



问题的解空间

如何求解问题？



思考题

- 王伯买鱼

- 王伯退休后开始养鱼。他一早起来就赶去公园，发现那里的鱼真不少。这些鱼实在太美了，买的人越来越多。但公园有规定：每种鱼，一个人最多只能买一条，并且有些鱼是不能一起买的，因为它们之间互相吞食。
- 王伯想买尽可能多的鱼，但很可惜，资金有限。他苦思冥想，不知如何是好。

- 请编写算法帮助他，如果有多个方案都能买尽可能多的鱼，选择所花资金最多的一个。

输入输出样例：

Sample input	注释	Output for the input
170 7	资金 鱼的种类	4 160 鱼条数 花费
1. 70	鱼编号 鱼的价格	2 鱼编号
2. 50		4
3. 30		5
4. 40		6
5. 40		
6. 30		
7. 20		
1. 4	不能共处	
1. 7		
3 4		
3 5		
5 7		
6 7		
0 0	输入结束	



如果我们真正地理解了问题，
就会自然而然得到答案，
因为答案和问题总是分不开的。

----克里希纳幕尔蒂 《企鹅读本》





搜索问题

- 从某种角度来看，所有问题都可以表述为搜索问题。
- 搜索的空间就是解的空间，而搜索就是在解的空间找出需要的一个。





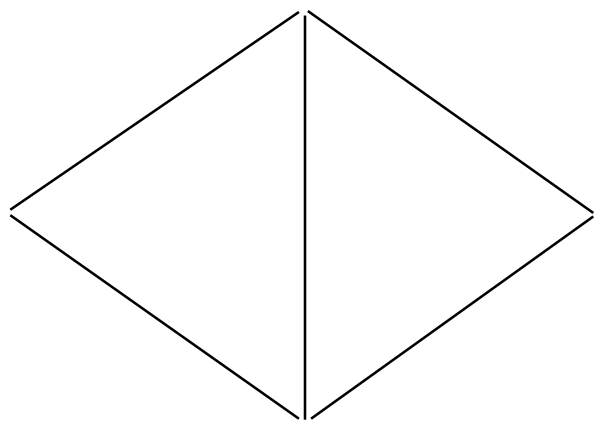
问题的解空间

复杂问题常常有很多的可能解，这些可能解构成了问题的解空间。解空间也就是进行穷举的搜索空间，所以，解空间中应该包括所有的可能解。确定正确的解空间很重要，如果没有确定正确的解空间就开始搜索，可能会增加很多重复解，或者根本就搜索不到正确的解。

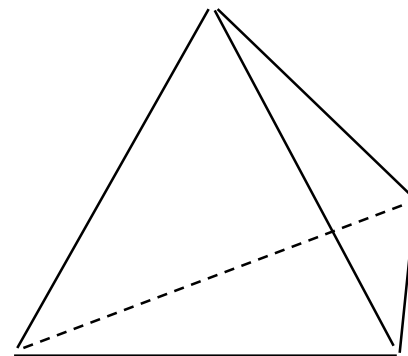




例如：桌子上有**6**根火柴棒，要求以这**6**根火柴棒为边搭建**4**个等边三角形。



(a) 二维搜索空间无解



(b) 三维搜索空间的解

图8.1 错误的解空间将不能搜索到正确答案





对于任何一个问题，解空间的大小与解的表达方式有关，可能解的**表示方式**和它相应的**解释**隐了解空间及其大小。

例如，对于有 n 个物品的0/1背包问题，其可能解的表示方式可以有以下两种：

(1) 可能解由一个**不等长向量**组成，当物品 $i(1 \leq i \leq n)$ 装入背包时，解向量中包含分量 i ，否则，解向量中不包含分量 i ，当 $n=3$ 时，其解空间是：

$$\{ (), (1), (2), (3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3) \}$$

(2) 可能解由一个**等长向量** $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 组成，其中 $x_i=1(1 \leq i \leq n)$ 表示物品 i 装入背包， $x_i=0$ 表示物品 i 没有装入背包，当 $n=3$ 时，其解空间是：

$$\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$



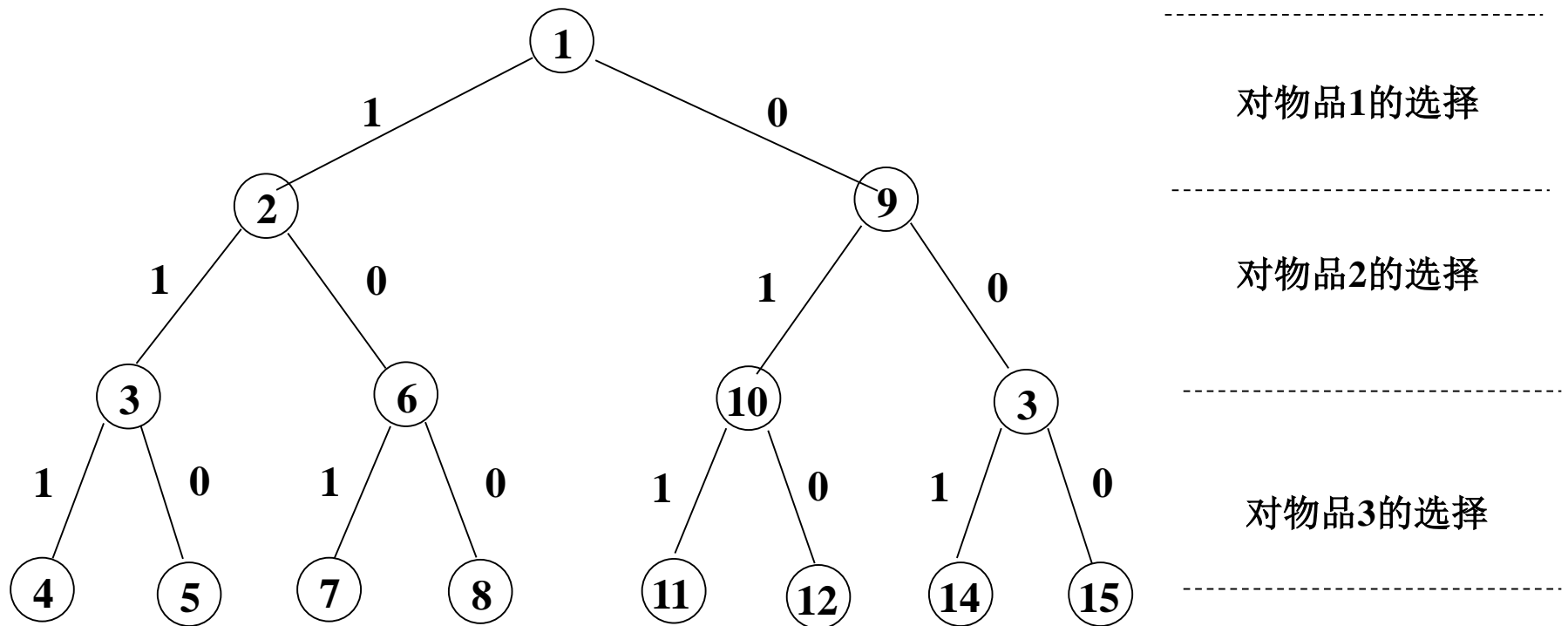

如何将解空间组织成能高效搜索的方式？可以将搜索空间组织成一棵树，即**解空间树**（Solution Space Trees,也称**状态空间树**）。

完整解在树的叶子上。沿着树的每一个分枝经过一系列的步骤来构造完整解。

从树的**根结点到叶子结点的路径**就构成了**解空间的一个可能解**。

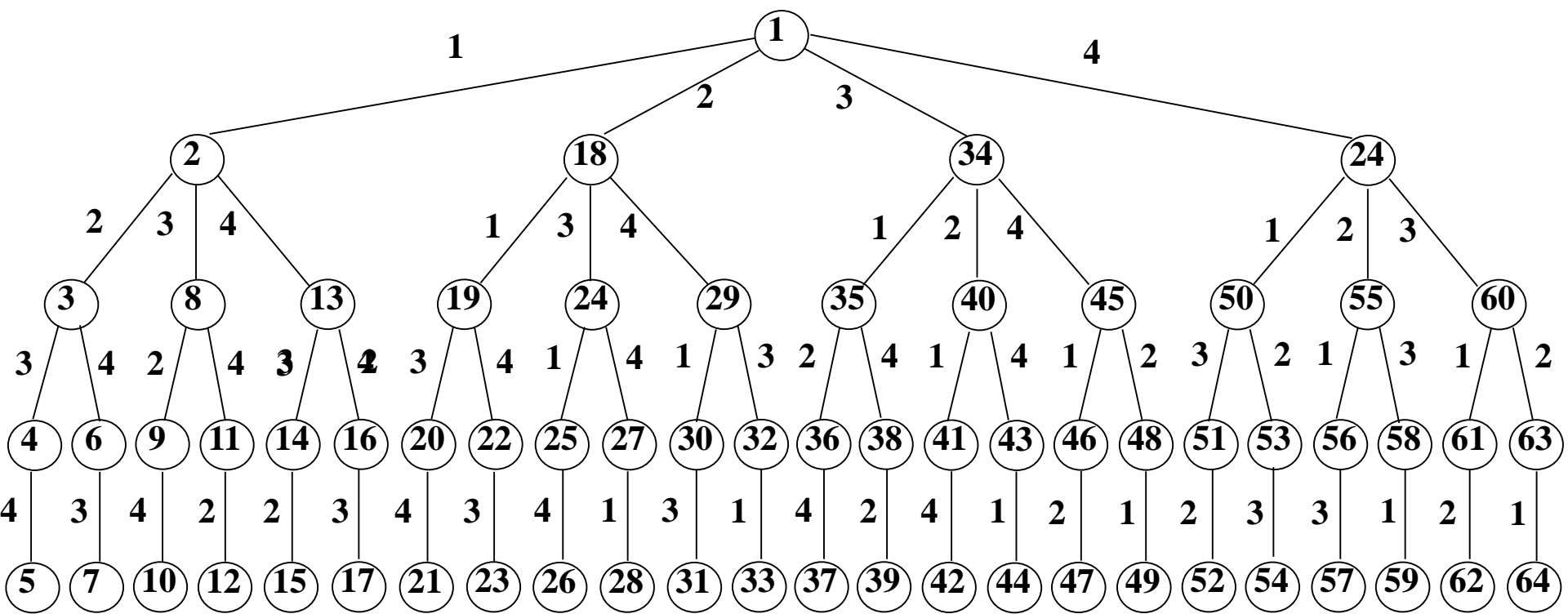


对于 $n=3$ 的0/1背包问题，其解空间树如图所示，树中的8个叶子结点分别代表该问题的8个可能解。





对于 $n=4$ 的TSP问题，其解空间树如图所示，树中的24个叶子结点分别代表该问题的24个可能解，例如结点5代表一个可能解，路径为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ ，长度为各边代价之和。



$n=4$ 的TSP问题的解空间树





- 对于大部分问题来说，其解空间的规模为输入规模的**指数函数**甚至更高。
- 寻找更加有效的搜索手段就是算法不断推进的源动力







实际问题难以求解的原因（一）

- 搜索空间中可能解的数目太多；
- 问题如此复杂以至于为得到任何解答，不得不采用问题的简化模型；
 - 求解问题过程：问题→模型→解
 - 无论何时求解一个实际问题，都要先建立一个模型。例：抛球轨迹是什么？抛物线？



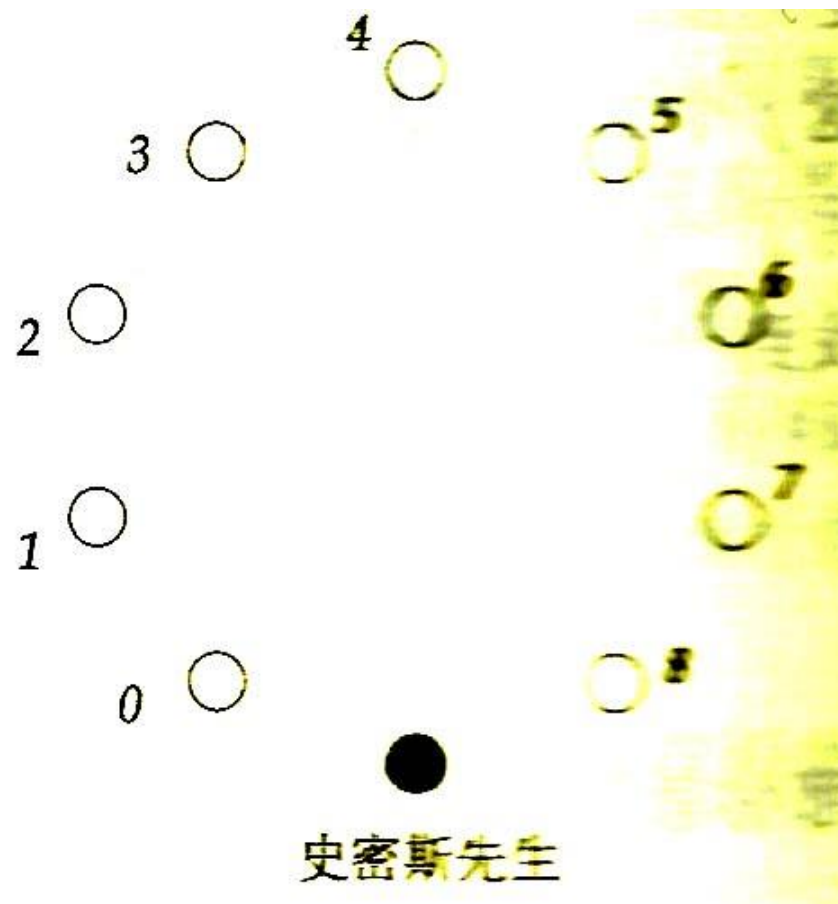


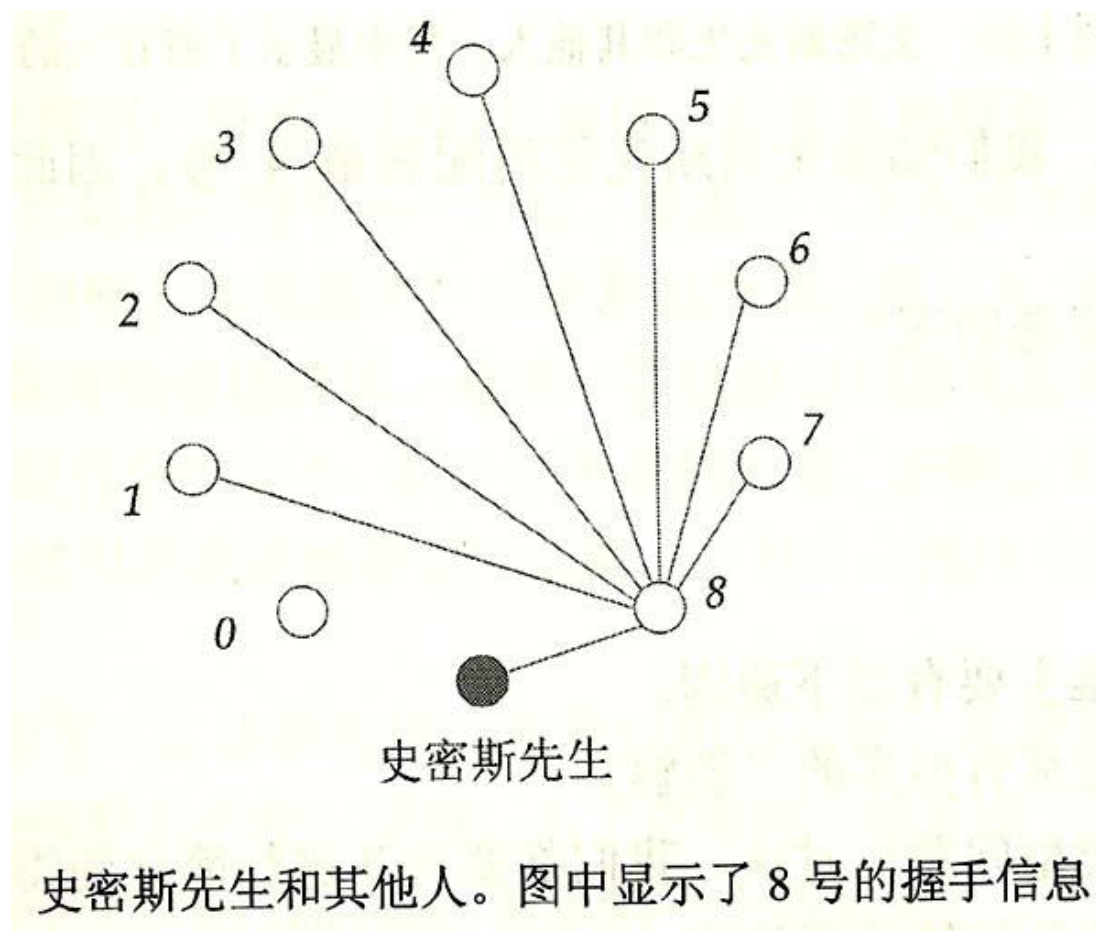
例：握手问题（爱丁堡大学Peter Ross提出）

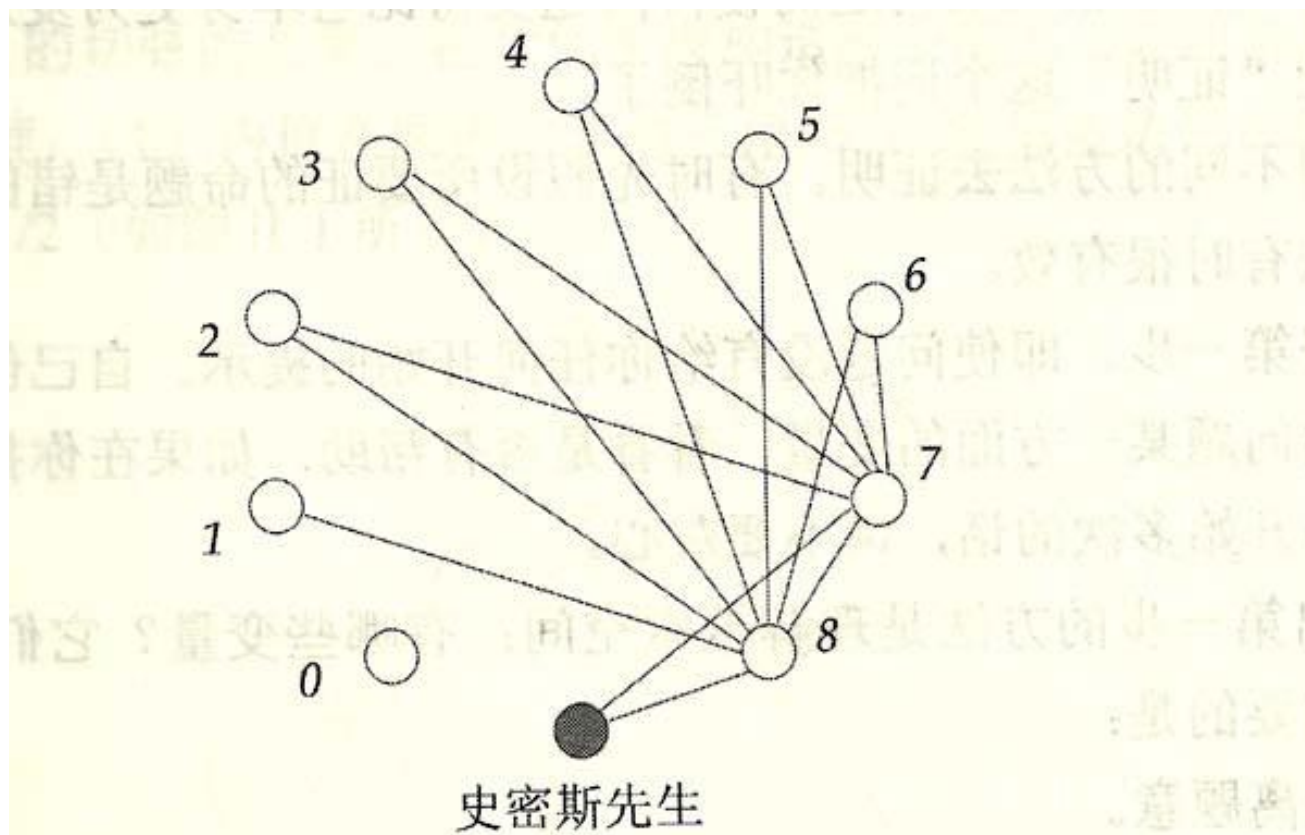
- 史密斯先生和太太请四对夫妻来参加晚会。每个人来的时候，房间里的一些人会与另外一些人握手。当然，每个人都不会与自己的配偶握手，也不会跟同一个人握手两次。
- 之后，史密斯先生问每个人和别人握了几次手，他们的答案都不一样。
- 那么，史密斯太太和别人握了几次手呢？





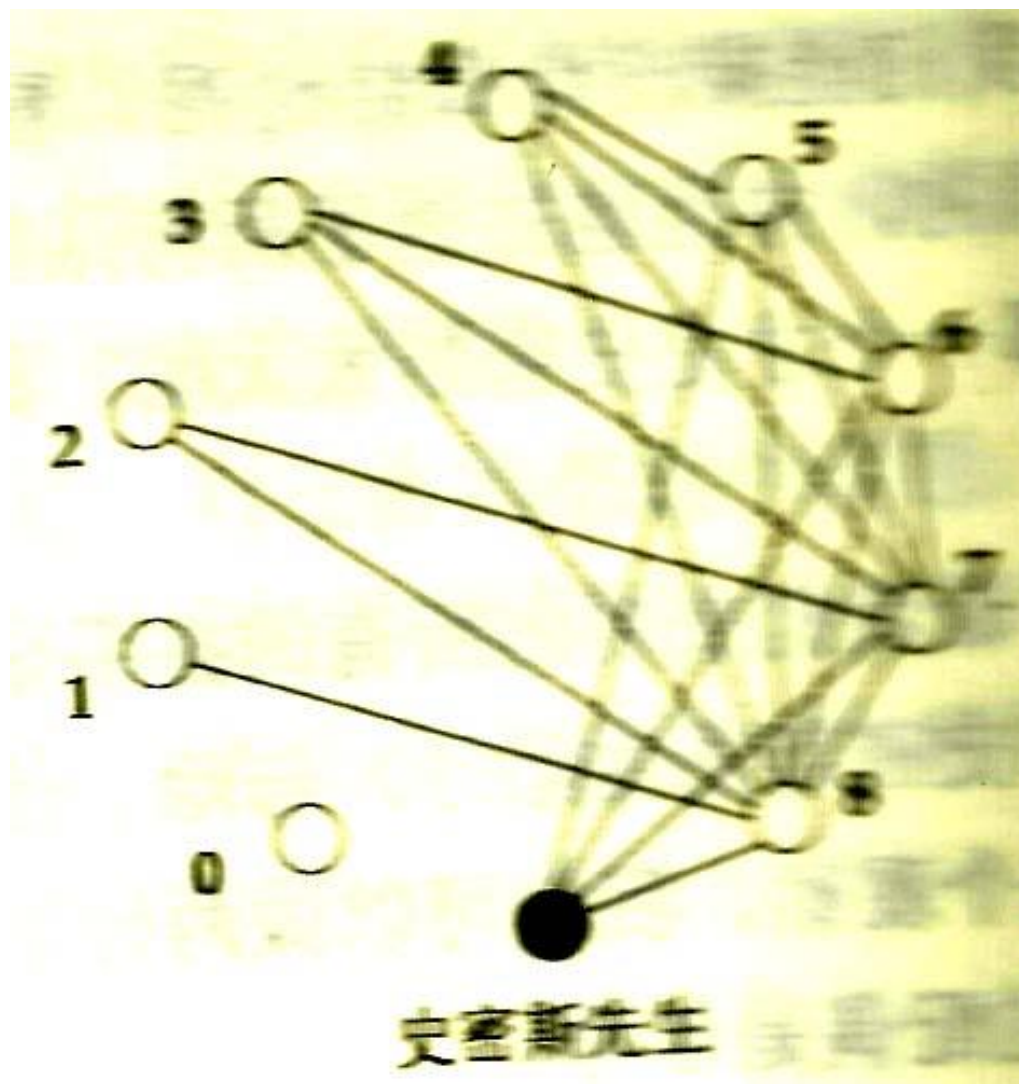






史密斯先生和其他人。图中显示了 7 号和 8 号的握手信息









实际问题难以求解的原因（二）

- 实际问题往往随时间而变；
- 实际问题往往存在很多约束条件；
 - 如排课表



思考题

- 王伯买鱼

- 王伯退休后开始养鱼。他一早起来就赶去公园，发现那里的鱼真不少。这些鱼实在太美了，买的人越来越多。但公园有规定：每种鱼，一个人最多只能买一条，并且有些鱼是不能一起买的，因为它们之间互相吞食。
- 王伯想买尽可能多的鱼，但很可惜，资金有限。他苦思冥想，不知如何是好。

- 请编写算法帮助他，如果有多个方案都能买尽可能多的鱼，选择所花资金最多的一个。

输入输出样例：

Sample input	注释	Output for the input
170 7	资金 鱼的种类	4 160 鱼条数 花费
1. 70	鱼编号 鱼的价格	2 鱼编号
2. 50		4
3. 30		5
4. 40		6
5. 40		
6. 30		
7. 20		
1. 4	不能共处	
1. 7		
3 4		
3 5		
5 7		
6 7		
0 0	输入结束	

分析

- 约束条件：
 - 资金有限
 - 有些鱼不能同时买
 - 每种鱼最多买一条
 - 上述要求满足情况下，要求买尽可能多的鱼。