4

$21 \cdot 54$

$21_{(10)} = 10101_{(2)}$

$54_{(10)} = 110110_{(2)}$

a: 21 10 5 2 1

b: 54 108 216 432 864

$= 1134$

$a_1 = a$, $a_k = 1$, $a_{i+1} = \lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor$ (dla $i = 1, 2, \dots, k-1$)

$b_1 = b$, $b_{i+1} = 2b_i$ (dla $i = 1, 2, \dots, k-1$) $b_i = b \cdot 2^{i-1}$

$$w = \sum_{\substack{i=1 \\ i\text{-nieparzyste}}}^{k} b_i$$

Ciąg a_i odpowiada zapisowi dwójkowemu a gdzie nieparzyste a_i odpowiada 1 a parzyste 0

$$w = b \sum_{\substack{i=1 \\ a_i\text{-nieparzyste}}}^{k} 2^{i-1}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ a_i \text{ nieparzyste}}}^{k} 2^{i-1}$$ ← ~~a~~ konwersja a z systemu binarnego na dziesiętny

Pisemne mnożenie liczb binarnych

Kryterium jednorodne:

zł. cz.: $O(\log_2 a)$

zł. p.: $O(1)$

Kryterium logarytmiczne

zł. cz.: [illegible] $= O(\log_2 a \cdot \log_2 ab)$

zł. p.: $O(\log_2 a + \log_2 b)$

```
rus_mult (a, b)
    res = 0
    dopóki a > 0 :
        jeżeli a mod 2 == 1 :
            res = res + b
        a = a/2
        b = b·2
    return res
```

Logarytmiczne kryterium :

Suma :

$$\overbrace{\log_2 b + (\log_2 b + 1) + (\log_2 b + 2) + \ldots + \log_2 b + \log_2 a}^{\log_2 a + 1 \text{ razy}} =$$

$$= (\log_2 a + 1) \log_2 b + \frac{1 + \log_2 a}{2} \cdot \log_2 a =$$

$$= (\log_2 a + 1) \left(\log_2 b + \frac{\log_2 a}{2} \right) = \log_2 a \left(\log_2 b + \log_2 a + \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + 1 \right)$$

$$\Theta(\log_2 a \cdot \log_2 b \cdot a)$$

Dzielenie

$$\log_2 a + \log_2 a - 1 + \ldots + \log_2 a - (\log_2 a - 1) + 2\log_2 a =$$

$$= \frac{\log_2 a + \log_2 a - (\log_2 a - 1)}{2} \cdot \log_2 a + 2\log_2 a =$$

$$= \frac{\log_2 a + 1}{2} \cdot \log_2 a + 2\log_2 a$$

Mnożenie

$$\log_2 b + \log_2 b - 1 + \ldots + \log_2 b + \log_2 a - 1 + 2\log_2 a =$$

$$= \frac{2\log_2 b - 1 + \log_2 a}{2} \cdot \log_2 a + 2\log_2 a$$

Dzielenie + Mnożenie

$$\frac{\log_2 a + 1}{2} \cdot \log_2 a + 2\log_2 a + \frac{2\log_2 b - 1 + \log_2 a}{2} \cdot \log_2 a + 2\log_2 a =$$

$$= \log_2 a \, (\log_2 a + \log_2 b + 3{,}5) \in \Theta(\log_2 a \cdot \log_2 a \cdot b)$$

Całość : $\Theta(\log_2 a \cdot \log_2 a \cdot b)$

8

Weźmy ciąg wielomianów:

$W_0(x) = x$

$W_1(x) = (x-2)^2$

$\vdots$

$W_n(x) = (\dots((x-2)^2-2)^2\dots-2)^2 = (W_{n-1}(x)-2)^2$

Skoro interesuje nas współczynnik przy x^2 to wystarczy rozpatrywać współczynniki a_k, b_k, c_k tż.

$a_k x^2 + b_k x + c_k$

Wtedy dla

$k=0$:

$a_0 = 0,\ b_0 = 1,\ c_0 = 0$, bo $W_0(x) = x$

$k=1$:

$a_1 = 1,\ b_1 = -4,\ c_1 = 4$, bo $W_1(x) = x^2 - 4x + 4$

Interesują nas tylko trzy współczynniki a_k, b_k, c_k.
Tylko one są potrzebne do wyznaczenia $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$.
Wyznaczymy je rozwiązując:

$$(a_k x^2 + b_k x + c_k - 2)^2$$

$$(a_k x^2 + b_k x + c_k - 2)^2 = a_k^2 x^4 + b_k^2 x^2 + (c_k-2)^2 + 2a_k b_k x^3 + 2a_k x^2 (c_k-2) + \underbrace{+2b_k(c_k-2)x}_{} =$$

$$= x^4 a_k^2 + x^3(2a_k b_k) + x^2(\underbrace{b_k^2 + 2a_k c_k - 4a_k}_{a_{k+1}}) + x(\underbrace{2b_k c_k - 4b_k}_{b_{k+1}}) + (\underbrace{c_k^2 - 4c_k + 4}_{c_{k+1}})$$

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_k^2 - 2a_k c_k - 4a_k \\ b_{k+1} = 2b_k c_k - 4b_k \\ c_{k+1} = c_k^2 - 4c_k + 4 = (c_k - 2)^2 \end{cases}$$

$$c_1 = (c_0 - 2)^2 = (0-2)^2 = 4$$

$$c_2 = (c_1 - 2)^2 = (4-2)^2 = 4$$

$$\vdots$$

$$c_k = (c_{k-1} - 2)^2 = (4-2)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad c_k = 4$$

$$b_{k+1} = 2 \cdot 4 \cdot b_k - 4b_k = 4b_k$$

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = 4 = q$$ – ciąg geometryczny

$$b_0 = 1 \quad , b_1 = -4 \quad , b_k = -4^k$$

$$a_{k+1} = (4^k)^2 + 8a_k - 4a_k = 4^{2k} + 4a_k$$

$$\boxed{a_n = 4^{2(n-1)} + 4a_{n-1}}$$

W trakcie obliczeń modulo m

$$A \cdot \begin{bmatrix} a_k \\ 4^{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ 4^{2(k+1)} \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ 4^{2n} \end{bmatrix} \qquad n \geq 1$$