Модель конфликтной аналитической задачи

$$\Gamma = \left\langle \mathbf{N}, \mathbf{P}, \left\{\mathbf{U}_i\right\}_{i\in\mathbf{N}}, \left\{f_i(\mathbf{u})\right\}_{i\in\mathbf{N}}, \wp \right\rangle$$

$\mathbf{N} = \left\{\overline{1,n}\right\}$ - множество участников конфликта (игроков);

$\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_i$, $i \in \mathbf{N}$- возможности игроков (стратегии);

$f_i(\mathbf{u})$, $i \in \mathbf{N}$ - интересы (выигрыши) игроков;

$\mathbf{P}$ - коалиционная структура, характеризует вид конфликтного взаимодействия игроков.

$\wp$ - принцип оптимальности (описание правил рационального поведения игроков). Должны быть отражены:

- индивидуальная рациональность;
- устойчивость;
- эффективность.

Коалиционная структура:

$$\mathbf{P} = \left\{ \mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_l \mid \mathbf{K}_i \bigcap_{i \neq j} \mathbf{K}_j = \varnothing;\ \bigcup_{i=1}^{l} \mathbf{K}_i = \mathbf{N} \right\}$$

$$\mathbf{K}_i = \left\{ \mathbf{K}_{i\text{д}}, \mathbf{K}_{i\text{и}} \right\}$$

$\mathbf{K}_{i\text{д}}$ - коалиция действия; $\mathbf{K}_{i\text{и}}$ - коалиция интересов.

Пример:

1		**2**		**3**		**4**		**5**	
u_1	f_1	u_2	f_2	u_3	f_3	u_4	f_4	u_5	f_5

$\mathbf{K}_1$	$\mathbf{K}_2$

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\} \quad \mathbf{K}_1 = \{2,3,4\} \quad \mathbf{K}_2 = \{1,5\}$$

$$\mathbf{K}_{1\partial} \Rightarrow \mathbf{u}_{\mathbf{K}_1} = [u_2, u_3, u_4]^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{K}_{1u} \Rightarrow \mathbf{F}_{\mathbf{K}_1} = [f_2, f_3, f_4]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{K}_{2\partial} \Rightarrow \mathbf{u}_{\mathbf{K}_2} = [u_1, u_5]^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{K}_{2u} \Rightarrow \mathbf{F}_{\mathbf{K}_2} = [f_1, f_5]^{\mathrm{T}}$$

Классификация конфликтных моделей аналитических задач

<table>
<tr><th>Признак</th><th colspan="6">Виды моделей</th></tr>
<tr><td>По количеству игроков</td><td colspan="2">1 игрока</td><td colspan="2">2-х игроков</td><td colspan="2">N игроков</td></tr>
<tr><td>По количеству стратегий</td><td colspan="3">Конечные</td><td colspan="3">Бесконечные</td></tr>
<tr><td>По характеру конфликтного взаимодействия</td><td colspan="6">Антагонистические
Бескоалиционные
Коалиционные
Кооперативные
Иерархические</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>По характеру выигрышей</td><td colspan="3">С нулевой суммой</td><td colspan="3">С ненулевой суммой</td></tr>
<tr><td>По виду функций выигрышей</td><td colspan="6">Матричные
Биматричные
Непрерывные
Выпуклые
Сепарабельные
Типа дуэлей и др.</td></tr>
<tr><td>По учету неопределенных факторов</td><td colspan="2">Неопределен-
ность цели</td><td colspan="2">Неопределен-
ность среды</td><td colspan="2">Неопределен-
ность «активного партнера»</td></tr>
<tr><td>По количеству ходов</td><td colspan="3">Одношаговые</td><td colspan="3">Многошаговые</td></tr>
</table>

Матричная игра

Это игра $\mathbf{\Gamma}$ вида (1), в которой:

$\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ - конечные множества;

$f_1\left(u_1, u_2\right),\ f_2\left(u_1, u_2\right)$ - функции дискретного аргумента.

$\mathbf{\Gamma}$:

I \ II	B_1	$\dots$	B_j	$\dots$	B_m
A_1	a_{11}		a_{1j}		a_{1m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i	a_{i1}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{im}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij},\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right]$$

$$f_1\left(A_i, B_j\right) = a_{ij}$$

$$f_2\left(A_i, B_j\right) = -f_1\left(A_i, B_j\right) = -a_{ij}$$

Нижняя цена игры (чистая цена):

$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$; $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$.

$\boxed{\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}}$ $\Rightarrow$ стратегия игрока I. (max min)

Верхняя цена игры (чистая цена):

$\beta_j = \max\limits_i \alpha_{ij}$, $j = \overline{1,n}$; $\beta = \min\limits_j \beta_j$

$\boxed{\beta = \min\limits_j \max\limits_i \alpha_{ij}}$ $\Rightarrow$ стратегия игрока II (min max)

Теорема 1. В матричной игре нижняя чистая цена НЕ превосходит верхней чистой цены игры.

Опр. Если для чистых стратегий A_i и B_j имеет место $\alpha = \beta = v$, то число v наз. чистой ценой игры.
Пара чистых стратегий (A_i, B_j) наз. седловой точкой матричной игры, а элемент a_{ij} матрицы A наз. седловым элементом платежной матрицы.

Пример 1.

Две IT-компании продают услуги на телекоммуникационном рынке. Для увеличения своей доли на рынке компании используют рекламу:

A_1, B_1 – на TV;

A_2, B_2 – на радио;

A_3, B_3 – по Интернет;

A_4, B_4 – в прессе.

a_{ij} – доля рынка, которую выиграет компания I у компании II при использ. стратегий A_i и B_j.

9

Платежная матрица:

$$A = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha_i \\ -3 \\ 5 \\ -9 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 8 & 5 & 9 & 8 \end{array} \; \beta_j & \end{array}$$

Найти решение игры.

$\alpha_1 = \min\limits_j a_{1j} = -3$

$\alpha_2 = 5$

$\alpha_3 = -9$

$\alpha_4 = 0$

$\alpha = \max\limits_i \alpha_i = 5$

$\beta_1 = \max\limits_i a_{i1} = 8$

$\beta_2 = 5$

$\beta_3 = 9$

$\beta_4 = 8$

$\beta = 5 = \min\limits_j \beta_j$

$\alpha = \beta = v = 5$ – чистая цена игры

$\Downarrow$

(A_2, B_2) – оптимальные стратегии. (седловая точка).

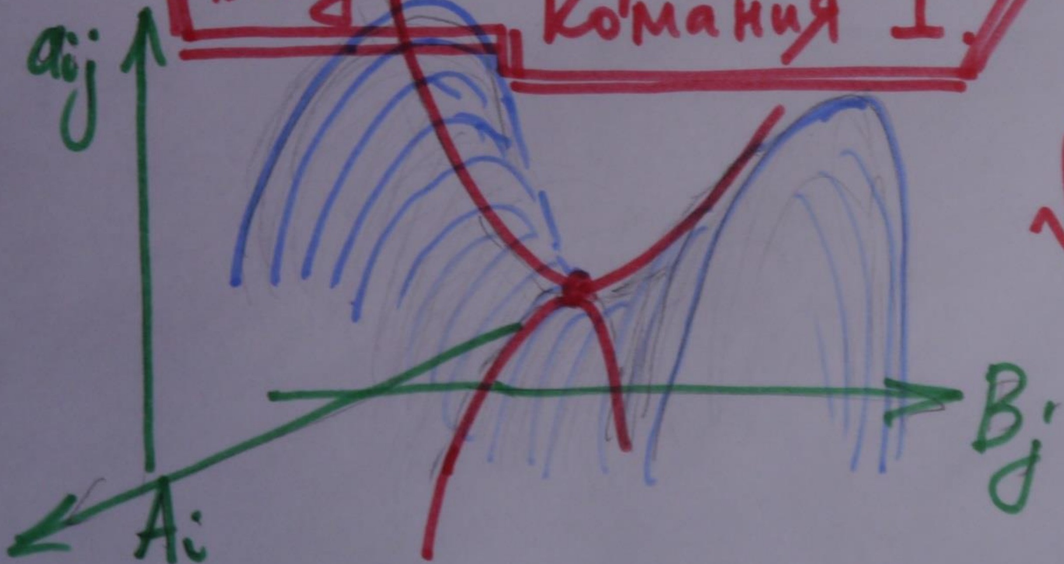
Вывод: рекламу надо вести по радио

!

Всегда выигрывает компания I.

это точка равновесия

!



Пример 2. Каждый из игроков I и II может записать независимо от другого цифру: 1, 2, 3.

Платежная матрица формируется в соответствии с алгоритмом: $a_{ij} = n_1 - n_2$

Цель каждого игрока – максимизация своего выигрыша.

Составить платежную матрицу.

Найти оптимальные стратегии.

$$\begin{array}{rccc|c}
 & & & & \alpha_i \\
 & 0 & -1 & -2 & -2 \\
A = & 1 & 0 & -1 & -1 \\
 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\beta_j & 2 & 1 & 0 &
\end{array}$$

(A_3, B_3) – оптимальные стратегии – седловая точка игры.

Пример 3. Каждый из игроков I и II может записать независимо от другого цифру: 1, 2, 3, 4.

Платежная матрица имеет вид:

$$
\begin{array}{cc}
A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha_i \\ -3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\
\beta_j \quad \begin{array}{cccc} 5 & 7 & 8 & 9 \end{array} &
\end{array}
$$

$\alpha = \max_i a_i = 3$

$\beta = \min_j \beta_j = 5$

Нижняя чистая цена игры: $\alpha = 3$.

Т.е. при выборе стратегии A_2 (т.е. будет записывать число 2) игрок I получит выигрыш $\geqslant 3$ ед.

Верхняя цена игры: $\beta = 5$.

Т.е. при выборе B_1 (будет записывать 1) игрок II проиграет не более ($\leq$) 5 ед.

Замечание. Решение игры в чистых стратегиях отсутствует.

Игры без седловых точек

Опр. Смешанной стратегией игрока I наз. вектор $p = [p_1, \dots, p_m]^T$, где $p_i \geqslant 0$, $\sum\limits_i p_i = 1$. Аналогично, $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ – смешанная стратегия игрока II, где $q_j \geqslant 0$,

$$\sum_j q_j = 1.$$

p_i, q_j – вероятности применения чистых стратегий A_i и B_j, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

Опр. Ф-ция $f(p,q)$:

$$f(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,p_i\,q_j \qquad (2)$$

называется платежной ф-цией матричной игры с матрицей $A=[a_{ij}]_{m\times n}$

Обозначим:

$$S_m=\left\{p=[p_1,\dots,p_m]^T \;\middle|\; p_i\geq 0,\ i=\overline{1,m};\ \sum_{i=1}^{m}p_i=1\right\}.$$

$$S_n=\left\{q=[q_1,\dots,q_n]^T \;\middle|\; q_j\geq 0,\ j=\overline{1,n};\ \sum_{j=1}^{n}q_j=1\right\}.$$

Игра:

$$\Gamma = \left\langle S_m, S_n, f(p,q) \right\rangle \quad (3)$$

называется <u>смешанным расширением</u> матричной игры с матрицей A.

<u>Замечание</u>. Чистые стратегии игроков явл. подмножествами S_m и S_n: чистой стратегии A_i соотв. вектор $p = [0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0 \dots 0]^T$ с компонентами:

$$[p_i = 1,\ p_k = 0,\ k = \overline{1,m},\ k \neq i]^T.$$

Опр. Смешанные стратегии:
$p^* = [p_1^*, \dots, p_m^*]^T$ и $q^* = [q_1^*, \dots, q_n^*]^T$
в игре (3) наз. оптимальными, если
$\forall p \in S_m, q \in S_n$ выполняется условие:

$$f(p, q^*) \le f(p^*, q^*) \le f(p^*, q)$$

Опр. Нижняя цена матричной игры в смешанных стратегиях: $\alpha = \max\limits_{p \in S_m} \min\limits_{q \in S_n} f(p, q)$

Верхняя цена в смешанных стратегиях:

$$\beta = \min_{q \in S_n} \max_{p \in S_m} f(p, q).$$

Теорема (Дж. фон Нейман) - Основная теорема матричных игр.

Любая матричная игра имеет цену в смешанных стратегиях, т.е.

$$v = \max_{p \in S_m} \min_{q \in S_n} f(p,q) = \min_{q \in S_n} \max_{p \in S_m} f(p,q) =$$

$$= f(p^*, q^*).$$

Это означает:

$$f(p^*, q^*) = \min_{q \in S_n} f(p^*, q) = \max_{p \in S_m} f(p, q^*)$$