Модель аналитической задачи, решаемой в условиях неопределенности среды («игра с природой»)

Постановка задачи

$$\Gamma = \left\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{z}\right)\right\rangle \qquad (1)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}; \quad \mathbf{z} \in \mathbf{Z}; \quad \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{z}\right) \to \max$$

Особенность задачи (1):

При $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ значение $\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}\right)$ известно лишь

с точностью до множества

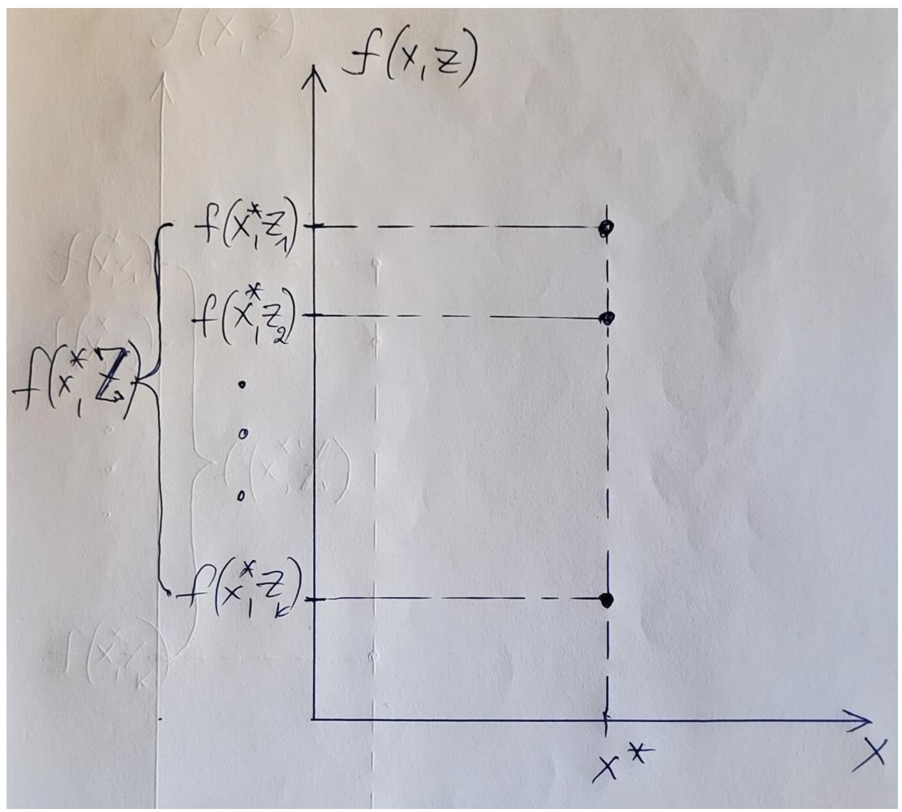
$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{Z}\right) = \bigcup_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} \mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{Z})$$

Рассмотрим вариант постановки задачи (1), когда

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = f(\mathbf{x},\mathbf{z})$$ - скалярный критерий

Множество $$f(\mathbf{x}^*,\mathbf{Z}) = \bigcup_{\mathbf{z}\in\mathbf{Z}} f(\mathbf{x}^*,\mathbf{Z})$$

интерпретируется в виде



Будем рассматривать задачи:

$X = \{x_i,\ i=\overline{1,m}\}$ ← конечные мн-ва

$Z = \{z_j,\ j=\overline{1,n}\}$

Задача (1) в табличном виде:

Q:

$x_i \backslash z_j$	z_1	....	z_j	...	z_n
x_1	q_{11}	..	q_{1j}		q_{1n}
...	...		...		...
x_i	q_{i1}	...	q_{ij}	..	q_{in}
...					
x_m	q_{m1}	...	q_{mj}	...	q_{mn}
	β_1	...	β_j	...	β_m

$\underbrace{\beta_j = \max_{k=\overline{1,m}} q_{kj}}$ → $\beta_1 \ \dots \ \beta_j \ \dots \ \beta_m$

$Q = [q_{ij},\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}]$ – матрица выигрышей (последствий).

Матрица рисков (сожалений)

R:

$x_i \backslash z_j$	z_1	…	z_j	…	z_n
x_1	r_{11}	…	. . . .	.	r_{1n}
…	…	…	…	..	..
x_i	..		r_{ij}		..
…					
x_m	r_{m1}	.	. . .	.	r_{mn}

$$r_{ij} = \beta_j - q_{ij} = \max_{k=\overline{1,m}} q_{kj} - q_{ij}$$

$$R = [r_{ij},\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}].$$

Пример 1. Пересчитать: $Q \to R$

Q:

$x \backslash z$	z_1	z_2	z_3
x_1	250	200	100
x_2	200	230	120
x_3	100	240	260

$\beta_1 = \max\{250; 200; 100\} = 250$

$\beta_2 = \max\{200; 230; 240\} = 240$

$\beta_3 = \max\{100; 120; 260\} = 260$

$r_{11} = \beta_1 - q_{11} = 0$

$r_{12} = \beta_2 - q_{12} = 40$

$r_{13} = \beta_3 - q_{13} = 160$

и т.д.

R:

$x \backslash z$	z_1	z_2	z_3
x_1	0	40	160
x_2	50	10	140
x_3	150	0	0

Критерии ПР в условиях неопределенности

1. Критерий Вальда (максиминный) (крайний пессимизм)
2. Критерий максимума (крайний оптимизм). (максимаксный)
3. Критерий Сэвиджа (минимальных сожалений).
4. Критерий Гурвица (пессимизма-оптимизма).
5. Критерий Лапласа
6. Критерий Байеса.

(Вероятностные)

1. Критерий Вальда

1) Для $\forall x_i$ вычисляем:

$$a_i = \min_{j=\overline{1,n}} q_{ij}$$

2) Далее, вычислить:

$$a_{i_B} = \max_{i=\overline{1,m}} a_i = a^*$$

$$\Downarrow$$

x_{i_B} – рекомендуемое решение.

2. Критерий максимума.

1) $\forall x_i$ вычислить

$$a_i = \max_{j=\overline{1,n}} q_{ij}.$$

2) Далее вычислить

$$a_{i_M} = \max_{i=\overline{1,m}} a_i = a^*$$

$$\Downarrow$$

x_{i_M} – рекомендуемое решение.

3. Критерий Сэвиджа.

1) $\forall x_i$ вычислить $b_i = \max\limits_{j=\overline{1,n}} r_{ij}$

2). Вычислить: $b_{ic} = \min\limits_{i=\overline{1,n}} b_i = b^*$

$$\Downarrow$$

x_{ic} – рекомендуемое решение.

4. Критерий Гурвица.

1). Выбираетае весовой коэф-т $\lambda \in [0;1]$, характеризующий склонность к пессимизму ($\lambda_1=0,2$; $\lambda_2=0,5 \Rightarrow \lambda_2$ отражает бо́льший пессимизм).

2). Вычислить $\forall x_i$:

$$c_i = \lambda \min_{j=\overline{1,n}} q_{ij} + (1-\lambda) \max_{j=\overline{1,n}} q_{ij}$$

3) Вычислить : $c_{ir} = \max\limits_{i=\overline{1,m}} c_i \Rightarrow x_{ir}$ - реком. реш.

*) $\lambda=1$ - критерий Вальда; $\lambda=0$ - критерий максимума.

5. Критерий Лапласа

(принцип недостаточного основания)

Полагается, что все состояния $z_j, j=\overline{1,n}$ – равновероятны.

1). $\forall z_j \longrightarrow p_j = \frac{1}{n}$

2) $\forall x_i$ вычислить: $d_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ –

– среднее знач. выигрыша при x_i.

3). Вычислить $d_{iл} = \max\limits_{i=\overline{1,m}} d_i$ (для Q)

(Для R: $d_{iл} = \min\limits_{i=\overline{1,m}} d_i$,) $d_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$)

6. Критерий Байеса

Используется при известном распределении вероятностей различных сост. среды.

Z	Z_1	...	Z_j	...	Z_n
P	p_1		p_j		p_n

1). $\forall x_i$ вычислить средний выигрыш

$$\overline{q}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{ij}$$

2) Вычислить:

$$\overline{q}_{iБ} = \max_{i=\overline{1,n}} \overline{q}_i \Rightarrow x_{iБ} \text{ - рекоменд. решение}$$

(Для R: $\overline{r}_i$ - ср. риск x_i; $\overline{r}_{iБ} = \min_{i=\overline{1,m}} \overline{r}_i$).

Пример.

Представлены 8 проектов информационно-вычислительной системы (ИВС). Эффективность каждого проекта зависит от различных неопределенных факторов. Предполагается, что выделено 4 различных состояния, каждое из которых означает определенное сочетание внешних факторов, влияющих на эффективность проектируемой ИВС. Экономическая эффективность отдельных типов ИВС задана матрицей Q.

Сформировать матрицу «голосования», используя критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица ( ), Байеса (p=[0,1; 0,4; 0,4; 0,1], Лапласа. Принять решение о выборе типа ИВС.

$\mathbf{Q} =$

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	10	6	3	2
x_2	10	5	4	8
x_3	7	7	2	3
x_4	3	8	6	5
x_5	3	10	6	4
x_6	9	6	12	8
x_7	6	8	7	16
x_8	12	9	7	14

1. **Критерий Вальда.**

Минимальный элемент в матрице **Q** по строке: $a_i = min\, q_{ij}$

a_i	$min\, q_{ij}$
a_1	2
a_2	4
a_3	2
a_4	3
a_5	3
a_6	6
a_7	6
a_8	7

Максимальный элемент по столбцу: $a^* = \max a_i = a_8$

Оптимальное решение по критерию Вальда: x_8

2. Критерий Сэвиджа

Матрица рисков: $Q \to R$.

$$\beta_j = \max q_{ij}$$

$$\beta = [\,12\ 10\ 12\ 16]$$

$$r_{ij} = \beta_j - q_{ij}$$

R =

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	2	4	9	14
x_2	2	5	8	8
x_3	5	3	10	13
x_4	9	2	6	11
x_5	9	0	6	12
x_6	3	6	0	8
x_7	6	2	5	0
x_8	0	1	5	2

Максимальный элемент по строке в матрице рисков: $b_i = \max r_{ij}$

b_1	14
b_2	8
b_3	13
b_4	11
b_5	12
b_6	8
b_7	6
b_8	5

Минимальный элемент по столбцу: $b^* = \min b_i$

$$b^* = b_8 = 5$$

Оптимальное решение по критерию Сэвиджа: $\mathbf{x_8}$

3. **Критерий Гурвица (γ = 0.6).** Соответствует условию:

$$G_i = \gamma * \min q_{ij} + (1-\gamma) * \max q_{ij}$$

min_1	2
min_2	4
min_3	2
min_4	3
min_5	3
min_6	6
min_7	6
min_8	7

max_1	10
max_2	10
max_3	7
max_4	8
max_5	10
max_6	12
max_7	16
max_8	14

G_1	$0.6 * 2 + (1-0.6) * 10 = 5{,}2$
G_2	$0.6 * 4 + (1-0.6) * 10 = 6{,}4$
G_3	$0.6 * 2 + (1-0.6) * 7 = 4$
G_4	$0.6 * 3 + (1-0.6) * 8 = 5$
G_5	$0.6 * 3 + (1-0.6) * 10 = 5{,}8$
G_6	$0.6 * 6 + (1-0.6) * 12 = 8{,}4$
G_7	$0.6 * 6 + (1-0.6) * 16 = 10$
G_8	$0.6 * 7 + (1-0.6) * 14 = 9{,}8$

Максимальный элемент : $c^* = \max G_i$

$$c^* = \max G_7 = 10$$

Оптимальное решение по критерию Гурвица: x_7

4. **Критерий Байеса.** Исходные условия: $p = [0.1\ 0.4\ 0.4\ 0.1]$
Вычисляем:

$$\bar{d_\imath} = \sum_{j}^{n} p_j q_{ij}$$

d_1	4,8
d_2	5,4
d_3	4,6
d_4	6,4
d_5	7,1
d_6	8,9
d_7	8,2
d_8	9

Максимальный элемент: $\overline{d_\imath^*} = \max \bar{d}_i$

$$\overline{d_\imath^*} = d_8 = 9$$

Оптимальное решение по критерию Байеса: $\mathbf{x_8}$

5. Критерий Лапласа

Вычисляем:

$$f_i = \frac{1}{n} * \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \text{ , где } n = 4$$

f_1	5,25
f_2	6,75
f3	4,75
f4	5,5
f5	5,75
f6	8,75
f7	9,25
f8	10,5

Максимальный элемент: $f_i^* = \max f_i$

$$f_i^* = f_8 = 10{,}5$$

Оптимальное решение по критерию Лапласа: x_8

Матрица «голосования»:

Критерий \\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\ Проект	Вальда	Сэвиджа	Гурвица	Байеса	Лапласа	$\sum$
x_1						**0**
x_2						**0**
x_3						**0**
x_4						**0**
x_5						**0**
x_6						**0**
x_7			+			**1**
x_8	+	+		+	+	**4**