第7章 振动

北京邮电大学
理学院物理系

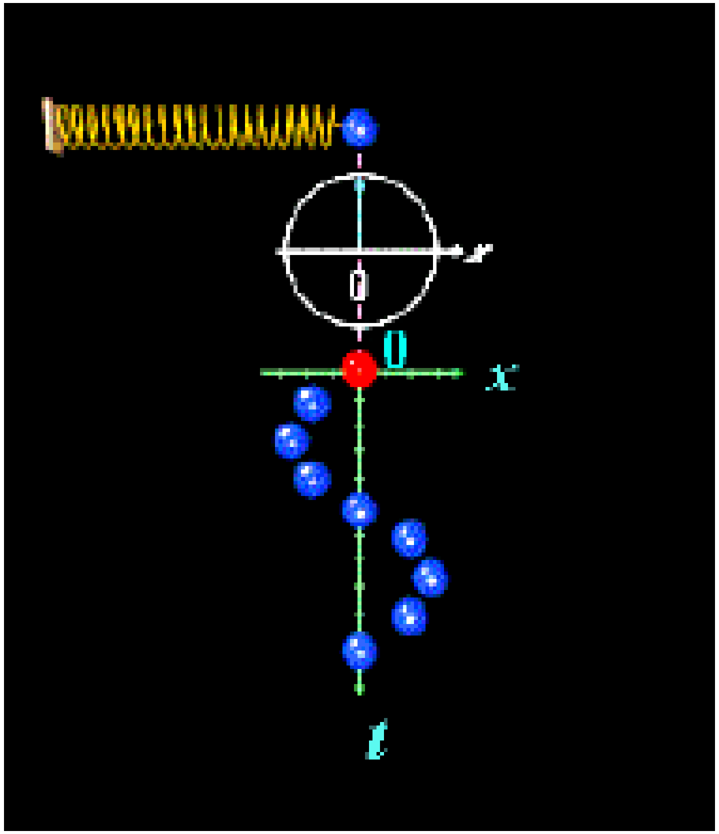
本章内容

§1　简谐振动

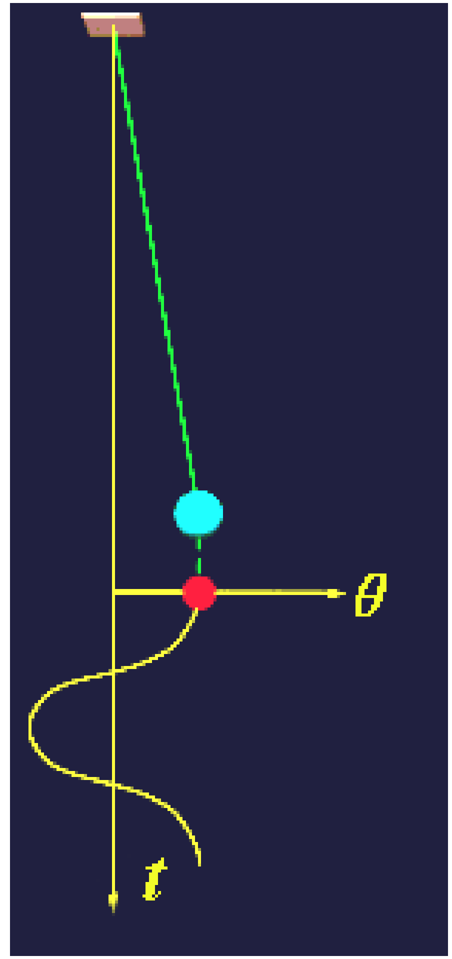
§2　描述简谐振动的特征量

§3　简谐振动的旋转矢量法

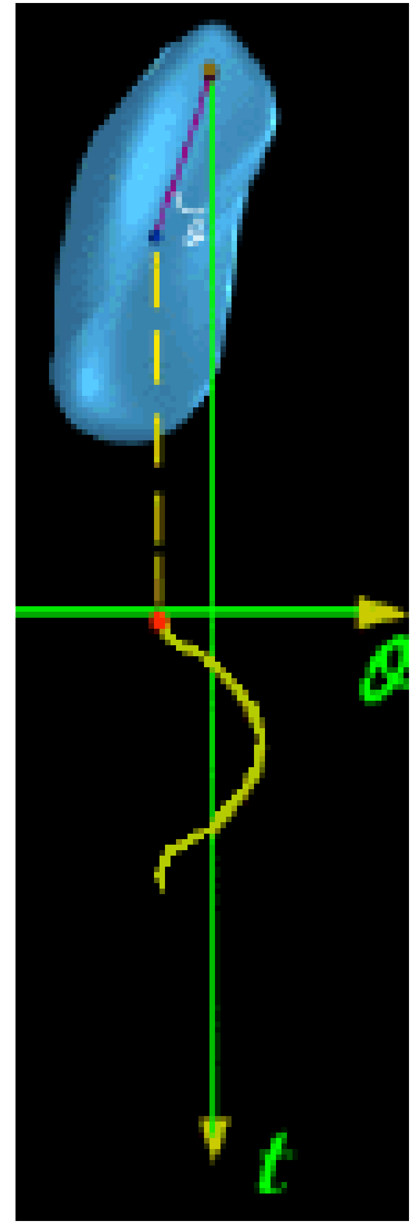
§4　简谐振动的合成



弹簧振子



单摆

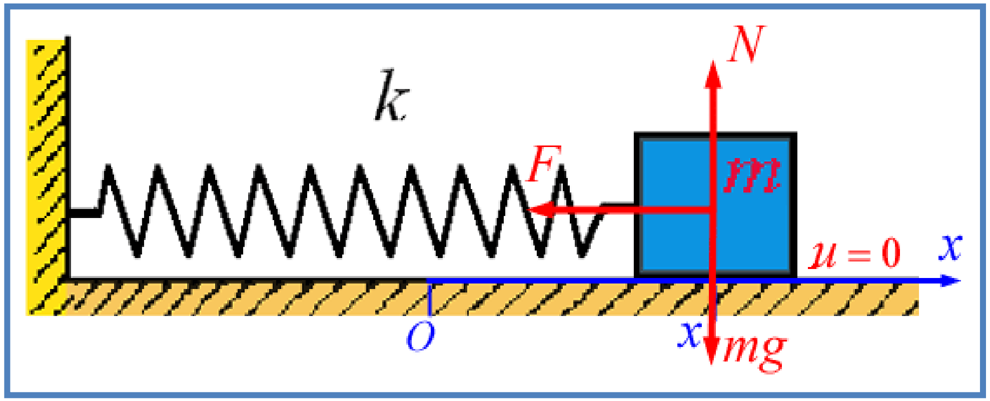


复摆

§1 简谐振动

1. 理想模型：弹簧振子

光滑平面上弹簧振子的小振幅自由振动



轻弹簧 k + 刚体 m （平动~质点）

k → 弹性

m → 惯性

回复力 $F=-kx$ （平衡位置为坐标原点）

2. 运动方程

$$F = -kx$$

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　得： $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ *

求解*得运动方程的微分通解： $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

积分常数

若某物理量满足*，则其运动方程可用时间 t 的正余弦函数形式描述，该物理量的变化称为简谐振动。

3. 位置 x，速度 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，加速度 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$

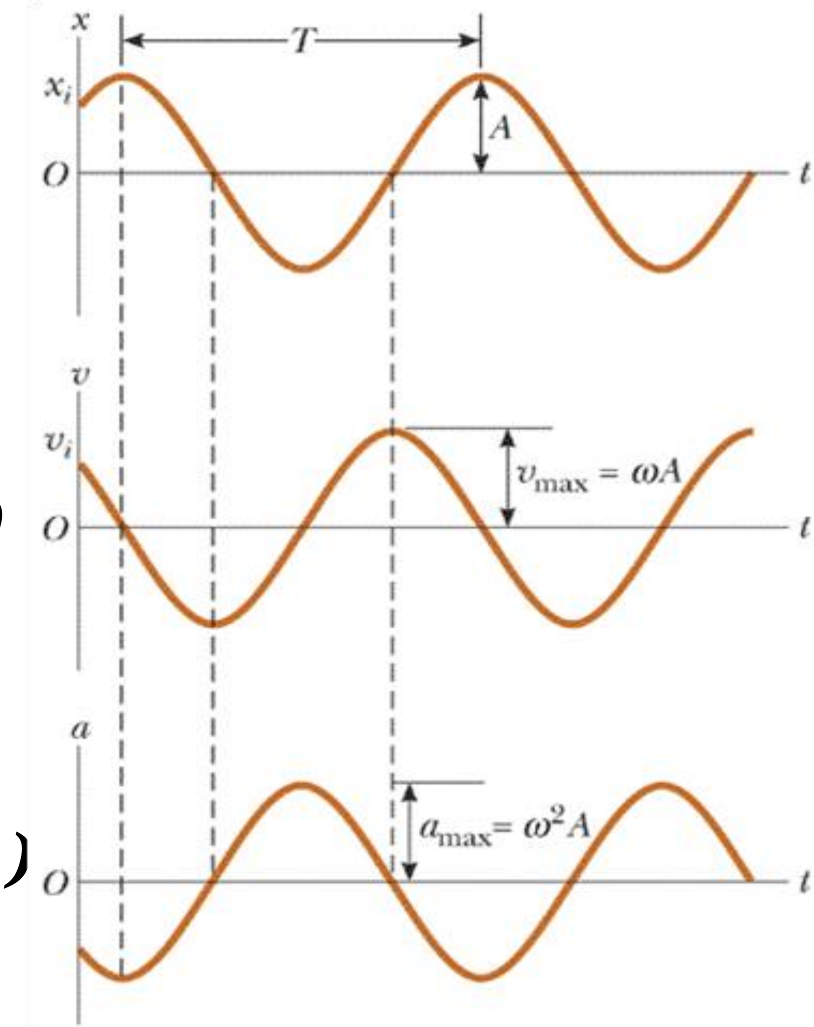
由

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

得

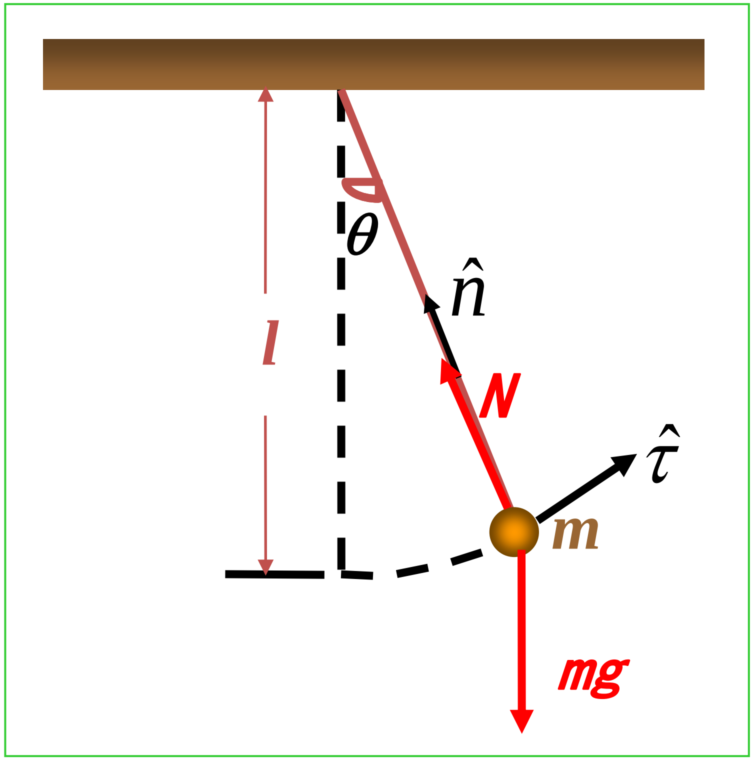
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$



结论:弹簧振子的速度和加速度均随时间周期性变化

例 单摆　质量集中于小球上，不计悬线质量，在运动过程中忽略空气阻力。



建立如图自然坐标

受力分析如图

取逆时针为 θ 张角正向

切向运动方程：

$$F_\tau = -ma_\tau = -ml\beta$$

$$\beta = \ddot{\theta}$$

$$F_\tau = mg\sin\theta$$

得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

当θ很小时　$\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

其中　$\omega^2 = g/l$

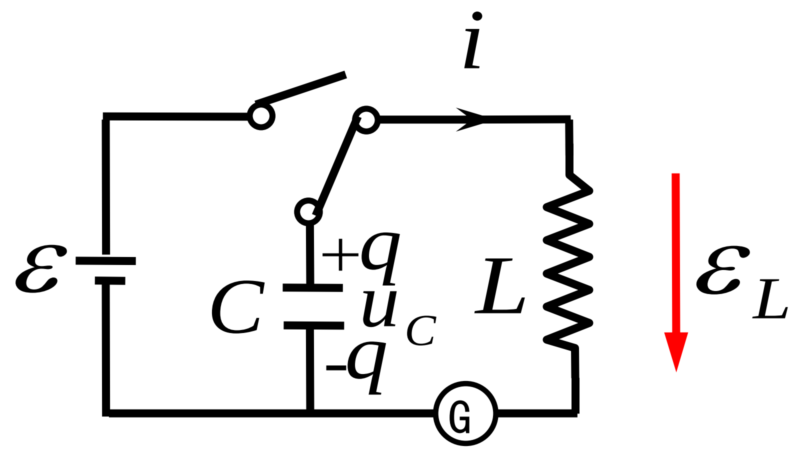
弹簧振子与单摆的比较

	弹簧振子	单摆（小角度）
受力	$F=-kx$	$F_{\tau}=-mg\sin\theta\approx-mg\theta$
动力学方程	$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$	$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$
运动学方程	$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$	$\theta=\theta_{\max}\cos(\omega t+\varphi_0)$
振动量	位移	角位移

例 LC振荡电路　　非力学的简谐振动

由基尔霍夫回路电压方程，忽略电流计和导线的电阻。

$$-\varepsilon_L - U_C = 0$$



$$\because U_C = \frac{q_C}{C}, i = -\frac{dq}{dt}$$

$$\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\therefore -L\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{q_C}{C} = 0$$ 即 $$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{LC} = 0,$$

令 $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$ ⇒ $$\begin{cases} q = q_0\cos(\omega t + \varphi) \\ i = -\dfrac{dq}{dt} = \omega q_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

—— 描述LC振荡电路的微分方程也是非线性微分方程

结论 简谐振动的判据

1）微分方程：
$$\frac{d^2\Psi}{dt^2}+\omega^2\Psi=0$$

2）运动方程：
$$\Psi=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

以上1)、2)中任一条成立即可定义为简谐振动。其中Ψ可表示位移、速度、加速度、电流、电量、电场强度、磁感应强度等物理量。

3）受力特征：合外力（或合外力矩）

$$F=-k\Psi$$

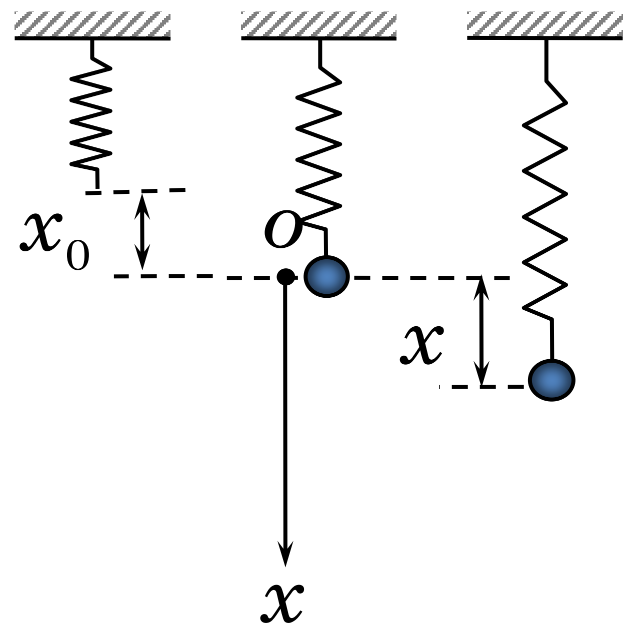
F—回复力（弹性力或准弹性力）

k — 劲度系数或刚度系数

在机械振动中，以上1)、2)、3）中任一条成立即可定义为简谐振动。

例．如图所示，一轻质弹簧，上端固定，下端系一质量为m的小球，如果给小球一初速度$\vec{v}_0$，试判断此系统是否作简谐振动（忽略空气阻力）

解：以小球受力平衡位置为坐标原点，竖直向下建立一维坐标系，如图所示。



设平衡位置弹簧伸长x_0

$$mg = kx_0$$

在任意位置x处，合力为：

$$F = mg - k(x_0 + x) = -kx$$

物体受回复力作用，作谐振动。

例 考虑一个正方体浮块在水面起伏振荡，忽略水的阻力和水面的起伏，浮块不会没于水中，也不会离开水面，试分析浮块运动状况。

设小浮块偏离平衡位置位移为 x，向上为正

平衡位置处：$f_{浮}=\rho g l^2 h_0 = mg$

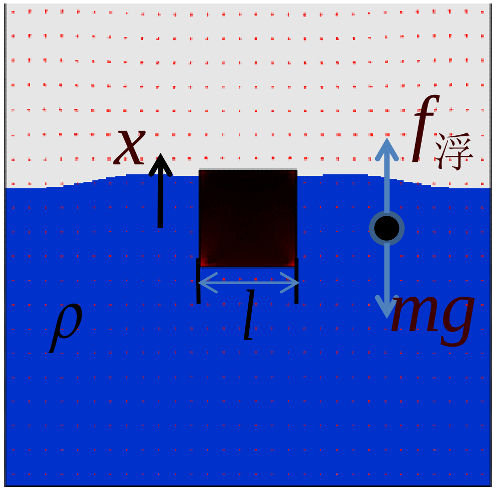
偏离 x 后：$f_{浮}=\rho g l^2 (h_0 - x)$

合外力：$F = f_{浮} - mg = -\rho g l^2 x$

线性回复力 → 简谐振动

$$k=\rho g l^2$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g l^2}}$$



§2 描述简谐振动的特征量

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1. 角频率 ω

例：简谐振子 $\omega = \sqrt{k/m}$

是由系统本身决定的常数，与初始条件无关（固有角频率）

ω 的物理意义：描述谐振运动的快慢

周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

频率 $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

2. 振幅 ：A $A = |x_{max}|$

表示振动的范围（强弱），由初始条件决定。

以弹簧振子为例

由 $\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$

在 $t = 0$ 时刻的值 —— 即初始条件

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 \end{cases}$$

解得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

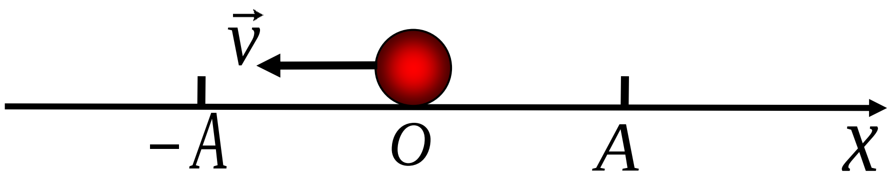
▲ 3. 相位 $\omega t+\varphi_0$ 和初相位 φ_0

相位是描述振动状态的物理量

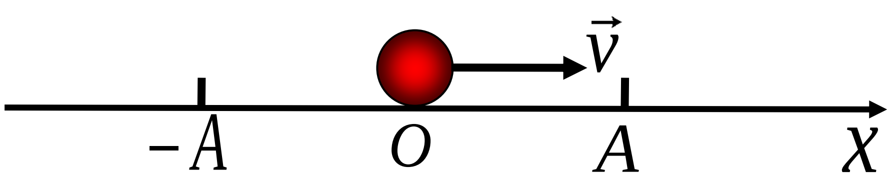
1) $(\omega t+\varphi_0)$ 与状态参量x，v有一一对应的关系

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0);\quad v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

例： $\omega t_1+\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$ ⇨ $x=0\qquad v=-A\omega$



$\omega t_2+\varphi_0=\dfrac{3\pi}{2}$ ⇨ $x=0\qquad v=A\omega$



$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0); \quad v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

2) $(\omega t + \varphi_0)$ 每变化 2π 的整数倍，x、v重复原来的值（回到原状态），最能直观、方便地反映出谐振动的周期性特征。

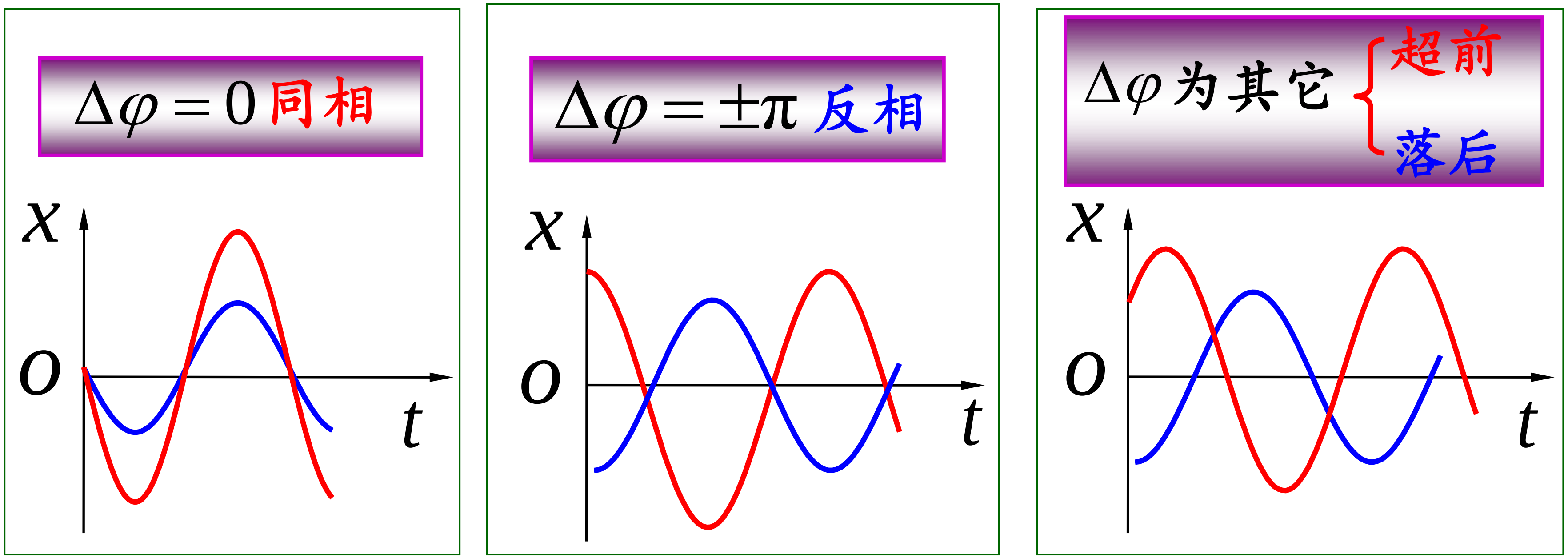
3) 可用以方便地比较同频率谐振动的步调

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_{01})$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

相位差 $\Delta\varphi = (\omega_2 t + \varphi_{02}) - (\omega_1 t + \varphi_{01})$

当 $\omega_1 = \omega_2$ 时，$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$

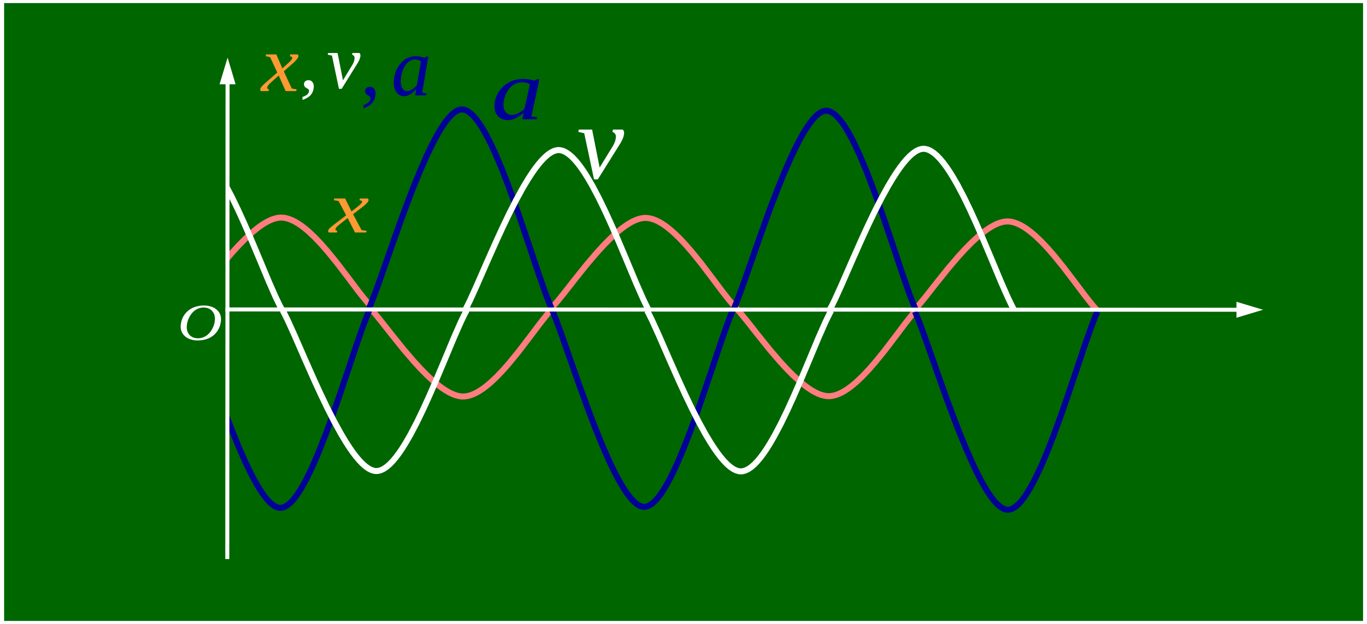


• **振动的超前或落后**

$$\pi > \Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} > 0 \quad \text{或} \quad -\pi < \Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} < 0$$

超前与落后以小于 π 的位相角（或以$T/2$的时间间隔）来进行判断

试从x，v，a的曲线图上判断哪一个超前，哪一个落后？



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

4）初相位 φ_0

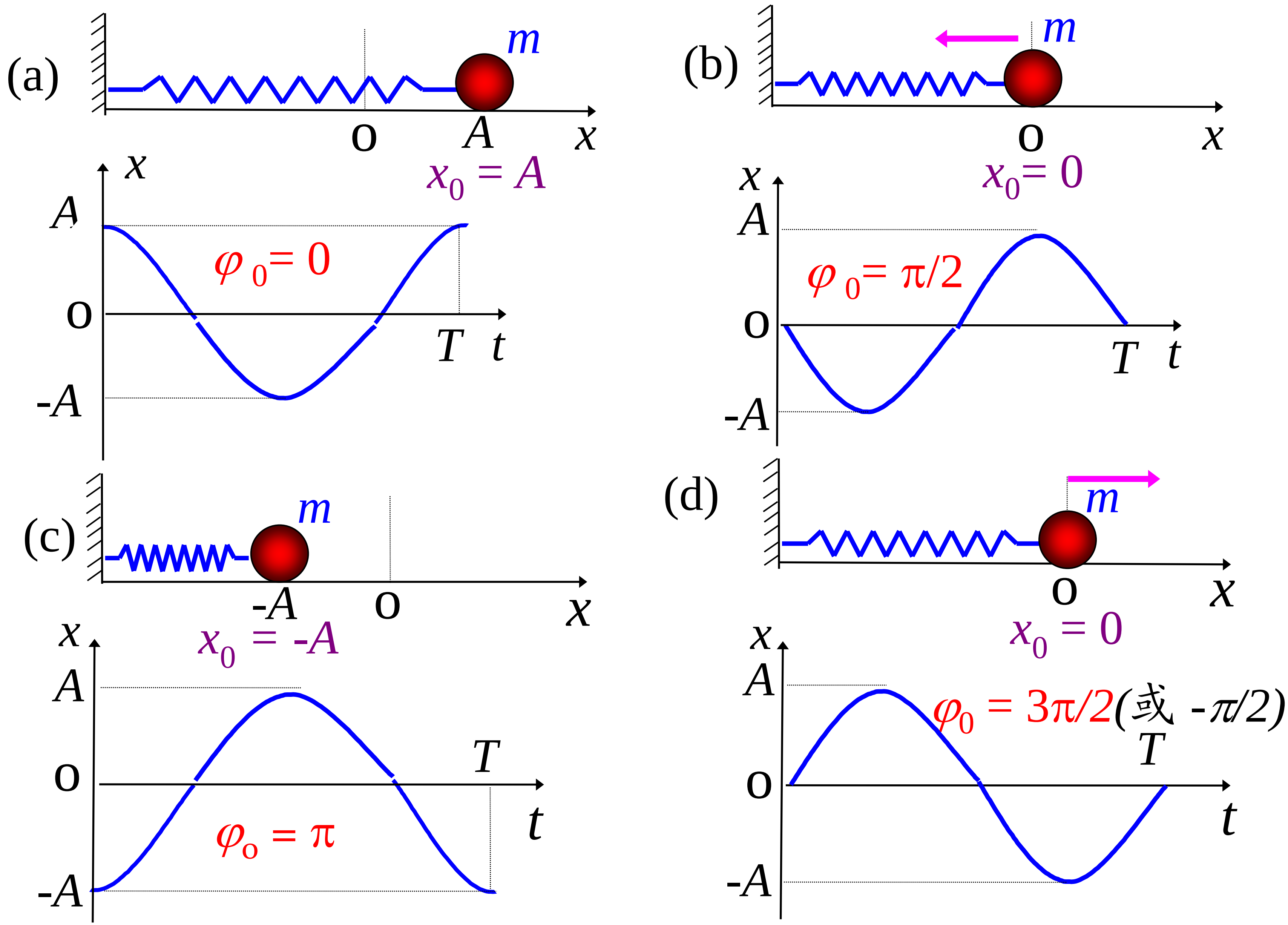
初相：$\boldsymbol{\varphi_0}$ 描述 *t=0* 时刻运动状态，由初始条件确定。

由 $t = 0$ 时 $x_0 = A\cos\varphi_0$，$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$ $\longrightarrow$ $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\right)$

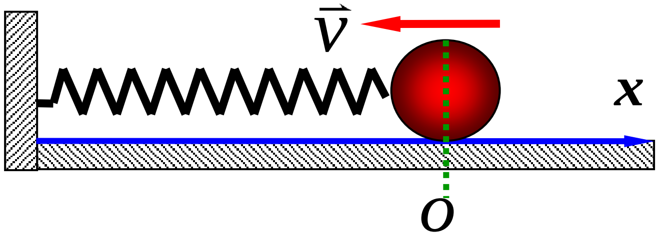
或 $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_0 = \dfrac{x_0}{A} \\ \sin\varphi_0 = \dfrac{-v_0}{A\omega}\end{array}\right\}$ 由 $\cos\varphi_0$ 大小和 $\sin\varphi_0$ 的符号决定 φ_0

范围：$0 < \varphi_0 < 2\pi$ 或 $-\pi < \varphi_0 < \pi$

弹簧振子的几个特殊的初相及相应的振动曲线


(a)
m
o
A
x
$x_0 = A$
A
o
-A
$\varphi_0 = 0$
T
t
(b)
m
o
x
$x_0 = 0$
A
o
-A
$\varphi_0 = \pi/2$
T
t
(c)
m
-A
o
x
$x_0 = -A$
A
o
-A
$\varphi_o = \pi$
T
t
(d)
m
o
x
$x_0 = 0$
A
o
-A
$\varphi_0 = 3\pi/2$(或 $-\pi/2$)
T
t

例 已知 $t=0, x=0, v_0<0$ 求 φ_0



$$0 = A\cos\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\because v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 < 0$$

$$\therefore \sin\varphi_0 > 0$$

取 $$\boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}}$$

练习1 一个质量为0.1kg的质点在弹性力f=-40x的作用下沿x轴作简谐振动，当x=0.20m，v=-4.5m/s时开始计时，试写出该质点的运动方程。

解：由题意知，k=40N/m，

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{0.1}} = 20 rad/s$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.30m$$

$$\varphi = \mathrm{arctg} - \frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{x}_0 \omega} = 48.4^\circ \approx 0.27\pi$$

$$x = 0.3\cos(20t + 0.27\pi)\mathrm{m}$$

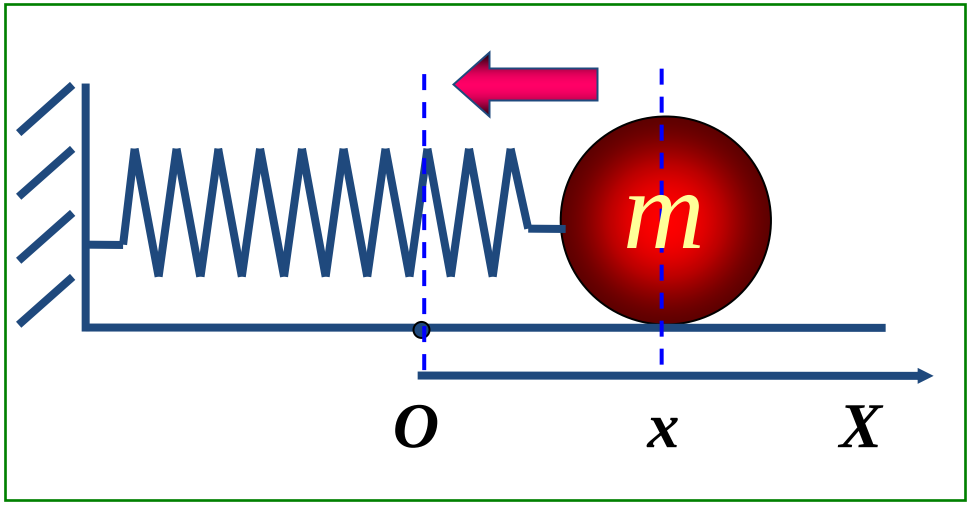
4. 简谐振动的能量

1） 动能 （以弹簧振子为例）

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[-\omega A\sin(\omega t+\varphi)]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t+\varphi)$$

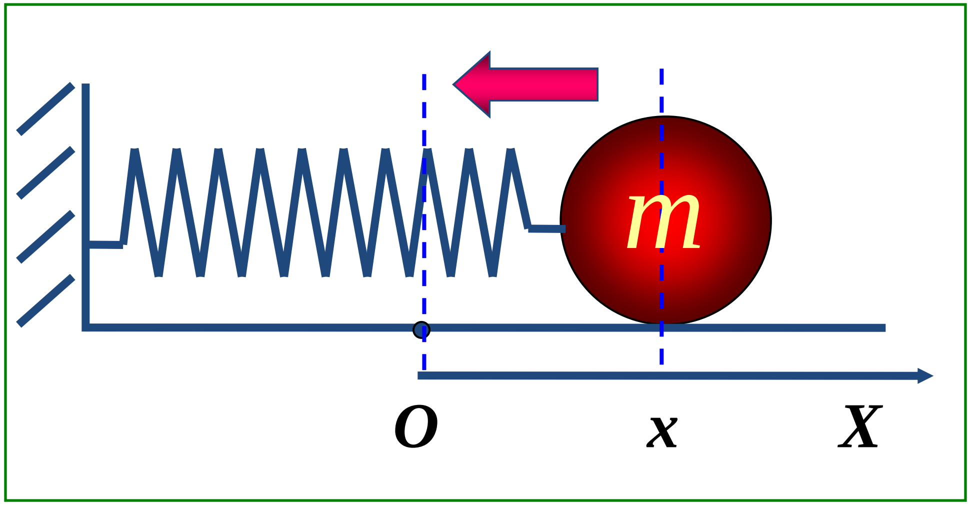
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$



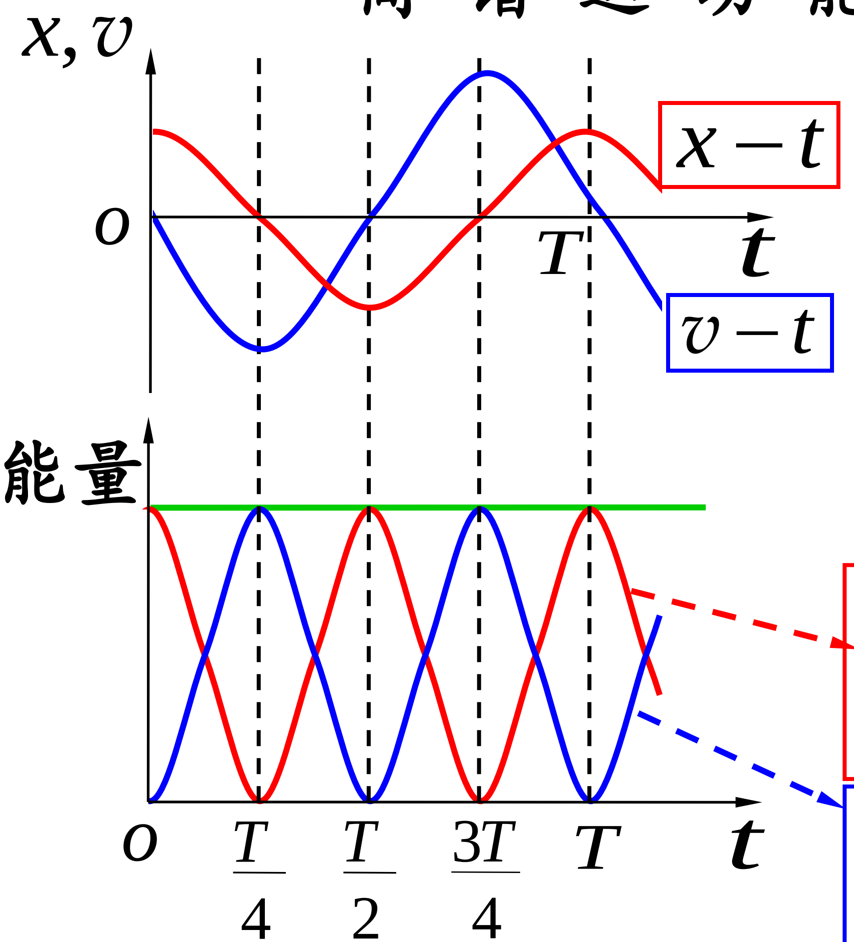
2） 势能 $$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

3） 机械能 $$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒.



简 谐 运 动 能 量 图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

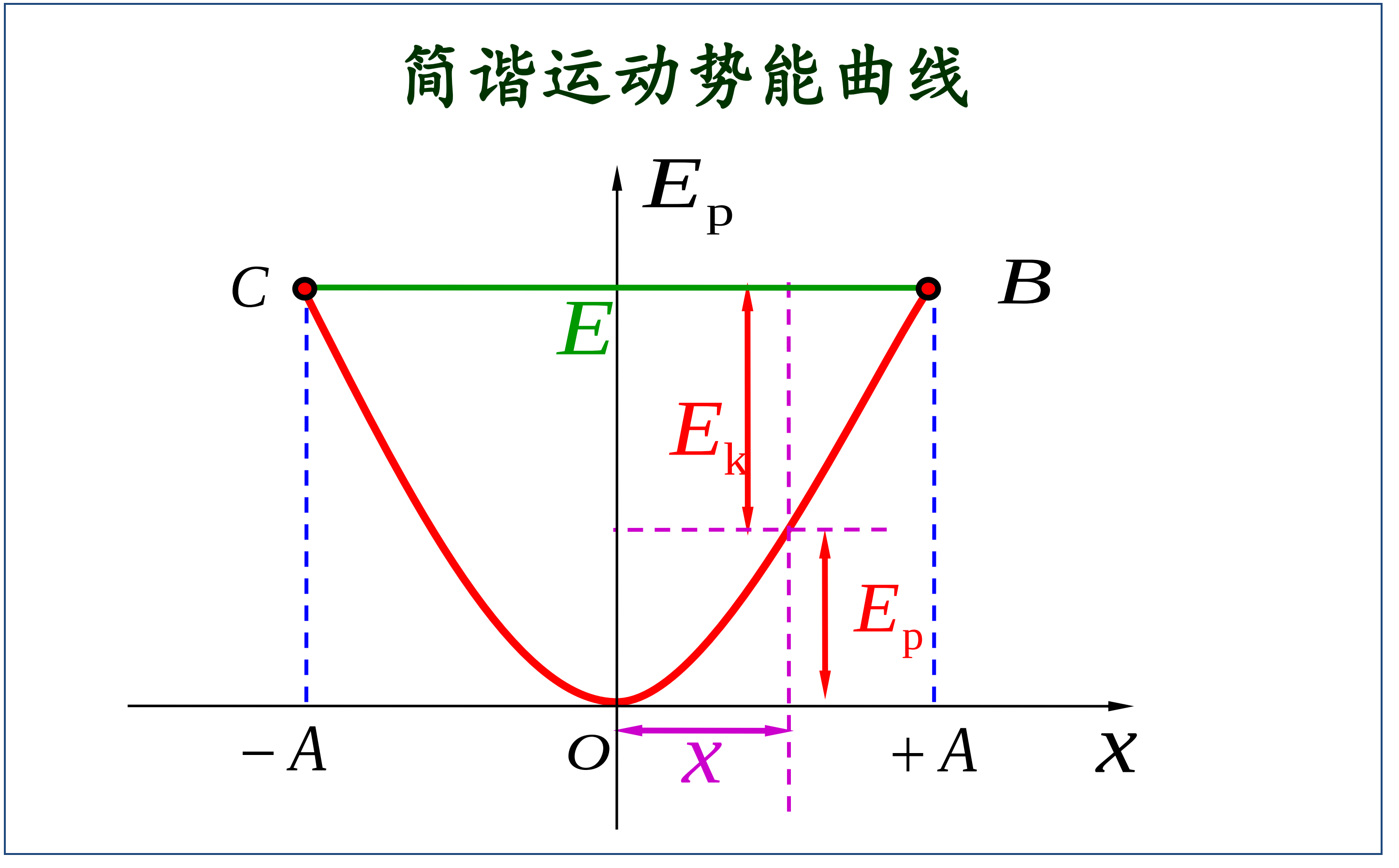
$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t}$$

$$\boxed{E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t}$$

简谐运动能量守恒，振幅不变

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$



简谐振动的判别方法：

1. 动力学表达式： $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

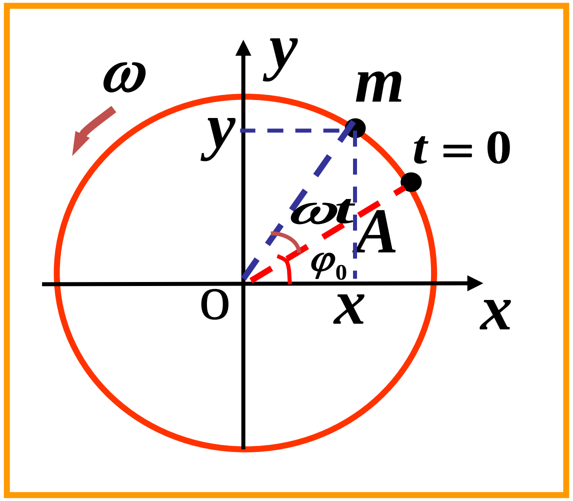
2. 力学特征： $F = -kx$

3. 能量守恒 $E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \dfrac{1}{2}kA^2$

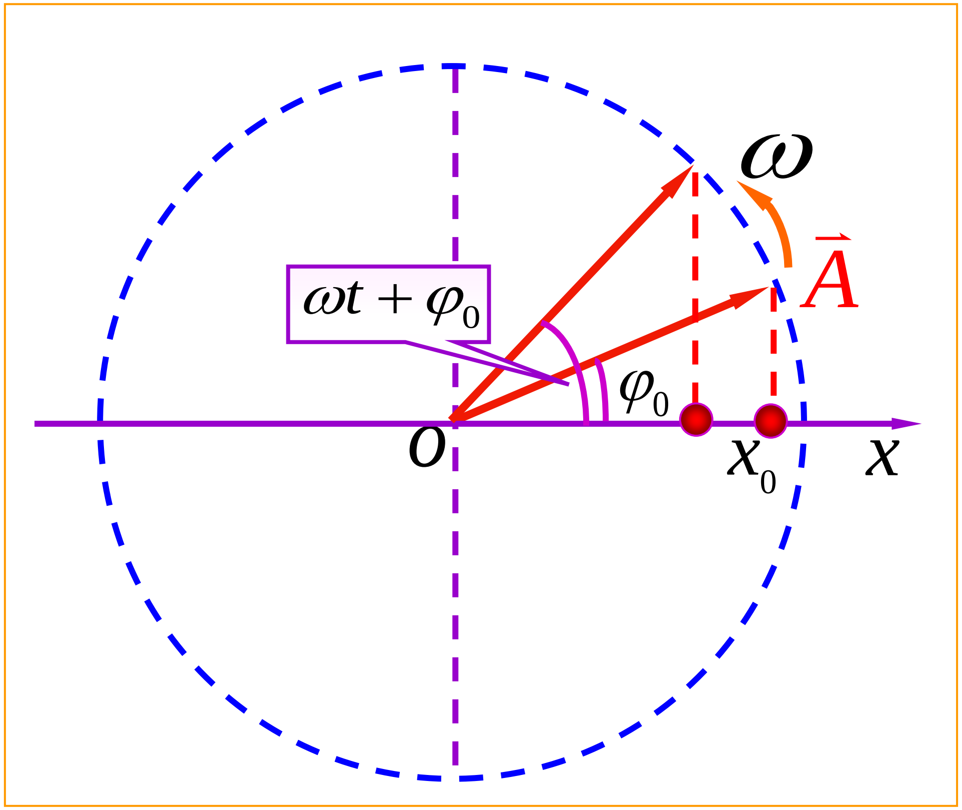
4. 运动学方程： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

§3 简谐振动的旋转矢量法

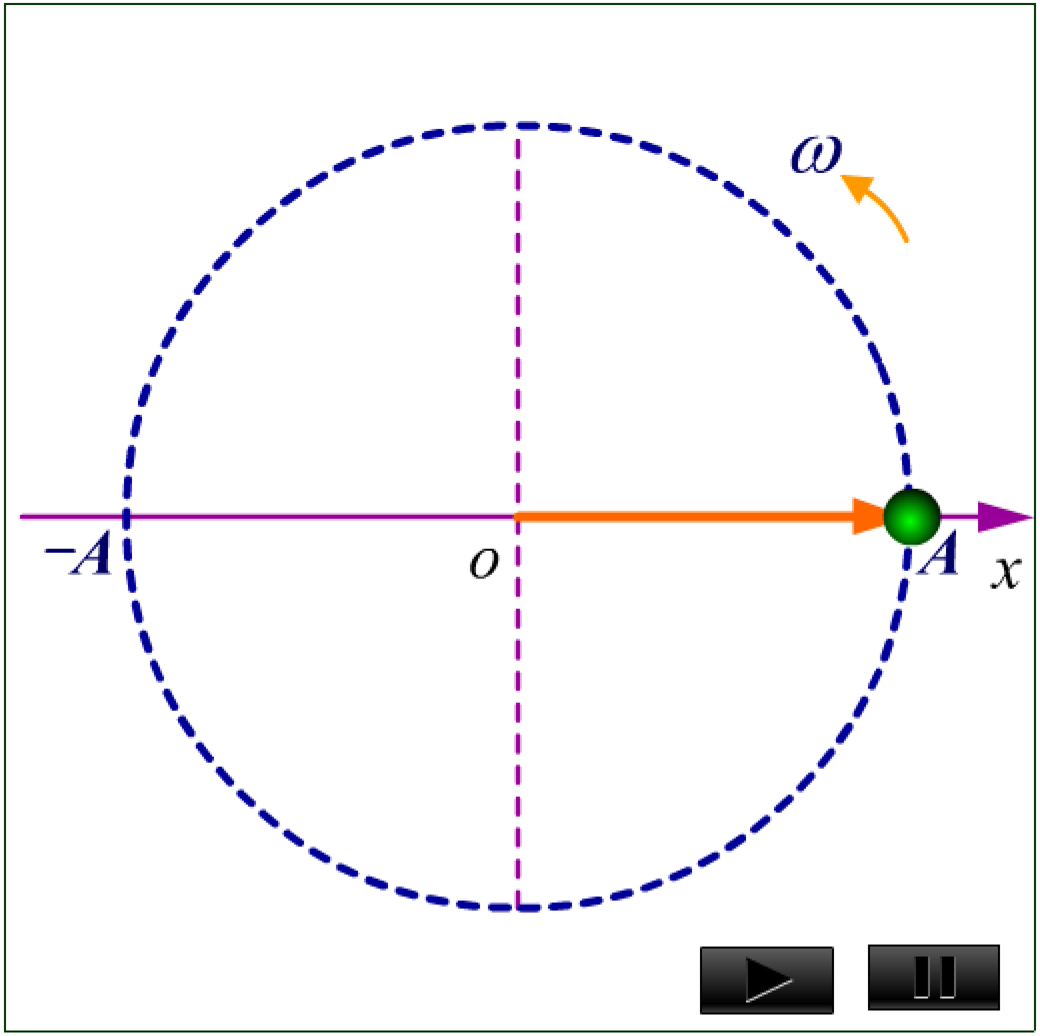
思考： 写出质点 m 以角速率 ω 沿半径 A 的圆周匀速运动的参数方程



$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y = A\sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$



- 旋转矢量的模A：振幅
- 旋转矢量A的角速度ω ：角频率
- 旋转矢量A与 x 轴的夹角($\omega t+\varphi$)：相位
- $t=0$时，A与x 轴的夹角 φ ：初相位。
- 旋转矢量A旋转一周，其端点在x轴上的投影点完成一次全振动。



ω
−A
o
A
x

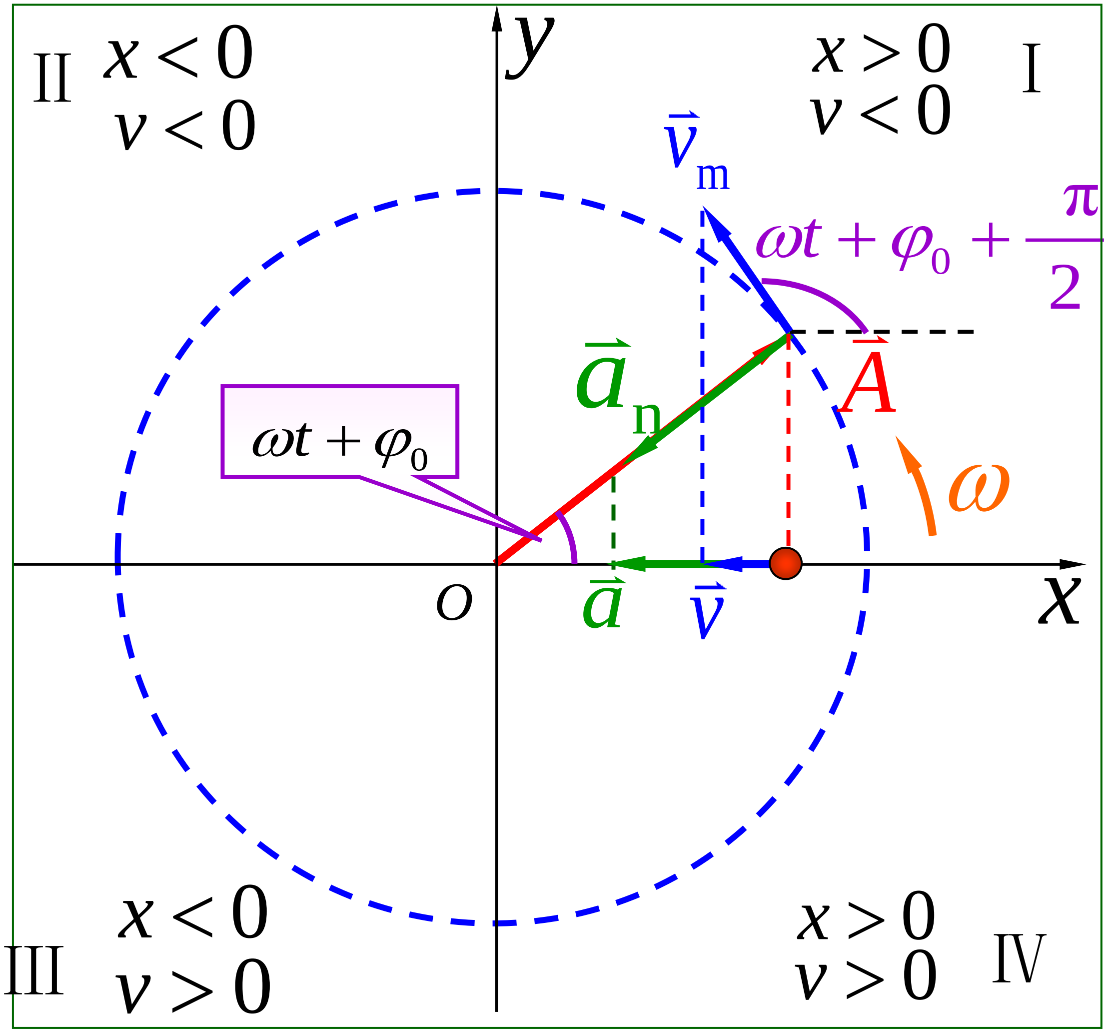
物理模型与数学模型对应关系

	简谐振动	旋转矢量$\vec{A}$
A	振幅	矢量的模或大小
φ_0	初相	$t=0$时，$\vec{A}$与x轴的夹角
$\omega t+\varphi_0$	相位	t 时刻，$\vec{A}$与x轴的夹角
ω	角频率	角速度
T	简谐振动周期	旋转周期

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$



$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

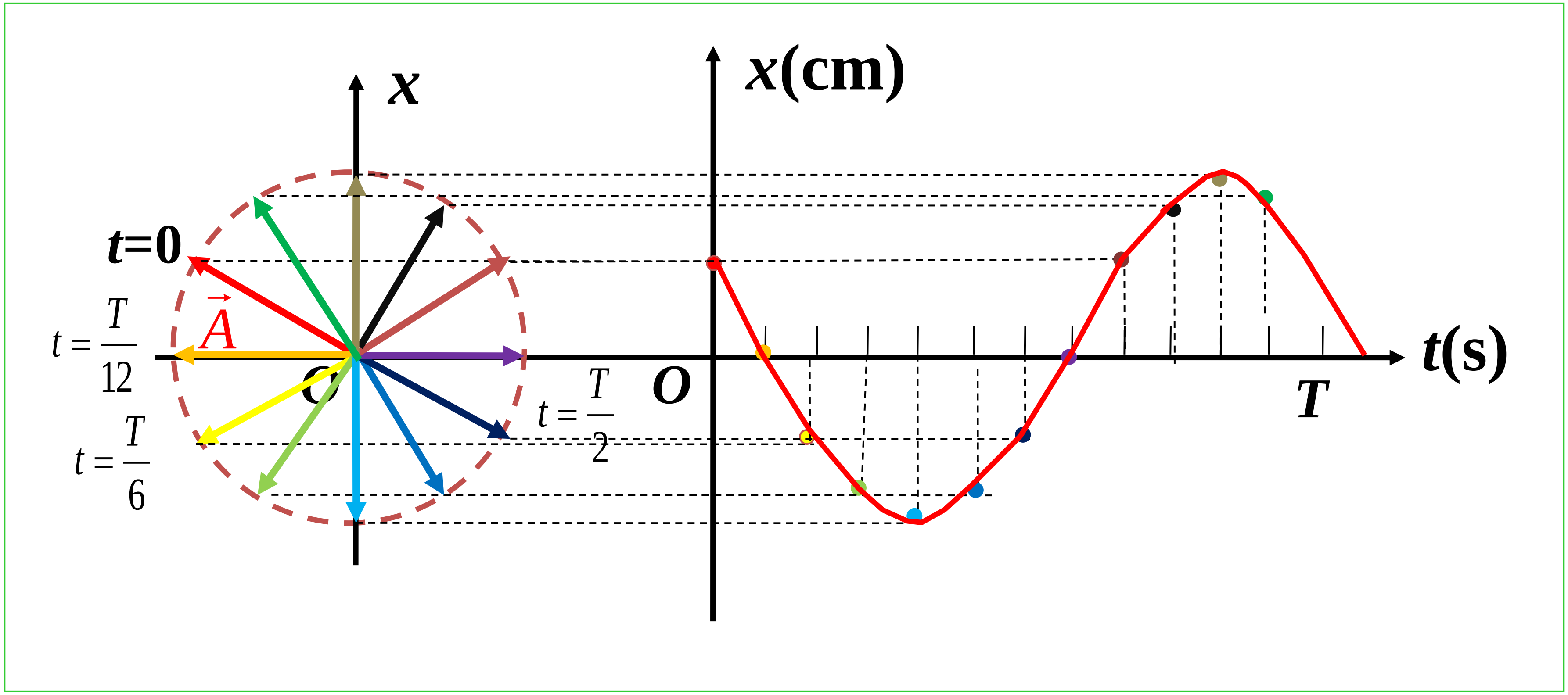
$$v_m = A\omega$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

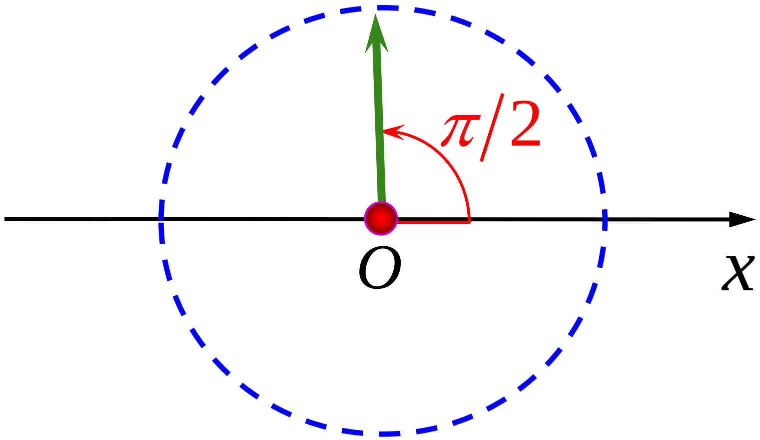
$$a_n = A\omega^2$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

利用旋转矢量法作 *x-t* 图:



例　已知$t=0, x=0, v_0<0$　求φ_0

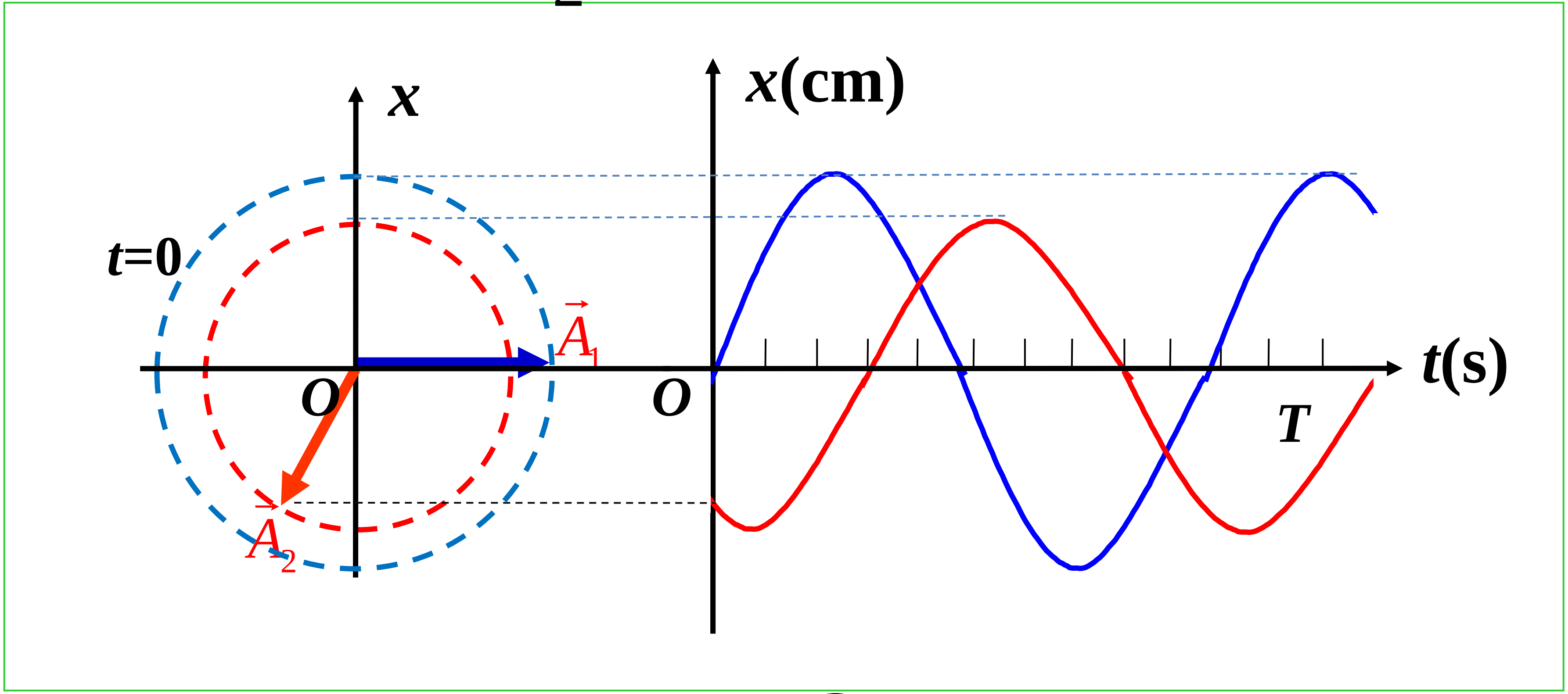


$$\varphi_0=\frac{\pi}{2}$$

练习2

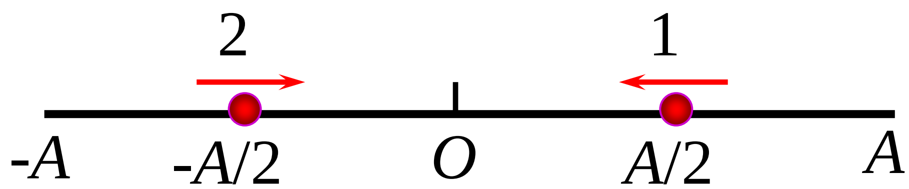
有两个同周期的简谐振动，它们的x-t图如图所示，其中

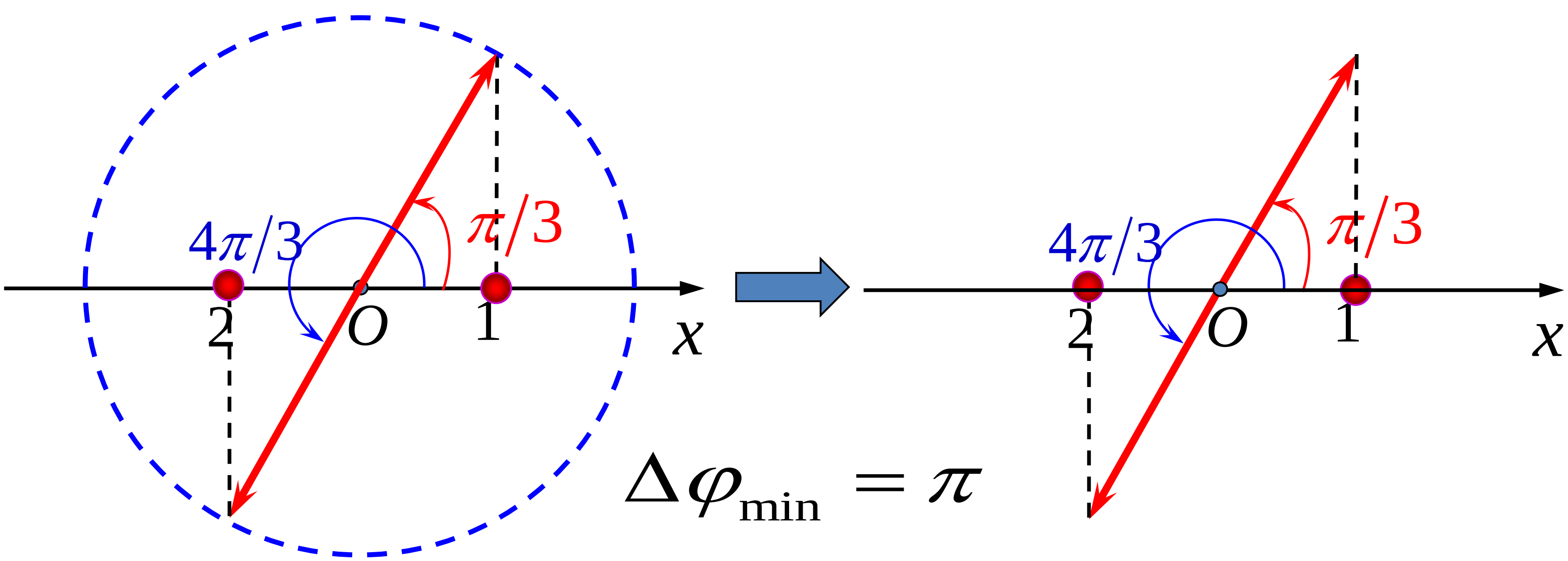
$$x_{10}=0, x_{20}=-\frac{\sqrt{3}}{2}A$$ 求他们的相位差.



$$\Delta\varphi=\frac{2}{3}\pi$$

例　两质点作同方向、同频率的简谐振动，振幅相等皆为*A*。当质点1在$x_1 = A/2$ 处，且向左运动时，另一个质点2在$x_2 = -A/2$处，且向右运动，求这两个质点的最小相位差。





$$\Delta\varphi_{\min} = \pi$$

例. 一质点沿x轴作简谐振动，振幅为12cm，周期为2s。当$t = 0$时，位移为6 cm，且向x 轴正方向运动。求：

1、振动方程。

2、$t = 0.5$ s时，质点的位置、速度和加速度。

3、如果在某时刻质点位于$x = -6$cm，且向 x 轴负方向运动，求从该位置回到平衡位置所需要的最短时间。

解：设简谐振动表达式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

已知：$A = 12$ cm，$T = 2$ s，

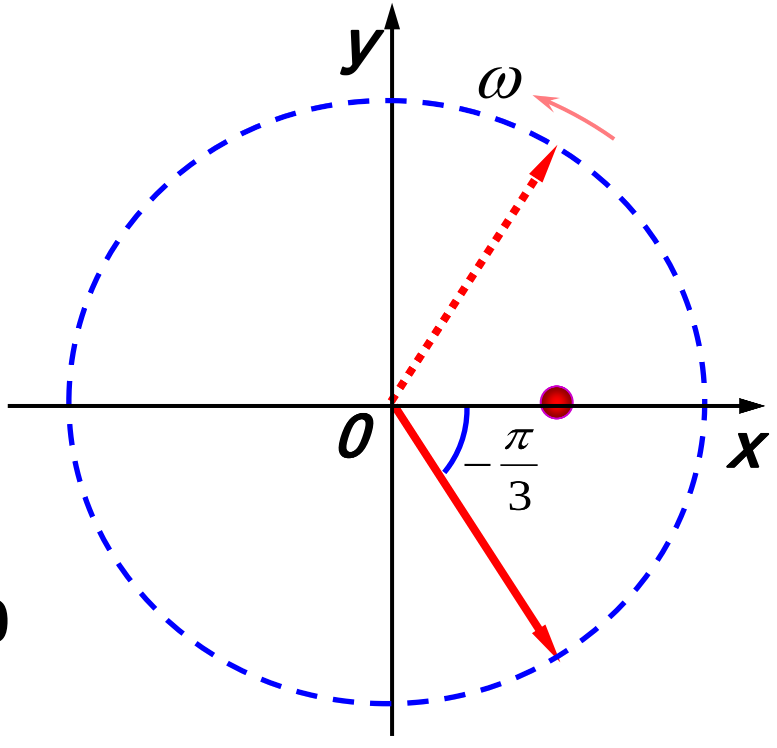
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\, s^{-1}$$

$$x = 0.12\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

初始条件：

$t = 0$ 时，$x_0 = 0.06$ m ,$v_0 > 0$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$



振动方程：$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$$v|_{t=0.5} = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0.5} = -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})|_{t=0.5} = -0.189\,\mathbf{m\cdot s^{-1}}$$

$$a|_{t=0.5} = \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0.5} = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})|_{t=0.5} = -0.103\,\mathbf{m\cdot s^{-2}}$$

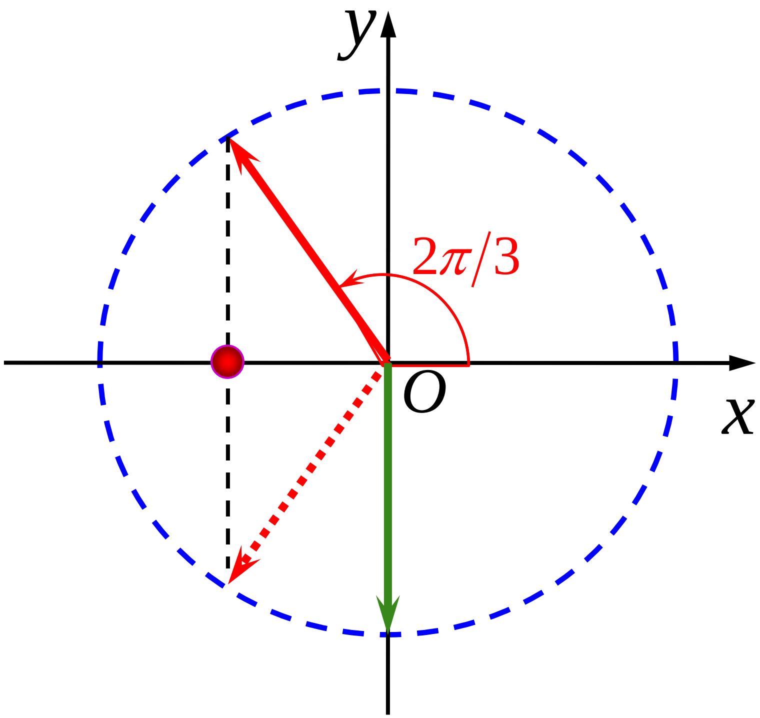
设在某一时刻 t_1， x = - 0.06 m, v<0

$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \rightarrow \quad t_1 = 1s$$

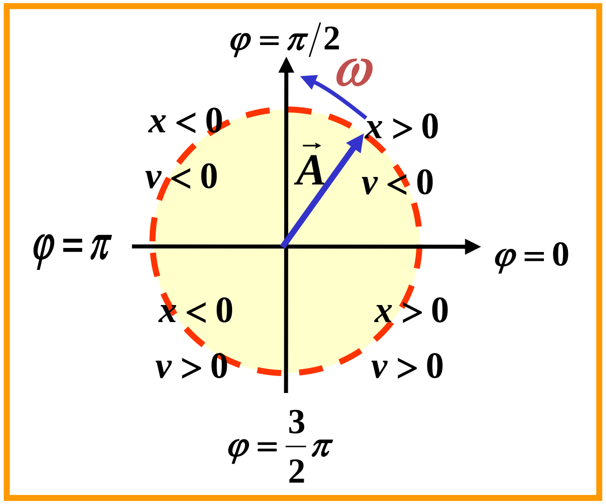
$$\pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad t_2 = \frac{11}{6}s$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6}s$$



旋转矢量法优点：

- 直观地表达谐振动的各特征量
- 便于解题，特别是确定初相
- 便于振动合成



由$x.v$ 的符号确定 $\vec{A}$ 所在的象限

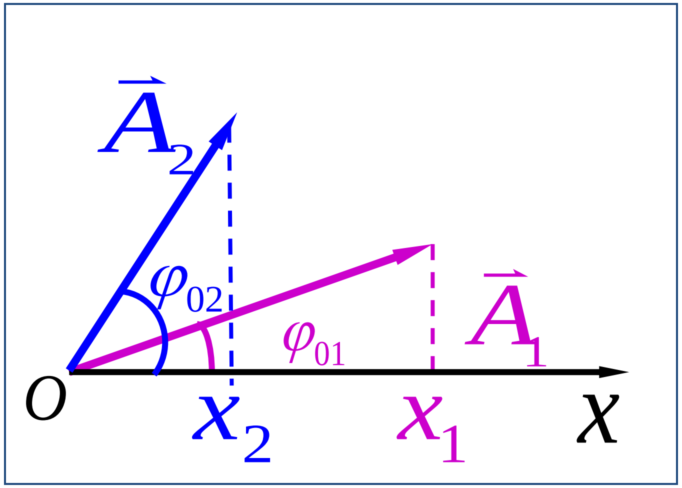
§4 简谐振动的合成

1. 两个同方向同频率简谐运动的合成

设一质点同时参与两独的同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01})$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02})$$



两振动的位相差 $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ =常数

1） 解析法

$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$， $x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

合振动 ：

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_{01}) + A_2\cos(\omega t+\varphi_{02})$$

$$= \underbrace{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}_{A\cos\varphi}\cos\omega t - \underbrace{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}_{A\sin\varphi}\sin\omega t$$

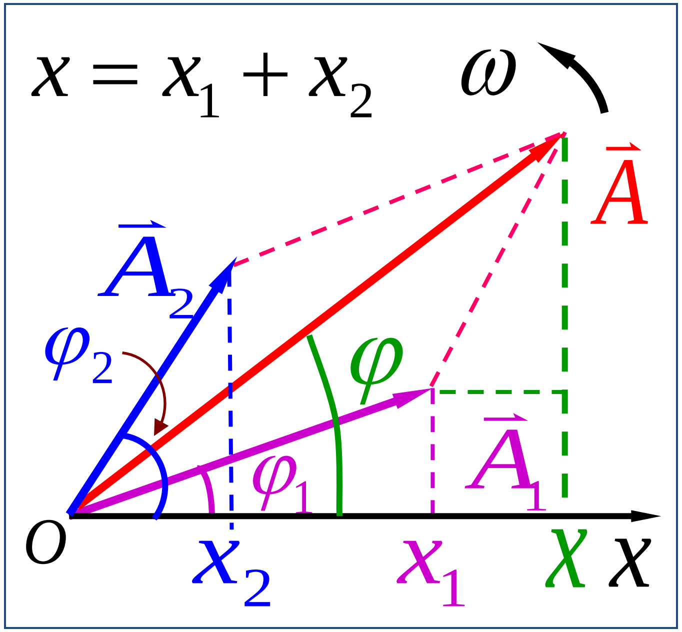
$$\boxed{x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

- **结论**：合振动 x 仍是简谐振动

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$



两个同方向同频率简谐运动合成后仍为同频率的简谐运动

讨论

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

1) 若两分振动同相

$$\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

则$A=A_1+A_2$，两分振动相互加强

2) 若两分振动反相

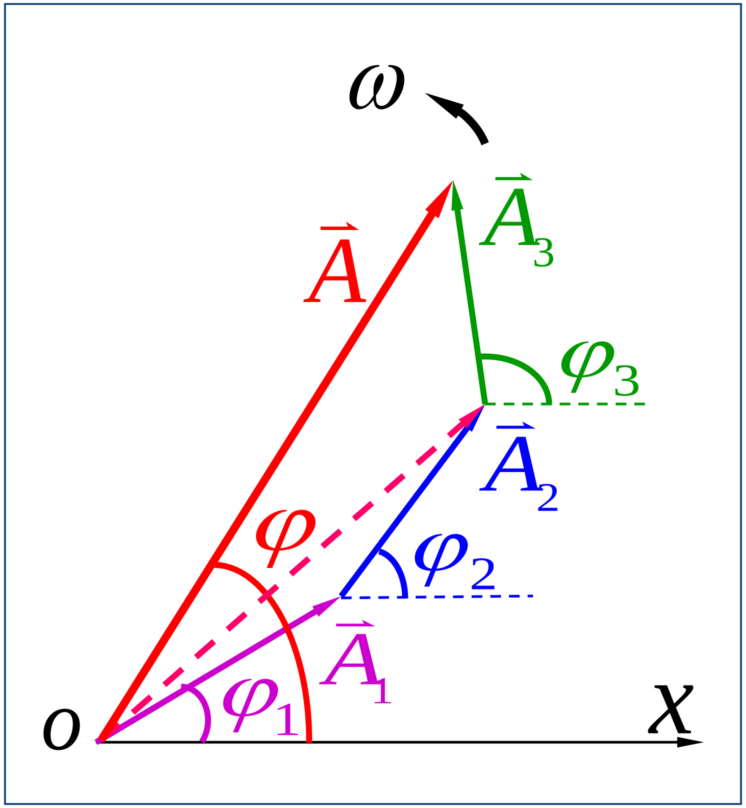
$$\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

则$A=|A_1-A_2|$，两分振动相互减弱

如 $A_1=A_2$， 则 $A=0$， 表示质点静止

* 多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t + \varphi_n) \end{cases}$$

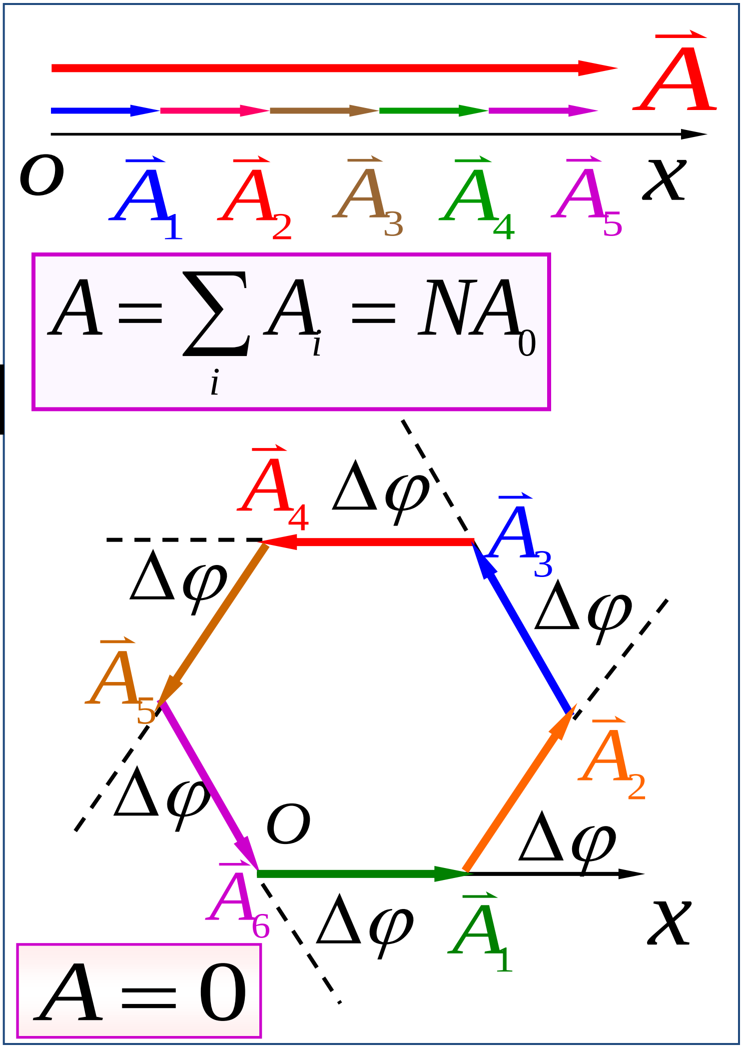


$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

$$
\begin{cases}
x_1 = A_0 \cos \omega t \\
x_2 = A_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\
x_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_N = A_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi]
\end{cases}
$$



讨论

(1) $\Delta\varphi = 2k\pi$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(2) $N\Delta\varphi = 2k'\pi$

$(k' \neq kN, k' = \pm 1, \pm 2, \cdots)$

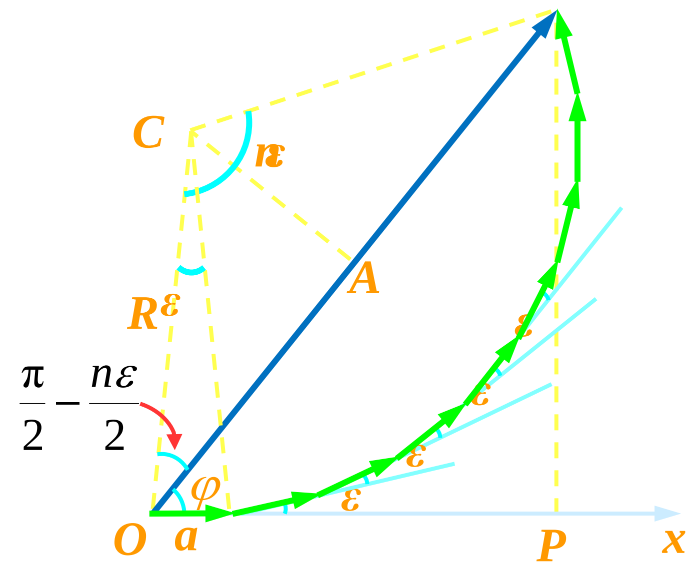
例 设有 n 个同方向、同频率、振幅 a 相同、初相差依次为一常量 ε 的谐振动，它们的振动分别为

$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t+\varepsilon)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t+2\varepsilon)$$

$$x_n = a\cos[(\omega t+(n-1)\varepsilon]$$



求 合振动的振动方程.

解 $$x = \sum x_n = A\cos(\omega t+\varphi)$$

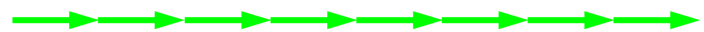
$$a = 2R\sin\frac{\varepsilon}{2} \qquad A = 2R\sin\frac{n\varepsilon}{2}$$

$$A = a\frac{\sin n\varepsilon/2}{\sin\varepsilon/2} \qquad \varphi = \frac{1}{2}(\pi-\varepsilon)-\frac{1}{2}(\pi-n\varepsilon)=\frac{n-1}{2}\varepsilon$$

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = a\frac{\sin\frac{n\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\cos[\omega t+\frac{(n-1)\varepsilon}{2}]$$

- **讨论：**

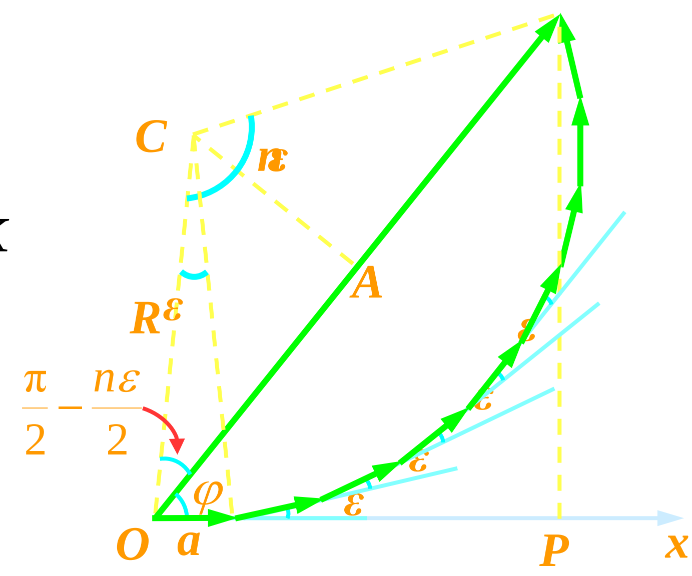
极大值： $\varepsilon = 2k\pi$



$A = na$

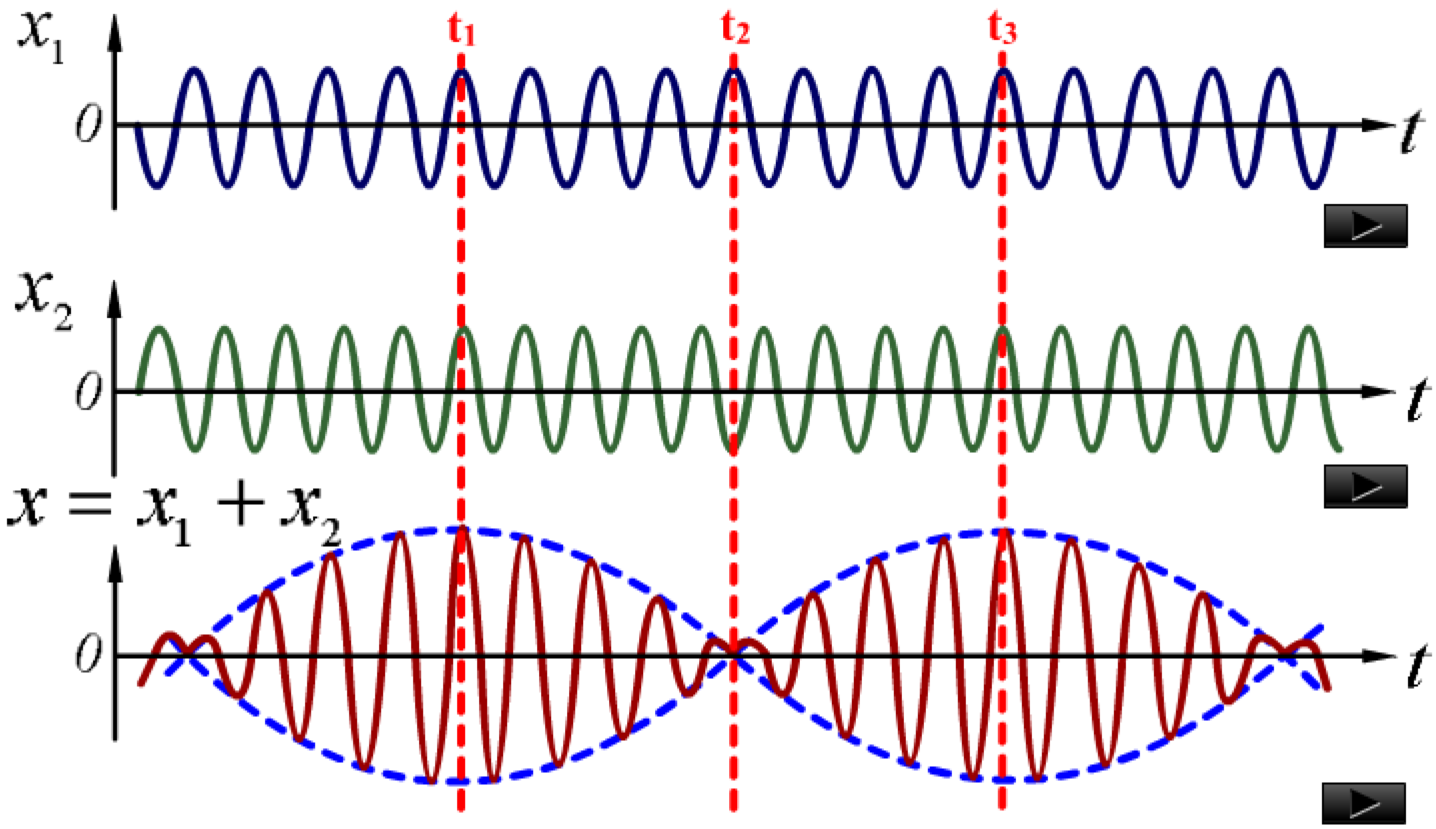
极小值： $\varepsilon = \dfrac{2k'\pi}{n},\quad k' \neq nk$

$A = 0$



次极大： … …

两个同方向不同频率简谐运动的合成



频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍. 音叉~

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos\omega_1 t = A_1 \cos 2\pi\nu_1 t \\ x_2 = A_2 \cos\omega_2 t = A_2 \cos 2\pi\nu_2 t \end{cases}$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

讨论 $A_1 = A_2$，$|\nu_2 - \nu_1| << \nu_1 + \nu_2$的情况

◆方法一

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi\nu_1 t + A_2 \cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = \underbrace{(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t)}_{\text{振幅部分}} \cos 2\pi \underbrace{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}}_{\text{合振动频率}} t$$

振动频率 $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$

振幅 $A = \left| 2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right|$

$$\begin{cases} A_{max} = 2A_1 \\ A_{min} = 0 \end{cases}$$

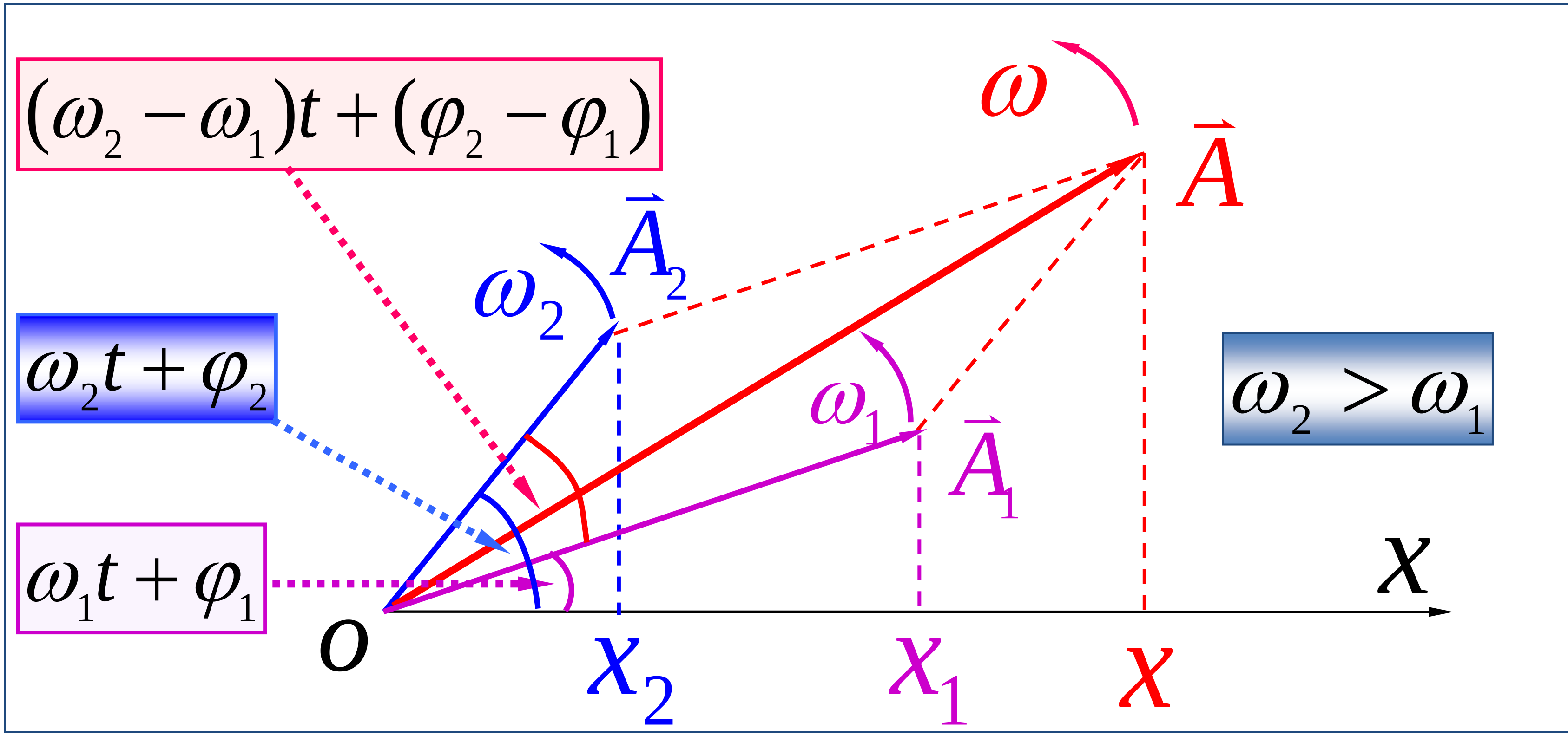
$$x = (2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t) \cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t$$

$$2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} T = \pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$$

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1}$$

拍频（振幅变化的频率）

◆方法二：旋转矢量合成法



$$\varphi_1=\varphi_2=0 \qquad \Delta\varphi=2\pi(\nu_2-\nu_1)t$$

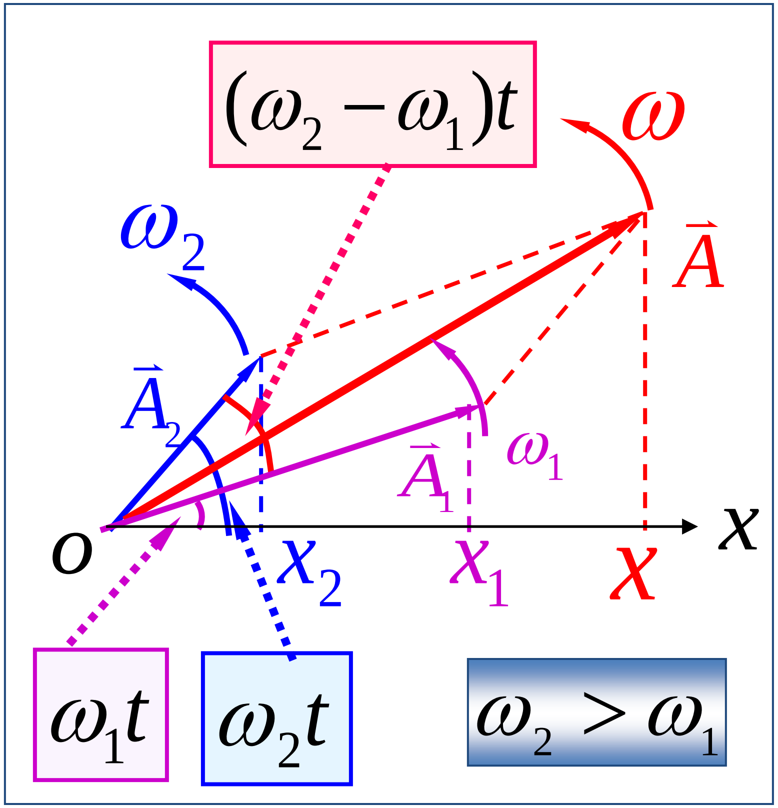
振幅 $A = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}$

$= \left|2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\right|$

拍频 ⇨ $\nu = \nu_2 - \nu_1$

振动圆频率

$\cos\omega t = \frac{x_1 + x_2}{A}$ $\quad \omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$



2. 两个相互垂直的同频率的简谐运动合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

质点运动轨迹　　　（椭圆方程）

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

结论：两相互垂直同频率简谐运动的合成其振动轨迹为一椭圆（又称“椭圆振动”）。椭圆轨迹的形状取决于振幅和相位差。

讨论

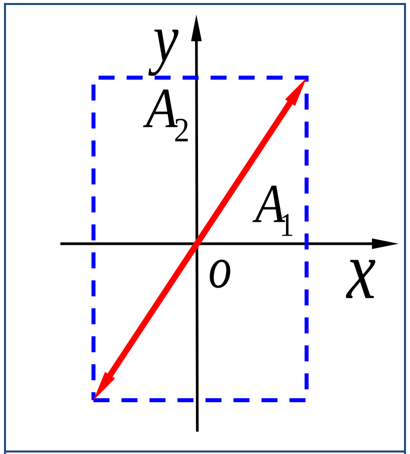
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

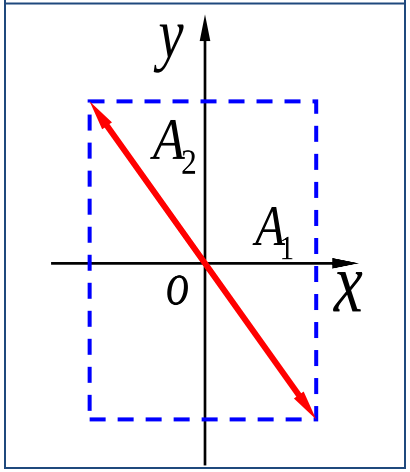
（1）$\varphi_2-\varphi_1=0$ 或 2π

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$

（2）$\varphi_2-\varphi_1=\pi$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$





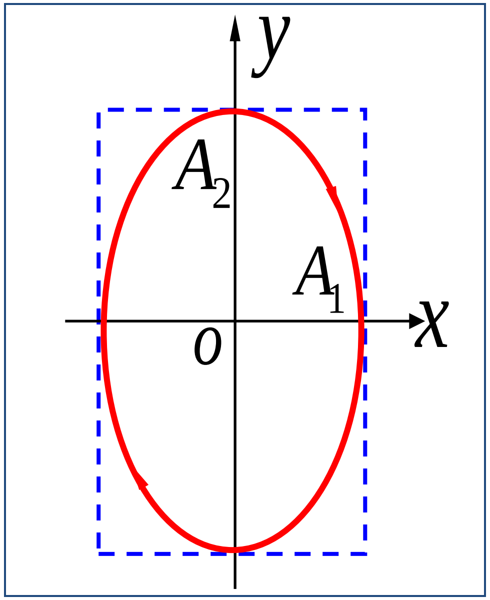
讨论

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

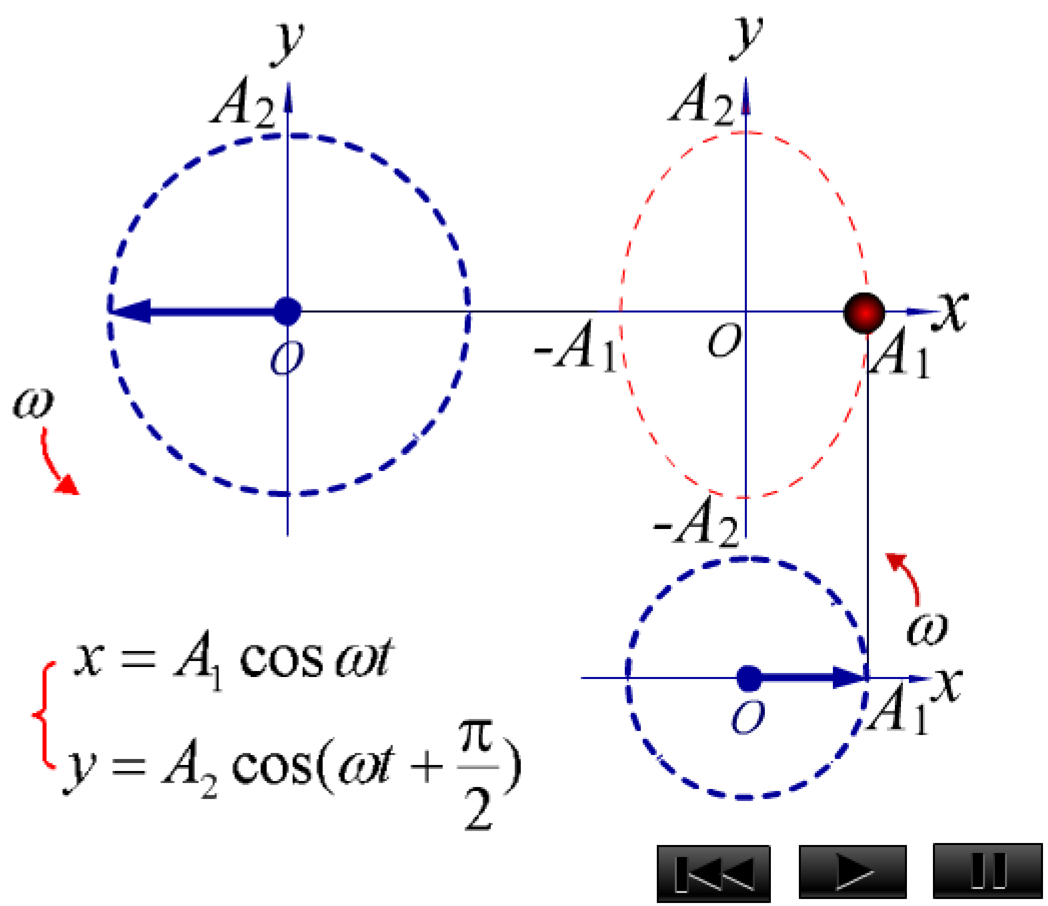
（3）$\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi/2$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

$$\begin{cases} x=A_1\cos\omega t \\ y=A_2\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

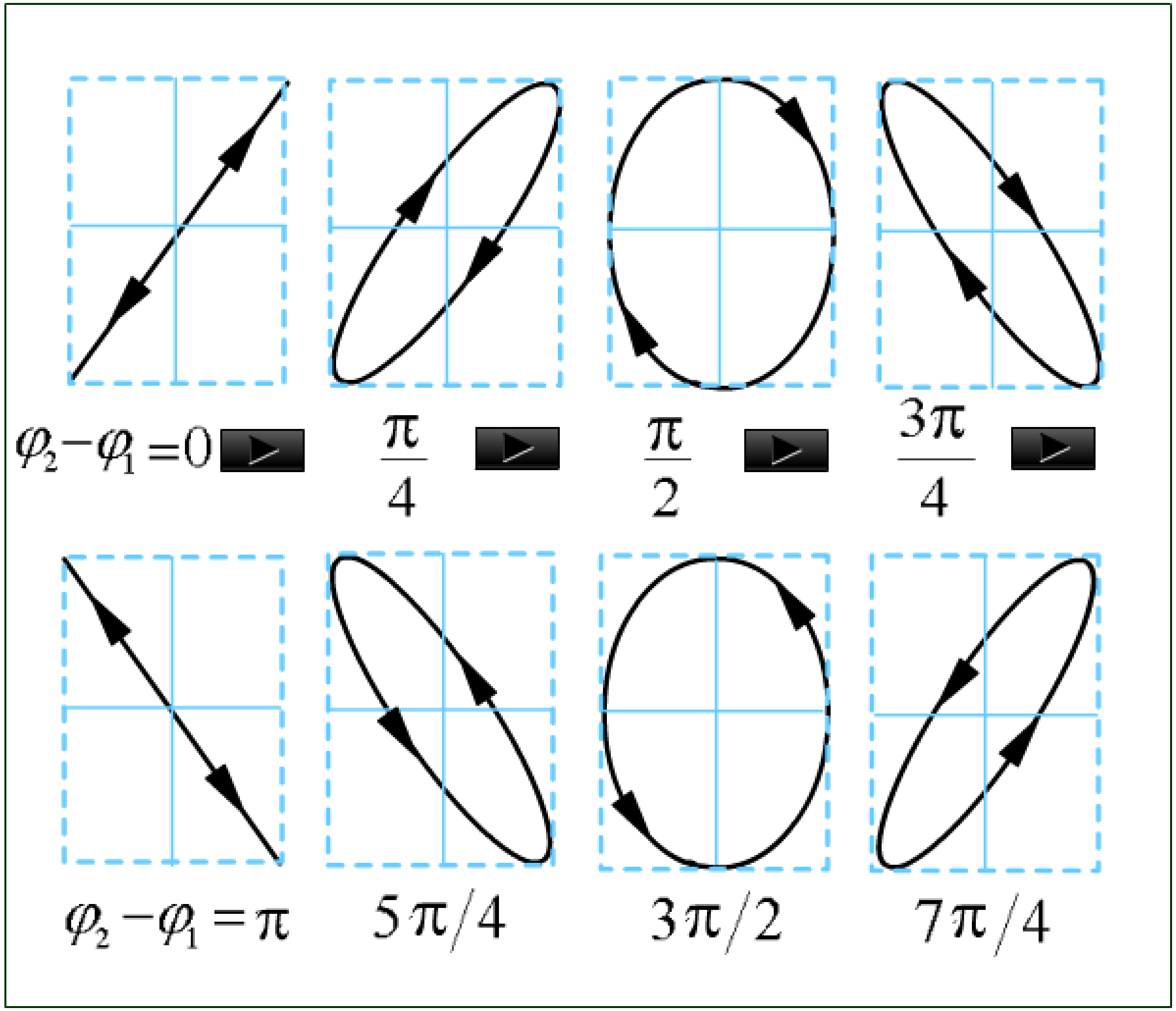


用旋转矢量描绘振动合成图



$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

两相互垂直同频率不同相位差简谐运动的合成图。

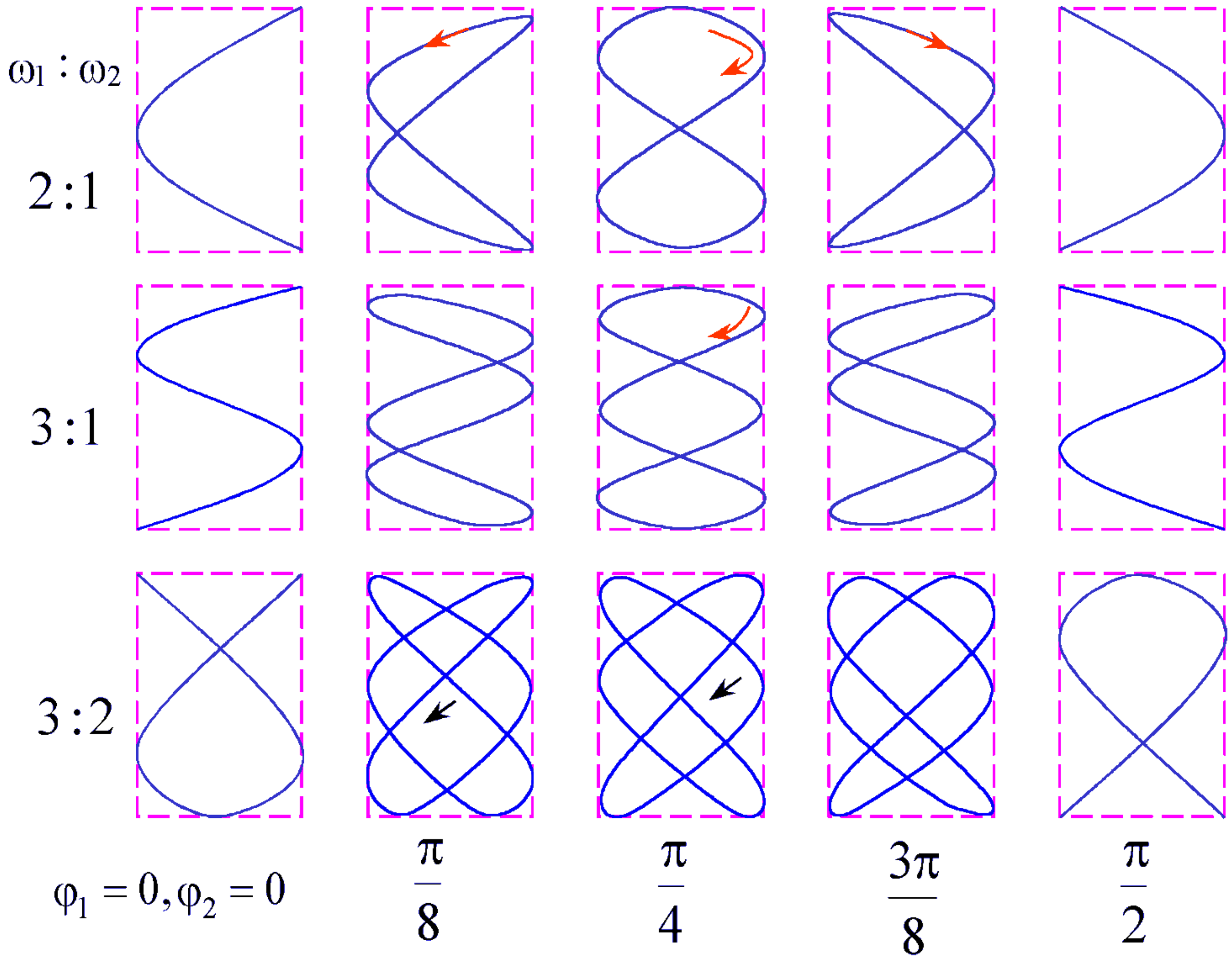


两个相互垂直的不同频率的简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t) \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta) \end{cases}$$

两简谐振动频率之比为整数时，合成振动是稳定的闭合曲线。

两个相互垂直的谐振动的频率比不为整数时，合成运动的轨迹是不闭合的曲线.



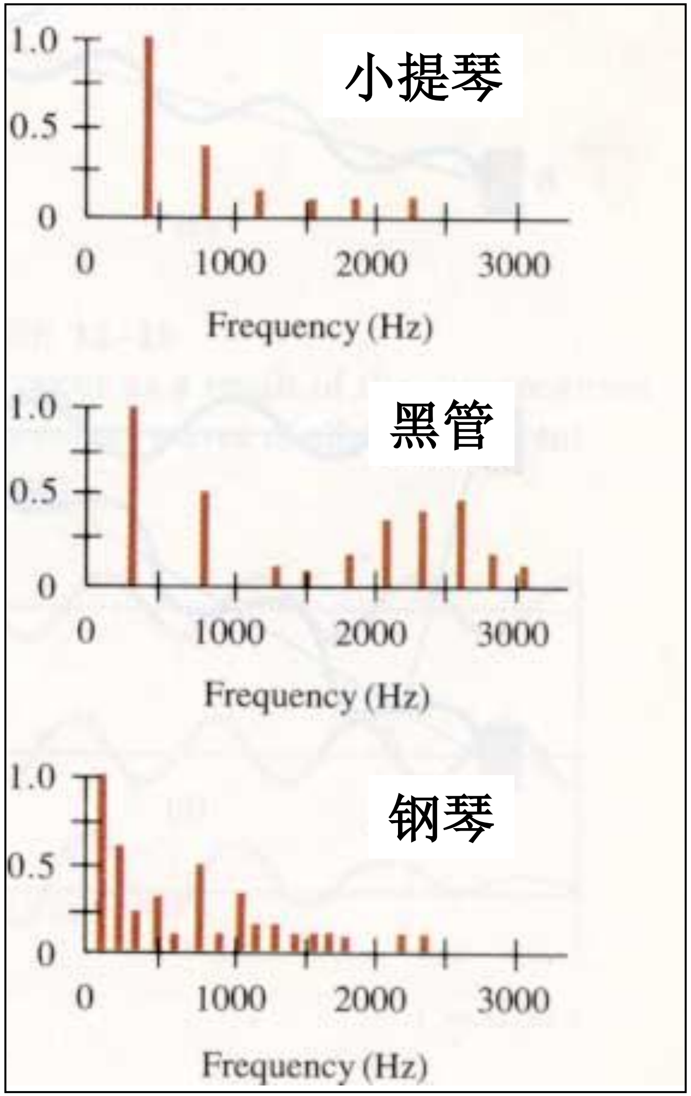
$\omega_1 : \omega_2$
$2:1$
$3:1$
$3:2$
$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{8}$
$\frac{\pi}{2}$

周期性振动的频谱
是线状谱。

例，几种乐器的频谱

非周期性振动的频谱
是连续谱。

有时赞美一歌唱家：
“声音洪亮，
音域宽广，
音色甜美”。
这各指什么物理因素?



§小结

1. 简谐振动方程

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

2. 简谐振动的相位

$(\omega t+\varphi)$ 是相位，决定 t 时刻简谐振动的运动状态.

3. 简谐振动的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

4. 由初始条件振幅和初相位

$$A=\sqrt{x_0{}^2+\frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}} \qquad \varphi=\arctan(-\frac{\upsilon_0}{\omega x_0})$$

5. 弹簧振子的能量

动能：
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

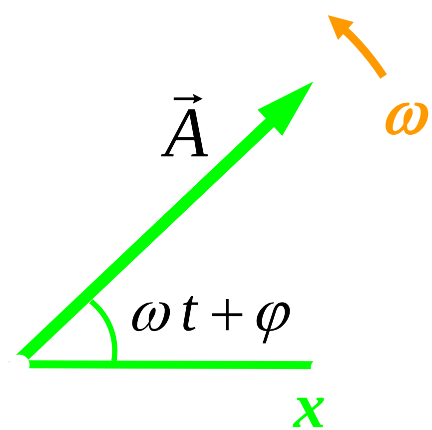
势能：
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

总机械能：
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

平均能量：
$$\overline{E}_k = \overline{E}_p = \frac{1}{2}E = \frac{1}{4}kA^2$$

6. 谐振动的旋转矢量表示

$$x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$$



7. 简谐谐振动的合成

1）同方向同频率谐振动的合成

合振动仍为简谐振动，和振动的振幅取决于两个分振动的振幅及相差，即

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

2）同方向不同频率谐振动的合成

当两个分振动的频率相差较小时，产生拍的现象，拍频为

$$v = \left|(\omega_2 - \omega_1)/(2\pi)\right| = \left|v_2 - v_1\right|$$

3）相互垂直的两个谐振动的合成

若两个分振动的频率相同，则合振动的轨迹一般为椭圆；若两个分振动的频率为简单整数比，则合振动的轨迹为李萨如图形.