Модели многокритериальных аналитических задач при неопределенности

Модель многокритериальной аналитической задачи при неопределенности учитывает неопределенность цели, неопределенность внешней среды, и может быть представлена в виде

$$\Gamma = \left\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{z}\right) \right\rangle, \qquad (9.1)$$

где $\mathbf{X} \subset \mathbf{E}^n$ - множество допустимых решений $\mathbf{x}$; $\mathbf{Z} \subset \mathbf{E}^k$ - множество допустимых значений неопределенного фактора $\mathbf{z}$; $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{z}\right) = \left[f_1\left(\mathbf{x}, \mathbf{z}\right), \dots, f_m\left(\mathbf{x}, \mathbf{z}\right) \right]^T \subset \mathbf{E}^m$ - векторный критерий, определенный на декартовом произведении $\mathbf{X} \times \mathbf{Z}$, компоненты которого требуется минимизировать.

Особенность задачи (9.1) состоит в том, что каждому фиксированному $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ соответствует множество значений векторного критерия.

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{Z}\right) = \bigcup_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}\right).$$

Поэтому сравнение любых двух альтернативных решений $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbf{X}$ сводится к сравнению двух множеств $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^1, \mathbf{Z}\right), \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^2, \mathbf{Z}\right) \subset \mathbf{E}^m$.

Принцип векторного минимакса.

Каждому решению $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ поставим в соответствие вектор $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in \mathbf{E}^m$, компоненты которого определяются в виде

$$v_i = \max_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \; i = \overline{1, m}. \qquad (9.2)$$

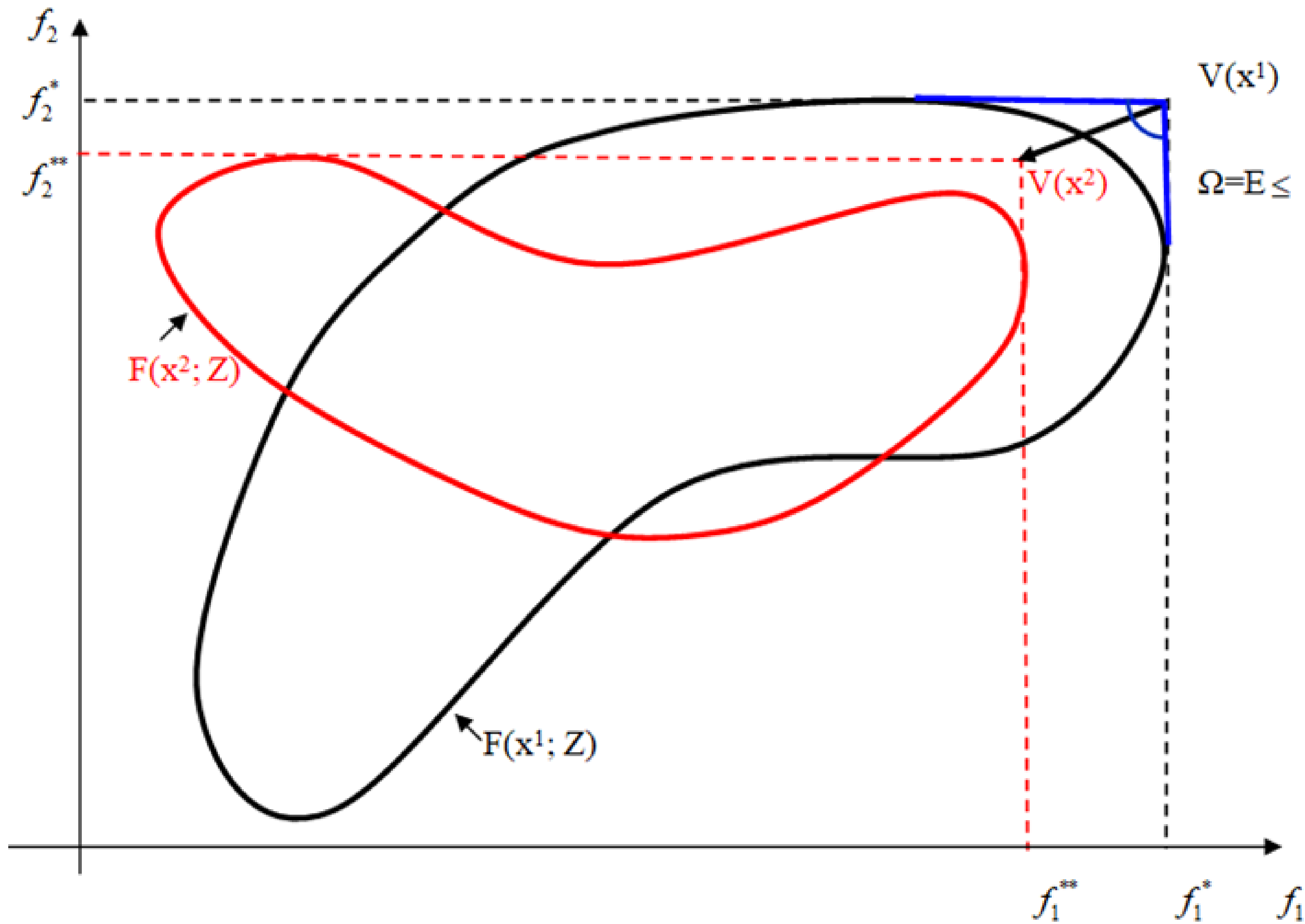
Вектор $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \in \mathbf{E}^m$ определяет на множестве $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{Z})$ точку «крайнего пессимизма»

Определение. Допустимое решение $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{X}$ предпочтительнее, чем $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$, относительно конуса доминирования $\boldsymbol{\Omega} \subset \mathbf{E}^m$ если выполняется условие

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{V}(\mathbf{x}_2) \in \boldsymbol{\Omega}. \qquad (9.3)$$

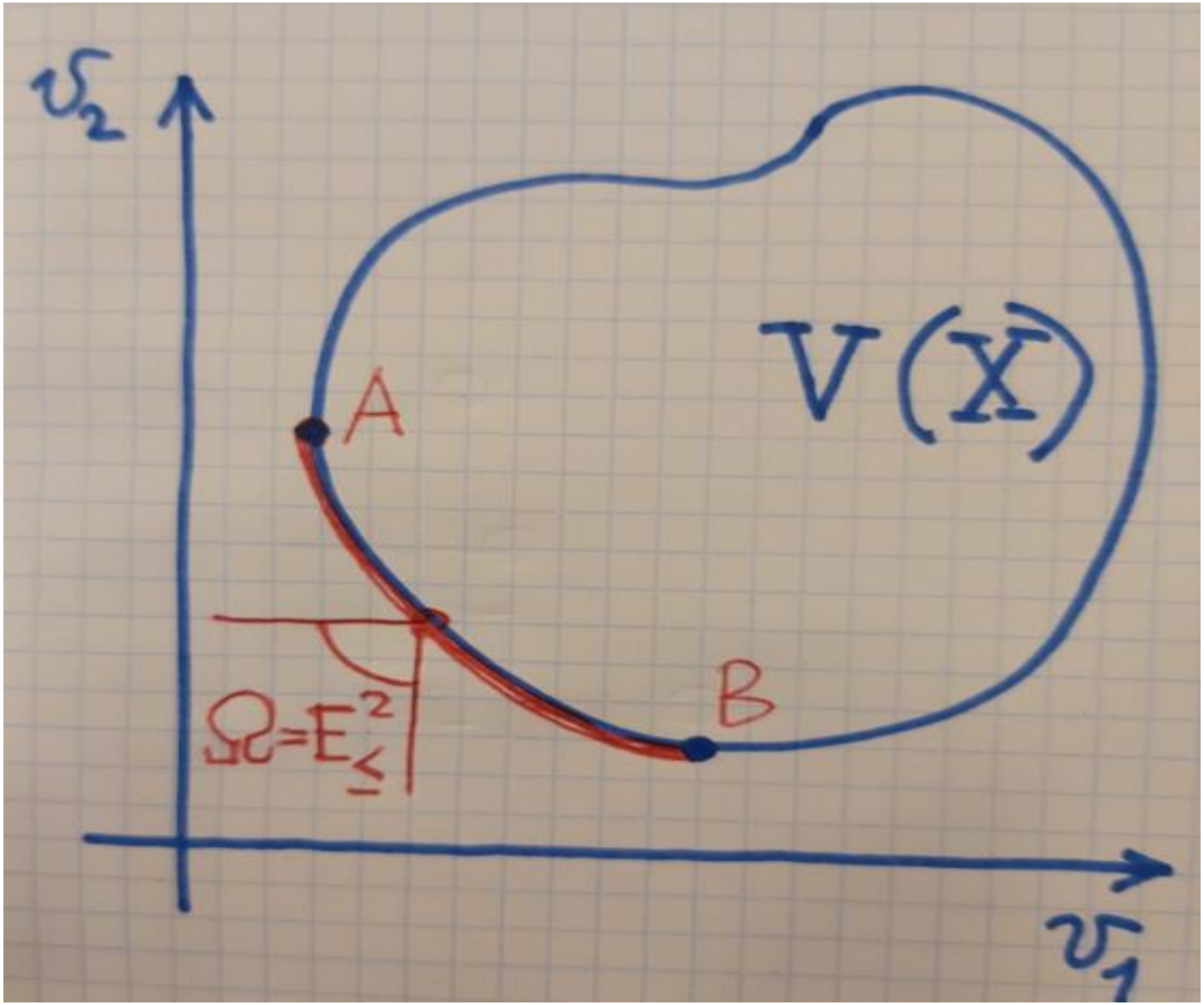
Определение. Допустимое решение $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$ называется векторным минимаксом задачи (9.1), если $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E}^m_{\leq}$, и не существует $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ такого, что

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) - \mathbf{V}\left(\mathbf{x}^*\right) \in \mathbf{E}^m_{\leq}. \qquad (9.4)$$



f_2
f_2^*
f_2^{**}
$V(x^1)$
$V(x^2)$
$\Omega = E_{\leq}$
$F(x^2; Z)$
$F(x^1; Z)$
f_1^{**}
f_1^*
f_1

Определение. Множество всех допустимых решений задачи (9.1), обладающих свойством (9.4), называется **множеством векторных минимаксов задачи (9.1).** Будем обозначать: $\mathbf{X}_P$ и $\mathbf{V}_P = \mathbf{V}\left(\mathbf{X}_P\right)$ - множество векторных минимаксов в пространстве решений и критериальном пространстве соответственно.


v_2
v_1
V(X)
A
B
$\Omega = E^2_{\leq}$

Таким образом, для определения множества векторных минимаксов задачи (9.1) необходимо сформулировать и решить вспомогательную детерминированную многокритериальную задачу

$$\Gamma' = \left\langle \mathbf{X}, \mathbf{V}\left(\mathbf{x}\right)\right\rangle, \qquad (9.5)$$

в которой множество $\mathbf{X} \subset \mathbf{E}^n$ то же, что и в задаче (9.1), компоненты векторной функции $\mathbf{V}\left(\mathbf{x}\right) \in \mathbf{E}^m$ определены в виде (9.2), и их требуется минимизировать. Множество эффективных решений задачи (9.5) является множеством векторных минимаксов задачи (9.1).

Принцип векторного минимаксного сожаления.

Рассмотрим модель многокритериальной аналитической задачи при неопределенности вида (9.1). Каждому значению неопределенного фактора $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$ поставим в соответствие вектор $\mathbf{W}(\mathbf{z}) \subset \mathbf{E}^m$, компоненты которого вычисляются в виде

$$w_i = \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}),\ i = \overline{1, m}. \qquad (9.6)$$

Вектор $\mathbf{W}(\mathbf{z}) \subset \mathbf{E}^m$ определяет на множестве $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{z})$ «идеальную точку»

Построим векторную функцию

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{W}(\mathbf{z}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \qquad (9.7)$$

которая называется векторной функцией риска. Значение функции $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ в точке $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Z}$ характеризует отклонение от «идеальной точки» $\mathbf{W}(\mathbf{z})$ при использовании аналитиком решения $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ при реализации значения неопределенного фактора $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$, и называется **векторным риском или векторным «сожалением»**

Поставим в соответствие задаче (9.1) вспомогательную многокритериальную задачу при неопределенности

$$\Gamma'' = \left\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{U}\left(\mathbf{x}, \mathbf{z}\right) \right\rangle, \tag{9.8}$$

где множества $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ - те же, что в задаче (9.1), а векторная функция риска $\mathbf{U}\left(\mathbf{x}, \mathbf{z}\right)$ определена в виде (9.7).

В задаче (9.8) требуется определить решение

$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, одновременно минимизирующее по возможности все компоненты векторной функции риска $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. При этом необходимо учитывать возможность реализации любого значения неопределенного фактора $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}$.

Задача (9.8) аналогична задаче (9.1), поэтому для ее решения может быть использован **принцип векторного минимакса**.

Применение принципа векторного минимакса для решения задачи (9.8) представляет собой многокритериальное обобщение подхода к решению задачи (9.1) на основе принципа минимаксного сожаления Сэвиджа и называется **принципом векторного минимаксного сожаления.**

Пример. Многокритериальная оценка проектов инфокоммуникационной инфраструктуры в условиях неопределенности.

Представлены 8 проектов: $\mathbf{X}=\left\{x_i,\, i=\overline{1,\,8}\right\}$. Эффективность каждого проекта инфраструктуры x_i оценивается векторным критерием $\mathbf{F}(x_i, z)=\left[f_1(x_i, z), f_2(x_i, z)\right]^T$, где $f_1(x_i, z)$ – ожидаемая годовая прибыль от реализации проекта, $f_2(x_i, z)$ – степень информационной безопасности проектируемой инфраструктуры, и зависит от неопределенного фактора z. Предполагается, что выделено 4 различных состояния неопределенного фактора, каждое из которых означает определенное сочетание состояний внешней среды, влияющих на эффективность инфраструктуры: $\mathbf{Z}=\left\{z_i,\, i=\overline{1,\,4}\right\}$.

Требуется выбрать наиболее предпочтительный проект, используя принципы векторного максимина и векторного минимаксного сожаления

Значения компонент векторного показателя

$\mathbf{F}\left(x_i, z_j\right)$ эффективности заданы в виде

таблицы (9.1).

Таблица 9.1

x_i \ z_j	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	$(3, 6)$	$(6, 4)$	$(12, 7)$	$(7, 9)$
x_2	$(6, 3)$	$(5, 9)$	$(7, 6)$	$(9, 5)$
x_3	$(3, 3)$	$(5, 2)$	$(9, 3)$	$(6, 6)$
x_4	$(2, 6)$	$(4, 5)$	$(6, 7)$	$(5, 8)$
x_5	$(4, 6)$	$(5, 4)$	$(6, 8)$	$(7, 7)$
x_6	$(4, 3)$	$(3, 4)$	$(5, 6)$	$(4, 7)$
x_7	$(7, 2)$	$(5, 7)$	$(9, 6)$	$(8, 8)$
x_8	$(2, 4)$	$(5, 3)$	$(3, 7)$	$(7, 5)$

А. Решение на основе принципа векторного максимина.

Шаг 1. Построим множество точек «крайнего пессимизма» $\mathbf{V}(\mathbf{X})$, используя формулу (9.2) и операцию минимизации:

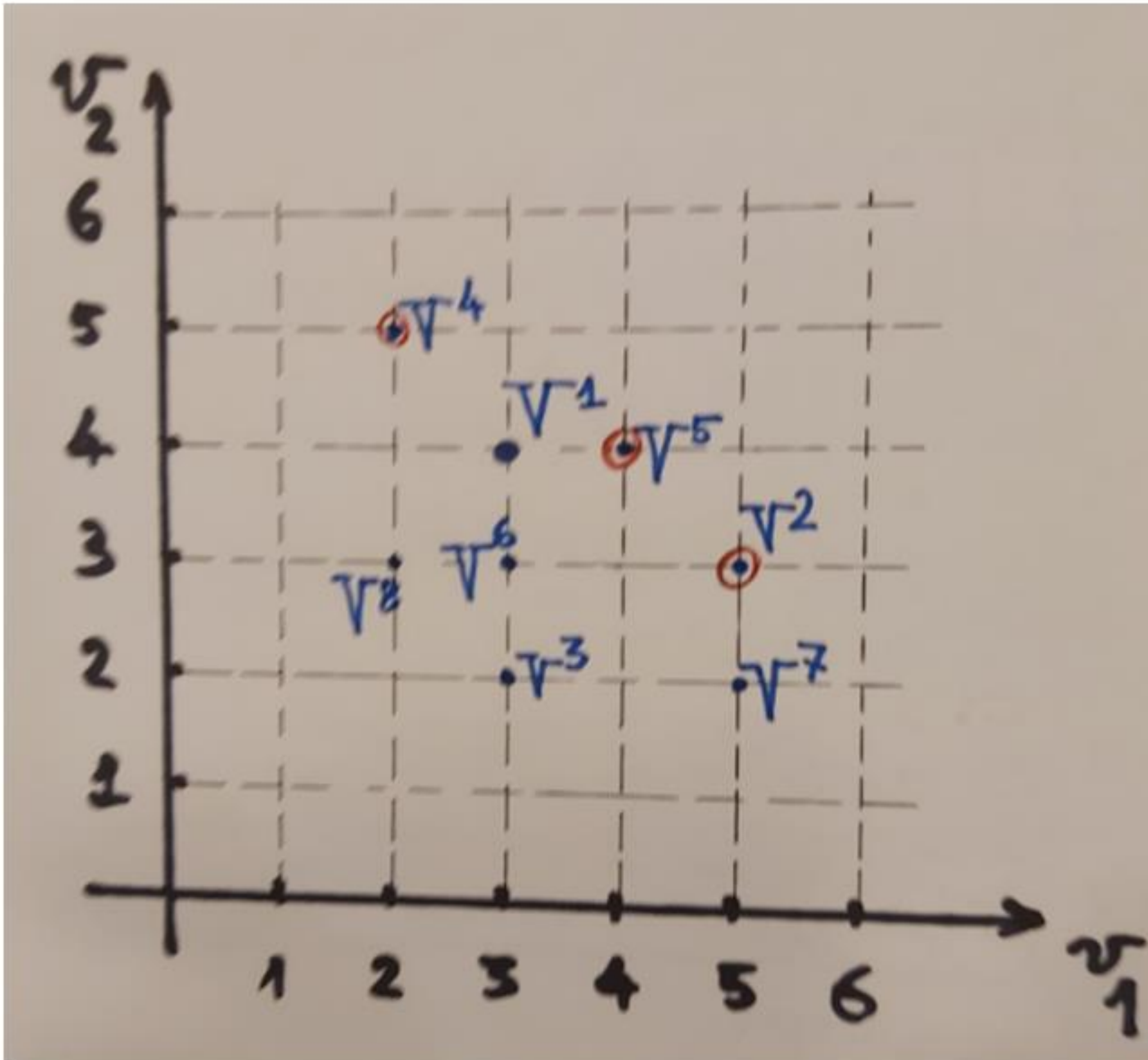
Таблица 9.2

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$v_1(x_i)$	3	5	3	2	4	3	5	2
$v_2(x_i)$	4	3	2	5	4	3	2	3

Шаг 2. Решаем вспомогательную задачу (9.5), используя алгоритм многокритериального ранжирования или алгоритм исключения заведомо неэффективных решений.

Множество эффективных решений задачи (9.5): $\mathbf{V}_P = \{\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_4, \mathbf{V}_5\}$. Множество оптимальных проектов, удовлетворяющих принципу векторного минимакса: $\mathbf{X}_P = \{x_2, x_4, x_5\}$.

Геометрическая интерпретация



Шаг 3. Выбор на множестве векторных максиминов единственного решения. Используем функцию Гермейера:

$$\Phi\left(x_i\right) = min\left\{v_1\left(x_i\right), v_2\left(x_i\right)\right\} .$$

Решаем задачу: $$\Phi\left(x_i\right) \to \max_{x_i \in \mathbf{X}} .$$

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$\Phi\left(x_i\right)$	3	3	2	2	4	3	2	2

Получаем:

$$\Phi\left(x_5\right) = \Phi_{max} = 4.$$

Следовательно, проект x_5 является оптимальным, т.к. имеет наиболее сбалансированные значения компонент точки «крайнего пессимизма».

Б. Решение на основе принципа векторного минимаксного сожаления.

Шаг 1. Построим множество «идеальных точек» $\mathbf{W}(\mathbf{Z})$, используя формулу (9.6) и операцию максимизации:

Таблица 9.3

z_j	z_1	z_2	z_3	z_4
$w_1(z_j)$	7	6	12	9
$w_2(z_j)$	6	9	8	9

Шаг 2. Построим таблицу значений функции векторных рисков $\mathbf{U}\left(x_i, z_j\right)$ по формуле (9.7), используя данные из таблиц 9.1 и 9.3.

Таблица 9.4

x_i \ z_j	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	$(4,0)$	$(0,\ 5)$	$(0,\ 1)$	$(2,0)$
x_2	$(1,3)$	$(1,\ 0)$	$(5,2)$	$(0,\ 4)$
x_3	$(4,3)$	$(1,\ 7)$	$(3,\ 5)$	$(3,\ 3)$
x_4	$(5,\ 0)$	$(2,\ 4)$	$(6,\ 1)$	$(4,\ 1)$
x_5	$(3,\ 0)$	$(1,\ 5)$	$(6,\ 0)$	$(2,\ 2)$
x_6	$(3,\ 3)$	$(3,\ 5)$	$(7,\ 2)$	$(5,\ 2)$
x_7	$(0,\ 4)$	$(1,\ 2)$	$(3,\ 2)$	$(1,\ 1)$
x_8	$(5,\ 2)$	$(1,\ 6)$	$(9,\ 1)$	$(2,\ 4)$

Шаг 3. Решаем вспомогательную задачу (9.8). Для этого построим множество точек «крайнего пессимизма» $\mathbf{V}(\mathbf{X})$, используя формулу (9.2) и данные таблицы 9.4.

Таблица 9.5

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$v_1(x_i)$	4	5	4	6	6	7	3	9
$v_2(x_i)$	5	4	7	4	5	5	4	6

Шаг 4. Применяем алгоритм многокритериального ранжирования или алгоритм исключения заведомо неэффективных решений, используя данные таблицы 9.5. Получаем множество оптимальных решений, удовлетворяющих принципу векторного минимаксного сожаления:

$$\mathbf{V}_P = \left\{\mathbf{V}_7\right\}; \ \mathbf{X}_P = \left\{x_7\right\}.$$

Шаг 5. Выбор на множестве векторных минимаксов единственного решения. Используем функцию Гермейера:

$$\Phi\left(x_i\right) = max\left\{v_1\left(x_i\right), v_2\left(x_i\right)\right\}$$

Решаем задачу: $\Phi\left(x_i\right) \to \min\limits_{x_i \in \mathbf{X}}$

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$\Phi\left(x_i\right)$	5	5	7	6	6	7	4	9

Получаем:

$$\Phi\left(x_7\right) = \Phi_{min} = 4$$

Следовательно, проект x_7 является оптимальным, т.к. имеет наиболее сбалансированные значения компонент точки «крайнего пессимизма».