ЗНАКОПОСТОЯННЫЕ РЯДЫ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Необходимый признак сходимости:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие: *Если* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд расх-ся.*

Достаточные признаки сходимости:

1. **Признак сравнения.**

Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *справедливо неравенство* $a_n \le b_n$, *то*

1) если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сх-ся, значит и* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сх-ся;*

2) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расх-ся, значит и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *расх.*

2. **Предельный признак сравнения**.

Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сущест-вует* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, $L \neq 0, L \neq \infty$, *то ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сх-ся или расх-ся одновременно.*

3. **Признак Д\`Аламбера**

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$. *Тогда:*

1) *если k<1, то ряд сходится;*
2) *если k>1, то ряд расходится;*
3) *если k=1 –?.*

4. **Признак Коши**

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$. *Тогда:*

1) если k<1, то ряд сходится;
2) если k>1, то ряд расходится;
3) если k=1 –?.

5. **Интегральный признак Коши**

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *имеют вид* $a_n = f(n)$, *где f(n) – интегрируемая на промежутке* $[1;+\infty)$ *функция, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *сх-ся или расх-ся одновременно.*

Основные ряды, выбираемые для сравнения:

I. *Гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *– расходится*

Ia. *Ряд Дирихле (обобщенный гармонический ряд)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Он сх-ся при p>1 и расх-ся при $p \le 1$.

II. *Геометрическая прогрессия* $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Он сх-ся при q<1 и расх-ся при $q \ge 1$.

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

– сходится абсолютно;
– сходится условно;
– расходится.

Признак Лейбница

Если все члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *удовлетворяют условиям:*

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *(предел n-го члена ряда равен 0);*

2) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots$ *(последовательность членов ряда монотонно убывает),*

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *сходится.*

Разложения в ряд Маклорена

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $-\infty < x < +\infty$;

2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $-\infty < x < +\infty$;

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $-\infty < x < +\infty$;

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$;

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$,;