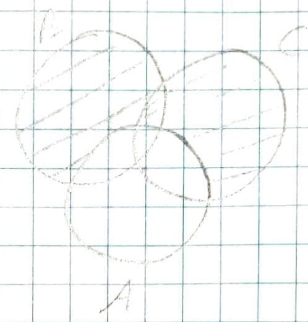
2

$A = \{n : 7 | n,\ n \in \mathbb{N},\ n \leq 800\}$

$B = \{n : 6 | n,\ n \in \mathbb{N}\ \ n \leq 800\}$

$C = \{n : 8 | n,\ n \in \mathbb{N}\ \ n \leq 800\}$



$|B| + |C| - |B \cap A| - |C \cap A| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = *$

$|B| = \lceil 800 : 6 \rceil = 134$

$|C| = \lceil 800 : 8 \rceil = 100$

$|B \cap A| = \lceil 800 : 42 \rceil = 20$ $\qquad$ $NWW(7, 6) = 42$

$|C \cap A| = \lceil 800 : 56 \rceil = 15$ $\qquad$ $NWW(7, 8) = 56$

$|B \cap C| = \lceil 800 : 24 \rceil = 34$ $\qquad$ $NWW(6, 8) = 24$

$NWW(6, 7, 8) = 168$ $\qquad$ $|A \cap B \cap C| = \lceil 800 : 168 \rceil = 5$

$* = 134 + 100 - 20 - 15 - 34 + 5 = \underline{\underline{170}}$

3

Wszystkie możliwe ustawienia X

$$|X| = \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = 36 \cdot 35 = 1260$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ c & b \end{array}$$

$|Y|$ – „dobre" ustawienia Y' – istnieje blok

$$|Y| = |X| - |Y'|$$

1° „a"

Blok ~~A~~ aaaa możemy ustawić w 6 miejscach pozostałe litery możemy ułożyć na $\binom{5}{2}$ sposobów
$\uparrow$ c

$$|A| = \cancel{}\, 6 \cdot \binom{5}{2} = 60$$

2° „b"

7 miejsc $\binom{6}{2}$ – rozłożenie reszty

$$|B| = 7 \cdot \binom{6}{2} = 105$$

3° „c"

$$|C| = 8 \cdot \binom{7}{3} = 280$$

4° „a, b" A, B, c, c 4! ale c jest nierozróżnialne więc

~~A~~ $4! \cdot \frac{1}{2!} = 12$

5° „a, c" A, C, b, b, b

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

6° „b, c" B, C, a, a, a, a

$$\frac{6!}{4!} = 30$$

7° „a, b, c" A, B, C $3! = 6$

$$|Y'| = 60 + 105 + 280 - 12 - 20 - 30 + 6 = 389$$

$$|Y| = 1260 - 389 = \underline{\underline{871}}$$

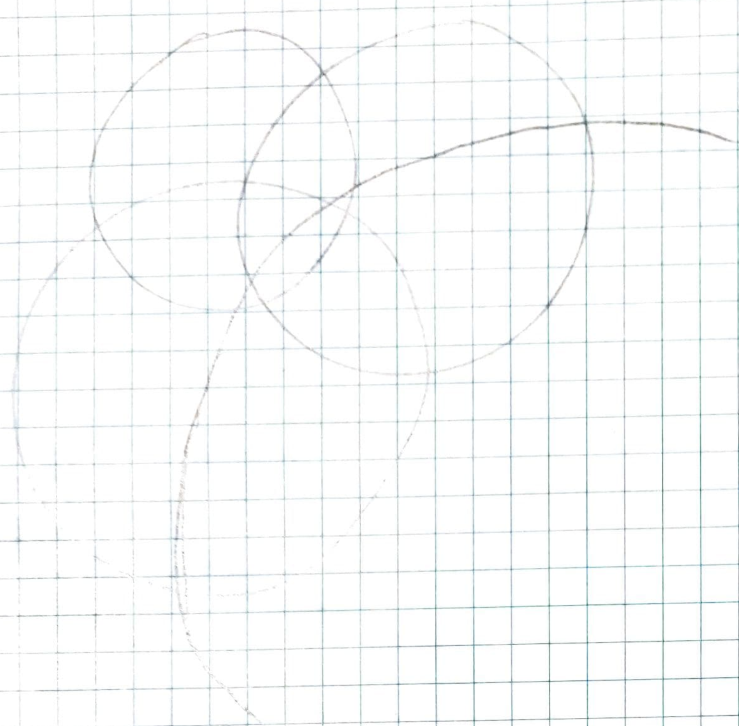
6 Z wykładów wiemy, że klasyczna wieża Hanoi może być ułożona w $2^n - 1$ ruchów

Podwójna wieża Hanoi ma dwa klocki tego samego rozmiaru czyli ~~takich~~ przenosimy dwa klocki o takim samym rozmiarze.

W związku z tym wykonamy dwa razy więcej ruchów czyli

$$2(2^n - 1) = \underline{\underline{2^{n+1} - 2}}$$

7



~~Ile punktów~~

Ile punktów przecięć mają kolejne okręgi?

okrąg		przecięć
1	-	0
2	-	2
3	-	4
4	-	6
⋮		⋮
n	-	$2n-2$

Każdy punkt przecięcia tworzy dodatkowy obszar

Czyli $A(n)$ - liczba obszarów dla n okręgów

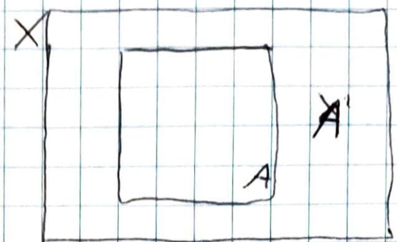
~~$A(1)=1$~~

$$\begin{cases} A(1) = 0 \\ A(n) = A(n-1) + 2n - 2 \end{cases} ; n > 1, n \in \mathbb{N}$$

11

X - na ile sposobów można zaprosić po trzy osoby przez 7 tygodni

$$|X| = \binom{7}{3}^7$$



A - zbiór z zadania

A' - jakaś osoba nie była zaproszona ani razu

$$|A| = |X| - \left|\bigcup_{i=1}^{7} B_i\right|$$

B_i - ita osoba nie została zaproszona

$$\left|\bigcup_{i=1}^{7} B_i\right| = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{L \subseteq \{1,2,\dots,7\} \\ |L| = k}} \left|\bigcap_{i \in L} B_i\right|$$

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{7} B_i\right| = {} & |B_1| + |B_2| + |B_3| + \dots + |B_7| \\ & - |B_1 \cap B_2| - \dots - |B_6 \cap B_7| \\ & + |B_1 \cap B_2 \cap B_3| + \dots + |B_5 \cap B_6 \cap B_7| \\ & \vdots \\ & + |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_7| \end{aligned} \qquad (*)$$

$|B_1| = |B_2| = \dots = |B_7| = \binom{6}{3}^7$ $\to$ 7 opcji

$|B_1 \cap B_2| = \dots |B_6 \cap B_7| = \binom{5}{3}^7$ $\to$ $\binom{7}{2}$ opcji

$|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = \dots = |B_5 \cap B_6 \cap B_7| = \binom{4}{3}^7$ $\to$ $\binom{7}{3}$ opcji

$|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4| = \dots = |B_4 \cap B_5 \cap B_6 \cap B_7| = \binom{3}{3}^7$ $\to$ $\binom{7}{4}$ opcji

$|B_1 \cap \dots \cap B_5| = \dots = |B_3 \cap \dots \cap B_7| = 0$

|6 elem| $= 0$

|7 elem| $= 0$

$(*)$ $\left|\bigcup_{i=1}^{7} B_i\right| = 7 \cdot \binom{6}{3}^7 - \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3}^7 + \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 - \binom{7}{4}\binom{3}{3}^7$

$$|A| = |X| - \left|\bigcup_{i=1}^{7} B_i\right|$$