1.

$$A \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,999 \\ -1,001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 215,657 \\ 252,428 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{r} = A \cdot \tilde{x} - b = \begin{bmatrix} 215,657 \\ 252,428 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,343 \\ -1,572 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \hat{x} = \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,341 \\ -0,087 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 216,999 \\ 254 \end{bmatrix}$$

$$\hat{r} = A\hat{x} - b = \begin{bmatrix} 216,999 \\ 254 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,001 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 780 x_1 + 563 x_2 = 217 \\ 913 x_1 + 659 x_2 = 254 \end{cases} \quad x_1 = 1, \; x_2 = -1 \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e} = \tilde{x} - x = \begin{bmatrix} 0,999 \\ -1,001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,001 \\ -0,001 \end{bmatrix}$$

$$\hat{e} = \hat{x} - x = \begin{bmatrix} 0,341 \\ -0,087 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,659 \\ 0,913 \end{bmatrix}$$

2

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -4 & 0 \\ -6 & 8 & -4 & 5 \\ -10 & 12 & -24 & 9 \end{bmatrix}$$

U_{11}:

$1 \cdot U_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$; $U_{11} = 2$

U_{12}:

$U_{12} \cdot 1 + U_{22} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$; $U_{12} = 0$

L_{21}: $L_{21} \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -4$; $L_{21} = -2$

U_{22}: $0 \cdot (-2) + 1 \cdot U_{22} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$; $U_{22} = 2$

U_{23}: $-2 \cdot 2 + 1 \cdot U_{23} + 0 \cdot U_{33} + 0 \cdot 0 = -4$; $U_{23} = 0$

U_{24}: $-2 + U_{24} + 0 + 0 = 0$ $U_{24} = 2$

$L_{31} = -3$

$L_{32} = 4$

$U_{33} = 2$

$U_{34} = 0$

$L_{41} = -5$

$L_{42} = 6$

$L_{43} = -7$

$U_{44} = 2$

$\det(A)$:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot 16 = 16$$

$$A^{-1} - X$$

$$A \cdot X = I_4 \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [e_1, e_2 \; e_3 \; e_4]$$

1° $A x_1 = e_1$; $A y_1 = e_1 \rightarrow A x_1 = y_1$

2° $A x_2 = e_2$; $A y_2 = e_2 \rightarrow A x_2 = y_2$

3° $A x_3 = e_3$; $A y_3 = e_3 \rightarrow A x_3 = y_3$

4° $A x_4 = e_4$; $A y_4 = e_4 \rightarrow A x_4 = y_4$

1° $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ -42 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ -42 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 13{,}5 \\ 22 \\ -2{,}5 \\ -21 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} 13{,}5 & 10{,}5 & -2{,}25 & -0{,}25 \\ 22 & 17{,}5 & -3{,}5 & -0{,}5 \\ -2{,}5 & -2 & 0{,}5 & 0 \\ -21 & -17 & 3{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

3

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 31 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ -1 & -3 & 0 & 11 \\ -2 & -10 & 5 & 25 \\ -3 & -13 & -16 & 25 \end{bmatrix}$$

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 31 \\ -13 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4

a) $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$

$a_{ij} = 0$ $\quad i<j$ $\qquad b_{ij} = 0$ $\quad i<j$

$A \cdot B = C$

Niech $i<j$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \underset{(A)}{=} \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} \underset{(B)}{=} \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj} \overset{(i<j)}{=} 0$$

$B^T \cdot A^T = C^T$

$\triangledown \quad \triangledown \quad \triangledown$

b)

Do znalezienia macierzy L^{-1} użyjemy metody Gaussa-Jordana

$$[L|I] \to [I|L^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} \overset{L}{\downarrow} & & & & & & & & & \\ 1 & & & & & 1 & & & & \\ x & 1 & & 0 & & & 1 & & 0 & \\ x & x & 1 & & & & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & 0 & & \ddots & \\ x & \cdots & \cdots & x & 1 & & & & & 1 \end{array}\right]$$

Na przekątnej mamy 1

Pierwszy wiersz działa

W drugim musimy wyeliminować l_{21}, możemy to zrobić przy użyciu pierwszej kolumny czym nie wpłyniemy na l_{22}

W i-tym wierszu musimy wyeliminować $l_{i1}, \dots, l_{i,i-1}$, możemy to zrobić przy użyciu poprzednich (j) wierszy, gdzie występuje 1 na l_{jj}

W dołączonej macierzy operacje będą wpływać tylko na wartości pod przekątną, Więc zostanie ona trójkątna dolna z 1 na przekątnej.

Po przekształceniach otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & & x & 1 & & & \\ & & 1 & & & x & x & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & & x & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \vdots & \cdots & & & 1 \\ & & \underset{I}{\uparrow} & & & & & \underset{L^{-1}}{\uparrow} & & \end{array}\right]$$