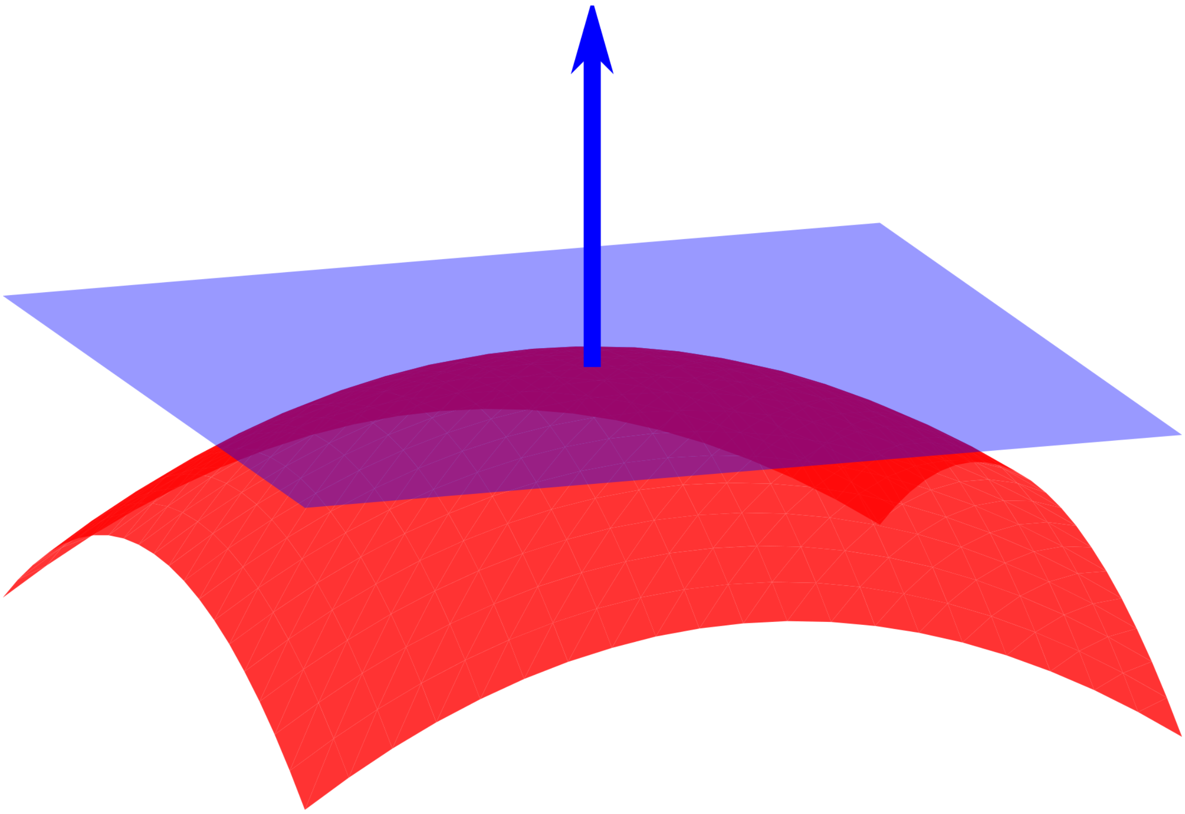
Conjugate set

Conjugate (dual) set

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - произвольное непустое множество. Тогда сопряженное к нему множество определяется, как:

$$S^* = \{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \ge -1 \ \ \forall x \in S\}$$



Double conjugate set

Множество S^{**} называется вторым сопряженным к множеству S, если:

$$S^{**} = \{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \ge -1 \ \ \forall x \in S^*\}$$

Inter-conjugate and self-conjugate sets

- Множества S_1 и S_2 называются **взаимосопряженными**, если $S_1^* = S_2, S_2^* = S_1$.
- Множество S называется **самосопряженным**, если $S^* = S$

Properties

- Сопряженное множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}$$

- Если $S_1 \subset S_2$, то $S_2^* \subset S_1^*$
- $\left(\bigcup\limits_{i=1}^m S_i \right)^* = \bigcap\limits_{i=1}^m S_i^*$

* Если S - замкнуто, выпукло, включает 0, то $S^{**} = S$
* $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$

Examples

1

Доказать, что $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$

Решение:

2

Доказать, что $(\mathbf{conv}(S))^* = S^*$

Решение:

3

Доказать, что если $B(0,r)$ - шар радиуса r по некоторой норме с центром в нуле, то $(B(0,r))^* = B(0,1/r)$

Решение:

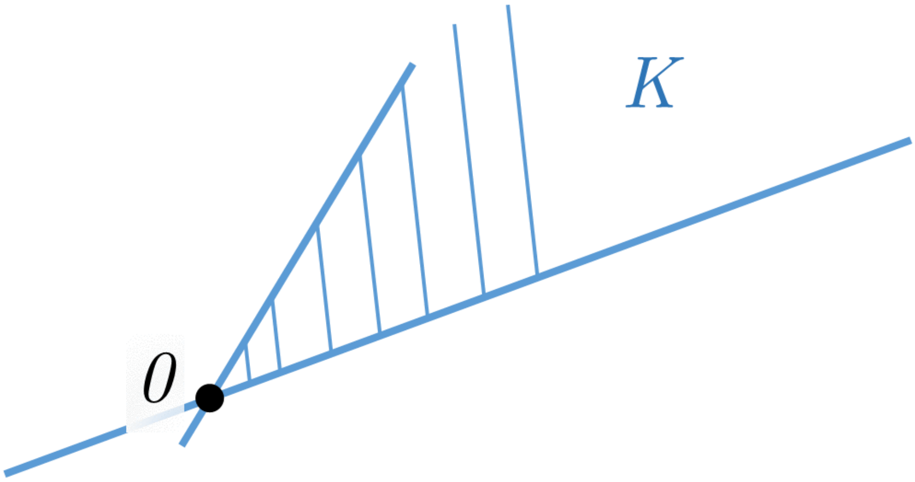
Dual cones

Сопряженным конусом к конусу K называется такое множество K^*, что:

$$K^* = \{y \mid \langle x, y\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

Чтобы показать, что это определение непосредственно следует из теории выше вспомним, что такое сопряженное множество и что такое конус $\forall \lambda > 0$

$$\{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \ \ \forall x \in S\} \to \{\lambda y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -\frac{1}{\lambda} \ \ \forall x \in S\}$$



Dual cones properties

- Если K - замкнутый выпуклый конус. Тогда $K^{**} = K$
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и конуса $K \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$(S + K)^* = S^* \cap K^*$$

- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$, тогда:

$$\left(\sum_{i=1}^m K_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^m K_i^*$$

- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$. Пусть так же, их пересечение имеет внутреннюю точку, тогда:

$$\left(\bigcap_{i=1}^m K_i\right)^* = \sum_{i=1}^m K_i^*$$

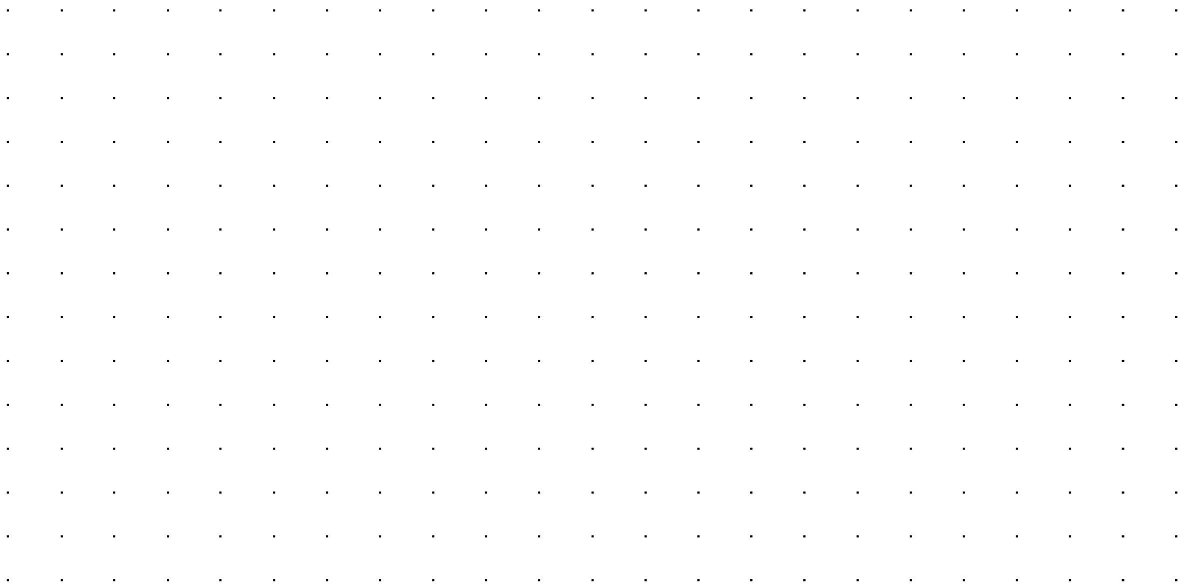
Examples

4

Найти сопряженнй конус для монотонного неотрицательного конуса:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0\}$$

Решение:

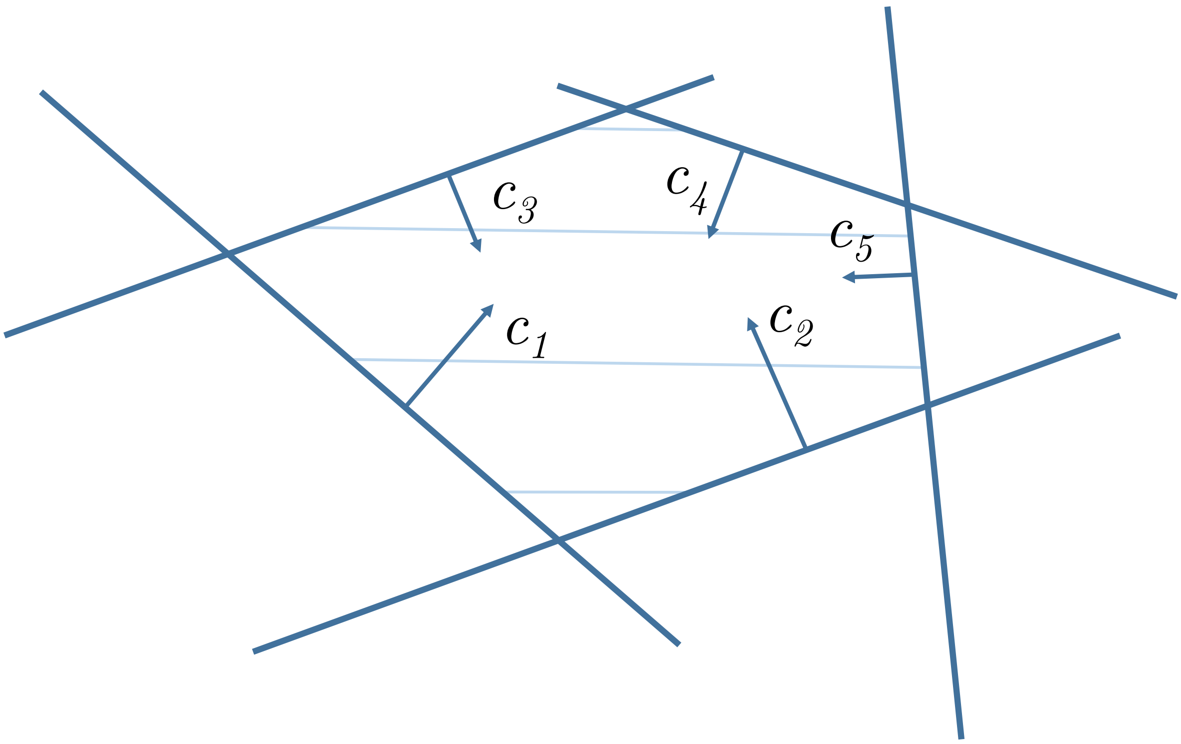


Polyhedra

Множество решений системы линейных неравенств и равенств представляет собой многогранник:

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а неравенство - поэлементное.



Теорема:

Пусть $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$S = \mathbf{conv}(x_1, \ldots, x_k) + \mathbf{cone}(x_{k+1}, \ldots, x_m)$$

является полиэдр (многогранник):

$$S^* = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}; \langle p, x_i \rangle \geq 0, i = \overline{k+1,m} \right\}$$

Доказательство:

- Пусть $S = X, S^* = Y$. Возьмем некоторый $p \in X^*$, тогда $\langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1, k}$. В то же время для любых $\theta > 0, i = \overline{k+1, m}$:

$$\langle p, x_i \rangle \geq -1 \to \langle p, \theta x_i \rangle \geq -1$$
$$\langle p, x_i \rangle \geq -\frac{1}{\theta} \to \langle p, x_i \rangle \geq 0$$

  Значит, $p \in Y \to X^* \subset Y$

- Пусть, напротив, $p \in Y$. Для любой точки $x \in X$:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$$

  Значит:

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \langle p, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \langle p, x_i \rangle + \sum_{i=k+1}^{m} \theta_i \langle p, x_i \rangle \geq \sum_{i=1}^{k} \theta_i (-1) + \sum_{i=1}^{k} \theta_i \cdot 0 = -1$$

  Значит, $p \in X^* \to Y \subset X^*$

5

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \mathbf{cone} \left\{ (-3, 1), (2, 3), (4, 5) \right\}$$

Решение:

Лемма (теорема) Фаркаша (Фаркаша - Минковского)

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1) \; Ax = b, x \geq 0$$

$$2) \; pA \geq 0, \langle p, b \rangle < 0$$

$Ax = b$ при $x \geq 0$ означает, что b лежит в конусе, натянутым на столбцы матрицы A

$pA \geq 0, \; \langle p, b \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором b и конусом из столбцов матрицы A.

Следствие:

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1)\ Ax \leq b$$

$$2)\ pA = 0, \langle p, b \rangle < 0, p \geq 0$$

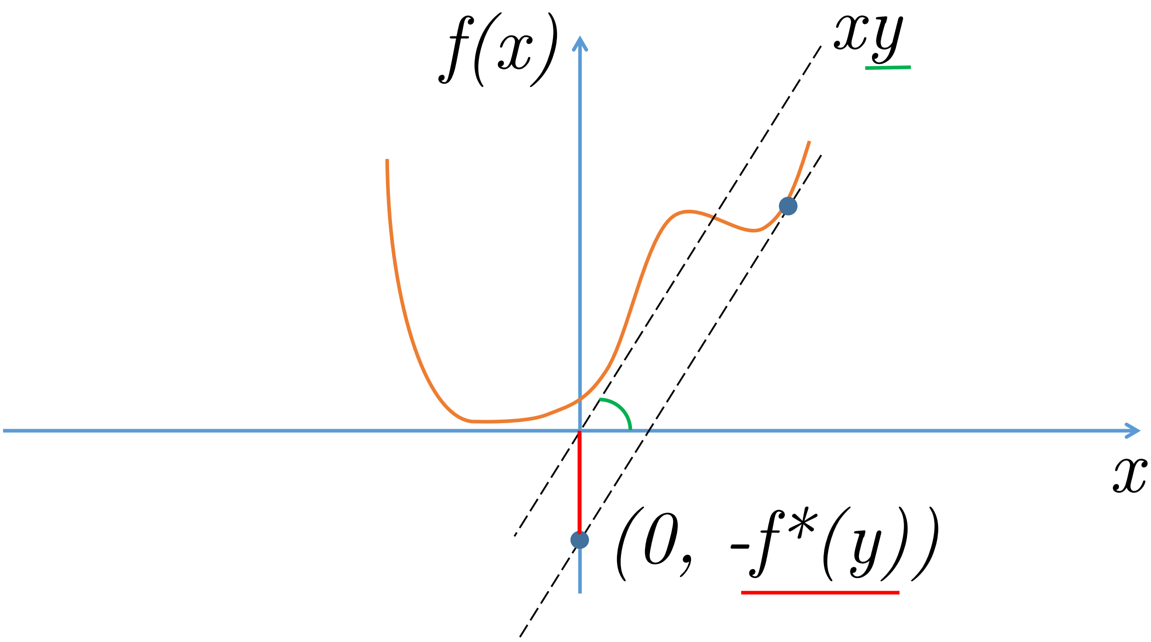
Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём снизу, то задача имеет решение.

Conjugate (dual) function

Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. The function $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called convex conjugate (Fenchel's conjugate, dual) $f(x)$ and is defined as follows:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\ f} (\langle y, x \rangle - f(x)).$$

Let's notice, that the domain of the function f^* is the set of those y, where the supremum is finite.

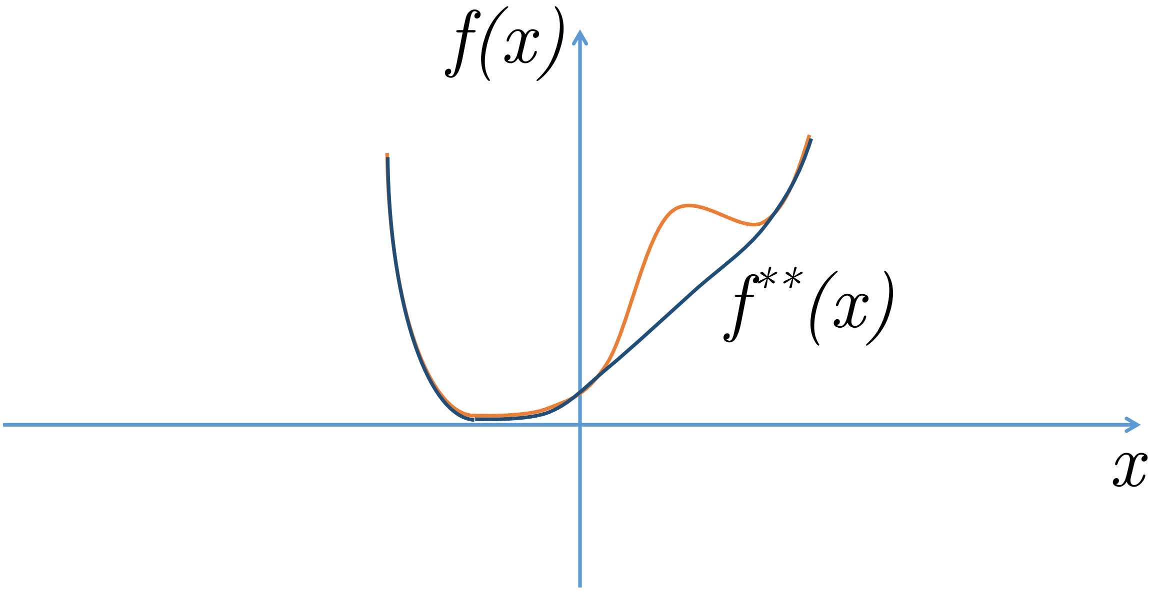


Properties

- $f^*(y)$ - always closed convex function (point-wise supremum of closed convex functions) on y (Function $f : X \to R$ is called closed if $\mathbf{epi}(f)$ is a closed set in $X \times R$)
- Fenchel–Young inequality:

$$f(x) + f^*(y) \geq \langle y, x \rangle$$

- Let the functions $f(x), f^*(y), f^{**}(x)$ are defined on the $\mathbb{R}^n$. Then, $f^{**}(x) = f(x)$ if and only if $f(x)$ - proper convex function (Fenchel - Moreau theorem). (proper convex function = closed convex function)
- Consequence from Fenchel–Young inequality: $f(x) \geq f^{**}(x)$



- The Legendre transformation as a special case of Fenchel's conjugate (in case of differentiable function). Let $f(x)$ - convex and differentiable, $\mathbf{dom}\ f = \mathbb{R}^n$. Then $x^* = \underset{x}{\text{argmin}} \langle x, y \rangle - f(x)$. In that case $y = \nabla f(x^*)$. That's why:

$$f^*(y) = \langle \nabla f(x^*), x^* \rangle - f(x^*)$$

$$f^*(y) = \langle \nabla f(z), z \rangle - f(z), \qquad y = \nabla f(z), \quad z \in \mathbb{R}^n$$

- Let $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, where f_1, f_2 - convex functions, then

$$f^*(p, q) = f_1^*(p) + f_2^*(q)$$

- Let $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$. Let also $f^*(y), g^*(y)$ are defined on Y. Then $\forall x \in X, \forall y \in Y$

$$f^*(y) \geq g^*(y) \qquad f^{**}(x) \leq g^{**}(x)$$

Examples

The scheme of recovering the convex conjugate is pretty algorithmic:

1. Write down the definition $f^*(y) = \sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\ f} (\langle y, x \rangle - f(x)) = \sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\ f} f(x, y)$
2. Find those y, where $\sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\ f} f(x, y)$ is finite. That's the domain of the dual function $f^*(y)$
3. Find x^*, which maximize $f(x, y)$ as a function on x. $f^*(y) = f(x^*, y)$

Example 1

Find $f^*(y)$, if $f(x) = ax + b$

Example 2

Find $f^*(y)$, if $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R}_{++}$

Example 3

Find $f^*(y)$, if $f(x) = -\log x, \quad x \in \mathbb{R}_{++}$

Example 4

Find $f^*(y)$, if $f(x) = e^x$

Example 5

Find $f^*(y)$, if $f(x) = x \log x, x \neq 0, \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$

Example 6

Find $f^*(y)$, if $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x, \quad A \in \mathbb{S}^n_{++}$

Example 7

Revenue and profit functions. We consider a business or enterprise that consumes n resources and produces a product that can be sold. We let $r = (r_1, \ldots, r_n)$ denote the vector of resource quantities consumed, and $S(r)$ denote the sales revenue derived from the product produced (as a function of the resources consumed). Now let p_i denote the price (per unit) of resource i, so the total amount paid for resources by the enterprise is $p^\top r$. The profit derived by the firm is then $S(r) - p^\top r$. Let us fix the prices of the resources, and ask what is the maximum profit that can be made, by wisely choosing the quantities of resources consumed. This maximum profit is given by

$$
M(p) = \sup_r \left(S(r) - p^\top r\right)
$$

The function $M(p)$ gives the maximum profit attainable, as a function of the resource prices. In terms of conjugate functions, we can express M as

$$
M(p) = (-S)^*(-p).
$$

Thus the maximum profit (as a function of resource prices) is closely related to the conjugate of gross sales (as a function of resources consumed).

Example 8

Let $\|\cdot\|$ be a norm on $\mathbb{R}^n$, with dual norm $\|\cdot\|_*$. Show that the conjugate of $f(x) = \|x\|$ is:

$$
f^*(y) = \begin{cases} 0, & \|y\|_* \leq 1 \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

Dual norm

Let $\|x\|$ be the norm in the primal space $x \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, then the following expression defines dual norm:

$$
\|x\|_* = \sup_{\|y\| \leq 1} \langle y, x \rangle
$$

The intuition for the finite-dimension space is how the linear function (element of the dual space) $f_y(\cdot)$ could stretch the elements of the primal space with respect to their size, i.e.
$\|y\|_* = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\langle y, x\rangle}{\|x\|}$

Properties

- One can easily define the dual norm as:

$$
\|x\|_* = \sup_{y \neq 0} \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|}
$$

- The dual norm is also a norm itself
- For any $x \in E, y \in E^*$: $x^\top y \leq \|x\| \cdot \|y\|_*$
- $(\|x\|_p)_* = \|x\|_q$ if $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, where $p, q \geq 1$

Examples

- Let $f(x) = \|x\|$, then $f^*(y) = \mathbb{O}_{\|y\|_* \leq 1}$
- The Euclidian norm is self dual $(\|x\|_2)_* = \|x\|_2$.

Materials

- Convex Optimization materials by Boyd and Vandenberghe.
- Методы оптимизации, Часть I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации. Жадан ВГ.