1

a) wykazać $[a_n ; b_n] \supset [a_{n+1} , b_{n+1}]$ $(n = 0, 1, \ldots)$

weźmy dowolne n

mamy przedział $[a_n ; b_n]$

$m_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$; $m_{n+1} \in [a_n ; b_n]$

rozpatrzmy przypadki

1° $a_n \cdot m_{n+1} < 0$

wtedy otrzymujemy przedział $[a_n ; m_{n+1}]$ $m_{n+1} < b_n$

2° $b_n \cdot m_{n+1} < 0$

wtedy $[a_{n+1} ; b_{n+1}] = [m_{n+1} ; b_n]$ $a_n < m_{n+1}$

b)

dł $[a_n ; b_n]$

$$|a_n - b_n| = \left|\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}\right| = \left|\frac{a_{n-2} - b_{n-2}}{2^2}\right| = \left|\frac{a_{n-k} - b_{n-k}}{2^k}\right| = \left|\frac{a_0 - b_0}{2^n}\right|$$

c)

pokazać ; $|e_n| \leq 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$; $n \geq 0$

$$|\alpha - m_{n+1}| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \to \text{długość } [a_{n+1} ; b_{n+1}]$$

szukana wartość $\alpha \in [a_{n+1} ; b_{n+1}]$

środek przedziału $[a_n ; b_n]$

$m_{n+1} = a_{n+1} \vee m_{n+1} = b_{n+1}$

d) $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$

Tak gdy α bliskie b_0

2 Chcemy $\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \leqslant \varepsilon$; $\varepsilon > 0$

$$\frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon} \leqslant 2^n$$

$$\log_2 \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon} \leqslant \log_2 2^n$$

$$\log_2 \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon} \leqslant n$$

$$n = \left\lceil \log_2 \frac{b_0 - a_0}{2\varepsilon} \right\rceil$$