力学的研究内容——机械运动

机械运动：物体在空间的位置随时间变化的运动。

静力学（平衡问题）

运动学（怎么运动）

动力学（为什么这样运动）

研究对象：质点力学、刚体力学

第一章 质点运动学

北京邮电大学
理学院物理系

本章内容

§1 质点运动的描述

§2 质点运动学的两类问题

§3 自然坐标系 切向加速度 法向加速度

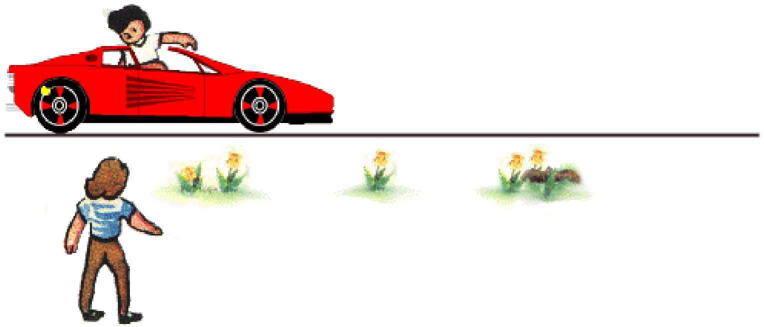
§4 相对运动

§1 质点运动的描述

1.1 参考系 & 坐标系

1、参考系

◆ 运动的绝对性与相对性



运动的绝对性:

所有的物体都在不停地运动，没有绝对不动的物体

运动的相对性:

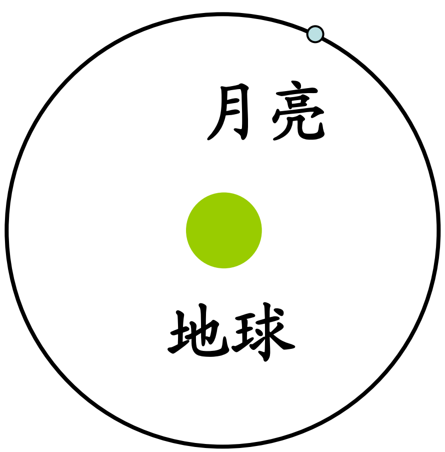
描述物体的运动或静止总是相对于某个选定的物体而言的

为描述物体运动而选择的参考物(或物体组)称为参考系

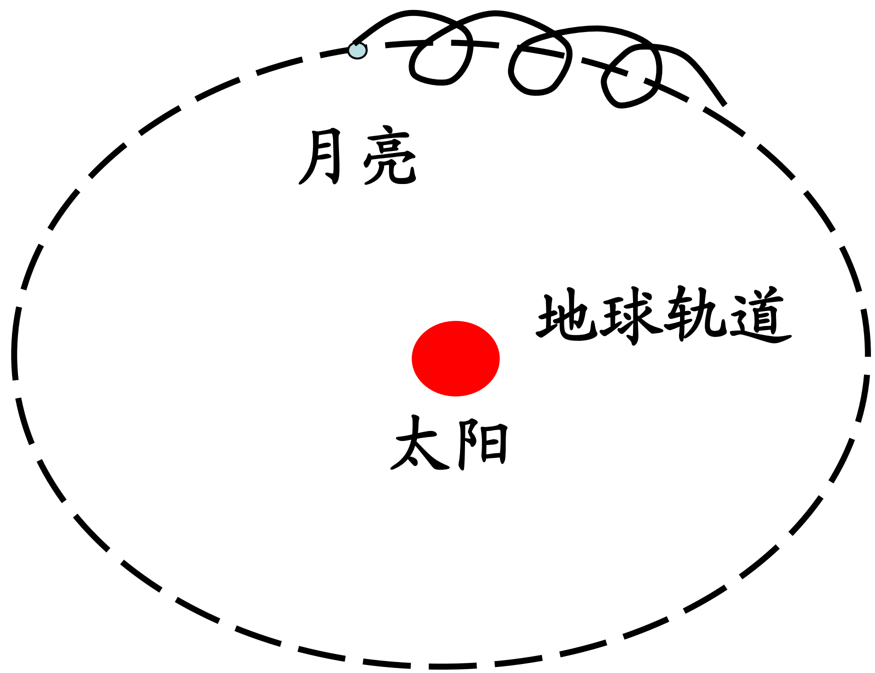
◆ 参考系的选择

可视描述的方便任选参考系。

选不同的参考系，运动的描述是不同的。



以地球为参考系

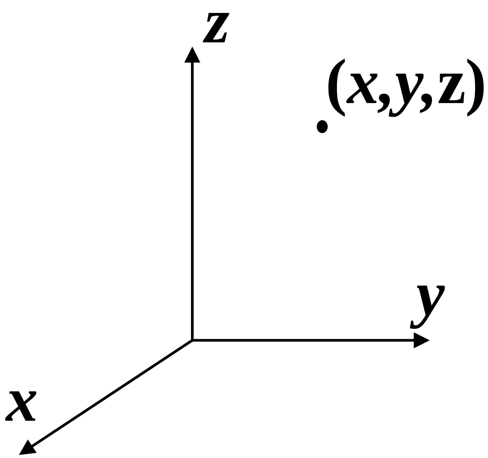


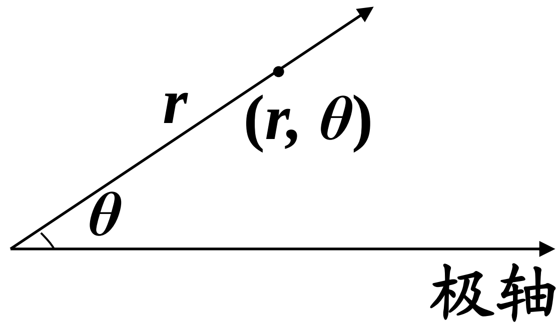
以太阳为参考系

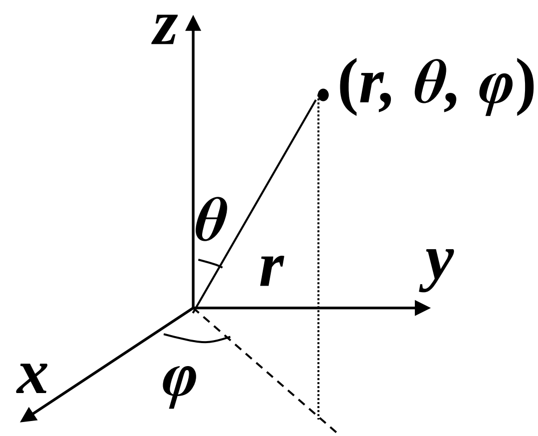
2、坐标系

定量地描述物体相对于参考系的运动。

•常用的坐标系







•直角坐标系

•自然坐标系

•极坐标系

•柱坐标系

•球坐标系

(球对称问题)

•坐标系的选择是任意的，由研究问题的方便而定。

•在同一参考系中，选择不同的坐标系，描述物体运动的方程是不同的，但对物体运动的规律并没有影响。

1.2 质点 & 质点系

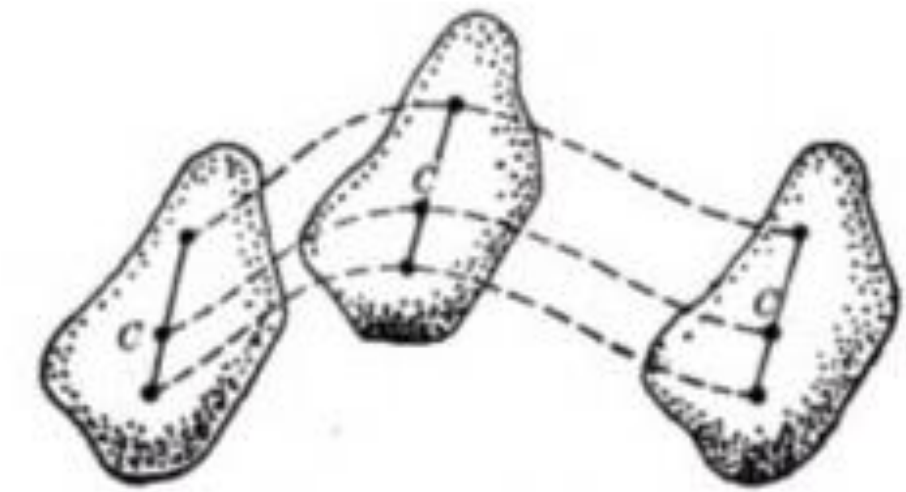
1、质点

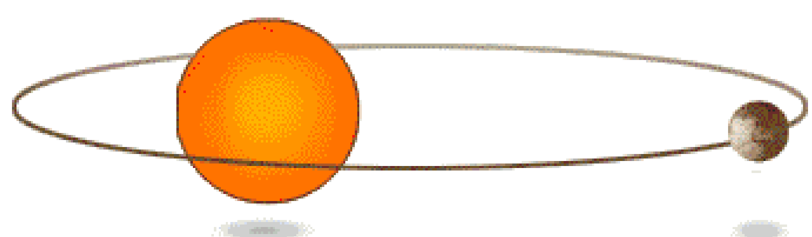
实际物体都具有：大小、形状、质量。

运动中物体上各部分的位置变化可能不同。

当物体做平动时，大小、形状可以不用考虑

物体本身线度<<活动范围,大小、形状可忽略





物体→只有质量而没有形状和大小的几何点。

质点: 理想模型，实际中并不存在。

对复杂问题进行抽象

→提出物理模型

→研究物质运动的基本规律。

2、质点系:

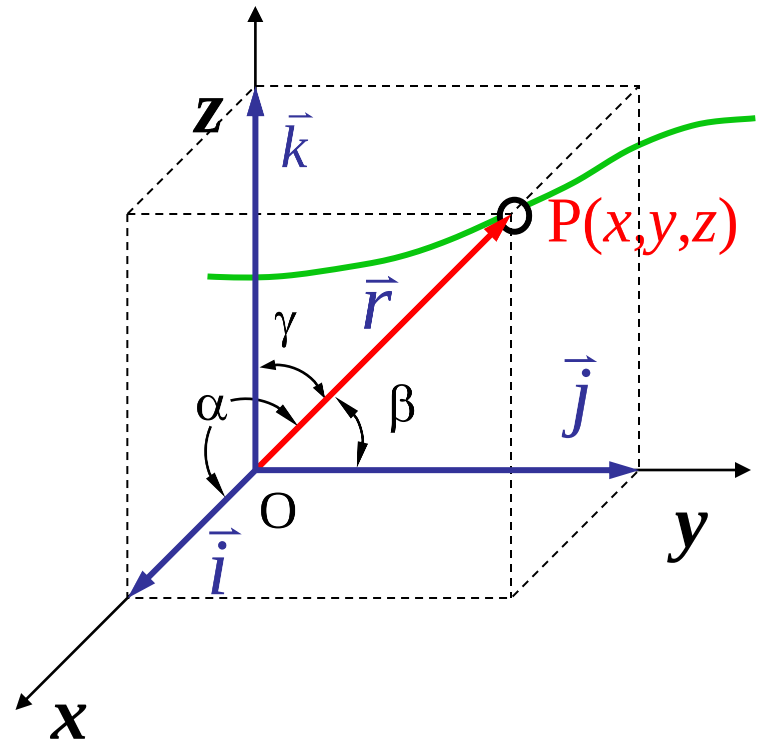
多个质点(质元)的组合

当物体不能简化为一个质点时，可以当做质点系

1.3 位置矢量、运动方程

1、位置矢量

从原点O到质点所在的位置P(x,y,z)的有向线段，叫做位置矢量或位矢



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\alpha = x/r$$

$$\cos\beta = y/r$$

$$\cos\gamma = z/r$$

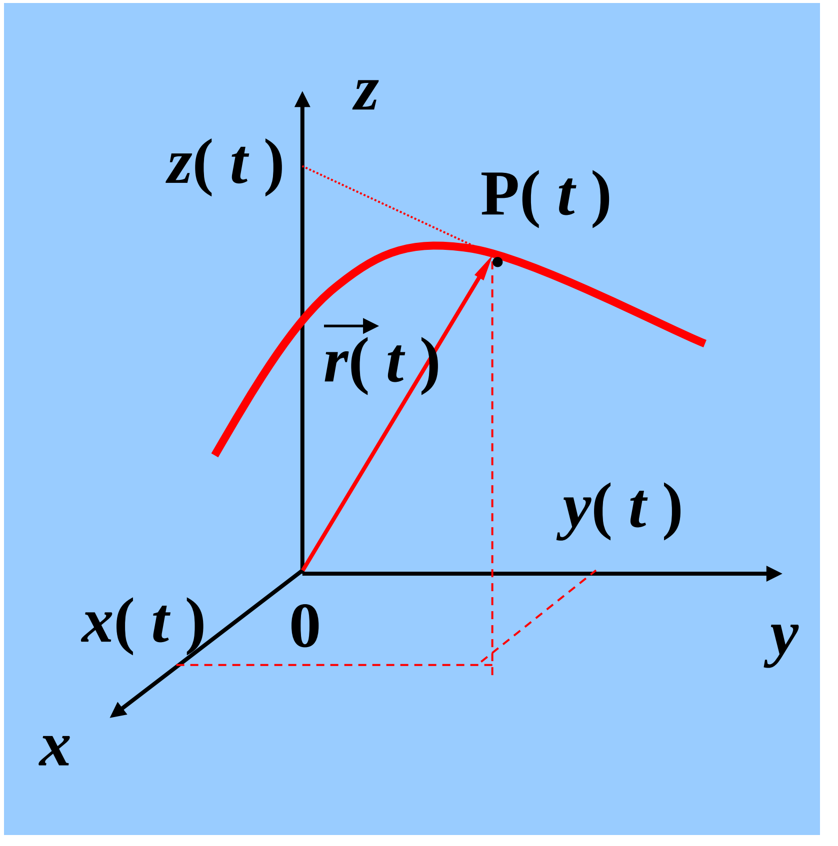
- 位矢是矢量：有大小和方向
- 与坐标原点的选取有关

2、运动方程

质点运动时，它相对坐标原点O的位置矢量*r*是随时间变化的。

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



运动学的任务之一，就是找出各种具体运动所遵循的运动方程。

质点运动时，在坐标系中描绘的曲线称为运动的轨迹。

3、轨迹方程

例、平抛运动的运动方程

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad y = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad \text{为轨迹方程}$$

例：已知一质点的位矢为

$$\vec{r}(t) = A_x \cos\omega t\, \hat{i} + A_y \sin\omega t\, \hat{j}$$

求：质点轨迹

$$x(t) = A_x \cos\omega t, \quad y(t) = A_y \sin\omega t, \quad z(t) = 0$$

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1, \quad z = 0$$

1.4 位移和路程

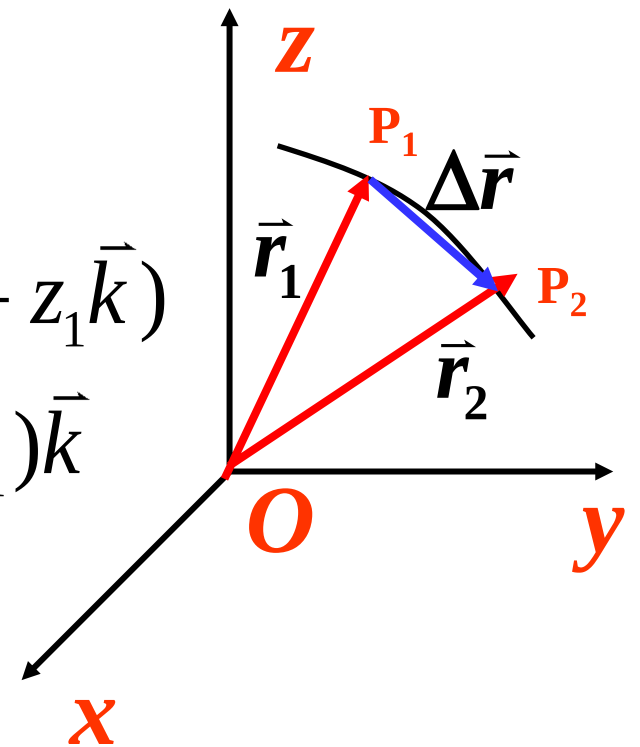
始末位置矢量的改变量

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$



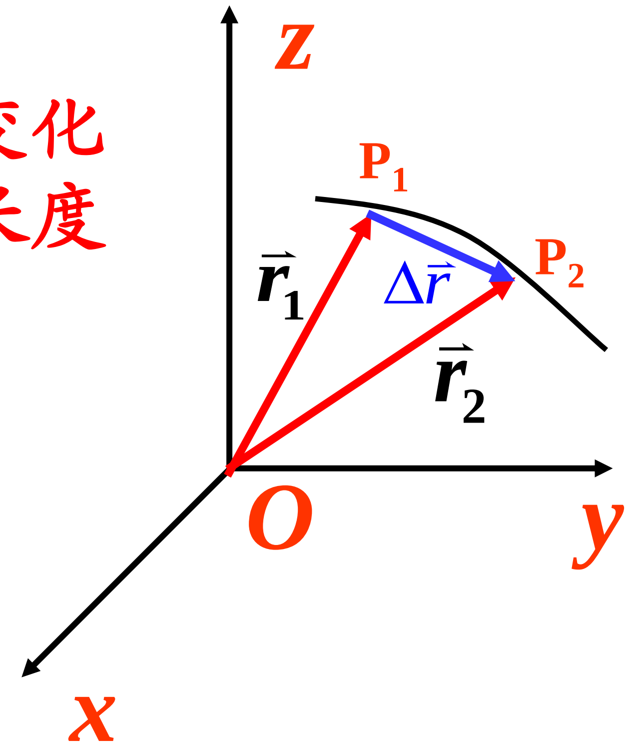
•位移是矢量

•在不改变参考系的情况下，与坐标原点的选择无关，而位矢与原点的选取有关

- 位移与路程的区别

  位移是矢量：是指位置矢量的变化

  路程是标量：是指运动轨迹的长度



位移的大小也不等同于路程

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$$

当Δt很小时近似相等

$$|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s$$

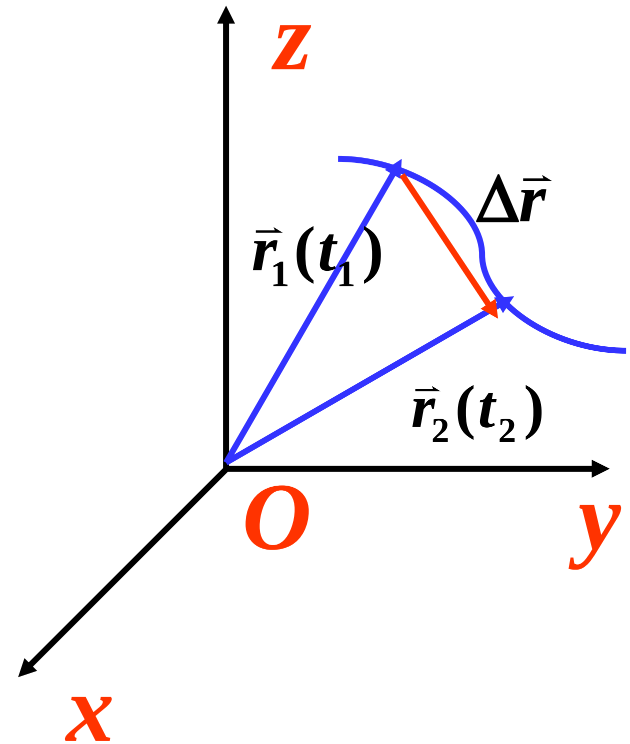
当$\Delta t \to 0$时 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\Delta\vec{r}| = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s$ 即 $|d\vec{r}| = ds$

$$|\Delta\vec{r}| = \Delta|\vec{r}|? \quad |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad \Delta|\vec{r}| = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1|$$

1.5 速度

1、平均速度

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$



2. 瞬时速度

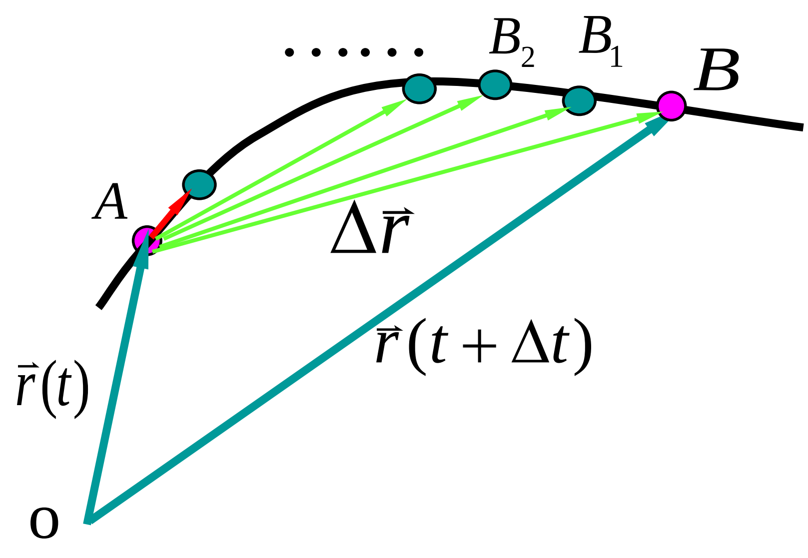
平均速度的极限值，简称速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

直角坐标系中

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$



3、说明

- 速度是矢量，即有大小又有方向。

  二者只要有一个变化，速度就变化——变速运动

  $\vec{v}=$常矢量——匀速运动

- 速度的大小称为速率

$$v=|\vec{v}|=\frac{|d\vec{r}|}{dt}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

  速率又等于质点所走过的路程对时间的变化率。

- 速度具有瞬时性：

  运动质点在不同时刻的速度是不同的；

- 速度具有相对性：

  在不同参考系中，同一质点的速度不同。

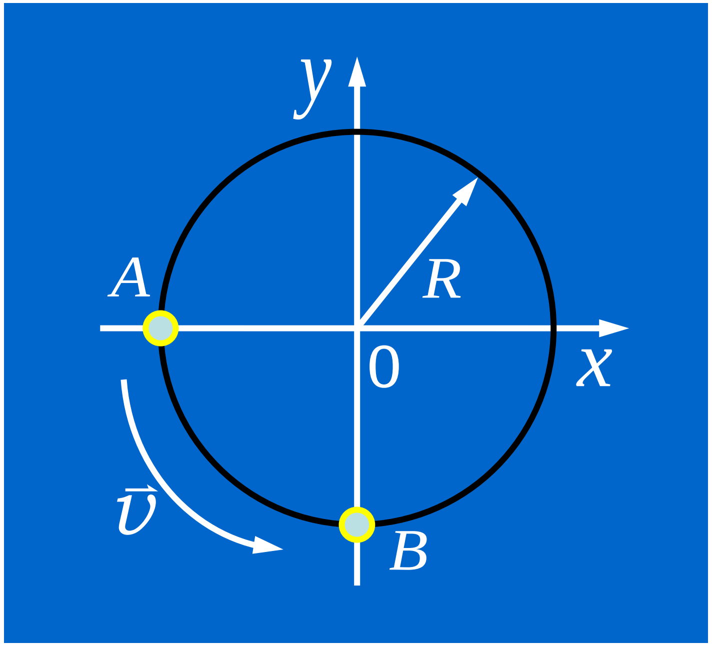
例：质点作半径为R，速率为v的匀速率圆周运动。

试写出由A点到B点下列各物理量：

位移 $\Delta\vec{r}$　　路程 s　　速度变化 $\Delta\vec{v}$

速度变化的大小 $|\Delta\vec{v}|$

速率的变化 Δv



解：位移 $\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$

$$=-R\vec{j}-(-R\vec{i})=R\vec{i}-R\vec{j}$$

路程　$s=\dfrac{1}{2}\pi R$

速度变化 $\Delta\vec{v}=\vec{v}_B-\vec{v}_A=v\vec{i}-(-v\vec{j})=v\vec{i}+v\vec{j}$

速度变化的大小　$|\Delta\vec{v}|=\sqrt{v^2+v^2}=\sqrt{2}v$

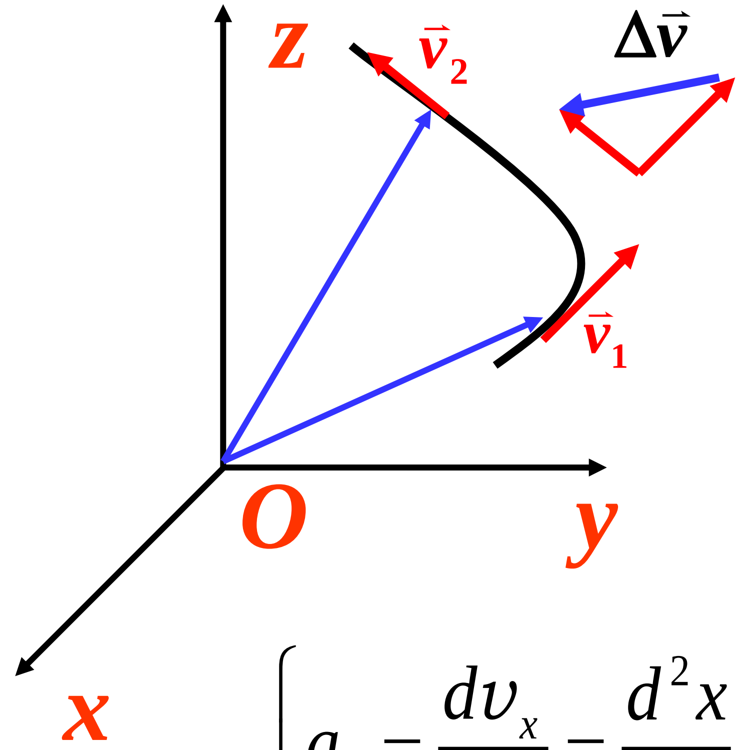
$$\boxed{|\Delta\vec{v}|\neq\Delta|\vec{v}|}$$

速率的变化　$\Delta v=v-v=0$

1.6 加速度

1、平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1}$$



2、瞬时加速度

平均加速度的极限值，简称加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

方向：$\Delta t \to 0$时速度变化量的极限方向

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dfrac{d^2 x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = \dfrac{d^2 y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = \dfrac{d^2 z}{dt^2} \end{cases}$$

§2 质点运动学的两类问题

第一类问题

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad \vec{\upsilon}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

第二类问题

2.1 第一类问题

由质点的运动方程，求质点在任意时刻的速度和加速度

——微分法

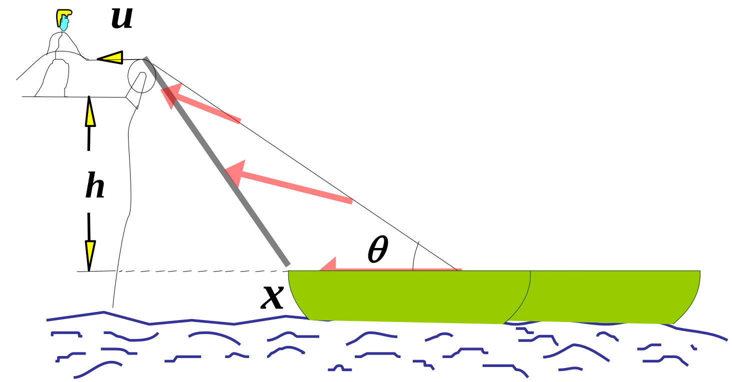
- 只要知道运动方程，就可以确定质点在任意时刻的位置、速度和加速度。

例： 高为h的岸边，人以恒定速率u收绳，使船靠岸

求： 当船头与岸的水平距离为x时，船的速度与加速度

解： ~~船速为u的水平分量~~

$$\cancel{v = u\cos\theta = \frac{ux}{\sqrt{x^2+h^2}}}\ ?$$



•船是在沿绳方向运动吗？

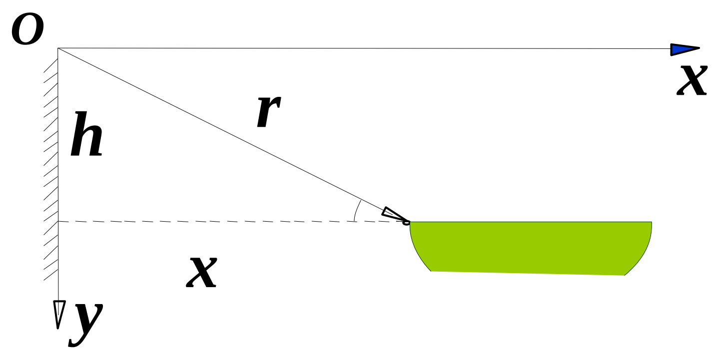
不管怎么进行速度分解，船的合运动都是水平向左！

u只是船沿绳方向的分速度 $\therefore v = \dfrac{u}{\cos\theta} = \dfrac{u\sqrt{x^2+h^2}}{x}$

•u是绳上各点的速度吗？ 也只是沿绳方向的分速度

对绳上各点，其速度的大小、方向各不相同

解:以滑轮处为坐标原点，建立直角坐标系



船头的位置矢量 $\vec{r} = x\vec{i} + h\vec{j}$

绳子长度即位置矢量的模 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + h^2}$

根据题意，绳子长度以速率 **u** 减小，则

$$\frac{dr}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\frac{dx}{dt} = -u \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{u\sqrt{x^2+h^2}}{x}$$

所以，船的速度

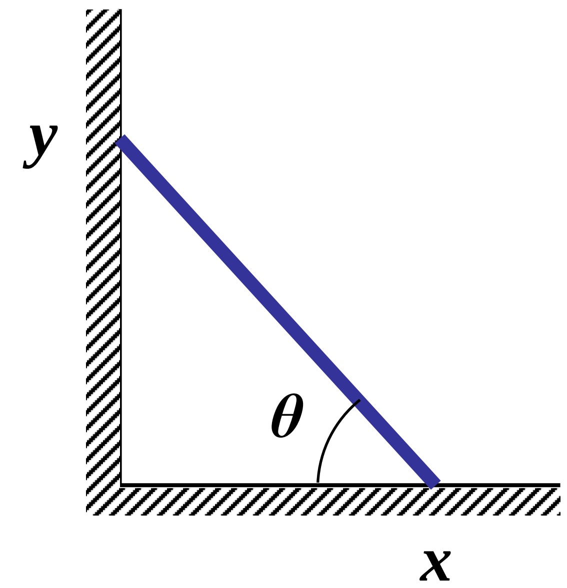
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} = -\frac{u\sqrt{x^2+h^2}}{x}\vec{i}$$

加速度 $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{h^2u}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{dx}{dt}\vec{i} = -\frac{h^2u^2}{x^3}\vec{i}$$

➢ 已知位置关系可求得速度和加速度关系

例: 棍子斜靠在竖直墙面并开始滑动，当其与地面夹角为 θ 时测得地面端速度水平向右，大小为 u。

求: 此时靠墙端速度 。



解: 建立直角坐标系，设地面端横坐标为 x，靠墙端纵坐标为 y，棍子长度为 l，则 $x^2+y^2=l^2$

两边同时对时间求导得

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

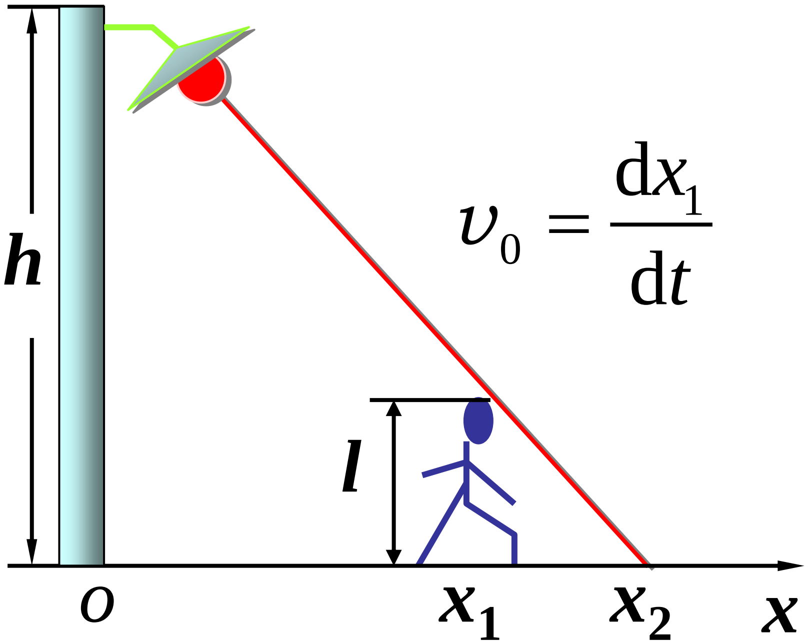
靠墙端速度 $\vec{v}=\frac{dy}{dt}\vec{j}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}\vec{j}=-u\cot\theta\vec{j}$

例：路灯距地面高度h，身高为l的人以速度v_0在路上匀速行走。

求：人影头部的移动速度。

解：设v为人影头部的移动速度

$$v_0 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$$



$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

由几何关系

$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{x_2}{h} \qquad (h-l)x_2 = hx_1$$

两边求导 $(h-l)\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = h\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \upsilon_0$ $\qquad \upsilon = \dfrac{h\upsilon_0}{h-l}$

2.2 第二类问题 ——积分法

由质点运动的速度或加速度，并附以初始条件（即**$t=t_0$**时，质点的位置$\vec{r}_0$和速度$\vec{v}_0$），求质点的运动方程。

a.加速度是时间函数 $a=a(t)$ （以一维为例）

$$\mathrm{d}v=a(t)\mathrm{d}t \longrightarrow v(t)-v_0=\int_{t_0}^{t}a(t)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}x=v(t)\mathrm{d}t \longrightarrow x(t)-x_0=\int_{t_0}^{t}v(t)\mathrm{d}t$$

b.加速度是坐标函数 $a=a(x)=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dv}{dx}v$

$$v\mathrm{d}v=a(x)\mathrm{d}x \longrightarrow v^2(x)-v_0{}^2=2\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{v(x)} \longrightarrow t(x)-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{v(x)}$$

c.加速度是速度函数 $a=a(\upsilon)=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{dt}=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{dx}\dfrac{\mathrm{d}x}{dt}=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{dx}\upsilon$

①欲求速度与时间关系 $\upsilon=\upsilon(t)$

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{a(\upsilon)} \Longrightarrow t(\upsilon)-t_0=\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{a(\upsilon)}$$

$$\mathrm{d}x=\upsilon(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow x(t)-x_0=\int_{t_0}^{t}\upsilon(t)\mathrm{d}t$$

②欲求速度与坐标关系 $\upsilon=\upsilon(x)$

$$\mathrm{d}x=\upsilon\frac{\mathrm{d}\upsilon}{a(\upsilon)} \Longrightarrow x(\upsilon)-x_0=\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{\upsilon\mathrm{d}\upsilon}{a(\upsilon)}$$

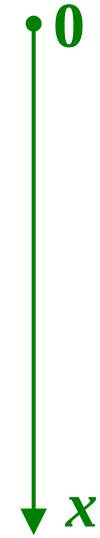
$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{\upsilon(x)} \Longrightarrow t(x)-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\upsilon(x)}$$

例: 一物体从空中由静止下落。已知 $a = g - Bv$

式中**g**为重力加速度，**B**为常量。

求: 物体的速度和运动方程。

解: 选下落起点为坐标原点，向下为*x*轴正向



（1） $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - Bv$

分离变量并两边积分 $\displaystyle\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{g - }Bv} = \int_0^t \mathrm{d}t \;\Rightarrow\; v = \frac{g}{B}(1 - e^{-Bt})$

$t \to \infty$时, $v \to g/B$，达到最大，称为收尾速度或终极速度

（2）由 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 求运动方程

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; x = \int_0^t \frac{g}{B}(1 - e^{-Bt})\mathrm{d}t = \frac{g}{B}t - \frac{g}{B^2}(1 - e^{-Bt})$$

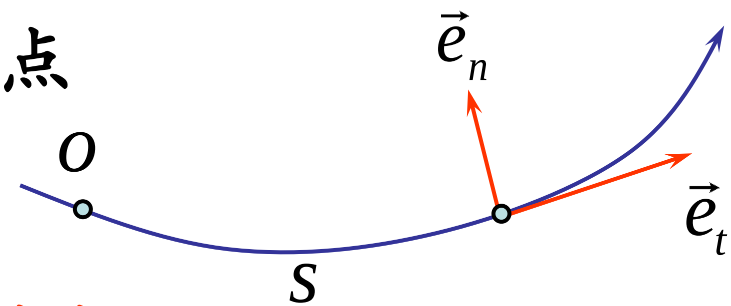
§3 自然坐标系 切向加速度 法向加速度

3.1 自然坐标系

自然坐标系建立在物体运动的已知轨迹上，

选定该轨迹曲线上一点为坐标原点

质点运动方程 $s=s(t)$



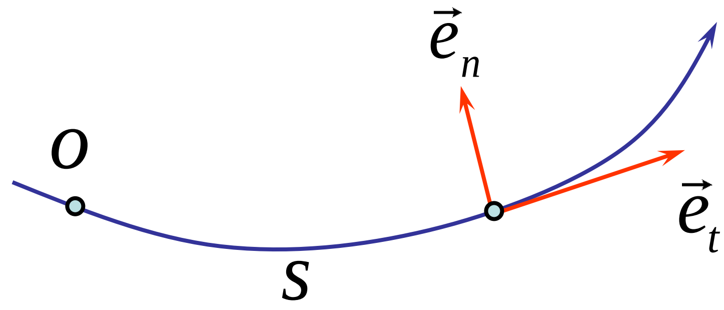
有两个坐标轴，切向坐标和法向坐标。

$\vec{e}_t$ 切向单位矢量,与曲线相切且指向轨迹前进方向。

$\vec{e}_n$ 法向单位矢量,垂直于切向且指向轨迹曲线凹侧。

不是恒矢量,方向随质点的位置而变化。

自然坐标系中速度的表示:



$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \vec{e}_t$$

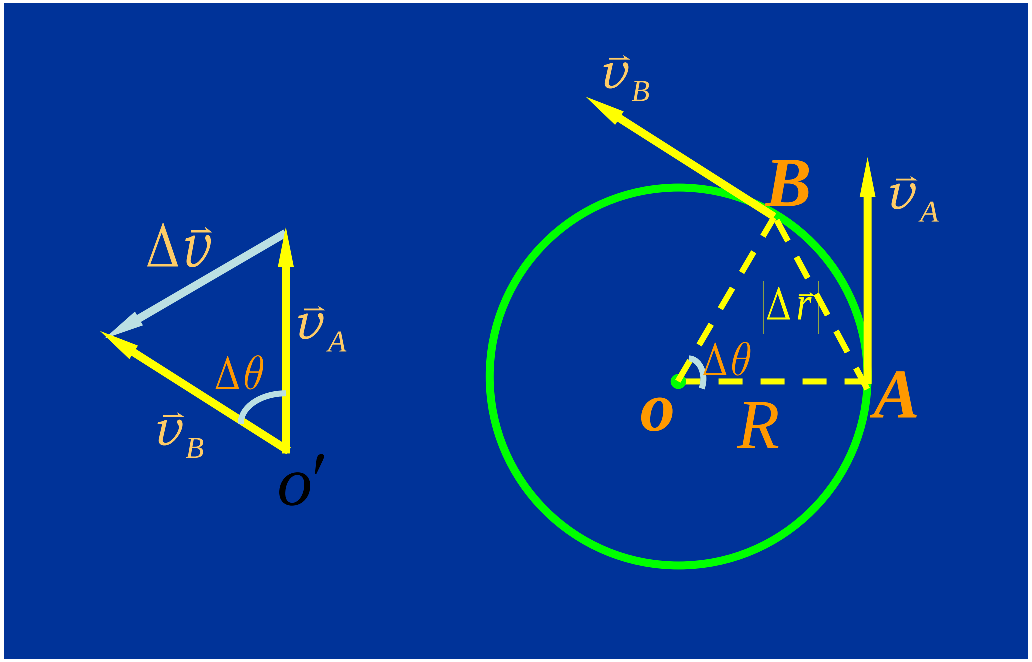
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t = v\vec{e}_t$$

3.2 匀速率圆周运动中的加速度

质点作半径为**R**速率为**v**的匀速率圆周运动

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$



•大小

$$a = |\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

由几何关系

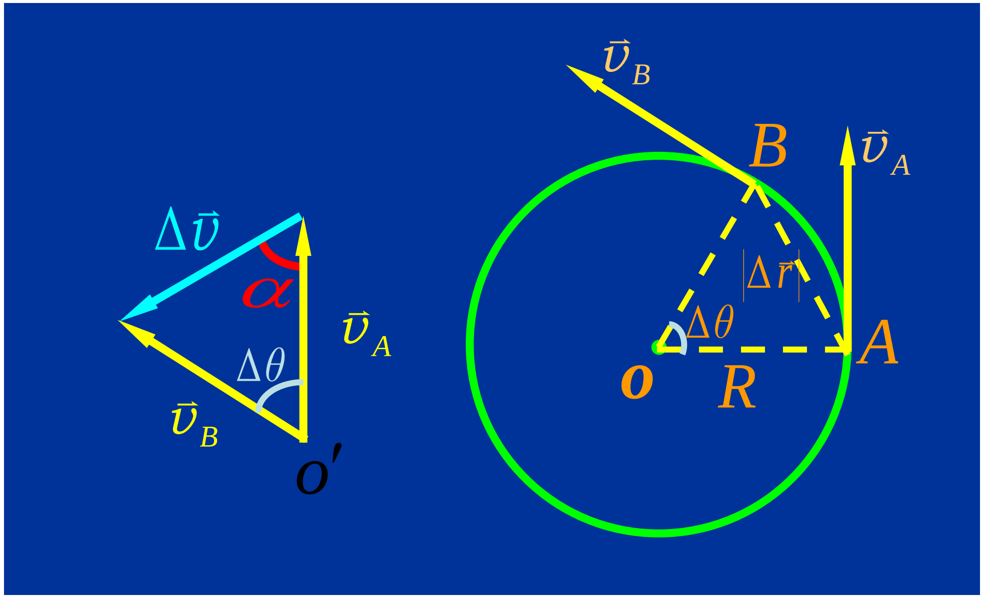
$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{v}{R} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v}{R}|\Delta\vec{r}| \qquad a = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

•方向

$$\alpha=\frac{1}{2}(\pi-\Delta\theta)$$

当$\Delta t\to 0$时，$\Delta\theta\to 0$

$a\to\pi/2$，即 $\vec{a}\perp\vec{\upsilon}_A$



质点在A点处的加速度方向垂直于A点的速度方向，沿半径**指向圆心**，称为**法向加速度**，以a_n表示。

$$\vec{a}=a_n\vec{e}_n=\frac{\upsilon^2}{R}\vec{e}_n \qquad \frac{\upsilon^2}{R}>0$$ 方向始终指向**曲线凹侧**

3.3 变速率圆周运动中的加速度

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$$

$$\Delta\vec{v}=\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}+\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}$$

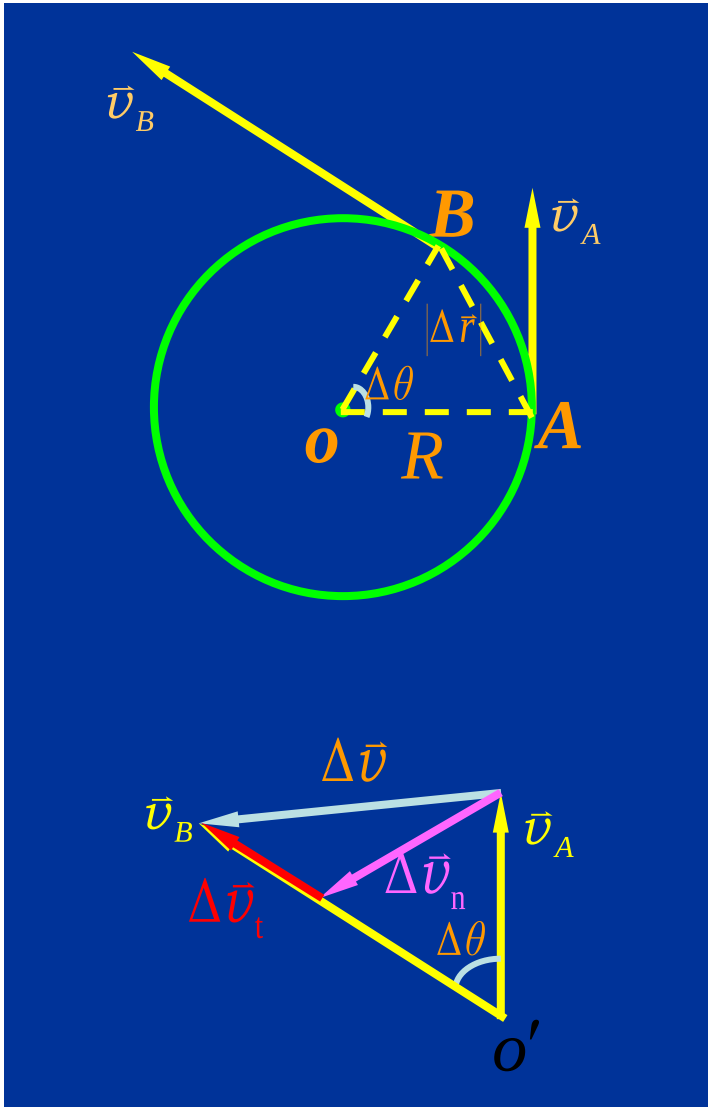
$\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}$ 反映速度方向变化。

$\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}$ 反映速度大小变化。

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{\mathrm{n}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t}\qquad \vec{a}_{\mathrm{t}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$$

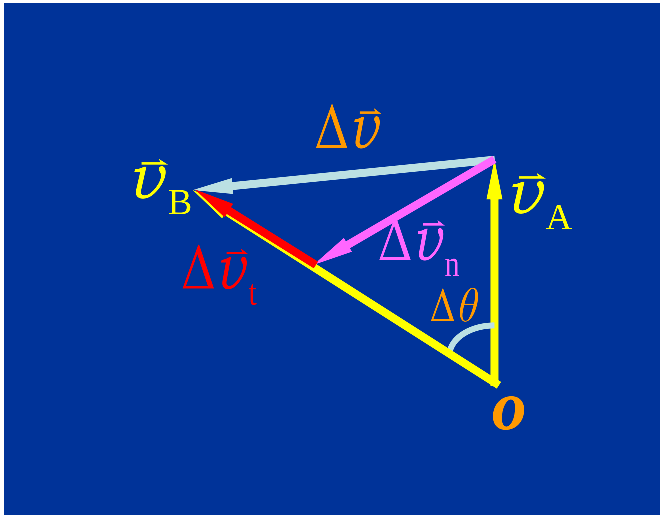
$$\vec{a}=\vec{a}_{\mathrm{n}}+\vec{a}_{\mathrm{t}}$$



法向加速度

$$a_{\mathrm{n}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{\upsilon}_{\mathrm{n}}|}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{R}$$

方向始终指向圆心



$$\vec{a}_{\mathrm{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$$

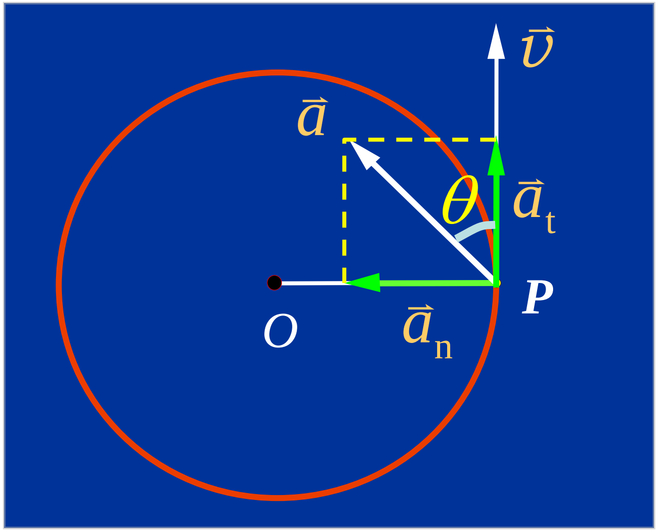
• 大小 $\quad |\Delta \vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}| = |\vec{\upsilon}_{\mathrm{B}}| - |\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}| = \Delta \upsilon$

$$a_{\mathrm{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

• 方向与速度的方向相同，或相反 ——切向加速度

自然坐标中，变速圆周运动的总加速度

$$\vec{a}=\vec{a}_{\mathrm{n}}+\vec{a}_{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}$$



•大小

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^{2}+a_{\mathrm{n}}^{2}}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^{2}+\left(\frac{v^{2}}{R}\right)^{2}}$$

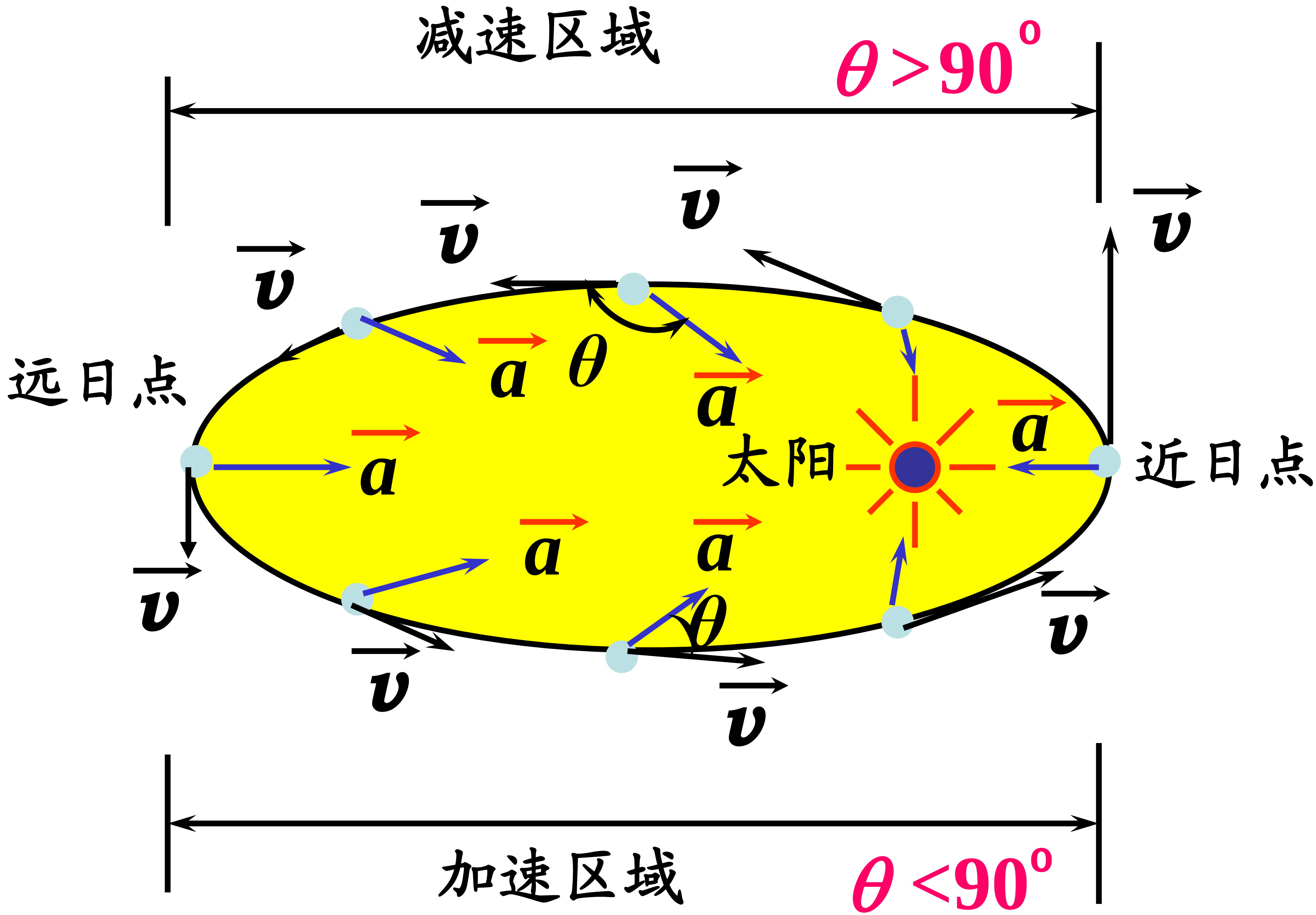
$$a=\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \neq \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}=\frac{dv}{dt}$$

$\theta<\pi/2$ ？

$\theta>\pi/2$ ？

$\theta=\pi/2$ ？

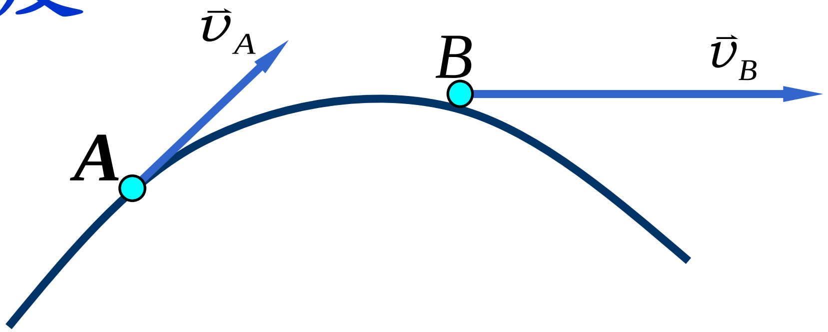
•方向 $\theta=\arctan\dfrac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$ θ为速度与加速度之间的夹角



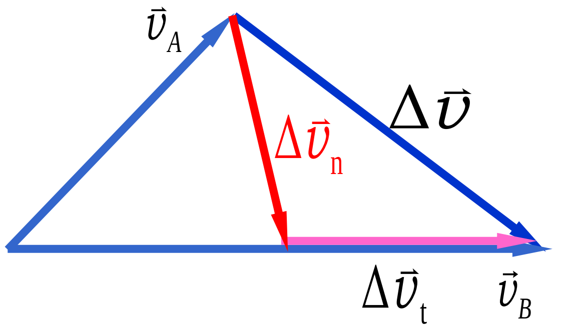
减速区域
$\theta > 90^{\circ}$
远日点
近日点
太阳
$\vec{v}$
$\vec{a}$
θ
加速区域
$\theta < 90^{\circ}$

3.4 一般曲线运动的加速度

$$\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_B-\vec{\upsilon}_A$$



$$\Delta\vec{\upsilon}=\Delta\vec{\upsilon}_{\mathrm{n}}+\Delta\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}$$

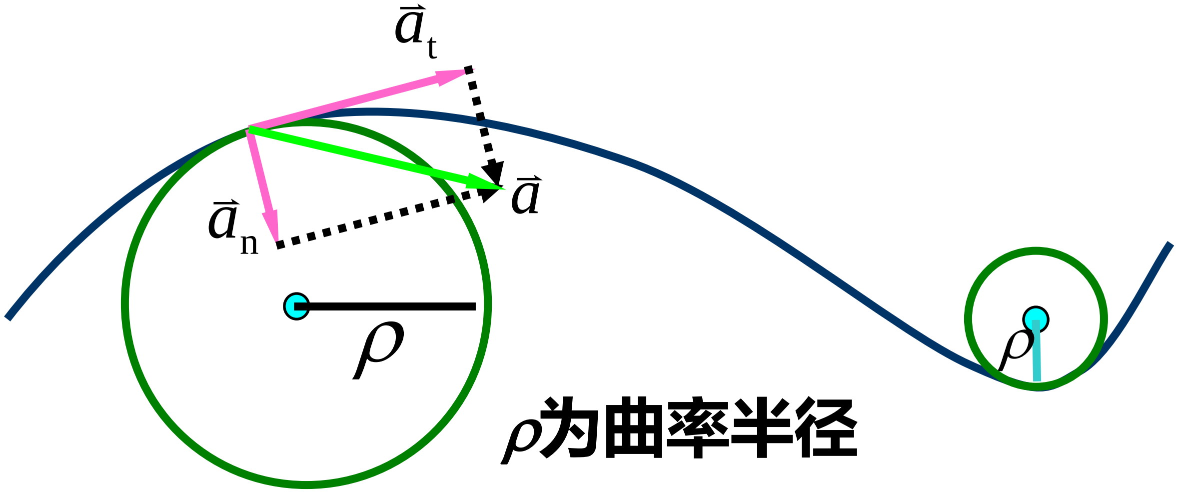


$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_{\mathrm{n}}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$$

“以圆代曲”

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{\upsilon^2}{\rho}$$

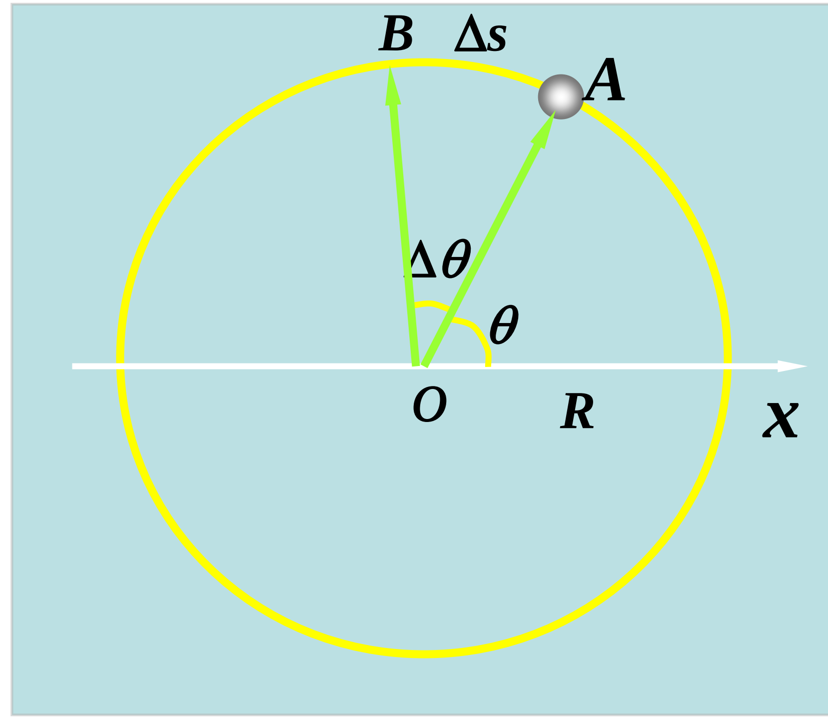
$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$$



ρ为曲率半径

3.5 圆周运动的角量描述

角位置 θ



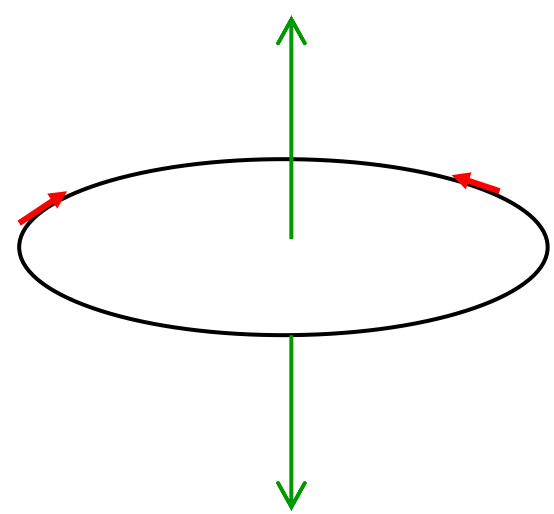
单位：弧度（*rad*）

$$\theta=\theta(t)$$

角位移 $\Delta\theta$

沿逆时针转动，$\Delta\theta$ 为正；

沿顺时针转动，$\Delta\theta$ 为负。



角速度 $$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度 $$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

角位置　　角速度　　角加速度

$$\theta = \theta(t) \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

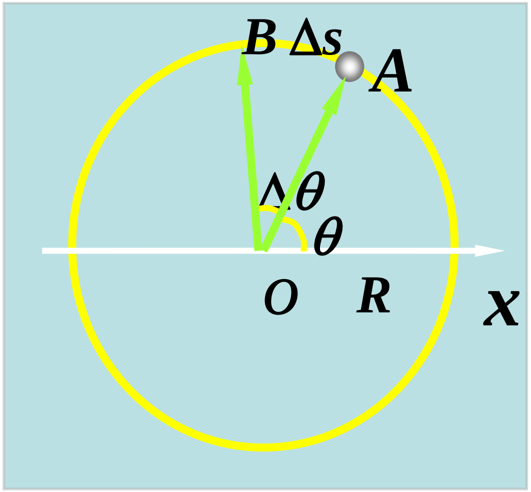
- 对匀速率圆周运动: $\omega = const.$
- 对匀变速率圆周运动: $\beta = const.$

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$$

➢ 角量和线量的关系：



$$\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \qquad a_{\mathrm{n}} = \frac{\upsilon^2}{R} = R\omega^2$$

$$\upsilon = R\omega \qquad a_{\mathrm{t}} = R\beta \qquad a_{\mathrm{n}} = R\omega^2$$

3.6 自然坐标中的运动学问题

自然坐标中质点运动学问题也分为两类问题。

1. 第一类问题：已知自然坐标中运动方程 $s(t)$，求质点运动的速度、切向加速度、法向加速度，用求导法。

2. 第二类问题：已知质点运动的速度或切向加速度及初始条件，求运动方程，用积分法。

3. 质点的圆周运动可用线量描述也可用角量描述。

例: 质点沿半径为*R*的圆周按 $s=\upsilon_0 t-\frac{b}{2}t^2$ 运动，式中*s*为自然坐标，v_0、*b*为正的常量。

求: (1) 质点的加速度；(2) 质点的角速度、角加速度；

解: (1)本题是自然坐标的第一类问题。

先求出速率 $$\upsilon=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\upsilon_0-bt$$

$$t=\frac{\upsilon_0}{b} \quad ?$$

$$t>\frac{\upsilon_0}{b} \quad ?$$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=-b \qquad a_{\mathrm{n}}=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{(\upsilon_0-bt)^2}{R}$$

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{n}}{}^2+a_{\mathrm{t}}{}^2}$$
$$=\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(\upsilon_0-bt)^4}$$

$$\tan\theta=\frac{(\upsilon_0-bt)^2}{-Rb}$$

求: (2) 质点的角速度、角加速度;

(2) 用角量描述的运动方程

$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{\upsilon_0}{R}t-\frac{b}{2R}t^2$$

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\upsilon_0}{R}-\frac{b}{R}t$$

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{b}{R}$$

求: (3) 法向加速度和切向加速度数值相等前，质点运动的时间。

(3) $\left|a_{\mathrm{t}}\right|=\left|a_{\mathrm{n}}\right|$

$$b=\frac{(\upsilon_0-bt)^2}{R}$$

解出 $t=\dfrac{\upsilon_0}{b}-\sqrt{\dfrac{R}{b}}$

例：求抛体运动轨道顶点处的曲率半径。

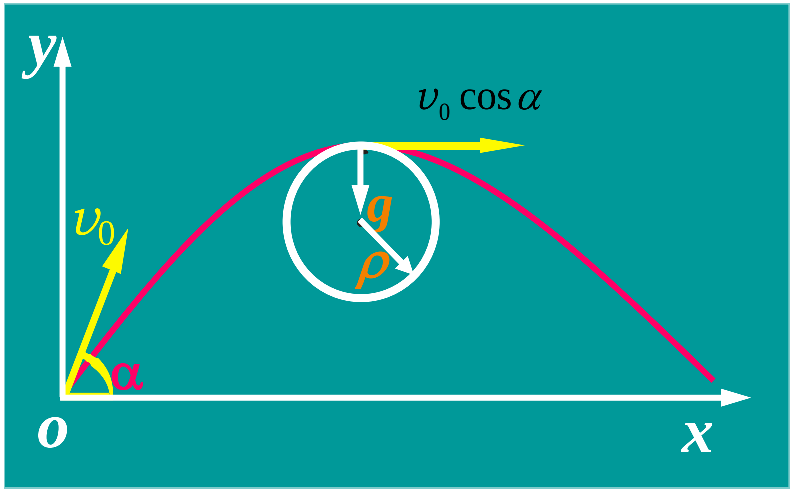
解：在抛物线轨道的顶点处，

质点的速度只有水平分量

$v_0\cos\alpha$，

而加速度沿法线方向，

即 $a_n = g$



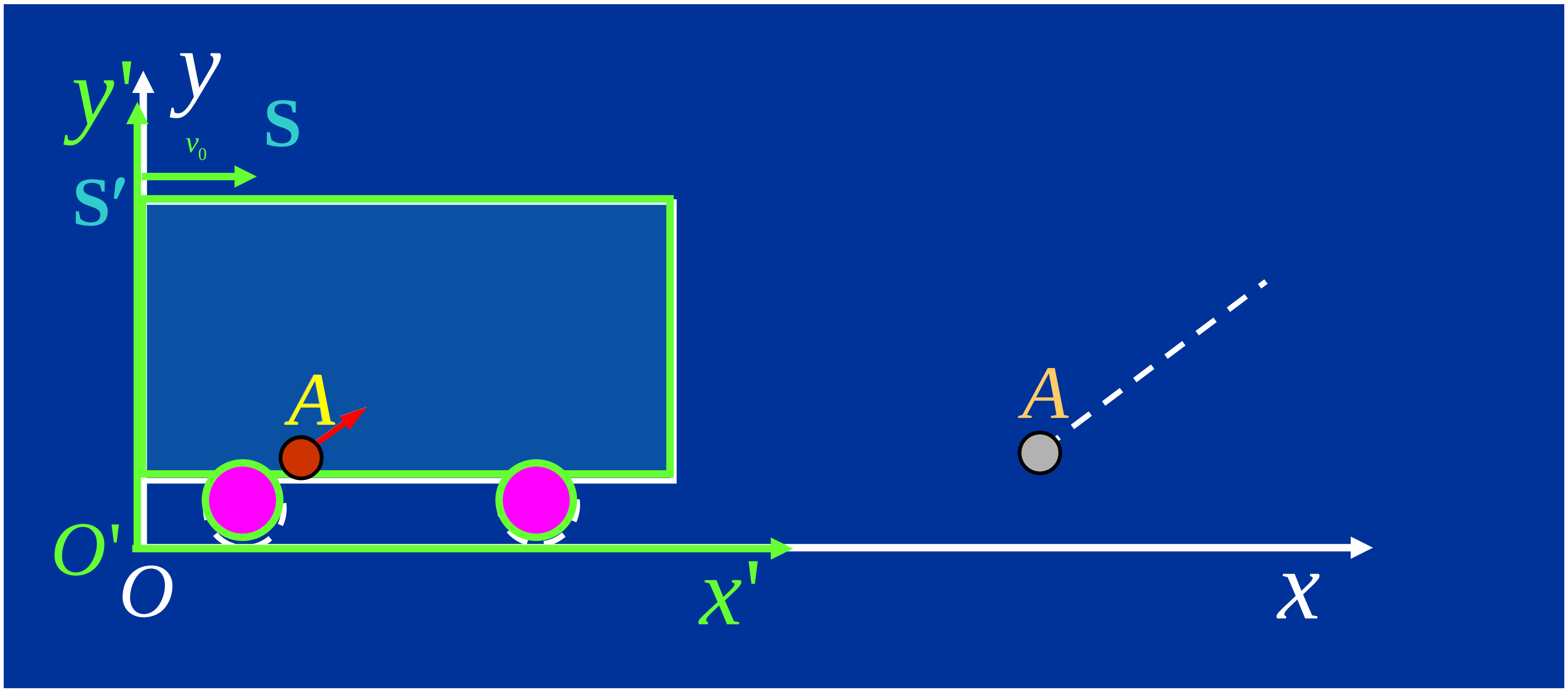
抛物线轨道顶点处的曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0\cos\alpha)^2}{g} = \frac{x_m^2}{8y_m}$$

$x_m = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ 为射程， $y_m = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$ 为射高

§4 相对运动

- 基本参考系与运动参考系



物体相对于S 系的运动 —— 绝对运动;

物体相对于S′系的运动 —— 相对运动;

S′系相对于S 系的运动 —— 牵连运动。

• 伽利略速度变换公式

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

绝对速度 牵连速度 相对速度

加速度变换关系 $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$

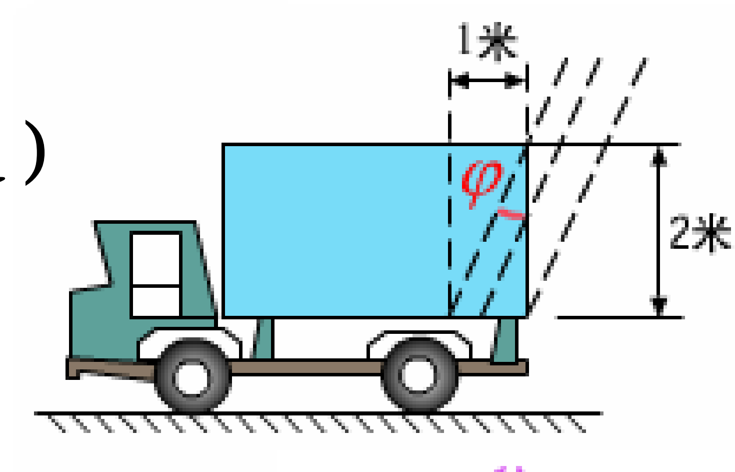
如果S′系相对于S系做匀速直线运动，则 $\vec{a}' = \vec{a}$

对于相对作匀速直线运动的各个参考系，质点的加速度是不变量。

该公式只适用于S′系相对于S 系平动

该公式在物体运动速度接近于光速时不成立。

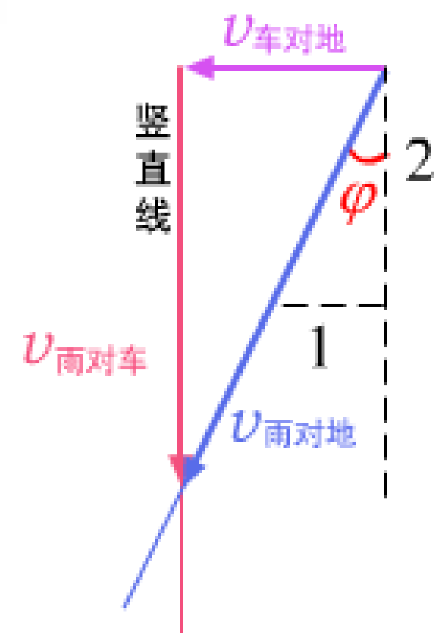
例：如图所示，车篷高 2m，停车时，由于有风，雨滴落至篷后沿内 1m 处。当车以 15km/h 的速率行驶时，雨滴恰好不落入车内。



求：雨滴对地速度（设雨滴匀速）

解：$v_{车对地}$大小 15km/h，方向水平向前

恰好不落入车内→$v_{雨对车}$方向沿竖直线向下



$v_{雨对地}$的方向与竖直线夹角 $\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{1}{2}$

$$v_{雨对地} = \frac{v_{车对地}}{\sin\varphi} = 9.3\ \mathrm{m/s}$$

本章小结

- 参考系、坐标系、质点、质点系
- 描述质点运动的物理量:

  位置矢量、位移、速度、加速度
- 运动方程，轨迹方程
- 运动学的两类问题

（1）微分 $\vec{r} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{a}$ $\theta \rightarrow \omega \rightarrow \beta$

（2）积分 $\vec{a} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{r}$ $\beta \rightarrow \omega \rightarrow \theta$

• 自然坐标系

$$s = s(t) \qquad v = ds/dt$$

$a_t = dv/dt$ 衡量速度大小的变化

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ 衡量速度方向的变化

• 圆周运动、角量与线量的关系 $v = \omega r$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\beta \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

• 相对运动

速度变换式 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ 加速度变换式 $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$

作业: 吴百诗 大学物理学

P-46 7，12，22, 26，28