L 6.4 PIOTR GUNIA

c)

I Sprawdzić $|T_n(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$; $n \geq 0$

$|\cos \alpha| \leq 1$

Mamy $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ więc $\alpha = n \arccos x$ czyli

$|T_n(x)| \leq 1$

II $|T_n(x)| = 1$ $|\cos \alpha| = 1$ wtw $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$n \arccos x = k\pi$

$\arccos x = \frac{k\pi}{n}$ $\frac{k\pi}{n} \in \langle 0, \pi)$ musimy ograniczyć

$0 \leq \frac{k\pi}{n} \leq \pi$ k bo $\arccos \alpha \in \langle 0, \pi)$

$\boxed{0 \leq k \leq n}$

$x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ gdzie $k \in \langle 0, n)$, $k \in \mathbb{Z}$

III

$T_{n+1}(x) = \cos((n+1) \arccos x) = 0$; $\cos \alpha = 0$ wtw $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$(n+1) \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\arccos x = \frac{2k+1}{2n+1} \pi$

$0 \leq \frac{2k+1}{2n+1} \pi \leq \pi$ bo $\arccos \in \langle 0, \pi)$

$0 \leq k \leq n$

$x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$ $k \in \langle 0, n)$

Zatem T_{n+1} ma $n+1$ miejsc zerowych rzeczywistych