1

gcd (a, b)

if (a i b parzyste)
  ret 2 · gcd ($\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$)
if (a nieparzyste i b parzyste)
  ret gcd (a, $\frac{b}{2}$)
if (a parzyste i b nieparzyste)
  ret gcd ($\frac{a}{2}$, b)
if (a i b nieparzyste)
  ret gcd ($\frac{(a-b)}{2}$, b)

← if (a = 0)
  ret b
if (b = 0)
  ret a

Euklides : log min (a, b)

GCD : $\Theta(\log a + \log b) = O(2 \log \max(a, b)) = O(\log \max(a, b))$

3 Otoczka wypukła P

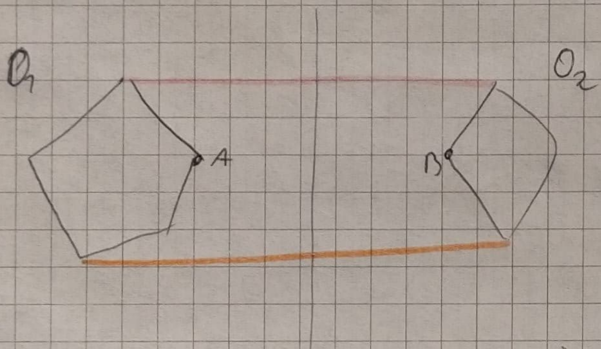
Podziel P na (prawie) równe zbiory P_1, P_2 („pionowa" kreska)

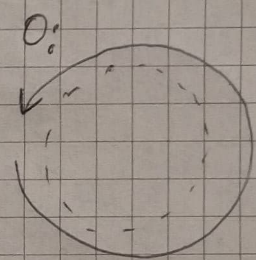
Znajdź otoczki dla P_1, P_2

Scal otoczki O_1, O_2

Scalanie:

Znajdziemy punkty w O_1 i O_2 które nie będą należały do otoczki O





Góra

Weźmy najbardziej prawy wierzchołek O_1 i nazwijmy go A
i najbardziej lewy wierzchołek O_2 i nazwijmy go B

Zakończ gdy (następnik i poprzednik A są po lewej stronie AB)^a i
(następnik i poprzednik B są po prawej stronie AB)^b

Jeżeli $\boxed{a}$ nie jest spełnione

Usuń A

A ← następnik A

Jeżeli $\boxed{b}$ nie jest spełnione

Usuń B

B ← poprzednik B

DoI

$A \leftarrow$ najbardziej prawy z O_1

$B \leftarrow$ najbardziej lewy z O_2

Zakończ gdy (następnik i poprzednik A są po prawej AB)^a i

(następnik i poprzednik B są po lewej AB)^b

Jeżeli a nie jest spełnione

Usuń A

$A \leftarrow$ poprzednik A

Jeżeli b nie jest spełnione

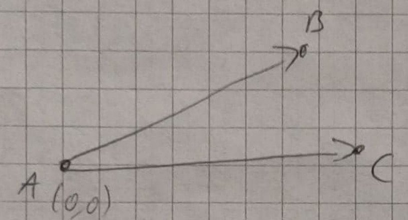
Usuń B

$B \leftarrow$ następnik B

3.1

Iloczyn wektorowy

$\vec{AB} \times \vec{AC}$

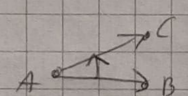


$\vec{AB} = [x_1, y_1] = [x_B - x_A , y_B - y_A]$

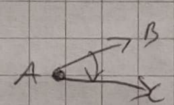
$\vec{AC} = [x_2, y_2] = [x_C - x_A , y_C - y_A]$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$

$\vec{AB} \times \vec{AC} > 0$ wtw



$\vec{AB} \times \vec{AC} < 0$ wtw



4 a) Między dwoma wierzchołkami istnieje dokładnie jedna ścieżka

Dla każdego wierzchołka v wykonaj DFS licząc odległości ~~od~~ do każdego wierzchołka

```
odległość(v) = 0
DFS(v)
v odwiedzony
dla każdego wierzchołka (sąsiada v) u
    jeżeli u nieodwiedzony
        odległość(u) = odległość(v) + krawędź(u, v)
        jeżeli odległość(u) == C
        licznik++;
        DFS(u)

Dla każdego wierzchołka v drzewa (T)
    DFS(v)
return licznik/2
```

$A_{n\times n}$

7 $\quad A[i,j] = A[i-1, j-1]$ dla $2 \leqslant i, j \leqslant n$

a)

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & \vdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_1, a_0, a_{-1}, \ldots a_{-(n-2)}, a_{-(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\| \quad A'_{(2\cdot n-1)\times 1}$$

b) załóżmy $n = 2^k$

wtedy

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}$$

gdzie A, B, C to macierze Toeplitza $n/2 \times n/2$

$$V_n = \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$X_{n/2}$, $Y_{n/2}$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{matrix} AX + BY \\ CX + AY \end{matrix}$$

Wyznaczamy pomocnicze macierze:

$U = (C+A)X$

$V = A(Y-X)$

$W = (B+A)Y$

$W - V = AX + BY$

$U + V = CX + AY$