4

Iloczyn kolejnych k liczb naturalnych od a

$(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+k)$

$$\frac{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+k)}{k!}\cdot\frac{a!}{a!}=\frac{(a+k)!}{a!\,k!}=\binom{n+k}{k}$$

$\binom{n+k}{k}$ jest liczbą naturalną więc iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$

6

$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$; $a_0 = 2$, $a_n > 0$

$b_n = a_n^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{b_n}$

$b_n = 2b_{n-1} + 1$

$(E-2)(E-1)$

$b_n = \alpha 2^n + \beta$

$b_0 = a_0^2 = 4$

$b_1 = 9$

$\begin{cases} 4 = \alpha 2^0 + \beta = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 4 - \alpha \\ 9 = \alpha 2^1 + \beta \end{cases}$

$9 = 2\alpha + 4 - \alpha$

$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = -1 \end{cases}$

$b_n = 5 \cdot 2^n - 1$

$a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$

7

liczba wyrazów → a_n – ~~ciągi~~ wyrazy z n liter 25-cio literowego alfabetu z parzystą liczbą „a"

→ b_n – —— | | —— z nieparzystą liczbą „a"

$$a_n = 24 \cdot a_{n-1} + b_{n-1}$$

od wyrazu a_{n-1} możemy dopisać 24 litery

od wyrazu b_{n-1} musimy dopisać „a"

$$a_n = 24 \cdot a_{n-1} + \left(25^{n-1} - a_{n-1}\right) = \cancel{23 a_{n-1} + 25}$$

$$= 23 a_{n-1} + 25^{n-1}$$

$$(E-23)(E-25)$$

$$a_n = \alpha 23^n + \beta 25^n$$

$$a_1 = 24$$

$$a_2 = 24^2 + 1 = 577$$

$$\begin{cases} 24 = \alpha 23 + \beta 25 \Rightarrow 552 = \alpha 529 + 575\beta \\ 577 = \alpha 23^2 + \beta 25^2 \Rightarrow 577 = \alpha 529 + 625\beta \end{cases} -$$

$$25 = 50\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$24 = \alpha 23 + \frac{25}{2}$$

$$48 = 46\alpha + 25$$

$$23 = 46\alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cancel{a_n = \frac{23}{2}}$$

$$a_n = \frac{1}{2} 23^n + \frac{1}{2} 25^n = \frac{1}{2}\left(23^n + 25^n\right)$$

9

$c_0 = 1$

c_n - ciąg prawidłowy
d_n - ciąg prawidłowy z 0 na końcu
e_n - " " z 1 na końcu
f_n - " " z 2 na końcu

liczba ciągów ... 0 ... 1 ... 2

$c_n = d_n + e_n + f_n$

$d_n = e_{n-1} + f_{n-1}$

$e_n = d_{n-1} + f_{n-1}$

$f_n = d_{n-1} + e_{n-1} + f_{n-1} = c_{n-1}$

$d_1 = e_1 = f_1 = 1, \; c_1 = 3 \qquad c_2 = 7, \; d_2 = e_2 = 2, \; f_2 = 3$

$c_n = d_n + e_n + f_n = e_{n-1} + f_{n-1} + d_{n-1} + f_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1} + f_{n-1} =$

$= 2d_{n-1} + 2e_{n-1} + 3f_{n-1} = 2c_{n-1} + f_{n-1} = 2c_{n-1} + c_{n-2}$

$c_n = 2c_{n-1} + c_{n-2}$

$(E^2 - 2E - 1) \qquad \Delta = 8 \quad x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{2}$

$(E - (1+\sqrt{2}))(E - (1-\sqrt{2}))$

$c_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$

$\begin{cases} c_0 = 1 = \alpha + \beta \\ c_1 = 3 = \alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ \beta = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$c_n = \frac{\sqrt{2}+1}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{2} + \frac{(1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$

$c_n = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right)$

10

a) A dostała przynajmniej jedną nagrodę

$$4^n - 3^n$$

wszystkie rozdania

rozdania gdzie A nic nie dostaje

b) A lub B nic nie dostała

$$3^n + 3^n - 2^n$$

A nic nie dostała

B nic nie dostała

A i B nic nie dostały

c) A i B coś dostały

$$4^n - (3^n + 3^n - 2^n)$$

wszystkie rozdania

z b)

d) Przynajmniej jedna z A, B, C nic nie dostała

$$\underset{A}{3^n} + \underset{B}{3^n} + \underset{C}{3^n} - \underset{A i B}{2^n} - \underset{B i C}{2^n} - \underset{C i A}{2^n} + \underset{A i B i C}{1^n}$$

nic nie dostały

e) Każda coś dostała

$$4^n - (4 \cdot 3^n - 6 \cdot 2^n + 4 \cdot 1^n - 0)$$

wszystkie rozdania

jedna z czterech osób nic nie dostała

sześć dwójek

cztery trójki

czwórka