Методы решения многокритериальных аналитических задач (МАЗ)

Постановку МАЗ формулируем в виде:

$$\Gamma = \left\langle \mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{\Omega} = \mathbf{E}_{\leq}^{m} \right\rangle \qquad (1)$$

1. Методы обобщенного скалярного критерия

Данная группа методов основана на идее построения обобщенного скалярного показателя $\Phi(\mathbf{x})$, обладающего свойством:

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}(\mathbf{b}) \in \mathbf{\Omega} \;\Leftrightarrow\; \Phi(\mathbf{a}) \leqq \Phi(\mathbf{b}) \qquad (2)$$

В итоге исходная многокритериальная задача сводится к обычной задаче нелинейного программирования:

$$\Phi\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{x}\right)\right) \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \qquad (3)$$

1.1. Аддитивная свертка

Наиболее распространенным является обобщенный критерий вида:

$$\Phi\left(\mathbf{F},\boldsymbol{\mu}\right) = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{F}\left(\mathbf{x}\right).$$

В обобщенном критерии $\Phi(\mathbf{F}, \boldsymbol{\mu})$ вектор весовых коэффициентов $\boldsymbol{\mu}$ характеризует относительную важность компонент векторного показателя $\mathbf{F}$.

Если используются нормализованные значения компонент векторного показателя $\mathbf{F}$, то в этом случае на $\boldsymbol{\mu}$ накладывается условие $\boldsymbol{\mu} \in \overline{\mathcal{M}} \subset \mathbf{E}^m$,

где множество $$\overline{\mathcal{M}} = \left\{ \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{E}^m_{\geqq} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \right\}.$$

Рассмотрим два варианта решения МАЗ с помощью аддитивной свертки для $m = 2$:

$$\Phi_1\left(\mathbf{F}, \boldsymbol{\mu}^1\right) = \mu_1^1 f_1 + \mu_2^1 f_2 \quad \text{и} \quad \Phi_2\left(\mathbf{F}, \boldsymbol{\mu}^2\right) = \mu_1^2 f_1 + \mu_2^2 f_2 ,$$

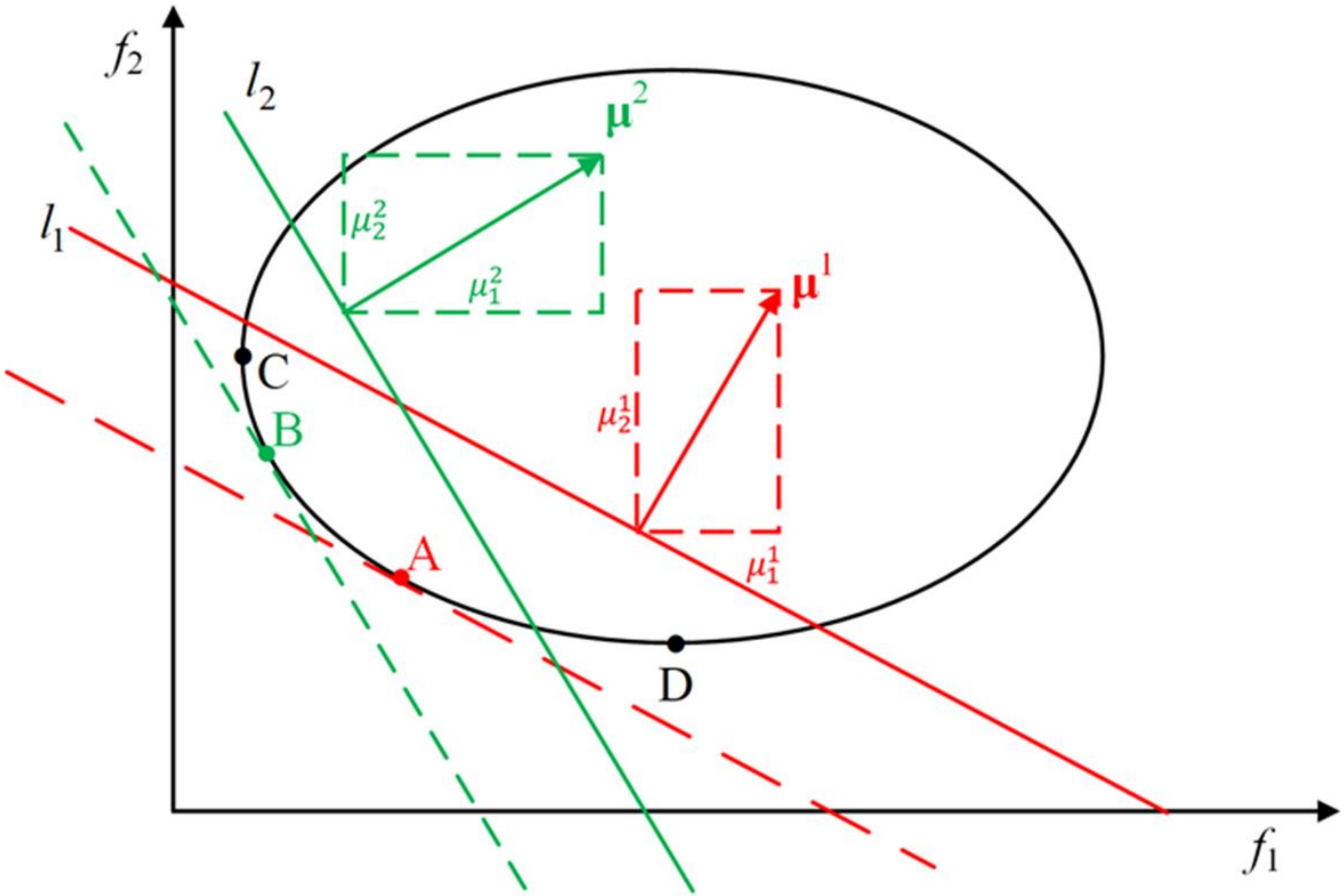
где векторы весовых коэффициентов

$$\boldsymbol{\mu}^1 = \left[\mu_1^1, \right. \quad \boldsymbol{\mu}^1 = \nabla\Phi_1(\mathbf{F}) = \left[\frac{\partial\Phi_1(\mathbf{F})}{\partial f_1}; \frac{\partial\Phi_1(\mathbf{F})}{\partial f_2}\right]^T \left. \mu_2^2 \right]^T \in \overline{\mathcal{M}}$$

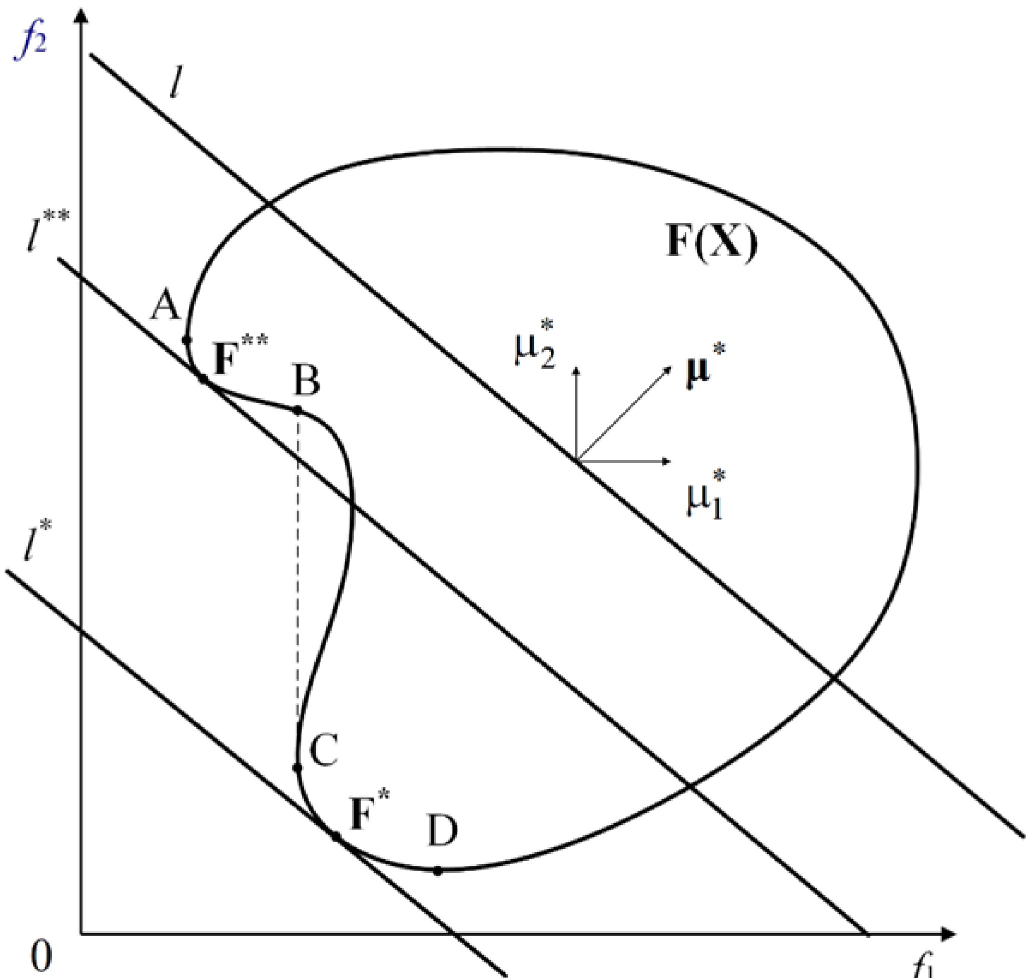
являются градиентами функций $\Phi_1(\mathbf{F})$ и $\Phi_2(\mathbf{F})$.

$$\boldsymbol{\mu}^1 = \nabla\Phi_1(\mathbf{F}) = \left[\frac{\partial\Phi_1(\mathbf{F})}{\partial f_1}; \frac{\partial\Phi_1(\mathbf{F})}{\partial f_2}\right]^T \qquad \boldsymbol{\mu}^2 = \nabla\Phi_2(\mathbf{F}) = \left[\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{F})}{\partial f_1}; \frac{\partial\Phi_2(\mathbf{F})}{\partial f_2}\right]^T$$

Выпуклое множество достижимых векторных оценок

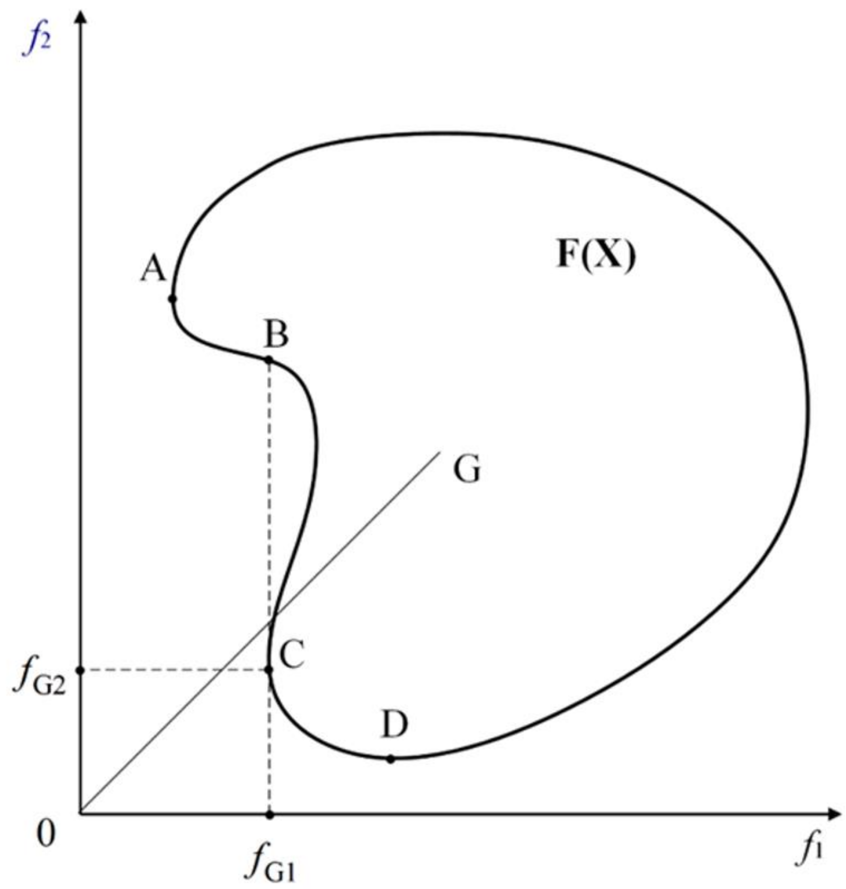


Невыпуклое множество достижимых векторных оценок



1.2. Критерий Гермейера

Функция Гермейера: $\Phi(\mathbf{F}) = \max_{i \in \mathbf{M}} \left(f_i(\mathbf{x}) \right)$



2. Метод главного критерия (пороговой оптимизации)

1. Один из множества $\mathbf{M}$ критериев выделяется в качестве главного (например, f_i), а на остальные $(m-1)$ критериев накладываются ограничения в виде максимально допустимых (пороговых) значений $\gamma_j \;, j=\overline{1,m}, j \neq i$.

2. Исходная многокритериальная задача оказывается сведенной к задаче нелинейного программирования

$$f_i(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x}\in\tilde{\mathbf{X}}}, \tag{1}$$

где

$$\tilde{\mathbf{X}}: \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \\ \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}^n \,\middle|\, f_j(\mathbf{x}) \leqq \gamma_j ; j=\overline{1,m}; j \neq i\right\}. \end{cases} \tag{2}$$

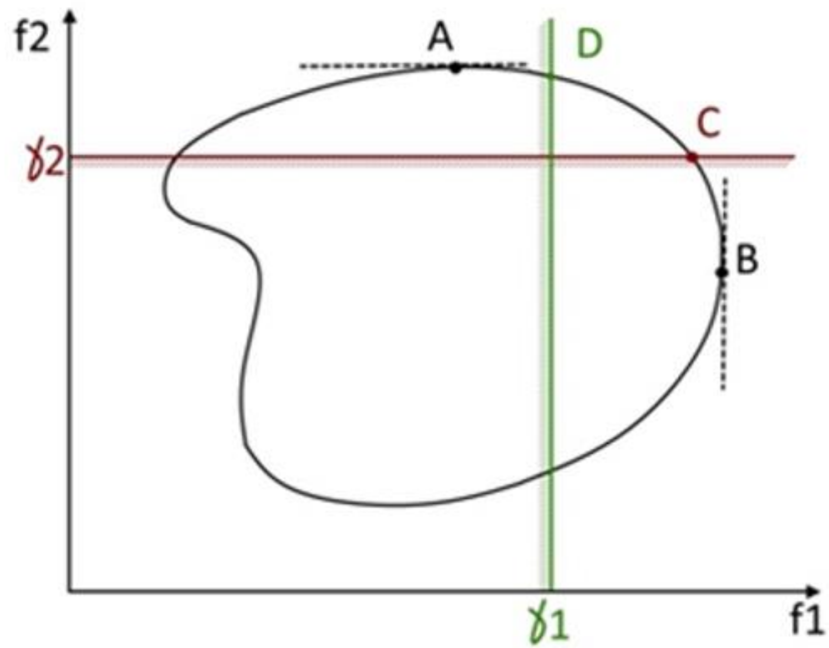
Геометрическая интерпретация:

1. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\tilde{\mathbf{D}}} \Rightarrow$ т. C

$$\tilde{\mathbf{D}}: \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{D}, \\ f_2(\mathbf{x}) \geqq \gamma_2. \end{cases}$$

2. $f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\tilde{\mathbf{D}}} \Rightarrow$ т. D

$$\tilde{\mathbf{D}}: \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{D}, \\ f_1(\mathbf{x}) \geqq \gamma_1. \end{cases}$$



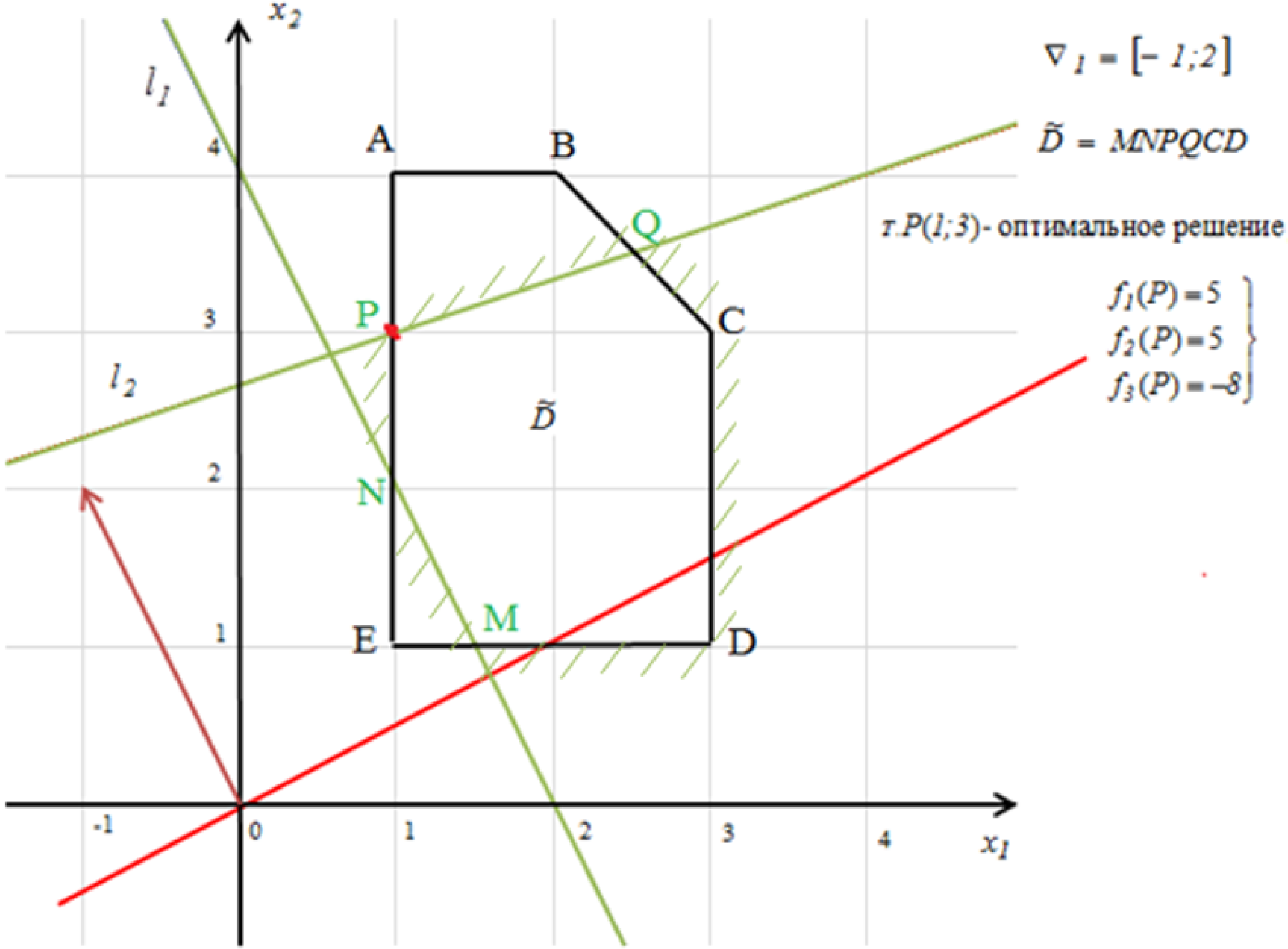
Пример. Решить задачу методом пороговой оптимизации:

$$f_1(\mathrm{X}) = -\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \to \max$$

$$f_2(\mathrm{X}) = 2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \to \max$$

$$f_3(\mathrm{X}) = \mathrm{x}_1 - 3\mathrm{x}_2 \to \max$$

$$\mathrm{D}: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{cases}$$



$\nabla_1 = [-1;2]$
$\tilde{D} = MNPQCD$
т.$P(1;3)$- оптимальное решение
$f_1(P)=5$
$f_2(P)=5$
$f_3(P)=-8$
x_1
x_2
l_1
l_2
A
B
C
D
E
M
N
P
Q
$\tilde{D}$

Сформулируем новую задачу. Предполагаем, что

$f_1(\mathbf{x})$ - основной критерий; $\gamma_2 = 4; \gamma_3 = -8$

Новая задача:

$$f_1(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2 \to \max_{\mathbf{x} \in \tilde{\mathbf{D}}}$$

$$\nabla_1 = [-1; 2]$$

$$\tilde{\mathbf{D}}: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 - 3x_2 \ge -8 \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = MNPQCD$$

т. P (1;3) – оптимальное решение

$$\left. \begin{array}{l} f_1(P) = 5 \\ f_2(P) = 5 \\ f_3(P) = -8 \end{array} \right\}$$

3. Лексикографические методы. Метод последовательных уступок.

I. Устанавливаем лексикографический порядок, т.е. располагаем критерии по степени важности:

$$f_1(\mathbf{x}) \succ f_2(\mathbf{x}) \succ \ldots \succ f_m(\mathbf{x})$$

II. Решаем последовательность задач:

$$1.\ f_1(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}} \Rightarrow f_1^* = f_1(\mathbf{x}^{*1})$$

2. Назначается уступка δ_1 по $f_1(\mathbf{x})$ и решается задача

$$f_2(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_2} \Rightarrow f_2^* = f_2(\mathbf{x}^{*2})$$

$$\mathbf{D_2} : \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{D} \\ f_1(\mathbf{x}) \geqq f_1^* - \delta_1 \end{cases}$$

3. Назначается уступка δ_2 по $f_2(\mathbf{x})$

$$f_3(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_3} \Rightarrow f_3^* = f_3(\mathbf{x}^{*3})$$

$$\mathbf{D_3} : \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbf{D} \\ f_1(\mathbf{x}) \geqq f_1^* - \delta_1 \\ f_2(\mathbf{x}) \geqq f_2^* - \delta_2 \end{cases}$$

и т. д.

m. Назначается уступка δ_{m-1} по $f_{m-1}(\mathbf{x})$

$$f_m(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}_m} \Rightarrow f_m^* = f_m(\mathbf{x}^{*m})$$

$$\mathbf{D}_m : \begin{cases} \mathbf{X} \in \mathbf{D} \\ f_1(\mathbf{x}) \geqq f_1^* - \delta_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{m-1}(\mathbf{x}) \geqq f_{m-1}^* - \delta_{m-1} \end{cases}$$

Полученное решение $\mathbf{x}^{*m}$ считается оптимальным.

Пример. Решить задачу методом последовательных уступок:

$$f_1(\mathbf{X}) = -x_1 + 2x_2 \to max$$

$$f_2(\mathbf{X}) = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$f_3(\mathbf{X}) = x_1 - 3x_2 \to max$$

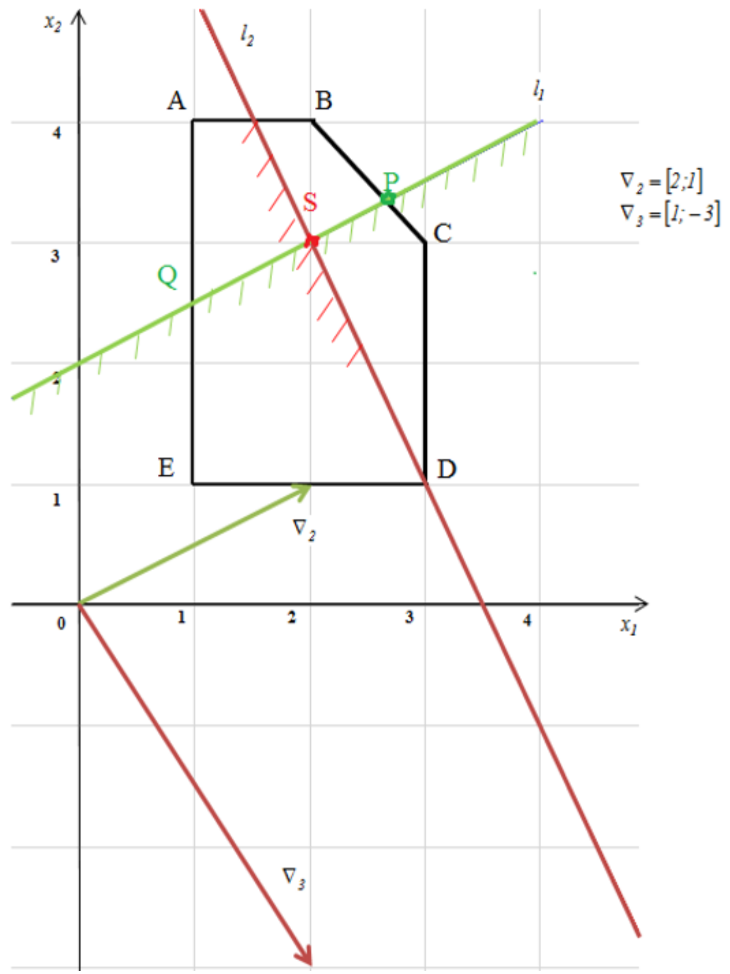
$$\boldsymbol{D}: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$f_1(\mathbf{X}) \succ f_2(\mathbf{X}) \succ f_3(\mathbf{X});\ \delta_1 = 3; \delta_2 = \frac{5}{3}$$

$$1).\ f_1(\mathbf{X}) \to \max_{\mathbf{X} \in \mathbf{D}} \Rightarrow \begin{cases} т.A(1;4) = X^{*1} \\ f_1^* = 7 \end{cases}$$

$$2).\ f_2(\mathbf{X}) \to \max_{\mathbf{X} \in \mathbf{D_2}} \Rightarrow \begin{cases} т.P(\frac{8}{3};\frac{10}{3}) = X^{*2} \\ f_2^* = \frac{26}{3} \end{cases}$$

$$\mathbf{D_2} : \begin{cases} \mathbf{X} \in \mathbf{D} \\ f_1(\mathbf{X}) \geq 7 - 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{X} \in \mathbf{D} \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4 \to l_1 : x_2 \geq 2 + \frac{x_1}{2} \end{cases}$$



x_2
l_2
l_1
A
B
P
S
C
Q
E
D
∇_2
∇_3
0
1
2
3
4
x_1
$\nabla_2 = [2;1]$
$\nabla_3 = [1;-3]$

$$\boldsymbol{D_3}:\begin{cases}\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{D}\\ f_1(\boldsymbol{X})\ge 4\\ f_2(\boldsymbol{X})\ge \dfrac{26}{3}-\dfrac{5}{3}=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{D}\\ -x_1+2x_2\ge 4\rightarrow l_1: x_2\ge 2+\dfrac{x_1}{2}\\ 2x_1x_2\ge 7\rightarrow l_2: x_2\ge 7-2x_1\end{cases}$$

Оптимальное решение:

$$\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{opt}}=[2;3]^T;\ f_1=4;\ \ f_2=7;\ f_3=-7$$