DFS

1 Pierwszy wierzchołek oznaczamy „1”, oznaczamy jako odwiedzony

2 Przechodzimy do jego sąsiada i oznaczamy „0”, oznaczamy jako odwiedzony

3 Sprawdzamy czy sąsiad jest odwiedzony

a) Tak ; sprawdzamy oznaczenie

a_1) ma takie samo oznaczenie („0”, „1”) - graf nie jest dwudzielny - Koniec
bo posiada cykl o nieparzystej długości

b_2) ma inne oznaczenie - wykonujemy dla niego punkt 3

b) Nie : oznaczamy go inaczej (0→1, 1→0), jako odwiedzony i wykonujemy punkt 3

4 Jeżeli wierzchołek nie ma nieodwiedzonych sąsiadów wracamy rekurencyjnie

5 Jeżeli wszystkie wierzchołki są odwiedzone to graf jest dwudzielny

Jeżeli graf nie jest spójny należy zastosować algorytm dla wszystkich spójnych składowych

3 G jest drzewem $\iff$ $\forall_{u,v \in G}$ istnieje dokładnie jedna ścieżka między u,v

$\Rightarrow$

Zał.: G jest drzewem $\Rightarrow$ G jest spójny , G nie ma cykli

$\Downarrow$

Istnieje co najmniej jedna ścieżka z u do v

$\Downarrow$

Jeżeli istniałyby co najmniej dwie ścieżki z u do v to tworzyłyby cykl w G.

Sprzeczność z zał.

$\Downarrow$

Istnieje dokładnie jedna ścieżka z u do v

$\Leftarrow$

Zał.: $\forall_{u,v \in G}$ istnieje dokładnie jedna ścieżka z u do v

a) Skoro dla każdego $u,v \in G$ istnieje ścieżka to graf G jest spójny

b) Skoro dla każdego $u,v \in G$ istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca to G nie zawiera cykli

$\left.\begin{matrix} a) \\ b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ G jest drzewem

6

Graf Q_k możemy podzielić na dwa zbiory:

P - wierzchołki zawierają parzystą liczbę jedynek, jeśli należą do P

N - wierzchołki zawierają nieparzystą liczbę jedynek, jeśli należą do N

W Q_k wierzchołki są sąsiadujące gdy różnią się na dokładnie jednej pozycji.

1° $u \in P$ wtedy wszyscy sąsiedzi u mają nieparzystą liczbę jedynek ponieważ mamy dwie możliwości. W u zamieniamy 0 na 1 lub 1 na 0 aby otrzymać sąsiada u ma $2n$ $(n \in \mathbb{N})$ jedynek a sąsiedzi $2n+1$ lub $2n-1$ więc należą do N

2° $u \in N$ wtedy wszyscy sąsiedzi u mają parzystą liczbę jedynek bo mamy dwie możliwości. W u zamieniamy 0 na 1 lub 1 na 0 aby otrzymać sąsiada. u ma $2n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ ~~trawęotri~~ jedynek więc jego sąsiedzi $2n$ lub $2n+2=2(n+1)$ czyli parzystą liczbę więc należą do P

8

Weźmy dwie najdłuższe ścieżki w grafie G:

D_1 długości k

D_2 długości l

Załóżmy nie wprost że nie mają one wspólnego wierzchołka.

Weźmy dowolny wierzchołek $d_1 \in D_1$ i $d_2 \in D_2$.

Z d_1 do d_2 istnieje ścieżka długości co najmniej 1

Weźmy d_k - koniec ścieżki D_1 ~~dłuższej dwa większej długości od d_1~~ bardziej odległy od d_1 (lub równo odległy)

Analogicznie weźmy d_l dla ścieżki D_2

Mamy zatem

długości ścieżki

$$|d_1 - d_k| \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$$

$$|d_2 - d_l| \geq \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$$

Wtedy ścieżka z d_k do d_l ma długość $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1 = m$

Widzimy że $m > \min(k, l)$

Mamy sprzeczność bo k, l to najdłuższe ścieżki w G

Więc D_1 i D_2 mają wspólny wierzchołek

9

Pokażemy że gdy G nie jest spójny to $\bar{G}$ jest

Weźmy dowolne wierzchołki $u,v \in V$ i rozpatrzmy przypadki

1° u,v należą do tej samej spójnej składowej z G

skoro G nie jest spójny to istnieje inna spójna składowa zawierająca co najmniej jeden wierzchołek w

Wtedy $\{u,v\} \in E \Rightarrow \{u,v\} \notin E'$

Ale $(\{u,w\} \notin E \Rightarrow \{u,w\} \in E') \land (\{v,w\} \notin E \Rightarrow \{v,w\} \in E')$

Więc istnieje ścieżka u,w,v w $\bar{G}$ więc $\bar{G}$ jest spójny

2° u,v należą do różnych spójnych składowych z G

Wtedy $\{u,v\} \notin E \Rightarrow \{u,v\} \in E'$

Więc $\bar{G}$ jest spójny

Czyli jeżeli G nie jest spójny to $\bar{G}$ jest

Dowód twierdzenia: „jeżeli $\bar{G}$ nie jest spójny to G jest” jest analogiczny gdzie ~~zał~~ założenia czynimy wobec $\bar{G}$ a wnioski dla G