第十五章 波动光学

之

光的衍射

北京邮电大学
理学院物理系

本章内容

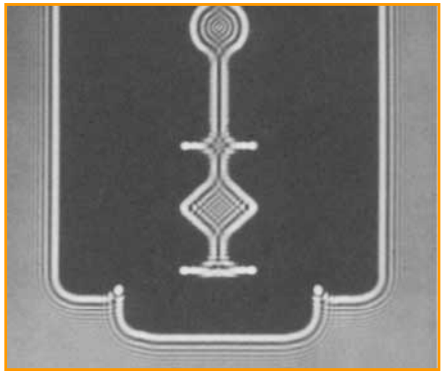
§1　光的衍射现象

§2　夫琅禾费衍射

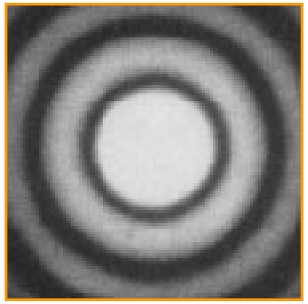
§3　衍射光栅

§1 光的衍射现象

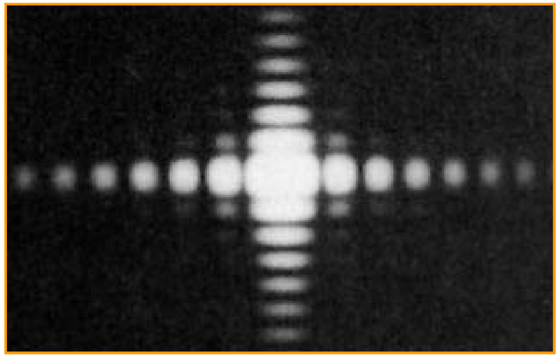
(太阳光的衍射)



(剃须刀边缘衍射)



(圆孔衍射)



(矩孔衍射)

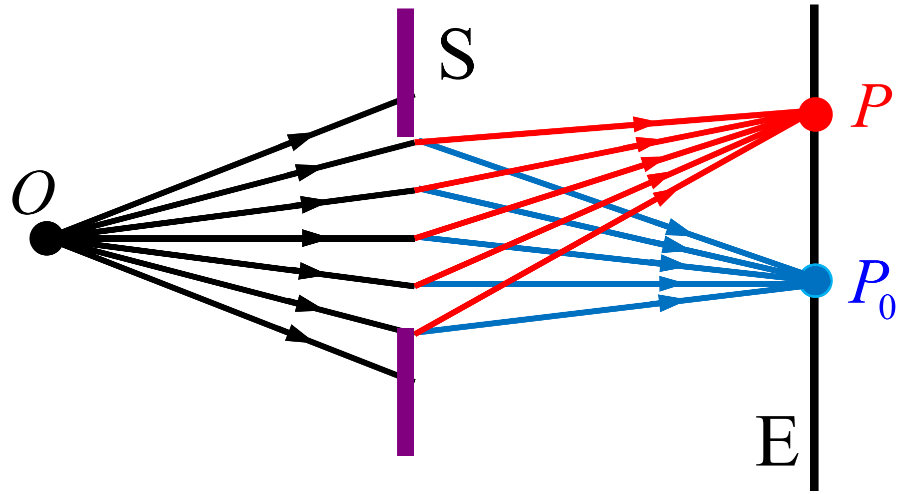
◆ 衍射

光在传播过程中绕过障碍物的边缘而偏离直线传播的现象.

1. 光的衍射分类

- 菲涅耳衍射 (近场衍射)

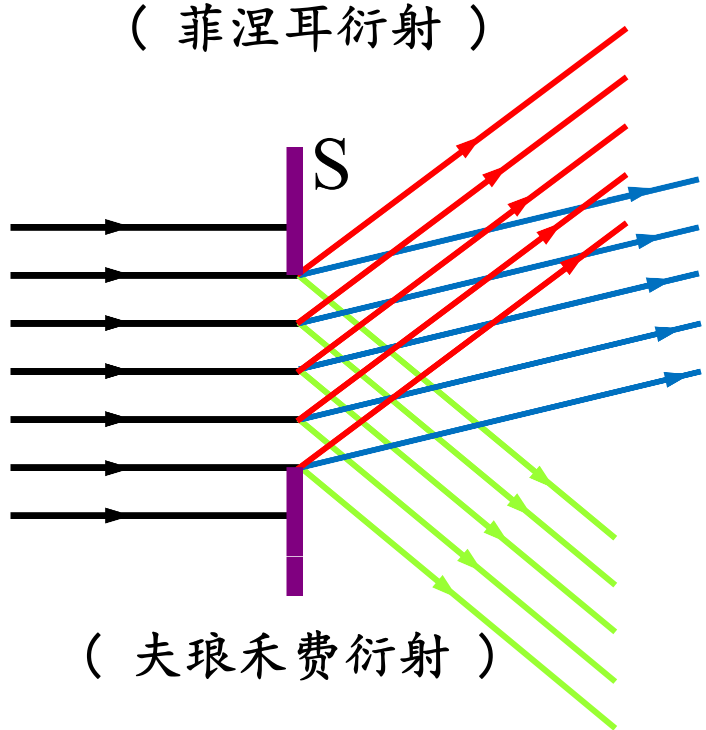
光源O，观察屏E（或二者之一）到衍射屏S的距离为有限的衍射.



（ 菲涅耳衍射 ）

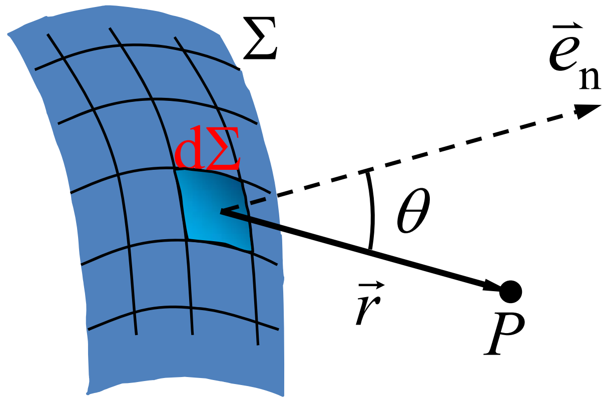
- 夫琅禾费衍射 (远场衍射)

光源O，观察屏E 到衍射屏S 的距离均为无穷远的衍射.



（ 夫琅禾费衍射 ）

2. 惠更斯—菲涅耳原理

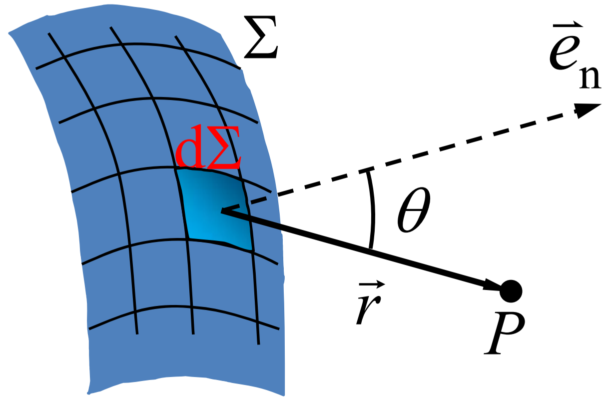


- 同一波前上的各点都可以看成是新的振动中心，它们发出的都是相干次波.

- 空间某点的光振动是所有这些次波在该点的相干叠加.

3. 菲涅耳衍射积分公式

设初相为零，面积为∑的波面 ，其上面元d∑ 在*P*点引起的振动为

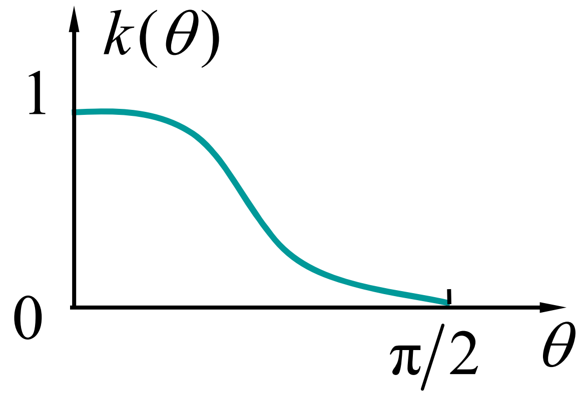


$$\mathrm{d}E \propto k(\theta)\cdot\frac{\mathrm{d}\Sigma}{r}\cos(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda})$$

$$\mathrm{d}E = F\cdot k(\theta)\frac{\mathrm{d}\Sigma}{r}\cos(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda})$$

F 取决于波面上d∑处的波强度， $k(\theta)$ 为倾斜因子.

$$\begin{cases} \theta=0, k=k_{\max}=1 \\ \theta\uparrow \Rightarrow k(\theta)\downarrow \\ \theta\geq\dfrac{\pi}{2}, \quad k=0 \end{cases}$$



某时刻t，*P*点处的合振动就等于波面Σ上所有dΣ发出的次波在*P*点引起光振动的叠加，即

$$E(P)=\int_{\Sigma} Fk(\theta)\frac{\cos(\omega t-\dfrac{2\pi r}{\lambda})}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

- 说明

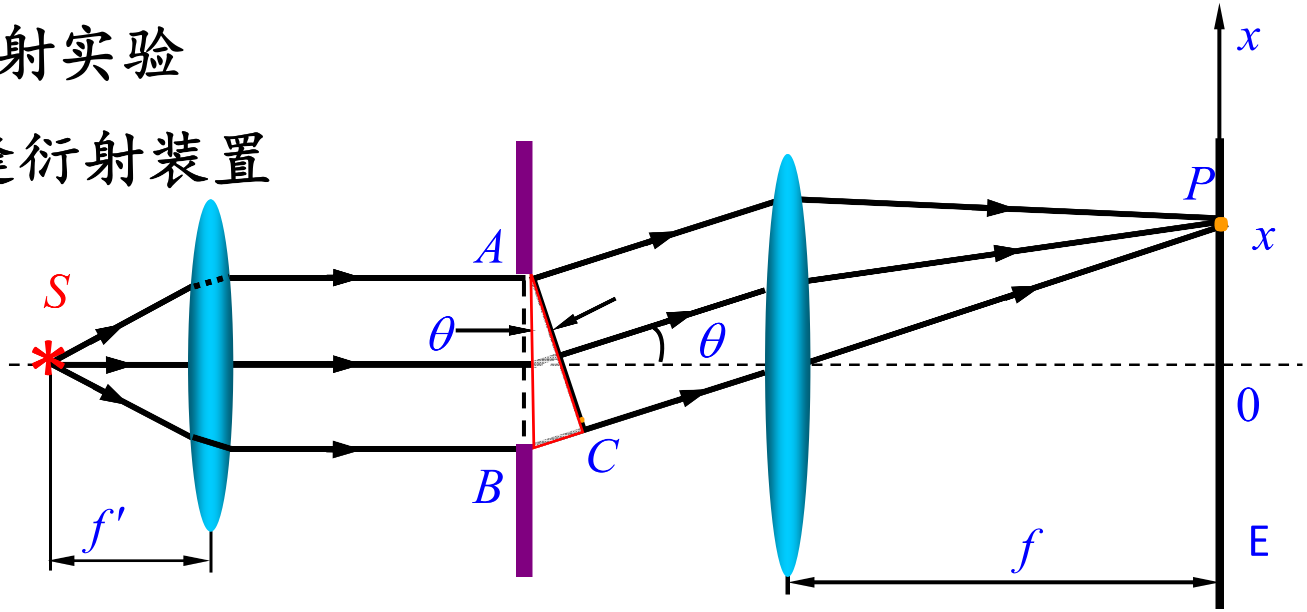
(1) 对于一般衍射问题，用积分计算相当复杂，实际中常用半波带法和振幅矢量法分析.

(2) 惠更斯—菲涅耳原理在惠更斯原理的基础上给出了次波源在传播过程中的振幅变化及位相关系.

§2 夫琅禾费衍射

1. 单缝衍射实验

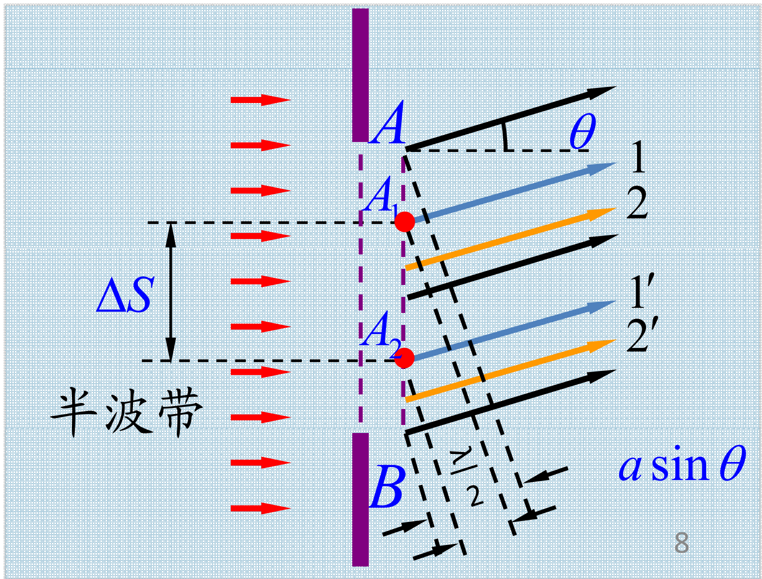
1） 单缝衍射装置



2） 菲涅耳半波带法

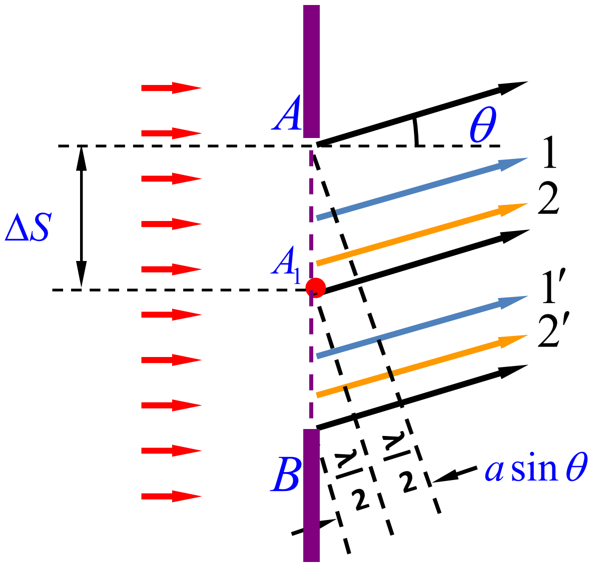
狭缝波面上的半波带的数目

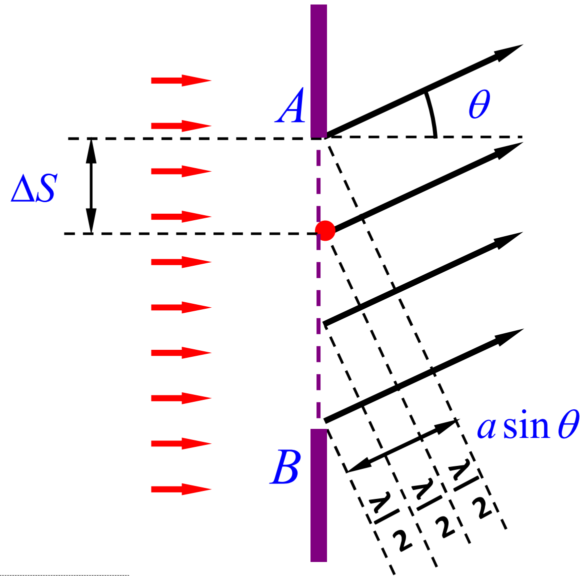
$$N = \frac{a\sin\theta}{\lambda/2}$$



- 半波带数目为整数时

暗纹条件：$a\sin\theta=\pm 2k\cdot\dfrac{\lambda}{2}\qquad k=1,2,3\cdots$ （半波带数目为偶数）





明纹条件：$a\ \sin\theta=\pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}\qquad k=1,2,3\cdots$ （半波带数目为奇数）

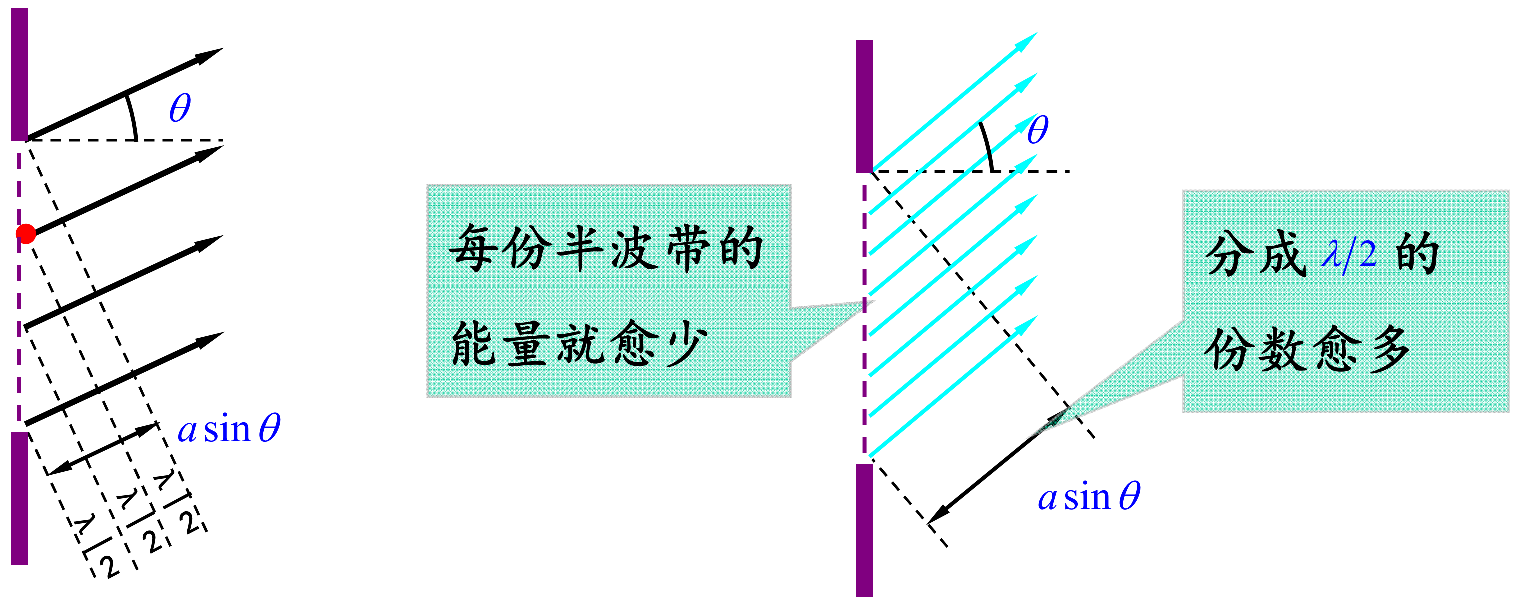
中央明纹中心：$\theta=0$ ⟹ $a\sin\theta=0$ ⟹ $k=0$

- 半波带数目为非整数时，该点的光强介于明暗之间.

- 说明

a）得到的暗纹和中央明纹位置精确,其它明纹位置只是近似.

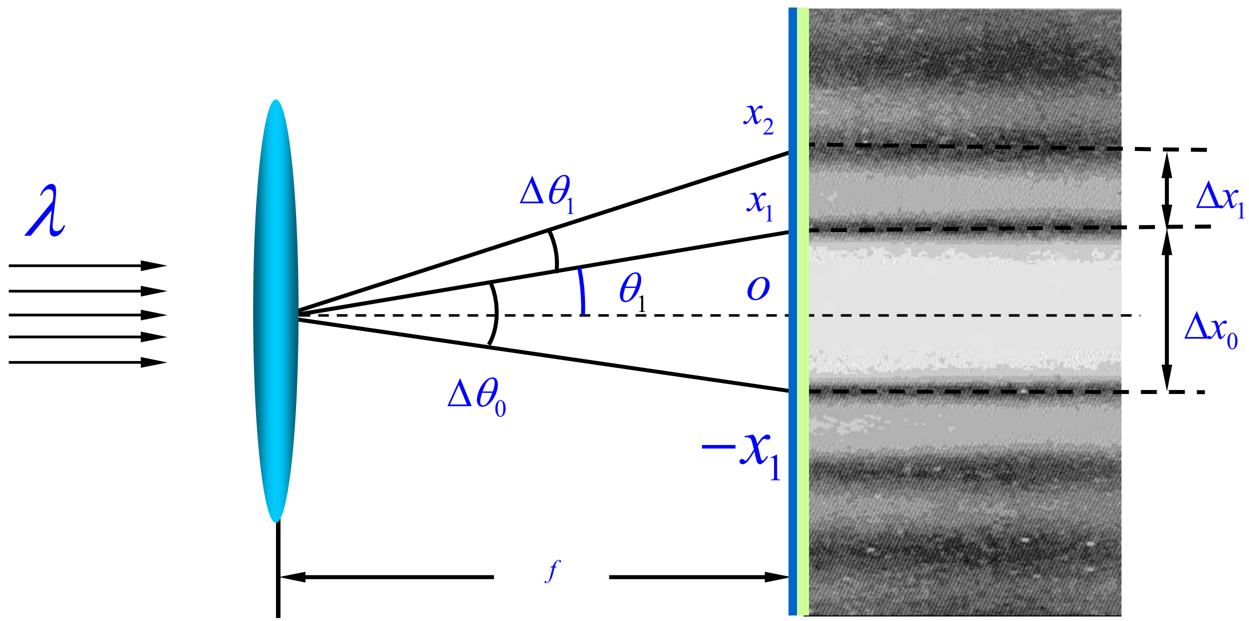
b）随着衍射角 θ的增大，明条纹的强度减少.



3）单缝衍射明纹角宽度和线宽度

角宽度：相邻暗纹对应的衍射角之差.

线宽度：观察屏上相邻暗纹的距离.



中央明纹角宽度： $\Delta\theta_0 = 2\theta_1 \approx 2\lambda/a$

中央明纹线宽度： $\Delta x_0 = 2f \cdot \tan\theta_1 = 2f\theta_1 = 2f\,\lambda/a$

第 ***k*** 级明纹角宽度： $\Delta\theta_k = \lambda/a$

- 结论：中央明条纹的角宽度是其他明条纹角宽度的两倍.

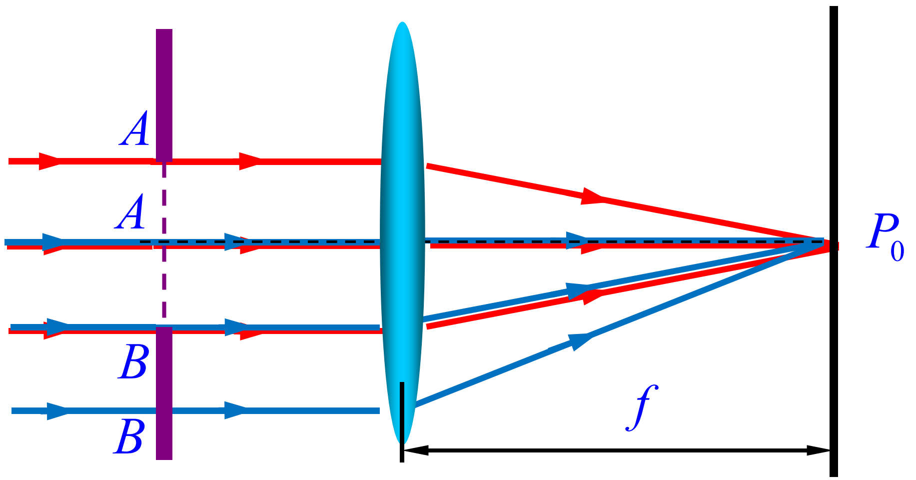
➢ 讨论

(1) 波长越长，缝宽越小，条纹宽度越宽.（衍射反比率）

(2) $\lambda/a \to 0 \quad \Delta\theta_0 \to 0$ 波动光学退化到几何光学.

(3) $\lambda/a \to 1 \quad \Delta\theta_0 \to \pi$ 观察屏上不出现暗纹.

(4) 缝位置变化不影响条纹位置分布.

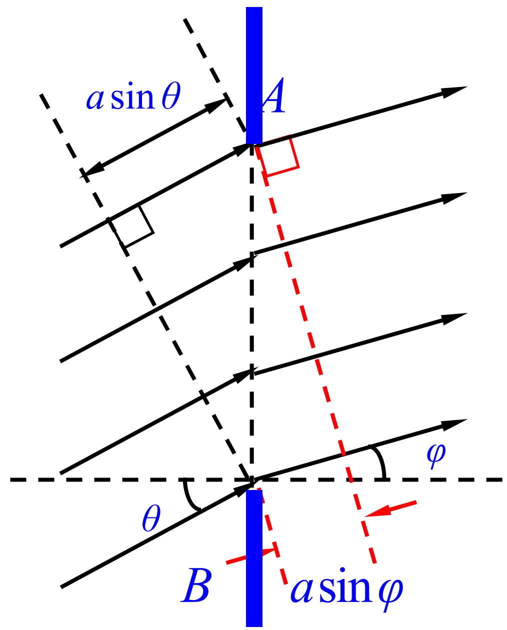


例 如图示，设有一波长为 λ 的单色平面波沿着与缝平面的法线成 θ 角的方向入射到宽为 a 的单缝 AB 上.

求 写出各级暗条纹对应的衍射角 φ 所满足的条件.

解 在狭缝两个边缘处，衍射角为 φ 的两光的光程差为

$$\delta = a(\sin\varphi - \sin\theta)$$



对于暗纹

$$\delta = \pm k\lambda$$

则 $$a(\sin\varphi - \sin\theta) = \pm k\lambda$$

$$\sin\varphi = \pm\frac{k\lambda}{a} + \sin\theta \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

例 用波长为 λ_1 和 λ_2 的平行光垂直照射一单缝，在距缝很远的屏上观察衍射条纹，如果 λ_1 的第一级衍射暗纹与 λ_2 的第二级衍射暗纹重合.

求 (1) 两种波长之间的关系；

(2) 这两种波长的衍射图样中是否还有其它级的暗纹重合.

解 (1) 单缝衍射暗纹条件 $a\sin\varphi = k\lambda$

$$\left.\begin{aligned} a\sin\varphi_1 &= \lambda_1 \\ a\sin\varphi_2 &= 2\lambda_2 \\ \text{重合，即}\quad \varphi_1 &= \varphi_2 \end{aligned}\right\}$$

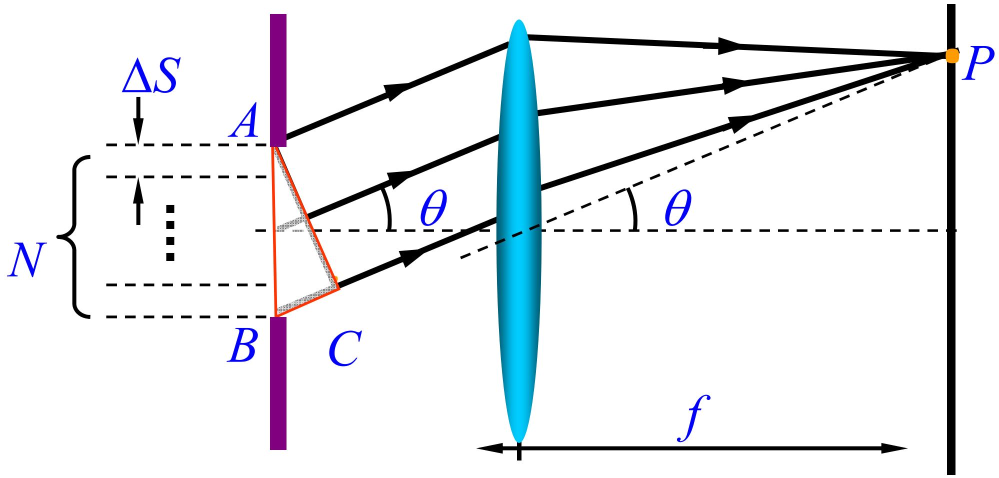
$$\lambda_1 = 2\lambda_2$$

(2)

$$\left.\begin{aligned} a\sin\varphi_1 &= k_1\lambda_1 \\ a\sin\varphi_2 &= k_2\lambda_2 \\ \text{重合}\quad \varphi_1 &= \varphi_2 \\ \lambda_1 &= 2\lambda_2 \end{aligned}\right\} k_2 = 2k_1$$

λ_1 的 k_1 级暗纹与 λ_2 的 $2k_1$ 级暗纹重合.

4）单缝衍射强度公式



将缝 ***AB*** 均分成 ***N*** 个窄带，每个窄带宽度为 $\Delta S = a/N$

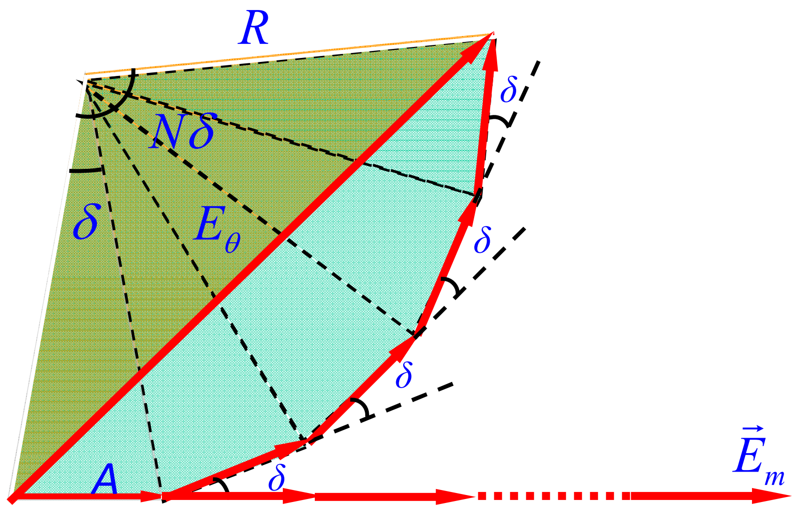
设每个窄带在***P*** 点引起的振幅为 ***A***

相邻窄带的相位差为 $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{a\sin\theta}{N}$

A、***B*** 点处窄带在***P*** 点引起振动的相位差为

$$\beta = 2\pi a\sin\theta/\lambda = N\delta$$

P 点形成的光振动：N个同方向，同频率，同振幅，初相位依次相差δ 的简谐振动的合成.



由图中几何关系得

$$\begin{cases} A = 2R\sin\dfrac{\delta}{2} = 2R\sin\dfrac{\beta}{2N} \\ E_\theta = 2R\sin\dfrac{\beta}{2} \end{cases}$$

由以上两式得

$$E_\theta = A\frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2N}} \approx NA\frac{\sin\dfrac{\beta}{2}}{\dfrac{\beta}{2}}$$（N很大时）

若 $\theta=0$

$\beta = 0 \qquad E_\mathrm{m} = NA$

令 $\alpha = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$ $\longrightarrow$ $E_\theta = E_\mathrm{m}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

$$\boxed{I_\theta = I_\mathrm{m}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

I_m中央明纹中心处的光强

- 中央明纹

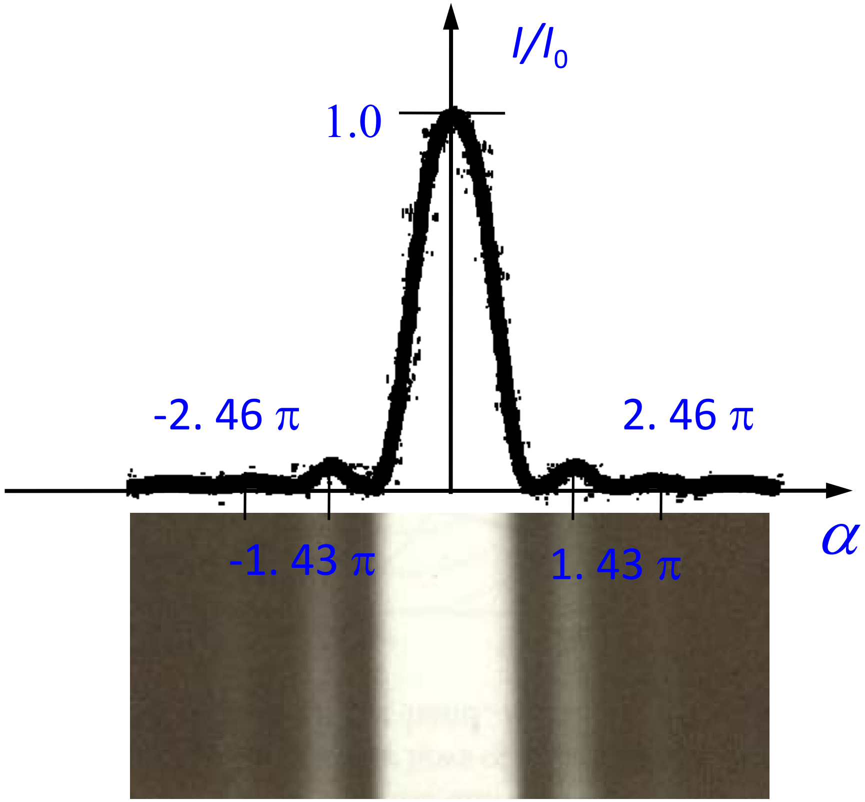
$\theta = 0$， $\alpha = 0$

$$I = I_{\mathrm{m}} = I_{\max}$$

- 暗纹条件

$$I = 0 \rightarrow \sin\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = \pm k\pi$$

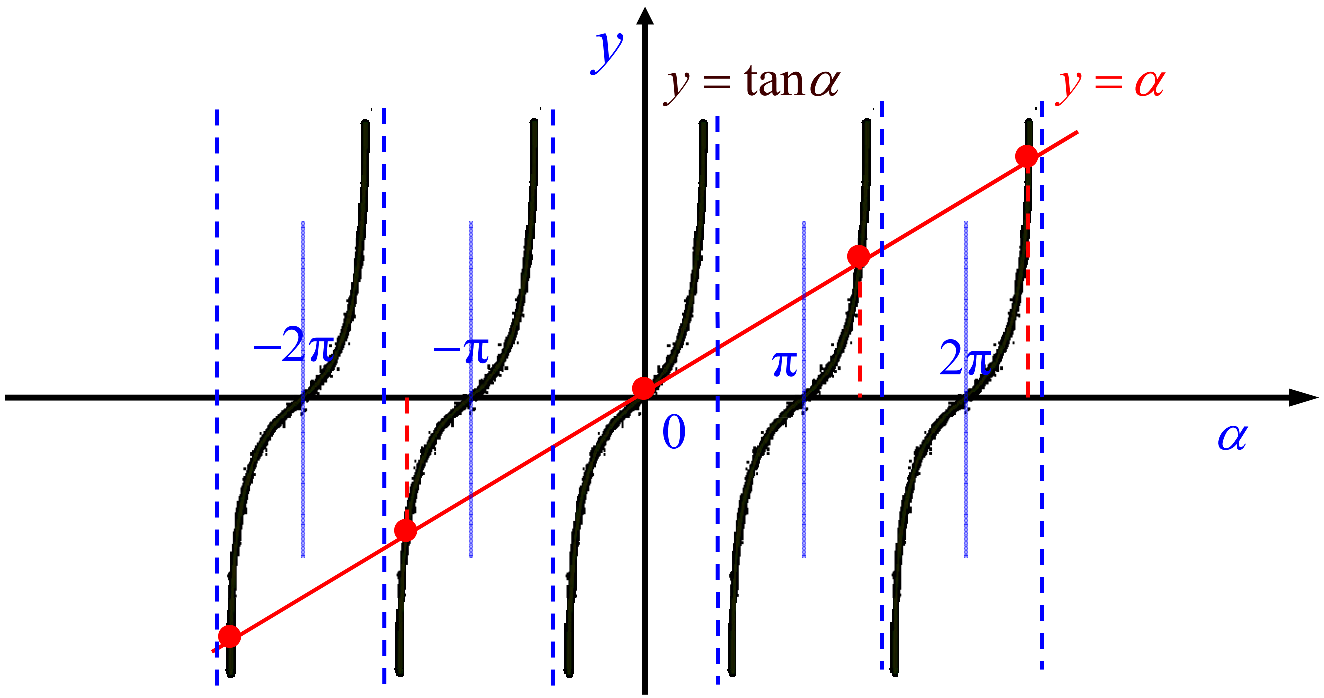


相对光强曲线

$$a\sin\theta = \pm k\lambda \qquad k = 1, 2, 3\cdots$$

由上可见：与半波带法得到的暗纹条件一致.

➢ 次级明纹条件 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}=0 \Longrightarrow \tan\alpha=\alpha$

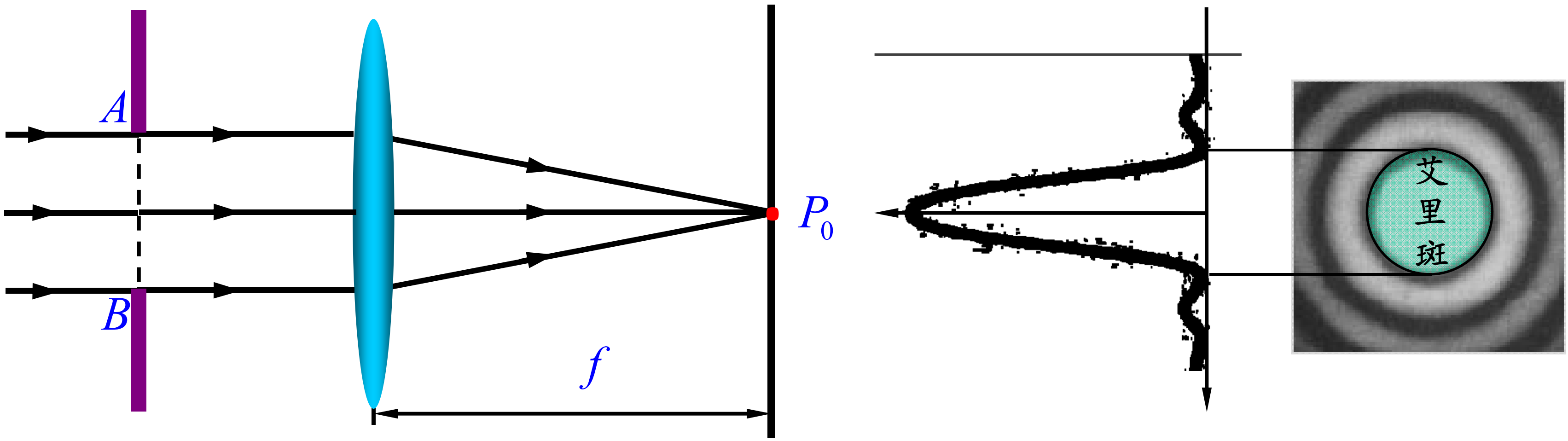


得 $\alpha=\pm1.43\pi,\pm2.46\pi,\pm3.47\pi,\ \cdots$

相应 $a\sin\theta=\pm1.43\lambda,\ \pm2.46\lambda,\ \pm3.47\lambda,\cdots$

半波带法得到的明纹位置是一种较好的近似.

5）圆孔的夫琅禾费衍射



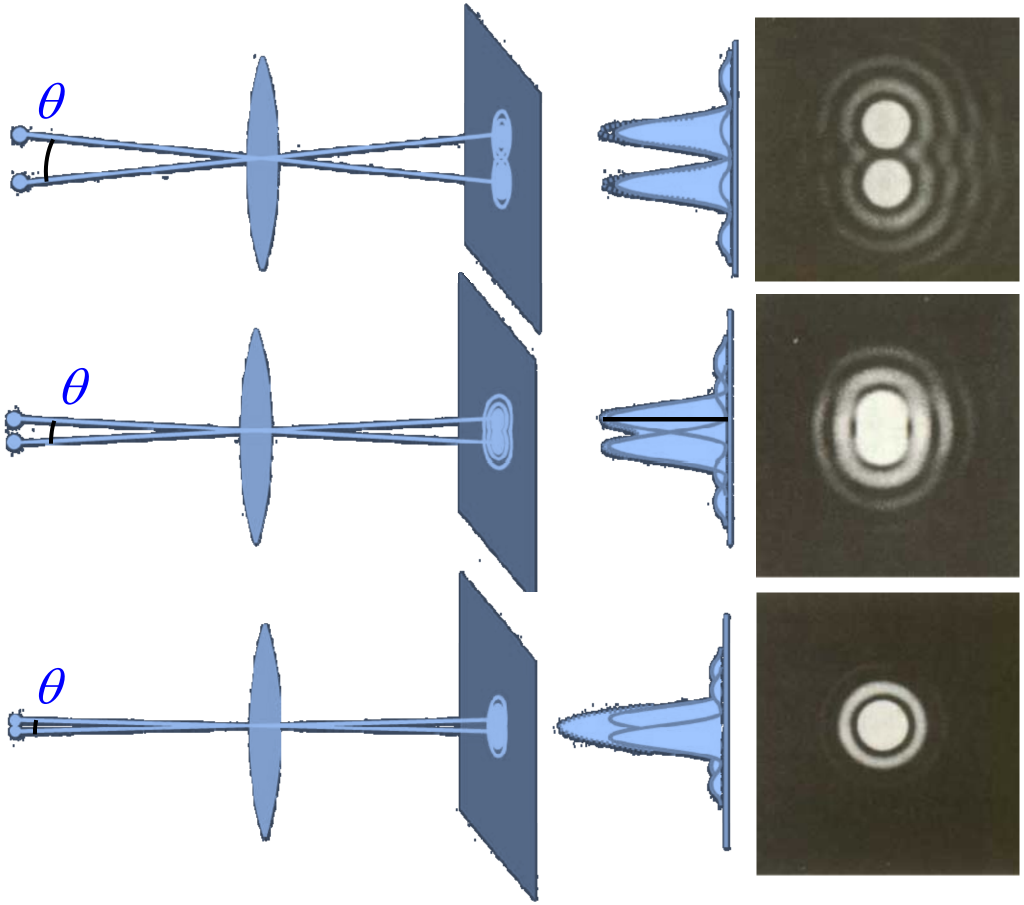
艾里斑： 由第一暗环所包围的中央亮斑.

由夫琅禾费圆孔衍射计算可得，艾里斑的半角宽度

$$\theta_0 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$

艾里斑的半径

$$r_0 = f\theta_0 = 1.22\frac{\lambda f}{D}$$



可分辨 $\theta > \theta_0$

刚可分辨 $\theta = \theta_0$

不可分辨 $\theta < \theta_0$

瑞利判据：

对于两个等光强的非相干物点，如果一个像斑中心恰好落在另一像斑的中央亮斑的边缘（第一级暗纹处）上时，就认为这两个像刚刚能够被分辨.

- 光学仪器分辨本领

望远镜的最小分辨角

$$\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

光学仪器分辨本领

$$R = \frac{1}{\Delta\theta}$$

例 载人宇宙飞船在距地面 160km的轨道上运行时，宇航员恰好能分辨地面上的两点光源，设波长为550nm、瞳孔直径取5mm .

求 两点光源之间的距离.

解 设两点光源之间的距离为x、飞船距地面的距离为L

眼睛的最小分辨角 $\delta_\theta = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

两点光源对人眼睛的张角 $\delta = \dfrac{x}{L}$

恰能分辨条件 $\delta_\theta = \delta \Longrightarrow 1.22\dfrac{\lambda}{D} = \dfrac{x}{L}$

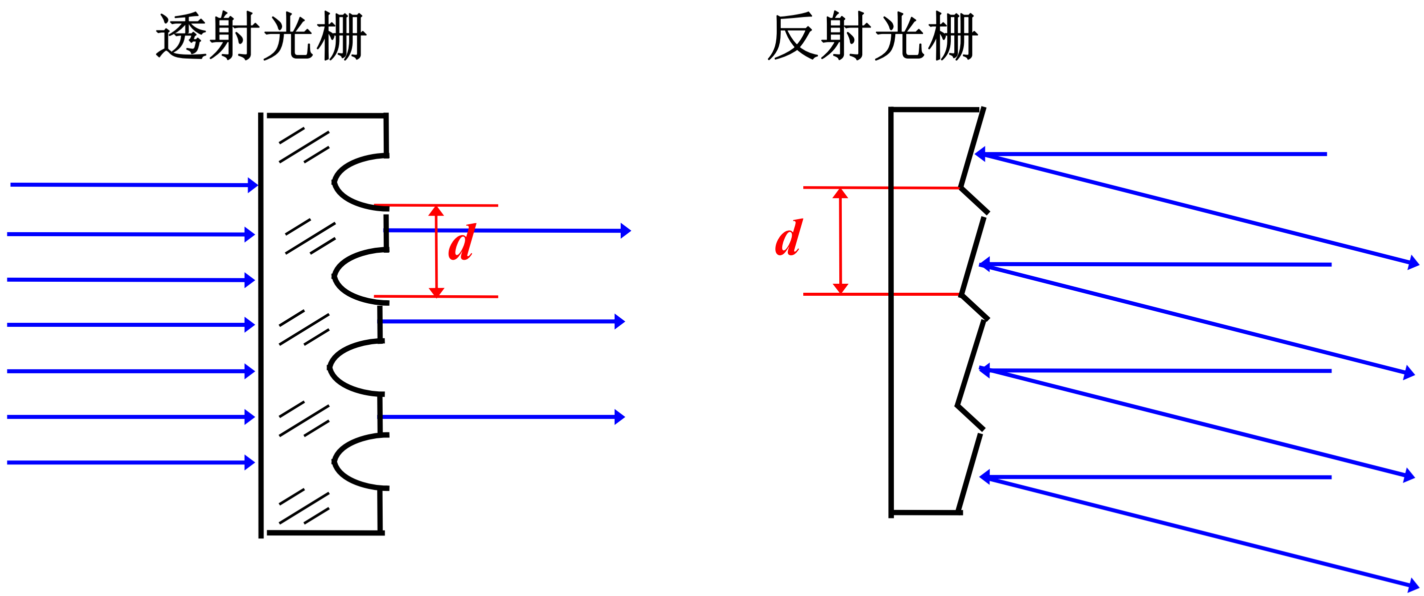
$$x = \frac{1.22\lambda L}{D} = \frac{1.22\times 550\times 10^{-9}\times 160\times 10^{3}}{5\times 10^{-3}}\mathrm{m} = 21\mathrm{m}$$

§15.9 光栅衍射

一、光栅与光栅常数

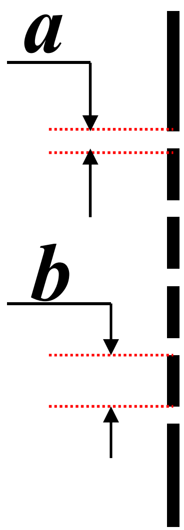
光栅—大量宽度或/和间距呈现一定规律性变化的平行狭缝(或反射面) 构成的光学元件。

1. 种类:



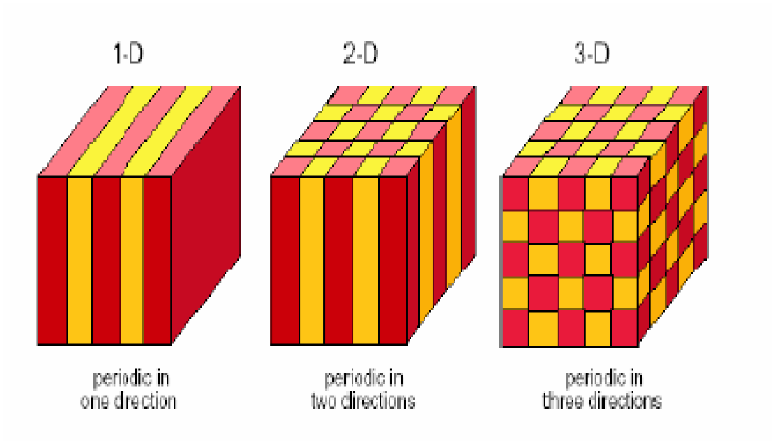
光纤光栅、波导光栅等

2. 光栅常数



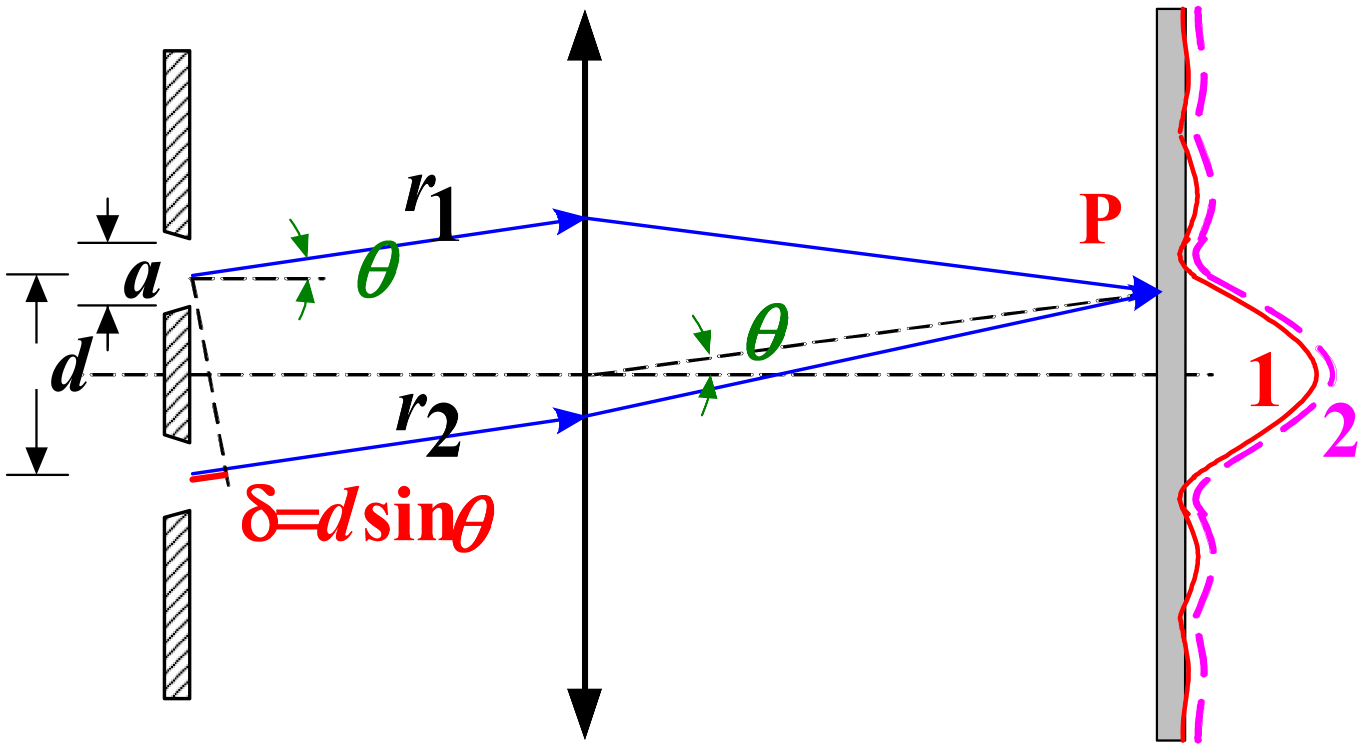
$d=a+b$ —— 光栅常数

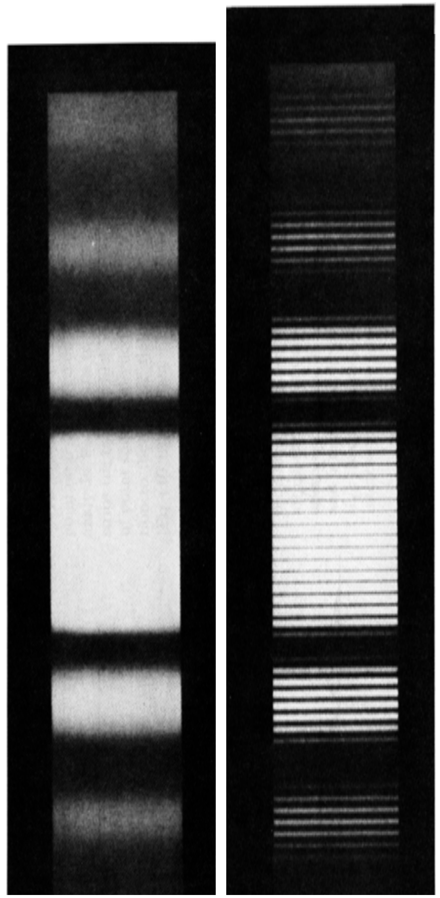
3. 1D，2D和3D的光栅：光子晶体



二、光栅衍射方程

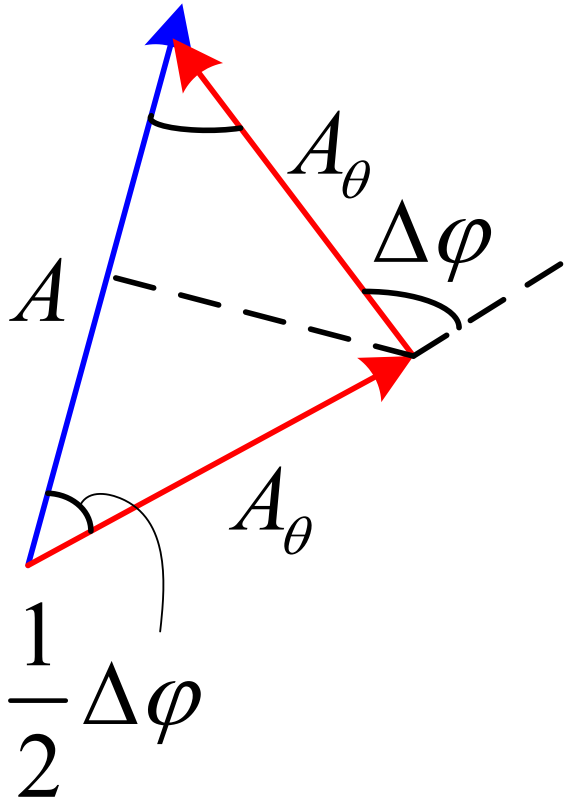
1、双缝衍射：各缝衍射分布的相干叠加





对单缝衍射 $\dfrac{A_\theta}{A_0} = \dfrac{2R\sin\alpha}{2R\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ $\qquad \alpha = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$

双缝衍射振幅矢量法



对单缝衍射 $A_\theta = A_0 \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

$$\delta = d\sin\theta$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$$

考虑两缝干涉，则P点的合振幅为

$$A = 2A_\theta \cos\frac{\Delta\varphi}{2}$$

则P点的光强为

$$I = 4A^2{}_\theta \cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$= 4A_0^2 \underbrace{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}_{\boxed{\text{衍射因子}}} \underbrace{\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}}_{\boxed{\text{干涉因子}}}$$

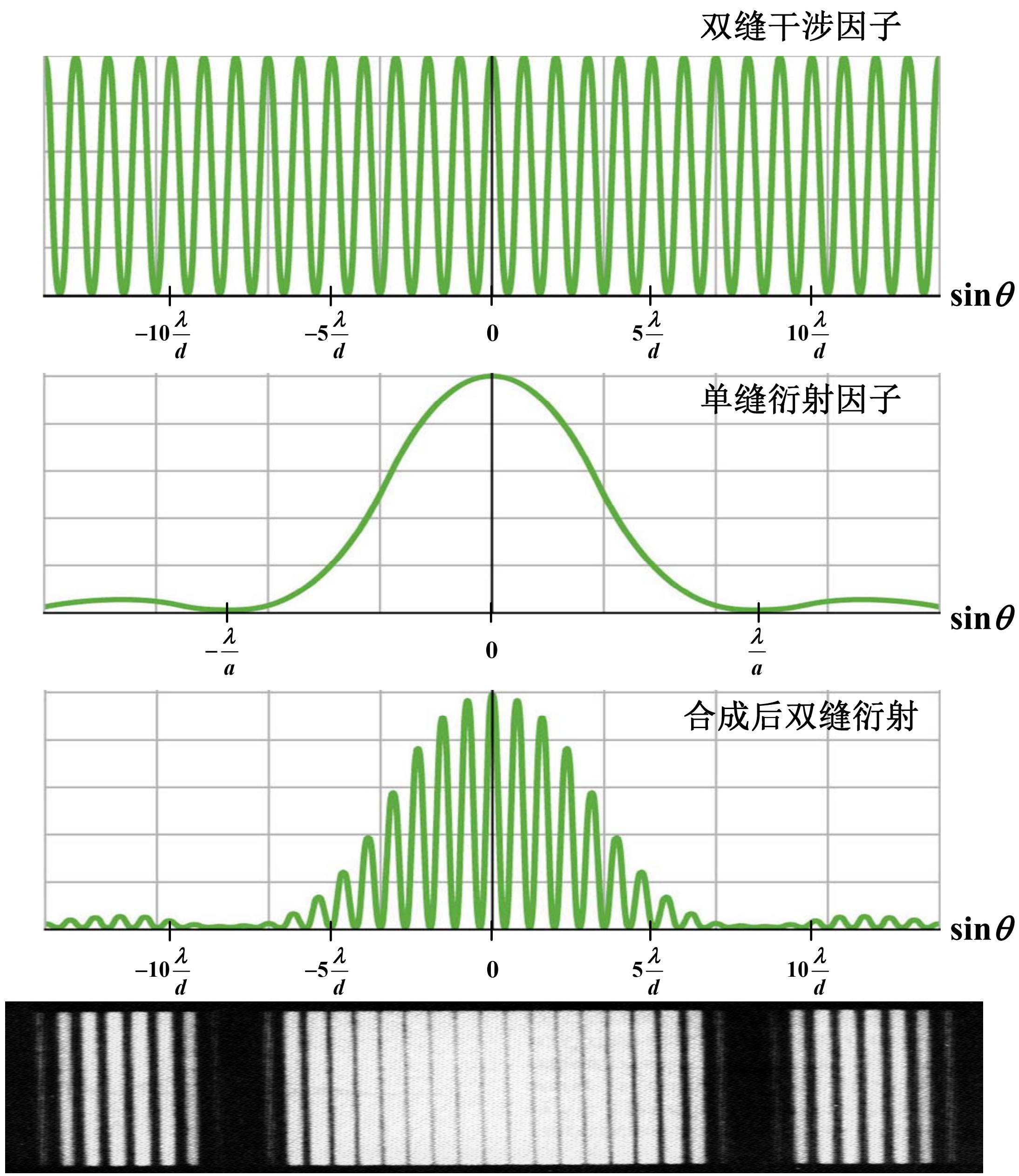
双缝衍射光强分布公式

干涉：

极大（多个），极小

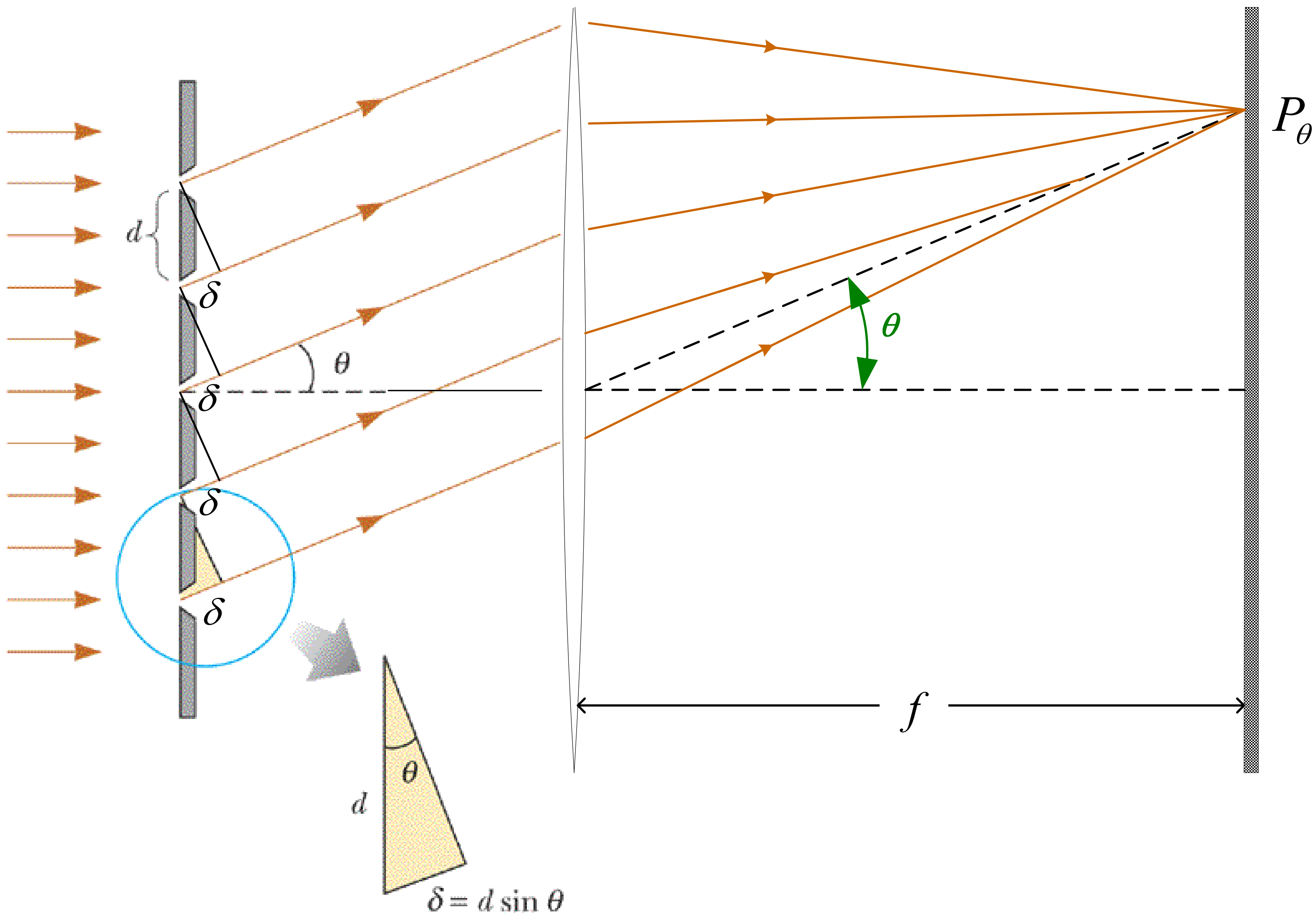
衍射：

主极大（只有一处，即中央明纹）、次级大，极小



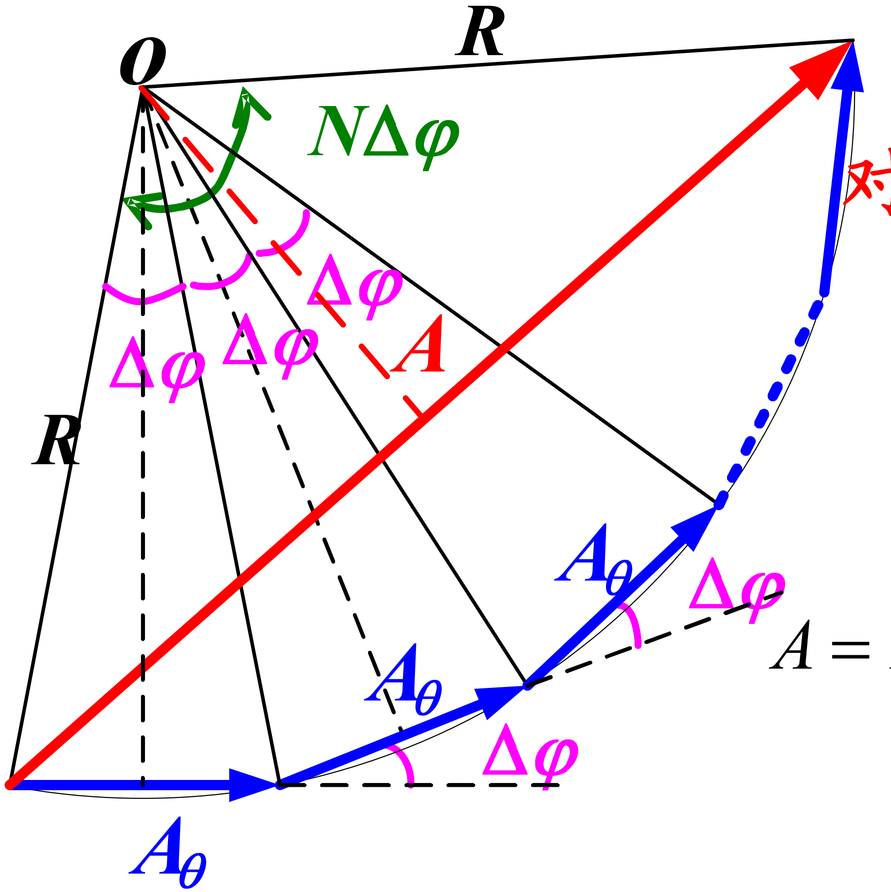
双缝衍射图

2、多缝衍射-光栅衍射


P_θ
d
δ
δ
δ
δ
θ
θ
f
θ
d
$\delta = d\sin\theta$

多缝衍射振幅矢量法

对单缝衍射 $A_\theta = A_0 \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$



$\delta = d\sin\theta \qquad \Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$

对多缝衍射，则P点的合振幅为

$$A = 2R\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}$$

而 $A_\theta = 2R\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$

$$A = A_\theta \frac{\sin\dfrac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}} = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin\dfrac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}$$

多缝衍射光强分布公式：

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin\dfrac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}\right)^2$$

衍射因子

干涉因子

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)^2 = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

其中 $\alpha = \dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$　$\beta = \dfrac{\Delta\varphi}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = \dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$

即经过光栅后光的强度分布公式

(1) 主极大:

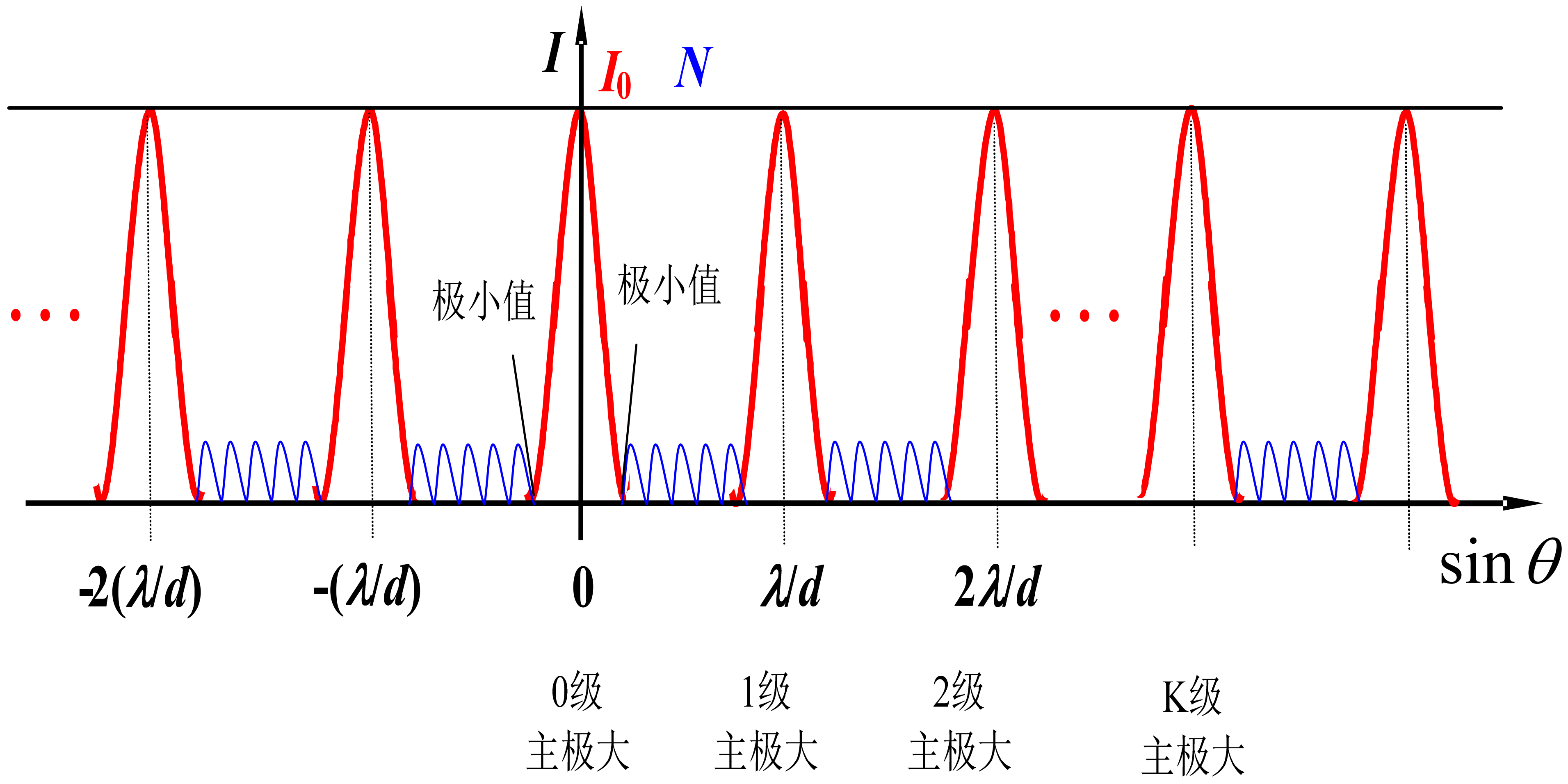
由干涉因子决定，因衍射因子决定的光强是小于I_0的

$$\Delta\varphi = \pm 2k\pi \Rightarrow \beta = \pm k\pi \Rightarrow d\sin\theta = \pm k\lambda, k = 0,1\cdots$$

则0点光强为 $I = I_0\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cdot N^2$

光栅方程

只决定主极大位置



$$d\sin\theta = \pm k\lambda, k = 0, 1\cdots$$

N缝的光栅:

主极大、极小、次级大

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \qquad \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} \quad \beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$$

(2) 极小位置

使光强为零，则 $\sin N\beta = 0, \sin\beta \neq 0$

则 $N\beta = k'\pi \Rightarrow \beta = \frac{k'}{N}\pi \Rightarrow d\sin\theta = \frac{k'}{N}\lambda$

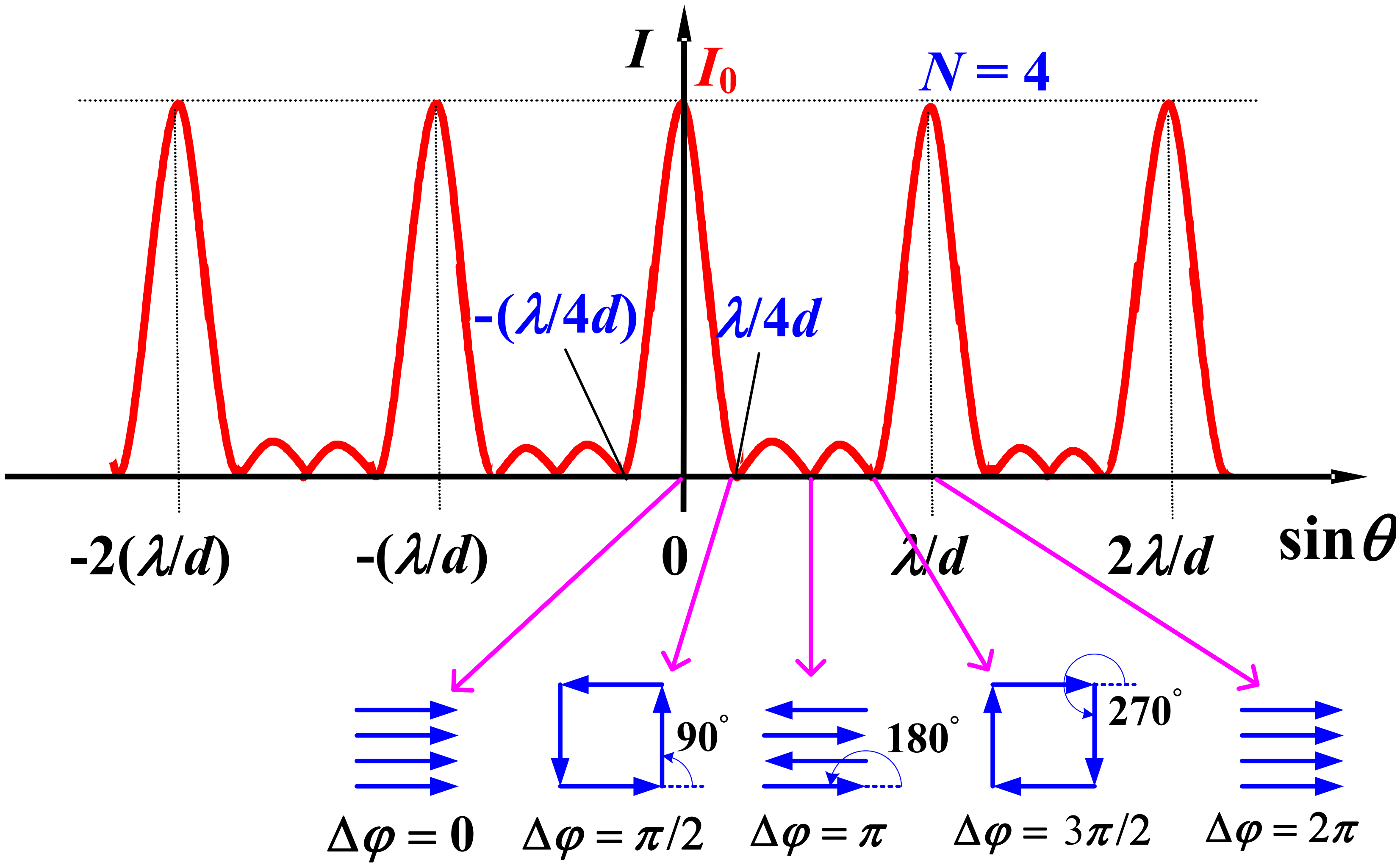
注意取值范围: $k' = 1, 2\cdots, N-1$

（**k**’取别的值如取**N**，将使该极小值条件转变成主极大条件）

则，在相邻两个主极大之间有N-1个极小值

$$d\sin\theta = \left(k + \frac{k'}{N}\right)\lambda$$ 极小值方程

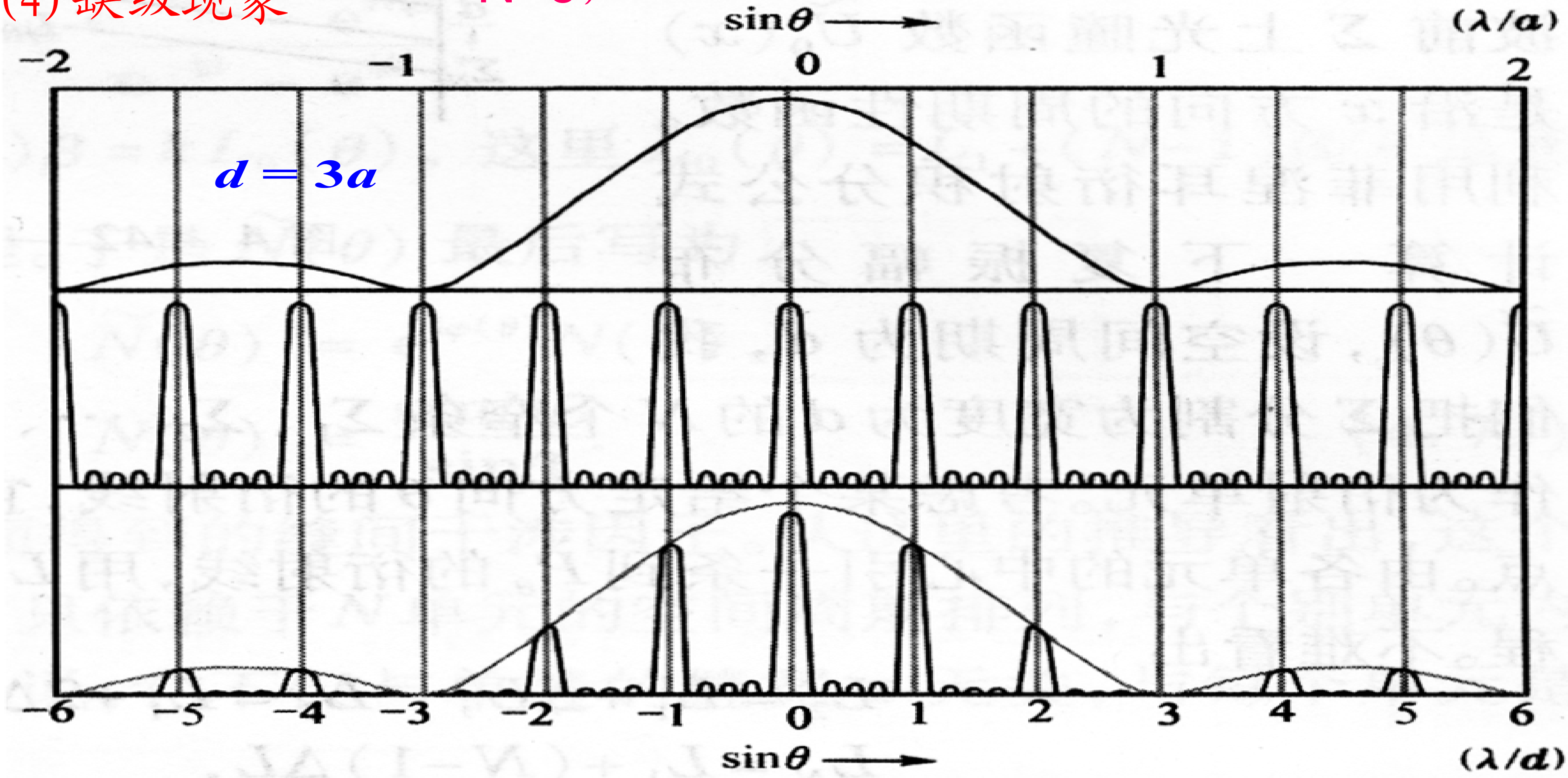
想想为何不用衍射因子作为极小值条件？ 衍射造成的暗纹数很少



(3) 次极大位置

在相邻两个主极大之间有N-2个次极大值

(4) 缺级现象　N=5，



主极大明纹 $d\sin\theta = \pm k\lambda$

单缝衍射暗纹条件 $a\sin\theta = \pm n\lambda$

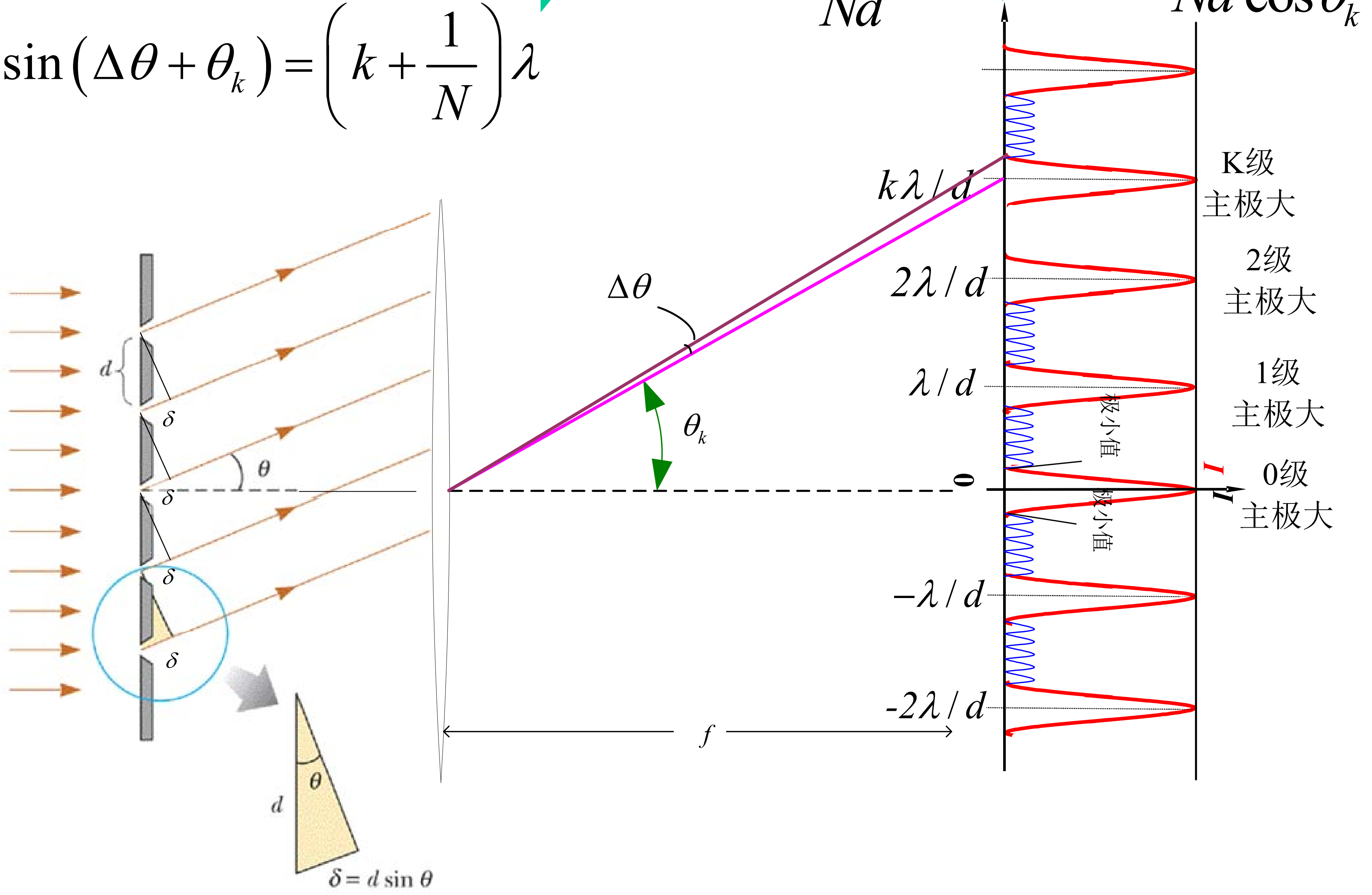
中央包络线内主极大个数 $\boxed{2\dfrac{d}{a}-1}$

两式相比 $\dfrac{d}{a} = \dfrac{k}{n}$ $\xrightarrow{\text{缺级的级次}}$ $k = \dfrac{d}{a}n, \quad n = 1, 2, 3\cdots$

(5) 主极大的半角宽度

$$d\sin\theta_k = k\lambda \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta_k\,\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd} \quad\Longrightarrow\quad \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$$

$$d\sin\left(\Delta\theta+\theta_k\right) = \left(k+\frac{1}{N}\right)\lambda$$



小结：

	a	d	N
主极大条件		$d\sin\theta=\pm k\lambda$	
主极大光强			$I=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cdot N^2$
主极大半角宽			$\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$
缺级	$k=\frac{d}{a}n$		

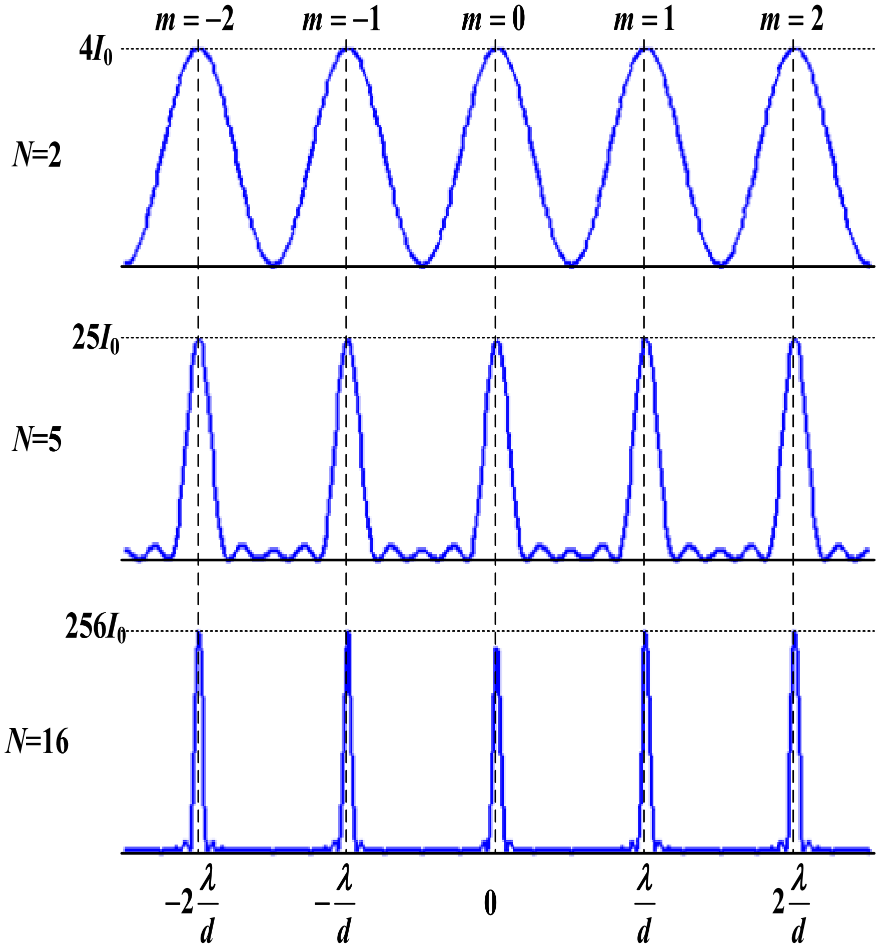
讨论：

四缝光栅，若挡住1，2缝，图样如何改变？（N降低）

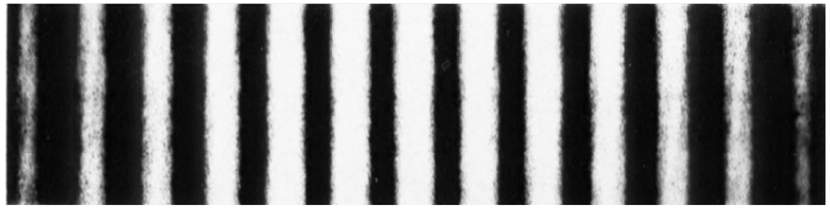
若挡住偶数缝，图样如何改变？（光栅常数改变，d增大）

(6) 光栅谱线

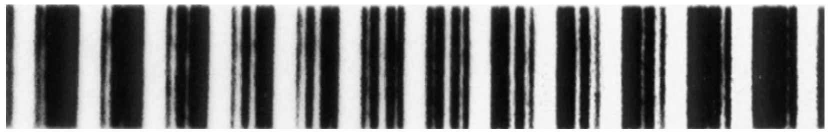
不同缝数*N*下的缝间干涉因子



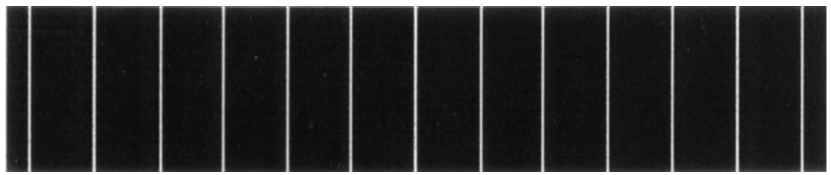
双缝的干涉条纹



五缝的干涉条纹



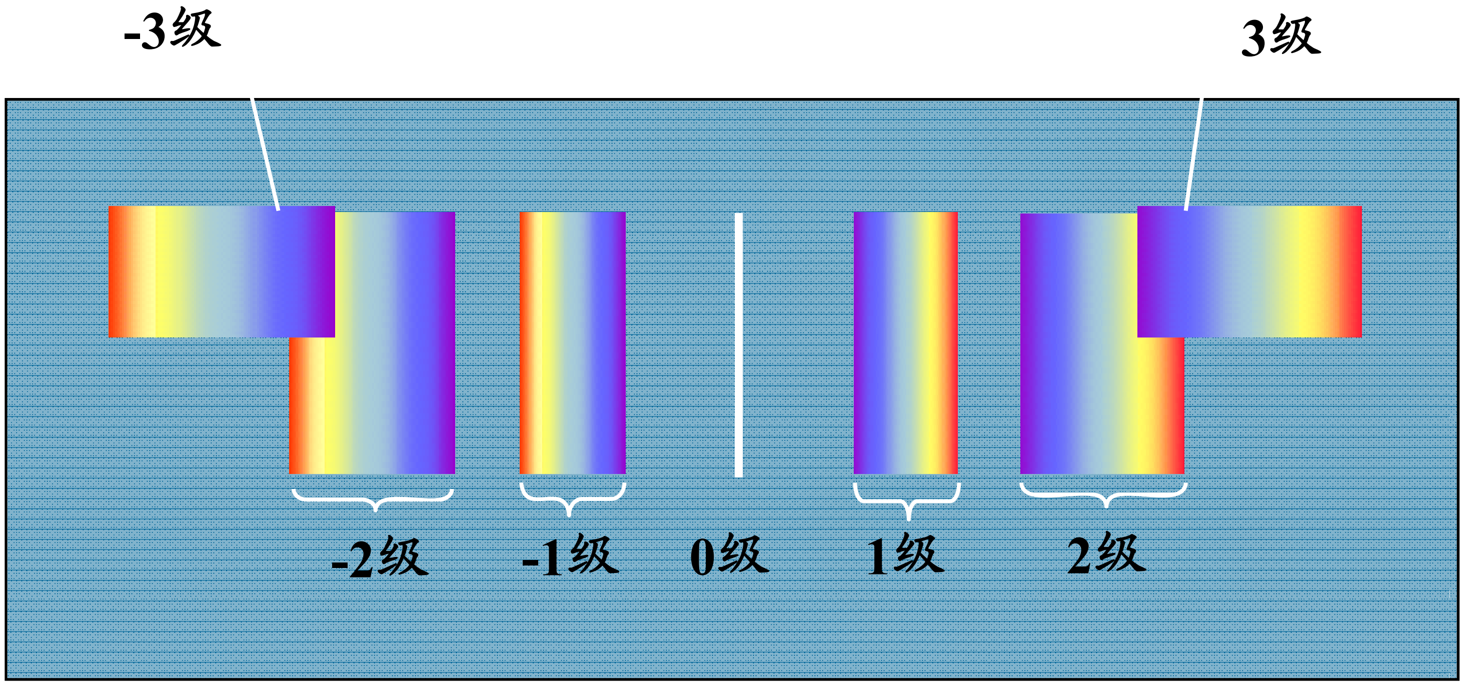
多缝的干涉条纹



1、N增大，主极大光强增大　　**2、相邻主极大之间的暗纹增多**

3、次级大明纹强度降低，形成暗背景

(7) 光谱的色散



白光光谱

$$d\sin\theta = \pm k\lambda$$

入射光包含几种不同波长的光，经光栅衍射后除中央主极大重合外，彼此分开，该现象称为光栅色散.

例 用波长为$\lambda=600$ nm的单色光垂直照射光栅，观察到第二级、第三级明纹分别出现在$\sin\theta=0.20$ 和$\sin\theta=0.30$ 处，第四级缺级。计算（1）光栅常数；（2）狭缝的最小宽度；（3）列出全部条纹的级数。

解 (1) 由光栅方程，得

$$\left.\begin{aligned} d\sin\theta_2 &= 2\lambda \\ d\sin\theta_3 &= 3\lambda \end{aligned}\right\} \Longrightarrow d(\sin\theta_3-\sin\theta_2)=\lambda$$

$$d=\frac{\lambda}{\sin\theta_3-\sin\theta_2}=\frac{600\times10^{-9}}{0.30-0.20}\mathrm{m}=6.0\times10^{-6}\mathrm{m}$$

(2) 第四级主极大缺级，有

$$4 = \frac{d}{a} k'$$

***k'*取1** 得最小缝宽

$$a = \frac{d}{4} = 1.5 \times 10^{-6} \mathrm{m}$$

(3) 当θ=(π/2)时，由光栅方程得最高级数

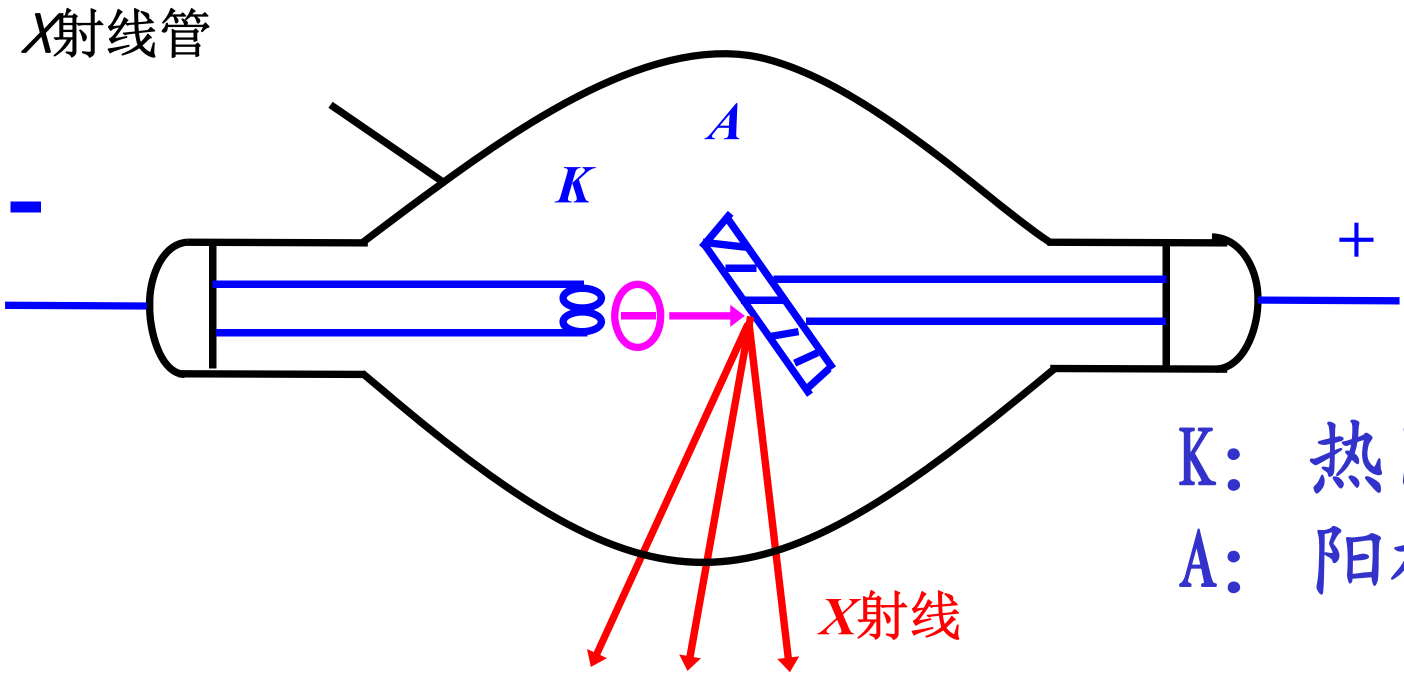
$$k < (a+b)/\lambda = d/\lambda \qquad k_{\max} = \frac{d}{\lambda} = \frac{6\times10^{-6}}{600\times10^{-9}} = 10$$

实际可以观察到**0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 7, ± 9**级共**15**条谱线.

§15.10 X射线

一、X射线的产生

X射线波长量级0.1~100 Å

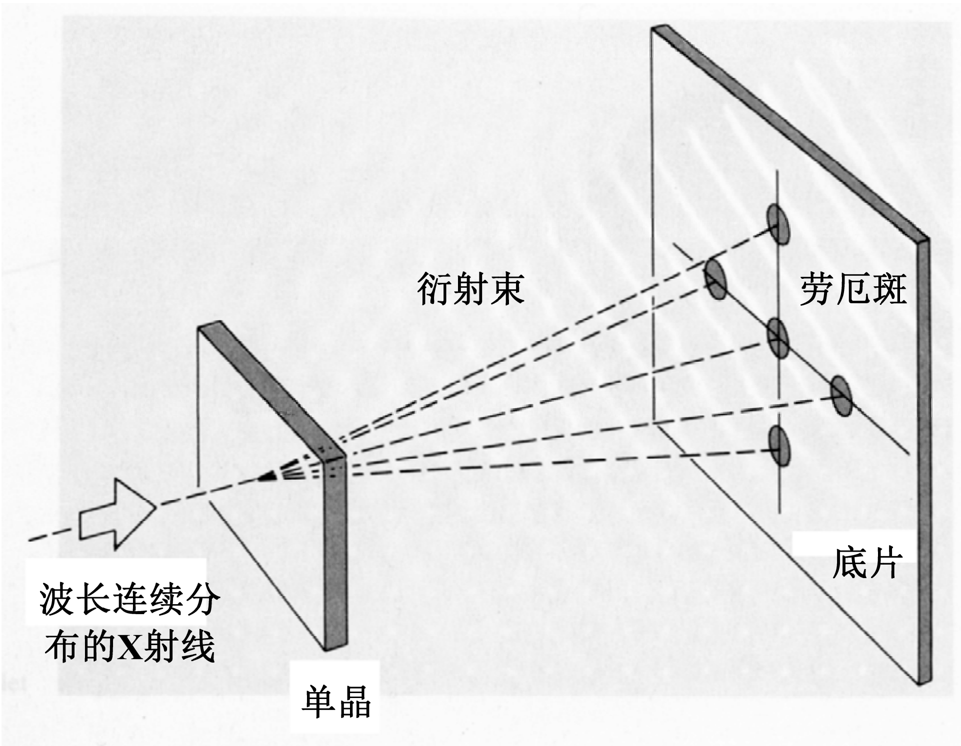


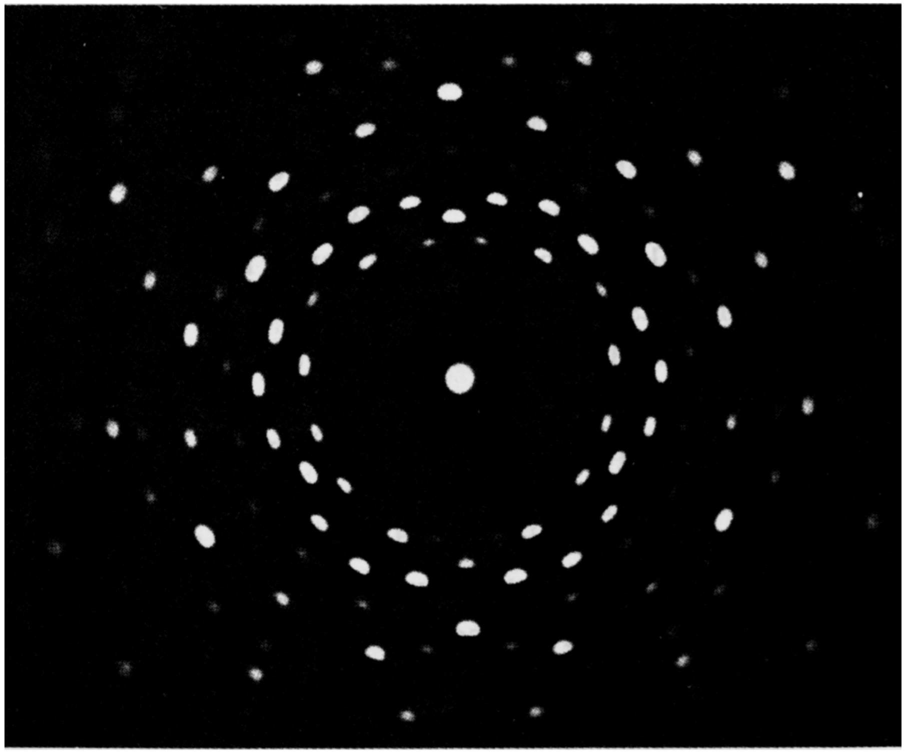
K：热阴极
A：阳极

X射线管是具有阴极和阳极的真空管，阴极通电后可发射热电子，经超高电压加速轰击靶极，高能电子急剧减速使电磁波X射线从靶极发出（电子的韧制辐射）。

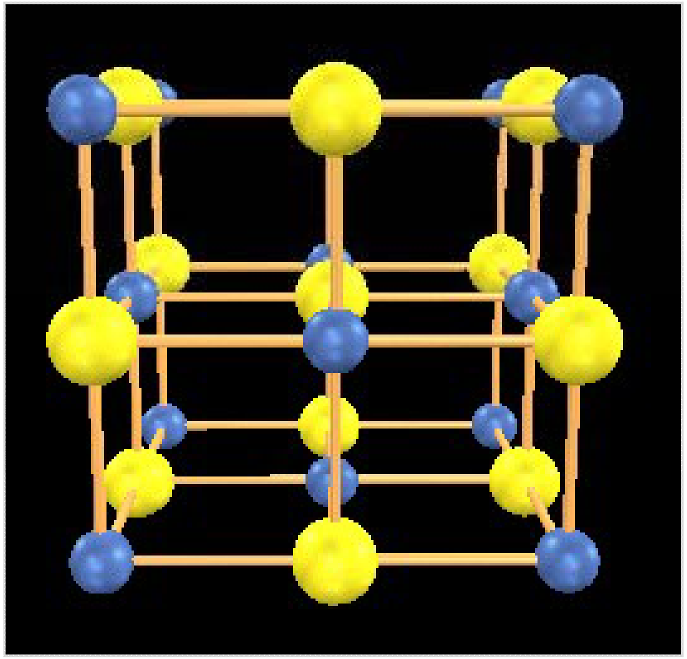
二、劳厄实验装置与劳厄斑(1912)

X射线在晶体上的衍射

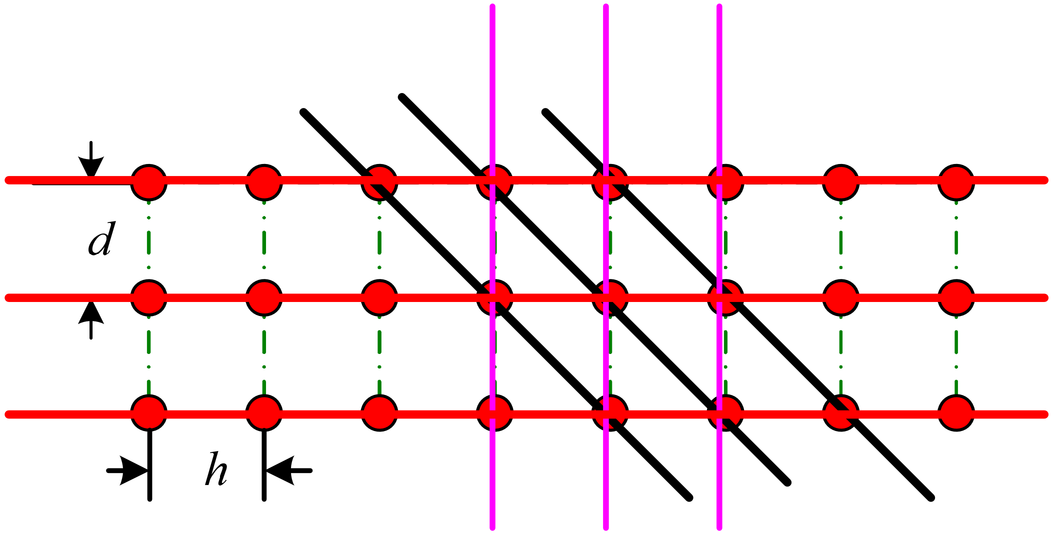




为何形成劳厄斑？



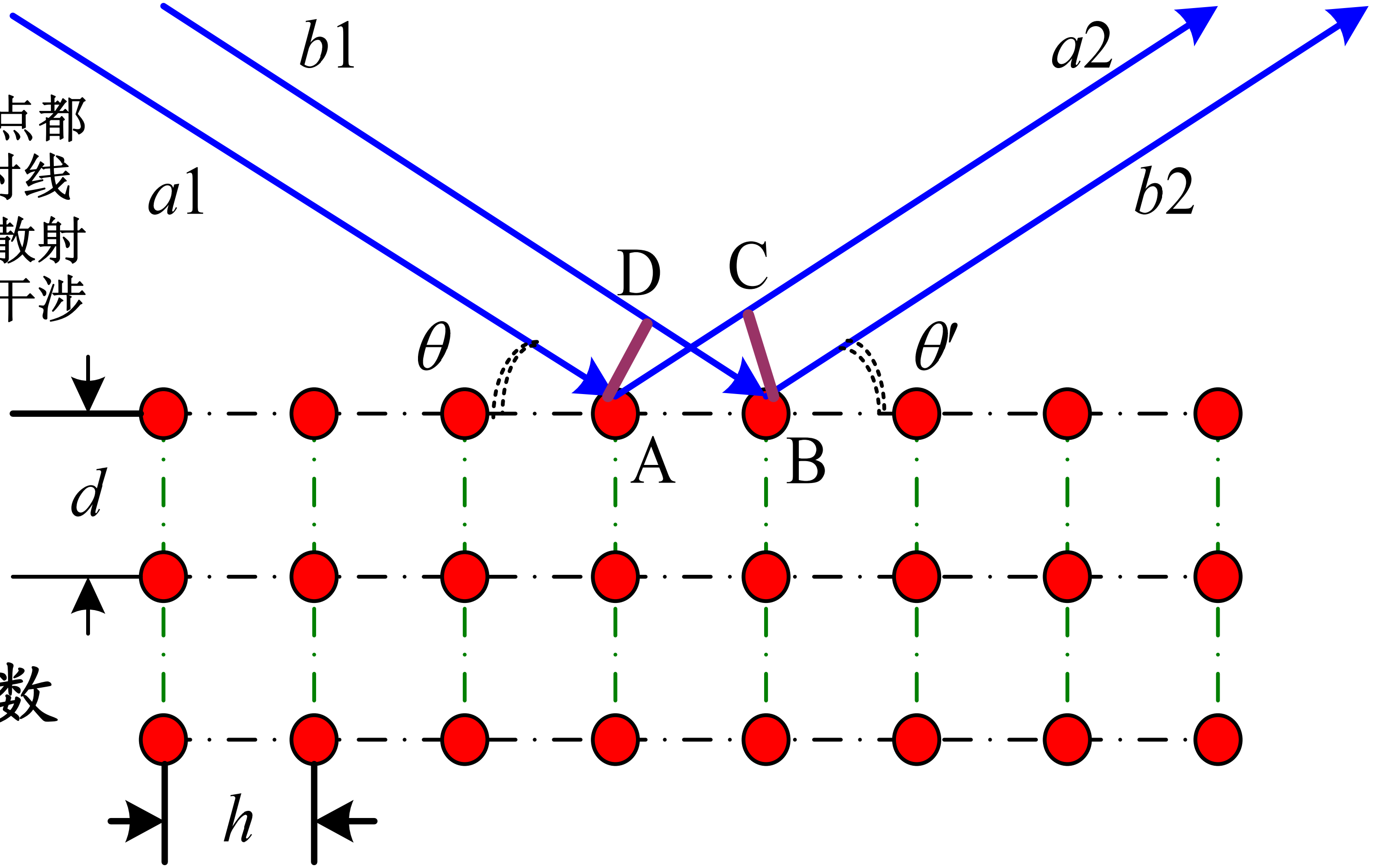
食盐晶体的点阵模型



三、布拉格公式

X射线在同一晶面上的干涉和衍射

晶体的每个格点都可以看成是X射线的散射中心，散射光可能多光束干涉

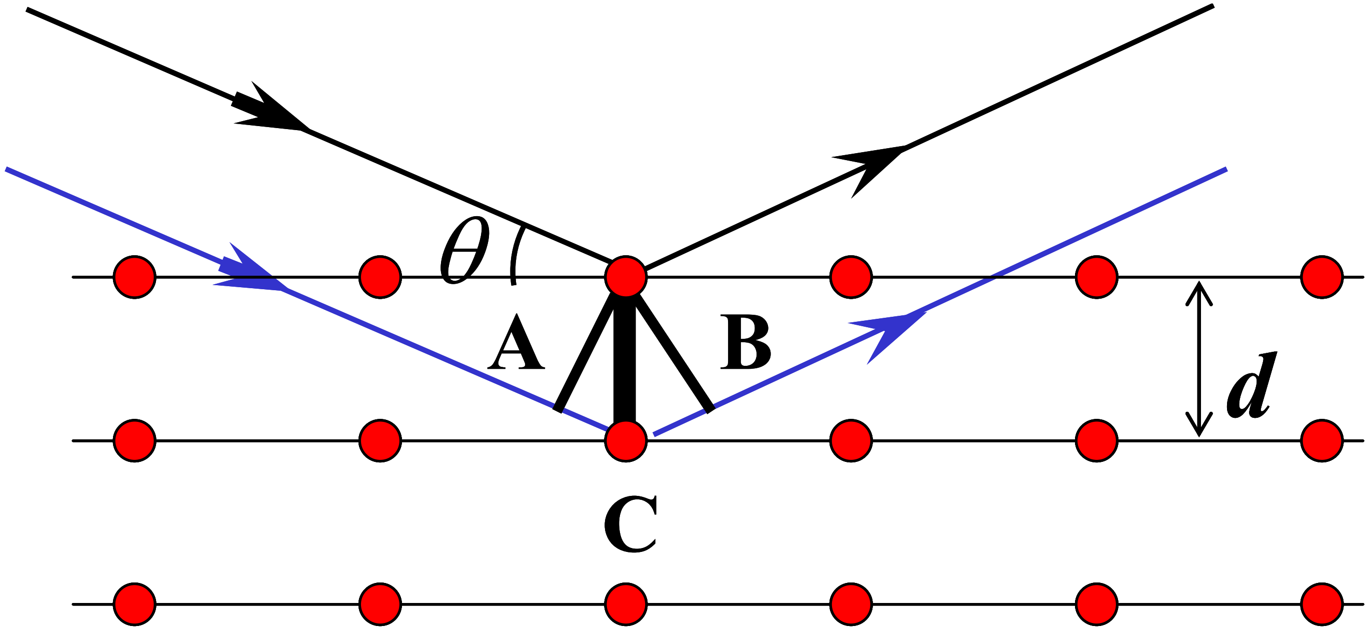


d：晶格常数

$$\delta = AC - BD = h\cos\theta' - h\cos\theta = \pm k\lambda \qquad \theta' = \theta$$

干涉加强

X射线在不同晶面上的干涉和衍射



光程差: $$\delta = \overline{AC} + \overline{CB} = 2d \cdot \sin\theta$$

反射波相干极大满足

$$2d\sin\theta = k\lambda \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$ **(布拉格公式)**

因此，在劳尔实验中，入射**x**射线包含各种波长，对每族镜面总能找到一种波长满足**Bragg**公式，从而在晶面的反射方向上形成劳尔斑

习题:

帕洛玛的海耳望远镜，口径为200英尺的（5.1米），以550纳米作为天体发光的波长，试计算

（1）望远镜的最小分辨角;

（2）人眼的瞳孔大约4.00mm，人眼的最小分辨角是多少？

（3）月球到地球的距离为3.844 ×108m，分别计算望远镜和人眼能够在月球表面分辨相距多远的物体。