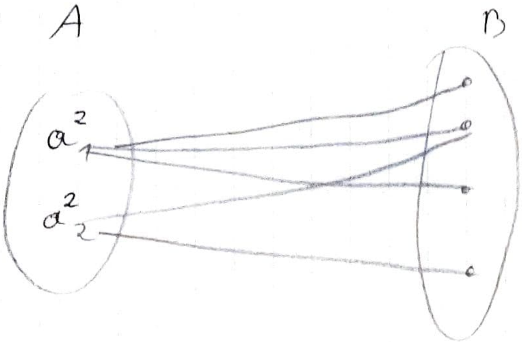
3



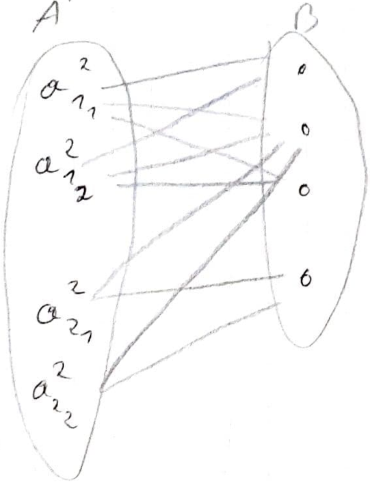
A - zbiór „mężczyzn"

B - zbiór „kobiet"

a_i^j : i - numer osoby

j - n_{a_i} liczba osób, które chce poślubić

Tworzymy A' klonując każdą z osób ze zbioru A j razy



Teraz aby problem był rozwiązywalny należy znaleźć skojarzenie doskonałe między A' i B.

Z warunku Halla wynika takie skojarzenie istnieje wtw. gdy $|N(A'')| \geq |A''|$, $A'' \subseteq A'$.

Jest to zatem warunek konieczny i wystarczający do rozwiązania tego problemu

5 Graf w postaci listy sąsiadów $G = (V, E)$

$S \leftarrow \{s\}$, $d(s) \leftarrow 0$

dla każdego sąsiada v wierzchołka s:

$t(v) \leftarrow c(s, v)$

dla pozostałych wierzchołków

$t(v) \leftarrow \infty$

dopóki $S \neq V$:

$u \leftarrow \operatorname{argmin} \{ t(u) : u \notin S \}$

dodaj u do S

zaktualizuj $t(v)$:

dla każdego sąsiada $v \notin S$ wierzchołka u:

$t(v) \leftarrow \min \{ t(v), d(u) + c(u, v) \}$

$v \longrightarrow u$ u jest sąsiadem dla v

ale

v nie jest sąsiadem dla u

6

Dla drogi:

jeden wierzchołek ma różnicę między liczbą krawędzi wchodzących i wychodzących 1 i jeden wierzchołek -1 czyli istnieje co najwyżej jeden v_i t. że $|wch| - |wych| = 1$ i v_j t. że $|wych| - |wch| = 1$

a pozostałe mają taką samą liczbę krawędzi wchodzących i wychodzących

Dla cyklu:

Każdy wierzchołek ma taką samą liczbę krawędzi wchodzących i wychodzących

Algorytm: $G = (V, E)$

Weź dowolny wierzchołek s

1 DFS(s) do gdy musisz się cofnąć (nie ma krawędzi wychodzącej)

Dodaj wierzchołek w którym jesteśmy na początek wynikowej listy S

Cofnij się do poprzedniego wierzchołka v

jeżeli jest to s to zwróć S i zakończ

wpp 1 z tym że wywołując DFS(v)

8

Weźmy graf $G=(V,E)$ w którym każdy wierzchołek ma stopień 3

Weźmy najdłuższą ścieżkę w G $v_0, v_1, \dots, v_n$ nazwijmy ją P

Skoro każdy wierzchołek ma stopień 3 to istnieją ~~v_0v_i, v_0v_j~~ i, j

takie że $2 \le i < j \le n$ i $v_0v_i, v_0v_j \in E(G)$

Skoro P jest najdłuższa to $v_i, v_j \in P$

Bo wpp P nie byłaby najdłuższą ścieżką

$$\begin{matrix} v_i \\ v_j \end{matrix} - \overbrace{v_0 - v_1 - \dots - v_n}^{P}$$

$$v_0 - v_1 - \dots - v_i - \dots - v_j - \dots - v_n$$

Rozpatrzmy dwa przypadki

1° i lub j jest nieparzyste

Załóżmy że i jest nieparzyste

Wtedy istnieją dwie ścieżki z v_0 do v_i, jedna długości 1 a druga długości nieparzystej

Czyli istnieje cykl długości parzystej.

Analogicznie gdy j jest nieparzyste

2° i oraz j są parzyste

Wtedy istnieje ścieżka długości $j-i$ między v_i i v_j

gdzie $j-i$ jest parzyste

Ponadto istnieją krawędzie v_0v_i, v_0v_j

Możemy więc stworzyć cykl $v_0 - v_i - \dots - v_j - v_0$ o długości $j-i+2$ parzystej

10

Niech kwadrat łaciński będzie reprezentowany przez

$G = (K \cup L, E)$; K - zbiór kolumn, L - zbiór liczb
$k_1, k_2, \dots, k_n$, $1, 2, \dots, m$

Krawędź $k_i - j$ istnieje, jeżeli liczba j nie znajduje się w kolumnie k_i

Żeby dodać wiersz musimy znaleźć skojarzenie doskonałe w G.

Możemy zauważyć, że każdy wierzchołek ma $n-m$ krawędzi

Więc dla każdego $K' \subseteq K$ $|N(K')| \geqslant |K'|$
i dla każdego $L' \subseteq L$ $|N(L')| \geqslant |L'|$

Czyli spełniony jest warunek Halla, który gwarantuje istnienie skojarzenia doskonałego