1. $\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} y = -2 + 4\cdot\frac{x-a}{b-a} & , & x = \frac{(y+2)(b-a)}{4} + a \\ dy = \frac{4}{b-a}\,dx & & dx = \frac{1}{4}(b-a)\,dy \end{matrix} \right| =$

$$= \int_{-2}^{2} f\left(\frac{(y+2)(b-a)}{4} + a\right)\cdot\frac{1}{4}(b-a)\,dy = \underbrace{\frac{1}{4}(b-a)\int_{-2}^{2} f\left(\frac{(y+2)(b-a)}{4} + a\right)dy}$$

$$\int_{-2}^{2} f\left(\frac{(y+2)(b-a)}{4} + a\right)dy$$

możemy policzyć za pomocą Integral(f)

2. Pokazać że $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

ma rząd $\geq n+1$ wtw gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

($\Leftarrow$) Zakładamy $Q_n(f)$ interpolacyjna

Pokażemy, że jej rząd $\geq n+1$

$$Q_n(f) = \int_a^b L_n^f(x)\,dx$$

Weźmy $w \in \Pi_n$

Wtedy $w(x) = L_n^w(x)$

$$Q_n(w) = \int_a^b L_n^w(x)\,dx = \int_a^b w(x)\,dx \leftarrow \text{wynik dokładny}$$

Czyli rząd $Q_n \geq n+1$

Bo dla każdego wielomianu stopnia $\leq n$ kwadratura jest dokładna

(⇒) Załóżmy, że rząd kwadratury $\geqslant n+1$

Pokażmy, że jest ona interpolacyjna

Weźmy dowolne $f(x)$ t. że $f(x) \in \Pi_n$

Wtedy

$$f(x) = L_n^f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\lambda_i \quad ; \quad \lambda_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$$

x_k - węzły interpolacji

Można zauważyć, że:

$\lambda_i(x_l) = 0$ dla $i \neq l$

$\lambda_i(x_l) = 1$ dla $i = l$

Rozpatrzmy kwadraturę dla funkcji λ_i

$$Q(\lambda_i) = \int_a^b \lambda_i = \sum_{k=0}^{n} A_k \lambda_i(x_k) = A_i \quad \Rightarrow \quad A_i = \int_a^b \lambda_i$$

Stopień $\lambda_i = n$ czyli kwadraturę możemy zapisać bez reszty

Czyli

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \lambda_i\right) f(x_i) \leftarrow \text{kwadratura interpolacyjna}$$

3 Pokazać, że rząd kwadratury $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ nie przekracza $2n+2$

Pokażę, że istnieje wielomian rzędu $2n+2$ dla którego nie zachodzi $\int_a^b f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$.

Weźmy wielomian $f(x) = ((x-x_0)\dots(x-x_n))^2$

Jest on rzędu $2n+2$

$f(x) \geq 0$

dla x różnych od miejsc zerowych $f(x) > 0$

Więc mamy:

$$\int_a^b f(x) > 0$$

Ponadto mamy:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = 0$$

bo x_k są miejscami zerowymi

$$\text{czyli} \quad \int_a^b f(x) \neq \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

Wzór interpolacyjny :

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Aby otrzymać węzły równoodległe weźmy

$x_k = a + h \cdot k$ gdzie $h = \frac{b-a}{n}$

Wtedy

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - (a + h \cdot j)}{(a + h i) - (a + h j)} = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - a - h j}{h (i - j)}$$

6

$$\int_a^b L_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-a-hj}{h(k-j)}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = a + th \Rightarrow t = \dfrac{x-a}{h} \\ dx = h\,dt \end{array} \right|$$

$$\int_a^b L_n(x)\,dx = \int_0^n \sum_{k=0}^{n} f(\overbrace{a+kh}^{x_k}) \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{a+th-a-hj}{h(k-j)}\, h\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_i)\, h \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\,dt$$

$$A_k = h \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\,dt$$

$$A_k = h \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j} \, dt$$

$$\left| \begin{array}{ll} v = n - t & dt = -dv \\ t = n - v & \end{array} \right|$$

$$A_k = -h \int_n^0 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{n-v-j}{k-j} \, dv$$

$$A_k = h \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{n-j-v}{(n-j)-(n-k)} \, dv$$

$v' = n - j$

$$A_k = h \int_0^n \prod_{\substack{v'=0 \\ v' \neq n-k}}^{n} \frac{v'-v}{v'-(n-k)} \, dv$$

$$A_k = h \int_0^n \prod_{\substack{v'=0 \\ v' \neq n-k}}^{n} \frac{v-v'}{(n-k)-v'} \, dv$$

$v = t'$

$$A_k = h \int_0^n \prod_{\substack{v'=0 \\ v' \neq n-k}}^{n} \frac{t'-v'}{(n-k)-v'} \, dt'$$

$k' = n - k$

$$A_k = h \int_0^n \prod_{\substack{v'=0 \\ \cancel{v' \neq n-k} \\ v' \neq k'}}^{n} \frac{t'-v'}{k'-v'} \, dt' = A_{k'} = A_{n-k}$$

7 Pokazać $\frac{A_k}{(b-a)}$ wymierne

$$A_k = \frac{b-a}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^n \frac{t-j}{k-j}\, dt$$

$$\frac{A_k}{(b-a)} = \frac{1}{n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^n \frac{t-j}{k-j}\, dt = \underbrace{\frac{1}{n} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^n \frac{1}{k-j}}_{\in Q} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^n t-j \; dt \qquad (1)$$

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^n (t-j) = (t-0)(t-1)(t-2)\dots(t-(k-1))\,(t-(k+1))\dots(t-n)$$ ← wielomian $w(t)$

$$w(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_0 t^0 \qquad \alpha_i \in Q \quad (2)$$

$$W(t) = \alpha_n \frac{1}{n+1} t^{n+1} + \dots + \frac{1}{1}\alpha_0 t^1 \qquad \text{tż. } W'(t) = w(t)$$

$$\int_0^n w(t)\, dt = W(n) - W(0) = \underbrace{\left(\alpha_n \frac{1}{n+1} n^{n+1} + \dots + \alpha_0 n\right) - 0}_{\in Q} \qquad (3)$$

$\in Q$

Z (1)(2)(3) $\frac{A_k}{(b-a)} \in Q$