МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

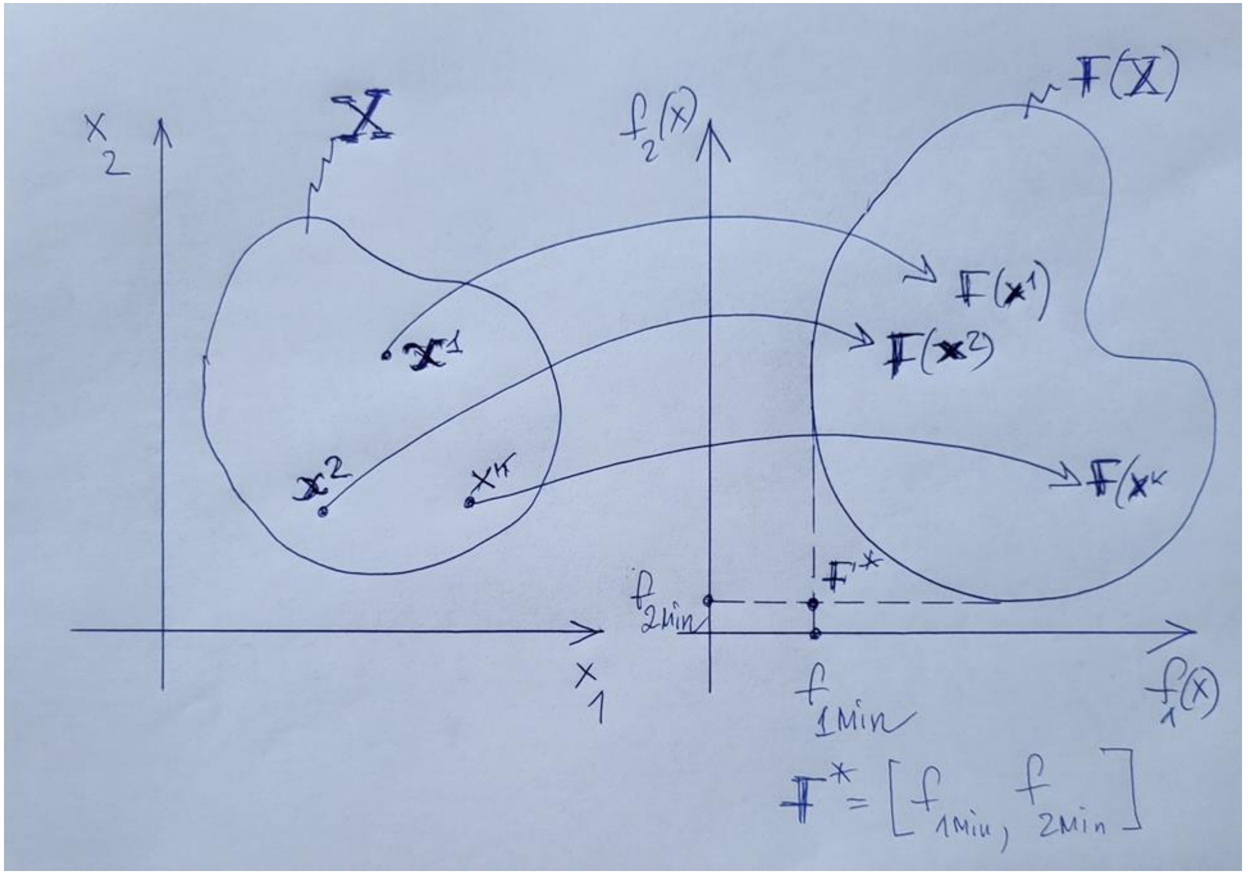
Постановка многокритериальной аналитической задачи:

$$\Gamma = \left\langle \mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{x}), \wp \right\rangle. \qquad (2)$$

$\mathbf{X}$ - множество допустимых решений $\mathbf{x}$;
$\mathbf{F}(\mathbf{x})$ - векторный критерий эффективности допустимого решения $\mathbf{x}$; $\wp$ - бинарное отношение сравнительной эффективности допустимых решений, порожденное векторным критерием $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Бинарное отношение $\wp$ является отношением строгого предпочтения.

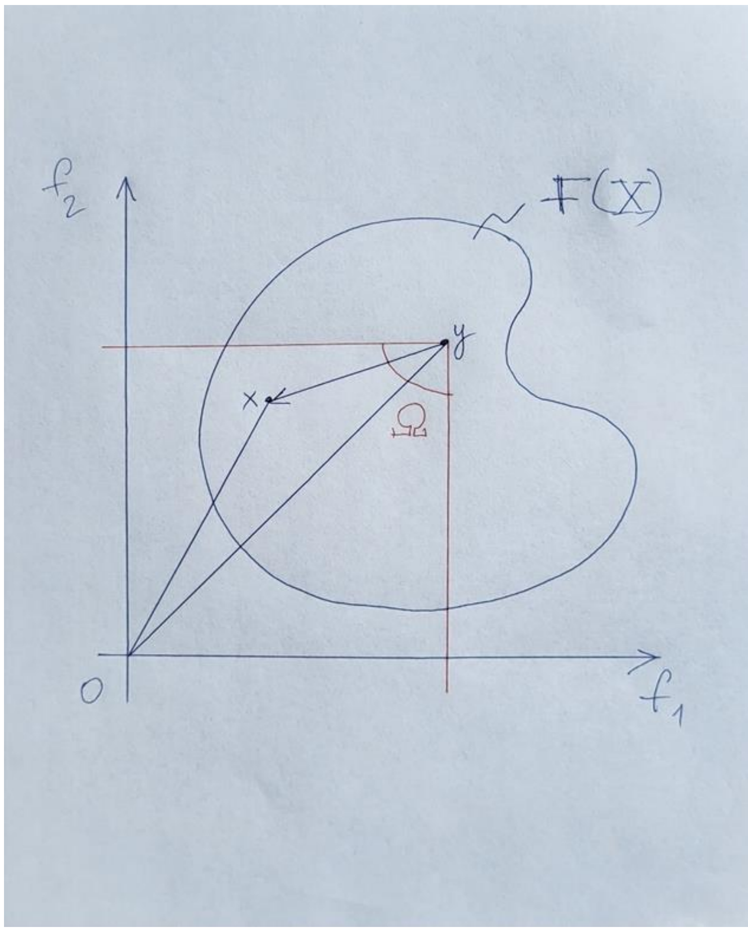
Особенность многокритериальной аналитической задачи



$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \bigcup\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ - множество достижимых векторных оценок.

Принцип оптимальности по Парето

Бинарное отношение строгого предпочтения:



$$\mathbf{x} \wp \mathbf{y} \;\Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{F}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} f_i(\mathbf{x}) \leqq f_i(\mathbf{y}),\; i = \overline{1, m}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{F}(\mathbf{y}). \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathbf{x} \wp \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y}) \in \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E}^m_{\leqq} \setminus \mathbf{0}^m \tag{4}$$

Принцип оптимальности по Парето

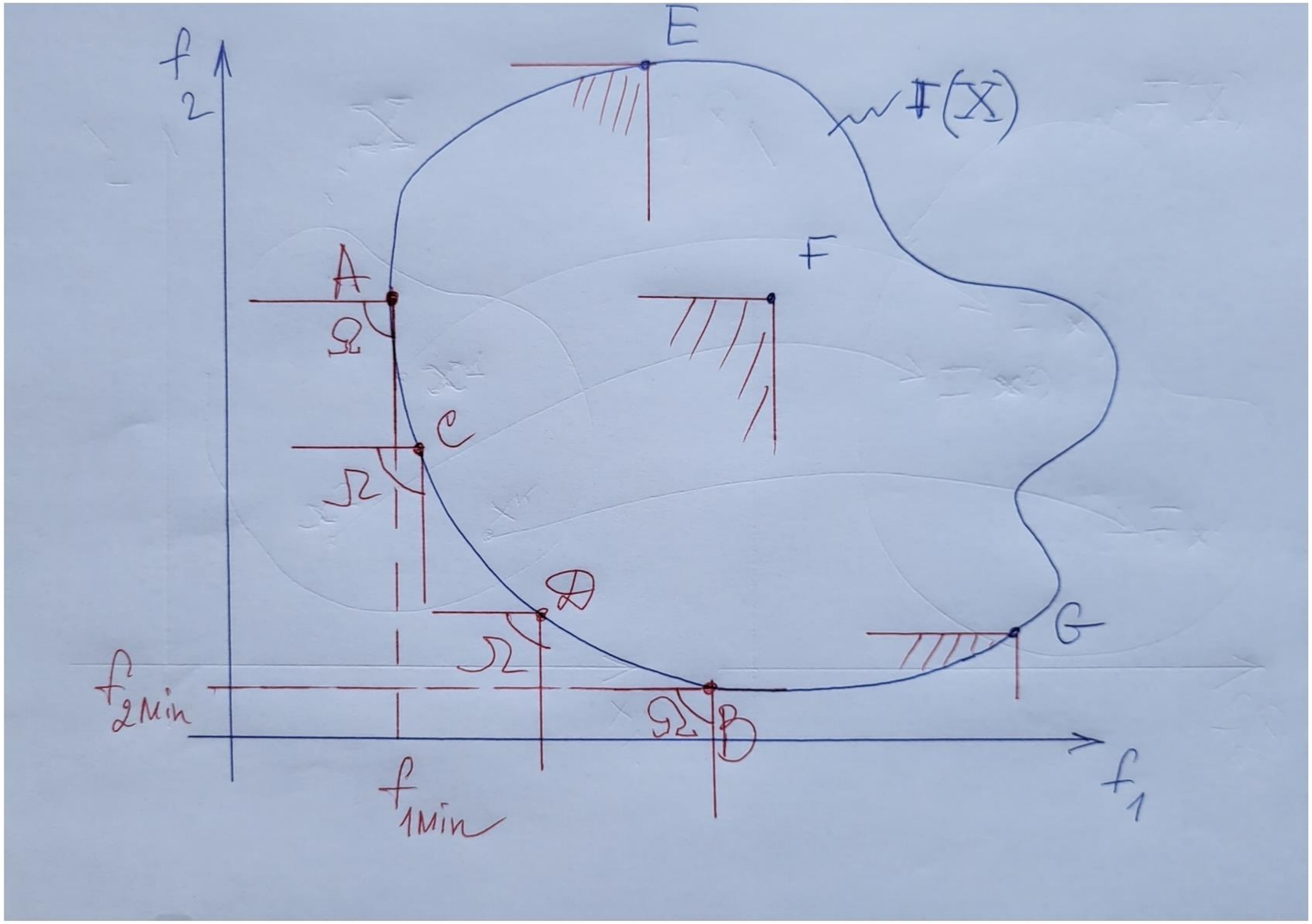
Определение 1. Допустимое решение $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ является оптимальным по Парето (недоминируемым по Парето, эффективным, оптимальным относительно конуса доминирования $\mathbf{\Omega}$), если на множестве $\mathbf{X}$ не существует решения $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}^*$, удовлетворяющего системе неравенств $f_i(\mathbf{x}) \leqq f_i(\mathbf{y}),\ i = \overline{1, m}$, где хотя бы одно неравенство строгое.

Определение 2. Допустимое решение $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ называется оптимальным по Парето, если для любого допустимого решения $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ имеет место

$$\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^*\right)\right) \notin \mathbf{\Omega}.$$

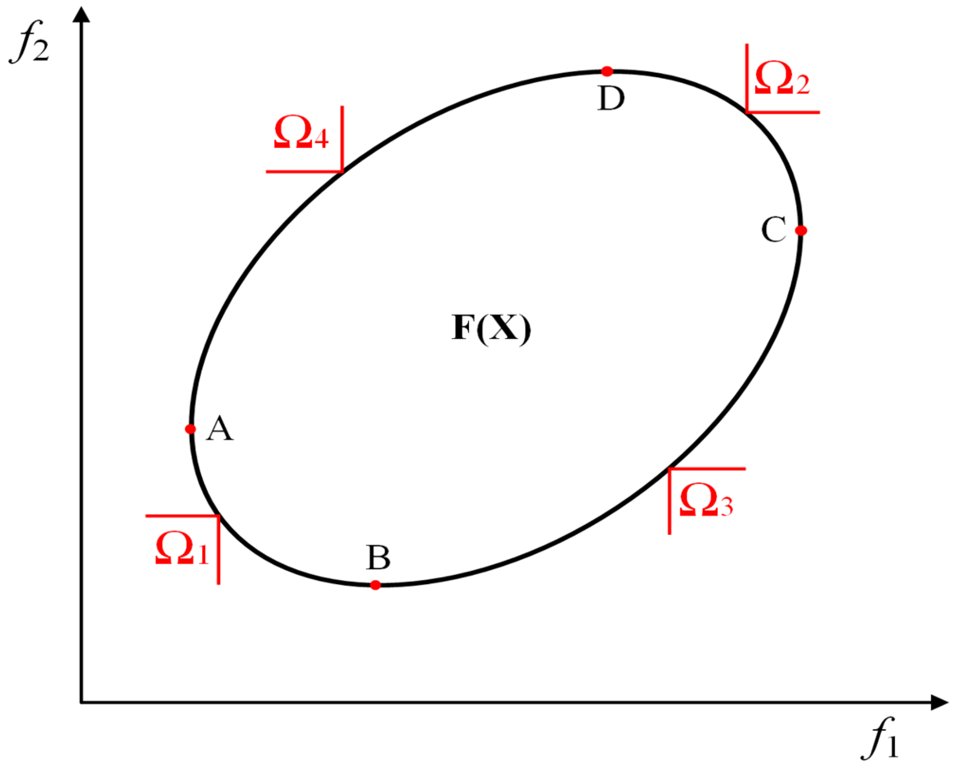
Геометрическая интерпретация

множество Парето $\mathbf{F}_P(\mathbf{X}) = \cup \mathrm{AB}$



Примеры

Пример 1. Множество достижимых векторных оценок $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ в многокритериальной аналитической задаче имеет вид:



Построить множество Парето-оптимальных решений для следующих случаев.

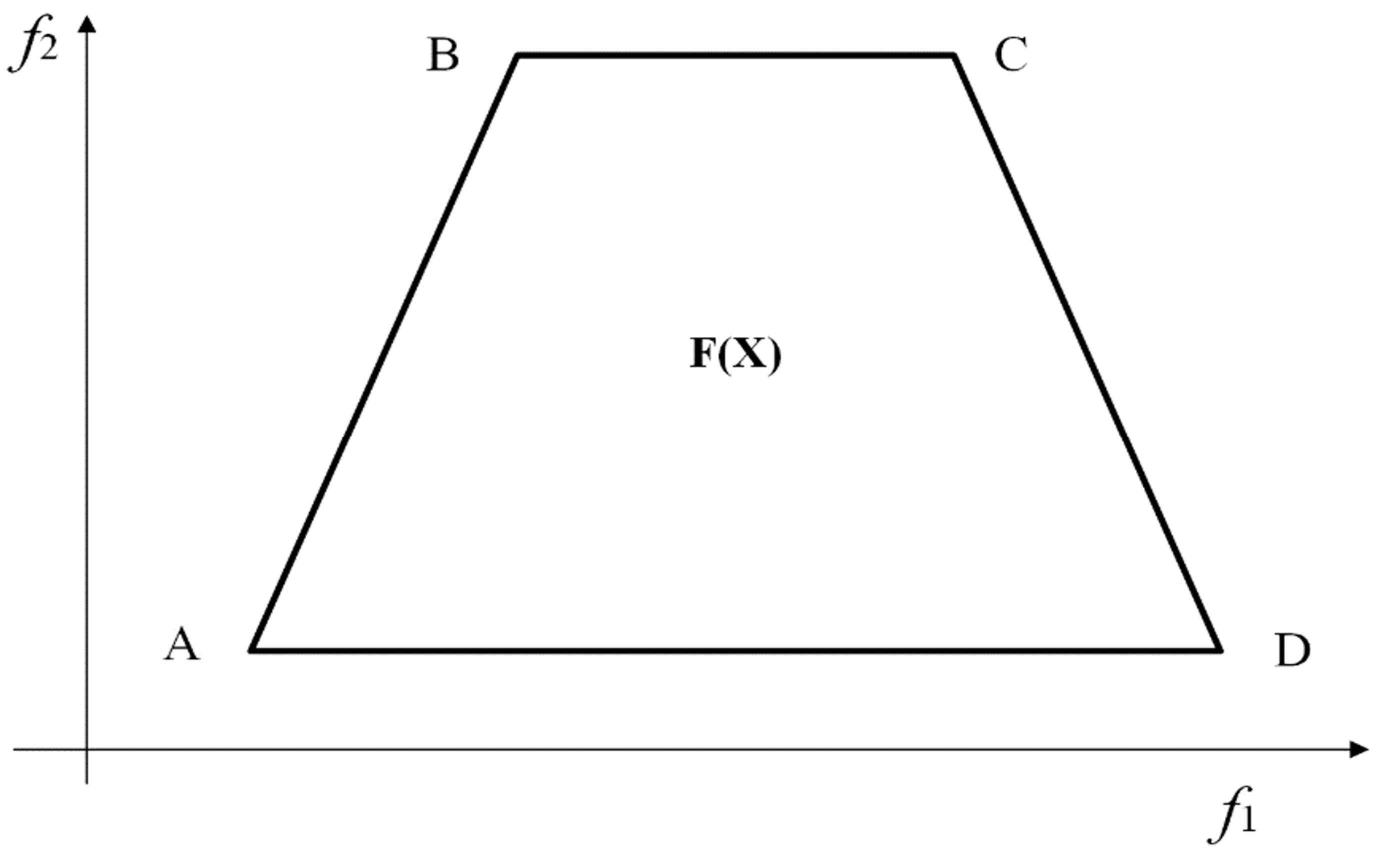
A. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$; $f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$.

B. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$; $f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$.

C. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$; $f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$.

D. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$; $f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$.

Пример 2. Множество достижимых векторных оценок $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ в многокритериальной аналитической задаче имеет вид:



Построить множества решений, оптимальных по Парето для следующих случаев.

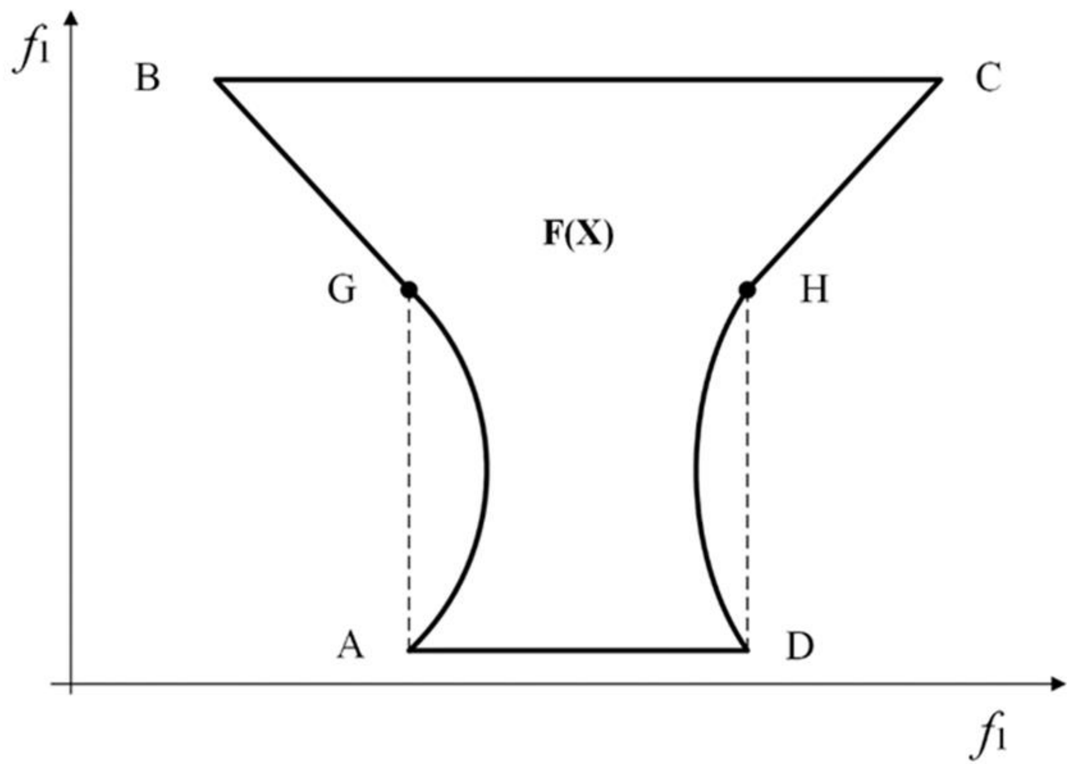
A. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}.$

B. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}.$

C. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}.$

D. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}}.$

Пример 3. Множество достижимых векторных оценок $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ в многокритериальной аналитической задаче имеет вид



Построить множества решений, оптимальных по Парето для следующих случаев.

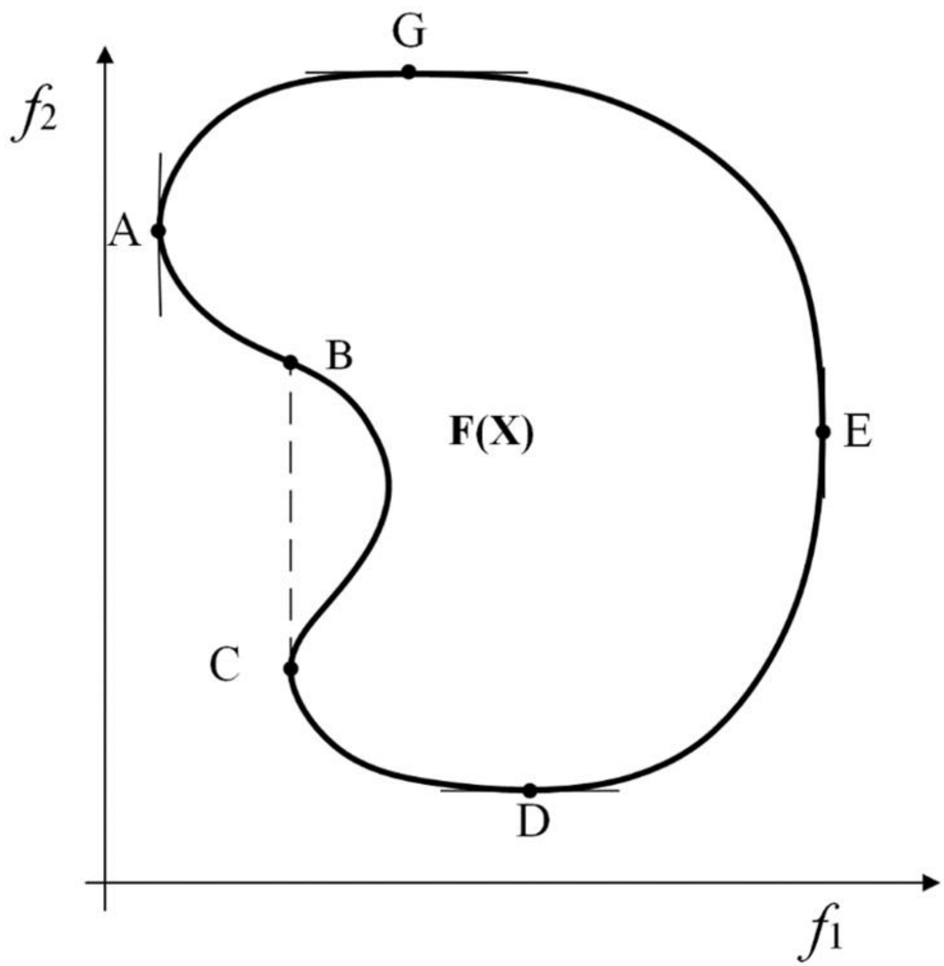
A. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

B. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

C. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

D. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

Пример 4. Множество достижимых векторных оценок $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ в многокритериальной аналитической задаче имеет вид



Построить множества решений, оптимальных по Парето для следующих случаев.

A. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

B. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

C. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

D. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

Задача оценки эффективности и сравнительного анализа проектов ЦП является дискретной многокритериальной аналитической задачей (ДМАЗ), которая может быть формализована в виде:

$$\Gamma = \left\langle \hat{\mathbf{X}}, \mathbf{F}(\mathbf{x}), \wp \right\rangle,$$

где $\hat{\mathbf{X}}$ - конечное множество, $\left|\hat{\mathbf{X}}\right| = N$, $\wp$ - бинарное отношение сравнительной эффективности допустимых решений, порожденное векторным критерием $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbf{E}^m$, задано в виде замкнутого выпуклого конуса доминирования $\mathbf{\Omega} = \mathbf{E}^m_{\geqq}$ и формализует требование максимизации компонент векторного критерия $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Требуется построить множество парето-оптимальных решений $\mathbf{F}_{\mathrm{P}}\left(\hat{\mathbf{X}}\right)$.

Алгоритм исключения заведомо неоптимальных решений

Шаг 1. Полагаем $k = 1$.

Шаг 2. Выбираем элемент $\mathbf{x}^k \in \hat{\mathbf{X}}$. Если $\mathbf{x}^k$ имеет статус заведомо неоптимального, то переходим к шагу 4. Иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Для всех $i = \overline{1, N}$, $i \neq k$ проверяем выполнение условия:

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^i\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^k\right) \in -\mathbf{\Omega}. \qquad (1)$$

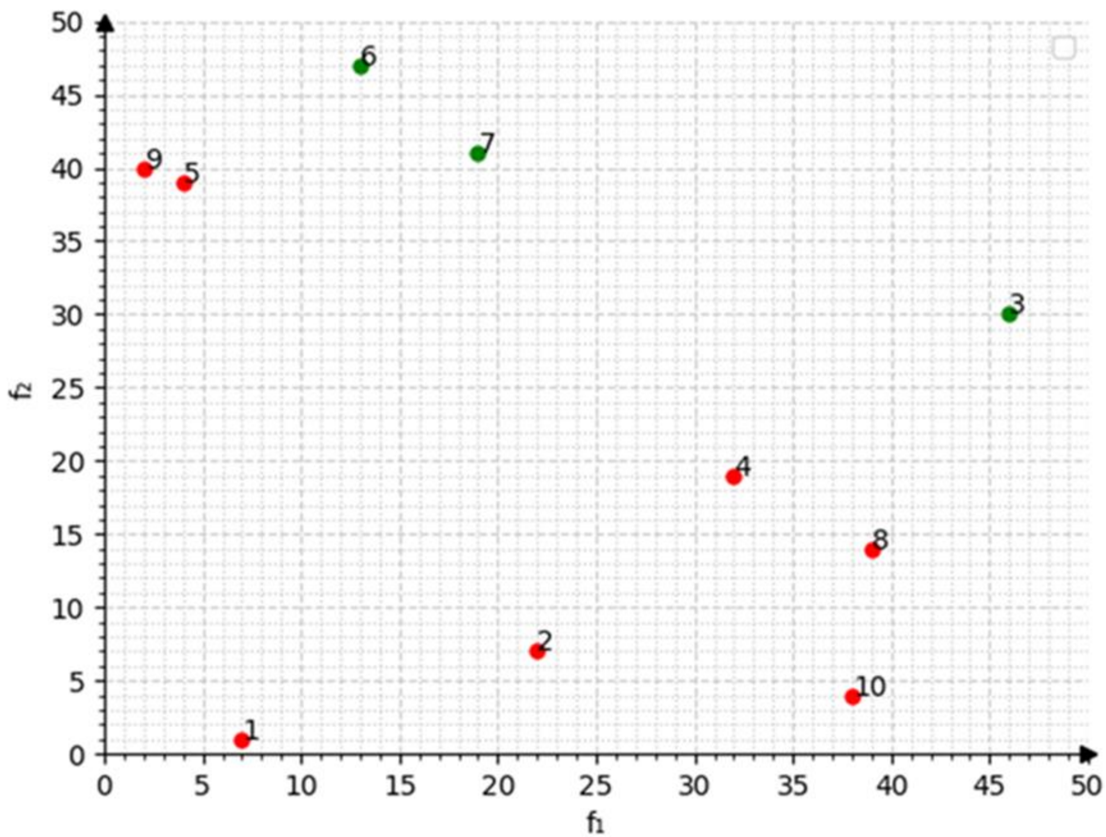
Все элементы $\mathbf{x}^i$, для которых выполняется (1), считаем заведомо неоптимальным. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Если $k < N$, то полагаем $k = k+1$ и переходим к шагу 2. Иначе переходим к шагу 5.

Шаг 5. Просматриваем таблицу значений $\mathrm{T} = \left\{ \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^k\right), k = \overline{1, N} \right\}$ и удаляем из нее элементы, имеющие статус заведомо неоптимальных. Получаем таблицу $\mathrm{T}_{\mathbf{\Omega}}$. Полагаем, что множество $\mathbf{\Omega}$-оптимальных решений $\mathbf{F}_{\Omega}\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = \mathrm{T}_{\mathbf{\Omega}}$.

Пример 5. Рассмотрим ДМАЗ, где множество допустимых альтернативных решений $\hat{\mathbf{X}}$ является конечным, $|\mathbf{X}| = N = 10$. Эффективность каждого альтернативного решения $\mathbf{x}^i \in \hat{\mathbf{X}}$ оценивается векторным критерием $\mathbf{F}(\mathbf{x}^i) = \left[f_1(\mathbf{x}^i), f_2(\mathbf{x}^i) \right]^T = \left[f_1^i, f_2^i \right]^T$. Множество достижимых векторных оценок $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ задано в таблице и представлено графически в виде $N = 10$ точек критериального пространства. Бинарное отношение сравнительной эффективности допустимых альтернативных решений $\wp$ является отношением Парето и отражает требование максимизации компонент векторного критерия $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, т.е. полиэдральный конус доминирования имеет вид: $\mathbf{\Omega} = \mathbf{E}^m_{\geq} = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbf{E}^m \middle| r_i \geqq 0,\ i = \overline{1, m},\ \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \right\}$. Требуется построить множество Парето-оптимальных решений $\mathbf{F}_\text{P}(\mathbf{X})$.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_1^i	7	22	46	32	4	13	19	39	2	38
f_2^i	1	7	30	19	39	47	41	14	40	4



Будем использовать алгоритм исключения заведомо неэффективных решений; используются следующие обозначения статуса элементов: * - элемент $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ зафиксирован и относительно него другие векторные оценки проверяются на неэффективность; × – элемент $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ является заведомо неэффективным).

Шаг 1. Полагаем номер итерации $i=1$.

Шаг 2. Рассматриваем точку $\mathbf{F}^i$. Если $\mathbf{F}^i$ имеет статус ×, то переходим к шагу 3 (соответствующий столбец остается пустым). Иначе, присваиваем $\mathbf{F}^i$ статус * и фиксируем. Для всех точек в соответствующем столбце $\mathbf{F}^j, j=\overline{1, N}, i \neq j$, которые не имеют статуса ×, проверяем выполнение условия

$$\left(\mathbf{F}^j - \mathbf{F}^i\right) \in -\mathbf{\Omega}, \tag{2}$$

Включение (2) означает, что точка $\mathbf{F}^j$ является заведомо неэффективной, и ей присваиваем статус ×.

Шаг 3. Полагаем $i = i + 1$. Если $i \leq N$, то переходим к шагу 2. Иначе, переходим к шагу 4.

Шаг 4. Просматриваем весь массив данных $\mathbf{F}(\mathbf{X})$. Формируем множество Парето-оптимальных решений в виде

$$\mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^*(\mathbf{X}), \quad (3)$$

где $\mathbf{F}^*(\mathbf{X})$ - множество точек, имеющих только статус *.

Результаты работы алгоритма исключения заведомо неоптимальных решений представлены в таблице

№	f_1^i	f_2^i	Номер итерации i									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7	1	*	×								
2	22	7		*	×							
3	46	30			*							
4	32	19			×							
5	4	39					*	×				
6	13	47						*				
7	19	41							*			
8	39	14			×							
9	2	40						×				
10	38	4			×							

В данном примере $\mathbf{F}_{\mathrm{P}}\left(\mathbf{X}\right)=\left\{\mathbf{F}^3, \mathbf{F}^6, \mathbf{F}^7\right\}$

(в таблице отмечены зеленым цветом).

Алгоритм многокритериального ранжирования на основе индекса эффективности

Рассмотрим ДМАЗ из примера 5.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Полагаем $i = 1$.

Шаг 2. Вычисляем параметр b_i - число точек, для которых выполняется условие

$$\left(\mathbf{F}^j - \mathbf{F}^i\right) \in \mathbf{\Omega}, \;\; j = \overline{1, N}, \; i \neq j, \tag{4}$$

Шаг 3. Вычисляем значение индекса эффективности в виде:

$$\Phi_i = \frac{1}{1 + \dfrac{b_i}{N-1}}. \tag{5}$$

Шаг 4. Если $i < N$, то полагаем $i = i + 1$ и переходим к шагу 2. Иначе, переходим к шагу 5.

Шаг 5. Из точек множества $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}})$ формируем множество $\mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\hat{\mathbf{X}})$ парето-оптимальных решений по правилу:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\hat{\mathbf{X}}) = \left\{ \mathbf{F}^{i}(\mathbf{x}) \in \mathbf{F}(\mathbf{X}) \middle| \; \Phi_{i} = 1 \right\}. \tag{6}$$

Результаты работы алгоритма отображены в таблице: $\mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\mathbf{X}) = \left\{ \mathbf{F}^{3}, \mathbf{F}^{6}, \mathbf{F}^{7} \right\}$. В столбце b_i в скобках указаны номера элементов $\mathbf{F}^{j}$, для которых выполняется условие (4).

Свойства индекса эффективности:

1) $\Phi_{i\,max} = 1$ для всех $\mathbf{F}^{i} \in \mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\mathbf{X})$;
2) $\Phi_{i\,min} = 1/2$;
3) $1/2 \leq \Phi_{i} < 1$, если $\mathbf{F}^{i} \notin \mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\mathbf{X})$.

№	f_1^i	f_2^i	b_i	Φ_i	K_l
1	7	1	7 (2,3,4,6,7,8,10)	0.56	K_3
2	22	7	3(3, 4, 8)	0.75	K_3
3	46	30	0	1	K_1
4	32	19	1(3)	0.9	K_2
5	4	39	2(6, 7)	0.82	K_2
6	13	47	0	1	K_1
7	19	41	0	1	K_1
8	39	14	1(3)	0.9	K_2
9	2	40	2(6, 7)	0.82	K_2
10	38	4	2(3, 8)	0.82	K_2

Задача многокритериальной кластеризации по индексу эффективности

В задаче кластеризации будем предполагать, что множество допустимых альтернативных решений $\hat{\mathbf{X}}$ требуется разбить на три кластера K_1, K_2, K_3, по значению индекса эффективности.

Зададим центры кластеров на интервале $\left[0.5;\ 1\right]$:

$$C_1 = 1,\ C_2 = 0.85,\ C_2 = 0.75.$$

Для каждого альтернативного решения $\mathbf{x}^i \in \hat{\mathbf{X}}$ (соответственно $\mathbf{F}^i \in \mathbf{F}\left(\hat{\mathbf{X}}\right)$) определяем кластер K_n в соответствии со следующим алгоритмом.

Шаг 1. В пространстве признаков вычисляем расстояния от $\mathbf{x}^i$ до центров кластеров

$$r_{ij} = \left|\Phi_i - C_j\right|, \; j = \overline{1, 3}.$$

Шаг 2. Вычисляем минимальное расстояние

$$k_i = min\left\{r_{ij}, j = \overline{1, 3}\right\}$$

Шаг 3. Определяем номер кластера n, которому принадлежит $\mathbf{x}^i$

$$n = \left\{ j \in \{1, 2, 3\} \middle| \, k_i = r_{ij} \right\}$$

Результаты кластеризации представлены в таблице и отображены на рисунке (зеленым - K_1, желтым - K_2, красным - K_3).