Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 02

Temas abordados: Limites no ponto (conceito intuitivo e formal)

Seções do livro: 2.1 a 2.4

1) Suponha $f(x) > 0$ para todo $x \neq 2$ e $f(2) = -3$. Decida sobre a veracidade de cada uma das afirmações abaixo, justificando caso ela seja verdadeira ou apresentando um contra-exemplo caso seja falsa.

(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe (b) $\lim_{x\to 2} f(x) = -3$ (c) Se existir, $\lim_{x\to 2} f(x)$ é positivo.

2) Calcule os limites abaixo (veja Texto 1).

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(-3x^2 + 3x + 5)$ (b) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\sqrt{\frac{2s^2+3s-4}{4s-4}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{8-2x}{|x-4|}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 4^+}\frac{8-2x}{|x-4|}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$

3) Dadas $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{se } x \le 1, \\ x+1 & \text{se } x > 1, \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le 1, \\ 2 & \text{se } x > 1, \end{cases}$ resolva os itens abaixo.

(a) Esboce os gráficos de f e g.

(b) Decida sobre a existência dos limites $\lim_{x\to 1} f(x)$ e $\lim_{x\to 1} g(x)$.

(c) Dê a expressão de $h(x) = f(x)g(x)$ e verifique se existe $\lim_{x\to 1} h(x)$.

4) Limites do tipo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ com o numerador e o denominador se aproximando de zero são chamados de *indeterminações do tipo* $0/0$ (veja vídeo). Eles são delicados porque não podemos aplicar a regra do quociente. Se f e g são polinômios, então $f(a) = g(a) = 0$, e portanto $x = a$ é uma raiz do numerador e do denominador. Deste modo, podemos fatorá-los na forma $(x-a)p(x)$, com p sendo um polinômio de grau menor. Em alguns casos, isso permite eliminar a indeterminação, como no exemplo abaixo

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{6-2x} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{-2(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.

(a) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z^2+2z}{z}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{2-x}$ (c) $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^3-1}$

Dica: para fatorar o polinômio (t^3-1) divida-o por $(t-1)$. (veja vídeo)

5) O limite trigonométrico fundamental nos diz que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ (veja Texto 3 e/ou vídeo). Use essa informação para calcular os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(6x)}{2x}$ (veja vídeo) (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(9x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}$

Dica: para o item (c), multiplique o numerador e o denominador por $(\cos(x)+1)$

6) Algumas indeterminações do tipo 0/0 podem ser resolvidas usando-se o artifício de multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado de um deles, conforme o exemplo abaixo

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)}\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{2\sqrt{x}-6}{x-9}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Observação: vale a pena tentar o artifício acima no item (a) do exercício 4 para se convencer de que, naquele caso, o melhor caminho é mesmo a fatoração

7) Calcule cada um dos limites abaixo (veja Texto 2).

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\mathrm{sen}(x-\pi)}{x-\pi}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-5x+4}{|x-1|}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$

Dica: nos dois últimos, use a identidade $(x^n-y^n)=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$, para $n\in\mathbb{N}$

8) Se a posição de um carro no instante $t>0$ é dada por $s(t)$, então a sua velocidade pode ser calculada a partir do seguinte limite (veja vídeo)

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Calcule a velocidade em cada um dos casos abaixo.

(a) $s(t)=t^3$ (b) $s(t)=\sqrt{t+1}$ (c) $s(t)=\mathrm{sen}(t)$

Dica: para o item (c), lembre que $\mathrm{sen}(a+b)=\mathrm{sen}(a)\cos(b)+\mathrm{sen}(b)\cos(a)$ e use o exercício 5

9) Suponha que a velocidade de um carro é $v(t)$, para $t>0$. Usando a ideia do exercício acima, escreva a expressão da aceleração $a(t)$ em termos de um limite envolvendo a aceleração média. Em seguida, determine a aceleração no caso em que $v(t)=\cos(t)$.

Dica: para o cálculo do limite, lembre que $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)$ e use o exercício 5

10) Sejam $I\subset\mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f:I\to\mathbb{R}$ uma função. Dado $a\in I$, lembre que a *reta tangente ao gráfico de f no ponto* $(a,f(a))$ é a (única) reta que passa pelo ponto $(a,f(a))$ e tem inclinação igual a

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

quando o limite existe (veja vídeo). Neste caso, a equação da reta tangente $y=y(x)$ é dada por $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Para cada uma das funções abaixo, determine a inclinação $f'(a)$ em um ponto genérico. Em seguida, calcule a equação da reta tangente no ponto indicado.

(a) $f(x)=2x^2$, no ponto $(3,f(3))$ (b) $f(x)=\dfrac{5}{x}$, no ponto $(2,f(2))$

(c) $f(x)=x|x|$, no ponto $(0,f(0))$ (d) $f(x)=|x|$, no ponto $(0,f(0))$

RESPOSTAS

1) Todas as afirmações são falsas. Para os dois primeiros itens um possível contra-exemplo é a função $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 2 \\ -3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$. Para o terceiro $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{se } x \neq 2 \\ -3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$

2) (a) 5 (b) 1 (c) 2 (d) -2 (e) -1 (f) não existe

3) (b) os limites não existem, pois nos dois casos os limites laterais no ponto $x = 1$, apesar de existirem, são diferentes.

(c) $h(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, de modo que $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 4$.

4) (a) 2 (b) -2 (c) $1/3$

5) (a) 3 (b) $5/9$ (c) 0

6) (a) $1/3$ (b) $3/10$ (c) $1/2$

7) (a) $-1/2$ (b) $1/(2\sqrt{a})$ (c) 2 (d) 0 (e) $\sqrt{5}/2$

(f) 1 (g) -3 (h) na^{n-1} (i) $(1/3)a^{-2/3}$

8) (a) $v(t) = 3t^2$ (b) $v(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$ (c) $v(t) = \cos(t)$

9) A aceleração é dada pelo limite $a(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(t+h) - v(t)}{h}$. Se $v(t) = \cos(t)$, então a ela é dada por $a(t) = -\operatorname{sen}(t)$.

10) (a) $f'(a) = 4a$; reta tangente no ponto $(3, 18)$ é $y - 18 = 12(x - 3)$

(b) $f'(a) = -\dfrac{5}{a^2}$; reta tangente no ponto $(2, \frac{5}{2})$ é $y - \frac{5}{2} = -\frac{5}{4}(x - 2)$

(c) $f'(a) = \begin{cases} 2a, & \text{se } a \geq 0 \\ -2a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$; reta tangente no ponto $(0, 0)$ é $y = 0$

(d) $f'(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a > 0 \\ -1, & \text{se } a < 0 \end{cases}$; a reta tangente no ponto $(0, 0)$ não existe porque os limites laterais de $(f(x) - f(0))/(x - 0)$, quando $x \to 0$ pela esquerda e pela direita, são diferentes. Observe contudo que, em qualquer outro ponto $(a, f(a))$, com $a \neq 0$, a função possui reta tangente. Ela tem equação $y = x$ se $a > 0$, e $y = -x$ se $a < 0$.