Метод «идеальной» точки

Метод основан на идее целевого программирования, состоящей в нахождении на множестве эффективных векторных оценок $\mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\mathbf{X})$ многокритериальной аналитической задачи решения, максимально приближенного к некоторой недостижимой «идеальной» цели $\mathbf{F}^{g}$.

Этап 1. Построение идеальной точки. Решаем m задач:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \Rightarrow f_1\left(\mathbf{x}^g\right) = f_1^g, \\ \qquad\qquad \dots \\ f_m(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \Rightarrow f_m\left(\mathbf{x}^g\right) = f_m^g. \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathbf{F}^g = \left[f_1^g, \dots, f_m^g \right]^T$ - «идеальная» точка.

Этап 2. Формируем функцию, характеризующую метрику критериального пространства, например, в виде:

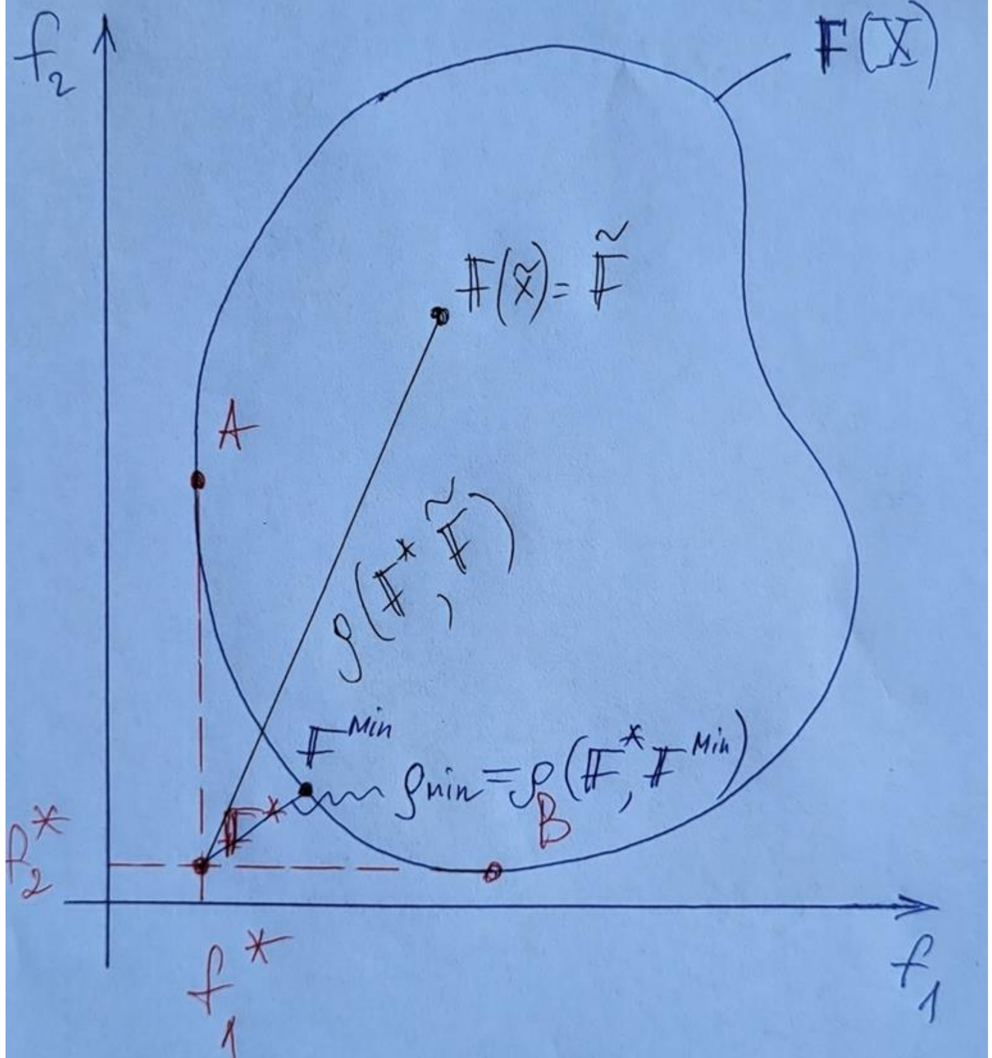
$$\rho\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^{g}\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(f_i(\mathbf{x})- f_i^{g}\right)^{2}.$$

Этап 3. Решаем задачу:

$$\rho\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^{g}\right)\to \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \;\Rightarrow\; \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{*}\right)=\mathbf{F}^{*}.$$

Решение $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{*}\right)=\mathbf{F}^{*}$ будем считать оптимальным решением исходной многокритериальной аналитической задачи, максимально приближенным к идеальной цели

$$\mathbf{F}^{g}=\left[f_1^{g}, \ldots, f_m^{g}\right]^{T}.$$



$$\mathbb{F}^* = [f_1^*, f_2^*].$$

Пример. Дана многокритериальная аналитическая задача:

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = -3x_1 + x_2 \to \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$$

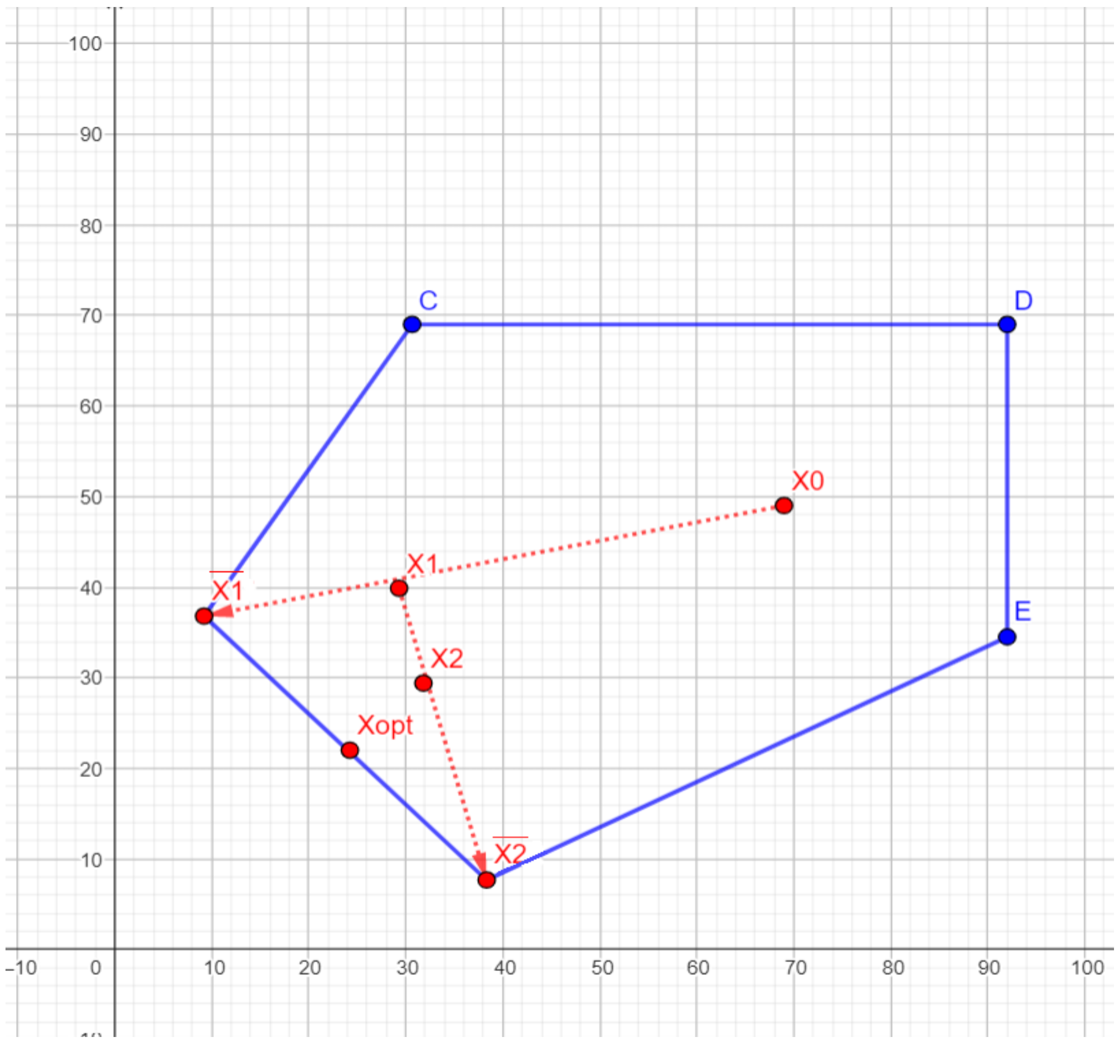
$$f_3(\mathbf{x}) = x_1 - 3x_2 \to \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}},$$

где множество $\mathbf{X}$ определяется системой ограничений:

$$\mathbf{X}: \begin{cases} x_1 + x_2 \geqq 46, \\ x_1 - 2x_2 \leqq 23, \\ -3x_1 + 2x_2 \leqq 46, \\ 0 \leqq x_1 \leqq 92, \\ 0 \leqq x_2 \leqq 69. \end{cases}$$

Требуется решить поставленную задачу методом «идеальной» точки.

Геометрическая интерпретация



$\left.\right)\right) \simeq 38196.2 > \rho\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)$

Этап 1. Построение идеальной точки. Решаем последовательно следующие задачи.

1. $f_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$.

Оптимальное решение достигается в вершине D области допустимых решений $\mathbf{X} = \mathrm{ABCDE}$: $\mathbf{x}^{1g} = [92;\ 69]^T$, $f_1\left(\mathbf{x}^{1g}\right) = f_1^g = 161$.

2. $f_2(\mathbf{x}) = -3x_1 + x_2 \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$.

Оптимальное решение достигается в вершине B :

$$\mathbf{x}^{2g} = [9.2;\ 36.8]^T \quad , \quad f_2\left(\mathbf{x}^{2g}\right) = f_2^g = 9.2$$

3. $f_3(\mathbf{x}) = x_1 - 3x_2 \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}$.

Оптимальное решение достигается в вершине A :

$$\mathbf{x}^{3g} = [38.33;\ 7.67]^T \quad , f_3\left(\mathbf{x}^{3g}\right) = f_3^g = 15.33 \quad .$$

Таким образом, идеальная точка: $\mathbf{F}^g = [161;\ 9.2;\ 15.33]^T$.

Этап 2. Сформируем функцию метрики:

$$\rho\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^{g}\right) = (x_1 + x_2 - 161)^2 + (-3x_1 + x_2 - 9.2)^2 + (x_1 - 3x_2 - 15.33)^2$$

Этап 3. Решаем задачу:

$$\rho\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^{g}\right) \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} . \qquad (1)$$

Это задача нелинейного программирования, в которой целевая функция - нелинейная, а система ограничений, задающая область $\mathbf{X} = \mathrm{ABCDE}$, - линейная. Для решения задач данного типа целесообразно применять **метод Франк-Вульфа**.

Метод Франк-Вульфа

Шаг 0. Задать $k = 0$ - номер итерации .

Задать $\mathbf{x}^0$ - начальное приближение.

Вычислить градиент целевой функции $\rho\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}^g\right)$:

$$\nabla\rho(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial\rho(\mathbf{x})}{\partial x_1};\ \frac{\partial\rho(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right]^T$$

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 22x_1 - 10x_2 - 297.47 \quad ; \quad \frac{\partial\rho(\mathbf{x})}{\partial x_2} = -10x_1 + 22x_2 - 248.49 \quad (2)$$

Выполним одну итерацию метода Франк-Вульфа.

Итерация 1. Итерация включает в себя следующие основные шаги.

Шаг 1. Сформировать вспомогательную функцию вида:

$$\tilde{\rho}^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \rho\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \rho\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)}{\partial x_2} x_2$$

С учетом 2):

$$\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{x}) = 760.53 x_1 + 73.59 x_2 \ .$$

Шаг 2. Решить задачу линейного программирования:

$$\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{x}) = 760.53 x_1 + 73.59 x_2 \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \Rightarrow \overline{\mathbf{x}}^{(1)} \ . \qquad (3)$$

Оптимальное решение $\overline{\mathbf{x}}^{(1)}$ задачи (3) достигается в вершине $\mathrm{B}(9.2;\ 36.8)$ области $\mathbf{X} = \mathrm{ABCDE}$: $\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = [9.2;\ 36.8]^T$.

Шаг 3. Найти приближение к решению задачи (1) в виде:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \lambda_0(\overline{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}) \quad , \qquad (4)$$

где λ_0 определяется из решения задачи:

$$\rho\left(\mathbf{x}^{(1)}(\lambda)\right) \to \min_{0 \leqq \lambda \leqq 1} \quad . \qquad (5)$$

Целевая функция в задаче (5) зависит только от параметра λ,

т.к. в (5) все параметры, кроме λ, фиксированы и известны.

Интервал $0 \leqq \lambda \leqq 1$ означает, что оптимальное значение функции $\rho(\mathbf{x})$ ищется на отрезке $\left[\mathbf{x}^{(0)}, \overline{\mathbf{x}}^{(1)}\right]$.

Подставляя числовые значения $\mathbf{x}^{(0)}, \overline{\mathbf{x}}^{(1)}$ в (4), получим:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} (69 - 59.8\lambda) \\ (46 - 9.2\lambda) \end{bmatrix}$$

$$\rho\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = 34765.88\lambda^2 - 46157.01\lambda + 38196.15 \quad . \qquad (6)$$

Для определения минимума функции (6) вычисляем производную по λ и приравниваем ее нулю:

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = 69531.76\lambda - 46157.01 = 0 \quad .$$

Получаем: $\lambda_0 \simeq 0.664$.

Оптимальное значение: $\mathbf{x}^{(1)} \simeq [29.30;\ 39.89]^T$; $\rho\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) \simeq 22876.1$.

Для сравнения: $\rho\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) \simeq 38196.2 > \rho\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)$.

Т.е. в результате выполнения итерации 1 значение целевой функции $\rho(\mathbf{x})$ уменьшилось (см. геометрич. интерпретацию). Далее полагаем $k = k+1$ и переходим к итерации 2.