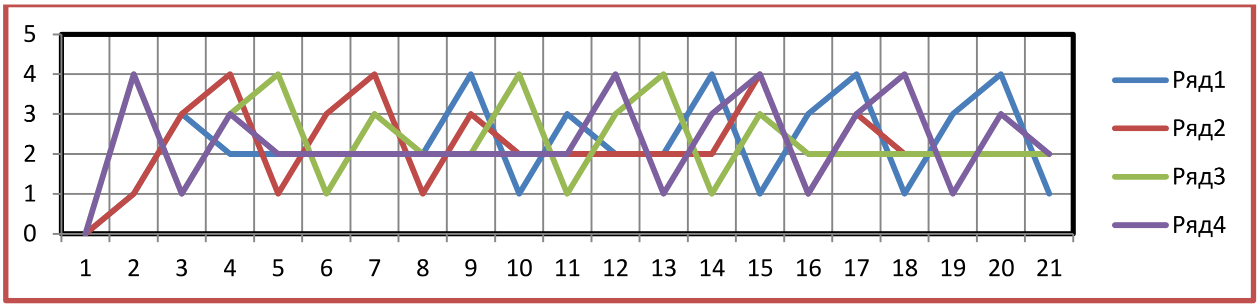



*Рисунок 9. Траектории случайного процесса продвижения системы по состояниям*

Статистика появления системы в состояниях на шагах автоматного времени, получаемая при статистическом испытании имитационной модели сходится к распределению вероятностей при неограниченном количестве прогонов модели.

Рассмотрим пример матричной процедуры рекуррентного расчёта методом Чэпмена-Колмогорова.

Предположим, некая дискретная стохастическая система представлена моделью вероятностного автомата (Р-схемой), орграф которой мы видим на рис. 10.

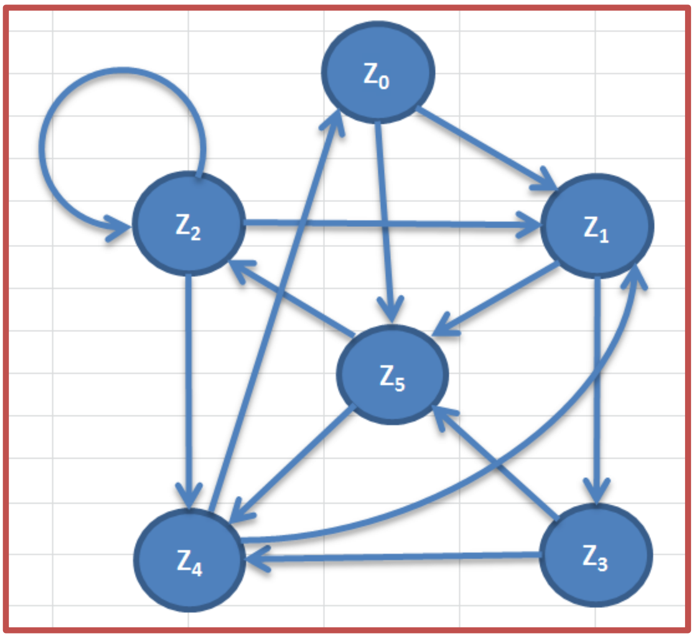



*Рисунок 10. Орграф модели вероятностного автомата*

Орграф модели есть вероятностный автомат Мура со случайными переходами.

Функция переходов автомата задана матрицей условных вероятностей перехода. Показан пример разметки матрицы:

матрица условных вероятностей перехода

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0,5 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 |
| 2 | 0 | 0,33 | 0,33 | 0 | 0,34 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 0,5 |
| 4 | 0,5 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0 |

Матричная процедура расчёта включает в себя следующий порядок.

Транспонируем матрицу:

транспонированная матрица

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0,5 | 0 |
| 0,5 | 0 | 0,33 | 0 | 0,5 | 0 |
| 0 | 0 | 0,33 | 0 | 0 | 0,5 |
| 0 | 0,5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0,34 | 0,5 | 0 | 0,5 |
| 0,5 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0 | 0 |

Умножаем транспонированную матрицу на столбцы вектора распределения состояний до момента очередного перехода по автоматному времени рекурсивно: следующий столбец есть результат умножения на предыдущий столбец. Первый столбец вектора распределения, на нулевом шаге автоматного времени, задаётся как начальное значение рекуррентного процесса.

Таблица ниже – это результат 12-шаговой рекуррентной процедуры расчёта по уравнениям Чэпмена-Колмогорова:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0,125 | 0,167 | 0,066 | 0,089 | 0,130 | 0,106 | 0,092 | 0,109 | 0,111 | 0,101 |
| 2 | 0 | 0,5 | 0 | 0,207 | 0,298 | 0,193 | 0,164 | 0,235 | 0,225 | 0,192 | 0,208 | 0,220 | 0,208 |
| 3 | 0 | 0 | 0,25 | 0,207 | 0,130 | 0,126 | 0,184 | 0,163 | 0,141 | 0,158 | 0,164 | 0,153 | 0,154 |
| 4 | 0 | 0 | 0,25 | 0 | 0,103 | 0,149 | 0,096 | 0,082 | 0,117 | 0,112 | 0,096 | 0,104 | 0,110 |
| 5 | 0 | 0 | 0,25 | 0,335 | 0,133 | 0,179 | 0,260 | 0,213 | 0,184 | 0,219 | 0,222 | 0,203 | 0,207 |
| 6 | 0 | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,166 | 0,284 | 0,204 | 0,175 | 0,224 | 0,224 | 0,198 | 0,206 | 0,218 |

Схема процедуры представлена на рис. 11.

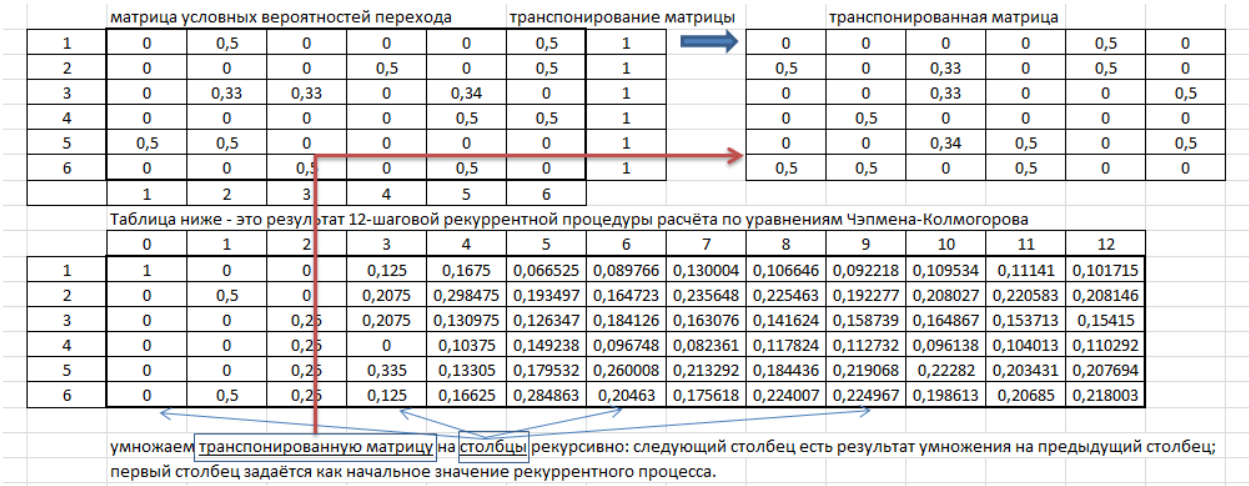



*Рисунок 11. Схема матричной процедуры Чэпмена-Колмогорова*

График динамики изменения распределения вероятностей состояний конечного вероятностного автомата Мура, схема которого – на рис. 10, мы видим на рис. 12.

Ход процесса на рис. 12 свидетельствует об его асимптотической сходимости к стационарному эргодическому виду.

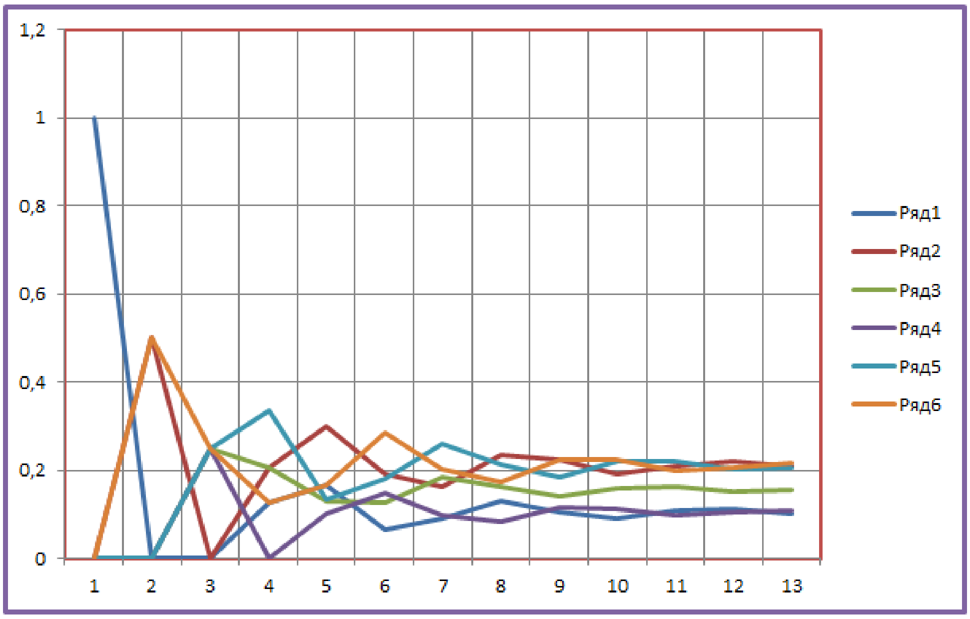
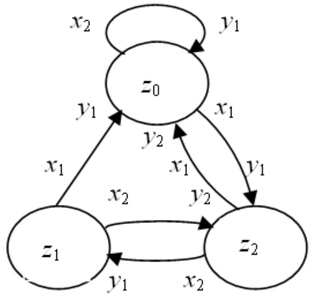
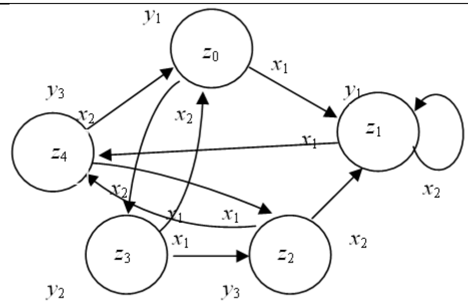
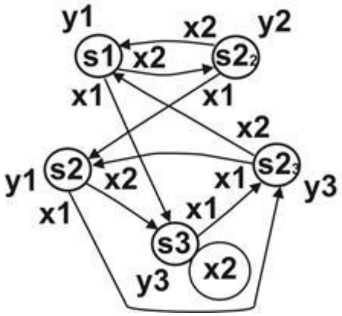
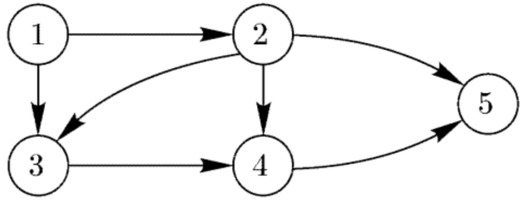
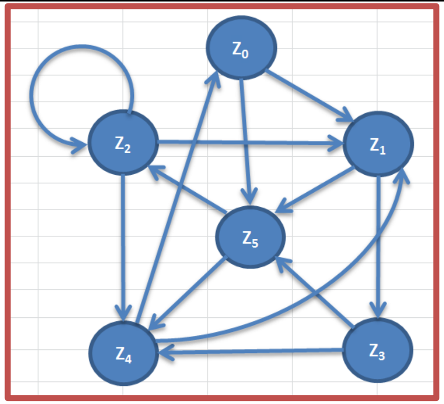
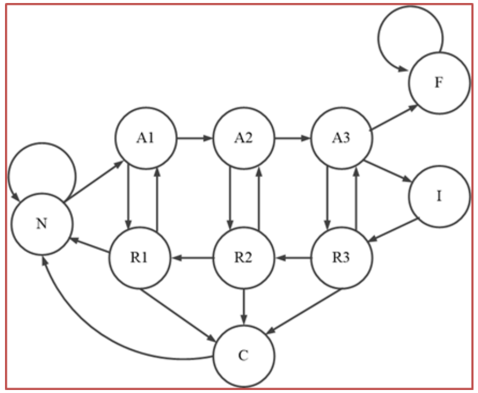



*Рисунок 12. Динамика изменения вероятностей состояний в процессе*

При рассмотрении схем марковских моделей, представленных ниже в таблице 2, найдите схемы неэргодических систем, которые нельзя отнести в полной мере к схемам конечных вероятностных автоматов, которые имеют финитные распределения вероятностей. Процесс в таких схемах не останавливается в каком-либо состоянии и асимптотически сходится к эргодическому виду.

**Таблица 2 Варианты схем конечных вероятностных автоматов для выполнения расчётных заданий**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 |  | 2 |  |
| 3 |  | 4 |  |
| 5 |  | 6 |  |

## Вопросы для самоконтроля:

1. Объясните принципы имитационного моделирования.

2. Опишите алгоритм имитационного моделирования дискретно распределённых случайных чисел. Приведите пример реализации метода «жребия».

3. Опишите алгоритм имитационного моделирования непрерывно распределённых случайных методом обратных функций.

4. Опишите алгоритм моделирования непрерывно распределённых случайных чисел методом усечения Неймана.

5. Опишите алгоритм имитационного моделирования непрерывно распределённых случайных чисел методом ступенчатой аппроксимации по гистограмме функции.

6. Алгоритм ЦПТ имитационного моделирования нормально распределенных чисел.

7. Алгоритм Бокса-Мюллера имитационного моделирования нормально-распределённых чисел.

8. Дайте определение формулы случайного процесса.

9. Что такое нормальное распределение?

10. Определение стационарного и нестационарного случайного процесса.

11. Эргодические и неэргодические процессы.

12. Прогнозное имитационное моделирование.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорошенко А.Н. Математическое и имитационное моделирование дискретных процессов и систем [Электронный ресурс]: учебное пособие /А. Н. Дорошенко. — М.: МИРЭА, 2018. — 151 с. Электрон, опт. диск (ISO)
2. В.В. Лозовецкий. Защита автоматизированных систем обработки информации и телекоммуникационных сетей: учебное пособие для вузов/ В.В. Лозовецкий, Е.Г. Комаров, В.В. Лебедев; под редакцией В.В. Лозовецкого. – Санкт-Петербург: Лань, 2023, -448 с: ил. – Текст: непосредственный.
3. Ермакова А.Ю. Моделирование автоматизированных систем в защищённом исполнении [Электронный ресурс]: Учебное пособие, ч.1./ Ермакова А.Ю., Лебедев В.В. — М.: МИРЭА – Российский технологический университет, 2024. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM)..
4. Пестриков В.М., Дудкин В.С., Петров Г.А.. Дискретная математика./Уч. пос.. – СПб.: СПб ГТУРП, 2013.- 136 с.
5. Гельгор А.Л., Горлов А.И., Попов Е.А.. Методы моделирования случайных величин и случайных процессов: уч. пос. – СПб.: Изд-во ПГПУ, 2012. — 217 с.
6. Васильев К.К., Служивый М.Н. Математическое моделирование систем связи: учеб, пособие. — УлГТУ, 2008 — 168 с.
7. Карпов Ю.Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. — СПб.: БХВ - Петербург, 2006. — 400 с.
8. Полянский Д.И. Оценка защищённости./Уч. пос. – Владимир: изд-во Владим. гос. ун-та, 2005. – 80 с.
9. Шмидт Б. Введение в имитационное моделирование в системе Simplex3 / пер. с нем. Ю.А. Ивашкина. — М.: Наука, 2003. — 30 с.
10. Шмидт Б. Искусство моделирования и имитации. Введение в имитационную систему Simplex3 : пер. с нем.: SCS-Европа BVBA, Гент. Бельгия. 2003. — 550 с.

11. Харин Ю.С. и др. Основы имитационного и статистического моделирования. Учебное пособие – Мн.: Дизайн ПРО, 1997. – 288 с.
12. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем - искусство и наука: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978.