

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. c. tárgyból (GEMAN 151-B)

I. éves hallgatók részére

A változat

A dolgozat 20 ponttól számít sikeresnek.

1. Legyen H adott halmaz és $A, B, C \subset H$. Ha A, B, C páronként diszjunkt halmazok, akkor mivel egyenlő az

$$X = ((A \setminus B) \cap (C \setminus B)) \cup (\overline{C} \cap A) \cup (A \cap B \cap C)$$

halmaz? (5 pont)

2. Legyen $r = \{(a, a); (a, b); (a, c)\}$ az $A = \{a, b, c\}$ halmazon értelmezett reláció. Minimum hány rendezett elempárral kell kiegészíteni az r relációt, hogy reflexív és szimmetrikus legyen? Válaszát indokolja! (6 pont)

3. Igazolja teljes indukcióval az alábbi egyenlőséget! (6 pont)

$$\sum_{k=1}^n k(3k + 1) = n(n + 1)^2$$

4. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvény bijektív-e! Válaszát indokolja! (5 pont)

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = 3n$$

5. Adottak az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2n-1}{n^2+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ és a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{2^n}{3^n - 5^{n+1}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatok.

a) Konvergensek-e a megadott sorozatok? Válaszát indokolja! (4 pont)

b) Korlátosak-e az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatok? Válaszát indokolja! (4 pont)

c) Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Konvergencia esetén határozza meg a sor összegét! (8 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+1} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}}$$

6. Mondja ki a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia-kritériumot! Mutassa meg, hogy az

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sqrt{9n + n^2} - n \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ sorozat Cauchy-sorozat! (6 pont)}$$

7. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek! (6 pont)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n - 2} =$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{3n} =$

I. zárthelyi dolgozat a Matematikai analízis I. c. tárgyból (GEMAN 151-B)

I. éves hallgatók részére

B változat

A dolgozat 20 ponttól számít sikeresnek.

1. Legyen X adott halmaz, továbbá $A, B, C \subset X$ és $A \subset B \subset C$. Mivel egyenlő az

$$Y = \left((A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (A \cup C) \right) \setminus (A \cap B \cap C)$$

halmaz? (5 pont)

2. Legyen $q = \{(a, b); (a, c); (b, c)\}$ az $A = \{a, b, c\}$ halmazon értelmezett reláció. Minimum hány rendezett elempárral kell kiegészíteni a $q \subseteq A \times A$ relációt, hogy ekvivalenciareláció legyen? Válaszát indokolja! (6 pont)

3. Igazolja teljes indukcióval az alábbi egyenlőséget! (6 pont)

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

4. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvény bijektív-e! Válaszát indokolja! (5 pont)

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = 4n + 2$$

5. Adottak az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2n^2 + 8}{n^2 + 1} \right\}_{n=1}^{\infty}$ és a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{3^n}{7^{2n+1}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatok.

a) Konvergensek-e a megadott sorozatok? Válaszát indokolja! (4 pont)

b) Korlátosak-e az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatok? Válaszát indokolja! (4 pont)

c) Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Konvergencia esetén határozza meg a sor összegét! (8 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 8}{n^2 + 1} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{7^{2n+1}}$$

6. Mondja ki a sorozatokra vonatkozó rendőr-elvet! Mutassa meg, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sqrt[n]{4n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens! (6 pont)

7. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek! (6 pont)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 6n} - 2n) =$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2n} =$