ZADANIE 1

Dwie ostatnie cyfry iloczynu dwóch liczb otrzymamy przez mnożenie ostatnich dwóch cyfr czynników.

$71^0 = 1$, $71^1 = 71$, $71^2 = 5041$, 71^3

$$\begin{array}{r} 41 \\ \cdot\ 71 \\ \hline 41 \\ +\ 287\ \ \\ \hline 2911 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ \cdot\ 71 \\ \hline 11 \\ +\ 77\ \ \\ \hline 781 \end{array} = 71^4 \pmod{100}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \cdot\ 71 \\ \hline 81 \\ +\ 567\ \ \\ \hline 51 \end{array} = 71^5 \pmod{100} \qquad \begin{array}{r} 51 \\ \cdot\ 71 \\ \hline 51 \\ +\ 357\ \ \\ \hline 21 \end{array} = 71^6 \pmod{100} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ \cdot\ 71 \\ \hline 21 \\ +\ 147\ \ \\ \hline 91 \end{array} = 71^7 \pmod{100}$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \cdot\ 71 \\ \hline 91 \\ 637\ \ \\ \hline 61 \end{array} = 71^8 \pmod{100} \qquad \begin{array}{r} 61 \\ \cdot\ 71 \\ \hline 61 \\ +\ 427\ \ \\ \hline 31 \end{array} = 71^9 \pmod{100} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \cdot\ 71 \\ \hline 31 \\ +\ 217\ \ \\ \hline 01 \end{array} = 71^{10} \pmod{100}$$

$$\begin{array}{r} 01 \\ \cdot\ 71 \\ \hline 01 \\ +\ 7\ \ \\ \hline 71 \end{array} = 71^{11} \pmod{100}$$

Zauważamy że dwie ostatnie cyfry kolejnych potęg 71 tworzą cykl 10 elementowy

$71 \equiv 1 \pmod{10}$ czyli dwie ostatnie cyfry liczby 71^{71} są
$1 \equiv 1 \pmod{10}$ takie same jak 71^1 czyli $\underline{71}$

ZADANIE 2

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{13} \end{cases}$$

$t, u, w \in \mathbb{N}$

Z pierwszej kongruencji:

$x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x = 5t + 2$

Z drugiej kongruencji

$5t + 2 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 5t \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 50t \equiv 10 \pmod{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow t = 7u + 3$

$x = 5(7u + 3) + 2 = 35u + 17$

Z trzeciej kongruencji:

$35u + 17 \equiv 4 \pmod{13}$

$35u \equiv 0 \pmod{13}$

$u \equiv 0 \pmod{13}$

$u = 13w$

$x = 35 \cdot 13w + 17 = 455w + 17 \Rightarrow x = 17$

Możemy sprawdzić:

$17 \equiv 2 \pmod{5}$ PRAWDA

$17 \equiv 3 \pmod{7}$ PRAWDA

$17 \equiv 4 \pmod{13}$ PRAWDA

ZADANIE 8

Z algorytmu Euklidesa wiemy że dla $b > a$

$$NWD(a, b) = NWD(a, b-a)$$

Więc dla ciągu Fibbonacciego mamy

$$NWD(F_n, F_{n+1}) = NWD(F_n, F_{n+1} - F_n) \overset{*}{=}$$

Gdzie F_n - n-ty wyraz ciągu Fibonacciego

Wiemy, że: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n \in N$ $n \geq 2$, $F_1 = F_2 = 1$

$$\Downarrow$$

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$$

$$\overset{*}{=} NWD(F_n, F_{n-1}) = NWD(F_{n-2}, F_{n-1}) = \dots = NWD(F_1, F_2) = 1$$

W ten sposób osiągamy $NWD(F_1, F_2) = NWD(1, 1) = 1$

Skoro korzystaliśmy z algorytmu Euklidesa to wiemy że:

$NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$

Więc F_n, F_{n+1} są względnie pierwsze

ZADANIE 9

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 10^3 + \ldots + a_n 10^n$$

$$a \equiv 0 \pmod{11}$$

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 10^3 + \ldots + a_n 10^n \equiv 0 \pmod{11}$$

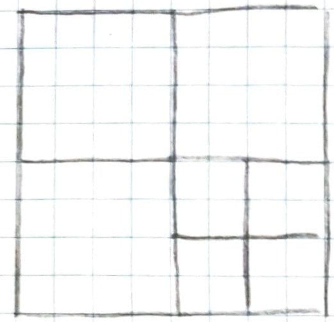
$$10 \equiv -1 \pmod{11}$$

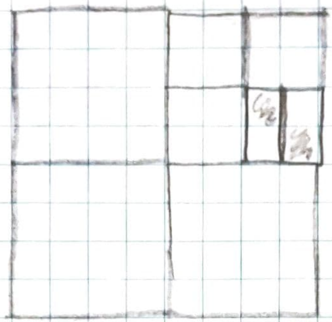
$$a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 + a_4(-1)^4 + \ldots + a_n(-1)^n \equiv 0 \pmod{11}$$

$$a = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} a_{2i} \equiv 0 \pmod{11}$$

ZADANIE 10

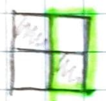
Szachownica 8×8 składa się z czterech szachownic 4×4, które składają się z czterech szachownic 2×2.





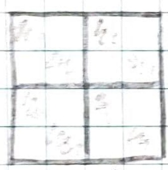
← oczywisty sposób pokrycia szachownicy

Rozważmy szachownice 2×2



Jeżeli wyjmiemy jedno pole białe i jedno czarne wtedy pozostałe dwa pola możemy pokryć kostką domina. Wszystkie możliwości otrzymujemy przez obrót.

Rozważmy szachownicę 4×4



Mamy trzy przypadki:

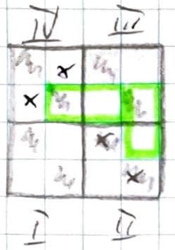
1° Wyjmujemy pola z tej samej ćwiartki.
Wtedy problem sprowadza się do szachownicy 2×2, pozostałe ćwiartki pokrywamy w oczywisty sposób.

2° Wyjmujemy pola z „sąsiadujących" ćwiartek
Bez straty ogólności możemy rozważać ćwiartki II i III oraz założyć że z II ćwiartki usuwamy czarne pole a z III białe

Wtedy przy granicy w II ćwiartce możemy wybrać białe pole a w III ćwiartce sąsiadujące czarne pole i pokryć je kostką.

Wtedy problem sprowadza się do szachownicy 2×2 a pozostałe ćwiartki pokrywamy w oczywisty sposób

3° Wyjmujemy pola z ćwiartek „po przekątnej" (I, III lub II, IV)



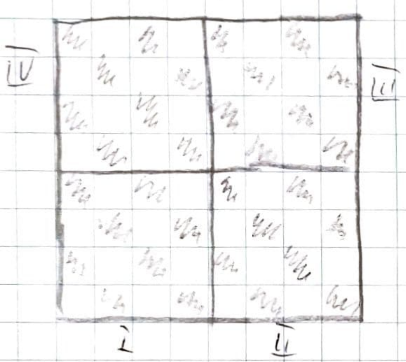
Bez straty ogólności zakładamy, że z IV ćwiartki wyjmujemy białe pole a z II czarne.

Wtedy przy granicy w IV ćwiartce możemy wybrać czarne pole, po drugiej stronie (w III ćwiartce) białe pole i pokryć je kostką. Następnie możemy wybrać czarne pole w III ćw. przy granicy z II ćw. i przylegające białe w II ćw.

Wtedy problem sprowadza się do szachownic 2×2.

Pozostałe przypadki otrzymujemy przez obroty i symetrie.

Rozważmy szachownicę 8×8



Sytuacja jest analogiczna jak dla szachownicy 4×4

Mamy trzy przypadki:

1° Pola w jednej ćwiartce sprowadza się wprost do szachownicy 4×4

Pozostałe ćwiartki pokrywamy w sposób oczywisty

2° „Przylegające" ćwiartki

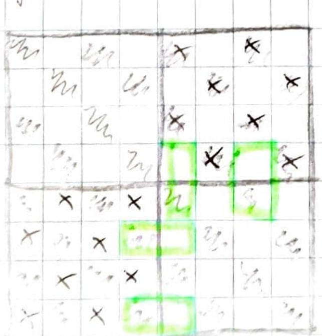
Analogicznie jak w 4×4 pokrywamy pola przy granicy i sprowadzamy problem do szachownicy 4×4

Z I ćw wyjmujemy białe pole

3° ćwiartki „po przekątnej"

Jak w 4×4

Z I ćw białe

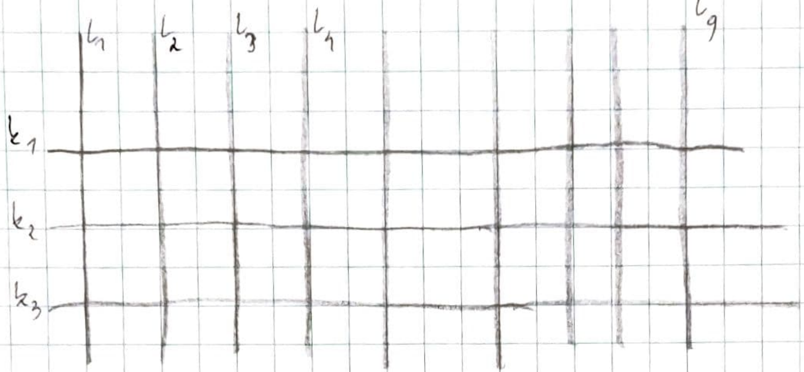


Pozostałe przypadki otrzymujemy przez obroty i symetrie.

W każdym przypadku po wyjęciu jednego pola białego i jednego czarnego możemy pokryć resztę kostkami domina

ZADANIE 11

Wybierzmy trzy proste równoległe oraz dziewięć prostych prostopadłych do nich.



Rozpatrujemy punkty przecięcia na prostych l_n ($n \in [1;9]$, $n \in N$)
Każdy punkt ma jeden z dwóch kolorów p lub s otrzymujemy więc $2^3 = 8$ możliwych układów.

Z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy że układ punktów na dwóch prostych l_i oraz l_j jest taki sam ($i,j \in [1;9]$; $i,j \in N$)

Z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy również że ~~na~~ dwa rozpatrywane punkty na prostej l_i oraz l_j mają taki sam kolor.

Wybierając te punkty tworzymy prostokąt o czterech wierzchołkach tego samego koloru.