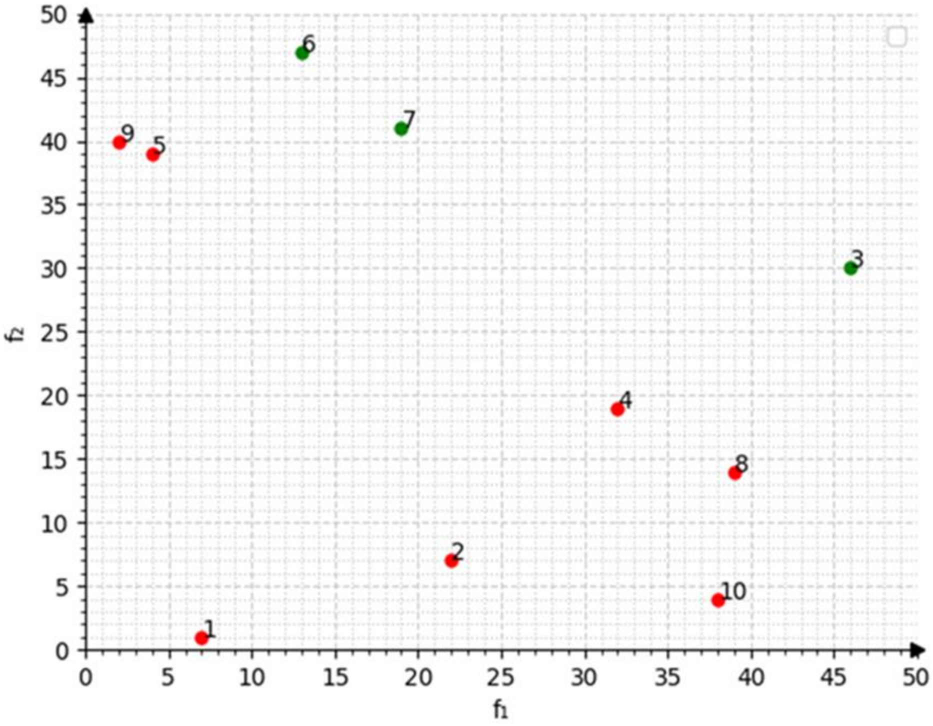
Алгоритм многокритериального ранжирования на основе индекса эффективности

Рассмотрим дискретную многокритериальную аналитическую задачу из примера 5

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_1^i	7	22	46	32	4	13	19	39	2	38
f_2^i	1	7	30	19	39	47	41	14	40	4



Алгоритм многокритериального ранжирования на основе индекса эффективности

Состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Полагаем $i = 1$.

Шаг 2. Вычисляем параметр b_i - число точек, для которых выполняется условие

$$\left(\mathbf{F}^j - \mathbf{F}^i\right) \in \mathbf{\Omega},\ \ j = \overline{1, N},\ i \neq j, \qquad (4)$$

Шаг 3. Вычисляем значение индекса эффективности в виде:

$$\Phi_i = \frac{1}{1 + \dfrac{b_i}{N-1}}. \qquad (5)$$

Шаг 4. Если $i < N$, то полагаем $i = i + 1$ и переходим к шагу 2. Иначе, переходим к шагу 5.

Шаг 5. Из точек множества $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{X}})$ формируем множество $\mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\hat{\mathbf{X}})$ парето-оптимальных решений по правилу:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\hat{\mathbf{X}}) = \left\{ \mathbf{F}^{i}(\mathbf{x}) \in \mathbf{F}(\mathbf{X}) \middle| \; \Phi_{i} = 1 \right\}. \tag{6}$$

Результаты работы алгоритма отображены в таблице: $\mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\mathbf{X}) = \left\{ \mathbf{F}^{3}, \mathbf{F}^{6}, \mathbf{F}^{7} \right\}$. В столбце b_i в скобках указаны номера элементов $\mathbf{F}^{j}$, для которых выполняется условие (4).

Свойства индекса эффективности:

1) $\Phi_{i\,max} = 1$ для всех $\mathbf{F}^{i} \in \mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\mathbf{X})$;
2) $\Phi_{i\,min} = 1/2$;
3) $1/2 \leq \Phi_{i} < 1$, если $\mathbf{F}^{i} \notin \mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\mathbf{X})$.

№	f_1^i	f_2^i	b_i	Φ_i	K_l
1	7	1	7 (2,3,4,6,7,8,10)	0.56	K_3
2	22	7	3(3, 4, 8)	0.75	K_3
3	46	30	0	1	K_1
4	32	19	1(3)	0.9	K_2
5	4	39	2(6, 7)	0.82	K_2
6	13	47	0	1	K_1
7	19	41	0	1	K_1
8	39	14	1(3)	0.9	K_2
9	2	40	2(6, 7)	0.82	K_2
10	38	4	2(3, 8)	0.82	K_2

Задача многокритериальной кластеризации по индексу эффективности

В задаче кластеризации будем предполагать, что множество допустимых альтернативных решений $\hat{\mathbf{X}}$ требуется разбить на три кластера K_1, K_2, K_3, по значению индекса эффективности.

Зададим центры кластеров на интервале $[0.5;\ 1]$:

$$C_1=1,\ C_2=0.85,\ C_2=0.75.$$

Для каждого альтернативного решения $\mathbf{x}^i \in \hat{\mathbf{X}}$ (соответственно $\mathbf{F}^i \in \mathbf{F}\left(\hat{\mathbf{X}}\right)$) определяем кластер K_n в соответствии со следующим алгоритмом.

Шаг 1. В пространстве признаков вычисляем расстояния от $\mathbf{x}^i$ до центров кластеров

$$r_{ij} = \left|\Phi_i - C_j\right|,\ j = \overline{1,\ 3}.$$

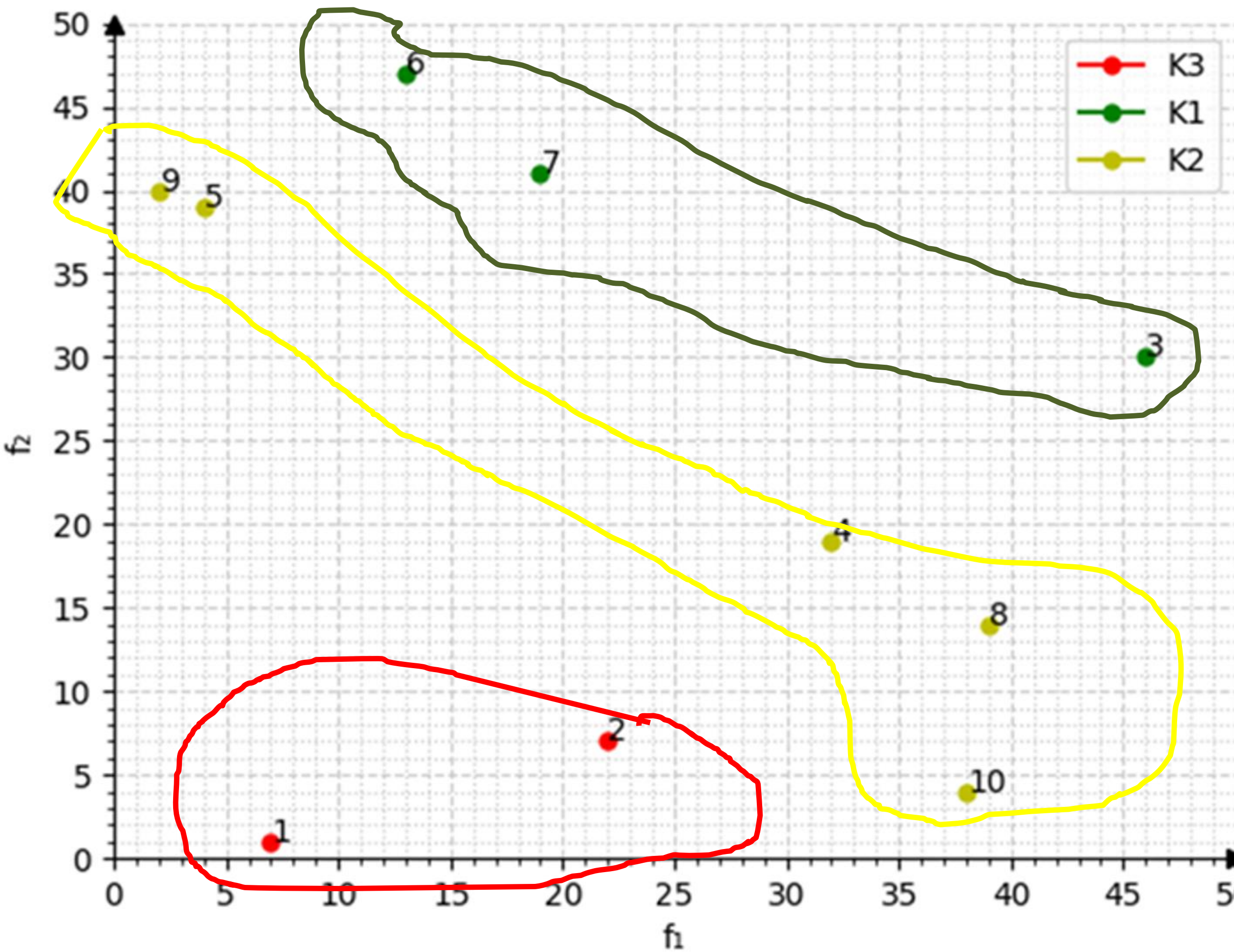
Шаг 2. Вычисляем минимальное расстояние

$$k_i = min\left\{r_{ij}, j = \overline{1,\ 3}\right\}$$

Шаг 3. Определяем номер кластера n, которому принадлежит $\mathbf{x}^i$

$$n = \left\{ j \in \{1,\ 2,\ 3\} \,\middle|\, k_i = r_{ij} \right\}$$

Результаты кластеризации представлены в таблице и отображены на рисунке (зеленым - K_1, желтым - K_2, красным - K_3).



Оптимальность по Слейтеру

Рассмотрим конус доминирования:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{E}_{<}^{m} = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbf{E}^{m} \,\middle|\, r_i < 0,\ i = \overline{1,\ m} \right\} \qquad (1)$$

Конусу доминирования $\mathbf{\Omega}$ на множестве допустимых решений $\mathbf{X}$ многокритериальной аналитической задачи соответствует бинарное отношение строгого предпочтения $\wp$:

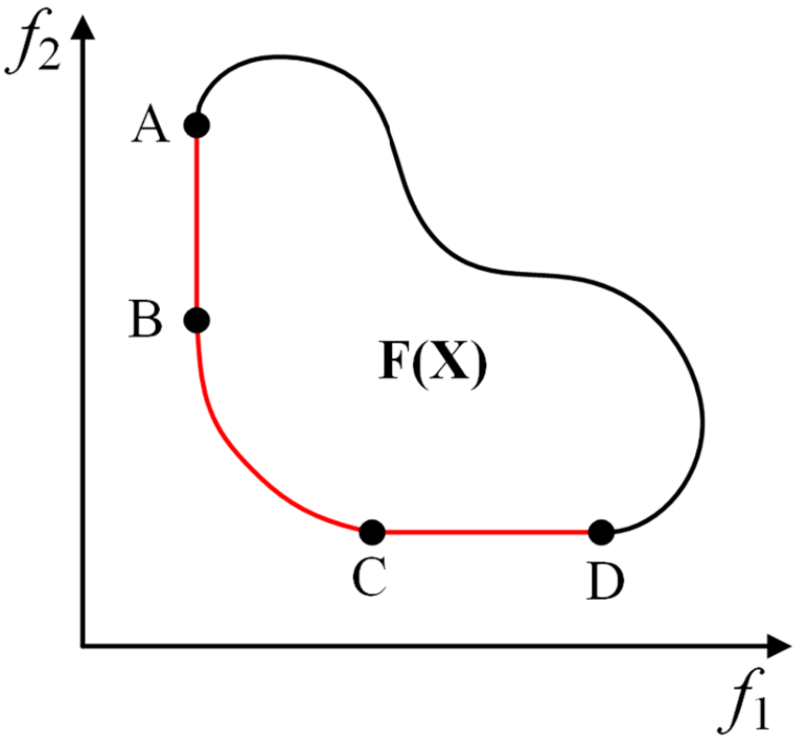
$$\mathbf{x} \wp \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y}) \in \mathbf{\Omega} \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) < \mathbf{F}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{y}),\ i = \overline{1,\ m} \qquad (2)$$

Отношение предпочтения $\wp$ называется отношением Слейтера.

Определение. Допустимое решение $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ называется оптимальным по Слейтеру (слабо эффективным), если на множестве X не существует решения $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}^*$, удовлетворяющего условию $\tilde{\mathbf{x}} \wp \mathbf{x}^*$, т.е. системе неравенств вида (2).

Множество оптимальных по Слейтеру обозначим: $\mathrm{F_S}(\mathrm{X})$.

Взаимосвязь множеств Парето и Слейтера



$$\mathbf{F}_P = \cup BC$$

$$\mathbf{F}_S = \cup ABCD$$

Пример 1.

Множество достижимых векторных оценок в многокритериальной аналитической задаче имеет вид:

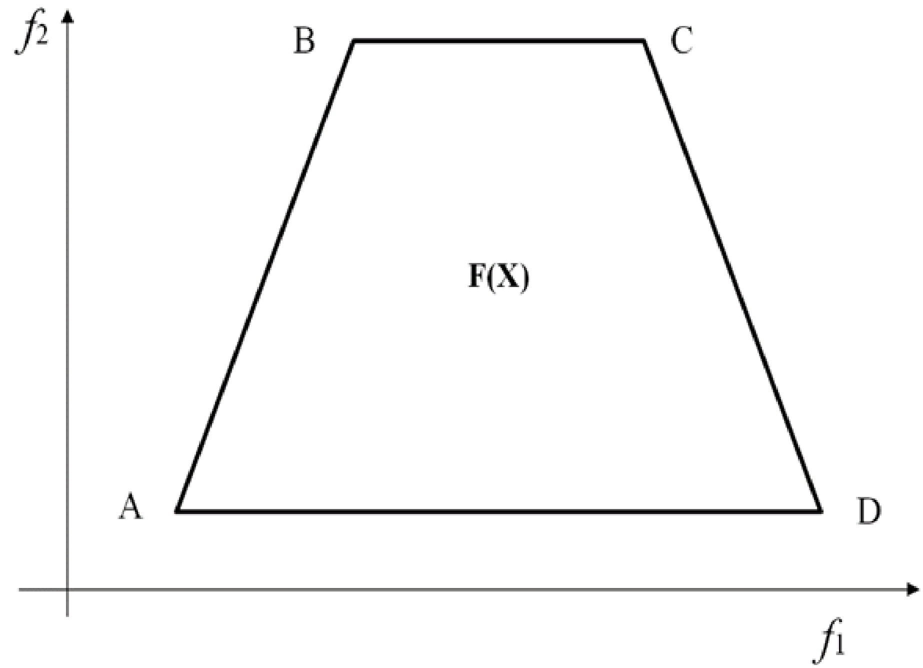
Построить множества решений, оптимальных по Парето и Слейтеру, для следующих задач:

A. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

B. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

C. $f_1(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$

D. $f_1(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}};\ f_2(\mathbf{x}) \to \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}.$



Решение.

A. $\mathbf{F}_{\mathrm{P}} = (\cdot)\mathrm{A}$; $\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = [\mathrm{AD}]$

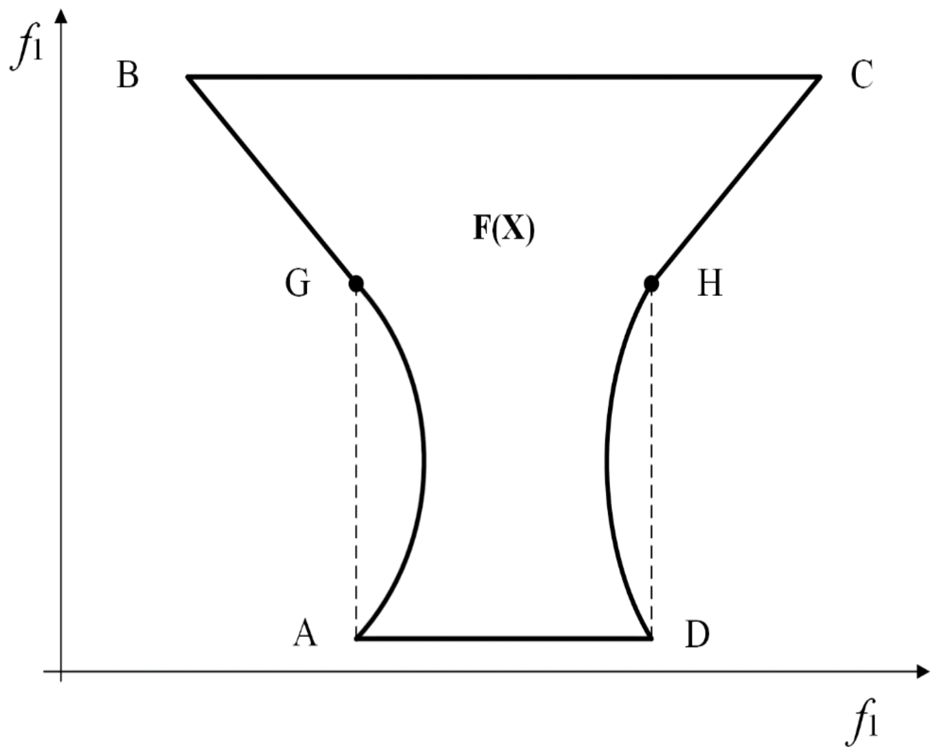
B. $\mathbf{F}_{\mathrm{P}} = [\mathrm{CD}]$; $\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = [\mathrm{BCD}]$

C. $\mathbf{F}_{\mathrm{P}} = (\cdot)\mathrm{D}$; $\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = [\mathrm{AD}]$

D. $\mathbf{F}_{\mathrm{P}} = [\mathrm{AB}]$; $\mathbf{F}_{\mathrm{S}} = [\mathrm{ABC}]$

Пример 2.

Множество достижимых векторных оценок в многокритериальной аналитической задаче имеет вид



Построить множества решений,оптимальных по Парето и Слейтеру для случаев A, B, C, D.

Решение.

A. $\mathbf{F}_\mathrm{P} = [\mathrm{BG}) \cup (\cdot)\mathrm{A}$; $\mathbf{F}_\mathrm{S} = [\mathrm{BG}] \cup [\mathrm{AD}]$

B. $\mathbf{F}_\mathrm{P} = (\cdot)\mathrm{C}$; $\mathbf{F}_\mathrm{S} = [\mathrm{BC}]$

C. $\mathbf{F}_\mathrm{P} = [\mathrm{CH}) \cup (\cdot)\mathrm{D}$; $\mathbf{F}_\mathrm{S} = [\mathrm{CH}] \cup [\mathrm{AD}]$

D. $\mathbf{F}_\mathrm{P} = (\cdot)\mathrm{B}$; $\mathbf{F}_\mathrm{S} = [\mathrm{BC}]$