1 Racionális törtfüggvények

1.1 Fontosabb fogalmak

1.1.1. Definíció (racionális törtfüggvény)
Racionális törtfüggvényen két racionális egész függvény hányadosát értjük. Általános alakja:

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}, \tag{1.1}$$

ahol $n \geq 0$, $m \geq 1$, $n, m \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.
Ha $n < m$, azaz a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, akkor valódi törtfüggvényről, ha pedig $n \geq m$, akkor áltörtfüggvényről beszélünk.

1.1.2. Megjegyzés
A (1.1) alakú racionális törtfüggvény értelmezési tartománya a valós számok halmazának az a részhalmaza, amelyre

$$q_m(x) \neq 0.$$

1.1.3. Megjegyzés
Az áltörtfüggvény ($n \geq m$) mindig felírható egy $(n-m)$-ed fokú racionális egészfüggvény és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként:

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = r_{n-m}(x) + \frac{s_{m-1}(x)}{q_m(x)}, \qquad \text{ha} \quad n \geq m. \tag{1.2}$$

Az $r_{n-m}(x)$ függvényt a racionális törtfüggvény asszimptotájának nevezzük. Az áltörtfüggvény (1.2) alakját polinomosztás segítségével állítjuk elő.

1.1.4. Megjegyzés
Könnyen igazolható, hogy a racionális törtfüggvény $+\infty$-beli határértékére igaz az alábbi formula:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n < m, \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{ha } n = m, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} r_{n-m}(x), & \text{ha } n > m. \end{cases}$$

1.1.5. Definíció (racionális törtfüggvény zérushelye)
Az x_0 helyet a (1.1) alakú racionális törtfüggvény zérushelyének nevezzük, ha

$$p_n(x_0) = 0, \quad \textit{de} \quad q_m(x_0) \neq 0,$$

azaz az $(x - x_0)$ gyöktényező csak a számlálóban fordul elő.

1.1.6. Megjegyzés
A (1.1) alakú racionális törtfüggvény grafikonja zérushelyének környezetében olyan jellegű, mint a racionális egész függvény görbéje egy zérushelye környezetében.

1.1.7. Definíció (racionális törtfüggvény pólushelye)
Az x_0 helyet a (1.1) alakú racionális törtfüggvény pólushelyének nevezzük, ha

$$q_m(x_0) = 0, \quad \text{de} \quad p_n(x_0) \neq 0,$$

azaz az $(x - x_0)$ gyöktényező csak a nevezőben fordul elő. Pólusról beszélünk akkor is, ha a számlálóban és a nevezőben is előfordul az $(x-x_0)$ gyöktényező, de a nevezőben nagyobb kitevővel, mint a számlálóban.

1.1.8. Megjegyzés
A (1.1) alakú racionális törtfüggvény a pólushelyen nincs értelmezve. Itt a függvény görbéjének "függőleges" aszimptotája (pólusegyenese) van. Ha x_0 multiplicitása k, azaz $(x - x_0)^k$ szerepel (1.1) nevezőjében a gyöktényezős alak felírásakor (egyszerűsítés után), akkor páros k esetén a függvény görbéje jobbról és balról is a "függőleges" aszimptotához simul, anélkül, hogy előjelet váltana. Ha k értéke páratlan, akkor előjelet váltva simul a függvény görbéje a "függőleges" aszimptotához.

1.1.9. Definíció (racionális törtfüggvény hézagpontja)
Az x_0 helyet a (1.1) alakú racionális törtfüggvény hézagpontjának nevezzük, ha

$$p_n(x_0) = 0, \quad \text{és} \quad q_m(x_0) = 0,$$

azaz az $(x - x_0)$ gyöktényező a számlálóban és a nevezőben is előfordul, de a számlálóban nem kisebb kitevőn, mint a nevezőben.

1.1.10. Megjegyzés
A (1.1) alakú racionális törtfüggvény hézagpontja elsőfajú megszüntethető szakadási hely, ezt úgy ábrázoljuk, hogy a függvény görbéjére nullkört rajzolunk.

1.2 Racionális törtfüggvények ábrázolása

Az

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$$

racionális törtfüggvény ábrázolásához felírjuk a $p_n(x)$ és a $q_m(x)$ polinomok valós gyöktényezős alakját:

$$f(x) = \frac{(x - x_{\alpha_1})^{\gamma_1} \cdot (x - x_{\alpha_2})^{\gamma_2} \cdot ... \cdot (x - x_{\alpha_j})^{\gamma_j} \cdot g_1(x)}{(x - x_{\beta_1})^{\delta_1} \cdot (x - x_{\beta_2})^{\delta_2} \cdot ... \cdot (x - x_{\beta_k})^{\delta_k} \cdot g_2(x)} \tag{1.3}$$

ahol a $g_1(x)$-nek és $g_2(x)$-nek már nincs valós gyöke. Meghatározzuk a függvény lehetséges zérushelyeit, pólushelyeit (multiplicitásaikkal együtt) és hézagpontjait. Ha $f(x)$ áltört, akkor polinomosztás segítségével (1.2) alakra hozzuk. Az $f(x)$ függvény jelleggörbéjének ábrázolásához meghatározzuk a $+\infty$-beli ill. a $-\infty$-beli határértékeket.

1.2.1. Példa

Vázoljuk az $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ függvény grafikonját!

Megoldás:
Írjuk fel az $f(x)$ függvény (1.3)-as alakját!

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

Az $f(x)$ függvénynek $x_0 = 0$-ban egyszeres zérushelye van, továbbá $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ egyszeres pólushelyek, vagyis ezeken a helyeken aszimptotája van a függvénynek. A függvénynek nincs hézagpontja. Az $f(x)$ valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

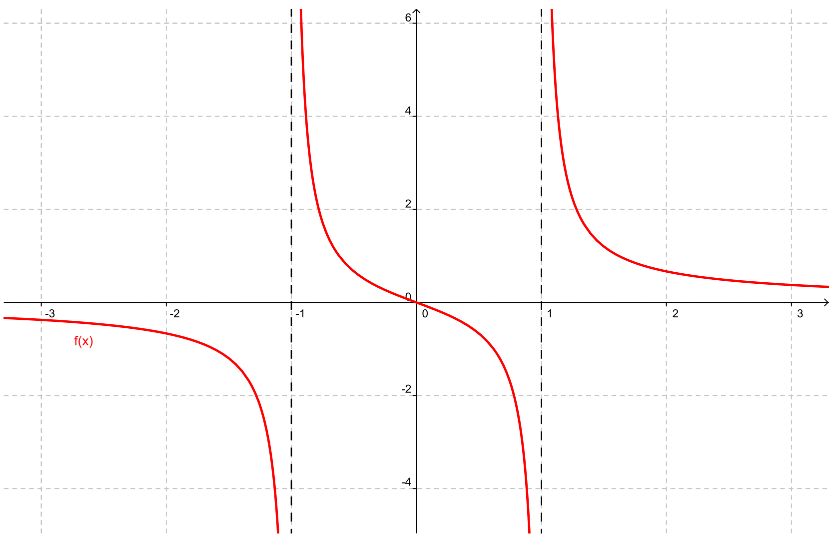
Továbbá:

$$\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to-1+0} f(x) = +\infty$$

és

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to-1-0} f(x) = -\infty.$$

Így $f(x)$ grafikonja könnyen elkészíthető:



1.1. ábra

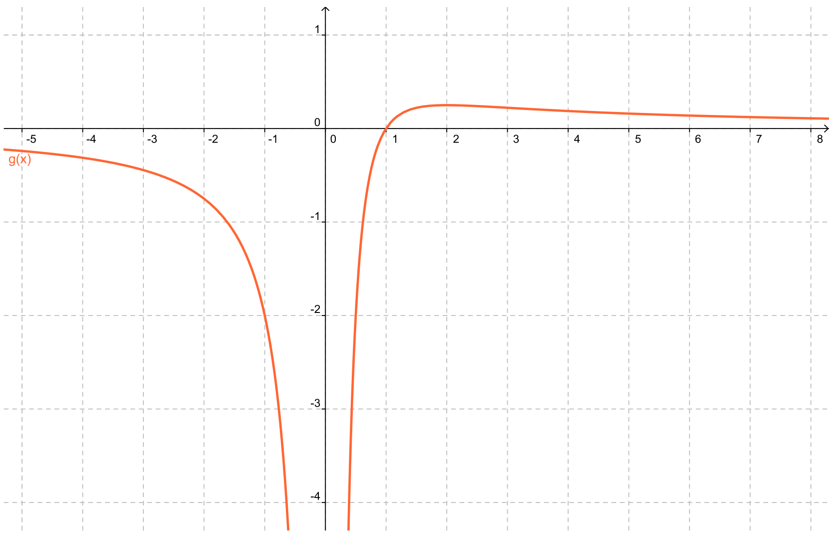
1.2.2. Példa
Vázoljuk a $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ függvény grafikonját!

Megoldás:
A $g(x)$ függvénynek $x_0 = 1$ egyszeres zérushelye, továbbá $x_1 = 0$ kétszeres pólushelye, ezért itt $g(x)$ nem vált előjelet, és

$$\lim_{x\to 0-0} g(x) = \lim_{x\to 0+0} g(x) = -\infty.$$

A függvénynek nincs hézagpontja. A $g(x)$ valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0.$$



1.2. ábra

1.2.3. Példa
Vázoljuk a $h(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2 \cdot (x-3)^2}$ függvény grafikonját!

Megoldás:
A $h(x)$ függvénynek $x_0 = 1$ egyszeres zérushelye, továbbá $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$ kétszeres pólushelyek, vagyis ezeken a helyeken aszimptotája van a függvénynek, és $g(x)$ nem vált előjelet. Továbbá:

$$\lim_{x\to -1-0} h(x) = \lim_{x\to -1+0} h(x) = -\infty$$

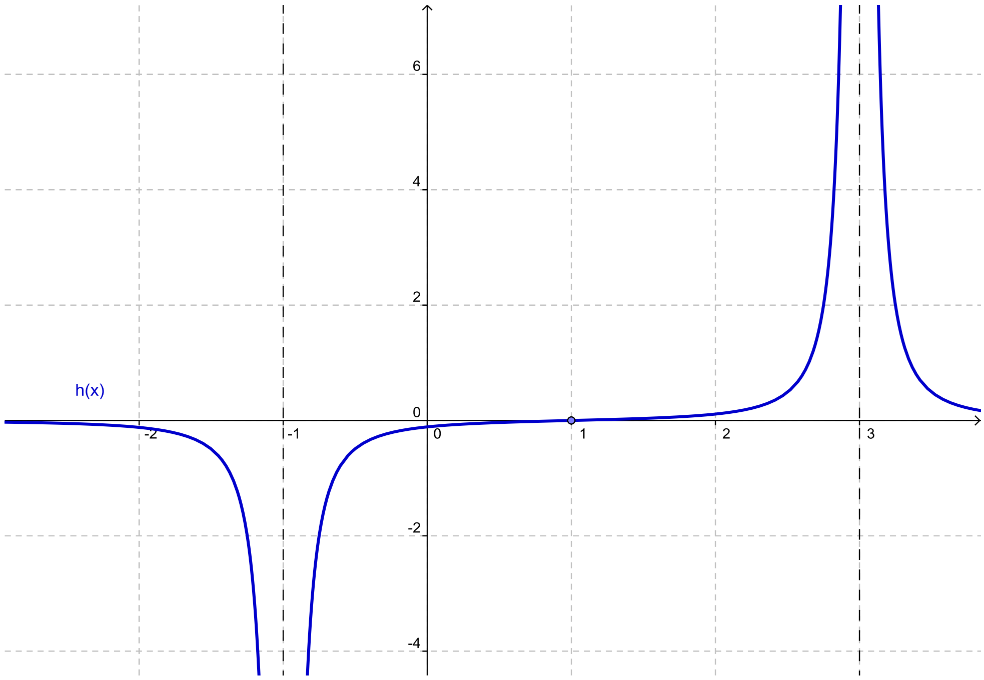
és

$$\lim_{x\to 3-0} h(x) = \lim_{x\to 3+0} h(x) = +\infty.$$

A függvénynek nincs hézagpontja. A $h(x)$ valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.$$

A $h(x)$ függvény grafikonja:



1.3. ábra

1.2.4. Példa

Vázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3-x^2-10x-8}$ függvény grafikonját!

Megoldás:

Írjuk fel az $f(x)$ függvény (1.3)-as alakját!

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-x^2-10x-8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-4)}$$

Az $f(x)$ függvénynek $x_0 = -2$ hézagpontja, mert az $(x+2)$ gyöktényező a számlálóban és a nevezőben is megtalálható egyforma hatványkitevővel. A hézagpont elsőfajú, megszüntethető szakadási hely, így $x_0 = -2$-ben $f(x)$-nek létezik határértéke:

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-4)} = \lim_{x\to-2} \frac{x-2}{(x+1)(x-4)} = \frac{-2}{3}.$$

A függvénynek $x_1 = 2$ egyszeres zérushelye, $x_2 = -1$ és $x_3 = 4$ pedig egyszeres pólushelyek. Továbbá:

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to 4+0} f(x) = +\infty$$

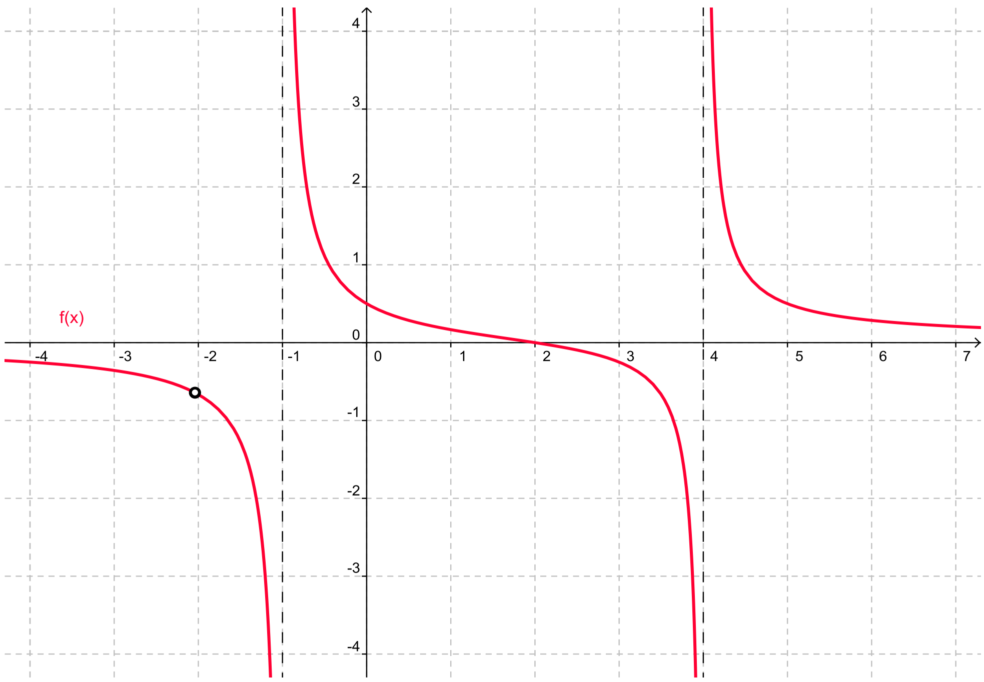
és

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to 4-0} f(x) = -\infty.$$

Az $f(x)$ valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Az $f(x)$ grafikonján a hézagpontot nullkör jelöli:



1.4. ábra

1.2.5. Példa

Vázoljuk a $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ függvény grafikonját!

Megoldás:

A $g(x)$ olyan áltörtfüggvény, ahol megegyezik a számlálóban lévő és a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a nevezőt:

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$$

Az $x_0 = 0$ kétszeres zérushely, $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$ pedig egyszeres pólushelyek, továbbá

$$\lim_{x\to -1-0} g(x) = \lim_{x\to 1+0} g(x) = +\infty,$$

illetve

$$\lim_{x\to -1+0} g(x) = \lim_{x\to 1-0} g(x) = -\infty.$$

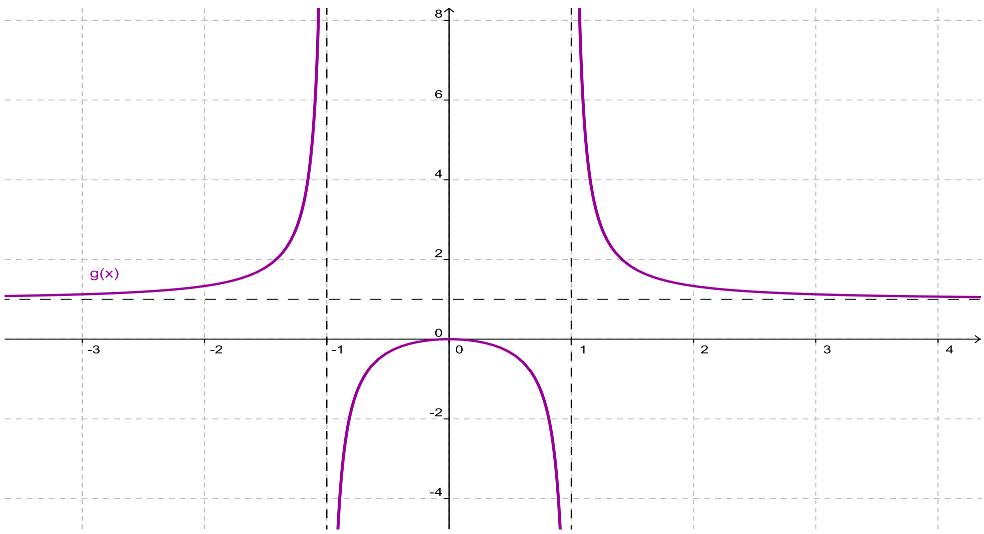
A függvénynek nincs hézagpontja. Bontsuk fel a $g(x)$ áltört függvényt (1.2)-nek megfelelően:

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1},$$

azaz

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = 1.$$

Az $y = 1$ egyenes a függvény aszimptotája, amelyet a függvény görbéje nem metsz. A $g(x)$ függvény grafikonja:



1.5. ábra

1.2.6. Példa

Vázoljuk a $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ függvény grafikonját!

Megoldás:

A $h(x)$ olyan áltörtfüggvény, ahol a számlálóban lévő polinom fokszáma eggyel nagyobb, mint a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a számlálót:

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x},$$

azaz $x_0 = 1$ és $x_1 = -1$ egyszeres zérushelyek, $x_2 = 0$ pedig egyszeres pólushely, továbbá

$$\lim_{x\to 0-0} h(x) = +\infty,$$

illetve

$$\lim_{x\to 0+0} h(x) = -\infty.$$

A függvénynek nincs hézagpontja. Bontsuk fel a $h(x)$ áltört függvényt (1.2)-nek megfelelően:

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x},$$

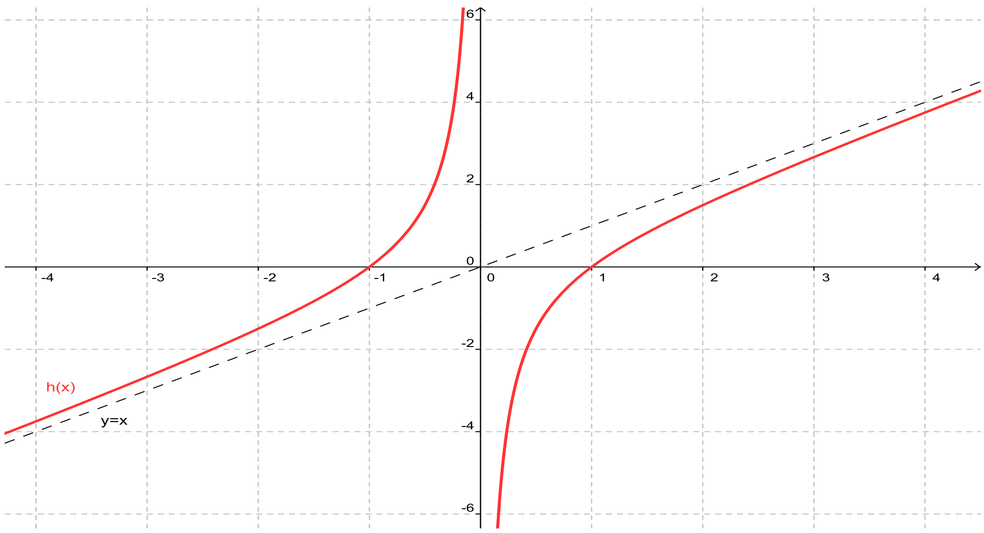
azaz

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty,$$

és

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty.$$

Az $y = x$ egyenes a függvény aszimptotája.
A $h(x)$ függvény grafikonja:



1.6. ábra

1.2.7. Példa

Vázoljuk a $g(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x}{2x^3 + 6x^2 - 2x - 6}$ függvény grafikonját!

Megoldás:

Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt is:

$$g(x) = \frac{x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x}{2x^3 + 6x^2 - 2x - 6} = \frac{x(x+3)(x-2)^2}{2(x+1)(x+3)(x-1)},$$

azaz $x_0 = -3$ hézagpont, $x_1 = 0$ egyszeres zérushely, $x_2 = 2$ kétszeres zérushely, $x_3 = -1$ és $x_4 = 1$ pedig egyszeres pólushelyek, továbbá

$$\lim_{x\to -1-0} g(x) = \lim_{x\to 1-0} g(x) = -\infty,$$

illetve

$$\lim_{x\to -1+0} g(x) = \lim_{x\to 1+0} g(x) = +\infty.$$

Bontsuk fel a $g(x)$ áltört függvényt (1.2)-nek megfelelően:

$$g(x) = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{11x + 5x^2 - 12}{2\,(x-1)\,(x+1)\,(x+3)},$$

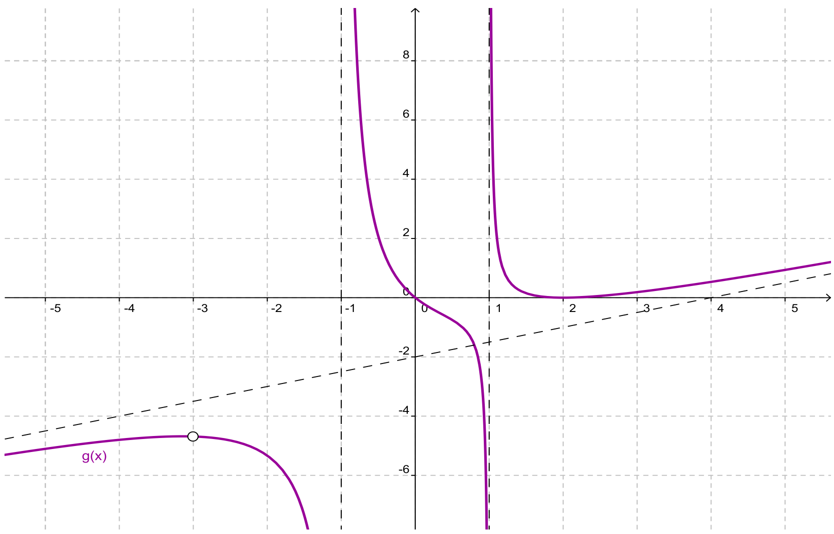
azaz

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = +\infty,$$

és

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = -\infty.$$

Az $y = \frac{1}{2}x - 2$ egyenes a függvény aszimptotája. A hézagpontot nullkör jelöli a függvény grafikonján:



1.7. ábra

1.2.8. Példa

Vázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{(x+1)^2}$ függvény grafikonját!

Megoldás:
Az $f(x)$ olyan áltörtfüggvény, ahol a számlálóban lévő polinom fokszáma kettővel nagyobb, mint a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a számlálót:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x+1)^2}$$

Az $f(x)$ függvénynek $x_0 = 1$ egyszeres zérushelye, $x_1 = -1$ pedig egyszeres póIushely, mert az $(x + 1)$ gyöktényező a számlálóban és a nevezőben is megtalálható, de a nevezőben eggyel nagyobb kitevőn, mint a számlálóban. Továbbá:

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to -1+0} f(x) = -\infty.$$

Bontsuk fel az $f(x)$ áltört függvényt (1.2)-nek megfelelően:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{(x+1)^2} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4}{x+1},$$

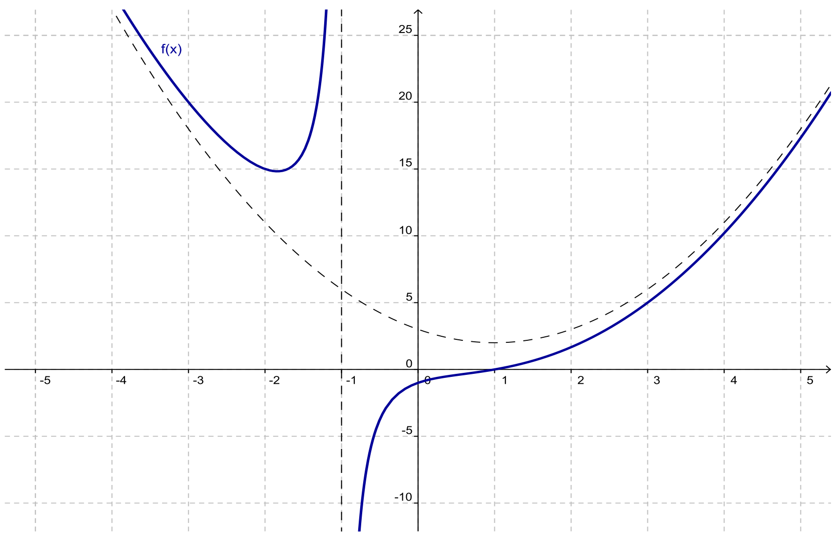
azaz

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 3) = +\infty,$$

és

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 3) = +\infty.$$

Az $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ parabola a függvény aszimptotája.



1.8. ábra