4 Weźmy dowolny graf $G=\{V,E\}$ i jego kolorowanie wykorzystujące k kolorów

Pokażemy, że $|E| \geq \frac{k}{2}(k-1)$

Kolory oznaczymy liczbami naturalnymi $1, 2, \ldots, k$

Przy ustawieniu wierzchołków w sekwencji i-ty wierzchołek będzie miał kolor ~~co najwyżej~~ dokładnie n jeżeli przed nim w sekwencji występują wierzchołki pokolorowane kolorami $1, \ldots, n-1$ i do każdej z grup istnieje krawędź z i-tego wierzchołka.

Uszeregujmy wierzchołki rosnąco względem kolorów w grupy jednokolorowe

Algorytm sekwencyjny rozpatruje tylko pokolorowanych sąsiadów, czyli lewe krawędzie

Widzimy, że z każdej i grupy kolorów wychodzi co najmniej $i-1$ lewych krawędzi

Więc wszystkich krawędzi jest:

$$|E| \geq \sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{k}{2}(k-1)$$

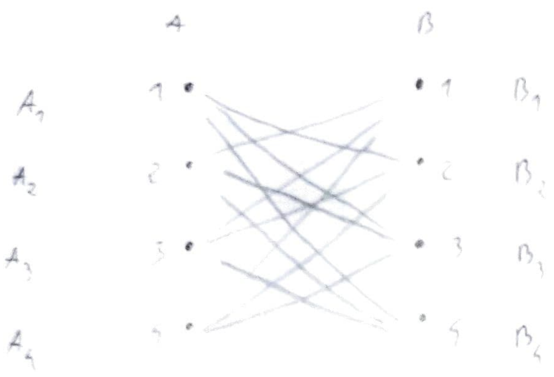
Skoro $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną, to $\chi(G) \leq k$

wpp $\chi(G)$ nie jest liczbą chromatyczną, bo kolorowanie na k kolorów jest poprawne a $k < \chi(G)$

Więc mamy $\chi(G) \leq k$ i $\frac{k}{2}(k-1)$

Stąd $\frac{\chi(G)\,(\chi(G)-1)}{2} \leq \frac{k(k-1)}{2} \leq |E|$

6 $G = \{ A \cup B , E \}$



$A_1 B_1 \quad A_2 B_2 \quad A_3 B_3 \quad A_4 B_4$

Konstrukcja grafu :

każdy wierzchołek A_i ma krawędź do każdego z wierzchołków $B_1, \ldots, B_{i-1}$

analogicznie każdy wierzchołek B_i ma krawędź do każdego wierzchołka $A_1, \ldots, A_{i-1}$

Uporządkowanie :

Kolorujemy naprzemiennie wierzchołki z A i z B o kolejnych indeksach

$A_1 \; B_1 \; A_2 \; B_2 \; \ldots \; A_n \; B_n$

Każdy wierzchołek o indeksie i będzie pokolorowany kolorem i

Więc kolorując wierzchołek $i+1$ musimy mu nadać kolor $i+1$ ponieważ

ma on krawędzie do wierzchołków o indeksach $1, \ldots, i$

8 Weźmy graf $G = \{V, E\}$ gdzie V – zbiór uczniów $|V| = 2n$

E – krawędź istnieje między przyjaciółmi

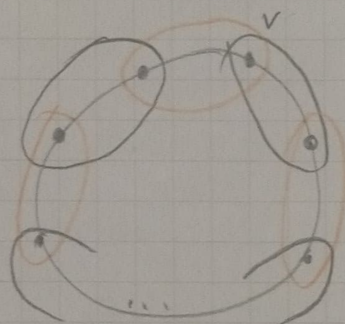
Dla $n > 1$ mamy

$|V| \geq 4 \geq 3$

Z treści zadania stopień każdego wierzchołka to $n = \frac{|V|}{2}$

Zatem z twierdzenia Diraca wiemy, że G zawiera cykl Hamiltona.

Liczba wierzchołków jest parzysta ($2n$)



Zaczynając od dowolnego wierzchołka v tworzymy pary z lewym ~~w prawo~~ sąsiadem itd

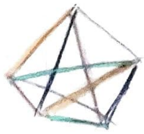
oraz z prawym co daje dwa sposoby

9 Turniej reprezentujemy jako klikę

Rozpatrzmy dwa przypadki

1° n nieparzyste

Reprezentujemy turniej jako n-kąt foremny z wszystkimi jego przekątnymi

np.: 

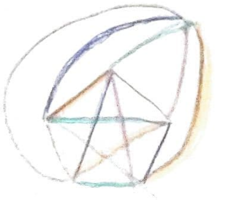
Musimy rozegrać co najmniej n dni.

kolejno Dla każdej zewnętrznej krawędzi bierzemy wszystkie krawędzie (przekątne) równoległe ~~kraw~~ wierzchołki tych krawędzi tworzą pary grające w ciągu jednego dnia.

2° $2|n$

Reprezentujemy turniej jako $(n-1)$-kąt foremny oraz jeden „zewnętrzny" wierzchołek. Pary grające w danym dniu wybieramy analogicznie jak w poprzednim przypadku, przy czym niesparowany wierzchołek gra z wierzchołkiem „zewnętrznym".

Otrzymujemy zatem $n-1$ dni turnieju



10

G:

$\deg(v_1) = \deg(v_3) = 1$

$\deg(v_2) = 2$

$n = 3$

$\deg(v) \geq (n-1)/2$

$\deg(v_3) = \deg(v_1) = 1 \geq (3-1)/2 = 1$

$\deg(v_2) = 2 \geq 1$

Widzimy, że słabsze założenie jest spełnione a G nie zawiera cyklu

11 Graf $G=\{V,E\}$ spójny, nieskierowany ~~[illegible]~~, $|V| = n$

dla każdej pary u,v niepołączonych wierzchołków zachodzi:

$\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$

Taki graf nie zawsze ~~znajduje~~ zawiera ścieżkę Hamiltona

Weźmy graf $G=\{V,E\}$ $|V| = n = 4$

Taki graf spełnia założenia zadania a nie posiada ścieżki Hamiltona