Kohomologie

Definition 1. Ein *Kokettenkomplex* C besteht aus abelschen Gruppen C^n für $n \geq 0$ und Korand-Operatoren $d^n : C^n \to C^{n+1}$ mit der Eigenschaft $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Die n-te *Kohomologiegruppe* eines Kokettenkomplexes ist gegeben durch

$$H^n(C) = \frac{\mathrm{Kern}(d^n : C^n \to C^{n+1})}{\mathrm{Bild}(d^{n-1} : C^{n-1} \to C^n)} \ .$$

Ein Morphismus $f : C \to D$ von Kokettenkomplexen besteht aus Homomorphismen $f^n : C^n \to D^n$ mit $d \circ f^n = f^{n+1} \circ d$. Eine *Kettenhomotopie* zwischen zwei Morphismen $f, g : C \to D$ besteht aus Homomorphismen $s^n : C^n \to D^{n-1}$ mit $d \circ s^n + s^{n+1} \circ d = f^n - g^n$.

Alle wichtigen Eigenschaften und Sätze für Kettenkomplexe übertragen sich auf Kokettenkomplexe. Zum Beispiel gilt:

- Kettenhomotope Morphismen induzieren dieselbe Abbildung in Kohomologie.
- Eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

gibt einen Randoperator $\partial : H^n(C) \to H^{n+1}(A)$, so dass folgende Folge exakt ist:

$$\cdots \longrightarrow H^n A \xrightarrow{H^n f} H^n B \xrightarrow{H^n g} H^n C \xrightarrow{\partial} H^{n+1} A \longrightarrow \cdots$$

Definition 2. Sei C ein Kettenkomplex und A eine abelsche Gruppe. Der *Kokettenkomplex* $\mathrm{Hom}(C, A)$ von C mit Koeffizienten in A ist definiert durch

$$\mathrm{Hom}(C, A)^n = \mathrm{Hom}_{Ab}(C_n, A)$$

mit Korand-Operator

$$d^n(f : C_n \to A) = f \circ d_n \ .$$

Die Kohomologie von C mit Koeffizienten in A ist die Kohomologie von $\mathrm{Hom}(C, A)$,

$$H^n(C, A) \ = \ H^n(\mathrm{Hom}(C, A)) \ .$$

Die Konstruktion $C \mapsto \mathrm{Hom}(C, A)$ ist ein *kontravarianter* Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe in die Kategorie der Kokettenkomplexe: ist $f : C \to D$ ein Morphismus von Kettenkomplexen, so definiert man $\mathrm{Hom}(f, A) : \mathrm{Hom}(D, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, A)$ durch

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{Hom}(f, A)^n & : & \mathrm{Hom}(D_n, A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(C_n, A) \\ & & (g : D_n \to A) & \longmapsto & \mathrm{Hom}(f, A)^n(g) = (g \circ f_n : C_n \to A). \end{array}$$

Definition 3. Die *Kohomologie* einer simplizialen Menge X mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe A ist definiert als die Kohomologie des Kokettenkomplexes $\mathrm{Hom}(C_*(X, \mathbb{Z}), A)$,

$$H^n(X; A) \ = \ H^n(\mathrm{Hom}(C_*(X, \mathbb{Z}), A)) \ .$$

Die *relative Kohomologie* eines Paares $Y \subset X$ ist die Kohomologie des Kokettenkomplexes $\mathrm{Hom}(C_*(X, \mathbb{Z})/C_*(Y, \mathbb{Z}), A)$,

$$H^n(X, Y; A) \ = \ H^n \left(\mathrm{Hom} \left(\frac{C_*(X, \mathbb{Z})}{C_*(Y, \mathbb{Z})}, A \right) \right) \ .$$

Die Kohomologie eines topologischen Raumes X (bzw. eines Raumpaares (X, Y)) mit Koeffizienten in A ist die Kohomologie der singulären simplizialen Menge $\mathcal{S}(X)$ (bzw. des Paares $(\mathcal{S}(X), \mathcal{S}(Y))$).

Man kann diese Definitionen ein wenig konkreter machen: Sei X eine simpliziale Menge und A eine abelsche Gruppe. Wir definieren einen Kokettenkomplex $C^*(X; A)$ durch

$$C^n(X; A) = \mathrm{Abb}(X_n, A) \ ,$$

die Menge aller Abbildungen von X_n nach A mit punktweiser Addition als Gruppenstruktur. Der Korand $d^n : C^n(X;A) \to C^{n+1}(X;A)$ ist gegeben durch

$$(d^n(f))(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(d_i^*(x)) \quad \text{für } x \in X_{n+1}.$$

Ist $Y \subset X$ eine simpliziale Untermenge, so definieren wir einen relativen Kokettenkomplex $C^*(X,Y;A)$ durch

$$C^n(X,Y;A) \;=\; \{f \in \mathrm{Abb}(X_n, A) \mid f(y) = 0 \text{ für alle } y \in Y_n\} \;.$$

Dann ist $C^*(X,Y;A)$ ein Unterkomplex von $C^*(X;A)$, d.h. der Korandoperator bildet $C^n(X,Y;A)$ nach $C^{n+1}(X,Y;A)$ ab.

Lemma 4. *Für eine simpliziale Menge X gibt es einen natürlichen Isomorphismus von Kokettenkomplexen*

$$\mathrm{Hom}(C_*(X;\mathbb{Z}), A) \;\cong\; C^*(X;A) \;.$$

Für $Y \subset X$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}\left(\frac{C_*(X;\mathbb{Z})}{C_*(Y;\mathbb{Z})}, A\right) \;\cong\; C^*(X,Y;A) \;.$$

Beweis. Wir zeigen nur den absoluten Fall und beschreiben einen Isomorphismus

$$\varphi \;:\; \mathrm{Hom}(C_*(X;\mathbb{Z}); A) \;\cong\; C^*(X;A) \;.$$

In Dimension n definieren wir

$$\varphi_n : \mathrm{Hom}(C_*(X;\mathbb{Z}); A)^n = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[X_n], A) \longrightarrow \mathrm{Abb}(X_n, A) = C^n(X;A)$$

durch

$$\varphi_n\,(f : \mathbb{Z}[X_n] \to A) \;=\; (f|_{X_n} : X_n \to A) \;.$$

Dies ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen weil jeder Homomorphismus von der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}[X_n]$ eindeutig durch seine Werte auf der erzeugenden Menge X_n festgelegt ist. Für variables n sind die Isomorphismen φ_n außerdem mit den Randoperatoren verträglich. □

Kohomologie von Räumen hat die analogen formalen Eigenschaften wie Homologie:

Homotopieinvarianz: Homotope stetige Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung in Kohomologie. Sind nämlich $f, g : X \longrightarrow Y$ homotope stetige Abbildungen, so sind $\mathcal{S}(f), \mathcal{S}(g) : \mathcal{S}(X) \longrightarrow \mathcal{S}(Y)$ simplizial homotop. Deshalb sind die Kettenabbildungen $C_*(\mathcal{S}(f), \mathbb{Z})$ und $C_*(\mathcal{S}(X), \mathbb{Z})$ kettenhomotop. Nach dem folgenden Lemma sind dann die Kokettenabbildungen $\mathrm{Hom}(C_*(\mathcal{S}(f), \mathbb{Z}), A)$ und $\mathrm{Hom}(C_*(\mathcal{S}(g), \mathbb{Z}), A)$ ebenfalls homotop als Morphismen von $\mathrm{Hom}(C_*(\mathcal{S}(Y), \mathbb{Z}), A)$ nach $\mathrm{Hom}(C_*(\mathcal{S}(X), \mathbb{Z}, A)$, induzieren also dieselbe Abbildung in Kohomologie.

Wir benutzen hier also:

Lemma 5. *Wenn $\varphi, \psi : C \to D$ kettenhomotope Morphismen von Kettenkomplexen sind, dann sind*

$$\mathrm{Hom}(\varphi, A) \textit{ und } \mathrm{Hom}(\psi, A) : \mathrm{Hom}(D, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, A)$$

homotop als Kokettenabbildungen.

Beweis. Wenn $s = \{s_n : C_n \to D_{n+1}\}_{n \geq 0}$ eine Kettenhomotopie ist, dann liefert $\{\mathrm{Hom}(s_n, A)\}_{n \geq 0}$ eine Kokettenhomotopie. □

Lange exakte Folge: Für ein Paar simplizialer Mengen $Y \subset X$ ist der relative Kokettenkomplex $C^*(X,Y;A)$ als Kern der Einschränkungsabbildung $C^*(X;A) \longrightarrow C^*(Y;A)$ definiert. Mit anderen Worten: die Folge von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow C^*(X,Y;A) \longrightarrow C^*(X;A) \longrightarrow C^*(Y;A) \longrightarrow 0$$

ist exakt. Deshalb erhalten wir eine lange exakte Kohomologiefolge

$$\cdots \to H^n(X,Y;A) \to H^n(X;A) \to H^n(Y;A) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X,Y;A) \to \cdots .$$

Der Unterschied zur langen exakten Folge in Homologie liegt in der Richtung der Abbildungen und darin, dass die Randabbildung hier die Dimension erhöht und nicht erniedrigt.

Ausschneidung: Sei (X,Y) ein Raumpaar und $U \subset Y$ eine Teilmenge mit $\overline{U} \subseteq \mathring{Y}$, d.h. der Abschluss von U liegt noch im offenen Kern von Y. Im Beweis der homologischen Ausschneidung hatten wir gesehen, dass die natürliche Abbildung von Quotientenkomplexen

$$\frac{C_*(\mathcal{S}(X-U),\mathbb{Z})}{C_*(\mathcal{S}(Y-U),\mathbb{Z})} \longrightarrow \frac{C_*(\mathcal{S}(X),\mathbb{Z})}{C_*(\mathcal{S}(Y),\mathbb{Z})}$$

Isomorphismen in Homologie induziert, also ein *Quasi-Isomorphismus* ist. Im allgemeinen ist es *nicht* so, dass der Funktor $\mathrm{Hom}(-,A)$ Quasi-Isomorphismen enthält: der Kettenkomplex

$$C \;=\; (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2)$$

hat triviale Homologie, ist also quasi-isomorph zum trivialen Kettenkomplex. Allerdings ist

$$H^2(C,\mathbb{Z}/2) = H^2(\;\cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{\cong} \mathbb{Z}/2) \;\cong\; \mathbb{Z}/2\;,$$

also ist $\mathrm{Hom}(C,\mathbb{Z}/2)$ *nicht* quasi-isomorph zum trivialen Kokettenkomplex.

Zum Glück gilt der

Satz 6. *Sei $f: C \to D$ ein Quasi-Isomorphismus zwischen Kettenkomplexen, die in jeder Dimension freie abelsche Gruppen sind. Dann ist f eine Ketten-Homotopieäquivalenz. Insbesondere ist für alle abelschen Gruppen A die induzierte Abbildung* $\mathrm{Hom}(f,A): \mathrm{Hom}(D,A) \to \mathrm{Hom}(C,A)$ *ein Quasi-Isomorphismus von Kokettenkomplexen.*

Wir können diesen Satz in der Ausschneidungssituation anwenden, weil beide Kettenkomplexe dimensionsweise frei sind. Also ist

$$\mathrm{Hom}\left(\frac{C_*(\mathcal{S}(X),\mathbb{Z})}{C_*(\mathcal{S}(Y),\mathbb{Z})}, A\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\frac{C_*(\mathcal{S}(X-U),\mathbb{Z})}{C_*(\mathcal{S}(Y-U),\mathbb{Z})}, A\right)$$

ein Quasi-Isomorphismus. Mit anderen Worten: die von der Inklusion induzierten Einschränkungs-Abbildungen $H^n(X,Y;A) \to H^n(X-U,Y-U;A)$ sind Isomorphismen.

Mit denselben formalen Argumenten wie für Homologie berechnet man die Kohomologie von Sphären und die relative Kohomologie des Paares $(D^n, \partial D^n)$ für $n \geq 1$:

$$H^m(S^n;A) \cong \begin{cases} A & \text{für} \quad m = 0,n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$H^m(D^n,S^{n-1};A) \cong \begin{cases} A & \text{für} \quad m = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für einen CW-Komplex X ist der zelluläre Kettenkomplex $C_*^{\mathrm{zell}}(X;\mathbb{Z})$ definiert durch $C_n^{\mathrm{zell}}(X;\mathbb{Z}) = H_n(X^n, X^{n-1};\mathbb{Z})$ mit Randoperator die Komposition

$$H_n(X^n, X^{n-1};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^{n-1};\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2};\mathbb{Z})\;.$$

Der zelluläre *Kokettenkomplex* $C^*_{\text{zell}}(X;A)$ ist definiert als $C^*_{\text{zell}}(X;A) = \mathrm{Hom}(C_*^{\text{zell}}(X;\mathbb{Z});A)$. Wieder kann man mit den formal gleichen Argumenten wie bei Homologie zeigen, dass der zelluläre Kokettenkomplex eines CW-Komplexes die Kohomologie berechnet:

Satz 7. *Für jeden CW-Komplex X und alle $n \geq 0$ gibt es natürliche Isomorphismen*

$$H^n(X;A) \cong H^n(C^*_{\text{zell}}(X;A)) \ .$$

Beispiel 8. Der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ hat eine CW-Struktur mit je einer Zelle in Dimension $0, 2, 4, \ldots, 2n$. Also ist

$$C_m^{\text{zell}}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für} \quad m = 0, 2, 4, \ldots, 2n \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Der Randoperator muss trivial sein. Da $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) \cong A$ haben wir

$$C^m_{\text{zell}}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, A) = \begin{cases} A & \text{für} \quad m = 0, 2, \ldots, 2n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wieder mit trivialem Randoperator. Also gilt schließlich

$$H^m(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, A) \cong \begin{cases} A & \text{für} \quad m = 0, 2, \ldots, 2n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kohomologie versus Homologie

Nach Definition bekommt man den (zellulären oder simplizialen) Kokettenkomplex eines CW-Komplexes oder Raumes aus dem entsprechenden Kettenkomplex durch "Dualisieren". Dies wirft die Frage auf, ob man auch die Kohomologiegruppen aus den Homologiegruppen durch Dualisierungen bekommen kann. In den Beispielen S^n und $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ sind Homologie und Kohomologie abstrakt isomorph. Dies ist aber im allgemeinen nicht zu erwarten, schon alleine weil einer der Funktoren ko-, der andere kontravariant ist. Eine bessere Vermutung könnte sein, dass vielleicht $H^n(X;A)$ und $\mathrm{Hom}(H_n(X;\mathbb{Z}), A)$ isomorph sind.

In der Tat gibt es immer eine natürliche Abbildung zwischen diesen beiden Gruppen: sei C ein Kettenkomplex und A eine abelsche Gruppe. Wir definieren eine natürliche Abbildung

$$\Phi \ : \ H^n(\mathrm{Hom}(C, A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n C, A) \tag{9}$$

durch

$$\Phi\big([f : C_n \to A]\big) \ = \ ([x] \longmapsto f(x)) \ .$$

Dies ist wohldefiniert: sei zunächst x' ein weiterer n-Zykel aus C_n, der dieselbe Homologieklasse wie x repräsentiert. Dann ist $x' = x + dy$ für ein $y \in C_{n+1}$ und deshalb

$$f(x') = f(x + dy) = f(x) + (df)(y) = f(x)$$

weil f ein Kozykel ist, also $df = 0$. Wenn $f' \in \mathrm{Hom}(C_n, A)$ ein weiterer n-Kozykel ist, der dieselbe Kohomologieklasse wie f repräsentiert, dann ist $f' = f + dg$ für einen Homomorphismus $g : C_{n-1} \to A$. Damit ist

$$f'(x) = (f + dg)(x) = f(x) + g(dx) = f(x) \quad \text{für alle } n\text{-Zykel } x.$$

Also induzieren f und f' dieselbe Abbildung $H_n C \to A$. Man könnte hoffen, dass die soeben definierte Abbildung Φ ein Isomorphismus ist. Das folgende Beispiel zeigt aber, dass das zu optimistisch ist: der zelluläre Kettenkomplex $C_*^{\text{zell}}(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z})$ der reellen projektiven Ebene hat die Form

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \ ,$$

also ist $H_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) = 0$. Der zelluläre Kokettenkomplex ist dann gegeben durch

$$C^*_{\text{zell}}(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) \ = \ (\ \cdots \longleftarrow 0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \ ) \ ,$$

also ist $H^2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z})$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2$ und folglich

$$\Phi \ : \ H^2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) \ \longrightarrow \ \mathrm{Hom}(H_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) = 0$$

nicht injektiv.

Allerdings gilt:

Proposition 10. *Für jeden Kettenkomplex C von freien abelschen Gruppen und jede abelsche Gruppe A besitzt der Homomorphismus*

$$\Phi \ : \ H^n(\mathrm{Hom}(C,A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_nC,A)$$

einen additiven Schnitt, ist also insbesondere surjektiv.

Beweis. Wir haben eine exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{d} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

wobei $Z_n = \mathrm{Kern}(d : C_n \to C_{n-1})$ die Gruppe der n-Zykel und $B_{n-1} = \mathrm{Bild}(d : C_n \to C_{n-1})$ die Gruppe der $(n-1)$-Ränder bezeichnet. Da C_{n-1} eine freie abelsche Gruppe ist, ist auch B_{n-1} frei, es gibt also einen additiven Schnitt $s : B_{n-1} \to C_n$ mit $ds = \mathrm{Id}_{B_{n-1}}$. Wegen $d(\mathrm{Id}_{C_n} - sd) = 0$ liegt das Bild des Homomorphismus $r = \mathrm{Id}_{C_n} - sd : C_n \to C_n$ in der Zykelgruppe und kann daher als ein Homomorphismus $r : C_n \longrightarrow Z_n$ aufgefasst werden.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den gesuchten Schnitt $\sigma : \mathrm{Hom}(H_nC,A) \longrightarrow H^n(C,A)$ von Φ definieren: für einen Homomorphismus $\gamma : H_nC \to A$ definieren wir $\sigma(\gamma) : C_n \to A$ als die Kohomologieklasse der Komposition

$$C_n \ \xrightarrow{r} \ Z_n \ \xrightarrow{\text{Quot.}} \ H_nC \ \xrightarrow{\gamma} \ A \ .$$

In der Tat ist $\sigma(\gamma)$ ein Kozykel in $\mathrm{Hom}(C,A)^n$ wegen

$$d(\sigma(\gamma))(y) \ = \ \sigma(\gamma)(dy) \ = \ \gamma[r(dy)] \ = \ \gamma[dy - sddy] \ = \ 0 \ .$$

Außerdem ist σ additiv und es gilt $\Phi(\sigma(\gamma)) = \gamma$ wegen

$$\Phi(\sigma(\gamma))[x] \ = \ \sigma(\gamma)(x) \ = \ \gamma[r(x)] \ = \ \gamma[x - sdx] \ = \ \gamma[x]$$

für alle Zykel $x \in Z_n$. □

Zur Beschreibung des Kerns von $\Phi : H^n(\mathrm{Hom}(C_*,A)) \to \mathrm{Hom}(H_nC,A)$ machen wir einen Exkurs in die homologische Algebra.

Ext-Gruppen

In diesem Abschnitt sei R ein Ring, nicht notwendig kommutativ. Weiter seien M und N zwei R-Linksmoduln. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ die Menge aller R-Modulhomomorphismen. Dies ist eine abelsche Gruppe unter punktweiser Addition. Falls R kommutativ ist, so ist $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ in natürlicher Weise wieder ein R-Modul, aber das ist momentan nicht relevant.

Lemma 11. *Sei*

$$0 \ \longrightarrow \ N \ \xrightarrow{f} \ N' \ \xrightarrow{g} \ N'' \ \longrightarrow \ 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln und sei M ein weiterer R-Modul. Dann ist die Folge von abelschen Gruppen

$$0 \ \longrightarrow \ \mathrm{Hom}_R(M,N) \ \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,f)} \ \mathrm{Hom}_R(M,N') \ \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,g)} \ \mathrm{Hom}_R(M,N'')$$

exakt.

Beweis. Ist $(\alpha : M \to N) \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ ein Homomorphismus mit $\mathrm{Hom}(M,f)(\alpha) = f \circ \alpha = 0$, so ist $\alpha = 0$ weil f injektiv ist. Also ist $\mathrm{Hom}(M,f)$ injektiv.

Ist $(\beta : M \to N') \in \mathrm{Hom}_R(M,N')$ ein Homomorphismus mit $\mathrm{Hom}(M,g)(\beta) = g \circ \beta = 0$, so ist $\mathrm{Bild}(\beta) \subset \mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Bild}(f)$. Da f injektiv ist, faktorisiert β also als Komposition

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[rr, bend right, "\beta"'] & N \arrow[r, "f"] & N' \end{tikzcd}$$

mit $\beta = f \circ \tilde{\beta} = \mathrm{Hom}(M,f)(\tilde{\beta})$. Also gilt $\mathrm{Kern}(\mathrm{Hom}(M,g)) \subseteq \mathrm{Bild}(\mathrm{Hom}(M,f))$. Die andere Inklusion gilt weil $gf = 0$ ist. $\square$

Die letzte Abbildung im vorigen Lemma ist im allgemeinen nicht surjektiv: für $R = \mathbb{Z}$ und die exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

gibt $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, -)$ am Ende keine Surjektion weil die surjektive Abbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ nicht spaltet.

Definition 12. Ein R-Modul P heißt *projektiv*, falls die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(i) Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ ist exakt.
(ii) Für jede Surjektion von R-Moduln $p : N' \longrightarrow N''$ und jeden Homomorphismus $\beta : P \to N''$ gibt es einen Homomorphismus $\tilde{\beta} : P \to N'$ mit $\beta = p \circ \tilde{\beta}$.
(iii) Jede R-lineare Surjektion $M \longrightarrow P$ hat einen R-linearen Schnitt.
(iv) P ist ein direkter Summand eines freien R-Moduls.

Beispiele:

- Freie Moduln sind projektiv. Über einem (Schief)-Körper ist jeder Modul frei, also jeder Modul projektiv.
- Über $R = \mathbb{Z}$ sind die Moduln einfach abelsche Gruppen. Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist wieder frei, also ist hier sogar ‘frei’ dasselbe wie ‘projektiv’. Die abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/n$ sind für $n \geq 2$ nicht projektiv.
- Über $R = \mathbb{Z}/6$ ist der Modul $M = \mathbb{Z}/2$ projektiv, aber nicht frei.
- Sei k ein kommutativer Ring. Über dem Matrizenring $M_n(k)$ ist der Modul k^n der Spaltenvektoren projektiv, aber für $n \geq 2$ nicht frei.

Wir kommen zu einer wichtigen Begriffsbildung der homologischen Algebra.

Definition 13. Eine *projektive Auflösung* eines R-Moduls M ist eine exakte Folge von R-Moduln

$$\cdots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

wobei alle P_i projektive Moduln sind. Der Homomorphismus $\varepsilon : P_0 \longrightarrow M$ heißt *Augmentation*. Es ist oft nützlich, $P_{-1} = M$ und $d_0 = \varepsilon : P_0 \longrightarrow P_{-1}$ zu setzen.

Beispiele:

- Wenn P projektiv ist, so ist

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{\varepsilon = \mathrm{Id}} P \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung, ebenso auch

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{(1,0)} P \oplus P \xrightarrow{\epsilon = \binom{0}{1}} P \longrightarrow 0\,.$$

- Über dem Ring $R = \mathbb{Z}$ hat jeder Modul (d.h. jede abelsche Gruppe) eine *projektive Auflösung der Länge 1*, also eine projektive Auflösung, die neben der aufzulösenden Gruppe nur zwei nicht-triviale Terme hat. Sei M nämlich eine abelsche Gruppe. Wir wählen eine Menge $F \subset M$ von Erzeugern und nehmen als Augmentation $\varepsilon : \mathbb{Z}[F] \to M$ die lineare Fortsetzung der Inklusion. Dies ist eine Surjektion mit freier (also projektiver) Quelle. Dann ist $\mathrm{Kern}(\varepsilon)$ wieder frei, also projektiv, und wir können folgende Sequenz als projektive Auflösung nehmen
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Kern}(\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0\ .$$
- Über dem Ring $R = \mathbb{Z}/4$ ist folgendes eine projektive Auflösung des Moduls $M = \mathbb{Z}/2$
$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0\ .$$
Über $\mathbb{Z}/4$ besitzt $\mathbb{Z}/2$ keine projektive Auflösung endlicher Länge.
- Jeder Modul R-Modul M besitzt eine projektive Auflösung (sogar eine *freie* Auflösung). Wir setzen dazu
$$P_{-1} = M\ , \quad P_{-2} = 0, \quad \text{und} \quad d_{-1} = 0 : P_{-1} \longrightarrow P_{-2}$$
und konstruieren projektive Moduln P_i und Differentiale für $i \geq 0$ induktiv.
In jedem Schritt wählen wir eine Erzeugermenge F_i vom Kern von $d_i : P_i \to P_{i-1}$ als R-Modul. Wir setzen dann $P_{i+1} = R[F_i]$, der freie R-Modul erzeugt von der Menge F_i, mit $d_{i+1} : P_{i+1} = R[F_i] \to P_i$ die R-lineare Fortsetzung der Inklusion. Dann ist nach Konstruktion $\mathrm{Bild}(d_{i+1}) = \mathrm{Kern}(d_i)$, also erhalten wir eine projektive Auflösung
$$\cdots \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ .$$

Satz 14 (Fundamentallemma der homologischen Algebra)**.** *Seien M und N zwei R-Moduln und $P_* \to M$ und $Q_* \to N$ projektive Auflösungen.*

(i) *Zu jedem Homomorphismus von R-Moduln $f : M \to N$ existiert eine Kettenabbildung $\tilde{f} : P_* \to Q_*$ über f.*

(ii) *Je zwei Kettenabbildungen $\tilde{f}, \tilde{g} : P_* \to Q_*$ über demselben Homomorphismus von M nach N sind kettenhomotop als Morphismen von R-Modul-Kettenkomplexen.*

Beweis. (i) Wir fassen $P_* \to M$ als Kettenkomplex mit $P_{-1} = M$ auf, analog $Q_* \to N$. Jetzt konstruieren wir $\tilde{f}_n : P_n \to Q_n$ induktiv mit $\tilde{f}_{-1} = f : M \to N$ und $d\tilde{f}_n = \tilde{f}_{n-1}d$. Seien $\tilde{f}_{-1}, \ldots, \tilde{f}_{n-1}$ bereits so konstruiert. Wegen
$$d \circ \tilde{f}_{n-1} \circ d \ = \ \tilde{f}_{n-2} \circ d \circ d \ = \ 0 \ : \ P_n \to Q_{n-2}$$
ist
$$\mathrm{Bild}(\tilde{f}_{n-1}d : P_n \to Q_{n-1}) \subseteq \mathrm{Kern}(d : Q_{n-1} \to Q_{n-2}) = \mathrm{Bild}(d : Q_n \longrightarrow Q_{n-1})\ .$$
Da P_n projektiv ist, gibt es einen Lift
$$\begin{tikzcd} & Q_n \arrow[d, "d"] \\ P_n \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}_n"] \arrow[r, "\tilde{f}_{n-1}d"'] & \mathrm{Bild}(d) \subseteq Q_{n-1}\ . \end{tikzcd}$$
Der Lift erfüllt $d\tilde{f}_n = \tilde{f}_{n-1}d$.

(ii) Wir betrachten die Differenz $\tilde{k} = \tilde{f} - \tilde{g} : P_* \to Q_*$, welche über der Nullabbildung $M \to N$ liegt, und konstruieren eine Nullhomotopie von $\tilde{k}$. Diese Nullhomotopie ist eine Homotopie von

$\tilde{f}$ zu $\tilde{g}$. Wir konstruieren die benötigte Ketten-Nullhomotopie $s = \{s_n : P_n \to Q_{n+1}\}_{n\geq 0}$ von $\tilde{k}$ induktiv. Da das Quadrat

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "k_0"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & Q_0 \arrow[d, "\varepsilon"] \\ M \arrow[r, "0"'] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert, gilt

$$\mathrm{Bild}(k_0) \subseteq \mathrm{Kern}(\varepsilon) = \mathrm{Bild}(d_1 : Q_1 \to Q_0) \ .$$

Da P_0 projektiv ist, gibt es einen Lift

$$\begin{tikzcd} & Q_1 \arrow[d, "d_1"] \\ P_0 \arrow[ur, dotted, "s_0"] \arrow[r, "k_0"'] & \mathrm{Bild}(d_1) \subseteq Q_0 \ , \end{tikzcd}$$

was den Induktionsanfang liefert.

Seien jetzt $s_0, \ldots, s_{n-1}$ bereits konstruiert und es gelte $ds + sd = k$ bis Dimension $n-1$. Wir betrachten den Homomorphismus $k_n - s_{n-1}d : P_n \to Q_n$. Wegen

$$d(k_n - s_{n-1}d) \ = \ dk_n - ds_{n-1}d \ = \ dk_n - (k_{n-1} - s_{n-2}d)d \ = \ dk_n - k_{n-1}d \ = \ 0$$

hat die Abbildung $k_n - s_{n-1}d$ ihr Bild in $\mathrm{Kern}(d : Q_n \to Q_{n-1}) = \mathrm{Bild}(d : Q_{n+1} \to Q_n)$. Also gibt es einen Lift, wieder weil P_n projektiv ist, im Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Q_{n+1} \arrow[d, "d"] \\ P_n \arrow[ur, dotted, "s_n"] \arrow[r, "k_n - s_{n-1}d"'] & \mathrm{Bild}(d) \subseteq Q_n \ , \end{tikzcd}$$

Der Lift erfüllt dann $ds_n + s_{n-1}d = k_n$. □

Korollar 15. *Sind $P_* \to M$ und $P'_* \to M$ zwei projektive Auflösungen eines R-Moduls M, so sind P_* und P'_* ketten-homotopieäquivalent als Komplexe von R-Moduln.*

Beweis. Sei $f : P_* \to P'_*$ eine Kettenabbildung über $\mathrm{Id} : M \to M$ und sei $g : P'_* \to P_*$ eine Kettenabbildung über $\mathrm{Id} : M \to M$. Dann sind $f \circ g$ und $\mathrm{Id}_{P'} : P'_* \to P'_*$ zwei Kettenabbildungen über Id_M, also sind sie nach (ii) des Fundamentallemmas kettenhomotop. Analog ist $g \circ f$ kettenhomotop zu Id_P. □

Nun können wir Ext-Gruppen definieren.

Definition 16. Seien M und N zwei R-Linksmoduln. Wir wählen eine projektive Auflösung $P_* \to M$ von M und definieren die Ext-Gruppen zwischen M und N durch

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N)) \ ,$$

d.h. $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ ist die n-te Kohomologiegruppe des Kokettenkomplexes von abelschen Gruppen mit

$$\mathrm{Hom}_R(P_*, N)^n = \mathrm{Hom}_R(P_n, N) \ .$$

Damit diese Definition Sinn macht, müssen wir nachweisen, dass die Definition der Gruppe $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ von der Wahl der projektiven Auflösung unabhängig ist, zumindest bis auf kanonischen Isomorphismus. Dies sehen wir wie folgt: ist $P'_* \to M$ eine weitere projektive Auflösung, so gibt es nach dem Korollar eine Homotopieäquivalenz $h : P \to P'$ über Id_M, und die Homotopieklasse dieser Homotopieäquivalenz ist eindeutig. Die Homotopieäquivalenz h induziert eine

Homotopieäquivalenz $h_* : \mathrm{Hom}_R(P', N) \to \mathrm{Hom}_R(P, N)$ welche Isomorphismen in Kohomologie induziert. Da die Homotopieklasse von h eindeutig bestimmt ist, ist der letzte Isomorphismus wohldefiniert. Also erhalten wir einen bevorzugten Isomorphismus

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, M)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(P'_*, M)) \ ,$$

so dass beide Seiten gleichberechtigt als Definition der n-ten Ext-Gruppe verwendet werden können.

Nun zeigen wir einige elementare Eigenschaften der Ext-Gruppen.

Satz 17. *Sei R ein Ring und seien M und N zwei Linksmoduln über R.*

(i) *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Ext}^0_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N)$.*

(ii) *Falls P ein projektiver R-Modul ist, so gilt $\mathrm{Ext}^n_R(P, N) = 0$ für $n \geq 1$.*

(iii) *Ist M' ein weiterer R-Modul, so gibt es natürliche Isomorphismen*

$$\mathrm{Ext}^n_R(M \oplus M', N) \cong \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \oplus \mathrm{Ext}^n_R(M', N) \ .$$

(iv) *Ist N' ein weiterer R-Modul, so gibt es natürliche Isomorphismen*

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, N \oplus N') \cong \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \oplus \mathrm{Ext}^n_R(M, N') \ .$$

Beweis. (i) Sei $P_* \to M$ eine projektive Auflösung. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^0_R(M, N) &= H^0(\mathrm{Hom}_R(P_*, N)) \\
&= \mathrm{Kern}\big(\mathrm{Hom}(d_1, N) : \mathrm{Hom}_R(P_0, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_1, N)\big) \\
&= \{\ f \in \mathrm{Hom}_R(P_0, N) \mid f \circ d_1 = 0\ \} \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(P_0/\,\mathrm{Bild}(d_1), N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N) \ ,
\end{aligned}$$

letzteres weil $P_0/\mathrm{Bild}(d_1)$ vermöge ε isomorph zu M ist.

(ii) Eine besonders kurze Auflösung ist hier $P_0 = P$ und $P_n = 0$ für $n \geq 1$. Damit ist $\mathrm{Hom}_R(P_*, N)^n = 0$ für $n \geq 1$, also auch $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = 0$ für $n \geq 1$.

(iii) Sind $P_* \to M$ und $P'_* \to M'$ projektive Auflösungen, so ist $P_* \oplus P'_*$ eine projektive Auflösung von $M \oplus M'$. Mit dieser Auflösung gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^n_R(M \oplus M', N) &= H^n(\mathrm{Hom}_R(P_* \oplus P'_*, N)) \\
&\cong H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N) \oplus \mathrm{Hom}_R(P'_*, N)) \\
&\cong H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N)) \oplus H^n(\mathrm{Hom}_R(P'_*, N)) \\
&= \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \oplus \mathrm{Ext}^n_R(M', N) \ .
\end{aligned}$$

(iv) Sei wieder $P_* \to M$ eine projektive Auflösung. Dann erhalten wir Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^n_R(M, N \oplus N') &= H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N \oplus N')) \\
&\cong H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N) \oplus \mathrm{Hom}_R(P_*, N')) \\
&\cong H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N)) \oplus H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N')) \\
&= \mathrm{Ext}^n_R(M, N) \oplus \mathrm{Ext}^n_R(M, N').
\end{aligned}$$

□

Beispiele:

- Ist R ein Schiefkörper, so ist jeder R-Modul frei, also projektiv. Folglich ist dann

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_R(M, N) & \text{für } n = 0 \text{ und} \\ 0 & \text{für } n \geq 1. \end{cases}$$

- Ist $R = \mathbb{Z}$, so hat jeder R-Modul (d.h jede abelsche Gruppe) eine projektive Auflösung der Länge 1. Somit ist $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ für $n \geq 2$. Man schreibt in diesem Fall oft $\mathrm{Ext}(A, B)$ für $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B)$. Wir berechnen $\mathrm{Ext}(A, B) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B)$ für beliebige abelsche Gruppen B und endlich erzeugtes A. Da Ext direkte Summen erhält, reicht es, $A = \mathbb{Z}$ und $A = \mathbb{Z}/n$ für $n \geq 2$ zu betrachten, da jede endlich erzeugte abelsche Gruppe eine direkte Summe aus solchen Bestandteilen ist. Wir haben $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, B) = 0$ weil $\mathbb{Z}$ projektiv ist. Als projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/n$ nehmen wir
$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$
und erhalten
$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n, B) &= H^1(\ \cdots 0 \longleftarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(\times n, B)} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, B)\ ) \\ &\cong H^1(\ \cdots 0 \longleftarrow B \xleftarrow{\times n} B\ ) \cong B/nB\ .\end{aligned}$$
- Wir berechnen $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ für alle $n \geq 0$. Wir verwenden die freie Auflösung P_* gegeben durch
$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$
und erhalten damit für alle $n \geq 0$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(P_*, \mathbb{Z}/2)^n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$
und als Korand $d = 0$ weil $\mathbb{Z}/2$ Ordnung 2 hat. Also ist
$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}/4}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = H^n(\cdots \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$
für alle $n \geq 0$. Dies beweist auch, dass $\mathbb{Z}/2$ über dem Ring $\mathbb{Z}/4$ keine projektive Auflösung endlicher Länge hat.

Proposition 18. *Die Gruppe* $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ *ist ein kontravarianter Funktor in* M *und ein kovarianter Funktor in* N.

Beweis. Die kovariante Funktorialität in N ist einfach: ein R-Homomorphismus $f : N \to N'$ induziert einen Kokettenhomomorphismus $\mathrm{Hom}(P_*, f) : \mathrm{Hom}_R(P_*, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_*, N')$ und liefert deshalb Abbildungen
$$\mathrm{Ext}^n_R(M, f)\ :\ \mathrm{Ext}^n_R(M, N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N)) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*, N')) = \mathrm{Ext}^n_R(M, N')\ .$$

Für die Funktorialität in M brauchen wir das Fundamentallemma der homologischen Algebra. Sind $P_* \to M$ und $P'_* \to M'$ projektive Auflösungen und $g : M \to M'$ R-linear, so gibt es einen Kettenmorphismus $\tilde{g} : P_* \to P'_*$, eindeutig bis auf Kettenhomotopie, über g. Dieser induziert
$$\mathrm{Hom}_R(\tilde{g}, N)\ :\ \mathrm{Hom}_R(P'_*, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_*, N)$$
und liefert in der Kohomologie die gesuchte Abbildung
$$\mathrm{Ext}^n_R(g, N)\ :\ \mathrm{Ext}^n_R(M', N) = H^n(\mathrm{Hom}_R(P', N)) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(P, N)) = \mathrm{Ext}^n_R(M, N)$$
Die Liftung $\tilde{g}$ ist zwar nur eindeutig bis auf Homotopie, aber je zwei homotope Lifts induzieren dieselbe Abbildung in Kohomologie-Gruppen $\mathrm{Ext}^n_R(-, N)$.

Es bleiben die Assoziativität und die Verträglichkeit mit der Identität zu zeigen. Da $\mathrm{Id}_P : P_* \to P_*$ eine mögliche Liftung von $\mathrm{Id}_M : M \to M$ ist, gilt $\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{Id}_M, N) = \mathrm{Id}$. Sind $\tilde{g} : P_* \to P'_*$ und $\tilde{h} : P'_* \to P''_*$ Liftungen von $g : M \to M'$ bzw. $h : M' \to M''$, so ist $\tilde{h} \circ \tilde{g} : P_* \to P''_*$ eine Liftung von $h \circ g$. Damit gilt Assoziativität von $\mathrm{Ext}^n_R(-, N)$. $\square$

Satz 19. *Ist $0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine kurze exakte Folge von R-Moduln, dann gibt es eine lange exakte Folge von Ext-Gruppen*

$$\begin{array}{llll} 0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M'',N) \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M',N) \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\partial} \\ & \mathrm{Ext}^1_R(M'',N) \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(M',N) \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \xrightarrow{\partial} \cdots \\ \cdots & \mathrm{Ext}^n_R(M'',N) \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_R(M',N) \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_R(M,N) \xrightarrow{\partial} \cdots \end{array}$$

Im Spezialfall $R = \mathbb{Z}$ ist $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}} = 0$ für $n \geq 2$, also liefert der letzte Satz für jede exakte Folge von abelschen Gruppen $0 \to A \to A' \to A'' \to 0$ eine 6-Term exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}(A'',B) \to \mathrm{Hom}(A',B) \to \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Ext}(A'',B) \to \mathrm{Ext}(A',B) \to \mathrm{Ext}(A,B) \to 0\ .$$

Für den Beweis benutzen wir eine andere wichtige Begriffsbildung:

Definition 20. Der *Abbildungskegel* $C(f)$ eines Morphismus $f : C \to D$ von Kettenkomplexen von R-Moduln ist der Kettenkomplex gegeben durch

$$C(f)_n \;=\; D_n \oplus C_{n-1}\ , \quad d(x,y) \;=\; (dx + f(y),\, (-1)^n dy)\ .$$

Die Inklusion und Projektion geben eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\;i\;} C(f) \xrightarrow{\;p\;} C[1] \longrightarrow 0\ ,$$

wobei $C[1]$ der verschobene Kettenkomplex mit $C[1]_n = C_{n-1}$ und $d_n^{C[1]} = (-1)^n \cdot d_{n-1}^C$ ist. Folglich erhält man eine lange exakte Folge von Homologiegruppen; wenn wir die Ersetzung $H_n(C[1]) = H_{n-1}C$ vornehmen, wird der Randhomomorphismus $\partial : H_n(C[1]) \longrightarrow H_{n-1}D$ zu $f_* : H_{n-1}C \longrightarrow H_{n-1}D$ und die lange exakte Folge wird zu

$$\cdots \longrightarrow H_nD \xrightarrow{\;i_*\;} H_nC(f) \xrightarrow{\;p_*\;} H_{n-1}C \xrightarrow{\;f_*\;} H_{n-1}D \longrightarrow H_{n-1}C(f) \longrightarrow \cdots\ .$$

Der Abbildungskegel $C(f)$ ist also genau dann azyklisch, wenn $f : C \to D$ ein Quasi-Isomorphismus ist.

Beweis der langen Folge von Ext-Gruppen. Sei $0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine kurze exakte Folge von R-Moduln. Wir wählen projektive Auflösungen $P_* \to M$ und $P'_* \to M'$ sowie eine Liftung $\tilde f : P_* \to P'_*$ von f. Dann ist der Abbildungskegel $C(\tilde f)$ eine projektive Auflösung von M'': zum einen besteht $C(\tilde f)$ nur aus projektiven Moduln. Zum anderen liefert die kurze exakte Folge von R-Modul-Komplexen

$$0 \longrightarrow P'_* \longrightarrow C(\tilde f) \longrightarrow P_*[1] \longrightarrow 0 \tag{21}$$

ein lange Homologiesequenz; oberhalb Dimension 1 folgt damit, dass die Homologiegruppen von $C(\tilde f)$ trivial sind. Das Ende der Homologiefolge

$$0 = H_1(P'_*) \longrightarrow H_1C(\tilde f) \longrightarrow H_0(P_*) \xrightarrow{H_0(\tilde f)} H_0(P'_*) \longrightarrow H_0C(\tilde f) \longrightarrow H_{-1}(P_*) = 0$$

zeigt wegen $H_0(P_*) \cong M$ und $H_0(P'_*) \cong M'$ und $H_0(\tilde f) \cong f$, dass $H_1C(\tilde f)$ trivial ist und $H_0C(\tilde f)$ isomorph zu M'' ist. Also ist $C(\tilde f)$ in der Tat eine projektive Auflösung von M''.

Die kurze exakte Folge (21) spaltet dimensionsweise. Deshalb liefert $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ eine kurze exakte Folge von Kokettenkomplexen

$$0 \to\ \mathrm{Hom}_R(P_*[1],N)\ \to\ \mathrm{Hom}_R(C(\tilde f),N)\ \to \mathrm{Hom}_R(P'_*,N)\ \to 0\ .$$

Dies gibt die gesuchte lange exakte Kohomologiefolge

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^n(\mathrm{Hom}_R(P_*[1],N)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^n(\mathrm{Hom}_R(C(\tilde f),N)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^n(\mathrm{Hom}_R(P'_*,N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ext}^{n-1}_R(M,N) \arrow[r, "\partial"'] & \mathrm{Ext}^n_R(M'',N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^n_R(M',N) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

□

Einfacher zu beweisen ist, dass Ext-Gruppen auch in der zweiten Variable kurze exakte Folgen von R-Moduln in lange exakte Folgen überführen. Zum Beweis des folgenden Satzes betrachte man einfach die lange exakte Folge der kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_*, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_*, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_*, N'') \longrightarrow 0$$

(die exakt ist weil alle P_n projektiv sind!).

Satz 22. *Für eine kurze exakte Folge* $0 \to N \to N' \to N'' \to 0$ *und einen* R*-Modul* M *gibt es eine lange exakte Folge*

$$0 \to \mathrm{Ext}^0_R(M, N) \to \mathrm{Ext}^0_R(M, N') \to \mathrm{Ext}^0_R(M, N'') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \to \cdots$$

Nachdem wir jetzt die Definition und einige wichtige Eigenschaften von Ext-Gruppen zur Kenntnis genommen haben, können wir zum Zusammenhang zwischen Homologie und Kohomologiegruppen zurückkehren. Wir erinnern uns daran, dass wir in (9) einen Homomorphismus

$$\Phi \ : \ H^n(\mathrm{Hom}(C, A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n C, A)$$

definiert hatten, der natürlich im Kettenkomplex C und der abelschen Gruppe A ist und der surjektiv ist, wenn C aus freien abelschen Gruppen besteht.

Satz 23. *Sei* C *ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen und* A *eine abelsche Gruppe. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus zwischen dem Kern der Surjektion* $\Phi : H^n(\mathrm{Hom}(C, A)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n C, A)$ *und der Gruppe* $\mathrm{Ext}(H_{n-1}C, A)$.

Beweis. Ein Homomorphismus $f : C_n \to A$ repräsentiert eine Klasse im Kern von Φ wenn $f(Z_n) = 0$, wobei $Z_n = \mathrm{Kern}(d : C_n \to C_{n-1})$ die Gruppe der n-Zykel ist. Wenn $f(Z_n) = 0$ gilt, dann ist automatisch $f \circ d = 0$, also f ein Kozykel in $\mathrm{Hom}(C, A)$. Wegen der kurzen exakten Folge

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{d} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(\Phi) \ &= \ \frac{\{f : C_n \to A \mid f(Z_n) = 0\}}{\{gd : C_n \to A \mid g \in \mathrm{Hom}(C_{n-1}, A)\}} \\ &\cong \ \frac{\mathrm{Hom}(B_{n-1}, A)}{\{f : B_{n-1} \to A \mid \ f \text{ lässt sich additiv auf } C_{n-1} \text{ fortsetzen } \}} \ . \end{aligned}$$

Da B_{n-2} als Untergruppe der freien abelschen Gruppe C_{n-2} selbst frei ist, spaltet die exakte Folge

$$0 \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{d} B_{n-2} \longrightarrow 0 \ ,$$

also ist $C_{n-1} \cong Z_{n-1} \oplus \sigma(B_{n-2})$ für eine Spaltung $\sigma : B_{n-2} \to C_{n-1}$. Jeder Homomorphismus $f : B_{n-1} \to A$, der sich auf Z_{n-1} additiv fortsetzen lässt, lässt sich also auch auf C_{n-1} fortsetzen. Also ist obige Gruppe isomorph zum Quotienten von $\mathrm{Hom}(B_{n-1}, A)$ nach dem Bild der Einschränkungs-Abbildung $\mathrm{Hom}(Z_{n-1}, A) \to \mathrm{Hom}(B_{n-1}, A)$. Diese Quotientengruppe ist nichts anderes als die erste Kohomologiegruppe des Kokettenkomplexes

$$\mathrm{Hom}\left((\cdots \to 0 \to B_{n-1} \to Z_{n-1}), A\right) \ .$$

Weil der Komplex $(\cdots \to 0 \to B_{n-1} \to Z_{n-1})$ eine freie Auflösung von $H_{n-1}C$ ist, ist die erste Kohomologiegruppe des Hom-Komplexes nach A gerade $\mathrm{Ext}(H_{n-1}C, A)$. □

Korollar 24. *Für jeden Raum* X*, jedes* $n \geq 0$ *und jede abelsche Gruppe* A *gibt es eine natürliche kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), A) \longrightarrow H^n(X; A) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), A) \longrightarrow 0 \ .$$

Diese exakte Folge spaltet.

In der Aussage des Korollars muss das Kleingedruckte genau beachtet werden: die angegebene kurze exakte Folge ist natürlich, also mit den von stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$ oder Gruppenhomomorphismen $A \longrightarrow B$ induzierten Abbildungen kompatibel, und für gegebenes X und A kann man eine Spaltung finden. Es gibt aber keine *natürliche* Spaltung, d.h. man kann nicht für alle Räume X und Koeffizienten A die Spaltungen so wählen, dass sie mit stetigen Abbildungen und Koeffizientenhomomorphismen kompatibel sind.

Beispiele:

- Falls alle ganzzahligen Homologiegruppen von X frei sind, so verschwinden die Ext-Terme und $\Phi : H^n(X; A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), A)$ ist ein Isomorphismus.
- Wir berechneten bereits, dass
$$H_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für} \quad n = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{für} \quad n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad n \geq 2. \end{cases}$$
Für die Kohomologie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ gibt es also Isomorphismen
$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; A) &\cong \mathrm{Hom}(H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}), A) \cong A \,, \\ H^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; A) &\cong \mathrm{Hom}(H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}), A) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, A) = \{a \in A \mid 2a = 0\} \end{aligned}$$
weil $\mathrm{Ext}(H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}), A) = \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, A) = 0$, sowie
$$H^2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; A) \cong \mathrm{Ext}(H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}), A) \cong \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2, A) \cong A/2A \,.$$
Dies stimmt überein mit der Kohomologie des zellulären Kokettenkomplexes von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ mit Koeffizienten in A.
- Für jeden Raum X ist $H_0(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\pi_0 X]$, die freie abelsche Gruppen erzeugt von den Wegekomponenten von X. Da Ext-Gruppen mit freiem Argument in der ersten Variable verschwinden, erhalten wir einen Isomorphismus für zusammenhängendes, punktiertes X
$$\begin{aligned} H^1(X, A) &\cong \mathrm{Hom}(H_1(X; \mathbb{Z}), A) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0)^{ab}, A) \\ &= \mathrm{Hom}_{\text{Gruppen}}(\pi_1(X, x_0), A) \,. \end{aligned}$$
- Sei X $(n-1)$-zusammenhängend mit $n \geq 2$. Nach dem Hurewicz-Satz verschwinden dann die Homologiegruppen in Dimension 1 bis $n-1$. Also gilt
$$H^0(X; A) \cong A \,, \quad H^m(X; A) = 0 \quad \text{für } m = 1, \ldots, n-1$$
sowie
$$H^n(X; A) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), A) \cong \mathrm{Hom}(\pi_n(X, x_0), A) \,.$$

Cup-Produkt

Bisher erschien die Kohomologie lediglich als eine kontravariante Version der Homologie, aber wir haben noch keine wirklich neuen Phänomene gesehen. Allerdings hat die *Ko*homologie eine weitere Struktur, die (zumindest in dieser Form) in der Homologie nicht vorhanden ist. Wir werden jetzt sehen, wie man auf der Gesamtheit der Kohomologie-Gruppen mit Koeffizienten in einem Ring wieder eine Multiplikation, das sogenannte *Cup-Produkt*, definieren kann.

Definition 25. Sein X eine simpliziale Menge und R ein Ring (der nicht kommutativ sein muss). Wir definieren eine natürliche Kettenabbildung
$$\cup \;:\; C^*(X; R) \otimes C^*(X; R) \longrightarrow C^*(X; R) \,,$$
die *Cup-Produkt* oder *Alexander-Whitney Abbildung* genannt wird.

Seien dazu $n, m \geq 0$ und seien $f \in C^n(X;R)$ und $g \in C^m(X;R)$ Koketten, d.h. Abbildung von Mengen $f : X_n \longrightarrow R$ und $g : X_m \longrightarrow R$. Wir definieren eine neue Kokette $f \cup g \in C^{n+m}(X;R)$, also eine Abbildung $f \cup g : X_{n+m} \longrightarrow R$, wie folgt. Für $x \in X_{n+m}$ setzen wir

$$(f \cup g)(x) \; = \; f(d^*_{\text{front}} x) \cdot g(d^*_{\text{back}} x) \; .$$

Hier bezeichnen $d^*_{\text{front}} : X_{n+m} \longrightarrow X_n$ und $d^*_{\text{back}} : X_{n+m} \longrightarrow X_m$ diejenigen Strukturabbildungen in der simplizialen Menge X, die von den injektiven monotonen Abbildungen $d_{\text{front}} : [n] \longrightarrow [n+m]$ (‘vordere Seite’) und $d_{\text{back}} : [m] \longrightarrow [n+m]$ (‘hintere Seite’) induziert sind mit $d_{\text{front}}(i) = i$ bzw. $d_{\text{back}}(i) = n + i$.

Satz 26. (i) *Die Alexander-Whitney Abbildung ist ein Homomorphismus von Kettenkomplexen, d.h. es gilt*

$$d(f \cup g) \; = \; d(f) \cup g \; + \; (-1)^n f \cup d(g)$$

wobei d der Korand-Operator im Kokettenkomplex $C^*(X;R)$ ist.

(ii) *Wenn f und g normalisierte Koketten sind, dann ist auch $f \cup g$ normalisiert. Also schränkt sich das Cup-Produkt zu einer Kettenabbildung*

$$\cup \; : \; C^*_{\text{nr}}(X;R) \otimes C^*_{\text{nr}}(X;R) \; \longrightarrow \; C^*_{\text{nr}}(X;R)$$

auf dem normalisierten Kokettenkomplex ein.

(iii) *(Natürlichkeit) Für eine Abbildung $\alpha : Y \longrightarrow X$ von simplizialen Mengen und Koketten $f, g \in C^*(X;R)$ gilt*

$$\alpha^*(f \cup g) \; = \; \alpha^*(f) \cup \alpha^*(g) \; .$$

(iv) *Das Cup-Produkt ist assoziativ und unitär, d.h. für $f \in C^n(X;R)$, $g \in C^m(X;R)$ und $h \in C^k(X;R)$ gilt*

$$(f \cup g) \cup h \; = \; f \cup (g \cup h)$$

in $C^{n+m+k}(X;R)$, sowie

$$1 \cup x \; = \; x \; = \; x \cup 1$$

wobei $1 \in C^0(X;R)$ die konstante Kokette mit Wert $1 \in R$ bezeichnet.

Beweis. (i) Dies ist eine recht stupide Rechnung, die direkt aus den Definitionen folgt. Dazu brauchen wir folgende Relationen zwischen Morphismen in der simplizialen Kategorie Δ. Für die vordere Seitenabbildung $d_{\text{front}} : [n] \longrightarrow [n+m]$ gilt

$$d_i \circ d_{\text{front}} \; = \; \begin{cases} d_{\text{front}} \circ d_i & \text{falls } 0 \leq i \leq n+1, \text{ und} \\ d_{\text{front}} & \text{falls } n+1 \leq i \leq n+m+1. \end{cases}$$

Ähnlich gilt für die hintere Seitenabbildung $d_{\text{back}} : [m] \longrightarrow [n+m]$

$$d_i \circ d_{\text{back}} \; = \; \begin{cases} d_{\text{back}} & \text{falls } 0 \leq i \leq n, \text{ und} \\ d_{\text{back}} \circ d_{i-n} & \text{falls } n \leq i \leq n+m+1. \end{cases}$$

Für ein Simplex $x \in X_{n+m+1}$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} d(f \cup g)(x) \; &= \; \sum_{i=0}^{n+m+1} (-1)^i \, (f \cup g)(d^*_i(x)) \; = \; \sum_{i=0}^{n+m+1} (-1)^i \, f(d^*_{\text{front}} d^*_i x) \cdot g(d^*_{\text{back}} d^*_i x) \\ &= \; \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, f(d^*_{\text{front}} d^*_i x) \cdot g(d^*_{\text{back}} d^*_i x) \; + \; \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{n+i} \, f(d^*_{\text{front}} d^*_{i+n} x) \cdot g(d^*_{\text{back}} d^*_{i+n} x) \\ &= \; \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, f(d^*_i d^*_{\text{front}} x) \cdot g(d^*_{\text{back}} x) \; + \; \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{n+i} \, f(d^*_{\text{front}} x) \cdot g(d^*_i d^*_{\text{back}} x) \qquad (27) \\ &= \; (df)(d^*_{\text{front}} x) \cdot g(d^*_{\text{back}} x) \; + \; (-1)^n \, f(d^*_{\text{front}} x) \cdot (dg)(d^*_{\text{back}} x) \\ &= \; (df \cup g \; + \; (-1)^n f \cup dg)(x) \; . \end{aligned}$$

Die Umformung (27) benutzt die simplizialen Relationen; der Summand mit Index $i = n+1$ in der linken Summe kürzt sich gegen den Summanden mit Index $i = 0$ in der rechten Summe wegen

$$f(d^*_{n+1}d^*_{\text{front}}x) \cdot g(d^*_{\text{back}}x) \;=\; f(d^*_{\text{front}}x) \cdot g(d^*_{\text{back}}x) \;=\; f(d^*_{\text{front}}x) \cdot g(d^*_0 d^*_{\text{back}}x) \;.$$

(ii) Wir betrachten Koketten $f : X_n \longrightarrow R$ und $g : X_m \longrightarrow R$, die auf ausgearteten Simplizes verschwinden und müssen zeigen, dass dann $f \cup g$ auch auf ausgearteten Simplizes verschwindet. Sei $x \in X_{n+m-1}$ ein beliebiges Simplex und $i = 0, \ldots, n+m-1$. Genau eine der Kompositionen $s_i d_{\text{front}} : [n] \longrightarrow [n+m-1]$ oder $s_i d_{\text{back}} : [m] \longrightarrow [n+m-1]$ ist nicht injektiv, je nachdem, ob $i \leq n-1$ oder $i \geq n$ gilt. Im ersten Fall ist $d^*_{\text{front}}s^*_i x = (s_i d_{\text{front}})^* x$ ausgeartet, also $f(d^*_{\text{front}}s^*_i x) = 0$ da f normalisiert ist. Im anderen Fall ist $g(d^*_{\text{back}}s^*_i x) = 0$. In jedem Fall verschwindet also das Produkt

$$(f \cup g)(s^*_i x) \;=\; f(d^*_{\text{front}}s^*_i x) \cdot g(d^*_{\text{back}}s^*_i x) \;,$$

was zu zeigen war.

Die Eigenschaft (iii) und die Einheitsbedingung in (iv) folgen ziemlich direkt aus den Definitionen. Für die Assoziativität ist nachzurechnen, dass sowohl $(f \cup g) \cup h$ als auch $f \cup (g \cup h)$ ein Simplex $x \in X_{n+m+k}$ auf das Element

$$f(d^*_{\text{front}}x) \cdot g(d^*_{\text{middle}}x) \cdot h(d^*_{\text{back}}x)$$

abbilden. Hier sind d^*_{front}, d^*_{middle} und d^*_{back} induziert von den vorderen, mittleren und hinteren Seitenabbildungen

$$d_{\text{front}} : [n] \;\longrightarrow\; [n+m+k] \;,\; d_{\text{middle}} : [m] \;\longrightarrow\; [n+m+k] \;\text{ bzw. }\; d_{\text{back}} : [k] \;\longrightarrow\; [n+m+k]$$

gegeben durch $d_{\text{front}}(i) = i$, $d_{\text{middle}}(i) = n+i$ bzw. $d_{\text{back}}(i) = n+m+i$. □

Das Cup-Produkt auf dem Koketten-Niveau induziert eine Paarung, ebenfalls Cup-Produkt genannt, auf den Level der Kohomologiegruppen. Wir nehmen dies in etwas allgemeinerer Form zu Kenntnis.

Definition 28. Ein *differentiell graduierter Ring* besteht aus einem graduierten Ring $A = \{A_n\}_{n \geq 0}$ zusammen mit einem Differential (also additiven Abbildungen $d : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ mit $dd = 0$), die der *Leibniz-Regel*

$$d(x \cdot y) \;=\; d(x) \cdot y \;+\; (-1)^n x \cdot d(y)$$

für alle $x \in A_n$ und $y \in A_m$ genügen.

Wie wir im vorigen Satz gezeigt haben, bildet also der Kokettenkomplex mit Ringkoeffizienten einer simplizialen Menge einen differentiell graduierter Ring bezüglich des Cup-Produktes. Ein weiteres topologisches Beispiel ist der deRham-Komplex einer glatten Mannigfaltigkeit bezüglich der $\wedge$-Produktes von Differentialformen.

Für jeden differentiell graduierten Ring A erbt die Kohomologie eine auf Repräsentanten definierte, graduierte Multiplikation

$$\cdot \;:\; H^n A \;\times\; H^m A \;\longrightarrow\; H^{n+m} A \;, \quad [x] \cdot [y] \;=\; [x \cdot y] \;.$$

In der Tat liefert die Leibniz-Formel, dass für zwei Kozykel x und y auch $x \cdot y$ wieder ein Kozykel ist. Ist zusätzlich z eine Kokette von einer Dimension niedriger als x, so gilt

$$(x + (dz)) \cdot y \;=\; x \cdot y \;+\; d(x \cdot z) \;,$$

also repräsentieren $(x + (dz)) \cdot y$ und $x \cdot y$ dieselbe Kohomologieklasse. Ähnlich weist man die Wohldefiniertheit im Repräsentanten y nach. Im Spezialfall des deRham-Komplexes erhalten wir so die Multiplikation in der deRham-Kohomologie einer glatten Mannigfaltigkeit. Im Fall des simplizialen Kokettenkomplexes erhalten wir:

Definition 29. Für eine simpliziale Menge X und einen Ring R ist das Cup-Produkt in der Kohomologie

$$\cup \ : \ H^n(X;R) \otimes H^m(X;R) \ \longrightarrow \ H^{n+m}(X;R)$$

durch die Vorschrift $[f] \cup [g] = [f \cup g]$ definiert.

Die Eigenschaften der Alexander-Whitney Abbildung aus Satz 26 vererben sich direkt auf die Kohomologie und liefern:

Satz 30. (i) *(Natürlichkeit) Für eine Abbildung $\alpha : Y \longrightarrow X$ von simplizialen Mengen und Kohomologieklassen $x, y \in H^n(X;R)$ gilt*

$$\alpha^*(x \cup y) \ = \ \alpha^*(x) \cup \alpha^*(y) \ .$$

(ii) *Das Cup-Produkt ist assoziativ und unitär, d.h. für $x \in H^n(X;R)$, $y \in H^m(X;R)$ und $z \in H^k(X;R)$ gilt*

$$(x \cup y) \cup z \ = \ x \cup (y \cup z)$$

in $H^{n+m+k}(X;R)$ und wir haben

$$1 \cup x \ = \ x \ = \ x \cup 1$$

wobei $1 \in H^0(X;R)$ die Klasse der konstanten Kokette mit Wert $1 \in R$ ist.

Mit denselben Argumenten wie oben konstruiert man auch ein Cup-Produkt in relativer Kohomologie. Sei dazu X eine simpliziale Menge und A und B simpliziale Untermengen. Seien weiter $f \in C^n(X, A; R)$ und $g \in C^m(X, B; R)$ relative Koketten, d.h. f verschwindet auf allen Simplizes von A und g verschwindet auf allen Simplizes von B. Dann verschwindet das Cup-Produkt $f \cup g$ auf allen Simplizes der Vereinigung und kann also als Paarung

$$\cup \ : \ C^n(X, A; R) \otimes C^m(X, B; R) \ \to C^{n+m}(X, A \cup B; R)$$

aufgefasst werden. Wegen der Leibniz-Regel vererbt sich diese Paarung wieder auf die Kohomologie und liefert dort ein relatives Cup-Produkt

$$\cup \ : \ H^n(X, A; R) \otimes H^m(X, B; R) \ \longrightarrow \ H^{n+m}(X, A \cup B; R) \ .$$

Im Spezialfall $A = B$ wird damit die relative Kohomologie $H^*(X, A; R)$ zu einem graduierten Ring.

Wir untersuchen jetzt, inwieweit sich eine eventuell vorhandene Kommutativität des Ringes R auf das R-wertige Cup-Produkt vererbt. Dies ist deutlich subtiler als bei der Assoziativität: wenn der Ring R kommutativ ist und $f \in C^n(X, R)$ und $g \in C^m(X, R)$ Koketten sind, dann gibt es im allgemeinen keine direkte Beziehung zwischen den Koketten $f \cup g$ und $g \cup f$ (zumindest nicht, wenn n und m echt positiv sind). Auf dem Niveau der Kohomologie verbessert sich die Situation allerdings überraschenderweise:

Satz 31. *Sei X eine simpliziale Menge und R ein kommutativer Ring. Dann ist das Cup-Produkt in der Kohomologie $H^*(X;R)$* graduiert kommutativ, *d.h. es gilt*

$$x \cup y \ = \ (-1)^{nm} \cdot y \cup x$$

für $x \in H^n(X;R)$ und $y \in H^m(X;R)$.

Der Grund hinter dem Satz ist, dass das Cup-Produkt auf Kokettenlevel zwar nicht (graduiert) kommutativ ist, dass es allerdings eine Kettenhomotopie gibt, die zwischen den Produkten $f \cup g$ und $(-1)^{nm} \cdot g \cup f$ vermittelt. Diese Kettenhomotopie ist das $\cup_1$-*Produkt*, welche wiederum ein Spezialfall einer Folge von $\cup_i$-Produkten für $i \geq 0$ ist, die von N. E. Steenrod in der Arbeit *Products of cocycles and extensions of mappings* (Ann. of Math. (2) **48** (1947), 290–320) eingeführt wurden. Dabei ist $\cup_0$ das eigentliche Cup-Produkt und wir werden die höheren Produkte $\cup_i$ für $i \geq 2$ nicht verwenden.

Das $\cup_1$-Produkt ist die bilineare Abbildung

$$\cup_1 \ : \ C^n(X;R) \otimes C^m(X;R) \ \longrightarrow \ C^{n+m-1}(X;R)$$

gegeben durch

$$(f \cup_1 g)(x) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n-i)(m+1)} f((d_i^{\text{out}})^* x) \cdot g((d_i^{\text{inn}})^* x)$$

für $x \in X_{n+m-1}$. Hierbei sind die *i-te äußere Seite* $d_i^{\text{out}} : X_{n+m-1} \longrightarrow X_n$ und die *i-te innere Seite* $d_i^{\text{inn}} : X_{n+m-1} \longrightarrow X_m$ induziert von den monotonen injektiven Abbildungen $d_i^{\text{out}} : [n] \longrightarrow [n+m-1]$ und $d_i^{\text{inn}} : [m] \longrightarrow [n+m-1]$ mit Bildern

$$\text{Bild}\left(d_i^{\text{out}}\right) \ = \ \{0,\dots,i\} \cup \{i+m,\dots,n+m-1\} \quad \text{und} \quad \text{Bild}\left(d_i^{\text{inn}}\right) \ = \ \{i,\dots,i+m\} \ .$$

Der Durchschnitt der Bilder von d_i^{out} und d_i^{inn} besteht aus genau zwei Zahlen, nämlich i und $i+m$. Die für uns entscheidende Tatsache ist nun folgende Korandformel

$$(32) \qquad d(f \cup_1 g) \ = \ (df) \cup_1 g \ + \ (-1)^n f \cup_1 (dg) \ - \ (-1)^{n+m} f \cup g \ - \ (-1)^{(n+1)(m+1)} (g \cup f) \ .$$

Wenn wir $s_{n,m} : C^n(X;R) \otimes C^m(X;R) \longrightarrow C^{n+m-1}(X;R)$ durch die Formel $s(f \otimes g) = (-1)^{n+m-1} f \cup_1 g$ definieren, dann ist die Korandformel (32) äquivalent zu

$$(d \circ s + s \circ d)(f \otimes g) \ = \ f \cup g \ - \ (-1)^{nm} (g \cup f) \ ;$$

also bilden die Abbildungen $\{s_{n,m}\}_{n,m \geq 0}$ die gesuchte Kettenhomotopie, was den Beweis von Satz 31 abschließt.

Wir müssen also noch die Korandformel (32) herleiten. Diese Rechnung ist leider nicht besonders erhellend, aber da müssen wir jetzt durch. Wenn wir die Kokette

$$(df) \cup_1 g \ - \ (-1)^{n+m} f \cup g \ - \ (-1)^{(n+1)(m+1)} (g \cup f)$$

auf einem Simplex $x \in X_{n+m}$ auswerten, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{(n+1-i)(m+1)+j} f(d_j^*(d_i^{\text{out}})^*) \cdot g((d_i^{\text{inn}})^*) \\ & - (-1)^{n+m} f(d^*_{\text{front}}) \cdot g(d^*_{\text{back}}) \ - \ (-1)^{(n+1)(m+1)} f(d^*_{\text{back}}) \cdot g(d^*_{\text{front}}) \\ (33) \qquad = \ & \sum_I (-1)^{(n+1-i)(m+1)+j} f(d_j^*(d_i^{\text{out}})^*) \cdot g((d_i^{\text{inn}})^*) \end{aligned}$$

wobei die letzte Summe über alle Paare (i,j) mit $0 \leq i \leq n$ und $0 \leq j \leq n+1$ läuft mit Ausnahme von $(0,0)$ und $(n,n+1)$. Hier und im folgenden lassen wir das 'Dummy'-Simplex x aus der Notation weg um die Formeln zu vereinfachen. Wir haben hier die Relationen $d_0^{\text{out}} d_0 = d^{\text{back}}$, $d_0^{\text{inn}} = d^{\text{front}}$, $d_n^{\text{out}} d_{n+1} = d^{\text{front}}$ und $d_n^{\text{inn}} = d^{\text{back}}$ verwendet.

Weiter gelten:

$$\begin{array}{llll} d_i^{\text{out}} d_j = d_j d_{i-1}^{\text{out}} & \text{und} & d_i^{\text{inn}} = d_j d_{i-1}^{\text{inn}} & \text{für } 0 \leq j < i \leq n; \\ d_i^{\text{out}} d_j = d_{i-1}^{\text{out}} & \text{und} & d_i^{\text{inn}} = d_{i-1}^{\text{inn}} d_0 & \text{für } 0 < i = j; \\ d_i^{\text{out}} d_j = d_i^{\text{out}} & \text{und} & d_i^{\text{inn}} = d_i^{\text{inn}} d_{m+1} & \text{für } i+1 = j \leq n; \text{ und} \\ d_i^{\text{out}} d_j = d_{j+m-1} d_i^{\text{out}} & \text{und} & d_i^{\text{inn}} = d_{j+m-1} d_i^{\text{inn}} & \text{für } i+1 < j \leq n+1. \end{array}$$

Gemäß diesen vier Fällen spalten wie die Summe (33) in vier Anteile auf:

$$\begin{aligned}
& \sum_{0\le j<i\le n} (-1)^{(n+1-i)(m+1)+j}\, f((d_{i-1}^{\mathrm{out}})^* d_j^*)\cdot g((d_{i-1}^{\mathrm{inn}})^* d_j^*) \\
+ \quad & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(n+1-i)(m+1)+i}\, f((d_{i-1}^{\mathrm{out}})^*)\cdot g(d_0^*(d_{i-1}^{\mathrm{inn}})^*) \\
+ \quad & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n+1-i)(m+1)+i+1}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^*)\cdot g(d_{m+1}^*(d_{i}^{\mathrm{inn}})^*) \\
+ \quad & \sum_{i+2\le j\le n+1} (-1)^{(n+1-i)(m+1)+j}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^* d_{j+m-1}^*)\cdot g((d_{i}^{\mathrm{inn}})^* d_{j+m-1}^*)
\end{aligned}$$

Nach Umindizierung der erste und vierten Summe erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \sum_{0\le j\le i\le n-1} (-1)^{(n-i)(m+1)+j}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^* d_j^*)\cdot g((d_{i}^{\mathrm{inn}})^* d_j^*) \\
\text{bzw.} & \sum_{i+m+1\le j\le n+m} (-1)^{(n-i)(m+1)+j}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^* d_j^*)\cdot g((d_{i}^{\mathrm{inn}})^* d_j^*)\ .
\end{aligned}$$

Diese Summen stimmen mit den entsprechenden Anteilen des Ausdrucks

$$d(f\cup_1 g)(x) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n+m} (-1)^{(n-i)(m+1)+j}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^* d_j^*)\cdot g((d_{i}^{\mathrm{inn}})^* d_j^*)$$

überein. Wenn wie also die Kokette

$$d(f\cup_1 g) - (df)\cup_1 g \;+\; (-1)^{n+m} f\cup g \;+\; (-1)^{(n+1)(m+1)}(g\cup f)$$

auf $x\in X_{n+m}$ auswerten, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{i+m} (-1)^{(n-i)(m+1)+j}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^* d_j^*)\cdot g((d_{i}^{\mathrm{inn}})^* d_j^*) \\
- \quad & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(n+1-i)(m+1)+i}\, f((d_{i-1}^{\mathrm{out}})^*)\cdot g(d_0^*(d_{i-1}^{\mathrm{inn}})^*) \;-\; \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{(n+1-i)(m+1)+i+1}\, f(d_i^{\mathrm{out}})\cdot g(d_{m+1} d_i^{\mathrm{inn}}) \\
= \quad & \sum_{i=0}^{n-1}\left\{ \sum_{j=1}^{m} (-1)^{(n-i)(m+1)+j+i}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^* d_{j+i}^*)\cdot g((d_{i}^{\mathrm{inn}})^* d_{j+i}^*) \right. \\
& \left. +\; (-1)^{(n-i)(m+1)+i}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^*)\cdot g(d_0^*(d_{i}^{\mathrm{inn}})^*) + \; (-1)^{(n+1-i)(m+1)+i}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^*)\cdot g(d_{m+1}^*(d_{i}^{\mathrm{inn}})^*) \right\} \\
= \quad & \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{n+(n-i)m+j}\, f((d_{i}^{\mathrm{out}})^*)\cdot g(d_j^*(d_{i}^{\mathrm{inn}})^*) \;=\; (-1)^n\,(f\cup_1 (dg))(x)\ .
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Relationen

$$d_{j+i} d_i^{\mathrm{out}} \;=\; d_i^{\mathrm{out}} \quad \text{und} \quad d_{j+i} d_i^{\mathrm{inn}} \;=\; d_i^{\mathrm{inn}} d_j$$

verwendet, die für $1\le j\le m$ gelten. Damit ist der Beweis der Korandformel (32), also auch der Beweis von Satz 31, vollständig.

Eilenberg-MacLane-Räume

Eilenberg-MacLane-Räume sind Räume mit einer einzigen nicht-verschwindenden Homotopiegruppe. Solche Räume existieren zu jeder Gruppe und Dimension und sind eindeutig bis auf Homotopieäquivalenz, jedenfalls wenn man sich auf CW-Komplexe beschränkt.

Definition 34. Sei $n \geq 1$ und A eine Gruppe, die abelsch ist falls $n \geq 2$. Ein *Eilenberg-MacLane-Raum* vom Typ (A, n) ist ein weg-zusammenhängender, punktierter Raum X zusammen mit einem Isomorphismus $\varphi : \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} A$ so dass außerdem $\pi_i(X, x_0) = 0$ für alle $i \neq n$ ist. Die Zahl n heißt die Dimension von X.

Der Isomorphismus φ zwischen der Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ und A ist Teil der Daten eines Eilenberg-MacLane-Raumes, wird aber oft nicht mit erwähnt. Man schreibt oft "$\pi_n(X, x_0) = A$", wobei eigentlich die Identifikation mittels des Isomorphismus φ gemeint ist.

Beispiel 35. Der Kreis S^1 ist ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(\mathbb{Z}, 1)$. Die universelle Überlagerung $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ hat nämlich einen zusammenziehbaren Totalraum; also ist

$$\pi_n(S^1, 1) \;\cong\; \pi_n(\mathbb{R}, 0) \;=\; 0$$

für $n \geq 2$, und die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 1)$ ist isomorph zur Decktransformationsgruppe $\mathrm{Deck}(\exp) \cong \mathbb{Z}$.

Der allgemeinere Sachverhalt hinter diesem Beispiel ist folgender: sei X ein Raum, dessen universelle Überlagerung $\tilde{X} \to X$ existiert und so dass $\tilde{X}$ zusammenziehbar ist. Dann ist X ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(G, 1)$, wobei G die Gruppe der Decktransformationen ist.

Neben S^1 sind der unendlich-dimensionale projektive Raum $\mathbb{R}P^\infty$, die Klein'sche Flasche und der Torus $S^1 \times S^1$ weitere in der Natur vorkommende Beispiele; die Totalräume der universellen Überlagerungen sind S^∞ (die unendlich-dimensionale Sphäre) im Fall von $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ bzw. $\mathbb{R}^2$ in den beiden anderen Fällen. Die Decktransformationsgruppen der universellen Überlagerungen sind $\mathbb{Z}/2$ (für $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$), das semi-direkte Produkt von $\mathbb{Z}$ mit der Vorzeichen-Operation auf $\mathbb{Z}$ (für die Klein'sche Flasche) bzw. $\mathbb{Z}^2$ (für den Torus). Also sind $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, die Klein'sche Flasche und der Torus Eilenberg-MacLane-Räume der Dimension 1 zu den obigen Gruppen.

Beispiel 36. Wie wir später mit Hilfe der Theorie der Faserbündel sehen werden, ist der unendlich-dimensionale komplexe projektive Raum $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(\mathbb{Z}, 2)$.

Beispiel 37. Seien X und Y Eilenberg-MacLane-Räume derselben Dimension n vom Typ (A, n) bzw. (B, n). Dann ist der Produktraum $X \times Y$ ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(A \times B, n)$.

Wir konstruieren jetzt einen Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(G, 1)$ für jede Gruppe G, und zwar funktoriell in G. Sei zunächst X eine Menge. Wir definieren eine simpliziale Menge EX in Dimension n durch $EX_n = \mathrm{Abb}(\{0, \ldots, n\}, X)$, die Menge aller Abbildungen der Menge $\{0, \ldots, n\}$ nach X. Die Strukturabbildungen sind gegeben durch

$$\alpha^* \;:\; EX_m \longrightarrow EX_n \;, \quad \alpha^*(f) \;=\; (f \circ \alpha : \{0, \ldots, n\} \to X)$$

für $\alpha : [n] \to [m]$ in Δ. Nun ist EX_n in Bijektion zu X^{n+1} vermöge $f \mapsto (f(0), \ldots, f(n))$, und in dieser Beschreibung ist α^* gegeben durch

$$\alpha^*(x_0, \ldots, x_m) = (x_{\alpha(0)}, \ldots, x_{\alpha(n)}) \;.$$

Die Zuordnung $X \mapsto EX$ ist funktoriell in X: für eine Abbildung $g : X \to Y$ ist $Eg : EX \to EY$ in Dimension $n \geq 0$ gegeben durch

$$(Eg)_n(f) \;=\; g \circ f$$

in der Interpretation $EX_n = \mathrm{Abb}(\{0, \ldots, n\}, X)$, bzw.

$$(Eg)_n(x_0, \ldots, x_n) \;=\; (g(x_0), \ldots, g(x_n))$$

in der Koordinatenschreibweise $EX_n = X^{n+1}$.

Lemma 38. *Für jede nicht-leere Menge X ist die simpliziale Menge EX zusammenziehbar.*

Beweis. Wir wählen ein Element $y \in X$ und geben eine simpliziale Homotopie $H : EX \times \underline{\Delta}^1 \to EX$ von der Identität zur konstanten Abbildung mit Wert $y \in X = EX_0$ an.

Sei $\kappa_i : [n] \to [1]$ die monotone Abbildung mit

$$\kappa_i(\{0, \ldots, i-1\}) = 0 \quad \text{und} \quad \kappa_i(\{i, \ldots, n\}) = 1; \tag{39}$$

für $i = 0, \ldots, n+1$ sind dies alle Elemente in $(\underline{\Delta}^1)_n = \mathrm{Hom}_\Delta([n], [1])$. In Dimension n setzen wir

$$\begin{array}{rcl} H_n : EX_n \times \underline{\Delta}^1_n & \longrightarrow & EX_n \\ H_n((x_0, \ldots, x_n), \kappa_i) & = & (x_0, \ldots, x_{i-1}, y, \ldots, y) \ . \end{array}$$

Wir lassen es als Übung nachzuweisen, dass dies tatsächlich eine simpliziale Abbildung ist. Es gilt dann

$$\begin{array}{rcccl} H((x_0, \ldots, x_n), 0) & = & H((x_0, \ldots, x_n), \kappa_{n+1}) & = & (x_0, \ldots, x_n) \text{ sowie} \\ H((x_0, \ldots, x_n), 1) & = & H((x_0, \ldots, x_n), \kappa_0) & = & (y, \ldots, y) \ . \end{array}$$

□

Sei jetzt G eine Gruppe. Dann operiert G auf G durch Rechtstranslation und damit auch auf $EG_n = G^{n+1}$ durch

$$(g_0, \ldots, g_n) \cdot h \ = \ (g_0 h, \ldots, g_n h) \ .$$

Dadurch wird EG eine simpliziale G-Menge im folgenden Sinn.

Definition 40. Sei G eine Gruppe. Eine *simpliziale G-Menge* ist eine simpliziale Menge Y zusammen mit einer rechten G-Operation auf Y_n für alle $n \geq 0$, so dass für jeden Morphismus $\alpha : [n] \longrightarrow [m]$ in der Kategorie Δ die induzierte Abbildung $\alpha^* : Y_m \longrightarrow Y_n$ mit der G-Wirkung vertauscht. Die *simpliziale Bahnenmenge* Y/G hat als n-Simplizes die Menge Y_n/G der G-Bahnen in Y_n, mit den induzierten Strukturabbildungen. Die Projektion $Y \longrightarrow Y/G$ ist ein Morphismus von simplizialen Mengen.

Eine simpliziale G-Menge ist dasselbe wir ein kontravarianter Funktor von der Kategorie Δ in die Kategorie der G-Mengen und G-äquivarianten Abbildungen. In der eben gegebenen Definition würde es ausreichen, nur von den Ausartungs- und Randabbildungen s_i^* und d_j^* die G-Äquivarianz zu verlangen.

Satz 41. *Sei G eine Gruppe und Y eine simpliziale G-Menge mit der Eigenschaft, dass die Operation von G in jeder Dimension frei ist. Dann ist die geometrische Realisierung $|Y| \to |Y/G|$ der Quotientenabbildung eine Überlagerung mit Decktransformationsgruppe G.*

Wir lassen den Beweis aus, wenden den Satz aber gleich auf die simpliziale Menge EG an. Die Rechtstranslation von G auf sich selbst ist eine freie Operation. Folglich ist auch die G-Operation auf EG frei in jeder Dimension. Der Satz 41 besagt also, dass die Quotientenabbildung $|EG| \to |EG/G|$ eine Überlagerung mit Decktransformations-Gruppe G ist. Da der Totalraum $|EG|$ zusammenziehbar ist, ist der Basisraum $|EG/G|$ ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(G, 1)$.

Konstruktion 42. Wir geben jetzt eine etwas andere Beschreibung der simplizialen Menge EG/G. Wir definieren dazu eine simpliziale Menge BG durch $BG_n = G^n$ mit Strukturabbildungen

$$d_i(g_1, \ldots, g_n) \ = \ \begin{cases} (g_2, \ldots, g_n) & \text{falls} \quad i = 0 \\ (g_1, \ldots, g_i \cdot g_{i+1}, \ldots, g_n) & \text{falls} \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ (g_1, \ldots, g_{n-1}) & \text{falls} \quad i = n, \end{cases}$$

sowie

$$s_i(g_1, \ldots, g_n) \ = \ (g_1, \ldots, g_i, 1, g_{i+1}, \ldots, g_n) \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Lemma 43. *Die simplizialen Mengen EG/G und BG sind isomorph.*

Beweis. Wir betrachten die simpliziale Abbildung $p : EG \longrightarrow BG$, die in Dimension n gegeben ist durch

$$p(g_0, \ldots, g_n) \;=\; (g_0 g_1^{-1}, g_1 g_2^{-1}, \ldots, g_{n-1} g_n^{-1}) \;.$$

Das Nachprüfen, dass dies tatsächlich einen Morphismus simplizialer Mengen definiert, erfolgt direkt von den Definitionen. Wenn $x, y \in EG_n$ in derselben G-Bahn liegen, dann gilt $p(x) = p(y)$. Also faktorisiert p über einen Morphismus $EG/G \longrightarrow BG$; dieser Morphismus ist in jeder Dimension bijektiv, also ein Isomorphismus von simplizialen Mengen. □

Wir wissen also jetzt, dass die geometrische Realisierung $|BG|$ ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(G, 1)$ ist. Zur späteren Verwendung notieren wir einen expliziten Isomorphismus zwischen der Fundamentalgruppe von $|BG|$ und der Gruppe G. Für jedes Gruppenelement $g \in G$ betrachten wir die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \omega_g \;:\; [0,1] \;&\longrightarrow\; \left(\coprod_{n \geq 0} BG_n \times \Delta^n \right) \Big/ \sim \;\; = \;|BG| \\ t \;&\longmapsto\; [g, (t, 1-t)] \;. \end{aligned}$$

Das Gruppenelement g ist auch ein 1-Simplex in der simplizialen Menge BG, und die rechte Seite bezeichnet die Klasse des Tupels $(g, (t, 1-t)) \in BG_1 \times \Delta^1$. Die Abbildung ω_g bildet die Endpunkte des Intervalls auf den Basispunkt $1 \in |BG|$ ab, ist also ein geschlossener Weg. Die Abbildung

$$\psi \;:\; G \;\longrightarrow\; \pi_1(|BG|, 1) \;,$$

die g auf die Homotopieklasse der Schleife ω_g abbildet, ist ein Isomorphismus.

Beispiel 44. Wir bezeichnen mit Σ_n die symmetrische Gruppe auf n Elementen, also die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Es gibt einen engen Zusammengang zwischen stetigen Abbildungen mit Ziel $|B\Sigma_n|$ und n-blättrigen Überlagerungen. Wir betrachten dazu den Raum

$$|E\Sigma_n| \times_{\Sigma_n} \{1, 2, \ldots, n\} \;,$$

den Quotienten von $|E\Sigma_n| \times \{1, 2, \ldots, n\}$ nach der Äquivalenzrelation $(x\sigma, i) \sim (x, \sigma(i))$. Die Projektion $|E\Sigma_n| \times \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow |E\Sigma_n|$ ist eine (triviale) n-blättrige Überlagerung und induziert eine n-blättrige Überlagerung

$$|E\Sigma_n| \times_{\Sigma_n} \{1, 2, \ldots, n\} \;\longrightarrow\; |E\Sigma_n|/\Sigma_n \cong |B\Sigma_n| \;,$$

die hochgradig nicht-trivial ist: man kann zeigen, dass diese Überlagerung *universell* in dem Sinne ist, dass jede andere n-blättrige Überlagerung über einem parakompakten Raum X daraus durch Zurückziehen entlang einer stetigen Abbildung $X \longrightarrow |B\Sigma_n|$ entsteht. (Vorsicht bei diesem Sprachgebrauch: dies ist für $n \geq 3$ keine universelle Überlagerung von $|B\Sigma_n|$! Die Fundamentalgruppe von $|B\Sigma_n|$ hat $n!$ Elemente, die universelle Überlagerung hat also $n!$ Blätter.) Für solche X ergibt dies sogar eine Bijektion zwischen $[X, |B\Sigma_n|]$, den Homotopieklassen stetiger Abbildungen, und den Isomorphieklassen von n-blättrigen Überlagerungen über X.

Als nächstes konstruieren wir Eilenberg-MacLane-Räume höherer Dimension. Wir benutzen dabei eine Konstruktion, die etwas martialisch als 'Töten von Homotopiegruppen' bezeichnet wird und die uns auch später noch nützlich sein wird:

Satz 45. *Sei $n \geq 0$ und (Y, y) ein punktierter Raum. Dann gibt es einen relativen CW-Komplex (X, Y) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *alle relativen Zellen haben mindestens Dimension $n + 1$,*
(ii) *die Inklusion induziert Bijektionen $\pi_i(Y, y) \longrightarrow \pi_i(X, y)$ für alle $i < n$, und*
(iii) *für alle $i \geq n$ ist $\pi_i(X, y)$ trivial.*

Beweis. Wir setzen $X^{(0)} = X^{(1)} = \cdots = X^{(n)} = Y$ und konstruieren die höheren Skelette $X^{(n+1)}, X^{(n+2)}, \ldots$ induktiv so, dass gilt:

(a) $X^{(i+1)}$ entsteht aus $X^{(i)}$ durch Ankleben von $(i+1)$-Zellen. Dies impliziert nach dem zellulären Approximationssatz, dass die Inklusion $X^{(i)} \to X^{(i+1)}$ für $m \leq i-1$ Bijektionen auf $\pi_m(-,y)$ induziert.

(b) Die Homotopiegruppe $\pi_i(X^{(i+1)}, y)$ ist trivial.

Der Raum $X = \bigcup_{i \geq n} X^{(i)}$ ist dann der gesuchte CW-Komplex, relativ zu Y. In der Tat hängt die i-te Homotopiegruppe eines CW-Komplexes nur von dessen $(i+1)$-Skelett ab, also haben wir wie gewünscht

$$\pi_i(X,y) \;\cong\; \pi_i(X^{(i+1)}, y) \;\cong\; \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad i \geq n \\ \pi_i(Y,y) & \text{falls} \quad i < n. \end{cases}$$

Für den Induktionsschritt wählen wir erzeugende Elemente $\{x_j\}_{j \in J}$ für die Gruppe $\pi_i(X^{(i)}, y)$. Wir repräsentieren jede Klasse x_j durch eine stetige Abbildung $f_j : S^i \to X^{(i)}$ und definieren

$$X^{(i+1)} \;=\; X^{(i)} \cup_{J \times S^i} J \times D^{i+1}$$

mit den f_j's als Anklebeabbildung. Wir müssen jetzt Eigenschaft (b) zeigen, dass also $\pi_i(X^{(i+1)}, y)$ trivial ist. Dazu bemerken wir zweierlei:

- Die Abbildung $\pi_i(X^{(i)}, y) \to \pi_i(X^{(i+1)}, y)$ ist surjektiv nach dem zellulären Approximationssatz.
- Die Abbildung $\pi_i(X^{(i)}, y) \to \pi_i(X^{(i+1)}, y)$ ist trivial. Es reicht dafür zu zeigen, dass alle Erzeuger x_j von $\pi_i(X^{(i)}, y)$ auf das Null-Element abgebildet werden. Für jedes $j \in J$ kann die Komposition

$$S^i \;\xrightarrow{f_j}\; X^{(i)} \;\hookrightarrow\; X^{(i+1)} = X^{(i)} \cup_{\{f_j\}} J \times D^{i+1}$$

  stetig auf D^{i+1} fortgesetzt werden, weil f_j als Anklebeabbildung für eine der $(i+1)$-Zellen genommen wurde. Die Komposition ist also null-homotop.

Da die Abbildung $\pi_i(X^{(i)}, y) \to \pi_i(X^{(i+1)}, y)$ sowohl surjektiv als auch trivial ist, muss ihr Wertebereich trivial sein, was Eigenschaft (b) beweist. □

Nach dieser Vorbereitung geben wir nun eine allgemeine Konstruktion von Eilenberg-MacLane-Räumen.

Satz 46. *Sei $n \geq 2$ und A eine abelsche Gruppe. Dann gibt es einen Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ (A, n), der ein CW-Komplex ist.*

Beweis. Wir wählen eine freie Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[I] \xrightarrow{d} \mathbb{Z}[J] \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0 \tag{47}$$

von A als abelsche Gruppe. Hierbei sind I und J Indexmengen und $\mathbb{Z}[I]$ bezeichnet die freie abelsche Gruppe mit Basis I. Wir setzen

$$X^{(n)} \;=\; \{x\} \cup_{J \times S^{n-1}} J \times D^n \;,$$

eine Einpunkt-Vereinigung von n-Sphären indiziert durch die Menge J. Dann ist $X^{(n)}$ ein n-dimensionaler CW-Komplex mit einer 0-Zelle, keinen Zellen der Dimensionen 1 bis $n-1$ und mit n-Zellen indiziert durch die Menge J. Nach dem zellulären Approximationssatz gilt $\pi_i(X^{(n)}, x) = 0$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Nach dem Hurewicz-Satz ist also die Hurewicz-Abbildung

$$h \;:\; \pi_n(X^{(n)}, x) \;\longrightarrow\; H_n(X^{(n)}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[J]$$

ein Isomorphismus. Wir können also für jeden Index $i \in I$ eine stetige, basierte Abbildung $\alpha_i : S^n \to X^{(n)}$ so wählen, dass das Hurewicz-Bild

$$h\left([\alpha_i]\right) \;\in H_n(X^{(n)}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[J]$$

der Homotopieklasse von α_i gleich $d(i)$ ist. Hier benutzen wir für $i \in I$ dasselbe Symbol i für das zugehörige Basiselement in $\mathbb{Z}[I]$, und d ist der Homomorphismus aus der Auflösung (47) von A.

Wir definieren $X^{(n+1)}$ durch Ankleben von I-vielen $(n+1)$-Zellen an $X^{(n)}$ vermöge der Abbildungen α_i, also

$$X^{(n+1)} \;=\; X^{(n)} \cup_{I \times S^n} I \times D^{n+1} \;.$$

Der zelluläre Kettenkomplex von $X^{(n+1)}$ ist dann trivial in allen Dimensionen außer $0, n$ und $n+1$; der für die Berechnung von $H_n(X^{(n+1)}; \mathbb{Z})$ relevante Teil ist folgendes kommutative Diagramm mit exakten Reihen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}[I] \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}[J] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"'] & H_n(X^{(n)}; \mathbb{Z}) \arrow[r] & H_n(X^{(n+1)}; \mathbb{Z}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Also gibt es genau einen Isomorphismus $A \cong H_n(X^{(n+1)}; \mathbb{Z})$, der obiges Diagramm am rechten Ende kommutativ macht. Da $X^{(n+1)}$ auch $(n-1)$-zusammenhängend ist, gibt die Komposition mit der Hurewicz-Abbildung einen Isomorphismus zwischen der Homotopiegruppe $\pi_n(X^{(n+1)}, x)$ und A.

Die Homotopiegruppen des soeben konstruierten Raumes $X^{(n+1)}$ in Dimensionen $\geq n+1$ können wir nicht kontrollieren. Deshalb Töten wir sie mittels Satz 45, d.h. wir kleben an $X^{(n+1)}$ Zellen der Dimensionen mindestens $n+2$ so an, dass sich die Homotopiegruppen bis Dimension n nicht ändern und darüber trivial werden. Das Ergebnis ist ein CW-Komplex mit A als einziger nicht-trivialer Homotopiegruppe in Dimension n. □

Bemerkung 48. Wir skizzieren ohne Beweis eine ganz andere, simpliziale Konstruktion eines Eilenberg-MacLane Raumes vom Typ (A, n) für abelsche Gruppen A, die Konstruktion 42 verallgemeinert. Dazu betrachten wir die simpliziale Menge $\Delta^n/\partial\Delta^n$, die aus dem Standard-$n$-Simplex durch Kollabieren des Randes entsteht. Wir bilden die simpliziale abelsche Gruppe

$$\tilde{A}[\Delta^n/\partial\Delta^n] \;=\; A[\Delta^n/\partial\Delta^n]/A[*] \;,$$

die aus der dimensionsweisen A-Linearisierung von $\Delta^n/\partial\Delta^n$ entsteht, indem die Kopie von A, die durch die Ausartung des Basispunktes indiziert ist, als Faktorgruppe herausgeteilt wird. Dann ist die geometrische Realisierung $|\tilde{A}[\Delta^n/\partial\Delta^n]|$ ein Eilenberg-MacLane Raum vom Typ (A, n). Als Übung überprüfe man, dass im Fall $n = 1$ die unterliegende simpliziale Menge von $\tilde{A}[\Delta^1/\partial\Delta^1]$ isomorph zur simplizialen Menge BA aus Konstruktion 42 ist.

Der Beweis, dass wir tatsächlich einen Eilenberg-MacLane Raum erhalten, beruht auf einer Eigenschaft von simplizialen abelschen Gruppen, die wir später beweisen werden: für jede simpliziale abelsche Gruppe D und jedes $n \geq 1$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\pi_n(|D|, 0) \;\cong\; H_n(C_* D)$$

zwischen der n-ten Homotopiegruppe der geometrischen Realisierung von D (wobei die Gruppenstruktur vor der Realisierung vergessen wird) und der Homologie des Kettenkomplexes von D. Angewandt auf die simpliziale abelsche Gruppe $\tilde{A}[\Delta^n/\partial\Delta^n]$ liefert dies unsere Behauptung weil die Homologie des Kettenkomplexes von $\tilde{A}[\Delta^n/\partial\Delta^n]$die reduzierte Homologie von $\Delta^n/\partial\Delta^n$ berechnet, welche nur aus einer Kopie von A in Dimension n besteht.

Eindeutigkeit von Eilenberg-MacLane-Räumen

In diesem Abschnitt weisen wir nach, dass Eilenberg-MacLane-Räume eindeutig bis auf Homotopieäquivalenz sind, solange man sich auf CW-Komplexe beschränkt. Das folgende Lemma wird häufig nützlich sein, um Abbildungen und Homotopien zu konstruieren.

Lemma 49. *Sei (X, Y) ein relativer CW-Komplex und sei Z ein topologischer Raum. Weiter gelte für alle $m \geq 1$, für die es mindestens eine relative Zelle der Dimension m gibt, die Bedingung $\pi_{m-1}(Z, z) = 0$ für jeden Basispunkt $z \in Z$. Dann kann jede stetige Abbildung $Y \longrightarrow Z$ stetig auf ganz X fortgesetzt werden.*

Beweis. Wir konstruieren induktiv stetige Fortsetzungen $f^{(m)} : X^{(m)} \longrightarrow Z$ auf die Skelette von X, beginnend mit einer gegebenen Abbildung $f = f^{(-1)} : Y \longrightarrow Z$. Wir definieren $f^{(0)}$, indem wir die relativen 0-Zellen beliebig nach Z abbilden. Sei jetzt $m \geq 1$ und sei die Fortsetzung $f^{(m-1)}$ bereits konstruiert. Falls es keine relativen m-Zellen gibt, ist im Induktionsschritt nichts zu tun. Ansonsten betrachten wir die Komposition

$$S^{m-1} \xrightarrow{\alpha_j} X^{(m-1)} \xrightarrow{f^{(m-1)}} Z$$

der Anklebeabbildung α_j einer m-Zelle von X mit $f^{(m-1)}$. Sei $x \in S^{m-1}$ ein Basispunkt. Da die Homotopiegruppe $\pi_{m-1}(Z, f^{(m-1)}(\alpha_j(x)))$ trivial ist, kann $f^{(m-1)} \circ \alpha_j$ stetig auf die Kreisscheibe D^m fortgesetzt werden. Für jede m-Zelle von X wählen wir eine solche Fortsetzung und definieren dadurch die nächste Abbildung $f^{(m)} : X^{(m)} \longrightarrow Z$ auf der entsprechenden Zelle. Da X die schwache Topologie bezüglich der Skelette trägt, definieren die induktiv gefundenen Fortsetzungen $f^{(m)} : X^{(m)} \longrightarrow Z$ zusammen die gesuchte stetige Abbildung von X nach Z. □

Für einen CW-Komplex Y, dessen $(n-1)$-Skelett nur aus einem Punkt besteht, impliziert der zelluläre Approximationssatz, dass alle Homotopiegruppen bis einschließlich Dimension $n-1$ verschwinden, dass Y also $(n-1)$-zusammenhängend ist. Bis auf Homotopie gilt davon auch die Umkehrung:

Satz 50. *Jeder $(n-1)$-zusammenhängende CW-Komplex, $n \geq 1$, ist homotopie-äquivalent zu einem CW-Komplex, dessen $(n-1)$-Skelett nur aus einem Punkt besteht.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass das n-Skelett von Y homotopie-äquivalent zu einer Einpunkt-Vereinigung von n-Sphären ist. Im Fall $n = 1$ wählen wir dazu einen Baum T in Y, also einen zusammenziehbaren, 1-dimensionalen Unterkomplex, der alle 0-Zellen enthält. Dann ist die Projektion $Y^{(1)} \longrightarrow Y^{(1)}/T$ eine Homotopie-Äquivalenz, und das Ziel hat nur eine 0-Zelle, ist also ein Einpunkt-Vereinigung von Kreisen.

Für $n \geq 2$ argumentieren wir wie folgt. Das n-Skelett $Y^{(n)}$ ist nach dem zellulären Approximationssatz ebenfalls $(n-1)$-zusammenhängend. Die Hurewicz-Abbildung $\pi_n(Y^{(n)}, y) \longrightarrow H_n(Y^{(n)}; \mathbb{Z})$ ist also ein Isomorphismus. Die n-te Homologiegruppe von $Y^{(n)}$ ist frei als Untergruppe der höchsten zellulären Kettengruppe von $Y^{(n)}$. Also ist auch die Homotopiegruppe $\pi_n(Y^{(n)}, y)$ eine freie abelsche Gruppe. Wir wählen eine Indexmenge I und stetige, punktierte Abbildungen $\alpha_i : S^n \longrightarrow Y$ für $i \in I$, deren Klassen eine Basis von $\pi_n(Y^{(n)}, y)$ als abelscher Gruppe bilden. Zusammen geben diese eine Abbildung

$$\bigvee_I \alpha_i \; : \; \bigvee_I S^n \longrightarrow Y^{(n)} \, , \tag{51}$$

die nach Konstruktion einen Isomorphismus auf $H_n(-; \mathbb{Z})$ induziert. Beide Seiten sind aber $(n-1)$-zusammenhängend und haben triviale Homologiegruppen oberhalb Dimension n. Also induziert die Abbildung (51) einen Isomorphismus auf allen ganzzahligen Homologiegruppen. Da beide Räume einfach-zusammenhängende CW-Komplexe sind, ist die Abbildung eine Homotopie-Äquivalenz.

Wie eben gezeigt gibt es also eine Homotopie-Äquivalenz $f : Y^{(n)} \longrightarrow \bigvee_I S^n$. Wir können annehmen, dass f zellulär ist bezüglich der 'minimalen' CW-Struktur auf der Einpunkt-Vereinigung (mit einer 0-Zelle und n-Zellen indiziert durch I); 'zellulär' bedeutet dann konkret, dass f das $(n-1)$-Skelett von Y komplett auf den Basispunkt abbildet. Wir definieren einen neuen Raum Y' durch Verkleben vermöge f als

$$Y' \; = \; Y \cup_{Y^{(n)}} \bigvee_I S^n \, .$$

Dann hat Y' eine kanonische CW-Struktur mit nur einer 0-Zelle und keinen Zellen in Dimensionen 1 bis $n-1$. Außerdem ist die Abbildung $Y \longrightarrow Y'$ eine Homotopie-Äquivalenz weil die Abbildung f eine ist. □

Jetzt können wir zeigen, dass in speziellen Situationen eine Abbildung schon durch ihr Verhalten auf einer einzigen Homotopiegruppe bis auf Homotopie festgelegt sein kann.

Satz 52. *Sei $n \geq 1$ und Y ein $(n-1)$-zusammenhängender CW-Komplex. Weiter sei Z ein punktierter Raum mit $\pi_m(Z,z) = 0$ für $m > n$. Dann gibt es zu jedem Gruppenhomomorphismus $\Phi : \pi_n(Y,y) \to \pi_n(Z,z)$ eine stetige basierte Abbildung $f : Y \to Z$ die Φ realisiert, d.h. so dass $\pi_n(f) = \Phi$. Je zwei Realisierungen desselben Gruppenhomomorphismus sind homotop relativ Basispunkt. Mit anderen Worten, die Abbildung*

$$\pi_n \ : \ [Y,Z]_* \ \longrightarrow \ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gruppen}}(\pi_n(Y,y), \pi_n(Z,z))$$

mit Quelle die Menge der punktierten Homotopieklassen stetiger basispunkt-erhaltender Abbildungen ist bijektiv.

Beweis. Wenn wir die Behauptung für einen bestimmten CW-Komplex Y bewiesen haben, dann gilt sie auch für jeden dazu homotopie-äquivalenten CW-Komplex. Nach Satz 50 können wir also annehmen, dass das $(n-1)$-Skelett von Y nur aus dem Basispunkt besteht.

Wir konstruieren zunächst zu gegebenem Homomorphismus $\Phi : \pi_n(Y,y) \to \pi_n(Z,z)$ eine punktierte stetige Abbildung $f^{(n)} : Y^{(n)} \longrightarrow Z$ auf dem n-Skelett $Y^{(n)}$ von Y, für die das Dreieck

$$(53) \qquad \begin{tikzcd} \pi_n(Y^{(n)},y) \arrow[rr, "\pi_n(f^{(n)})"] \arrow[dr, "\pi_n(\iota)"'] & & \pi_n(Z,z) \\ & \pi_n(Y,y) \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $\iota : Y^{(n)} \longrightarrow Y$ die Inklusion ist. Sei I eine Indexmenge für die n-Zellen von Y. Für jedes $i \in I$ sei $\chi_i : D^n \longrightarrow Y$ eine charakteristische Abbildung für die entsprechende Zelle. Da das $(n-1)$-Skelett von Y nur aus dem Basispunkt besteht, faktorisiert χ_i über eine punktierte Abbildung $\bar{\chi}_i : S^n \cong D^n/\partial D^n \longrightarrow Y$, welche eine Klasse in $\pi_n(Y,y_0)$ repräsentiert. Wir wählen eine stetige, punktierte Abbildung $\omega_i : D^n/\partial D^n \longrightarrow Z$ in der Homotopieklasse von $\Phi([\bar{\chi}_i]) \in \pi_n(Z,z)$. Nun definieren wir $f^{(n)} : Y^{(n)} \longrightarrow X$ auf der i-ten Zelle durch ω_i. Auf den Homotopieklassen der Abbildungen $\bar{\chi}_i$ kommutiert das Dreieck (53) dann nach Konstruktion von $f^{(n)}$; da diese Klassen die Gruppe $\pi_n(Y^{(n)},y)$ erzeugen und mit Φ alle beteiligten Abbildung Gruppen-Homomorphismen sind, kommutiert das Dreieck auf allen Elementen von $\pi_n(Y^{(n)},y)$.

Wir setzen nun $f^{(n)}$ stetig auf das $(n+1)$-Skelett von Y fort. Sei J eine Indexmenge für die $(n+1)$-Zellen von Y. Für jedes $j \in J$ sei $\chi_j : D^{n+1} \longrightarrow Y$ eine charakteristische Abbildung für die entsprechende Zelle. Die Anklebeabbildung der zugehörigen Zelle ist die Einschränkung

$$\chi_j|_{S^n} \ : \ S^n \ \longrightarrow \ Y^{(n)} \ .$$

Da $Y^{(n)}$ weg-zusammenhängend ist, ist $\chi_j|_{S^n}$ frei homotop zu einer Abbildung $\alpha : S^n \longrightarrow Y^{(n)}$, die die Basispunkte aufeinander abbildet. Da $\chi_j|_{S^n}$ die Einschränkung einer Abbildung $D^{n+1} \longrightarrow Y$ ist, kann auch die Komposition

$$S^n \ \xrightarrow{\alpha} \ Y^{(n)} \ \xrightarrow{\iota} \ Y$$

mittels der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft stetig auf die Kreisscheibe D^{n+1} fortgesetzt werden. Also ist das Bild der Klasse $[\alpha] \in \pi_n(Y^{(n)},y)$ unter $\pi_n(\iota) : \pi_n(Y^{(n)},y) \longrightarrow \pi_n(Y,y)$ trivial. Da das Dreieck (53) kommutiert, ist also auch $\pi_n(f^{(n)})([\alpha])$ trivial in $\pi_n(Z,z)$. Dies bedeutet gerade, dass $f^{(n)} \circ \alpha$ null-homotop ist. Nach einer weiteren Anwendung der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft schließen wir, dass auch $f^{(n)} \circ \chi_j|_{S^n} : S^n \longrightarrow Z$ null-homotop ist. Wir können also eine stetige Fortsetzung von $f^{(n)} \circ \chi_j|_{S^n}$ auf den Ball D^{n+1} wählen und die Abbildung $f^{(n+1)} : Y^{(n+1)} \longrightarrow Z$ auf der j-ten Zelle dadurch definieren.

Da die höheren Homotopiegruppen von Z trivial sind, zeigt Lemma 49, angewandt auf das relative CW-Paar $(Y, Y^{(n+1)})$, dass $f^{(n+1)}$ stetig auf ganz Y fortgesetzt werden kann. Jede solche Fortsetzung realisiert Φ: wegen des kommutativen Dreiecks (53) gilt $\Phi \circ \pi_n(\iota) = \pi_n(f^{(n)}) = \pi_n(f) \circ \pi_n(\iota)$. Nach dem zellulären Approximationssatz ist $\pi_n(\iota)$ surjektiv, also gilt wie behauptet $\Phi = \pi_n(f)$.

Nachdem wir jetzt eine Realisierung eines gegebenen Homomorphismus Φ konstruiert haben, müssen wir noch deren Eindeutigkeit bis auf Homotopie nachweisen. Seien dazu $f, f' : Y \longrightarrow Z$ zwei stetige punktierte Abbildung mit $\pi_n(f) = \pi_n(f')$. Da das $(n-1)$-Skelett von Y nur aus dem Basispunkt besteht, stimmen f und f' dort überein. Wie oben seien wieder I eine Indexmenge für die n-Zellen von Y und $\chi_i : D^n \longrightarrow Y$ charakteristische Abbildungen und $\bar{\chi}_i : D^n/\partial D^n \longrightarrow Y$ die eindeutigen Faktorisierungen. Für jeden Index $i \in I$ gilt

$$[f \circ \bar{\chi}_i] \;=\; \pi_n(f)[\bar{\chi}_i] \;=\; \pi_n(f')[\bar{\chi}_i] \;=\; [f' \circ \bar{\chi}_i]$$

in der Homotopiegruppe $\pi_n(Z, z_0)$. Es gibt also eine Homotopie $H_i : D^n \times [0,1] \longrightarrow Z$ von $f \circ \chi_i$ zu $f' \circ \chi_i$ relativ zum Rand von D^n. Zusammen verkleben sich diese Homotopien zu einer Homotopie

$$H = \bigcup_I H_i \;:\; Y^{(n)} \times [0,1] \;\longrightarrow\; Z$$

relativ Basispunkt, zwischen den Einschränkungen von f und f' auf das n-Skelett von Y. Jetzt wenden wir Lemma 49 auf den Raum $Y \times [0,1]$ an, den wir mit der Produkt-CW-Struktur bezüglich der 'minimalen' CW-Struktur auf dem Intervall (mit den Endpunkten als 0-Zellen und einer 1-Zelle) versehen. Wir betrachten $Y \times [0,1]$ allerdings als CW-Komplex relativ zu dem Unterkomplex

$$Y \times \{0\} \;\cup\; Y^{(n)} \times [0,1] \;\cup\; Y \times \{1\} \;,$$

so dass alle relativen Zellen mindestens Dimension $n+2$ haben. Lemma 49 zeigt dann, dass sich die Abbildung

$$f \cup H \cup f' \;:\; Y \times \{0\} \;\cup\; Y^{(n)} \times [0,1] \;\cup Y \times \{1\} \;\longrightarrow\; Z$$

stetig auf $Y \times [0,1]$ fortsetzt, was die gesuchte Homotopie zwischen f und f' liefert. □

Mit dem letzten Satz können wir jetzt leicht die Eindeutigkeit von Eilenberg-MacLane-Räumen zeigen.

Korollar 54. *Sei $n \geq 1$ und A eine Gruppe, die abelsch ist falls $n \geq 2$. Seien weiter (X, φ) und (Y, ψ) zwei Eilenberg-MacLane-Räume vom Typ (A, n). Wenn X und Y CW-Komplexe sind, dann gibt es eine Homotopieäquivalenz $f : Y \to X$, so dass folgendes Diagramm kommutiert*

$$\begin{tikzcd} \pi_n(Y, y_0) \arrow[rr, "\pi_n(f)"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \pi_n(X, x_0) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & A\,. & \end{tikzcd}$$

Beweis. Satz 52 liefert eine stetige punktierte Abbildung $f : Y \to X$, für die das Dreieck von Fundamentalgruppen kommutiert. Da alle anderen Homotopiegruppen von Y und X verschwinden, induziert f Isomorphismen auf allen Homotopiegruppen, ist also nach dem Whitehead-Satz eine Homotopieäquivalenz. □

Beispiel 55. Nach dem Korollar ist der Raum $|B\mathbb{Z}/2|$ homotopieäquivalent zu $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, weil beide Eilenberg-MacLane-Räume vom Typ $(\mathbb{Z}/2, 1)$ sind. Ebenso ist $|B\mathbb{Z}|$ homotopieäquivalent zum Kreis S^1 weil beide Eilenberg-MacLane-Räume vom Typ $(\mathbb{Z}, 1)$ sind. Man beachte, dass $|B\mathbb{Z}|$ ein unendlich-dimensionaler CW-Komplex ist, wohingegen S^1 eindimensional ist.

Wir benutzen Korollar 54 jetzt, um den Kohomologiering von $\mathbb{RP}^\infty$ auszurechnen. Da homotopieäquivalente Räume isomorphe Kohomologieringe haben, rechnen wir tatsächlich den Ring $H^*(B\mathbb{Z}/2;R)$ aus. Wir nehmen als Koeffizientenring $R=\mathbb{F}_2$ und $R=\mathbb{Z}$.

Wir schreiben die zyklische Gruppe der Ordnung 2 multiplikativ, also $\mathbb{Z}/2=\{1,\tau\}$ mit $\tau^2=1$. Dann ist $(B\mathbb{Z}/2)_n=\{1,\tau\}^n$, und es gibt nur ein einziges nicht-ausgeartetes n-Simplex, nämlich

$$e_n \ = \ (\underbrace{\tau,\ldots,\tau}_{n}) \ \in \ (B\mathbb{Z}/2)_n \ .$$

Es ist $d_0^*(e_n)=d_n^*(e_n)=e_{n-1}$ und für $1\leq i\leq n-1$ ist $d_i^*(e_n)$ ausgeartet.

Also ist die Gruppe der normalisierten n-Koketten

$$C^n_{\mathrm{norm}}(B\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}) \ = \ \{f:(B\mathbb{Z}/2)_n\to\mathbb{Z} \mid f(x)=0 \text{ für ausgeartete } x\}$$

eine freie abelsche Gruppen vom Rang 1, erzeugt von der Kokette $f_n:(B\mathbb{Z}/2)_n\longrightarrow\mathbb{Z}$ definiert durch $f_n(e_n)=1$ und $f_n(x)=0$ für $x\neq e_n$. Da das Differential normalisierte Koketten auf normalisierte Koketten abbildet, ist $d(f_n)\in C^{n+1}(B\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z})$ normalisiert, also ein Vielfaches von f_{n+1}. Da f_n auf ausgearteten Simplizes verschwindet, haben wir

$$d(f_n)(e_{n+1}) \ = \ \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\, f_n(d_i^*(e_{n+1})) \ = \ f_n(e_n) \ + \ (-1)^{n+1}f_n(e_n) \ = \ 1+(-1)^{n+1} \ ,$$

also ist

$$d(f_n) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{falls } \ n \text{ gerade} \\ 2\cdot f_{n+1} & \text{falls } \ n \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Dies gibt

$$H^n(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z})\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{falls } n=0\\ \mathbb{Z}/2 & \text{falls } n \text{ gerade, } \ n\geq 2\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

und für gerades n ist $[f_n]$ ein Erzeuger der entsprechenden Kohomologiegruppe. Additiv kannten wir diese Kohomologiegruppen schon lange, aber nun können wir die multiplikative Struktur berechnen. Für $k,l\geq 0$ sind $f_k\in C^k(B\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z})$ und $f_l\in C^l(B\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z})$ normalisierte Koketten. Also ist auch ihr Cupprodukt $f_k\cup f_l$ eine normalisierte Kokette, also ein Vielfaches von f_{k+l}. Um den Koeffizienten zu erhalten berechnen wir

$$(f_k\cup f_l)(e_{k+l}) \ = \ f_k(d^*_{\mathrm{front}}(e_{k+l}))\cdot f_l(d^*_{\mathrm{back}}(e_{k+l})) \ = \ f_k(e_k)\cdot f_l(e_l) \ = \ 1 \ .$$

Also ist $f_k\cup f_l=f_{k+l}$. Die Kokette f_k ist für gerades k ein Kozykel. In geraden Dimensionen gilt daher in Kohomologie

$$[f_{2m}]=\underbrace{[f_2]\cup\ldots\cup[f_2]}_{m} \quad \text{in} \quad H^{2m}(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}) \ .$$

Also haben wir gezeigt:

Satz 56. *Der ganzzahlige Kohomologiering von $B\mathbb{Z}/2$ oder $\mathbb{RP}^\infty$ ist ein Polynomring auf der Klasse $[f_2]\in H^2(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z})$ modulo dem Ideal erzeugt von der Relation $2\cdot[f_2]=0$.*

Mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ ist das Argument analog, nur dass jetzt auch die Koketten f_n für ungerade n Kozykel sind. Wieder gilt $f_k\cup f_\ell=f_{k+\ell}$, und wir erhalten

Satz 57. *Der Kohomologiering von $B\mathbb{Z}/2$ oder $\mathbb{RP}^\infty$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ ist eine Polynomalgebra über $\mathbb{F}_2$ erzeugt von der Klasse $[f_1]\in H^1(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{F}_2)$.*

Für $n\geq 1$ induziert die Inklusion $\mathbb{RP}^n\longrightarrow\mathbb{RP}^\infty$ Isomorphismen in mod-2 Homologie und Kohomologie bis zur Dimension n, und die (Ko-)Homologie von $\mathbb{RP}^n$ ist trivial oberhalb Dimension n. Da die induzierte Abbildung in Kohomologie ein Homomorphismus von graduierten Ringen ist, können wir schließen:

Korollar 58. *Für $n \geq 1$ ist der Kohomologiering von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ eine abgeschnittene Polynomalgebra der Höhe n auf einem Erzeuger der Dimension 1, d.h. $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n;\mathbb{F}_2)$ ist als graduierter Ring isomorph zu $\mathbb{F}_2[x]/(x^{n+1})$ wobei x den Grad 1 hat.*

Wir haben in Korollar 54 gesehen, dass ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(G,1)$ bis auf Homotopieäquivalenz schon vollständig durch die Gruppe G bestimmt ist (jedenfalls, wenn man sich auf CW-Komplexe beschränkt). Außerdem ist durch $|BG|$ ein funktorielles Modell eines Eilenberg-MacLane-Raumes vom Typ $(G,1)$ gegeben. Wir werden jetzt sehen, wie sich die Kohomologie von BG rein algebraisch, also ohne Verwendung topologischer Räume, mit Hilfe der Gruppe beschreiben lässt.

Für eine Gruppe G und einen Ring R ist der *Gruppenring* $R[G]$ gegeben als die R-Linearisierung der unterliegenden Menge von G zusammen mit der Multiplikation

$$\Big(\sum_{g\in G} r_g\cdot g\Big)\cdot\Big(\sum_{h\in G} s_h\cdot h\Big) \;=\; \sum_{(g,h)\in G^2}(r_g\cdot s_h)\cdot gh\ .$$

Mit anderen Worten: die Multiplikation ist die R-lineare Fortsetzung der Gruppenmultiplikation in G. Der Ring R selber kann als Rechtsmodul über $R[G]$ betrachtet werden vermöge

$$r\cdot\Big(\sum_{g\in G} r_g\cdot g\Big) \;=\; \sum_{g\in G} r\cdot r_g\ .$$

Mit anderen Worten: jedes Gruppenelement $g\in G$ operiert durch $r\cdot g = r$, und davon nehmen wir die R-lineare Fortsetzung.

Satz 59. *Sei G eine Gruppe und R ein Ring. Dann gibt es einen Isomorphismus von graduierten Ringen*

$$H^*(BG;R) \;\cong\; \mathrm{Ext}^*_{R[G]}(R,R)\ .$$

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, müssen wir noch erklären, wie die Ext-Gruppen auf der rechten Seite einen graduierten Ring bilden. Sei dazu allgemeiner A ein Ring (später nehmen wir $A=R[G]$) und M,N und Q drei A-Rechtsmoduln (später $M=N=Q=R$). Wir definieren eine bilineare Abbildung

$$\circ\ :\ \mathrm{Ext}^n_A(N,Q)\times\mathrm{Ext}^m_A(M,N)\ \longrightarrow\ \mathrm{Ext}^{n+m}_A(M,Q)\ ,$$

so dass sich für $n=m=0$ gerade die Komposition von Homomorphismen

$$\circ\ :\ \mathrm{Hom}_A(N,Q)\times\mathrm{Hom}_A(M,N)\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(M,Q)$$

ergibt. Seien dazu $P_*\to M$ und $P'_*\to N$ projektive Auflösungen und sei

$$x\in\mathrm{Ext}^n_A(N,Q) = H^n(\mathrm{Hom}_A(P'_*,Q))$$

gegeben durch $[\varphi : P'_n\to Q]$ mit $\varphi\circ d = 0 : P'_{n+1}\to Q$, sowie

$$y\in\mathrm{Ext}^m_A(M,N) = H^m(\mathrm{Hom}_A(P_*,N))$$

gegeben durch $y=[\psi : P_m\to N]$ mit $\psi\circ d = 0 : P_{m+1}\to N$.

Da $\psi\circ d = 0$ ist, faktorisiert ψ über eine A-lineare Abbildung $\bar\psi : P_m/\operatorname{Bild}(d)\longrightarrow N$,

$$\begin{tikzcd} P_m \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & N \\ P_m/\operatorname{Bild}(d : P_{m+1}\to P_m) \arrow[ur, dotted, "\bar\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Wir erhalten eine projektive Auflösung von $P_m/\operatorname{Bild}(d)$ als A-Modul, indem wir aus P die Moduln $P_0,\dots,P_{m-1}$ weglassen und die anderen reindizieren. Genauer definieren wir den verschobenen Komplex $P[-m]$ durch $P[-m]_k = P_{m+k}$ für $k=0,1,2,\dots$, mit reindiziertem Differential von P.

Nach dem Fundamentallemma der homologischen Algebra können wir den A-Morphismus $\bar{\psi}$: $P_m/\operatorname{Bild}(d) \to N$ zu einem Morphismus von Kettenkomplexen $\tilde{\psi} : P[-m] \to P'$ zwischen den Auflösungen liften. In Dimension n betrachten wir die Komposition

$$P_{m+n} = P[-m]_n \xrightarrow{\bar{\psi}_n} P'_n \xrightarrow{\varphi} Q$$

in $\operatorname{Hom}_A^{m+n}(P_*, Q)$. Da $\bar{\psi}$ ein Kettenmorphismus und φ ein Kozykel ist, gilt

$$(\varphi \circ \bar{\psi}_n) \circ d \;=\; \varphi \circ d \circ \bar{\psi}_{n+1} \;=\; 0 \;.$$

Also ist $\varphi \circ \bar{\psi}_n$ ein Kozykel der Dimension $m+n$ in $\operatorname{Hom}_A(P_*, Q)$ und repräsentiert somit eine Klasse in $H^{m+n}(\operatorname{Hom}_A(P_*, Q)) = \operatorname{Ext}_A^{m+n}(M, Q)$. Man zeigt jetzt, dass die Kohomologieklasse von $\varphi \circ \bar{\psi}_n$ unabhängig von der Wahl der Liftung $\tilde{\psi}$ und der Wahl der Repräsentanten φ von $x \in \operatorname{Ext}_A^n(N, Q)$ und ψ von $y \in \operatorname{Ext}_A^m(M, N)$ ist. Dann kann man definieren

$$x \circ y \;=\; [\, \varphi \circ \tilde{\psi}_n : P_{m+n} \longrightarrow Q \,] \;.$$

Dann überprüft man noch, dass diese Komposition bilinear ist und für $m = n = 0$ durch Komposition von Homomorphismen gegeben ist. Schließlich gilt folgendes Lemma, dessen Beweis wir ebenfalls weglassen.

Lemma 60. *Die Kompositions-Paarung auf Ext-Gruppen ist assoziativ und unitär. Genauer gilt*

$$x \circ \operatorname{Id}_N \;=\; x \;=\; \operatorname{Id}_Q \circ x$$

für alle $x \in \operatorname{Ext}_A^n(N, Q)$ *und*

$$(x \circ y) \circ z \;=\; x \circ (y \circ z)$$

in $\operatorname{Ext}_A^{n+m+k}(T, Q)$ *für* $x \in \operatorname{Ext}_A^n(N, Q)$, $y \in \operatorname{Ext}_A^m(M, N)$ *und* $z \in \operatorname{Ext}_A^k(T, M)$.

Im Spezialfall $M = N = Q$ erhalten wir also die Struktur eines graduierten Ringes auf $\operatorname{Ext}_A^*(M, M)$, die sogenannte *Ext-Algebra* des A-Moduls M.

Konstruktion des Isomorphismus $H^*(BG; R) \cong \operatorname{Ext}^*_{R[G]}(R, R)$. Wir hatten in Lemma 43 gesehen, dass BG als Quotient der zusammenziehbaren simplizialen Menge EG nach einer freien G-Operation interpretiert werden kann. Dabei ist die simpliziale G-Operation auf $EG_n = G^{n+1}$ gegeben durch

$$(g_0, \ldots, g_n) \cdot h \;=\; (g_0 h, \ldots, g_n h) \;.$$

Da Linearisierung und Übergang zum Kettenkomplex funktoriell sind, operiert G auf dem Kettenkomplex $C_*(EG, R)$ gegeben durch

$$C_n(EG, R) \;=\; R[EG_n] \;=\; R[G^{n+1}] \;.$$

Durch R-lineare Fortsetzung dieser G-Operation können wir $C_*(EG, R)$ als Kettenkomplex von $R[G]$-Rechtsmoduln auffassen. Da die Operation von G auf $EG_n = G^{n+1}$ frei ist, ist $C_n(EG, R) = R[G^{n+1}]$ ein freier Modul über dem Gruppenring $R[G]$. Da EG zusammenziehbar ist, ist die Homologie von $C_*(EG, R)$ dieselbe wie die R-Homologie eines Punktes, also eine Kopie von R in Dimension 0,

$$H_n(C_*(EG, R)) \cong \begin{cases} R & \text{falls} \quad n = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit anderen Worten: der Kettenkomplex $C_*(EG, R)$ ist eine freie Auflösung von R als Rechtsmodul über $R[G]$. Wir können diesen Kettenkomplex also verwenden, um die Ext-Gruppen auszurechnen, d.h. wir nehmen

$$\operatorname{Ext}^n_{R[G]}(R, R) \;=\; H^n\big(\operatorname{Hom}_{R[G]}(C_*(EG, R), R)\big) \;.$$

In jeder Dimension $n \geq 0$ haben wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{R[G]}(C_n(EG, R), R) \;&=\; \operatorname{Hom}_{R[G]}(R[EG_n], R) \;\cong\; \operatorname{Hom}_{G-\text{Mengen}}(EG_n, R) \\ &\cong\; \operatorname{Hom}_{\text{Mengen}}(BG_n, R) \;=\; C^n(BG, R) \;. \end{aligned}$$

Die dritte Umformung ist Komposition mit dem Morphismus $p : EG \longrightarrow BG$ aus Lemma 43, der den Isomorphismus $EG/G \cong BG$ induziert; dies ist ein Isomorphismus weil $g \in G \subset R[G]$ auf R wie die Identität operiert. Für variierendes n sind diese Isomorphismen von abelschen Gruppen mit den Differentialen in den Kokettenkomplexen verträglich, also erhalten wir einen Isomorphismus von Kokettenkomplexen

$$i \ : \ \mathrm{Hom}_{R[G]}(C_*(EG,R),R) \ \cong \ C^*(BG,R) \ .$$

Auf Kohomologie erhalten wir also Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^n_{R[G]}(R,R) \ = \ H^n(\mathrm{Hom}_{R[G]}(C_*(EG,R),R)) \ \cong \ H^n(BG;R) \ .$$

Wir müssen jetzt noch nachweisen, dass diese Isomorphismen auch multiplikativ sind. Um die Produkte vergleichen zu können, brauchen wir eine explizite Formel für den Isomorphismus i. Der Morphismus $p : EG \longrightarrow BG$ aus Lemma 43 ist in Dimension n durch die Vorschrift

$$p(g_0,\dots,g_n) \ = \ (g_0g_1^{-1}, g_1g_2^{-1}, \dots, g_{n-1}g_n^{-1})$$

gegeben, hat also die Eigenschaft

$$p(g_1\cdots g_n,\ g_2\cdots g_n,\ \dots,\ g_n, 1) \ = \ (g_1,g_2,\dots,g_n) \ .$$

Der zusammengesetzte Isomorphismus i bildet also eine $R[G]$-lineare Abbildung $\varphi : R[EG_n] \longrightarrow R$ auf die Abbildung $i(\varphi) : BG_n \longrightarrow R$ ab mit

$$i(\varphi)(g_1,\dots,g_n) \ = \ \varphi(g_1\cdots g_n,\ g_2\cdots g_n,\ \dots,\ g_n, 1) \ .$$

Seien jetzt zwei Kozykel $\varphi : R[EG_n] \to R$ und $\psi : R[EG_m] \to R$ gegeben, die Kohomologieklassen in $\mathrm{Ext}^n_{R[G]}(R,R)$ bzw. $\mathrm{Ext}^m_{R[G]}(R,R)$ repräsentieren. Für die Berechnung des Produkts $[\varphi]\circ[\psi]$ in $\mathrm{Ext}^{n+m}_{R[G]}(R,R)$ müssen wir einen Morphismus von $R[G]$-Kettenkomplexen

$$\tilde{\psi} \ : \ C_*(EG,R)[-m] \longrightarrow C_*(EG,R)$$

finden, der ψ erweitert, also so, dass die Komposition

$$R[EG_m] = C_m(EG,R) = (C_*(EG,R)[-m])_0 \xrightarrow{\tilde{\psi}_0} C_0(EG,R) \xrightarrow{\varepsilon} R$$

gleich ψ ist. Für $k \geq 0$ definieren wir

$$\tilde{\psi}_k \ : \ (C_*(EG,R)[-m])_k = R[EG_{k+m}] \ \longrightarrow \ R[EG_k] = C_k(EG,R)$$

als die R-lineare Fortsetzung von

$$\tilde{\psi}_k(g_0,\dots,g_{k+m}) \ = \ (g_0,\dots,g_k)\cdot\psi(g_k,\dots,g_{k+m}) \ .$$

Dann ist $\tilde{\psi}_k$ einerseits $R[G]$-linear weil

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_k((g_0,\dots,g_{k+m})\cdot h) \ &= \ \tilde{\psi}_k(g_0h,\dots,g_{k+m}h) \\
&= \ (g_0h,\dots,g_kh)\cdot\psi(g_kh,\dots,g_{k+m}h) \\
&= \ (g_0,\dots,g_k)\cdot h\cdot\psi(g_k,\dots,g_{k+m}) \\
&= \ \tilde{\psi}_k(g_0,\dots,g_{k+m})\cdot h \ ;
\end{aligned}$$

die dritte Gleichung gilt weil ψ $R[G]$-linear ist und G trivial auf R operiert.

Andererseits bilden die $\{\tilde{\psi}_k\}_{k\geq 0}$ auch eine Kettenabbildung: für $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_{k-1}(d(g_0,\ldots,g_{k+m})) &= \tilde{\psi}_{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k+m}(-1)^i(g_0,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_{k+m})\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(g_0,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_k)\cdot\psi(g_k,\ldots,g_{k+m}) \\
&\qquad + \sum_{i=k}^{k+m}(-1)^i(g_0,\ldots,g_{k-1})\cdot\psi(g_{k-1},\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_{k+m}) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(g_0,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_k)\cdot\psi(g_k,\ldots,g_{k+m}) \\
&\qquad + \sum_{i=k-1}^{k+m}(-1)^i(g_0,\ldots,g_{k-1})\cdot\psi(g_{k-1},\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_{k+m}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(g_0,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_k)\right)\cdot\psi(g_k,\ldots,g_{k+m}) \\
&\qquad + (g_0,\ldots,g_{k-1})\cdot\left(\sum_{i=k-1}^{k+m}(-1)^i\psi(g_{k-1},\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_{k+m})\right) \\
&= d(g_0,\ldots,g_k)\cdot\psi(g_k,\ldots,g_{k+m}) + (-1)^{k-1}(g_0,\ldots,g_{k-1})\cdot(d\psi)(g_{k-1},\ldots,g_{k+m}) \\
&= d\big((g_0,\ldots,g_k)\cdot\psi(g_k,\ldots,g_{k+m})\big) = d\left(\tilde{\psi}_k(g_0,\ldots,g_{k+m})\right) .
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt ändern sich lediglich die Summationsbereiche; dabei kürzt sich der Term $i = k$ in der ersten Summe gegen den Term $i = k-1$ der zweiten Summe. Im vorletzten Schritt nutzen wir aus, dass ψ ein Kozykel ist, dass also $d\psi = 0$ gilt.

Mit dieser Kettenabbildung $\tilde{\psi}$ können wir nun das Produkt $[\varphi]\circ[\psi]$ berechnen: es ist repräsentiert durch die Komposition

$$R[EG_{n+m}] = (C_*(EG,R)[-m])_n \xrightarrow{\tilde{\psi}_n} C_n(EG,R) = R[EG_n] \xrightarrow{\varphi} R .$$

Wenn wir den Isomorphismus $i : \mathrm{Hom}_{R[G]}(C_*(EG,R),R) \cong C^*(BG,R)$ anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}
i(\varphi\circ\tilde{\psi}_n)(g_1,\ldots,g_{n+m}) &= \varphi(\tilde{\psi}_n(g_1\cdots g_{n+m},\ g_2\cdots g_{n+m},\ \ldots,\ g_{n+m},1)) \\
&= \varphi((g_1\cdots g_{n+m},\ g_2\cdots g_{n+m},\ \ldots,\ g_{n+1}\cdots g_{n+m})\cdot\psi(g_{n+1}\cdots g_{n+m},\ \ldots,\ g_{n+m},1)) \\
&= \varphi(g_1\cdots g_{n+m},\ g_2\cdots g_{n+m},\ \ldots,\ g_{n+1}\cdots g_{n+m})\cdot\psi(g_{n+1}\cdots g_{n+m},\ \ldots,\ g_{n+m},1) \\
&= \varphi(g_1\cdots g_n,\ g_2\cdots g_n,\ \ldots,\ g_n,1)\cdot\psi(g_{n+1}\cdots g_{n+m},\ \ldots,\ g_{n+m},1) \\
&= i(\varphi)(g_1,\ldots,g_n)\cdot i(\psi)(g_{n+1},\ldots,g_{n+m}) = (i(\varphi)\cup i(\psi))(g_1,\ldots,g_{n+m}) .
\end{aligned}$$

Also ist $i(\varphi\circ\tilde{\psi}_n) = i(\varphi)\cup i(\psi)$ und somit ist der von i in Kohomologie induzierte Isomorphismus multiplikativ. Dies beendet den Beweis von Satz 59. □

Beispiel 61. Wir benutzen Satz 59, um den Kohomologiering des Eilenberg-MacLane-Raumes $B\mathbb{Z}/k$ auszurechnen. Für $k = 2$ gibt dies einen zweiten Beweis von Satz 56. Um Verwechslungen mit der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ zu vermeiden, bezeichnen wir die zyklische Gruppe der Ordnung k jetzt mit C_k und schreiben sie multiplikativ, also $C_k = \{1,\tau,\ldots,\tau^{k-1}\}$ mit $\tau^k = 1$. Im Gruppenring

$\mathbb{Z}[C_k]$ brauchen wir das *Normelement* $N = 1+\tau+\cdots+\tau^{k-1}$. Wir definieren einen Kettenkomplex P_* von freien $\mathbb{Z}[C_k]$-Moduln durch $P_n = \mathbb{Z}[C_k]$ für $n \geq 0$ mit Differential

$$(d_n : P_n \longrightarrow P_{n-1}) \;=\; \begin{cases} \text{Multiplikation mit } N \text{ für } n \text{ gerade,} \\ \text{Multiplikation mit } 1-\tau \text{ für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wegen der Relation $N \cdot (1-\tau) = (1-\tau)\cdot N = 0$ definiert dies tatsächlich einen Kettenkomplex. Weiter ist

$$\begin{aligned} \text{Kern(Multiplikation mit } N) \;&=\; (1-\tau)\cdot \mathbb{Z}[C_k] \;=\; \text{Bild(Multiplikation mit } 1-\tau) \quad \text{und} \\ \text{Kern(Multiplikation mit } 1-\tau) \;&=\; N \cdot \mathbb{Z}[C_k] \;=\; \text{Bild(Multiplikation mit } N)\;. \end{aligned}$$

Also ist P_* eine freie Auflösung des Moduls

$$\text{Cokern}(d_1) \;=\; \mathbb{Z}[C_k]/\big((1-\tau)\cdot\mathbb{Z}[C_k]\big) \;\cong\; \mathbb{Z}\;,$$

wobei die Gruppe C_k auf $\mathbb{Z}$ trivial operiert. Also erhalten wir

$$H^*(B\mathbb{Z}/k;\mathbb{Z}) \;\cong\; \text{Ext}^n_{\mathbb{Z}[C_k]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \;=\; H^n(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_k]}(P_*,\mathbb{Z}))\;.$$

Da P_* in jeder Dimension frei vom Rang 1 ist, ist $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_k]}(P_n,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$; da jedes Gruppenelement aus C_k wie die Identität auf $\mathbb{Z}$ operiert, operiert das Normelement N bzw. das Element $(1-\tau)$ auf $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_k]}(P_n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ durch Multiplikation mit k bzw. 0. Also sind die Differentiale im Kokettenkomplex $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_k]}(P_*,\mathbb{Z})$ abwechselnd Multiplikation mit k und 0 und wir erhalten

$$H^n(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_k]}(P_*,\mathbb{Z})) \;=\; \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n = 0, \\ \mathbb{Z}/k & \text{für } n \text{ gerade und } n \geq 2, \text{ und} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Nun berechnen wir die multiplikative Struktur auf der Ext-Algebra des trivialen $\mathbb{Z}[C_k]$-Moduls $\mathbb{Z}$. Für gerades $n \geq 0$ betrachten wir den durch $\varphi^{(n)}(1) = 1$ festgelegten $\mathbb{Z}[C_k]$-Modulhomomorphismus $\varphi^{(n)} : \mathbb{Z}[C_k] = P_n \longrightarrow \mathbb{Z}$. Dies ist ein n-Kozykel in $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_k]}(P_*,\mathbb{Z})$, dessen Klasse ein Erzeuger von $\text{Ext}^n_{\mathbb{Z}[C_k]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = H^n(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_k]}(P_*,\mathbb{Z}))$ ist. Die Auflösung P_* ist periodisch mit der Periode 2 ist, d.h. $P_*[-n] = P_*$ für gerades n. Also können wir als Lift $\tilde{\varphi}^{(n)} : P_*[-n] \to P_*$ von $\varphi^{(n)}$ die Abbildung nehmen, die in jeder Dimension die Identität ist. Somit ist das Produkt der Klassen $[\varphi^{(m)}]$ und $[\varphi^{(n)}]$ durch die Komposition $\varphi^{(m)} \circ (\tilde{\varphi}^{(n)})_n = \varphi^{(n+m)}$ repräsentiert. Mit anderen Worten, wir haben $[\varphi^{(m)}] \circ [\varphi^{(n)}] = [\varphi^{(n+m)}]$. Also ist der ganzzahlige Kohomologiering von BC_k ein Polynomring auf der Klasse $[\varphi^{(2)}] \in H^2(BC_k;\mathbb{Z})$ modulo dem Ideal erzeugt von der Relation $k \cdot [\varphi^{(2)}] = 0$.

Beispiel 62. Wir bestimmen den Kohomologie des Raumes $|B\mathbb{Z}|$ mittels Satz 59, indem wir Ext-Gruppen über dem Gruppenring $R[\mathbb{Z}]$ berechnen. Der triviale Modul R über $R[\mathbb{Z}]$ hat hier eine ziemlich kurze projektive Auflösung der Form

$$\cdots\; 0 \;\longrightarrow\; R[\mathbb{Z}] \;\xrightarrow{(1-\tau)\cdot}\; R[\mathbb{Z}] \;\xrightarrow{\varepsilon}\; R \;\longrightarrow\; 0$$

wobei wir die Gruppe $\mathbb{Z}$ wieder multiplikativ schreiben und τ ein Erzeuger ist. Nach Anwendung von $\text{Hom}_{R[\mathbb{Z}]}(-,R)$ auf die Auflösung und Identifikation $\text{Hom}_{R[\mathbb{Z}]}(R[\mathbb{Z}],R) \cong R$ erhalten wir den Kokettenkomplex

$$\cdots\; 0 \;\longleftarrow\; R \;\xleftarrow{(1-\tau)\cdot}\; R\;.$$

Da τ auf R wie die Identität operiert, ist der Randoperator trivial und wir erhalten

$$\text{Ext}^n_{R[\mathbb{Z}]}(R,R) \;\cong\; \begin{cases} R & \text{für } n = 0,1 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Multiplikation auf der Ext-Algebra ist langweilig, weil alle Produkte von Klassen positiver Dimension zwangsläufig trivial sein müssen.

Dieses Ergebnis sollte uns nicht überraschen: da $|B\mathbb{Z}|$ und der Kreis S^1 Eilenberg-MacLane-Räume vom Typ $(\mathbb{Z},1)$ sind, sind sie homotopie-äquivalent, haben also isomorphe Kohomologieringe. Wir wissen bereits, dass die R-Kohomologie von S^1 in Dimensionen 0 und 1 konzentriert ist, wo sie jeweils frei vom Rang 1 über dem Koeffizientenring ist.

Darstellbarkeit von Kohomologie

In diesem Abschnitt stellen wir einen engen Zusammenhang zwischen Eilenberg-MacLane-Räumen und singulärer Kohomologie her.

Konstruktion 63. Sei $n \geq 1$ und A eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen mit $K(A,n)$ einen beliebigen Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ (A,n), der ein CW-Komplex ist. Wir werden jetzt sehen, wie man $K(A,n)$ zu einer "abelschen Gruppe bis auf Homotopie" machen kann.

Wenn A abelsch ist, dann sind nämlich die Gruppenoperation

$$A \times A \;\longrightarrow\; A\ , \quad (a,b) \;\longmapsto\; a+b$$

und die Inversenbildung $A \longrightarrow A,\ a \longmapsto -a$ Gruppenhomomorphismen. Da $K(A,n)\times K(A,n)$ ein $K(A\times A,n)$ ist, gibt es nach Satz 52 stetige Abbildungen $\mu : K(A,n)\times K(A,n) \longrightarrow K(A,n)$ und $i : K(A,n) \longrightarrow K(A,n)$, eindeutig bis auf Homotopie, welche die Addition bzw. Inversenbildung auf π_n realisieren.

Die beiden Abbildungen

$$\mu\circ(\mu\times \mathrm{Id}),\ \mu\circ(\mathrm{Id}\times\mu) \;:\; K(A,n)\times K(A,n)\times K(A,n) \;\longrightarrow\; K(A,n)$$

realisieren dieselbe Abbildung auf π_n weil die Addition von drei Elementen in A assoziativ ist. Nach Satz 52 sind die beiden Abbildungen homotop, also ist die "Multiplikation" μ *homotopie-assoziativ*. Sei $\tau : K(A,n)\times K(A,n) \longrightarrow K(A,n)\times K(A,n)$ gegeben durch $\tau(x,y)=(y,x)$ die Vertauschung der Faktoren. Da die Gruppe A kommutativ ist, induzieren μ und $\mu\circ\tau$ dieselbe Abbildung auf π_n, sind also homotop. Also ist die "Multiplikation" auch *homotopie-kommutativ*. Mit einem ähnlichen Argument sieht man, dass die beiden diagonalen Kompositionen in

$$\begin{tikzcd}
K(A,n) \arrow[r, "{(\mathrm{Id},i)}"] \arrow[dr] & K(A,n)\times K(A,n) \arrow[d, "\mu"] & K(A,n) \arrow[l, "{(i,\mathrm{Id})}"'] \arrow[dl] \\
 & K(A,n) &
\end{tikzcd}$$

homotop zu identischen Abbildungen sind. Die Abbildung i liefert also "Inverse bis auf Homotopie".

Für jeden topologischen Raum Y liefert jetzt

$$(64)\qquad \begin{array}{ccc} [Y,K(A,n)]\times[Y,K(A,n)] & \longrightarrow & [Y,K(A,n)] \\ (f,g) & \longmapsto & [\,Y \xrightarrow{(f,g)} K(A,n)\times K(A,n) \xrightarrow{\mu} K(A,n)\,] \end{array}$$

eine binäre Verknüpfung auf der Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen. Weil die Abbildung $\mu : K(A,n)\times K(A,n) \longrightarrow K(A,n)$ homotopie-assoziativ und homotopie-kommutativ ist und ein Homotopie-Inverses hat, macht diese binäre Verknüpfung die Menge $[Y,K(A,n)]$ zu einer abelschen Gruppe. Für stetiges $\varphi : Z \longrightarrow Y$ ist die Präkomposition

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : [Y,K(A,n)] & \longrightarrow & [Z,K(A,n)] \\ {[f]} & \longmapsto & [f\circ\varphi] \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Wir können also die Zuordnung

$$Y \;\longmapsto\; [Y,K(A,n)]$$

als kontravarianten Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen auffassen.

Bemerkung 65. Genau genommen haben wir in der obigen Konstruktion gemogelt: Um Satz 52 anwenden zu können, muss der Quellraum ja eine CW-Struktur besitzen; das Produkt von zwei CW-Komplexen muss aber im allgemeinen keine CW-Struktur haben, falls zu viele Zellen vorhanden sind. Insbesondere muss der Produktraum $K(A,n) \times K(A,n)$ im allgemeinen keine CW-Struktur zulassen, selbst wenn $K(A,n)$ ein CW-Komplex ist.

Die Lösung dieses Problems ist, auf dem Produkt $K(A,n) \times K(A,n)$ die sogenannte *kompakt-erzeugte* Topologie zu verwenden. Für zwei Räume X and Y heißt eine Teilmenge $U \subseteq X \times Y$ *kompakt-offen*, falls für jede stetige (bezüglich der Produkttopolopgie!) Abbildung $f : K \longrightarrow X \times Y$ aus einem kompakten Raum K die Menge $f^{-1}(U)$ offen in K ist. Das System der kompakt-offenen Mengen bildet dann die kompakt-erzeugte Topologie auf $X \times Y$. Nach Definition ist diese Topologie feiner als die Produktopologie (jede offene Menge in der Produkttopologie ist auch offen in der kompakt-erzeugten Topologie) und eine Abbildung aus einem kompakten Raum nach $X \times Y$ ist genau dann in der kompakt-erzeugten Topologie stetig ist, wenn sie in der Produkttopologie stetig ist. Da Sphären, Bälle und Simplizes kompakt sind, induziert die identische Abbildung isomorphismen auf allen Homotopie- und Homologiegruppen bezüglich der beiden Topologien.

Eine weitere Tatsache ist, dass das kompakt-erzeugte Produkt zweier absoluter CW-Komplexe wieder ein CW-Komplex ist (ohne weitere Bedingungen an die CW-Struktur). In Konstruktion 63 sind also alle zwei- und dreifachen Produkte von $K(A,n)$ mit der kompakt-erzeugten Topologie zu versehen. In der Konstruktion der Verknüpfung (64) muss dann der Raum Y 'kompakt-erzeugt' sein – nur für solche Räume hat die kompakt-erzeugte Topologie auf dem Produkt die nötige universelle Eigenschaft. Da CW-Komplexe immer kompakt-erzeugt sind, ist die Argumentation für solche wieder korrekt.

Beispiel 66. Die Räume $\mathbb{RP}^\infty$ und $\mathbb{CP}^\infty$ sind Eilenberg-MacLane-Räume vom Typ $(\mathbb{Z}/2, 1)$ bzw. $(\mathbb{Z}, 2)$. Es gibt also stetige Abbildungen, eindeutig bis auf Homotopie,

$$\mu : \mathbb{RP}^\infty \times \mathbb{RP}^\infty \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty \quad \text{bzw.} \quad \mu : \mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty \longrightarrow \mathbb{CP}^\infty$$

welche die Räume zu "abelschen Homotopie-Gruppen" machen. Der Raum $\mathbb{RP}^\infty$ klassifiziert reelle Linienbündel: Sei γ das universelle Linienbündel über $\mathbb{RP}^\infty$. Dann ist für jeden parakompakten Raum X die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} [X, \mathbb{RP}^\infty] & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) = \{\text{Linienbündeln über } X\} / \text{Isomorphie} \\ (f : X \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty) & \longmapsto & f^*(\gamma) \end{array}$$

eine Bijektion, wobei $f^*(\gamma)$ das zurückgezogene Linienbündel bezeichnet. Da $\mathbb{RP}^\infty \times \mathbb{RP}^\infty$ parakompakt ist, ist die Abbildung $\mu : \mathbb{RP}^\infty \times \mathbb{RP}^\infty \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty$ bis auf Homotopie durch ein Linienbündel über $\mathbb{RP}^\infty \times \mathbb{RP}^\infty$ festgelegt. Es handelt sich dabei um das Linienbündel $p_1^*(\gamma) \otimes p_2^*(\gamma)$, wobei $p_1, p_2 : \mathbb{RP}^\infty \times \mathbb{RP}^\infty \longrightarrow \mathbb{RP}^\infty$ die beiden Projektionen sind. Die daraus folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} (f+g)^*(\gamma) &= (\mu \circ (f,g))^*(\gamma) = (f,g)^*(\mu^*(\gamma)) = (f,g)^*(p_1^*(\gamma) \otimes p_2^*(\gamma)) \\ &= (p_1 \circ (f,g))^*(\gamma) \otimes (p_2 \circ (f,g))^*(\gamma) = f^*(\gamma) \otimes g^*(\gamma) \end{aligned}$$

zeigen, dass unter obiger Bijektion

$$[X, \mathbb{RP}^\infty] \cong \mathrm{Pic}(X)$$

die Multiplikation links dem Tensorprodukt von Linienbündeln entspricht (welches assoziativ und kommutativ bis auf Isomorphie ist und Inverse (das duale Linienbündel) hat). Gleiches gilt sinngemäß für komplexe Linienbündel und $\mathbb{CP}^\infty$.

Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, dass wir den Funktor $Y \longmapsto [Y, K(A,n)]$ in Wirklichkeit schon längst kennen, dass er nämlich isomorph zur n-ten singulären Kohomologie mit Koeffizienten in A ist. Als Vorbereitung dazu brauchen wir:

Lemma 67. *Sei* (X, φ) *ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ* (A, n). *Dann gibt es genau eine Kohomologieklasse* $\iota \in H^n(X; A)$, *genannt die* Fundamentalklasse, *so dass die Komposition*

$$\pi_n(X, x) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_n(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\Phi(\iota)} A$$

der Isomorphismus φ *ist. Hierbei wurde*

$$\Phi : H^n(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), A)$$

in (9) *zur Verwendung im Universellen Koeffiziententheorem konstruiert.*

Beweis. Der Raum X ist $(n-1)$-zusammenhängend und A ist abelsch, also ist die Hurewicz-Abbildung

$$h \ : \ \pi_n(X, x) \ \longrightarrow \ H_n(X; \mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus. Damit liefert uns $\varphi \circ h^{-1} : H_n(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow A$ ein Element in $\mathrm{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), A)$. Da $H_{n-1}(X; \mathbb{Z})$ trivial ist (oder für $n = 1$ frei), ist Φ ein Isomorphismus nach dem Universellen Koeffiziententheorem (Korollar 24). Also ist $\iota = \Phi^{-1}(\varphi \circ h^{-1})$ die gesuchte Klasse. □

Sei $K(A, n)$ ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ (A, n). Mit Hilfe der Fundamentalklasse $\iota \in H^n(X; A)$ definieren wir eine natürliche Transformation von Funktoren

$$[Y, K(A, n)] \ \longrightarrow \ H^n(Y; A)$$

für topologische Räume Y durch

$$[f : Y \longrightarrow K(A, n)] \ \longmapsto \ f^*(\iota) \ .$$

Wir haben bisher nur Eilenberg-MacLane-Räume positiver Dimension definiert. Für $n = 0$ verabreden wir jetzt folgende Konventionen: unter einen Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(A, 0)$ verstehen wir die unterliegende Menge von A als Raum mit der diskreten Topologie; die Gruppenstruktur von A macht diesen diskreten Raum zu einer Gruppe-bis-auf-Homotopie. Die Fundamentalklasse $\iota \in H^0(A; A)$ ist die Klasse des Kozykels $\mathrm{Id}_A : A \longrightarrow A$.

Satz 68. *Für alle* $n \geq 0$, *jede abelsche Gruppe* A *und jeden Raum* Y *ist die natürliche Abbildung*

$$[Y, K(A, n)] \ \longrightarrow \ H^n(Y; A) \ , \quad [f] \ \longmapsto \ f^*(\iota)$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Wir betrachten zunächst einen Spezialfall, das *universelle Beispiel*: wir nehmen $Y = K(A, n) \times K(A, n)$ und betrachten die beiden Projektionen $p_1, p_2 : K(A, n)^2 \longrightarrow K(A, n)$. Die Summe $[p_1] + [p_2]$ wird dann von der Multiplikationsabbildung μ repräsentiert:

$$K(A, n) \times K(A, n) \xrightarrow{(p_1, p_2) = \mathrm{Id}} K(A, n) \times K(A, n) \xrightarrow{\ \mu\ } K(A, n) \ .$$

Für diese beiden speziellen Elemente aus $[K(A, n)^2, K(A, n)]$ bedeutet Additivität also, dass

$$\mu^*(\iota) \ = \ p_1^*(\iota) + p_2^*(\iota)$$

in $H^n(K(A, n) \times K(A, n); A)$ gilt. Nun ist aber

$$\begin{aligned} H^n(K(A, n)^2; A) \ &\cong \ \mathrm{Hom}(H_n(K(A, n)^2; \mathbb{Z}), A) \ \cong \ \mathrm{Hom}(\pi_n(K(A, n)^2, x_0), A) \\ &\cong \ \mathrm{Hom}(A \times A, A) \ . \end{aligned}$$

Der erste Isomorphismus ist das Universelle Koeffiziententheorem und der zweite der Hurewicz-Isomorphismus. Unter diesen Isomorphismen entspricht $\mu^*(\iota)$ der Addition und die Projektionen den Projektionen $p_1, p_2 : A \times A \longrightarrow A$. In $\mathrm{Hom}(A \times A, A)$ gilt aber

$$\text{Addition} = p_1 + p_2 \ , \quad \text{also gilt} \quad \mu^*(\iota) = p_1^*(\iota) + p_2^*(\iota) \ .$$

Nun führen wir den allgemeinen Fall auf das universelle Beispiel zurück. Sei jetzt Y also ein beliebiger Raum und $f, g : Y \longrightarrow K(A, n)$ stetig. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f+g)^*(\iota) &= (\mu \circ (f,g))^*(\iota) = (f,g)^*(\mu^*(\iota)) = (f,g)^*(p_1^*(\iota) + p_2^*(\iota)) \\ &= (f,g)^*(p_1^*(\iota)) + (f,g)^*(p_2^*(\iota)) = f^*(\iota) + g^*(\iota)\ .\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist die Definition von $f + g$ und die dritte Gleichung der Spezialfall. □

Lemma 69. *Für alle $n \geq 1$, jede abelsche Gruppe A und jeden punktierten CW-Komplex Y ist die Vergissabbildung*

$$[Y, K(A,n)]_* \longrightarrow [Y, K(A,n)]$$

von der Menge punktierter Homotopieklassen basispunkt-erhaltender Abbildungen in die Menge freier Homotopieklassen aller stetigen Abbildungen bijektiv.

Proof. Wir zeigen zuerst die Surjektivität. Dazu kann der Eilenberg-MacLane-Raum $K(A, n)$ durch einen beliebigen weg-zusammenhängenden Raum Z ersetzt werden. Sei also $f : Y \longrightarrow Z$ eine beliebige stetige Abbildung. Wir wählen einen Weg $w : [0, 1] \longrightarrow Z$ von $f(y)$ zum Basispunkt z. Die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft angewandt auf das Raumpaar $(Y, \{y\})$ liefert dann eine Homotopie $H : Y \times [0, 1] \longrightarrow Z$ mit $H(-, 0) = f$ und $H(y, -) = w$. Die Abbildung $H(-, 1) : Y \longrightarrow Z$ ist dann in derselben Homotopieklasse wie f, aber zusätzlich basispunkt-erhaltend, also im Bild der Vergissabbildung.

Zum Beweis der Injektivität betrachten wir zuerst den Fall $n = 1$. Seien $f, g : Y \longrightarrow K(A, 1)$ zwei punktierte, stetige Abbildungen, die frei homotop sind. Dann induzieren f und g dieselbe Abbildung in $H_1(-; \mathbb{Z})$. Da A abelsch ist, ist die Hurewicz-Abbildung $\pi_1(K(A, 1), *) \longrightarrow H_1(K(A, 1); \mathbb{Z})$ bijektiv, und folglich induzieren f und g auch dieselbe Abbildung auf Fundamentalgruppen. Nach Satz 52 sind f und g dann homotop relativ zum Basispunkt.

Im Fall $n \geq 2$ brauchen wir lediglich die Eigenschaft, dass $K(A, n)$ einfach-zusammenhängend ist. Seien also Z ein beliebiger einfach-zusammenhängender Raum und $f, g : Y \longrightarrow Z$ stetige, punktierte Abbildungen, die frei homotop sind. Wir wählen eine freie Homotopie $H : Y \times [0, 1] \longrightarrow Z$ von f zu g. Dann ist $w = H(y, -) : [0, 1] \longrightarrow Z$ ein geschlossener Weg am Basispunkt. Da Z einfach-zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie $G : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow Z$, relativ zu den Endpunkten, von w zum konstanten geschlossenen Weg am Basispunkt.

Wir wenden jetzt die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft auf das Paar

$$(Y \times [0,1],\ Y \times \{0\} \cup \{y\} \times [0,1] \cup Y \times \{1\})$$

und die freie Homotopie $H : Y \times [0, 1] \longrightarrow Z$ an. Als weiteren Input brauchen wir dazu noch eine Homotopie

$$K \ :\ \big(Y \times \{0\} \cup \{y\} \times [0,1] \cup Y \times \{1\}\big) \times [0,1] \ \longrightarrow\ Z$$

so dass $K(-, -, 0) : Y \times \{0\} \cup \{y\} \times [0, 1] \cup Y \times \{1\} \longrightarrow Z$ die Einschränkung der Homotopie H ist. Auf $Y \times \{0\} \times [0, 1]$ definieren wir K durch die konstante Homotopie von f zu sich selbst. Auf $Y \times \{1\} \times [0, 1]$ definieren wir K als die konstante Homotopie von g zu sich selbst. Auf $\{y\} \times [0, 1] \times [0, 1]$ schließlich ist K durch die Homotopie G gegeben. Die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft liefert uns jetzt eine Homotopie (von Homotopien) $\bar{K} : Y \times [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow Z$, die H und K fortsetzt. Die Homotopie $\bar{K}(-, -, 1) : Y \times [0, 1] \longrightarrow Z$ ist dann wieder eine Homotopie von f zu g, aber diesmal relativ Basispunkt. Folglich sind f und g auch im punktierten Sinn homotop, was zu zeigen war. □

Bemerkung 70. Mit etwas genauerem Hinsehen kann das Argument des vorigen Lemmas modifiziert werden, um das Verhalten der Vergissabbildung

$$[Y, Z]_* \longrightarrow [Y, Z]$$

für allgemeine punktierte und weg-zusammenhängende Räume Z zu analysieren. Wie im Beweis von Lemma 69 gesehen, ist diese Abbildung surjektiv, sobald die Inklusion des Basispunktes

$\{y\} \longrightarrow Y$ die Homotopie-Erweiterung-Eigenschaft hat, also zum Beispiel für CW-Komplexe Y. Es lässt sich auf natürliche Weise eine Operation der Fundamentalgruppe von Z auf der Menge $[Y, Z]_*$ definieren so dass gilt

- für $Y = S^n$ stimmt die Operation mit der Wirkung von $\pi_1(Z, z)$ auf der Homotopiegruppe $\pi_n(Z, z) = [S^n, Z]_*$ überein;
- für jeden CW-Komplex Y induziert die Vergissabbildung $[Y, Z]_* \longrightarrow [Y, Z]$ eine Bijektion von der Quotientenmenge $[Y, Z]_*/\pi_1(Z, z)$ mit $[Y, Z]$.

Jetzt kommen wir zum Hauptresultat dieses Abschnittes. Man sagt dazu, dass die n-te Kohomologie mit Koeffizienten in A durch den Eilenberg-MacLane-Raum *dargestellt* wird.

Satz 71. *Für alle $n \geq 0$, jede abelsche Gruppe A und jeden CW-Komplex Y ist der natürliche Homomorphismus*

$$[Y, K(A, n)] \longrightarrow H^n(Y; A) \ , \quad [f] \longmapsto f^*(\iota)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Wir müssen noch zeigen, dass die natürliche Transformation bijektiv ist. Beide Seiten der Transformation führen disjunkte Vereinigungen in Produkte über, wir können (und werden) also im folgenden annehmen, dass Y weg-zusammenhängend ist.

Wie führen jetzt eine Induktion über n. Im Fall $n = 0$ ist $K(A, 0)$ ein diskreter Raum, also ist jede stetige Abbildung des zusammenhängenden Komplexes Y nach $K(A, 0)$ konstant, und zwei solche Abbildungen sind nur homotop wenn sie bereits gleich sind. Also sind beide Seiten der Transformation bijektiv zur Gruppe A, und die Transformation ist eine Bijektion.

Für $n \geq 1$ wählen wir einen Basispunkt y in Y und dürfen dann gemäß Lemma 69 freie durch punktierte Abbildungen und Homotopieklassen ersetzen. Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass Y $(n-1)$-zusammenhängend ist. Dann ist die Gruppe $H_{n-1}(Y; \mathbb{Z})$ trivial (falls $n \geq 2$ nach dem Hurewicz-Satz) oder zumindest frei (falls $n = 1$). In jedem Fall verschwindet die Ext-Gruppe $\operatorname{Ext}(H_{n-1}(Y; \mathbb{Z}), A)$ und die Abbildung Abbildung $\Phi : H^n(Y; A) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_n(Y; \mathbb{Z}), A)$ aus dem Universellen Koeffiziententheorem (Korollar 24) ist ein Isomorphismus. Weiter ist die Hurewicz-Abbildung $h : \pi_n(Y, y) \longrightarrow H_n(Y; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus (falls $n \geq 2$) oder der universelle Homomorphismus in eine abelsche Gruppe (falls $n = 1$). In jedem Fall ist Präkomposition mit der Hurewicz-Abbildung eine bijektive Abbildung $\operatorname{Hom}(H_n(Y; \mathbb{Z}), A) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\pi_n(Y, y), A)$. Die Komposition

$$[Y, K(A, n)]_* \xrightarrow{[f] \mapsto f^*(\iota)} H^n(Y; A) \xrightarrow{\ \Phi\ } \operatorname{Hom}(H_n(Y; \mathbb{Z}), A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(h, A)} \operatorname{Hom}(\pi_n(Y, y), A)$$

bildet die Klasse einer punktierten Abbildung $f : Y \longrightarrow K(A, n)$ auf die induzierte Abbildung in π_n ab; dies ist bijektiv nach Satz 52. Da die Komposition sowie die zweite und dritte Abbildung bijektiv sind, ist auch die uns interessierende erste Abbildung bijektiv. Dies beweist den Spezialfall.

Im allgemeinen Fall betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
{[\Sigma Y^{(n-1)}, K(A, n)]_*} \arrow[r, "p^*"] \arrow[d] & {[Y \cup_{Y^{(n-1)}} CY^{(n-1)}, K(A, n)]_*} \arrow[r, "i^*"] \arrow[d] & {[Y, K(A, n)]_*} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^n(\Sigma Y^{(n-1)}; A) \arrow[r, "p^*"'] & H^n(Y \cup_{Y^{(n-1)}} CY^{(n-1)}; A) \arrow[r, "i^*"'] & H^n(Y; A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{72}$$

in dem alle vertikalen Abbildungen durch Auswertung an der Fundamentalklasse gegeben sind. Hier bezeichnet $CY^{(n-1)} = (Y^{(n-1)} \times [0, 1])/(Y^{(n-1)} \times \{1\})$ den Kegel des $(n-1)$-Skeletts, in dem wir das Bild von $Y^{(n-1)} \times \{0\}$ mit $Y^{(n-1)}$ identifizieren. Die horizontalen Abbildungen sind von den stetigen Abbildungen

$$Y \xrightarrow{\ i\ } Y \cup_{Y^{(n-1)}} CY^{(n-1)} \xrightarrow{\ p\ } \Sigma Y^{(n-1)}$$

induziert; die Abbildung p ist eine Quotientenraumprojektion, die das Bild von i zu einem Punkt kollabiert. Wir notieren eine Reihe von Beobachtungen über das kommutative Diagramm (72).

- Die obere Reihe ist exakt. Im relativen CW-Komplex $(Y \cup_{Y^{(n-1)}} CY^{(n-1)}, Y)$ (mit der 'minimalen' CW-Struktur auf dem Kegel) haben alle relativen Zellen Dimension höchstens n. Gemäß Lemma 49 kann also jede stetige Abbildung $Y \longrightarrow K(A,n)$ stetig auf $Y \cup_{Y^{(n-1)}} CY^{(n-1)}$ fortgesetzt werden. Also ist die Abbildung i^* surjektiv. Da die Komposition $p \circ i$ konstant ist, ist die Komposition $i^* \circ p^*$ trivial. Eine stetige, punktierte Abbildung $g : Y \cup_{Y^{(n-1)}} CY^{(n-1)} \longrightarrow K(A,n)$ ist genau dann im Kern von i^*, wenn die Einschränkung von g auf Y null-homotop ist. Die Homotopie-Erweiterung-Eigenschaft des Paares $(Y \cup_{Y^{(n-1)}} CY^{(n-1)}, Y)$ ermöglicht es dann, g zu einer Abbildung g' zu deformieren, die ganz Y auf den Basispunkt von $K(A,n)$ abbildet. Dann faktorisiert g' über die Quotientenraumprojektion p, ist also im Bild von p^*.
- Die untere Reihe ist exakt weil i eine CW-Inklusion ist und p den Quotientenkomplex mit der Einhängung von $Y^{(n-1)}$ per Homöomorphismus identifiziert.
- Die linke Abbildung in (72) ist surjektiv. Um das einzusehen wählen wir eine nach Satz 52 existierende (und bis auf Homotopie eindeutige) stetige punktierte Abbildung $\kappa_n : \Sigma K(A, n-1) \longrightarrow K(A,n)$, die auf π_n den folgenden Isomorphismus realisiert
$$\begin{aligned}\pi_n(\Sigma K(A,n-1),*) &\cong H_n(\Sigma K(A,n-1);\mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(K(A,n-1);\mathbb{Z}) \\ &\cong \pi_{n-1}(K(A,n-1),*) \cong A \cong \pi_n(K(A,n),*)\ .\end{aligned}$$
(hier verwenden wir zweimal den Hurewicz- und einmal den Einhängungsisomorphisms). Wir betrachten dann das kommutative Quadrat
$$\begin{tikzcd} {[Y^{(n-1)}, K(A,n-1)]_*} \arrow[r, "{[f] \mapsto [\kappa_n \circ \Sigma(f)]}"] \arrow[d, "\cong"'] & {[\Sigma Y^{(n-1)}, K(A,n)]_*} \arrow[d] \\ H^{n-1}(Y^{(n-1)};A) \arrow[r, "\cong"'] & H^n(\Sigma Y^{(n-1)};A) \end{tikzcd} \tag{73}$$
(die vertikalen Abbildungen sind Auswertung an den jeweiligen Fundamentalklassen, die untere horizontale Abbildung ist der Einhängungsisomorphismus). Die linke vertikale Abbildung in (73) ist nach Induktion bijektiv und die untere Abbildung ist der Einhängungsisomorphismus. Also ist die rechte vertikale Abbildung in (73) surjektiv.
- Der CW-Komplex $Y \cup_{Y^{(n-1)}} CY^{(n-1)}$ ist $(n-1)$-zusammenhängend: jede stetige Abbildung einer Sphäre der Dimension kleiner als n kann per zellulärer Approximation ganz in den Kegel $CY^{(n-1)}$ deformiert werden, und dieser Kegel ist auf den Kegelpunkt zusammenziehbar. Nach dem Spezialfall ist die mittlere vertikale Abbildung in (72) also ein Isomorphismus.

Das 5er-Lemma zeigt jetzt, dass die uns interessierende rechte Abbildung im kommutativen Diagramm (72) ein Isomorphismus ist. Dies beendet unseren Beweis. □

Als eine Anwendung zeigen wir, dass Linienbündel durch ihre erste Stiefel-Whitney-Klasse klassifiziert sind. Wir behaupten zunächst, dass für jeden parakompakten Raum X die Komposition
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(X) & {[X, \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty]} \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r] & H^1(X;\mathbb{F}_2) \\ \xi = f^*(\gamma) & {[f]} \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & f^*(\iota) \end{tikzcd}$$
durch die erste Stiefel-Whitney-Klasse $w_1(\xi)$ gegeben ist. Das universelle Linienbündel γ über $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ gehört zur identischen Abbildung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ und damit zur Fundamentalklasse $\iota \in H^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty, \mathbb{F}_2)$. Da sowohl ι als auch $w_1(\gamma)$ das nicht-triviale Element in $H^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty, \mathbb{F}_2)$ sind, gilt $w_1(\gamma) = \iota$. Wegen Natürlichkeit gilt dann $w_1(f^*(\gamma)) = f^*(\iota)$ für alle stetigen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$.

Wenn X ein parakompakter CW-Komplex ist, dann sind beide Abbildungen bijektiv, also ist dann

$$w_1 \ : \ \mathrm{Pic}(X) \ \longrightarrow \ H^1(X, \mathbb{F}_2)$$

ein Gruppenisomorphismus. Mit anderen Worten: zwei Linienbündel über X sind genau dann isomorph, wenn ihre ersten Stiefel-Whitney-Klassen übereinstimmen, und jede Klasse in $H^1(X, \mathbb{F}_2)$ ist die Stiefel-Whitney-Klasse eines Linienbündels.

Beispiel 44 deutet noch eine weitere Beschreibung von $\mathrm{Pic}(X)$ an: da $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ homotopie-äquivalent zu $|B\Sigma_2|$ ist, ist die Menge $[X, \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty]$ natürlich bijektiv zu $[X, |B\Sigma_2|]$ und damit zur Menge der Isomorphieklassen zweiblättriger Überlagerungen über X. Die Verbindung geht über Zurückziehen der universellen Überlagerung $S^\infty \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$. Für parakompakte Räume X sind also die Mengen $\mathrm{Pic}(X)$, $[X, \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty]$, $H^1(X; \mathbb{F}_2)$ und die Isomorphieklassen zweiblättriger Überlagerungen in natürlicher Weise zueinander bijektiv. Das Linienbündel zu einer zweiblättrigen Überlagerungen $p : E \longrightarrow X$ hat dabei den Totalraum $E \times_{\Sigma_2} \mathbb{R}$, der Quotientraum von $E \times \mathbb{R}$ nach der Äquivalenzrelation $(x, t) \sim (\bar{x}, -t)$, wobei $\bar{x}$ das eindeutige von x verschiedene Element aus E mit $p(\bar{x}) = p(x)$ ist.

Für einen parakompakten CW-Komplex X sind auch die beiden Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Pic}_{\mathbb{C}}(X) & \xleftarrow{\cong} & [X, \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty] & \xrightarrow{\cong} & H^2(X; \mathbb{Z}) \\ f^*(\gamma) & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & [f] & \longmapsto & f^*(\iota) \end{array}$$

Isomorphismen, weil $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ einerseits der klassifizierende Raum für komplexe Linienbündel und andererseits ein $K(\mathbb{Z}, 2)$ ist. Die Komposition heißt *erste Chern-Klasse*

$$c_1 \ : \ \mathrm{Pic}_{\mathbb{C}}(X) \ \longrightarrow \ H^2(X, \mathbb{Z})$$

eines komplexen Linienbündels. Also gilt für komplexe Linienbündel ξ und η über X, dass $\xi \cong \eta$ genau dann, wenn $c_1(\xi) = c_1(\eta)$ in $H^2(X, \mathbb{Z})$ gilt.

Vektorbündel höherer Dimension sind im allgemeinen *nicht* durch ihre charakteristischen Klassen bestimmt. Dies liegt daran, dass die höheren Grassmann-Räume keine Eilenberg-MacLane-Räume sind.

Stefan Schwede
Mathematisches Institut der Universität Bonn
schwede@math.uni-bonn.de