2

Wstaw pierwszy wierzchołek na stos

Oznacz go jako odwiedzony

Dopóki stos nie jest pusty:

v ← szczyt stosu

[v dodaj na początek wynikowej listy]

Usuń szczyt stosu

Dla każdego wierzchołka u, który jest sąsiadem v

Jeżeli u odwiedzone

–

wpp

Dodaj u na szczyt stosu

Oznacz u jako odwiedzony

[Zwróć wynikową listę]

Koniec

O(m+n) bo każdy wierzchołek i każdą krawędź rozpatrujemy raz

Pierwszym wierzchołkiem jest ten bez krawędzi wchodzących

3

G – rozpatrzmy turniej, $x \in G$

Weźmy wierzchołek (x) o największej liczbie krawędzi wychodzących (k)

Rozważmy przypadki

1° $\forall_{\substack{y \in G \\ y \neq x}} (x, y) \in G$

Trywialnie możemy dostać się z x do dowolnego wierzchołka $v \in G$ w jednym kroku

2° $\exists_{\substack{y \in G \\ y \neq x}} (x, y) \notin G \Rightarrow (y, x) \in G$

~~Wtedy~~ y ma krawędzie wychodzące do co najmniej k wierzchołków

Wierzchołków w G jest co najmniej $k+1$

Bo x ma do k ale nie do y

Więc istnieje wierzchołek z, który ma krawędź wychodzącą

do y więc istnieje droga x, z, y długości 2

a do pozostałych k wierzchołków istnieje droga długości

1 z x

4

$G(A \cup B, E) \Rightarrow \boxed{|A| = |B|}$

G hamiltonowski

Załóżmy nie wprost że w $G(A \cup B, E)$ $|A| \neq |B|$ i G zawiera cykl Hamiltona C

Bez straty ogólności załóżmy $|A| > |B|$

Rozpatrzmy dwa przypadki

1° C rozpoczyna się w A

Wtedy po odwiedzeniu wszystkich wierzchołków z B ~~przechodząc~~ zostaje nam co najmniej 1 wierzchołek w A. Po przejściu do niego nie możemy wrócić do startowego wierzchołka bezpośrednio bo G dwudzielny a w B nie ma już niewykorzystanych wierzchołków

2° C rozpoczyna się w $b \in B$

Wtedy po $2 \cdot |B|$ krokach możemy wrócić do b, odwiedzając wszystkie wierzchołki w B. Jednak w A pozostaje $|A| - |B| > 0$ nieodwiedzonych wierzchołków. Więc C nie jest cyklem Hamiltona

---

Nie można przejść ruchem konika szachowego przez wszystkie pola szachownicy 5×5 i wrócić na pole startowe.

Ponieważ taka szachownica ma 12 pól czarnych i 13 białych.

Możemy ją przedstawić jako graf dwudzielny białych (B) i czarnych (C) pól

$|B| \neq |C|$ więc taki graf jest dwudzielny ale nie hamiltonowski.

5

Podzielmy kostkę na warstwy

Dolna	Środkowa	Górna
0 1 0	1 0 1	0 1 0
1 0 1	0 1 0	1 0 1
0 1 0	1 0 1	0 1 0

Każdej kostce serze przypisujemy 0 lub 1

$G = (V_0 \cup V_1, E)$

G jest dwudzielny, V_0 - kostki z 0, V_1 - kostki z 1

$|V_0| = 14$, $|V_1| = 13$

Mysz porusza się po krawędziach czyli $0 \to 1$, $1 \to 0$.

Po przejściu całego grafu mysz znajdzie się na polu należącym do V_0 bo jej ścieżka to: $\underbrace{0 \to 1}_{13 \text{ takich par}} \to 0 \to 1 \to \ldots \to \underbrace{0 \to 1} \to 0$

Środkowa kostka jest oznaczona „1" więc mysz nie może jej zjeść jako ostatniej

7

(*) n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona o początku $(0,0,\dots,0)$
i końcu $(1,0,\dots,0)$
lub na odwrót

D-d ind.

Podstawa $n=2$:

$00 \to 01 \to 11 \to 10$

$10 \to 11 \to 01 \to 00$

$n=1$

$0 \to 1$

$1 \to 0$

Krok:

Załóżmy, że dla $n \geq 1$ zachodzi (*)

Pokażemy, że (*) zachodzi dla $n+1$

$n+1$-wymiarową kostkę rozbijmy na dwie części postaci $(1,\dots)$ i $(0,\dots)$

W pierwszej znajdują się wierzchołki reprezentowane przez ciągi rozpoczynające się od 1 a w drugiej od 0.

Jeżeli każdemu z nich pozbawimy pierwszego wyrazu to otrzymamy dwie n wymiarowe kostki które spełniają (*)

Jeżeli przywrócimy pierwszy wyraz, (*) pozostanie zachowana bo ~~dalej~~ nadal różnica między kolejnymi wierzchołkami będzie na jednym miejscu

Otrzymamy zatem po dwie ścieżki

$(0,0,0,\dots,0) \to \dots \to (0,1,0,\dots,0)$ $\quad k \quad$ $(1,0,0,\dots,0) \to \dots \to (1,1,0,\dots,0)$

$(0,1,0,\dots,0) \to \dots \to (0,0,0,\dots,0)$ $\quad\quad$ $(1,1,0,\dots,0) \to \dots \to (1,0,0,\dots,0)$

Łącząc krawędzią k zaznaczone ścieżki otrzymamy ścieżkę Hamiltona w $n+1$-wymiarowej kostce.

Wierzchołki, które łączy k różnią się tylko na pierwszej pozycji.