1

$$A(x) = (a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots)$$

$$B(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{1}{1-x}$$

$$A(x) \cdot B(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + \dots \cancel{a_n} +$$

$$+ a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots +$$

$$+ a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + a_3 x^5 + \dots +$$

$$+ \vdots$$

$$+ \vdots$$

$$+ a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + a_2 x^{n+2} + a_3 x^{n+3} + \dots =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} a_j \cdot x^i$$

widzimy, że przy $x^i$ stoi współczynnik $(a_0 + a_1 + \dots + a_i)$

Zatem funkcja tworząca $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ to:

$$A(x) \cdot B(x) \text{ czyli } \frac{A(x)}{1-x}$$

(1)

6. ~~X~~ k-elementowych ciągów składających się z 0 i 1 jest $2^k$

Skoro każdemu wierzchołkowi można przyporządkować ciąg (1) to $Q_k$ ma $\underline{2^k}$ wierzchołków

Z każdego wierzchołka wychodzi k krawędzi bo krawędziami są połączone ciągi różniące się na jednej pozycji (a mamy wszystkie ciągi z k pozycji każdy).

Każdą krawędź policzymy jednak dwa razy, bo weźmy

$v: q_1\ q_2\ q_3 \dots q_n \dots q_{k-1}\ q_k$

$u: q_1\ q_2\ q_3 \dots q'_n \dots q_{k-1}\ q_k$ gdzie $q_m$ $\forall_{m \le k}$ $q_m \in \{1, 0\}$ i $q_n \neq q'_n$

wtedy liczymy krawędź $(v,u)$ i $(u,v)$

Dlatego liczba krawędzi ~~X~~ grafu $Q_k$ wynosi $k \cdot 2^k : 2 = \underline{k \cdot 2^{k-1}}$

7. Zakładam, że grafy G i H są przedstawione w postaci listowej.

G:

$v_1 : u_1, u_2, \ldots$

$v_2 : \ldots$

$v_3 : \ldots$

$\vdots$

$v_n : \ldots u_m$

H:

$v_1' : u_1', u_2', \ldots$

$v_2' : \ldots$

$v_3' : \ldots$

$\vdots$

$v_n' : \ldots u_m'$

```
for (i=1; i≤n; i++)
    for (j=1; j ≤ deg(vi); j++)
        T[vi[j]] += 1
        l++
    for (j=1; j ≤ deg(vi'); j++)
        T[vi[j]] -= 1
        l--
        if (T[vi[j]] < 0)
            return false
        if l<0
            return false
    for (j=1; j ≤ deg(vi); j++)
        if (T[vi[j]] != 0)
            return false
return true
```

gdy w H jest więcej krawędzi

~~gdy deg $(v_i')$ deg $(v_i)$~~

gdy deg $(v_i') >$ deg $(v_i)$

gdy deg $(v_i') =$ deg $(v_i)$ lub deg $(v_i') <$ deg $(v_i)$ ale sąsiadami są różne wierzchołki

$O(m+n)$ bo

$$\begin{array}{r} 1 + \deg(v_1) \\ 1 + \deg(v_2) \\ \vdots \\ + \quad 1 + \deg(v_n) \\ \hline n + m \end{array}$$

8 $G = (V, E)$ Zakładam G skierowany

wierzchołki, krawędzie

a) stopień wierzchołka u

1. macierzowa : $O(|V|)$ musimy sprawdzić wszystkie ~~punkt~~ wierzchołki

2. listowa : $O(deg(u))$ zbieramy tylko sąsiadów wierzchołka u

b) przeglądnąć krawędzie

1. macierzowa : $O(|V|^2)$ sprawdzamy istnienie każdej krawędzi

2. listowa : $O(|E|)$ przeglądamy tylko istniejące krawędzie

c) sprawdzić czy $(u,v) \in G$

1. mac. $O(1)$ sprawdzamy zawartość konkretnej komórki macierzy

2 list $O(\cancel{|V|}\ deg(u))$ sprawdzamy wszystkich sąsiadów u

d) usunąć $(u,v)$ ~~1. mac~~

1. mac. $O(1)$ zmieniamy zawartość konkretnej komórki

2 list. $O(deg(u))$ przeglądamy wszystkich sąsiadów u

e) wstaw $(u,v)$ do G

1. mac. $O(1)$ zmieniamy zawartość konkretnej komórki

2. list. $O(1)$ wstawienie jednego elementu do wektora

Dla nieskierowanego G mamy dwa razy więcej operacji

co nie zmienia złożoności

10

W grafie $G$ istnieje droga z $u$ do $v$ (co najmniej jedna)

Weźmy najkrótszą drogę z $u$ do $v$ i załóżmy że nie jest ścieżką.

Mamy wtedy

$$S_1: \{u, a_1\}\{a_1, a_2\}\ldots\{a_k, c_1\}\underbrace{\{c_1, c_2\}\ldots\{c_{n-1}, c_n\}\{c_n, c_1\}}_{\text{cykl}}\{c_1, a_{k+1}\}\ldots\{a_m, u\}$$

Czyli możemy wziąć:

$$S_2: \{u, a_1\}\{a_1, a_2\}\ldots\{a_k, a_{k+1}\}\ldots\{a_m, u\}$$

$S_1$ miała być najkrótszą ścieżką a znaleźliśmy krótszą więc sprzeczność.

Wynika z tego że najkrótsza droga z $u$ do $v$ to ścieżka więc ścieżka z $u$ do $v$ w $G$ istnieje.