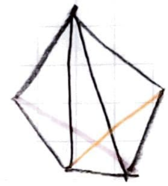
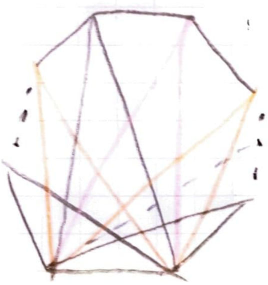
1

c_n - liczba możliwych podziałów dla $(n+2)$ kąta

$c_1 = 1$ $\qquad$ $c_2 = 2$ $\qquad$ $c_3 = 5 = c_0 c_2 + c_1 c_1 + \ldots$ $\qquad$ $c_0 = 1$





$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} c_0$ $\qquad$ ← liczby Catalana

Wybieramy jedną krawędź $(n+2)$-kąta i ~~po~~ traktujemy ją jako podstawę trójkąta, którego przeciwległy wierzchołek kładziemy w kolejnych wierzchołkach $(n+2)$-kąta. Tworzymy w ten sposób dwa wielokąty których suma liczby wierzchołków jest stała i trójkąt.

c_n - liczba możliwych drzew z n wierzchołkami wewnętrznymi

$c_1 = 1$  $c_2 = 2$ 

$c_3 = 5$ 

Korzeń jest wierzchołkiem wewnętrznym więc prawy i lewy syn muszą mieć w sumie $n-1$ wierzchołków wewnętrznych. Załóżmy, że lewy syn ma i wierzchołków wewnętrznych wtedy prawy syn ma $n-1-i$ wierzchołków wewnętrznych. Lewy syn może mieć i od 0 do $n-1$ wierzchołków wewnętrznych a każdy wybór tworzy nowe drzewo.

Wynika z tego że liczba takich drzew to $\sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i}$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i}$$ ← liczby Catalana

3 c_n - liczba możliwych uścisków dla n par

$n=1$ $n=2$ $n=3$

$c_1 = 1$ $c_2 = 2$ $c_3 = 5$

Z $2n$ osób wybieramy jedną. Ta osoba podaje rękę innej dbając o to aby po lewej i prawej „stronie uścisku" pozostała parzysta liczba osób. Wtedy te obie podgrupy będą się składały z „i" oraz $n-1-i$ par które będą sobie ściskały ręce niezależnie. Pierwsza osoba może podać rękę $n-1$ osobą.

Zatem

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i}$$ ← liczby catalana

5. $A(x)$ - funkcja tworząca ciągu $(0, 0, 1, 3, 7, 15, \dots)$

$B(x)$ - funkcja tworząca ciągu $(0, 1, 3, 7, 15, \dots)$

Z zadania 6 $B(x) = x^{-2} A(x)$

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \cdot (2^i - 1) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \cdot 2^i - x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i - \sum_{i=0}^{\infty} x^i =$$

$$= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

$$A(x) = x^{-2} B(x)$$

$$A(x) = x^{-2} \left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \right)$$

6

$b_n = (0, 0, 0, \dots, a_0, a_1, a_2, \dots)$

$a_i = b_{k+1}$ olha k zer

$$b_n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i}_{0} + \sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i =$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+k} x^{i+k} = x^k \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+k} x^i = x^k \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i =$$

$$= x^k A(x)$$

$c_n = (a_k, a_{k+1}, \dots)$ $\qquad c_i = a_{k+i}$

$$C(x) = a_k + x a_{k+1} + x^2 a_{k+2} + \dots$$

$$A(x) = a_0 + x a_1 + x^2 a_2$$

$$\frac{A(x) - (a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1})}{x^k} = \sum_{i=k}^{\infty} a_i x^{i-k} = C(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_{k+i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$