1

$2n$ liczb grupujemy do n zbiorów postaci:

$x \cdot 2^i \in A_x$ gdzie x to liczby nieparzyste

W każdym takim zbiorze A_x liczby są przez siebie parami podzielne.

Na przykład dla $n=5$

$A_1 = \{1, 2, 4, 8\}$

$A_3 = \{3, 6\}$

$A_5 = \{5, 10\}$

$A_7 = \{7\}$

$A_9 = \{9\}$

Te zbiory będą naszymi szufladkami i jest ich n

Skoro wybieramy $n+1$ liczb (kulek) to z zasady szufladkowej Dirichleta przynajmniej dwie należą do tego samego zbioru.

2

$A_1 = (x_1, y_1)$

$A_5 = (x_5, y_5)$

$A_2 = (x_2, y_2)$

$A_4 = (x_4, y_4)$

$A_3 = (x_3, y_3)$

Środek odcinka łączącego dwa punkty: $S = \left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2} \right)$

Aby S było punktem kratowym $\frac{x_i + x_j}{2} \in \mathbb{Z}$ i $\frac{y_i + y_j}{2} \in \mathbb{Z}$

Czyli ~~obie~~ odpowiadające sobie współrzędne muszą mieć tą samą parzystość bo:

$P + P = P \qquad N + N = P \qquad P + N = N \qquad N + P = N$

Gdzie P - liczba parzysta, N - liczba nieparzysta.

Możliwości kombinacji parzystości dwóch współrzędnych jest 4:

PP, PN, NP, NN to są nasze szufladki

a punktów (kulek) mamy 5 które musimy przyporządkować do szufladek

Z zasady szufladkowej Dirichleta przynajmniej dwie kulki (punkty) znajdą się w tej samej szufladce (kombinacja parzystości)

3 Niech S_n to kolejne sumy częściowe ciągu a_n

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Jeżeli dla jakiegoś k $n \mid S_k$ to $i = 0$, $j = k$ co kończy zadanie

W przeciwnym wypadku mamy n liczb (kulek) i $n-1$ możliwych reszt z dzielenia przez n (bo 0 nie może być) (szufladek).

Z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy że co najmniej dwie dwie sumy mają taką samą resztę z dzielenia przez n.

~~Nx~~

Bez straty ogólności załóżmy że ta para są S_e i S_f ; $e > f$

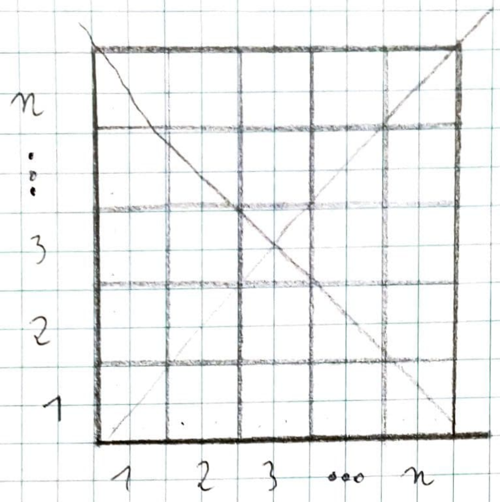
wtedy:

$$
\begin{array}{rl}
 & S_e \equiv p \pmod{n} \\
- & S_f \equiv p \pmod{n} \\
\hline
 & S_e - S_f \equiv p - p \pmod{n} \\
 & S_e - S_f \equiv 0 \pmod{n}
\end{array}
$$

czyli dzieli się przez n

$S_e - S_f$ jest sumą $a_f + a_{f+1} + \ldots + a_e$

5



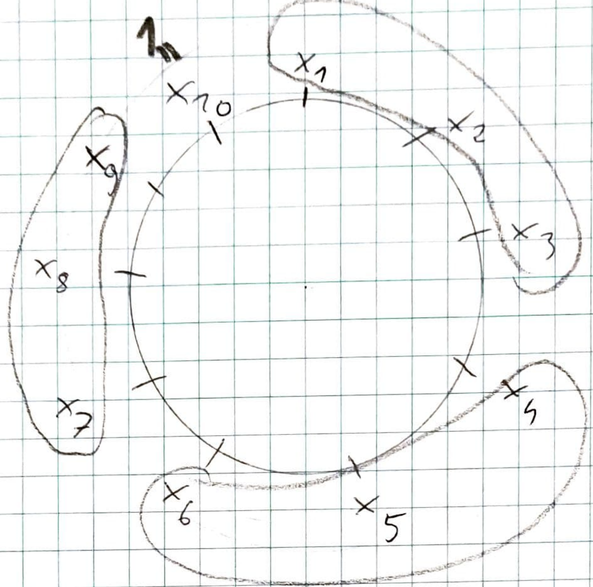
Sumując n liczb ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$ możemy otrzymać liczby całkowite od $-n$ do n, takich liczb jest $2n+1$ (to są nasze szufladki)

Sumując liczby z tych samych kolumn, wierszy i obu przekątnych otrzymujemy $2n+2$ sumy (kulki)

Z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy że co najmniej dwie sumy są takie same

6 Pokażę, że nie da się ułożyć 10 kolejnych liczb naturalnych od 1 na okręgu tak aby suma każdych trzech sąsiadujących liczb była mniejsza od 18.

$$\sum_{i=1}^{10} i = 55$$



Ustawmy liczbę 1 w dowolnym miejscu, bez straty ogólności załóżmy że w x_{10}.

Pozostaje do rozłożenia 9 liczb, których suma jest równa 54

Chcemy, żeby:

$$\begin{array}{rl} & x_1+x_2+x_3 < 18 \\ & x_4+x_5+x_6 < 18 \\ + & x_7+x_8+x_9 < 18 \\ \hline & x_1+x_2+\dots+x_9 < 54 \end{array}$$

Sprzeczność ponieważ $x_1+x_2+\dots+x_9 = 54$

Więc zawsze znajdą się kolejne 3 liczby na okręgu, których suma jest równa lub większa 18