第十三章 机械波

北京邮电大学
理学院物理系

什么是波

振动状态以一定速度在空间的传播就形成了波.

波的分类

- 以振动类型分：

1. 机械波

机械振动以一定速度在弹性介质中由近及远地传播出去，就形成机械波.

产生条件 $\begin{cases} \text{波源：作机械振动的物体} \\ \text{弹性介质：承担传播振动的物质} \end{cases}$

2. 电磁波

变化的电场和变化的磁场在空中的传播过程形成电磁波.

3. 物质波

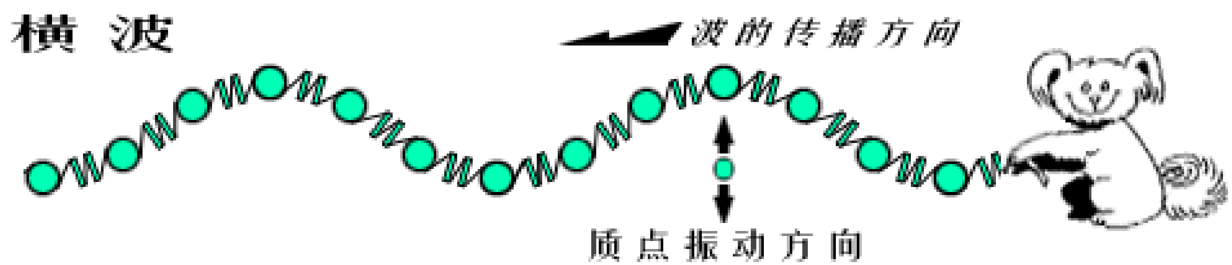
物质波（也称概率波）是微观粒子的一种属性，具有完全不同的性质，遵从量子力学理论.

波的分类

◆ 以振动方向分：

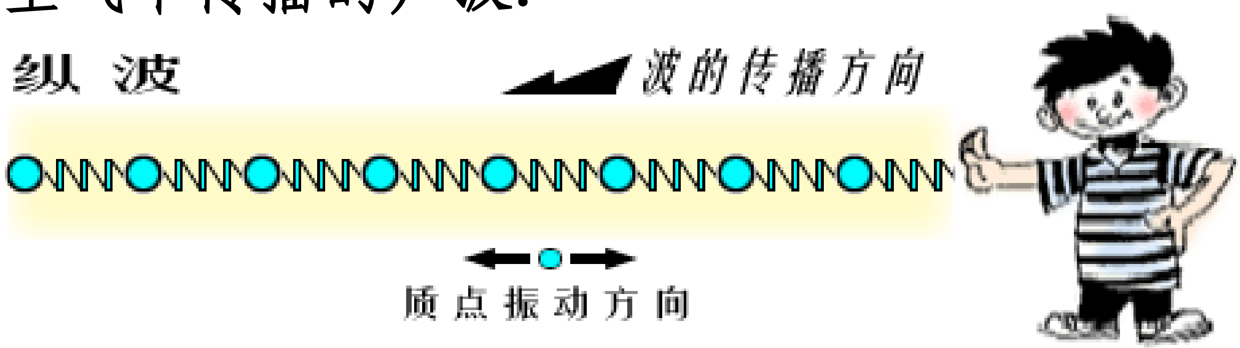
横波：介质质点的振动方向与波传播方向相互垂直的波；

如柔绳上传播的波.



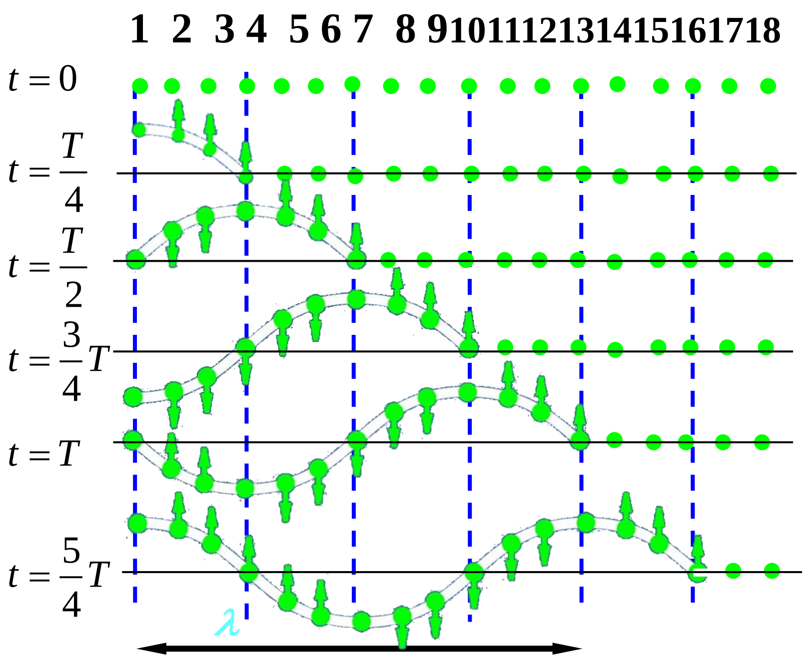
纵波：介质质点的振动方向和波传播方向相互平行的波；

如空气中传播的声波.

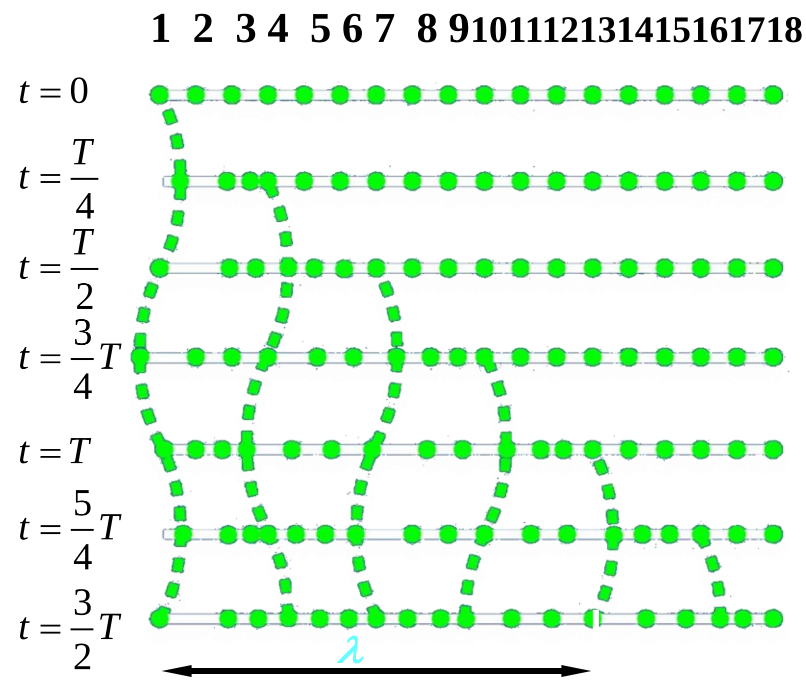


（对于机械波，气体和液体内只能传播纵波，不能传播横波）

波的特点



横　波



纵　波

- 结论

(1) 波动中各质点并不随波前进;

(2) 各个质点的相位依次落后, 波动是相位的传播.

3. 波的特点：

(1) 媒质中各质元都只在自己的平衡位置附近振动，并未“随波逐流”。波的传播不是媒质质元的传播。

(2) “上游”的质元依次带动“下游”的质元振动(依靠质元间的弹性力)。

(3) 某时刻某质元的振动状态将在较晚时刻于“下游”某处出现，这就是“波是振动状态的传播”的含义。

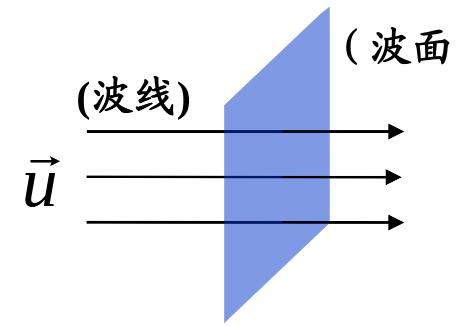
(4) 振动状态由相位决定，因此振动状态的传播也可以说成是“相位”的传播。

(5) 振动状态相同的点叫做“同相点”，相邻两同相点之间的距离为一个波长λ

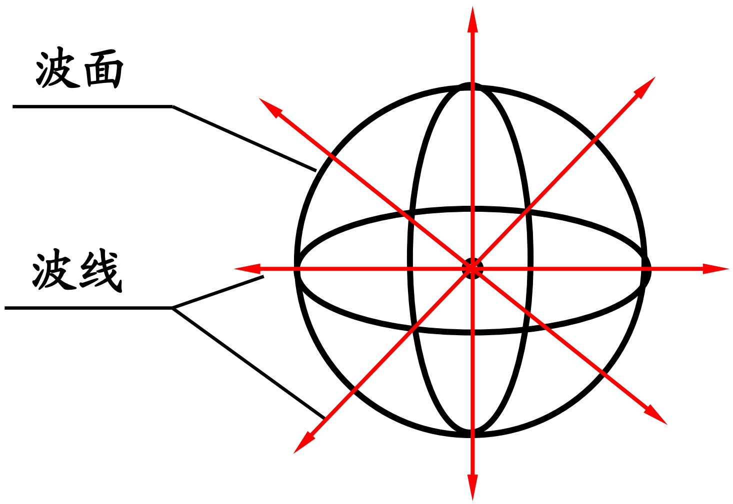
波的几何描述

波线：沿波的传播方向作的有方向的线.

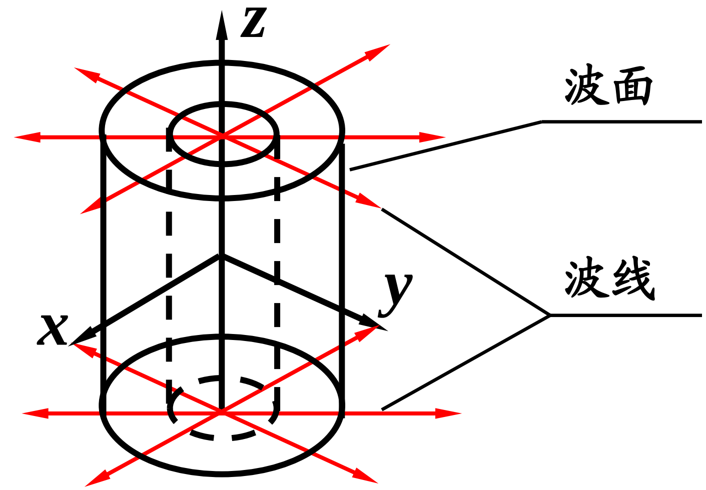
波面：在波传播过程中，任一时刻媒质中振动相位相同的点联结成的面.



波前：在某一时刻，某时刻刚刚开始位移的质点构成的面.



球面波



柱面波

➢ 说明：（1）球面波 $\xrightarrow{\text{无穷远}}$ 平面波.

（2）在各向同性均匀介质中，波线⊥波面.

本章内容

§2.1 简谐波

§2.2 惠更斯原理

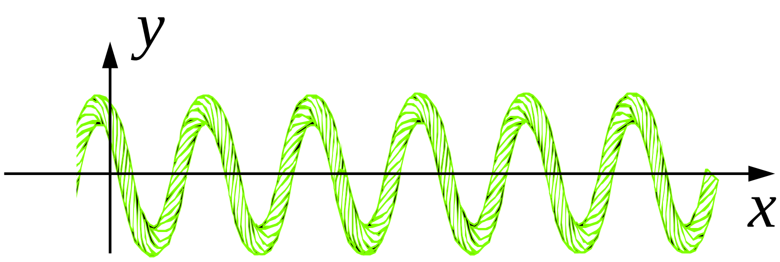
§2.3 波的能量

§2.4 波的干涉

简谐波的波函数

一维波的波动方程（波函数）

$$y(x,t) = f(x,t)$$



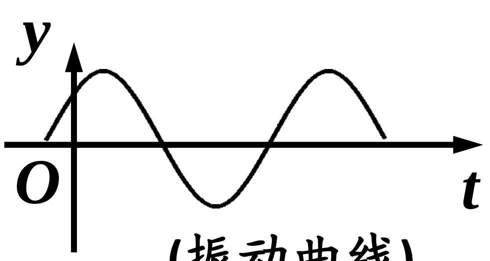
简谐波的波函数

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

简谐波波函数的物理意义

(1) $x = x_0$， 给出 x_0 处质元振动方程

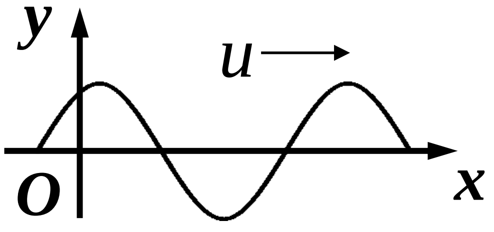
$$y(x_0,t) = A\cos(\omega t - kx_0 + \varphi_0)$$



(振动曲线)

(2) $t = t_0$ ， 给出 t_0时刻的波形图

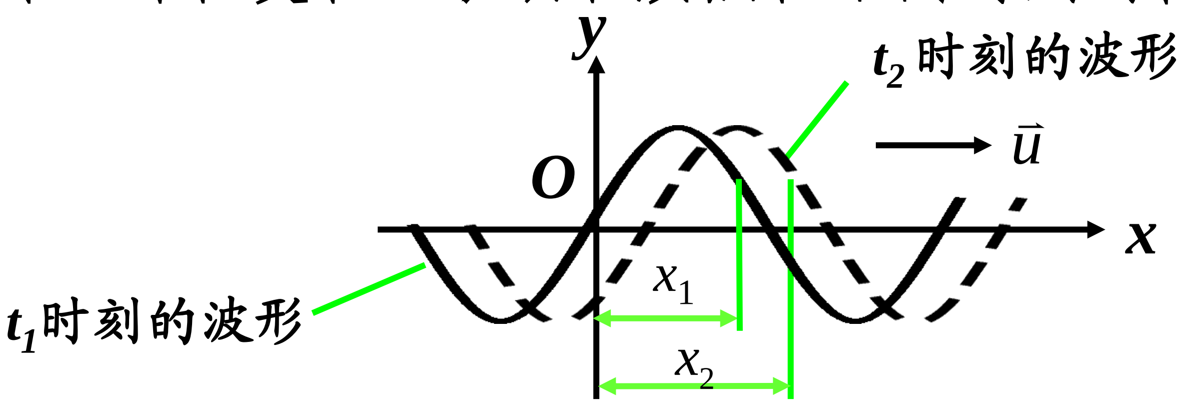
$$y(x,t_0) = A\cos(\omega t_0 - kx + \varphi_0)$$



(波动曲线)

简谐波的波函数

(3) ***x*** **和** ***t*** **都在变化，表明各质点在不同时刻的位移分布.**



取不同时刻两点

$$y(x_1,t_1)=A\cos(\omega t_1-kx_1+\varphi_0)$$

$$y(x_2,t_2)=A\cos(\omega t_2-kx_2+\varphi_0)$$

若两点的相位相等 $\omega t_1-kx_1+\varphi_0=\omega t_2-kx_2+\varphi_0$

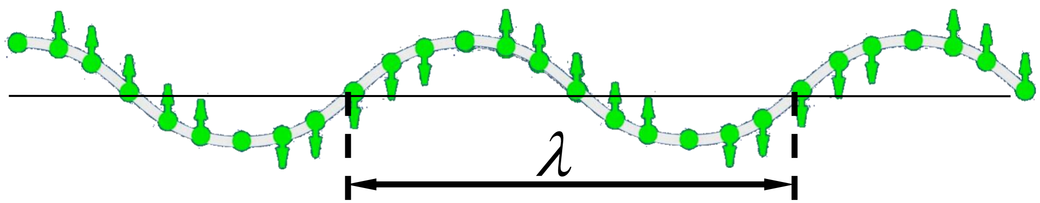
令 $t_2=t_1+\Delta t \quad x_2=x_1+\Delta x$ 则 $u=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{\omega}{k}$

❖ ***u*****为波速，也称作相速度.**

简谐波的特征量

波长（λ）: **同一波线上相位差为 2π 的质点之间的距离；即波源作一次完全振动，波前进的距离.**

（波长反映了波的空间周期性）



角波数$\boldsymbol{k}$　**2 π 距离中完整波的数目**　$k = 2\pi / \lambda$

周期（T）: **波前进一个波长距离所需的时间.**

(周期表征了波的时间周期性)

频率(ν): **单位时间内，波前进距离中完整波的数目.**

频率与周期的关系为　$\nu = 1/T = \omega / 2\pi$

波速（u）: **振动状态在媒质中的传播速度.**

波速与波长、周期(或频率）的关系为　$uT = \lambda$

简谐波波函数的其它形式

将 $k = 2\pi/\lambda$ 、$uT = \lambda$、 $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ 代入

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

有

$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut - x) + \varphi_0] \end{cases}$$

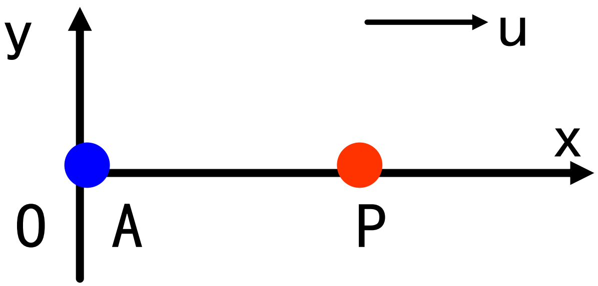
若波沿轴负向传播时，则 $k \Rightarrow -k$，波函数变为

$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0) \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut + x) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \end{cases}$$

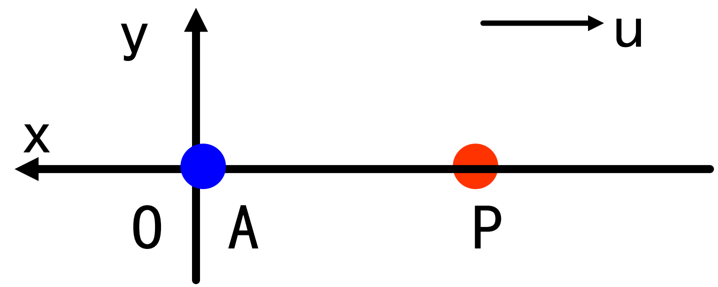
例：平面简谐波在空间传播，已知 A 点的振动规律为

$$y = A\cos[\omega t + \varphi_0]$$

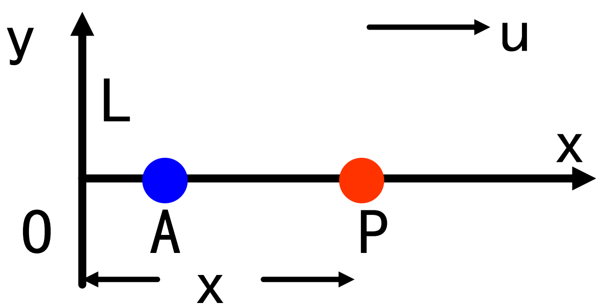
试就四种坐标选择，确定波动方程。



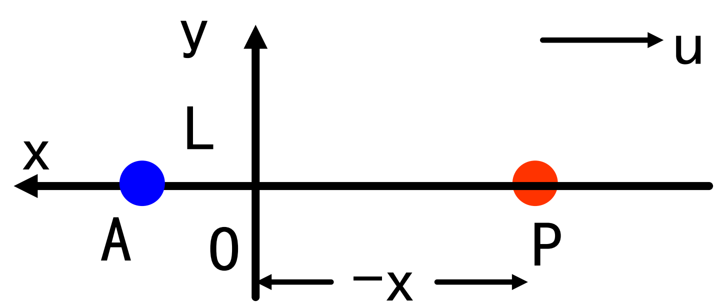
$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$



$$y = A\cos[\omega(t - \frac{-x}{u}) + \varphi_0]$$



$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x-l}{u}) + \varphi_0]$$



$$y = A\cos[\omega(t - \frac{l-x}{u}) + \varphi_0]$$

平面波的波动微分方程

由 $y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$

知 $\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=-A\omega^2\cos(\omega t-kx+\varphi_0)\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}&=-Ak^2\cos(\omega t-kx+\varphi_0)\end{aligned}\right\}\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

- 说明

(1) 上式是一切平面波所满足的微分方程（正、反传播）；

(2) 不仅适用于机械波，也适用于电磁波、热传导、化学中的扩散等过程;

(3) 若物理量是在三维空间中以波的形式传播，波动方程为

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

波速

波速：亦称相速度，其大小主要决定于媒质的性质，与波的频率无关.

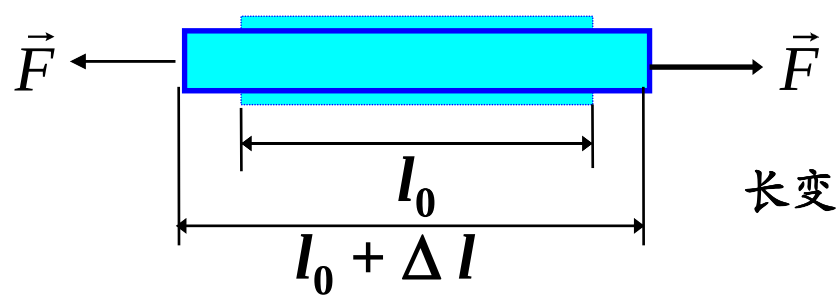
例： **a. 拉紧的绳子或弦线中横波的波速为：**

$$u_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \begin{cases} T \text{ — 张力} \\ \mu \text{ — 线密度} \end{cases}$$

b. 均匀细棒中，纵波的波速为：

$$u_{\mathrm{l}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \begin{cases} Y \text{ — 杨氏模量} \\ \rho \text{ — 棒的密度} \end{cases}$$

$$\frac{F}{S} = Y\frac{\Delta l}{l_0}$$



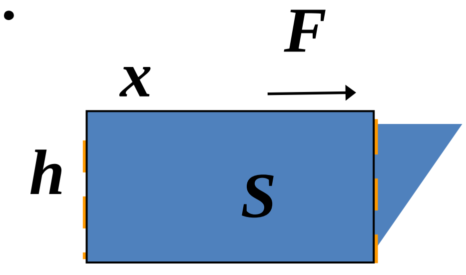
波速

c. 固体介质中传播的横波速率由下式给出:

$$u_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G: 切变弹性模量

$$\frac{F}{S} = G\frac{x}{h}$$



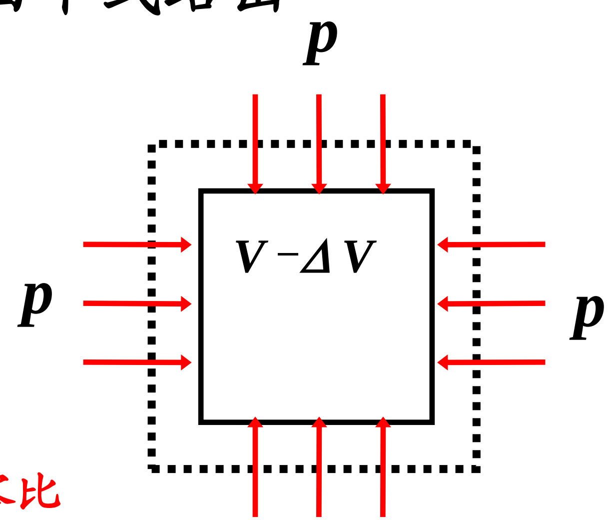
由于: $G < Y$, 固体中 $u_{横波} < u_{纵波}$

d. 液体和气体只能传播纵波，其波速由下式给出

$$u_{\mathrm{l}} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

B: 流体的体变弹性模量

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}$$



e. 稀薄大气中的纵波波速为

$$u_{\mathrm{l}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

γ : 气体比热容比

$$\gamma = \frac{C_v}{C_p}$$

本章内容

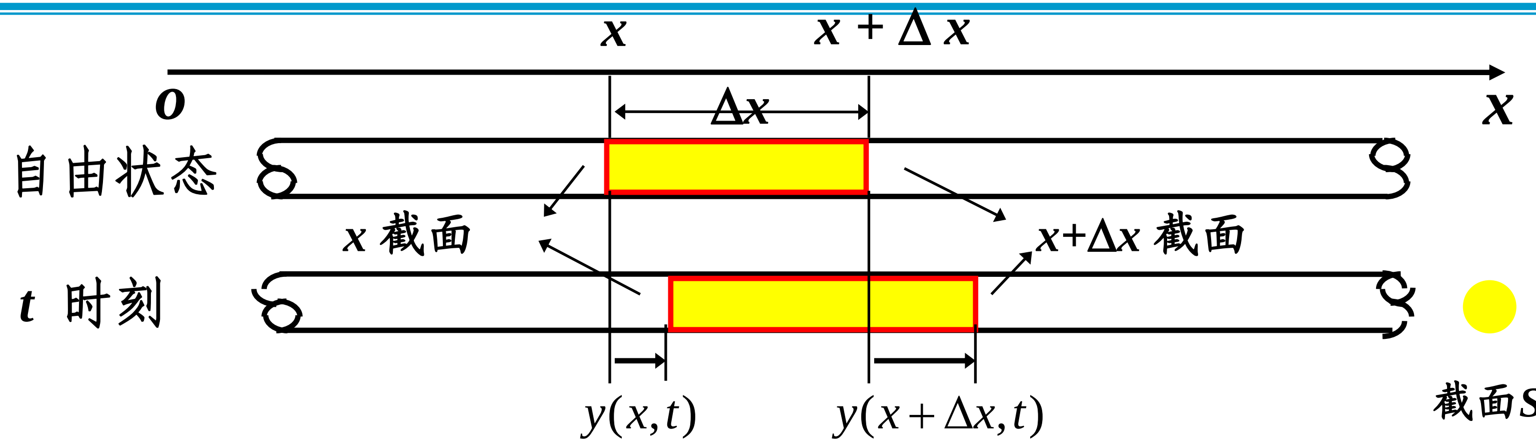
§2.1 简谐波

§2.2 波的能量

§2.3 惠更斯原理

§2.4 波的干涉

简谐波的能量



设纵波 $y = A\cos(\omega t - kx)$ 沿 **x** 方向传播，取微元 $\Delta m = \rho S \Delta x$

则微元的动能为 $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\Delta m \upsilon^2 = \frac{1}{2}\Delta m(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\rho S \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$

由杨氏模量的定义和胡克定律 $F = YS\frac{\Delta y}{\Delta x} = k\Delta y$

微元的势能为 $E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}\frac{YS}{\Delta x}(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}YS\Delta x(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2 =_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2}YS\Delta x(\frac{\partial y}{\partial x})^2$

$$= \frac{1}{2}YS\Delta x A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$= \frac{1}{2}\rho S\Delta x A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \quad = E_{\mathrm{k}}$$

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad k = \frac{\omega}{u}}$$

简谐波的能量

- 微元的机械能为 $E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \rho S\Delta x A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$

- 能量密度 $w = \dfrac{E}{S\Delta x} = \rho A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$

平均能量密度 $\bar{w} = \dfrac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

- 讨论

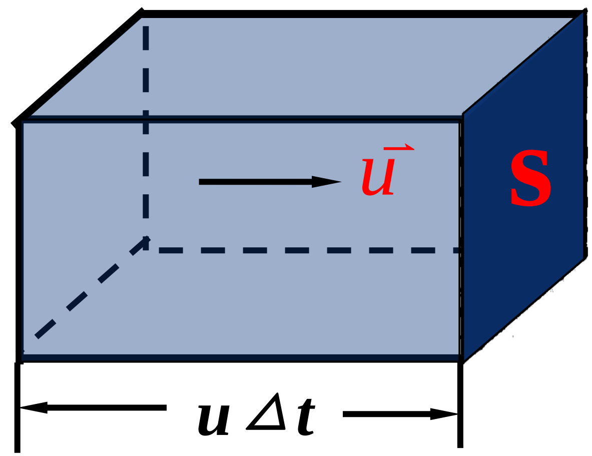
(1) 在波的传播过程中，媒质中任一质元的**动能和势能是同步变化**的，即 $E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{p}}$，与简谐弹簧振子的振动能量变化规律是不同的.

(2) 质元机械能随时空周期性变化，仍是一波动过程，表明质元在波传播过程中不断吸收和放出能量；因此，**波动过程也是能量的传播过程**.

简谐波的能流密度

能流：单位时间内通过某一截面的波动能量.

$$P=\frac{wu\Delta tS}{\Delta t}=wuS$$



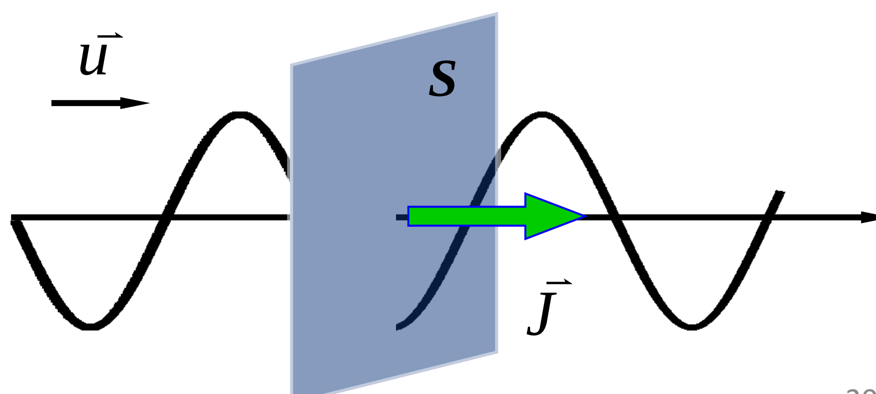
在一个周期中的平均能流为

$$\bar{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P\mathrm{d}t=\bar{w}uS$$

能流密度：通过垂直于波线截面单位面积上的能流.

大小：$J=\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}=wu$

方向：波的传播方向

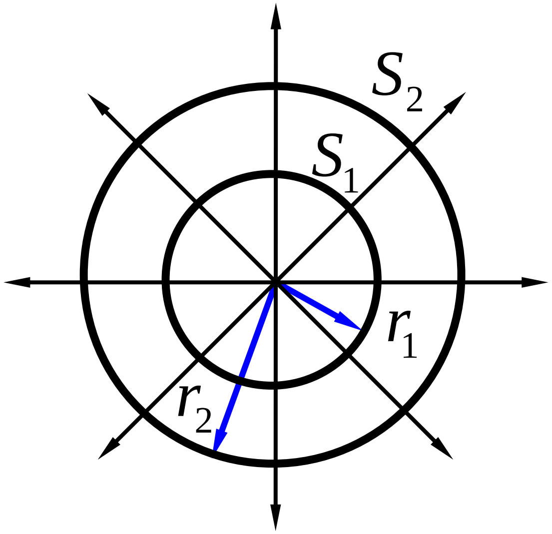


简谐波的能流密度

波的强度：一个周期内能流密度大小的平均值.

$$I=\bar{J}=\frac{1}{T}\int_0^T J\mathrm{d}t=\frac{u}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t=u\bar{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u\propto A^2$$

❖ 球面波的振幅（介质不吸收能量）



由 $\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 uS_1=\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 uS_2$

得 $A_1^2\cdot 4\pi r_1^2=A_2^2\cdot 4\pi r_2^2$

$$A_1 r_1=A_2 r_2$$

令 $Ar=A_0 r_0$ （$\boldsymbol{A_0}$为离原点（波源）$\boldsymbol{r_0}$ 距离处波的振幅）

则球面简谐波的波函数为

$$y(r,t)=\frac{A_0 r_0}{r}\cos[\omega(t-\frac{r-r_0}{u})+\varphi_0]$$

球面波的振幅随 $\boldsymbol{r}$ 增大而减小.

本章内容

§2.1 简谐波

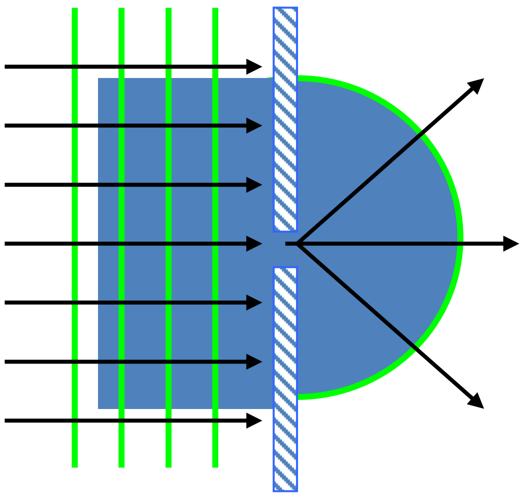
§2.2 波的能量

§2.3 惠更斯原理

§2.4 波的干涉

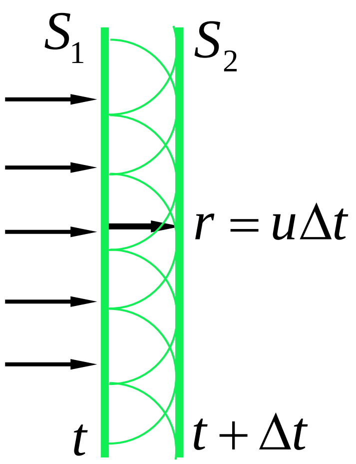
惠更斯原理

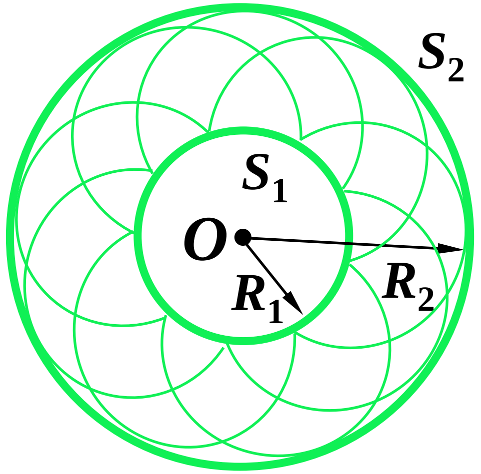
惠更斯原理：行进中的波面上任意一点都 可看作是新的子波源；所有子波源各自向外发出许多子波；各个子波所形成的包络面，就是原波面在一定时间内所传播到的新波面.



- 应用

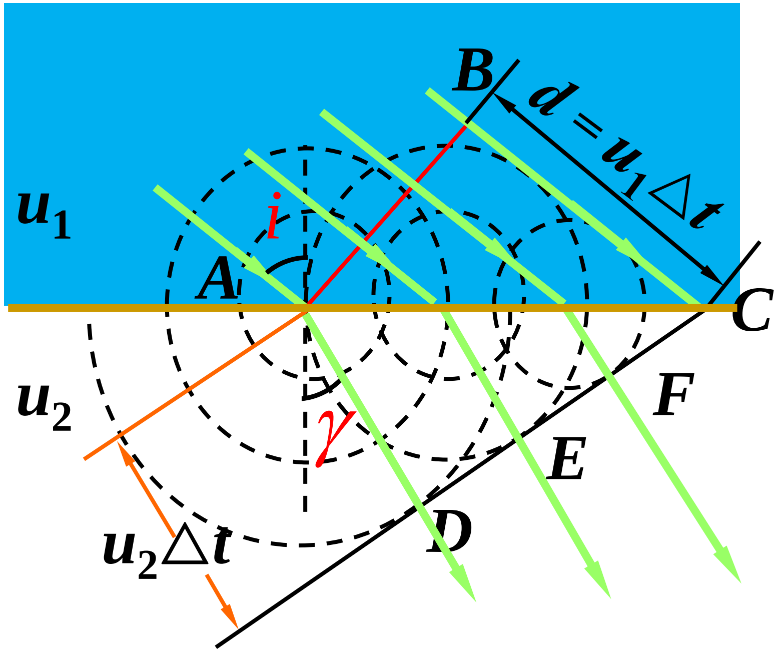
(1) 已知某一时刻的波前，可用几何方法决定下一时刻波面；



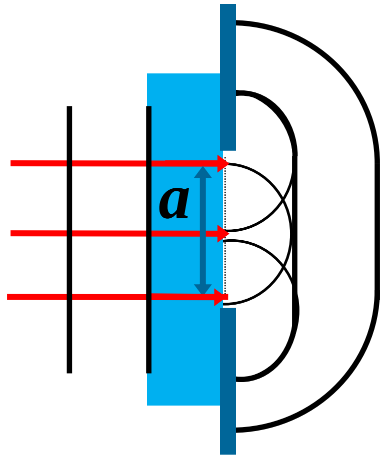


惠更斯原理

(2) 解释反射、折射、衍射现象;



折射现象



衍射现象

由几何关系知: $$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1 \Delta t}{u_2 \Delta t} = \frac{u_1}{u_2}$$

(3) 亦适用于电磁波，非均匀和各向异性媒质;

(4) 不足之处（未涉及振幅，相位等的分布规律）.

本章内容

§2.1 简谐波

§2.2 惠更斯原理

§2.3 波的能量

§2.4 波的干涉

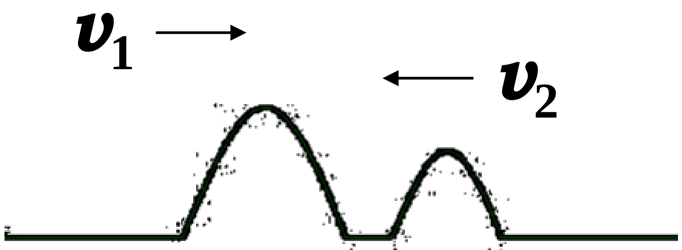
波的叠加原理

(1) 波传播的独立性

当几列波在传播过程中在某一区域相遇后再行分开，各波的传播情况与未相遇一样，仍保持它们各自的频率、波长、振动方向等特性继续沿原来的传播方向前进.

(2) 叠加原理

在波相遇区域内，任一质点的振动，为各波单独存在时所引起的振动的合振动.



$$y = y_1 + y_2$$

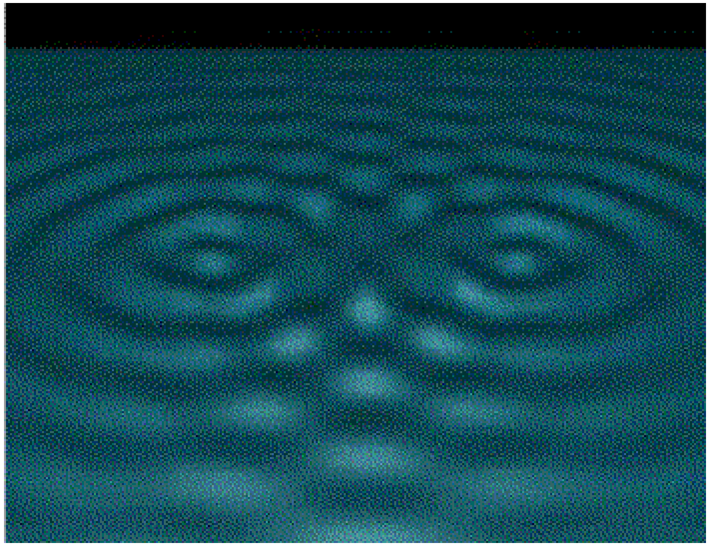
➤ 注意：(1) 波的叠加原理仅适用于线性波的问题（振幅小）.

(2) 波的叠加原理对电磁波也适用.

波的干涉

◆ 干涉现象:

当两列（或多列）波叠加时，其合振动的振幅 A 和合强度 I 将在空间形成一种稳定的分布，即某些点上的振动始终加强，某些点上的振动始终减弱的现象.



相干条件: 频率相同、振动方向相同、相位差恒定;

相干波:　满足相干条件的波;

相干波源: 产生相干波的波源;

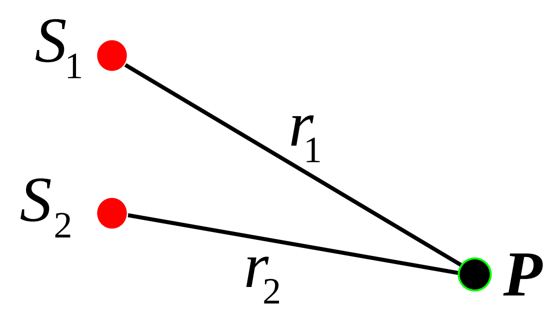
波的干涉

- 干涉规律

波源的振动方程

$$S_1 \qquad y_{01} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$S_2 \qquad y_{02} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$$



波在 P 点一起的振动方程

$$P \begin{cases} y_1 = A_1\cos(\omega t - 2\pi\dfrac{r_1}{\lambda} + \varphi_1) \\ y_2 = A_2\cos(\omega t - 2\pi\dfrac{r_2}{\lambda} + \varphi_2) \end{cases}$$

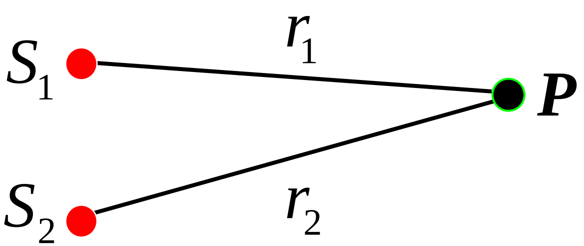
P 点处的合振动方程为 $y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$

P 点的振幅为 $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[\varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda}]$

P 点处波的强度为 $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$

其中相位差为 $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda}$

波的干涉



- 讨论

空间点振动情况分析:

当 $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi$

$A_{\max} = A_1 + A_2 \qquad I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ (干涉相长)

当 $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm(2k+1)\pi \qquad k = 0,1,2,\cdots$

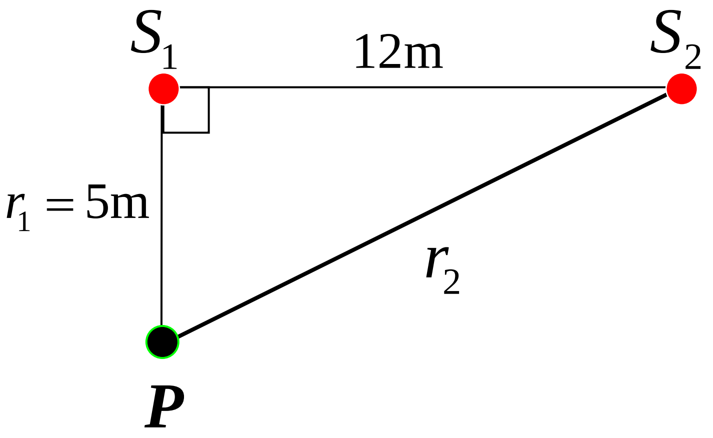
$A_{\min} = |A_1 - A_2| \qquad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ (干涉相消)

若 $\varphi_1 = \varphi_2 \quad \Delta\varphi = -2\pi\dfrac{r_2 - r_1}{\lambda} = 2\pi\dfrac{\delta}{\lambda} \qquad \delta = r_2 - r_1$ (波程差)

当 $\delta = r_1 - r_2 = \pm k\lambda, \qquad k = 0,1,2,\cdots$ （干涉相长）

$\delta = r_1 - r_2 = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}, \quad k = 0,1,2,\cdots$ （干涉相消）

例 S_1、S_2为两相干波源，它们的振幅皆为10 cm,频率为75 Hz. 已知两波源的相位差为 2π， 波速为 15 m·s^{-1}, 试确定两列波到达 *P* 点(见图)时相干的结果.



解

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{15}{75}\mathrm{m}=0.2\mathrm{m}$$

$$r_2=\sqrt{12^2+5^2}\mathrm{m}=13\mathrm{m}$$

两列波到达 *P* 点的相位差为

$$\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=2\pi-2\pi\frac{8}{0.2}=-78\pi$$

相位差为π的偶数倍，故P点两波干涉相长.

驻波

1 问题引入

弦乐器为何能演绎出美妙多变的音乐？

2 驻波的形成

两列**相向传播**的**等振幅相干波**的叠加

驻波

$$y_1 = A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$= 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\cos(2\pi\nu t)$$

（驻波方程）

波形不传播

$$y_2 = A\cos 2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right)$$

3 驻波的性质——振幅

$$y = 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\cos(2\pi\nu t)$$

（驻波方程）

驻波的振幅： $A' = 2A\left|\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$

波腹: 振幅最大 $\left|\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right| = 1$ $x = k\frac{\lambda}{2}$

$(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots)$

波节: 振幅最小 $\left|\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right| = 0$ $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$

相邻波腹/相邻波节的间距： $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

3 驻波的性质——相位

$$y = 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\cos(2\pi\nu t)$$

振幅 $A' = 2A\left|\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|$

直接观察

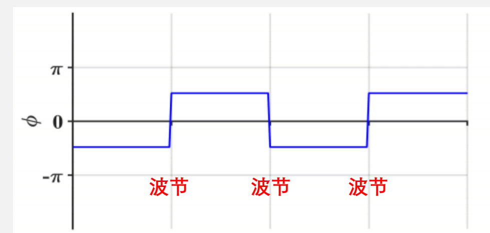
相邻波节间：步调相同 ⟹ 同相

一波节两侧：步调相反 ⟹ 反相

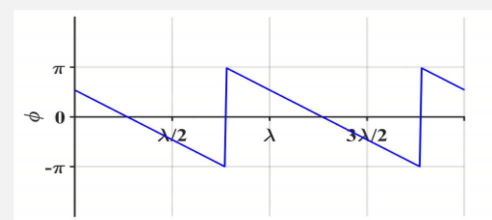
波函数分析

$$\begin{cases} \cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda} > 0 \text{ 时 } y = A'\cos(2\pi\nu t) \\ \cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda} < 0 \text{ 时 } y = A'\cos(2\pi\nu t + \pi) \end{cases}$$

驻波相位



简谐波相位



驻波中相位不传播

4 应用与拓展——弦上的驻波

驻波如何影响弦乐器的发声？

弦长为L，线密度为μ，张力为F，两端固定。

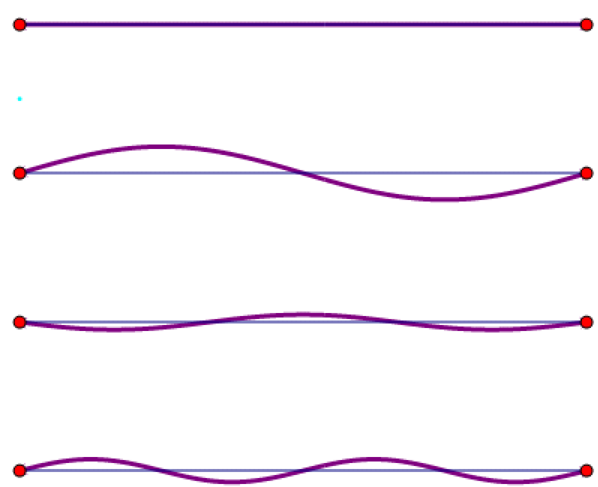
形成驻波的条件为

$$L = k\frac{\lambda_k}{2} \qquad k = 1, 2, 3\cdots$$

则 $$\lambda_k = \frac{2L}{k} \qquad k = 1, 2, 3\cdots$$

弦上的波速 $u = \sqrt{F/\mu} = \lambda_k \cdot \nu_k$

$$\nu_k = \frac{u}{\lambda_k} = \frac{k}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad k = 1, 2, 3\cdots$$



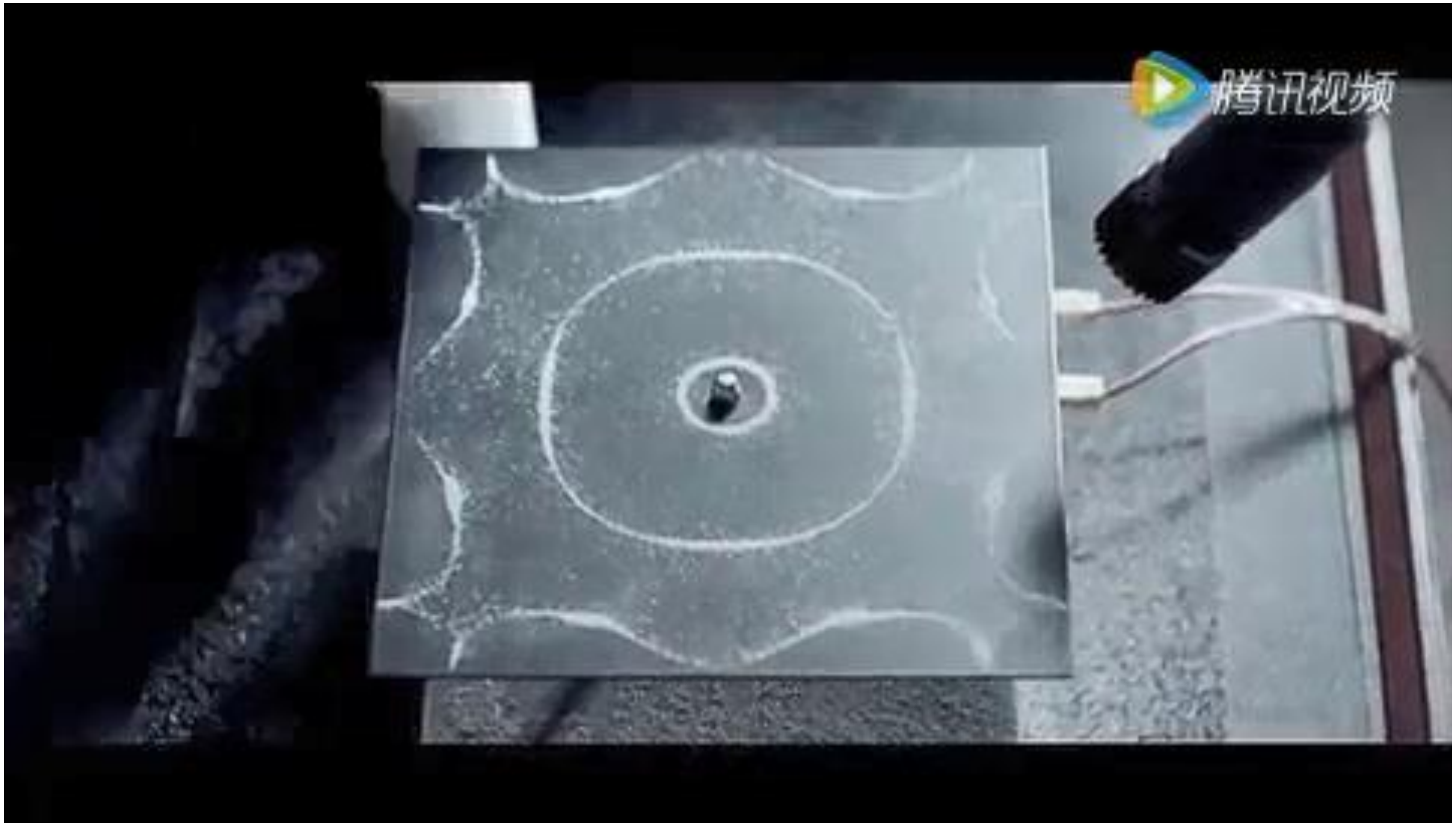
$$L = \frac{\lambda}{2}$$

$$L = 2\cdot\frac{\lambda}{2}$$

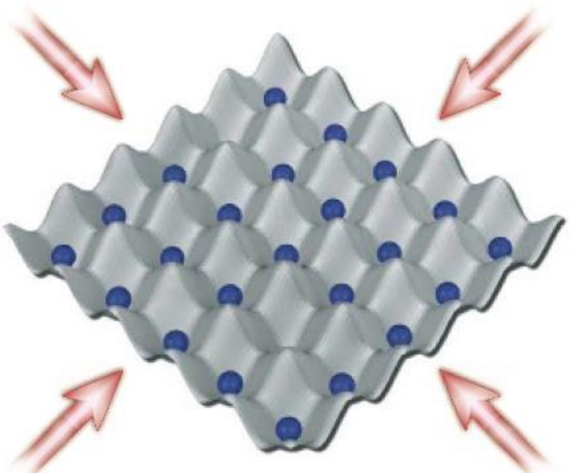
$$L = 3\cdot\frac{\lambda}{2}$$

$$L = 4\cdot\frac{\lambda}{2}$$

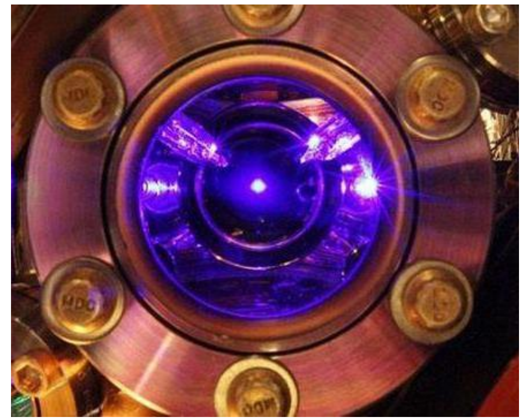
4 应用与拓展——多维驻波



4 应用与拓展——光晶格



光晶格



锶原子
光晶格钟

nature
physics

ARTICLES

PUBLISHED ONLINE: 21 MARCH 2016 | DOI: 10.1038/NPHYS3705

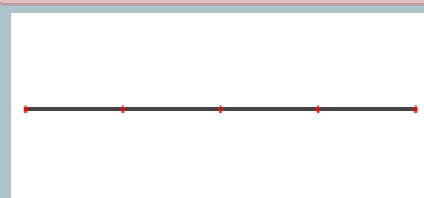
Generation and detection of atomic spin entanglement in optical lattices

Han-Ning Dai[1,2,3], Bing Yang[1,2,3], Andreas Reingruber[1,4], Xiao-Fan Xu[1], Xiao Jiang[2,3], Yu-Ao Chen[2,3]*, Zhen-Sheng Yuan[1,2,3]* and Jian-Wei Pan[1,2,3]*

量子信息

小结

驻 波

形成条件	驻波方程	驻波性质	应用拓展
相向传播	$y = 2A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos(2\pi\nu t)$	振幅	弦乐器
等振幅		相位	光晶格
相干波			

思考题

生活处处可悟理

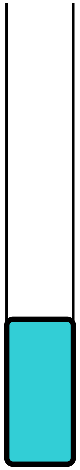
提示：

建立一维空气柱驻波模型

要点：

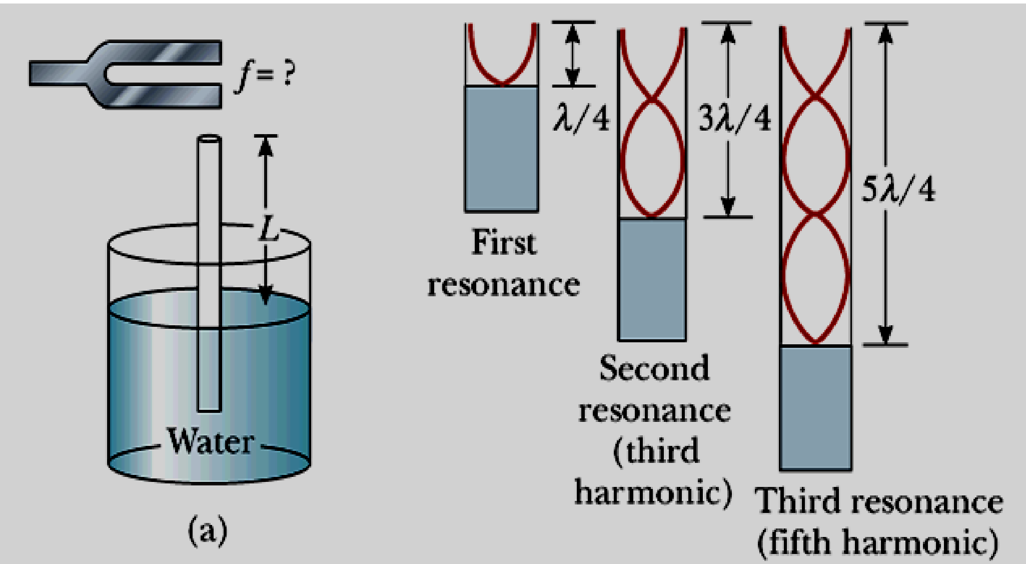
端点是波节/波腹？

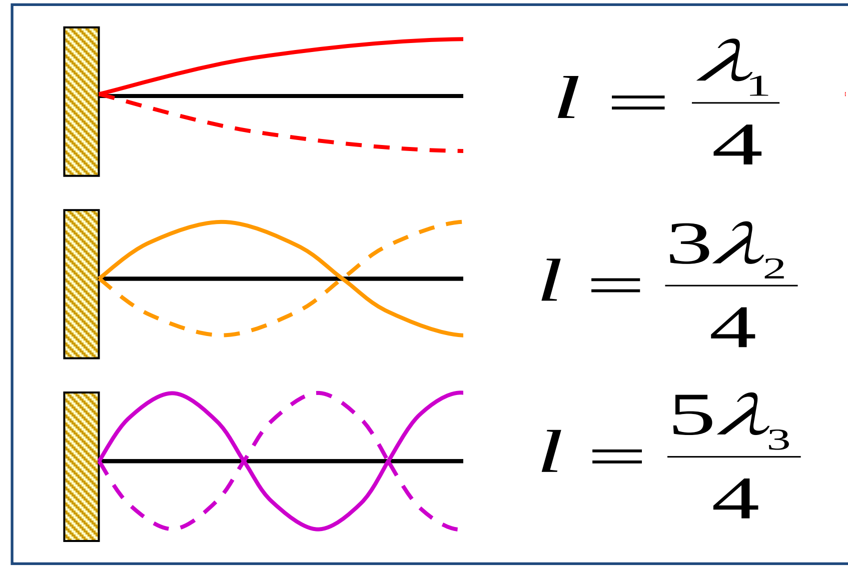
频率条件的形式？



开水瓶装水时声音为什么会变化？

空气柱里的驻波





一端为波节，一端为波腹（开口）。

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} - \frac{\lambda_n}{4}, n = 1,2,\cdots \qquad \nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = (2n-1)\frac{u}{4l}$$

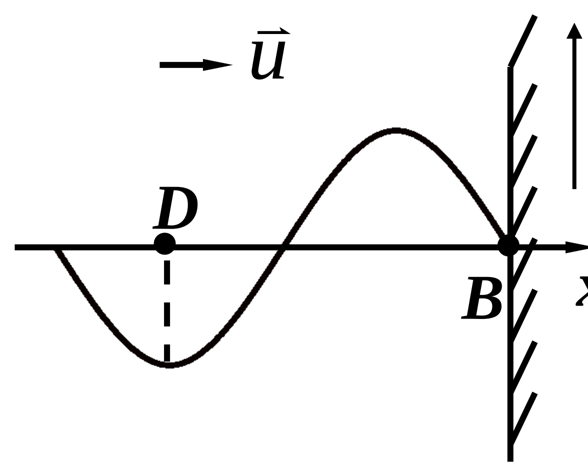
例 平面简谐波 $t=0$ 时刻的波形如图，此波波速为 u ，沿 x 方向传播，振幅为 A，频率为 ν .

求 (1) 以 D 为原点，写出波函数;

(2) 以 B 为反射点，且为波节，若以 B 为 x 轴坐标原点，写出入射波，反射波函数;

(3) 以 B 为坐标原点求合成波，并分析波节，波腹的位置坐标.

解 (1) $$y(x,t)=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})+\pi]$$



(2) $$y_{入}(x,t)=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$$

$$y_{反}(x,t)=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x}{u})+\frac{\pi}{2}]$$

(3) $$y(x,t)=y_{入}+y_{反}=2A\cos(2\pi\nu\frac{x}{u}+\frac{\pi}{2})\cos 2\pi\nu\ t$$

$$=-2A\sin 2\pi\nu\frac{x}{u}\cos 2\pi\nu\ t$$

波腹 $\left|\sin 2\pi\nu\frac{x}{u}\right|=1$ $\quad 2\pi\nu\frac{x}{u}=\frac{2k+1}{2}\pi$

$$x=\frac{2k+1}{4}\cdot\frac{u}{\nu}=\frac{2k+1}{4}\lambda \qquad k=-1,-2,-3\cdots$$

波节 $\left|\sin 2\pi\nu\frac{x}{u}\right|=0$ $\quad 2\pi\nu\frac{x}{u}=k\pi$

$$x=\frac{k}{2}\cdot\frac{u}{\nu}=\frac{k}{2}\lambda \qquad k=0,-1,-2,-3\cdots$$