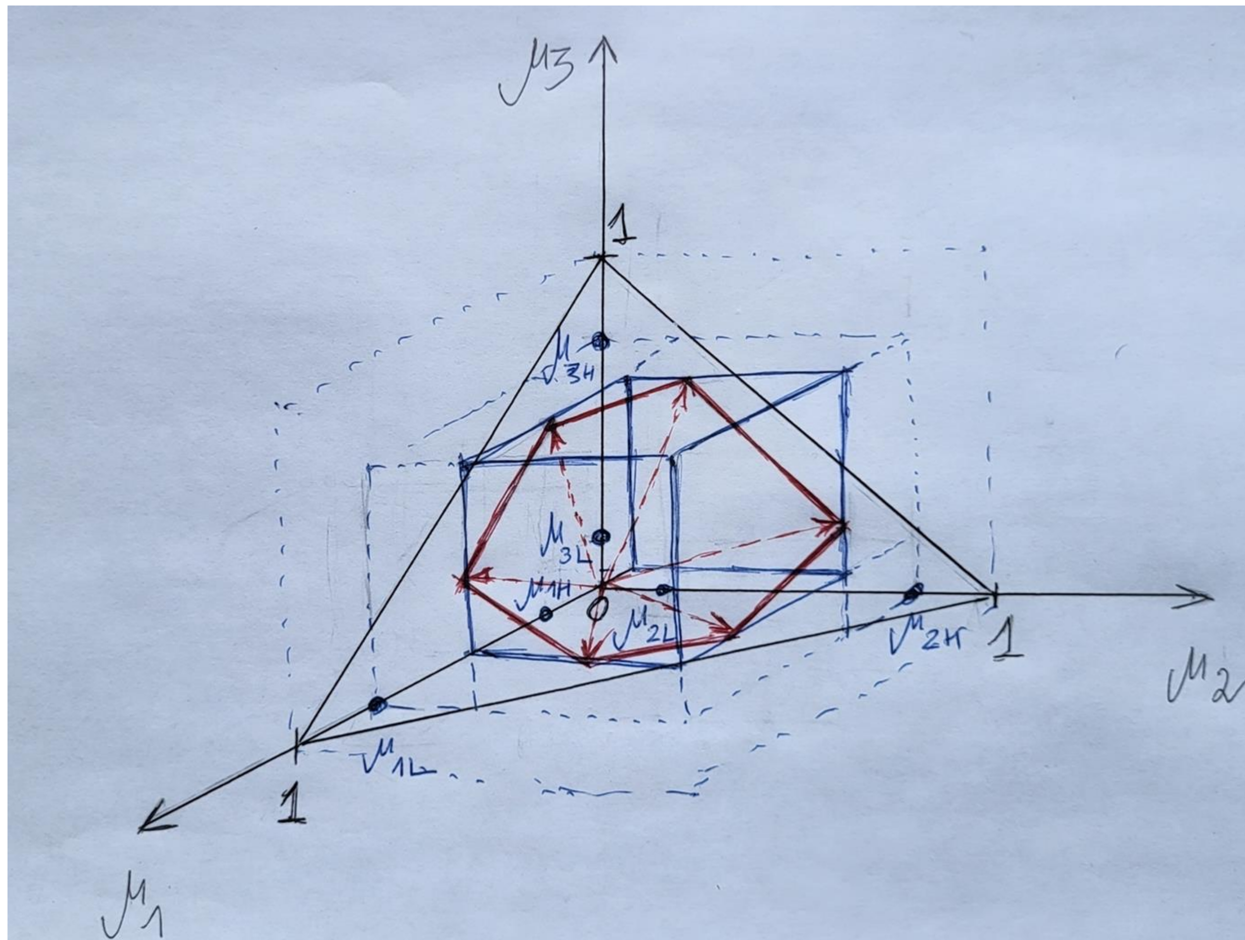
## Полиэдральный конус доминирования как функция интервалов неопределенности весовых коэффициентов компонентов векторного показателя эффективности.

Предполагаем, что бинарное отношение строгого предпочтения задается в виде интервала неопределенности вектора весовых коэффициентов:

$$\mathbf{0}_m \leqq \boldsymbol{\mu}_L \leq \boldsymbol{\mu} \leqq \boldsymbol{\mu}_H \leqq \mathbf{1}_m \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \qquad (2)$$



## Полиэдральный конус доминирования как функции интервалов неопределенности весовых коэффициентов компонентов векторного показателя эффективности

Предполагаем, что

$$\mathbf{0}_m \leqq \boldsymbol{\mu}_L \leqq \boldsymbol{\mu} \leqq \boldsymbol{\mu}_H \leqq \mathbf{1}_m \quad , \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \quad . \qquad (2)$$

Матрица конуса доминирования $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\mu}_L, \boldsymbol{\mu}_H)$$

# Алгоритм построения конуса доминирования

**Шаг 1**. В пространстве весовых коэффициентов построим гиперпараллелепипед $\mathbf{\Pi}$, все точки которого удовлетворяют условиям (1), (2). Пронумеруем все вершины $\pi \in \mathbf{\Pi}$ с помощью бинарного кода Грея (БКГ). Все БКГ представим в виде строк $\mathbf{t}^i$, $i = \overline{0, 2^{m-1}}$, таблицы $\mathbf{T}_{\Pi}$. Будем считать, что если в какой-либо строке $\mathbf{t}^i \in \mathbf{T}_{\Pi}$ $j$-й разряд справа $t_j = 0$, то $j$-я координата $i$-ой вершины $\pi^i$ гиперпараллелепипеда $\mathbf{\Pi}$ равна $\mu_{jL}$. Если $t_j = 1$, то $j$-я координата $i$-ой вершины $\mathbf{\Pi}$ равна $\mu_{jH}$.

Далее полагаем $i = 0$ и переходим к шагу 2.

Соответствие между таблицами $\mathbf{T}_{\Pi}$ и $\mathbf{\Pi}$ для $m = 3$.

$$\mathbf{T}_{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \mu_{3L} & \mu_{2L} & \mu_{1L} \\ \mu_{3L} & \mu_{2L} & \mu_{1H} \\ \mu_{3L} & \mu_{2H} & \mu_{1H} \\ \mu_{3L} & \mu_{2H} & \mu_{1L} \\ \mu_{3H} & \mu_{2H} & \mu_{1L} \\ \mu_{3H} & \mu_{2H} & \mu_{1H} \\ \mu_{3H} & \mu_{2L} & \mu_{1H} \\ \mu_{3H} & \mu_{2L} & \mu_{1L} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi^0(\mu_{1L}, \mu_{2L}, \mu_{3L}) \\ \pi^1(\mu_{1H}, \mu_{2L}, \mu_{3L}) \\ \pi^2(\mu_{1L}, \mu_{2H}, \mu_{3L}) \\ \pi^3(\mu_{1L}, \mu_{2H}, \mu_{3L}) \\ \pi^4(\mu_{1L}, \mu_{2H}, \mu_{3H}) \\ \pi^5(\mu_{1H}, \mu_{2H}, \mu_{3H}) \\ \pi^6(\mu_{1H}, \mu_{2L}, \mu_{3H}) \\ \pi^1(\mu_{1L}, \mu_{2L}, \mu_{3H}) \end{cases}$$

Шаг 2. Осуществляем попарное сравнение строк $\mathbf{t} \in \mathbf{T}_{\Pi}$. Если выявлены строки $\mathbf{t}^{k}$ и $\mathbf{t}^{l}$, отличающиеся друг от друга одним разрядом, то данной паре $\left(\mathbf{t}^{k}, \mathbf{t}^{l}\right)$ соответствует пара вершин в таблице $\mathbf{\Pi}$, образующая ребро в $\mathbf{\Pi}$. Переходим к шагу 3. Иначе переходим к шагу 5.

Шаг 3. Осуществляем анализ положения вершин $\mathbf{t}^k$ и $\mathbf{t}^l$ относительно гиперплоскости

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i - 1 = 0,$$

определяющей условие нормировки компонентов вектора весовых коэффициентов.

Если $L(\mathbf{t}^k)L(\mathbf{t}^l) \leqq 0$, то это означает, что гиперплоскость $L(\boldsymbol{\mu}) = 0$ пересекает ребро $(\mathbf{t}^k, \mathbf{t}^l) \in \mathbf{\Pi}$. Полагаем $i = i + 1$ и переходим к шагу 4.

Иначе, если $L(\mathbf{t}^k)L(\mathbf{t}^l) > 0$, то гиперплоскость $L(\boldsymbol{\mu}) = 0$ не пересекает ребро $(\mathbf{t}^k, \mathbf{t}^l)$. Переходим к шагу 5.

Шаг 4. Вычисляем точку пересечения $\mathbf{b}^{(i)}$ ребра $(\mathbf{t}^k, \mathbf{t}^l)$ с гиперплоскостью $L(\boldsymbol{\mu}) = 0$ и записываем ее координаты в виде строки с номером $i$ в матрицу $\mathbf{B}$.

Шаг 5. Проверяем, все ли пары строк $(\mathbf{t}^k, \mathbf{t}^l)$ таблицы $\mathbf{T}_{\text{п}}$ просмотрены.

Если да, то полагаем $p = i$, заканчиваем формирование матрицы $\mathbf{B}$ размером $[p \times m]$ и переходим к шагу 6. Иначе, переходим к шагу 2.

Шаг 6. Построим конус доминирования в виде:

$$\mathbf{\Omega} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbf{E}^m \,\middle|\, \mathbf{Bz} \leqq \mathbf{0}_p \right\}.$$

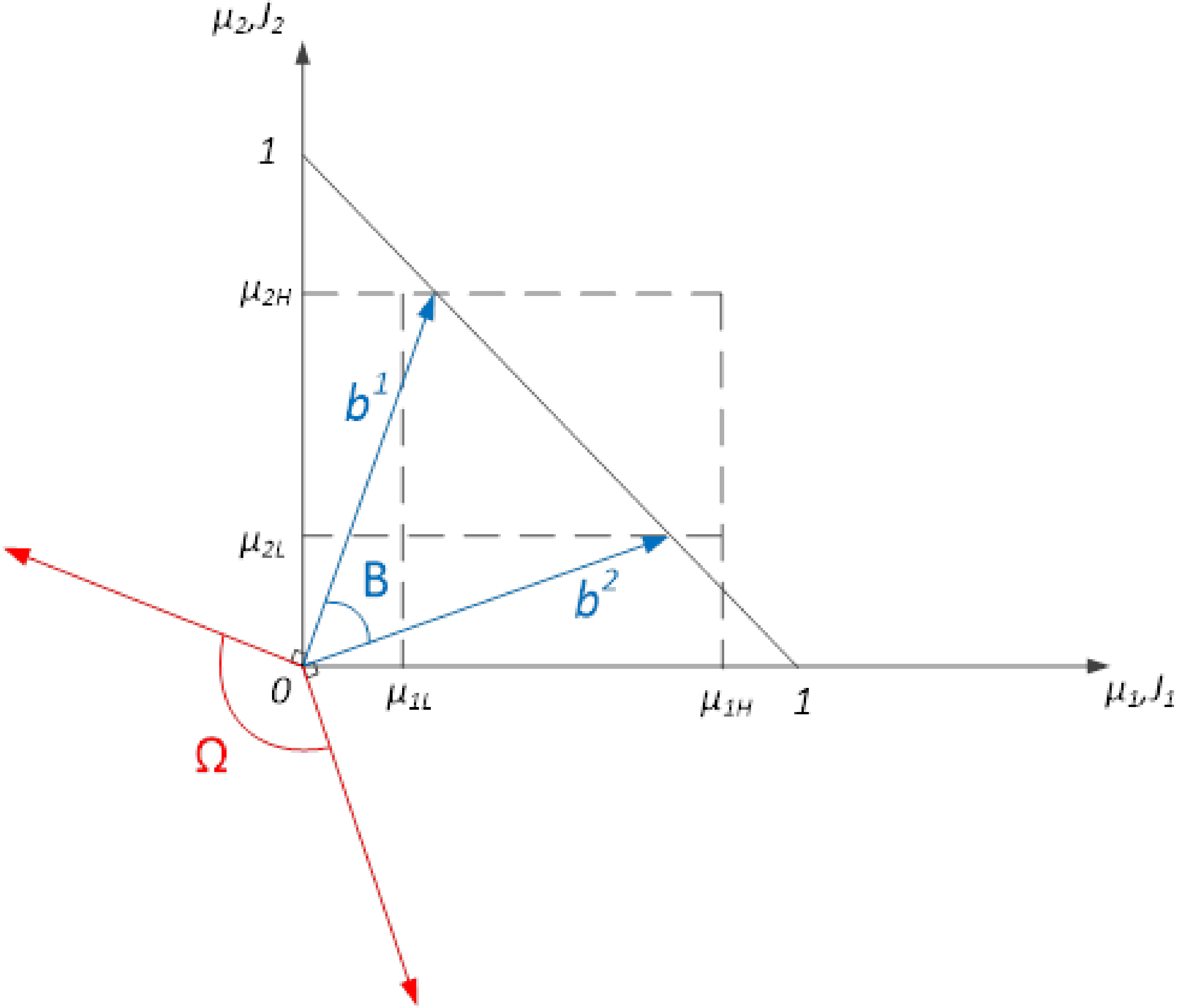
$\mathbf{\Omega}$ является полярным к выпуклому конусу $\mho$:

$$\mho = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbf{E}^n \,\middle|\, \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{b}^i,\ \alpha_i \geqq 0,\ i = \overline{1,p} \right\},$$

где система векторов $\{\mathbf{b}^i, i = \overline{1,p}\}$ образует строки

матрицы $\mathbf{B}$.

# Геометрическая интерпретация описанного алгоритма для случая $m = 2$



**Теорема.** Пусть в многокритериальной аналитической задаче:

1) множество $\mathbf{Q}$ и компоненты векторного показателя $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbf{E}^m$ на $\mathbf{Q}$ выпуклые;

2) вектор $\boldsymbol{\mu}$ удовлетворяет условиям (1);

3) $\boldsymbol{\Omega}$ - полиэдральный конус, построенный при помощи вышеописанного алгоритма и определяемый в виде

$$\boldsymbol{\Omega} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbf{E}^m \;\middle|\; \mathbf{Bz} \leqq \mathbf{0}_p \right\}.$$

Для того, чтобы решение $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbf{Q}$ было слабо оптимальным по конусу $\boldsymbol{\Omega}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор $\boldsymbol{\mu}^*$, удовлетворяющий условиям (1), (2), для которого:

$$\boldsymbol{\mu}^{*T}\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{u}}) = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \left\{ \boldsymbol{\mu}^{*T}\mathbf{J}(\mathbf{u}) \right\}.$$

## Пример

Рассмотрим многокритериальную аналитическую задачу

$$\Gamma = \left\langle \mathbf{U}, \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{\Omega} \right\rangle$$

где компоненты векторного критерия $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ заданы в виде:

$$f_1(\mathbf{u}) = 0.2(u_1 - 70)^2 + 0.8(u_2 - 20)^2,$$

$$f_2(\mathbf{u}) = 0.2(u_1 - 10)^2 + 0.8(u - 70)^2.$$

Множество допустимых решений $\mathbf{U}$, задано в виде системы интервальных ограничений-неравенств:

$$\mathbf{U}: \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leqq u_1 \leqq 79 \\ 0 \leqq u_2 \leqq 79 \end{array} \right\}.$$

Полиэдральный конус доминирования формализует требование минимизации компонент векторного критерия на множестве допустимых решений $\mathbf{U}$, и задан в виде интервалов неопределенности весовых компонент векторного критерия:

$$\boldsymbol{\Omega}: \begin{cases} 0.3 \leqq \mu_1 \leqq 0.7, \\ 0.3 \leqq \mu_2 \leqq 0.6. \end{cases}$$

Требуется на множестве достижимых векторных оценок $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ построить:

- множество решений, оптимальных по Парето;
- множество $\boldsymbol{\Omega}$-оптимальных решений.

## Решение.

**Этап 1**. Построение матрицы полиэдрального конуса доминирования.

**Шаг 1**. Построим таблицы $\mathbf{T}_{\mathbf{\Pi}}$ и $\mathbf{\Pi}$ и координаты вершин $\pi^0, \ldots, \pi^3 \in \mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{\Pi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \mu_{2L} & \mu_{1L} \\ \mu_{2L} & \mu_{1H} \\ \mu_{2H} & \mu_{1H} \\ \mu_{2H} & \mu_{1L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi^0 (0.3,\ 0.3) \\ \pi^1 (0.7,\ 0.3) \\ \pi^2 (0.7,\ 0.6) \\ \pi^3 (0.3,\ 0.6) \end{cases}$$

**Шаг 2**. Осуществляем попарное сравнение строк в таблице $\mathbf{T}_{\Pi}$ и находим пары вершин, образующие ребра $\mathbf{r}^{kl}$, соединяющие вершины $\pi^k$ и $\pi^l$ гиперпараллелепипеда $\mathbf{\Pi}$. В данном примере ребрами являются: $\mathbf{r}^{01}$, $\mathbf{r}^{12}$, $\mathbf{r}^{23}$, $\mathbf{r}^{30}$.

**Шаг 3**. Определяем расположение вершин $\pi^0,\ldots,\pi^3 \in \mathbf{\Pi}$ относительно прямой $L(\boldsymbol{\mu})=0$:

$$L\left(\pi^0\right)=0.3+0.3-1=-0.4;$$

$$L\left(\pi^1\right)=0.7+0.3-1=0;$$

$$L\left(\pi^2\right)=0.7+0.6-1=0.3;$$

$$L\left(\pi^3\right)=0.3+0.6-1=-0.1.$$

**Шаг 4**. Определяем координаты точек пересечения ребер $\mathbf{r}^{01}$, $\mathbf{r}^{12}$, $\mathbf{r}^{23}$, $\mathbf{r}^{30} \in \mathbf{\Pi}$ с прямой $L(\boldsymbol{\mu})=0$:

$L(\pi^0)L(\pi^1)=0$ $\Rightarrow$ребро $\mathbf{r}^{01}$ пересекает прямую $L(\boldsymbol{\mu})=0$. Координаты вектора $\mathbf{b}^1=[0.7,\ 0.3]^T$, записываем в виде строки в матрицу конуса доминирования $\mathbf{B}$.

$L(\pi^1)L(\pi^2)=0$ $\Rightarrow$ребро $\mathbf{r}^{12}$ пересекает прямую $L(\boldsymbol{\mu})=0$. Координаты вектора $\mathbf{b}^2=[0.7,\ 0.3]^T$, записываем в виде строки в матрицу конуса доминирования $\mathbf{B}$.

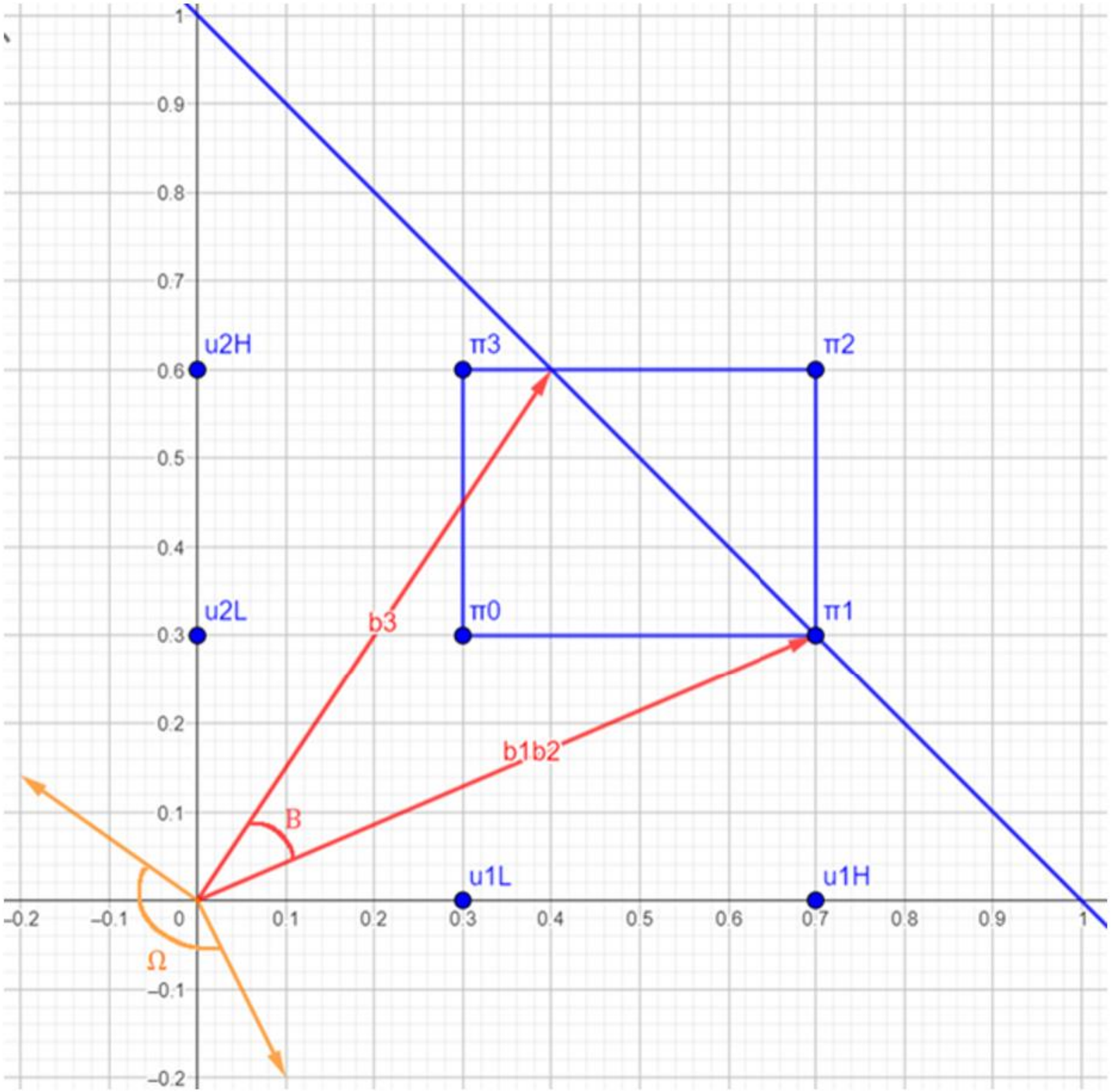
$L(\pi^2)L(\pi^3)=-0.03<0$ $\Rightarrow$ребро $\mathbf{r}^{23}$ пересекает прямую $L(\boldsymbol{\mu})=0$. Координаты вектора $\mathbf{b}^3=[0.4,\ 0.6]^T$ записываем в виде строки в матрицу конуса доминирования $\mathbf{B}$

$L(\pi^3)L(\pi^0)=0.04>0$ $\Rightarrow$ребро $\mathbf{r}^{30}$ не пересекает прямую $L(\boldsymbol{\mu})=0$.

**Шаг 5**. Т.к. $\mathbf{b}^1 = \mathbf{b}^2$, то в матрице $\mathbf{B}$, не изменяя ее ранга, можно удалить, например, строку, соответствующую вектору $\mathbf{b}^1$. Получаем матрицу полиэдрального конуса доминирования в виде:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

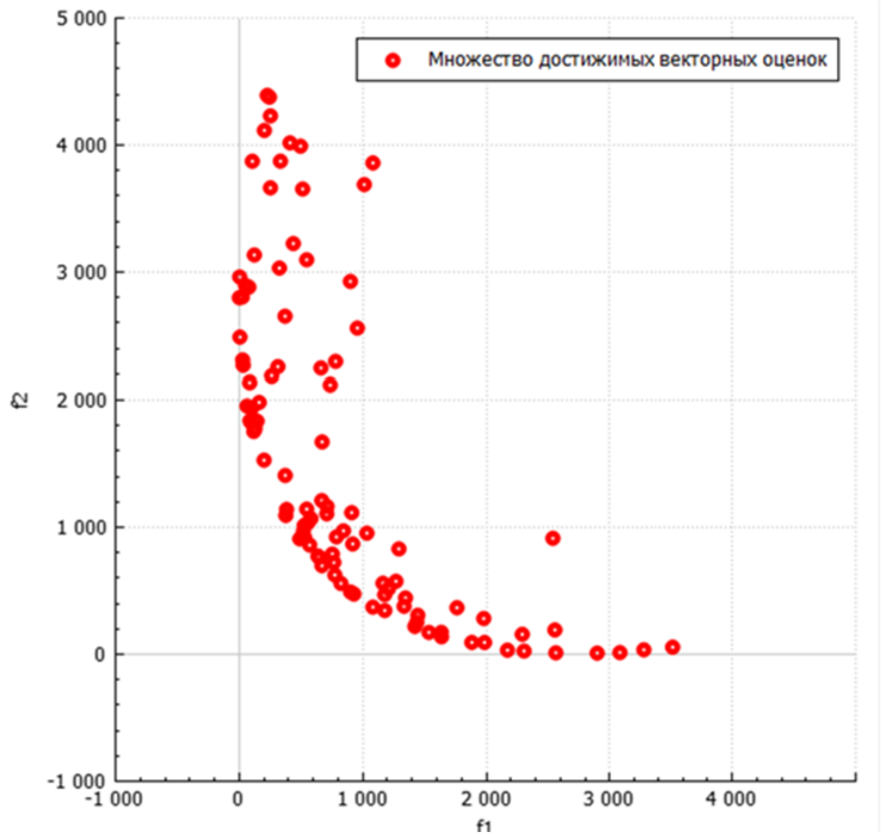
# Геометрическая интерпретация



**Этап 2**. Построение дискретной аппроксимации $\hat{\mathbf{F}}_{\Omega}(\mathbf{U})$ множества $\Omega$-оптимальных решений задачи (4), (5).

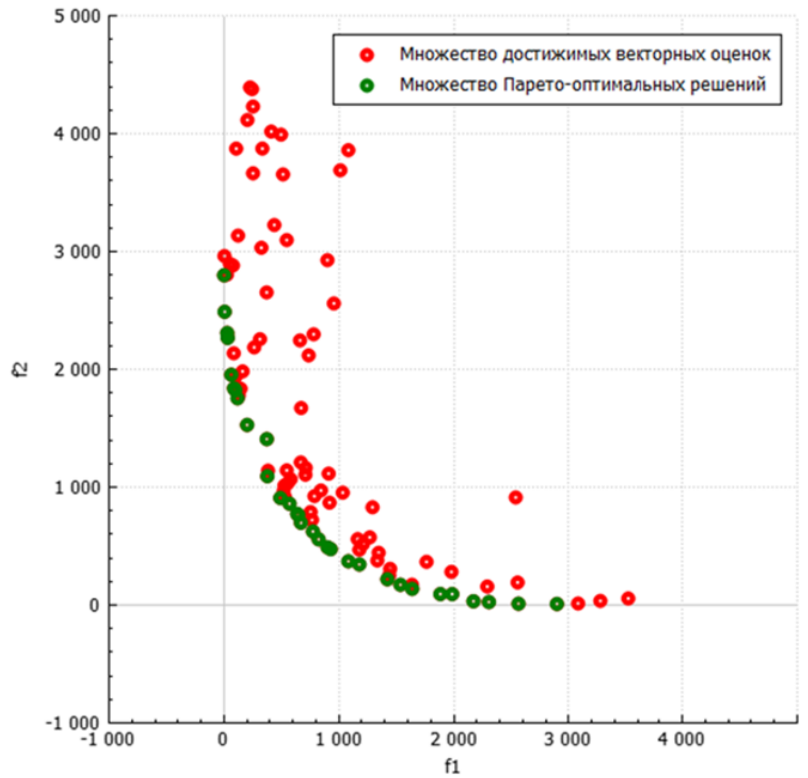
**Шаг 1**. Сгенерируем конечное множество точек $\hat{\mathbf{U}} \subset \mathbf{U}$, которое будем рассматривать, как дискретную аппроксимацию множества $\mathbf{U}$ вида (5).

**Дискретная аппроксимация множества достижимых векторных оценок $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{U})$, $|\mathbf{F}(\hat{\mathbf{U}})| = 100$**



**Шаг 2**. Построим дискретную аппроксимацию множества Парето-оптимальных решений $\mathbf{F}_P\left(\hat{\mathrm{U}}\right) \subset \mathbf{F}\left(\hat{\mathrm{U}}\right)$, используя алгоритм исключения заведомо неэффективных решений.

**Дискретная аппроксимация множества парето-оптимальных решений:** $\left|\mathbf{F}_P\left(\hat{\mathrm{U}}\right)\right| = 29$



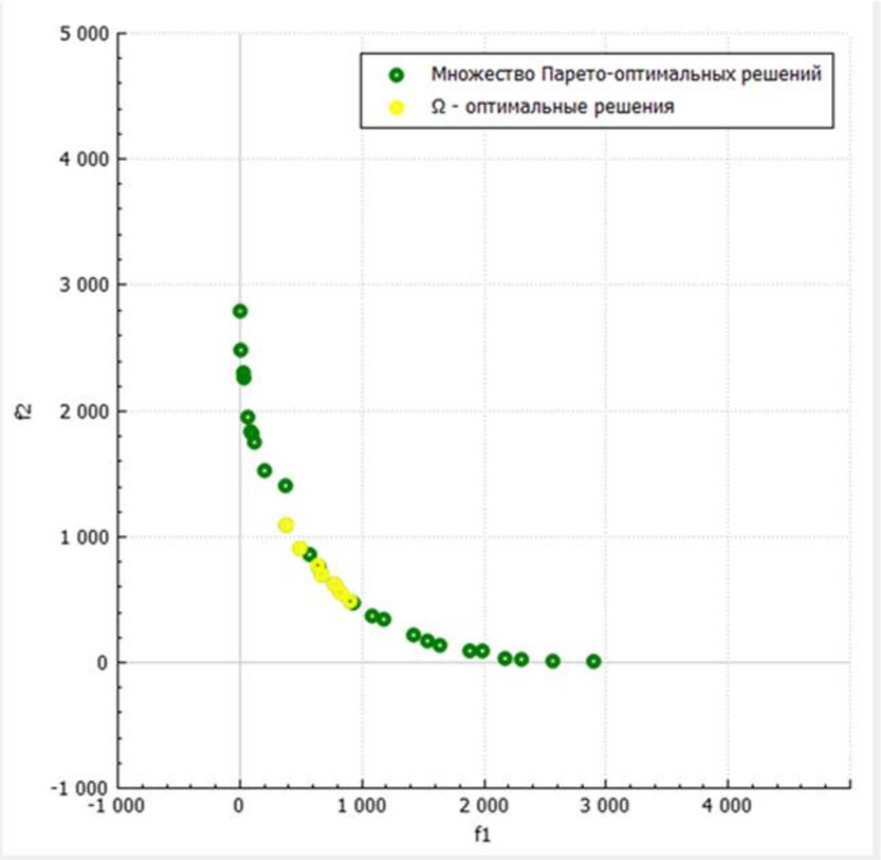
**Шаг 3.** Построим дискретную аппроксимацию множества $\mathbf{\Omega}$-оптимальных решений $\mathbf{F}_{\Omega}\left(\hat{\mathbf{U}}\right) \subset \mathbf{F}\left(\hat{\mathbf{U}}\right)$. Используем алгоритм исключения заведомо не эффективных решений, $\left|\mathbf{F}_{\Omega}\left(\hat{\mathbf{U}}\right)\right| = 7$). В качестве условия исключения точки $\mathbf{F}^{j}, j = \overline{1, N}, i \neq j$ рассматриваем выполнение системы неравенств

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{F}^{j} - \mathbf{F}^{i}\right) \geqq \mathbf{0}, \qquad (7)$$

где матрица $\mathbf{B}$ конуса доминирования $\mathbf{\Omega}$ задана в виде (3.18), что равносильно удовлетворению требования

$$\left(\mathbf{F}^{j} - \mathbf{F}^{i}\right) \in -\mathbf{\Omega}. \qquad (8)$$

## Дискретная аппроксимация множества $\Omega$-оптимальных решений: $\left|\mathbf{F}_{\Omega}\left(\hat{\mathrm{U}}\right)\right| = 7$



## Дискретная аппроксимация множества $\Omega$-оптимальныхрешений:

$$\left|\mathbf{F}\left(\hat{\mathrm{U}}\right)\right| = 10000; \ \left|\mathbf{F}_{\mathrm{P}}\left(\hat{\mathrm{U}}\right)\right| = 2934; \quad \left|\mathbf{F}_{\Omega}\left(\hat{\mathrm{U}}\right)\right| = 707.$$