1. Załóżmy że w G istnieją dwa MST T i T´
Niech T zawiera krawędź o najmniejszej wadze. $e = \{v, u\}$

Wtedy T´ nie zawiera e, ale zawiera ścieżkę z v do u.

Jeżeli do T´ dodamy e to powstanie cykl c

c zawiera przynajmniej jedną krawędź, która nie należy do T, bo wpp. w T byłby cykl a T jest drzewem

Czyli cykl c zawiera przynajmniej jedną krawędź f która nie należy do T* i ma wagę większą od e.

Możemy usunąć krawędź f z T´ i powstanie T´´ o wadze mniejszej niż T´.

Sprzeczność bo T i T´ to MST

Czyli w G istnieje tylko jedno MST

2 Jeżeli z cyklu C w grafie G usuniemy dowolną krawędź to G pozostanie spójny, bo do każdego wierzchołka w C prowadzą dwie ścieżki.

Niech C składa się z krawędzi $e_0, e_1, \dots, e_n$ gdzie e_0 jest krawędzią o największej wadze

Usuwając e_i gdzie $i \in [1; n]$, $i \in \mathbb{N}$ otrzymamy część drzewa.

Ale nie będzie to MST bo możemy usunąć e_0 i otrzymać drzewo o mniejszej wadze.

Postępując w taki sposób, że z każdego cyklu z G usuwamy krawędź najcięższą otrzymamy MST dla G.

Więc MST dla G nie zawiera najcięższej krawędzi żadnego z cykli C w G

5 Algorytm Borurki w każdej iteracji łączy pewne spójne składowe

~~Dowód~~

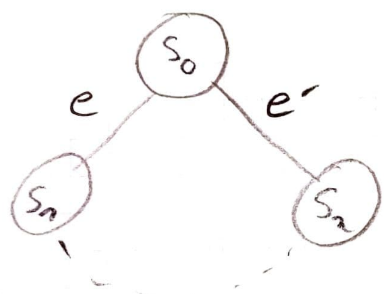
Pokażemy że w żadnej iteracji nie powstaje cykl.

Wiemy, że wszystkie krawędzie mają różne wagi.

Załóżmy, że w którejś iteracji powstał cykl c dla pewnych spójnych składowych $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n$. Czyli $c = \{s_0, s_1, \dots s_n, s_0\}$

Z algorytmu Borurki wiemy że $c(\{s_0, s_1\}) < c(\{s_1, s_2\}) < \dots < c(\{s_n, s_0\}) < c(\{s_0, s_1\})$

Czyli $c(\{s_0, s_1\}) < c(\{s_n, s_0\})$



$e = \{s_0, s_1\}$, $e' = \{s_0, s_n\}$

Skoro powstały krawędzie $\{s_0, s_1\}$ i $\{s_0, s_n\}$ to
$c(\{s_0, s_1\}) < c(\{s_0, s_n\})$ i $c(\{s_0, s_1\}) > c(\{s_0, s_n\})$

Sprzeczność

6 Żeby algorytm Boruvki działał gdy wagi krawędzi mogą być takie same, wprowadzimy ~~xx~~ funkcję nowej wagi $c': E \to R \geq 0$ oraz obowiązkowo będziemy indeksować wierzchołki kolejnymi liczbami naturalnymi.

c': dla krawędzi e_i, e_j

dla $c(e_i) < c(e_j)$ $\quad c'(e_i) < c'(e_j)$

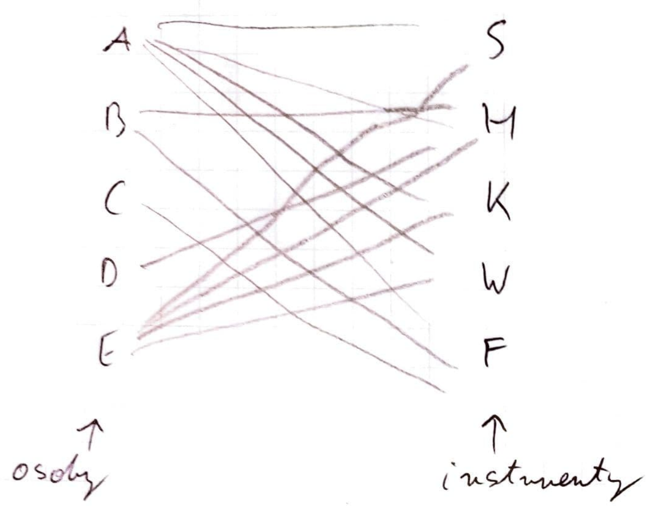
dla $c(e_i) = c(e_j)$ $\quad c'(e_{\min(i,j)}) < c'(e_{\max(i,j)})$

Przykład: $c(e_1) = 2$, $c(e_3) = 2$ $\Rightarrow$ $c'(e_1) < c'(e_3)$

Wtedy stosujemy algorytm Boruvki dla wag $c'(e_i)$ $(e_i \in G)$

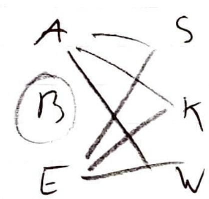
Dowód poprawności analogiczny jak w zadaniu 5

10 Graf osób i instrumentów jest dwudzielny



Zauważmy że ~~B~~ C i D grają tylko na pojedynczych instrumentach czyli musielibyśmy zagrać odpowiednio na F i H.

Zostaje zatem podgraf:



(*)

Widzimy że osoba B nie potrafi grać na żadnym z instrumentów S, K, W. Czyli nie uda im się zagrać

Graf dwudzielny G ~~jest~~ zawiera doskonałe skojarzenie ~~gdy~~ wtw. gdy spełniony jest warunek Halla.

Warunek Halla:

$\forall_{A' \subseteq A} \ |N(A')| \geq |A'|$ oraz $\forall_{B' \subseteq B} \ |N(B')| \geq |B'|$

~~Weźmy wierzchołki A, B, E, S, K, W~~

Weźmy wierzchołek B, wtedy $|N(B)| = 0$ i $|B| = 1$ czyli Warunek Halla nie jest spełniony.