Оптимальность относительно конуса доминирования

Рассмотрим многокритериальную аналитическую задачу:

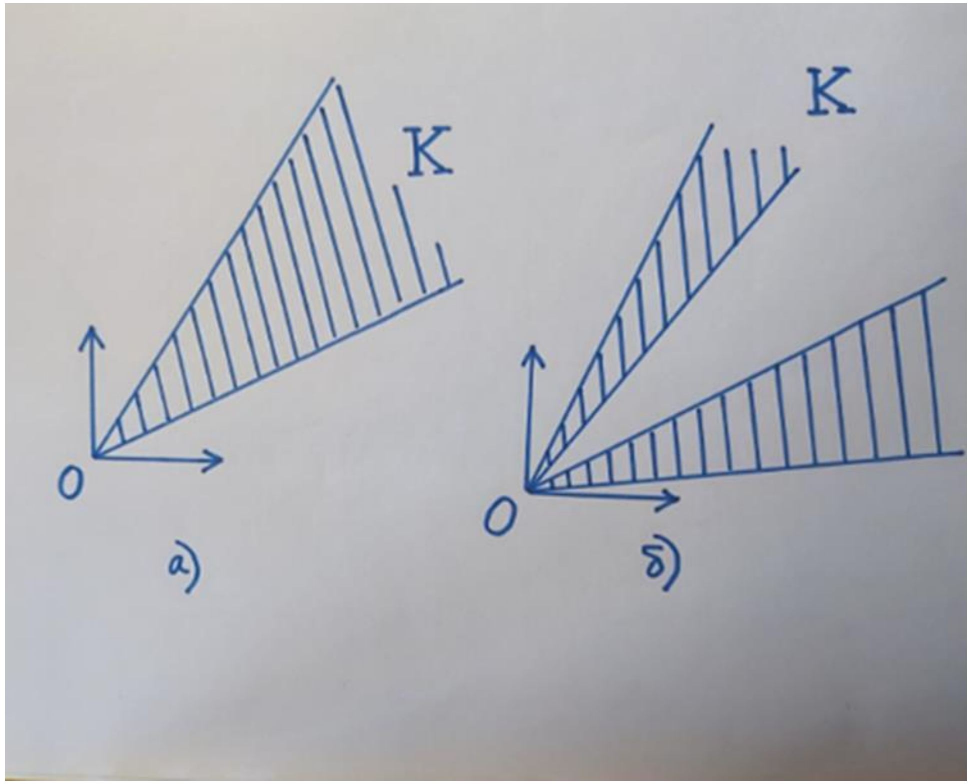
$$\Gamma = \left\langle \mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{x}), \ \wp \right\rangle \qquad (1)$$

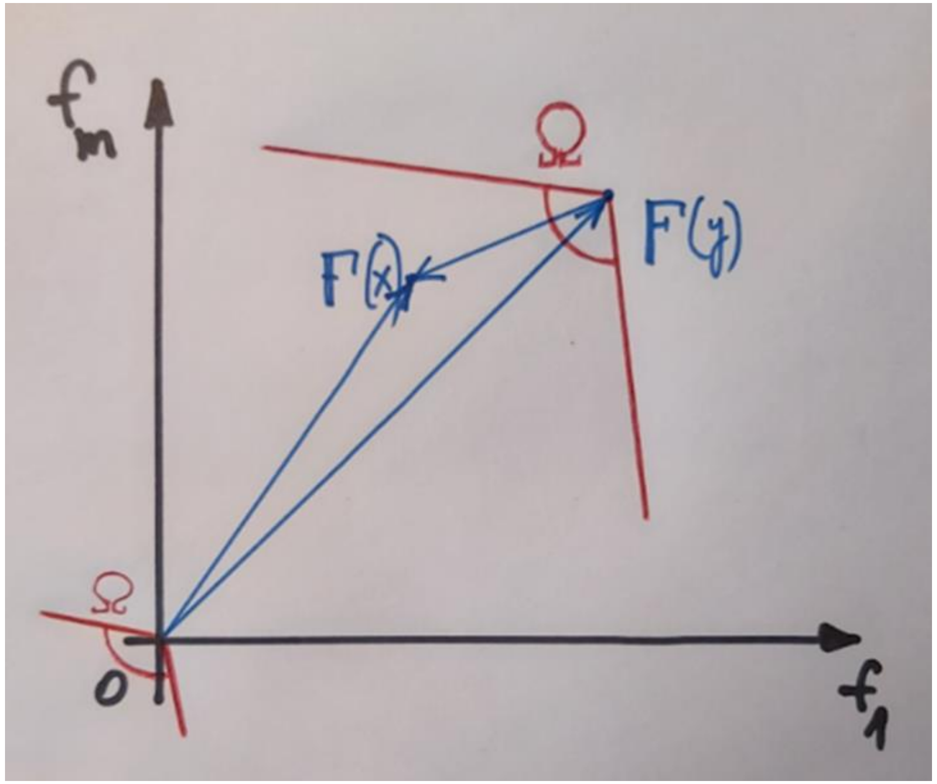
Определение 1. Непустое множество $\mathbf{K} \subset \mathbf{E}^m$ называется конусом с вершиной в начале координат, если из того, что $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ следует, что $\lambda\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ для всех $\lambda \geqq 0$.

Если, кроме того, $\mathbf{K}$ - выпуклое множество, то оно называется выпуклым конусом.

Определение 2. Замкнутый выпуклый конус $\mathbf{\Omega} \subset \mathbf{E}^m$ называется конусом доминирования, если бинарное отношение строгого предпочтения $\wp$ задается в виде:

$$\mathbf{x} \wp \mathbf{y} \Leftrightarrow \left(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\right) \in \mathbf{\Omega} \qquad (2)$$





а) – выпуклый конус;
б) – невыпуклый конус.

Конус доминирования

Определение 3. Допустимое решение $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ задачи (1), (2) называется недоминируемым (оптимальным относительно конуса доминирования $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}$ - оптимальным, если для любого допустимого решения $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ имеет место

$$\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^*\right)\right) \notin \mathbf{\Omega} \ . \qquad (3)$$

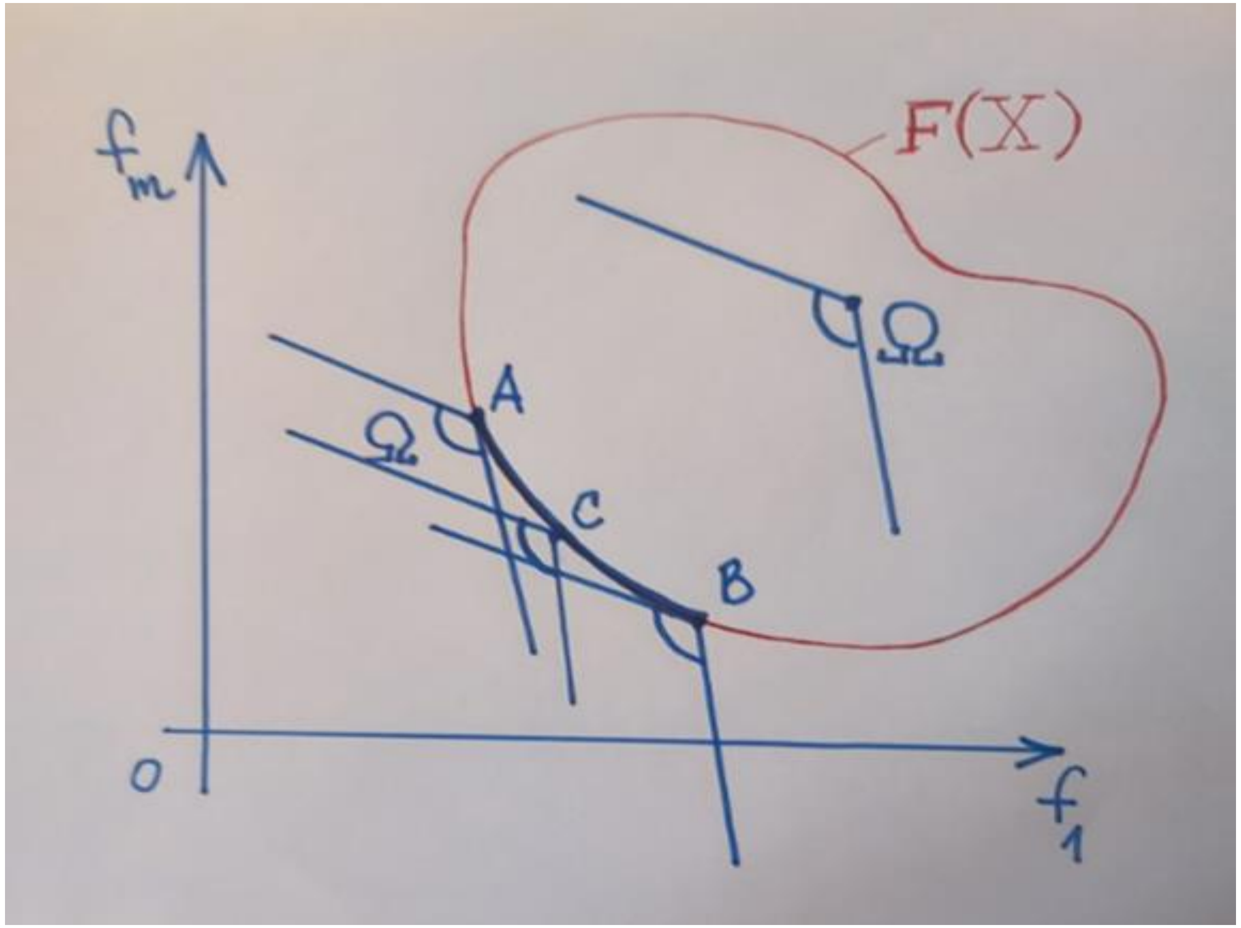
Множество всех $\mathbf{\Omega}$ - оптимальных решений задачи (1), (2) будем обозначать $Opt_{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{X})$ в пространстве допустимых решений и $Opt_{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}))$ -в критериальном пространстве , где $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ - множество достижимых векторных оценок, определяемое в виде: $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \bigcup\limits_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbf{F}(\mathbf{x})$

Геометрическая интерпретация:

$$Opt_{\mathbf{\Omega}}\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right)\right) = \cup \mathrm{AB}$$

Для точки $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{*}\right) = \mathrm{C} \in \cup \mathrm{AB}$

выполняется условие (3).



Свойства конуса доминирования

Теорема. Пусть в задаче (1), (2) для конусов доминирования $\mathbf{\Omega}_1$ и $\mathbf{\Omega}_2$ выполняется включение $\mathbf{\Omega}_1 \subset \mathbf{\Omega}_2$. Тогда для множества $Opt_{\mathbf{\Omega}_1}(\mathbf{X})$ и $Opt_{\mathbf{\Omega}_2}(\mathbf{X})$ связаны между собой соотношением

$$Opt_{\mathbf{\Omega}_2}(\mathbf{X}) \subseteq Opt_{\mathbf{\Omega}_1}(\mathbf{X}) \quad . \qquad (4)$$

Вывод. Уменьшение неопределенности выбора наиболее предпочтительного решения аналитической задачи (1), (2) на множестве $Opt_{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{X})$ может быть достигнуто путем «расширения» конуса доминирования $\mathbf{\Omega}$.

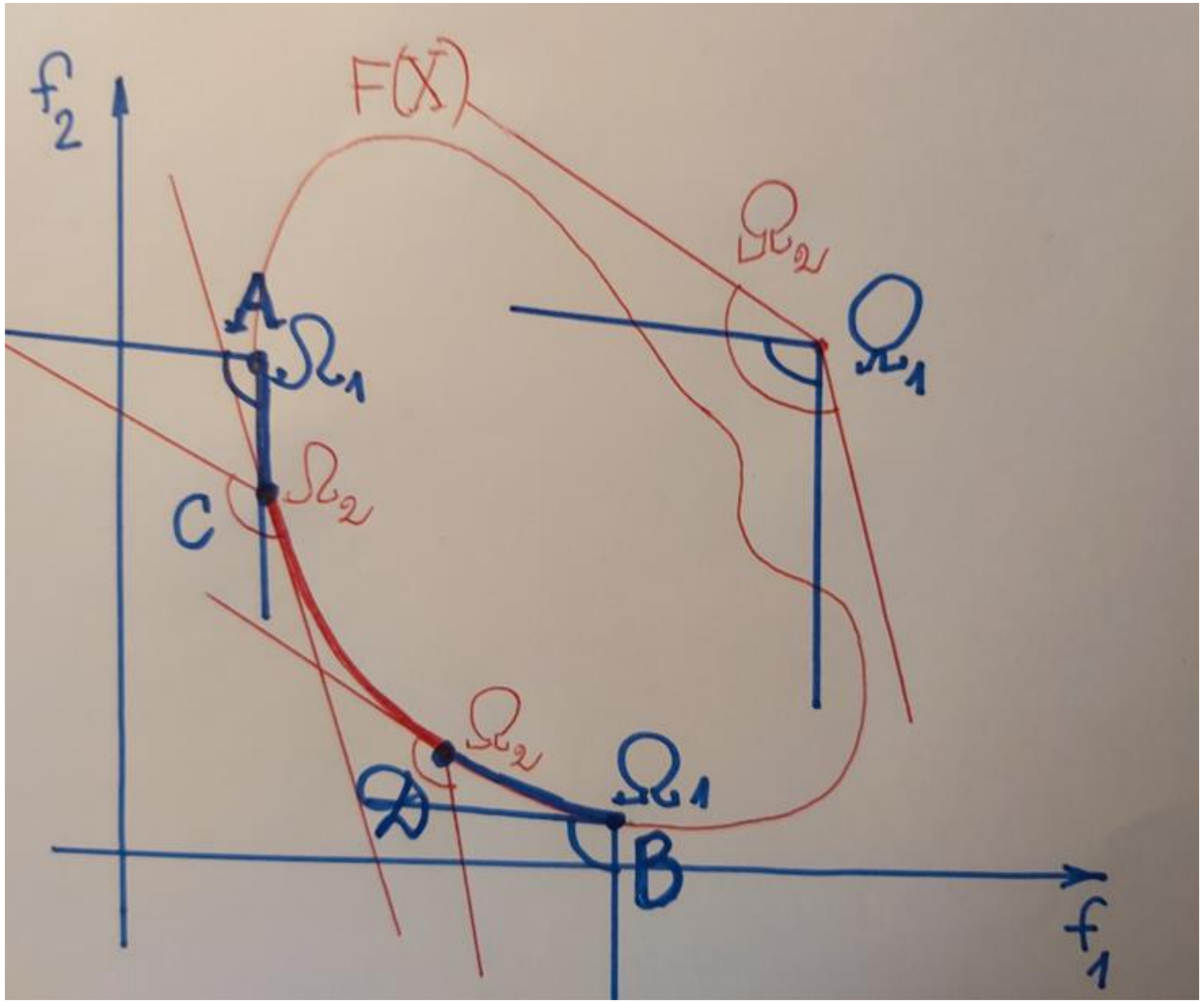
Геометрическая интерпретация

$$\mathbf{\Omega}_1 \subset \mathbf{\Omega}_2$$

$$\cup \mathrm{AB} = Opt_{\mathbf{\Omega}_1}\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right)\right)$$

$$\cup \mathrm{CD} = Opt_{\mathbf{\Omega}_2}\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right)\right)$$

$$Opt_{\mathbf{\Omega}_2}\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right)\right) \subset Opt_{\mathbf{\Omega}_1}\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{X}\right)\right)$$



Частные случаи конуса доминирования

1. $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{E}^m_{\leq} = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbf{E}^m \,\middle|\, r_i \leqq 0,\ i = \overline{1, m},\ \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \right\}$ (8)

Конус доминирования (8) задает на $\mathbf{X}$ бинарное отношение строгого предпочтения $\wp_1$:

$$\mathbf{x} \wp_1 \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y}) \in \mathbf{\Omega}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} f_i(\mathbf{x}) \leqq f_i(\mathbf{y}),\ i = \overline{1, m}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{F}(\mathbf{y}) \end{cases}$$

Отношение предпочтения $\wp_1$ называется отношением Парето. Ядро отношения $\wp_1$ на $\mathbf{X}$ $Min_{\wp_1}(\mathbf{X})$ обозначим $\mathbf{X}_P$ и, соответственно, $\mathbf{F}_P = \mathbf{F}(\mathbf{X}_P)$.

Ядро отношения $\wp_1$ называется множеством эффективных (оптимальных по Парето) решений.

2. $$\mathbf{\Omega}_2 = \mathbf{E}^m_< = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbf{E}^m \,\middle|\, r_i < 0,\ i = \overline{1, m} \right\}. \qquad (9)$$

Открытый конус доминирования (9) задает на $\mathbf{X}$ бинарное отношение строгого

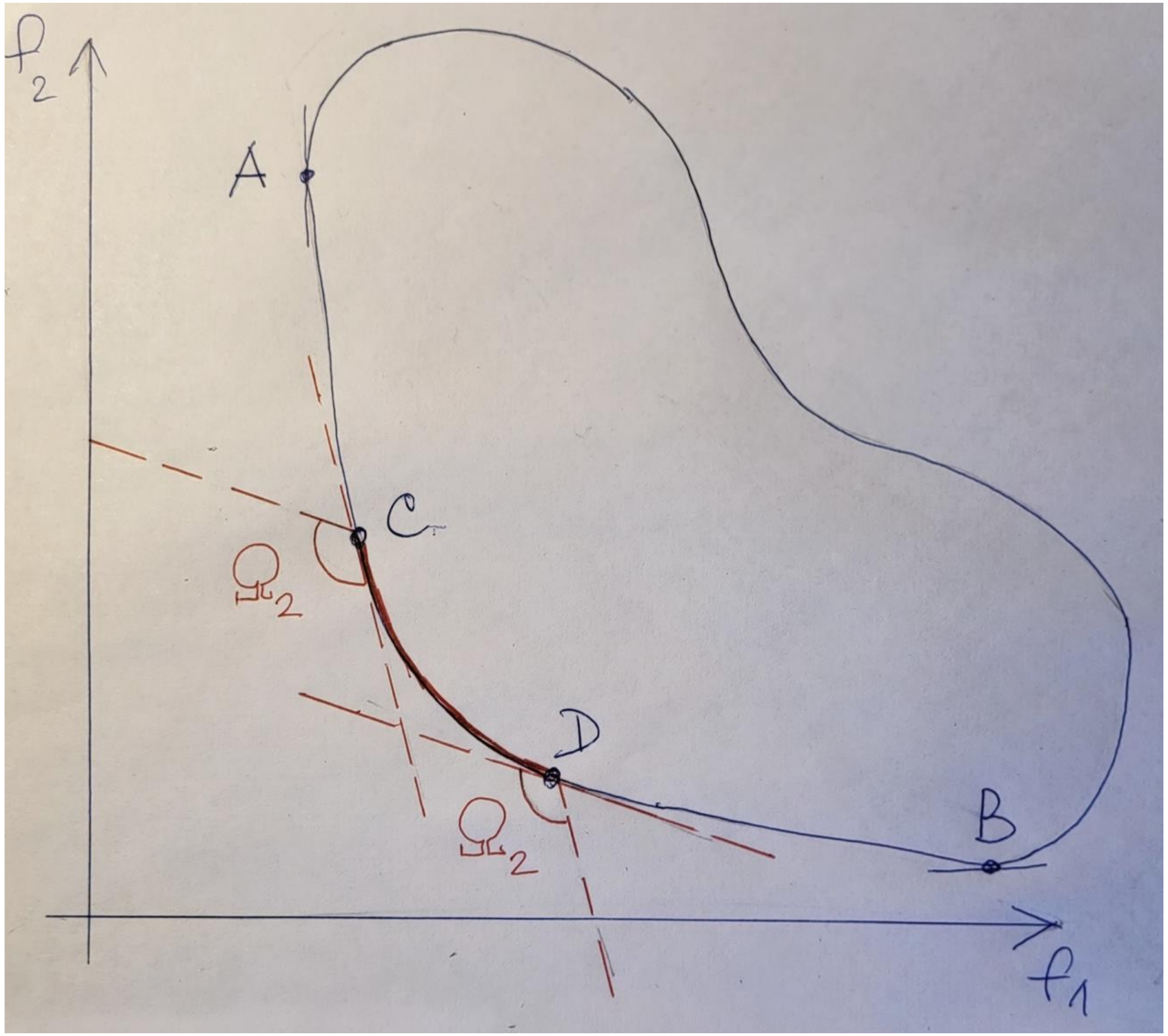
предпочтения $\wp_2$:

$$\mathbf{x} \wp_2 \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y}) \in \mathbf{\Omega}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{y}), \\ i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Отношение предпочтения $\wp_2$ называется отношением Слейтера.

Ядро отношения $\wp_2$ называется множеством слабо эффективных (оптимальных по Слейтеру) решений.

Применение на практике



$F_P(X) = \smile AB$

$\Omega_1 = E^2_{\le}$

$\smile AC$ и $\smile DB$ – "плохие" участки.

Если мы хотим исключить $\smile AC$ и $\smile DB$ из рассмотрения, то необходимо построить конус доминирования Ω_2:

$\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow F_{\Omega_2}(X) = \smile CD.$

$F_{\Omega_2}(X) \subset F_P(X)$