Limites de fonctions

Avant de commencer, je vous conseille fortement de faire sérieusement les exemples proposés qui sont formateurs et vous préparent pour le bac ! Si vous savez faire les exemples, vous êtes plus que prêt pour le bac ! Regarder la solution APRES avoir cherché !

Définition 1 :
La limite d'une fonction traduit le comportement de cette fonction lorsque x devient très grand positivement, négativement, en une valeur fixée....

Remarque : Contrairement aux suites, nous pouvons généralement étudier les limites d'une fonction en $-\infty$ et $+\infty$, et même en tout point où la fonction est définie.

Limites usuelles :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x) = -\infty$ et • $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ (si n est pair) • $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ (si n est impair) et
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ et • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Exemple : ***Déterminer la limite des fonctions suivantes :***

(1). $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1})$

(2). $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2}$

Solution :

(1). $\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x\to -\infty}(x^2+1) = +\infty$

Par composition : $\lim_{X\to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

D'où $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1}) = +\infty$

(2). $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$, donc $\lim_{x\to +\infty}(x+2) = +\infty$.

Par composition : $\lim_{X\to +\infty} \frac{1}{X} = 0$

D'où $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

Notation : On notera plus généralement $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ au lieu de $\lim_{(x\to 0, x>0)} f(x)$. De même : $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ au lieu de $\lim_{(x\to 0, x<0)} f(x)$.

Opérations sur les limites :

<u>Limite d'une somme :</u>

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

<u>Limite d'un produit :</u>

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	$l\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\times g(x))$	$l\times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I

<u>Limite d'un quotient :</u>

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	l	l	$l\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	F.I

F.I signifie **Forme Indéterminée**. Il y a quatre types de F.I :

$+\infty-\infty$	$\pm\infty\times 0$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{0}{0}$

Définition 2 :
Soit f une fonction, on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Une **asymptote** à (C_f) est une **droite** qui **"frôle"** la courbe de f sans la toucher. **Plus rigoureusement**, on distinguera **trois cas** d'asymptotes à une courbe.

Premier cas : asymptote horizontale
La droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$ si : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Cela fonctionne de même en $-\infty$.

Exemple :

Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors en notant (C_f) la courbe représentative de la fonction f, **la droite d'équation** $y = 0$ est **une asymptote horizontale** en $+\infty$ et en $-\infty$ à (C_f).

Deuxième cas : Asymptote verticale
La droite $x = a$ est une asymptote verticale si :
$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$, ou bien $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

Remarque : Je vous **déconseille fortement** d'écrire cette notation : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ dans **votre copie du bac** ! J'écris ceci seulement pour être synthétique et compréhensible.

Exemple :

La courbe de la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x-2}$ admet **une asymptote verticale** en $x = 2$.

Troisième cas : Asymptote oblique (limite du programme)
La droite $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe de f en $+\infty$ si : $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$.

Théorème de comparaison :

Soient f et g deux fonctions.

- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty.$$

- Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ et $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Théorème des gendarmes :
Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si pour x_0 dans I, on a :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} h(x), \text{ alors :}$$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.

Croissance comparée :

Par **croissance comparée**, on a :

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et pour tout n de $\mathbb{N}$:

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Taux d'accroissement :
Soit f une fonction **continue et dérivable** sur I. Soit a appartient à I.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque : Cette propriété n'est pas au programme, mais reste toutefois anecdotique et intéressante !

Propriété 1 :
• La limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) d'une **fonction polynomiale** est la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) de son **monôme de plus haut degré**.
• La limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) d'une **fonction rationnelle** est la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) du **quotient des termes de plus haut degré**.

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

(1). $\lim_{x\to+\infty}(3x^3 - 5x^2 - 7x - 2)$

(2). $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+1}{x^2+5x-1}$

Solution :

(1). La limite en $+\infty$ d'une **fonction polynomiale** est la limite en $+\infty$ de **son monôme de plus haut degré**. Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^3 - 5x^2 - 7x - 2) &= \lim_{x\to+\infty}(3x^3)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

D'où : $\lim_{x\to+\infty}(3x^3 - 5x^2 - 7x - 2) = +\infty$

(2). La limite en $-\infty$ d'une **fonction rationnelle** est la limite en $-\infty$ du **quotient des termes de plus haut degré**. Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x+1}{x^2+5x-1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}\\ &= 2\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x+1}{x^2+5x-1} = 2$

Quelques techniques pour lever une indétermination :

(1). Factoriser par le terme prépondérant dans une somme.
(2). Multiplier par la quantité conjuguée.
(3). Utilisation des théorèmes de comparaison et gendarmes.
(4). Utilisation du taux d'accroissement.

Exercice 1 (10 points) : Déterminer les limites suivantes :

(1). $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+9}$

(2). $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{4x+7}$

(3). $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$

(4). $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1}$

(5). $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1}$

(6). $\lim_{x\to 4^-} \frac{x}{x-4}$

(7). $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

(8). $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}\right)$

(9). $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$

(10). $\lim_{x\to+\infty} x\cdot(e^{1/x}-1)$

Exercice 2 (4 points) : Déterminer les limites suivantes :

(1). $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$

(2). $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x}$

(3). $\lim_{x\to+\infty} x^2-3\sin(x)$

(4). $\lim_{x\to-\infty} x^2-3\sin(x)$

Exercice 3 (6 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$ par :

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{2x+1}$$

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ puis **interpréter le résultat** obtenu.

3) Déterminer $\lim_{x \to -1/2} f(x)$ puis **interpréter le résultat** obtenu.

4) Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$.

5) En déduire les **variations** de f.

Correction :

Exercice 1 :

(1). $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+9) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.
Ainsi **par composition**, en posant $X = 2x+9$: $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x+9} = +\infty$

(2). La limite en $+\infty$ d'une **fonction rationnelle** est la limite en $+\infty$ du **quotient des termes de plus haut degré**. Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{1-3x}{4x+7} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{4x} \\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-3x}{4x+7} = -\frac{3}{4}$

(3). **Attention, on ne peut pas utiliser la propriété précédente puisqu'ici on évalue en 1 !**

On a : $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ et $2x^2 + x - 3 = 2(x-1)(x+\frac{3}{2})$ (sinon calculer le discrimant et les racines, etc...)

Ainsi :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{2(x-1)(x+\frac{3}{2})} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{2(x+\frac{3}{2})} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

D'où : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \frac{3}{5}$

(4).

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x(1-1/x)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (**par croissance comparée**) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$

Par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = +\infty$

(5).

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ **(par composition)**

Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-e^{-x}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+e^{-x}) = 1$

Par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = 1$

(6). $\lim\limits_{x \to 4^-} (x-4) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to 4^-} x = 4$
Par quotient : $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{x-4}{x} = -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{x-4}{x} = -\infty$

(7). On multiplie par la **quantité conjuguée** :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \quad (\textbf{identité remarquable au numérateur}) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc **par somme** : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x} = +\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = 0.$

(8).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}\right) &= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(1+x+x^2)}\right) \\
&= \lim_{x\to1^+} \frac{(1+x+x^2)}{(x-1)(1+x+x^2)} - \frac{1}{(x-1)(1+x+x^2)} \\
&= \lim_{x\to1^+} \frac{1+x+x^2-1}{(x-1)(1+x+x^2)} \\
&= \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+x}{x^3-1}
\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x) = 2$

Par quotient : $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2+x}{x^3-1} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}\right) = +\infty$

(9).

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-1 = +\infty$

D'où par produit : $\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})=+\infty$.

(10). Celui-ci est **un peu compliqué**, mais il fallait faire apparaître un taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to+\infty} x(e^{1/x}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x} \quad (\textbf{multiplier c'est diviser par l'inverse !})$$

On pose : $X=1/x$. $\lim_{x\to+\infty} 1/x=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}&=\lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{X}\\&=\lim_{X\to0}\frac{e^X-e^0}{X-0}\\&=\lim_{X\to0}(e^X)'\\&=1\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} x(e^{1/x}-1)=1$

Exercice 2 :

(1).
On sait que : $-1\leq\sin(x)\leq1$, donc $-\frac{1}{x^2}\leq\frac{\sin(x)}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$
Or : $\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ et $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

Par théorème des gendarmes : $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x^2}=0$

(2). $-1\leq\cos(x)\leq1$, donc $-\frac{1}{x}\leq\frac{\cos(x)}{x}\leq\frac{1}{x}$
Or : $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Par théorème des gendarmes : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)}{x}=0$

(3). On a : $-1\leq\sin(x)\leq1$, donc $-3\leq-3\sin(x)\leq3$, donc

$$x^2-3\leq x^2-3\sin(x)\leq x^2+3$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)=+\infty$

Par théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3\sin(x)=+\infty$

(4).

On en déduit de même par théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3\sin(x)=+\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$.

Exercice 3 :

1) On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=+\infty$ **(par croissance comparée)** et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$
Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=+\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) De même :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{2x+1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$

Par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=0$

Conclusion : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et (C_f) admet aisni une **asymptote horizontale** d'équation $y = 0$.

3) On a :

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{e^{2x}}{2x+1}$$

On sait que : $\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} (2x+1) = 0^+$

Donc : $\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{1}{2x+1} = +\infty$

Par produit : $\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$ et (C_f) admet donc une **asymptote verticale** d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

4) f est **dérivable** sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ en tant que **quotient de deux fonctions dérivables** sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. On pose :

$u(x) = e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 2e^{2x}$ et $v(x) = 2x + 1 \Rightarrow v'(x) = 2$

Formule : $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$:

$$f'(x) = \frac{2(e^{2x})(2x+1) - 2e^{2x}}{(2x+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{4x(e^{2x})}{(2x+1)^2}$$

D'où : pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$: $f'(x) = \frac{4x(e^{2x})}{(2x+1)^2}$

5) Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$: $(2x+1)^2 > 0$ et $4e^{2x} > 0$, donc $f'(x)$ est **du signe** de x.

— $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

— $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (et on a $f(0) = 1$)

— $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; 0[$

Conclusion : f est **décroissante** sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, puis **admet une valeur interdite** en $-\frac{1}{2}$, puis est à **nouveau décroissante** sur $]-\frac{1}{2}; 0[$. Enfin, f **admet un minimum** de coordonnées $(0; 1)$ puis est **croissante** sur $]0; +\infty[$.

Alors, tu as eu combien ? Si tu es toujours aussi chaud, je te conseille d'aller voir les autres cours disponibles dans la rubrique *"Mathématiques"* afin de cartonner pour le bac !