Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 03

Temas abordados: Continuidade

Seções do livro: 2.6

1) Explique o que significa dizer que uma função f é contínua no ponto $x = a$. (veja Texto 1)

2) Em cada item abaixo, esboce o gráfico de uma função f que satisfaz as condições do enunciado.

(a) f é contínua em todos os pontos, exceto em $x = 3$, onde o limite pela direita existe e é igual a $f(3)$.

(b) f tem limite em $x = 3$, mas não é contínua nesse ponto.

(c) f não é contínua em $x = 3$, mas torna-se contínua se seu valor em $x = 3$ for mudado para $f(3) = 0$.

(d) f é contínua no intervalo $[0, 3)$, está definida em $[0, 3]$, mas não é contínua em $[0, 3]$.

3) Sabe-se que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ e f está definida em $\mathbb{R}$. Todas as afirmações abaixo são falsas. Desenhe um contra-exemplo para cada uma delas.

(a) $f(x) > 0$ para $x \in (1, 3)$ (b) $f(2) = 5$ (c) $f(2)$ é positivo

4) Decida se as funções

$$f(x) = \begin{cases} x^3\cos(1/x), & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & \text{se } x \in [0,1) \cup (1,+\infty), \\ 1/2, & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

são contínuas no ponto $x = 0$ (veja vídeo) . Repita o exercício para $x = 1$.

5) Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax, & \text{se } x \leq 0, \\ x^4 + 2a, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

seja contínua em $x = 0$.

6) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ tal que a função $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2-x} & \text{se } x < 1, \\ ax + b & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ |x^2 - 7x + 12| & \text{se } x \geq 2, , \end{cases}$ seja contínua.

7) Verifique que, se $x^2\cos(x) \leq f(x) \leq x\,\mathrm{sen}(x)$, para todo $x \in (-\pi, \pi)$, então f é contínua em $x = 0$. O que se pode afirmar sobre a continuidade em $x = \pi/2$?

8) Dizemos que f tem uma *descontinuidade removível* no ponto $x = a$ quando existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$, mas f não é contínua ou não está definida neste ponto. Este é o caso da função $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, que não está definida em $x = 1$, mas satisfaz

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Note que podemos incluir o ponto $x = 1$ no domínio fazendo $f(1) = 2$. Com essa definição, a (nova) função f é contínua em $x = 1$.

Para cada uma das funções abaixo, determine os (possíveis) pontos de descontinuidade removível.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x+3}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ (c) $f(x) = \dfrac{5\,\text{sen}(x)}{\sqrt{x}}$ (d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

9) Lembrando que $\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$, verifique que $\lim\limits_{\theta\to 0} \text{sen}(\theta + a) = \text{sen}(a)$. Conclua daí que a função seno é contínua. (veja Texto 2)

Dica: Para a primeira parte use a fórmula $\text{sen}(\theta + a) = \text{sen}(\theta)\cos(a) + \text{sen}(a)\cos(\theta)$

10) Use o mesmo raciocínio do exercício anterior para verificar que a função cosseno também é contínua. O que se pode dizer sobre a continuidade das demais funções trigonométricas?

11) A função *maior inteiro* é a função que associa, a cada elemento $x \in \mathbb{R}$, o valor $[[x]]$ que é o maior número inteiro que é menor ou igual a x. Por exemplo,

$$[[0,5]] = 0, \qquad [[3]] = 3, \qquad [[-1,8]] = -2.$$

(a) Calcule $[[3,7]]$, $[[-0,6]]$, $[[n]]$ com $n \in \mathbb{N}$

(b) Estude os limites laterais da função maior inteiro no ponto $x = 2$. Em seguida, decida se ela é contínua neste ponto

(c) Determine todos os pontos onde a função não é contínua

(d) Faça um esboço do gráfico da função

12) Para cada função abaixo, determine um intervalo de comprimento 1 que possua pelo menos uma raiz da função. (veja Texto 3)

(a) $f(x) = x^3 + x - 1$ (b) $g(x) = x^3 + 3x - 5$ (c) $h(x) = 1 + x\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

13) Verifique que cada uma das equações abaixo possui pelo menos uma solução. (veja vídeo)

(a) $\text{sen}(x) = x - 1$ (b) $3 - \cos(\pi x) = e^{2x}$

Dica: Observe que as soluções de $g(x) = h(x)$ são exatamente as raízes de $f(x) = g(x) - h(x)$

14) Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$, tais que $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$. Mostre que a equação $f(x) = g(x)$ tem solução.

15) Dê um exemplo (que pode ser gráfico) de uma função definida em $[a, b]$ tal que $f(a) < 0 < f(b)$, mas f não possui raiz em $[a, b]$. O que se pode afirmar sobre a continuidade desta função?

RESPOSTAS

1) A função f é contínua no ponto $x = a$ se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Desse modo, o ponto a tem que estar no domínio de f, o limite nesse ponto deve existir e coincidir com o valor da função no ponto.

2)

3)

4) A função f não é contínua em $x = 0$, mas é contínua em $x = 1$. A função g é contínua em $x = 1$ e $x = 0$.

5) $a = 1/2$.

6) $a = 3$, $b = -4$.

7) Usando o Teorema do Confronto pode-se mostar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. No ponto $x = \pi/2$ as funções que ficam por baixo e por cima de f têm limites diferentes. Logo, nada se pode concluir acerca da existência do limite $\lim_{x\to\pi/2} f(x)$.

8) (a) descontinuidade removível em $x = -3$.

(b) não possui pois, no ponto $x = 0$, os limites laterais são distintos.

(c) descontinuidade removível em $x = 0$.

(d) descontinuidade removível em $x = 1$.

9) Para a primeira parte use a dica. Na segunda note que $\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(x) = \lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}(\theta + a)$.

10) Use a fórmula $\cos(\theta + a) = \cos(\theta)\cos(a) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(a)$.

11) (a) $[[3,7]] = 3$, $[[-0,6]] = -1$ e $[[n]] = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(b) $\lim_{x\to 2^-} [[x]] = 1$, $\lim_{x\to 2^+} [[x]] = 2$. A função não é contínua em $x = 2$ porque não existe o limite neste ponto

(c) A função é descontínua em todos os pontos $n \in \mathbb{Z}$.

12) (a) $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$. Como f é contínua em $[0,1]$ segue do TVI que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$

(b) Uma reposta seria $[1,2]$, mas existem outras

(c) Uma reposta seria $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, mas existem outras

13)

14) Use o TVI para a função $h(x) = f(x) - g(x)$ no intervalo $[a,b]$.

15)