

第10章

变化的磁场和变化的电场

电源和电动势

非静电力：能不断分离正负电荷使正电荷逆静电场力方向运动。

电源：提供非静电力的装置。

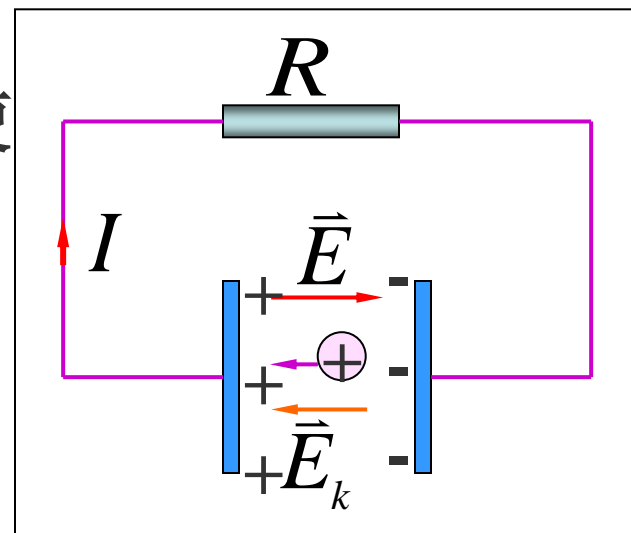
◆ 非静电**电场强度** \vec{E}_k ：为单位正电荷所受的非静电力。

$$W = \oint_l q(\vec{E}_k + \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \oint_l q\vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

◆ **电动势的定义**：单位正电荷绕闭合回路运动一周，非静电力所做的功。

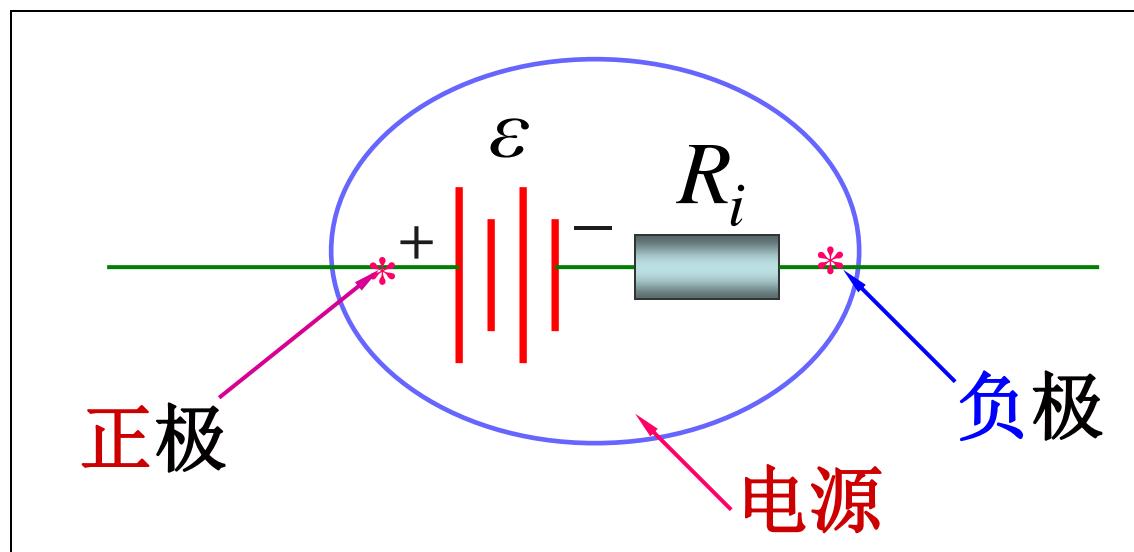
电源电动势

$$\varepsilon = \frac{W}{q}$$



\therefore 电源电动势 $\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

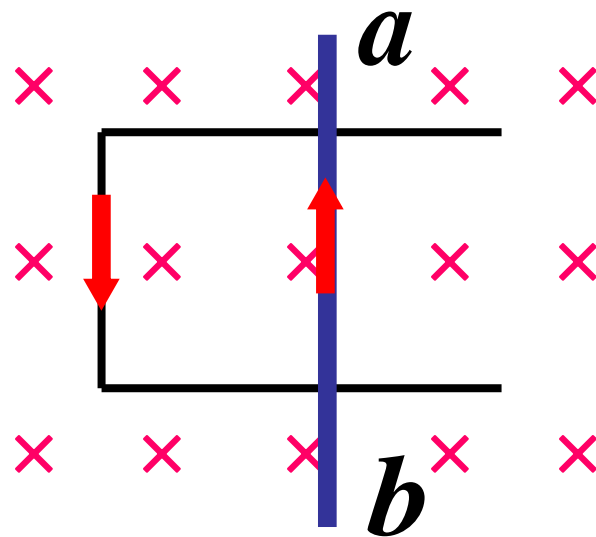
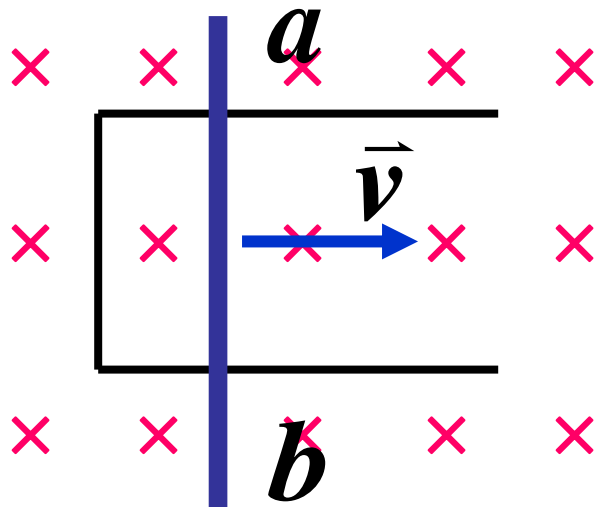
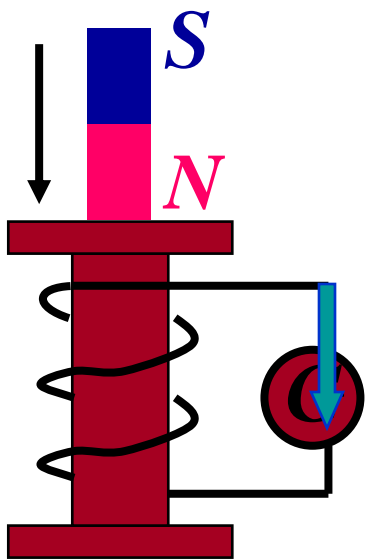
◆ 电源电动势大小等于将单位正电荷从负极经电源内部移至正极时非静电力所作的功。

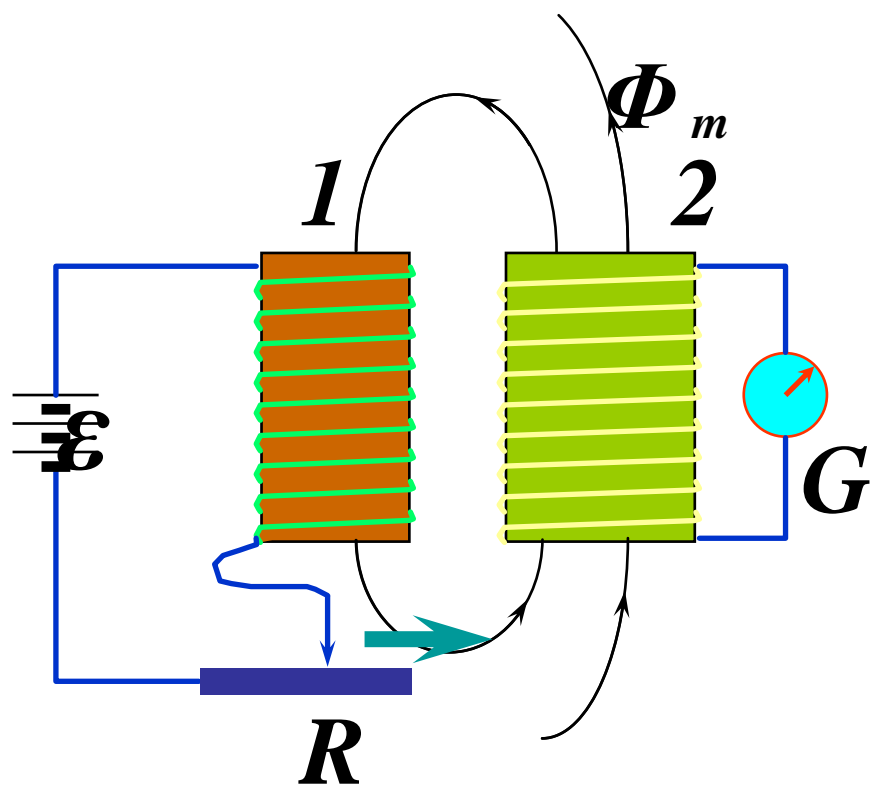
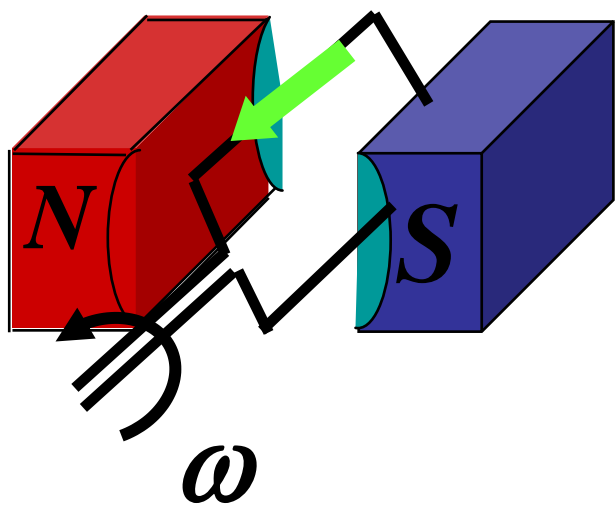


电源的电动势 \mathcal{E} 和内阻 R_i

§ 1 电磁感应定律

一、法拉第电磁感应定律





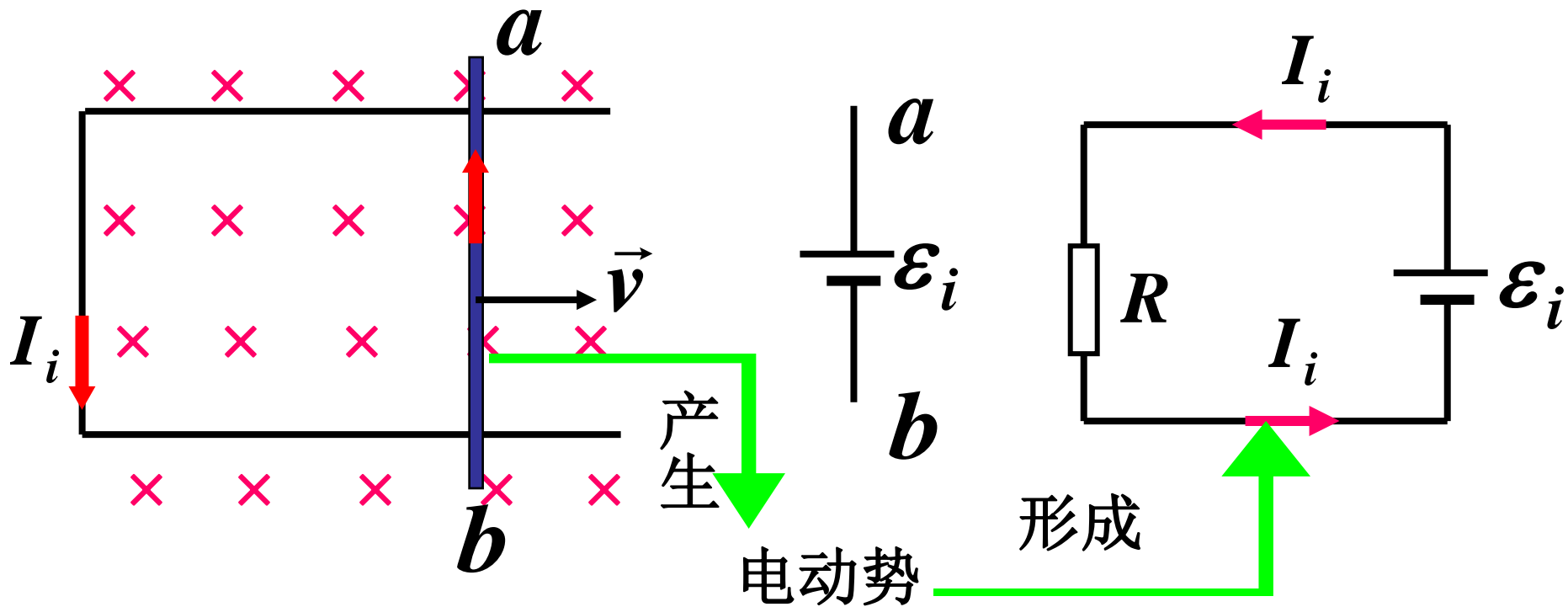
当回路1中电流发生变化时，在回路2中出现感应电流。

1、产生感应电流的几种情况

- ①磁棒在线圈附近运动时，线圈中产生感生电流；
- ②通有电流的线圈替代上述磁棒，线圈中产生感生电流；
- ③两个位置固定的相互靠近的线圈，当其中一个线圈上电流发生变化时，也会在另一个线圈内引起电流；
- ④放在稳恒磁场中的导线框，一边导线运动时线框中有电流。

感应电流与原电流本身无关，

而是与原电流的变化有关。



实质： 当通过回路的磁通量变化时，回路中就会产生感应电动势。

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

1. 导线或线圈在磁场中运动
2. 线圈内磁场变化

2、电磁感应定律

导体回路中产生的感应电动势的大小，与穿过导体回路的磁通量对时间的变化率成正比。

$$\varepsilon_i \propto \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

感应电动势大小

$$\varepsilon_i = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$$

感应电动势的方向

楞次定律

讨论: (1) 对 N 匝线圈 $\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt}$

$$\Psi = N\Phi_m \quad \text{— 磁通链}$$

(2) 感应电流 $I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{N}{R} \frac{d\Phi}{dt}$

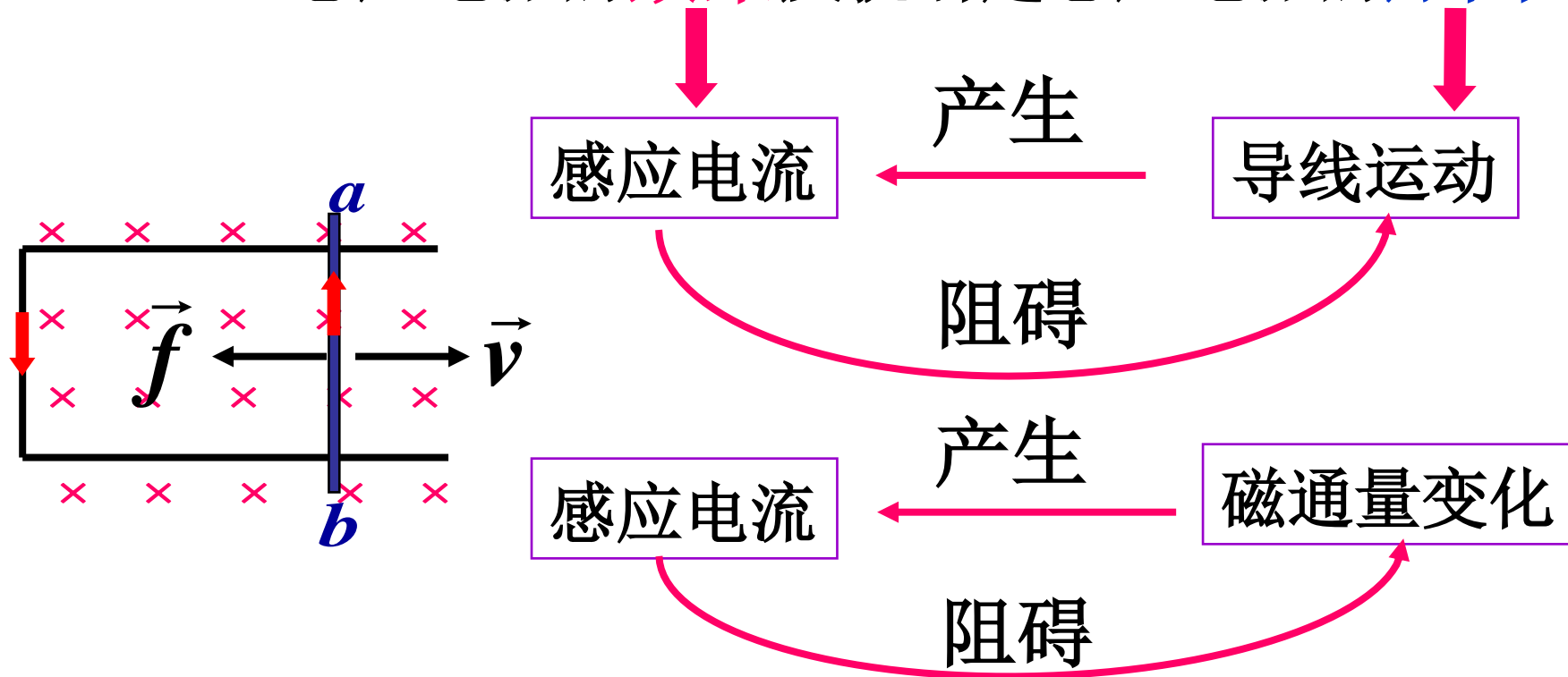
(3) 在 t_1 到 t_2 时间间隔内通过导线任一截面的感应电量 ($dq = I_i dt$)

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi \\ &= \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2) \end{aligned}$$

二、楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场来阻止或补偿引起感应电流的磁通量的变化。

感应电流的**效果**反抗引起感应电流的**原因**

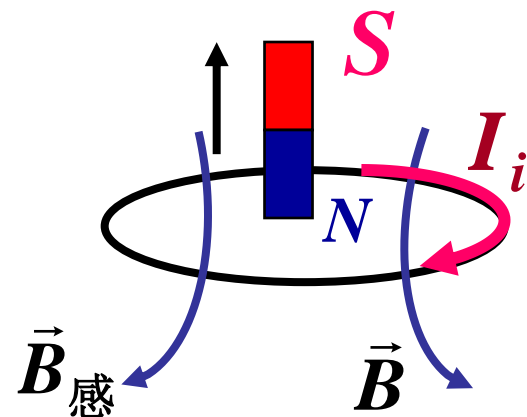
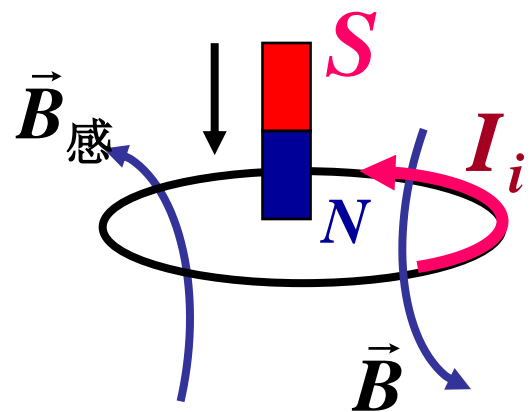


判断感应电流的方向：

- ①判明穿过闭合回路内原磁场的方向；
- ②根据原磁通量的变化 $\Delta\Phi_m$ ，按照楞次定律的要求确定感应电流的磁场的方向；
- ③按右手法则由感应电流磁场的方向来确定感应电流的方向。

$\Phi_m \uparrow$ $\vec{B}_{\text{感}}$ 与 \vec{B} 反向

$\Phi_m \downarrow$ $\vec{B}_{\text{感}}$ 与 \vec{B} 同向



两类实验现象

导线或线圈在磁场中运动

线圈内磁场变化

感应电动势

动生电动势

感生电动势

```
graph LR; A[动生电动势] --> B[产生原因、规律不相同]; C[感生电动势] --> B; B --> D[都遵从电磁感应定律]
```

产生原因、
规律不相同

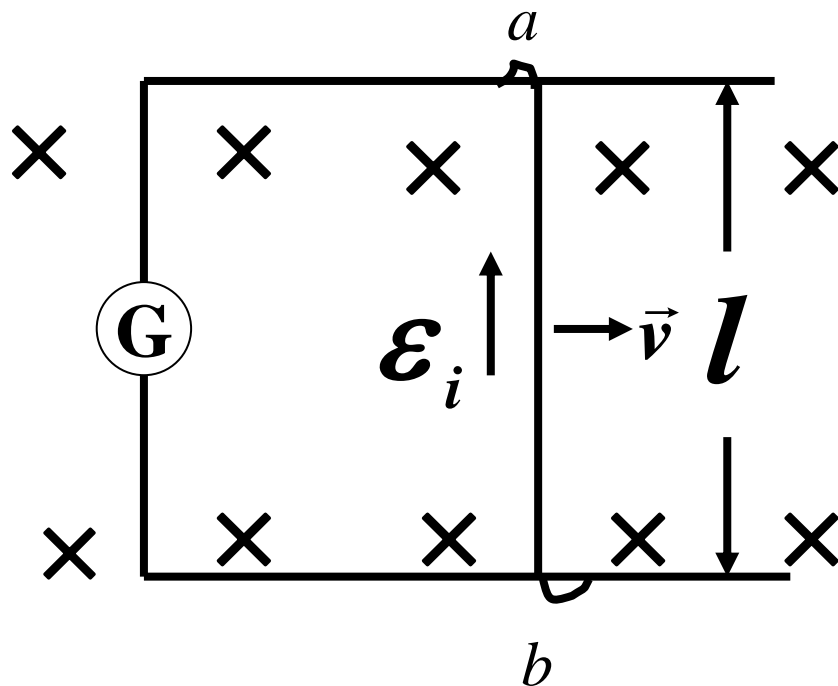
都遵从电磁感应定律

§ 2 动生电动势

一、动生电动势

动生电动势是由于导体或导体回路在恒定磁场中运动而产生的电动势。

？ 非静电力 $\xrightarrow{\text{产生}}$ 动生电动势



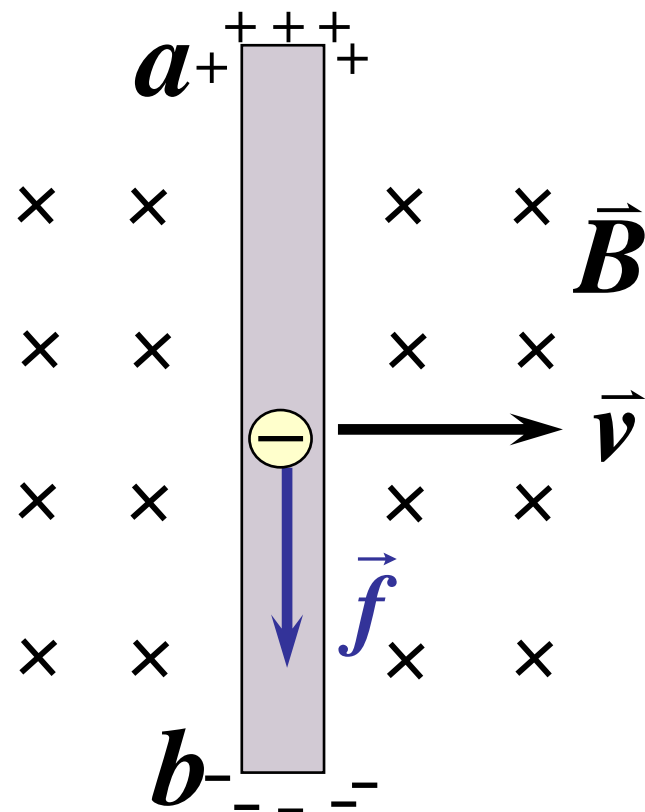
二、动生电动势的成因

导线内每个自由电子
受到的洛仑兹力分量为

$$\underline{\vec{f}} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

非静电力

它驱使电子沿导线由 a 向 b 移动。



由于洛仑兹力的作用使 b 端出现过剩负电荷，
 a 端出现过剩正电荷 。

在导线内部产生静电场 \vec{E}

方向 $a \rightarrow b$

电子受的静电力

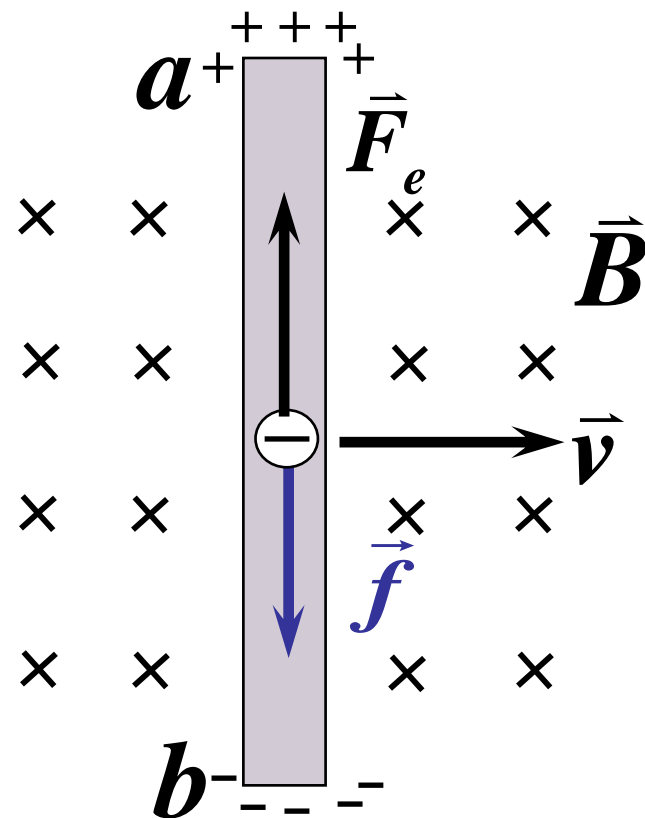
$$\vec{F}_e = -e\vec{E}$$

平衡时 $\vec{F}_e = -\vec{f}$

此时电荷积累停止， ab 两端形成稳定的电势差。

洛伦兹力分量可看作产生动生电动势的原因。

导体 ab 相当于电源， a 为正极， b 为负极；洛伦兹力是非静电力。



三、动生电动势的一个计算公式

非静电力 $\vec{f} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$

定义 \vec{E}_k 为非静电场强 $\vec{E}_k = \frac{\vec{f}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$

由电动势定义 $\varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

运动导线 ab 产生的动生电动势为

$$\varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$\vec{v} \times \vec{B}$ 所指的方向即为动生电动势的正极。

讨论：①一般情况

导线是**曲线**， 磁场为**非均匀场**。

导线上各长度元 dl 上的速度 \vec{v} 、 \vec{B} 各不相同

$$dl \text{ 上的动生电动势 } d\varepsilon_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

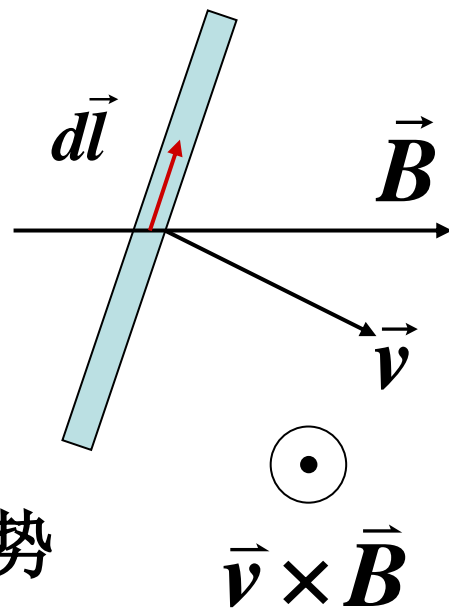
整个导线 L 上的动生电动势

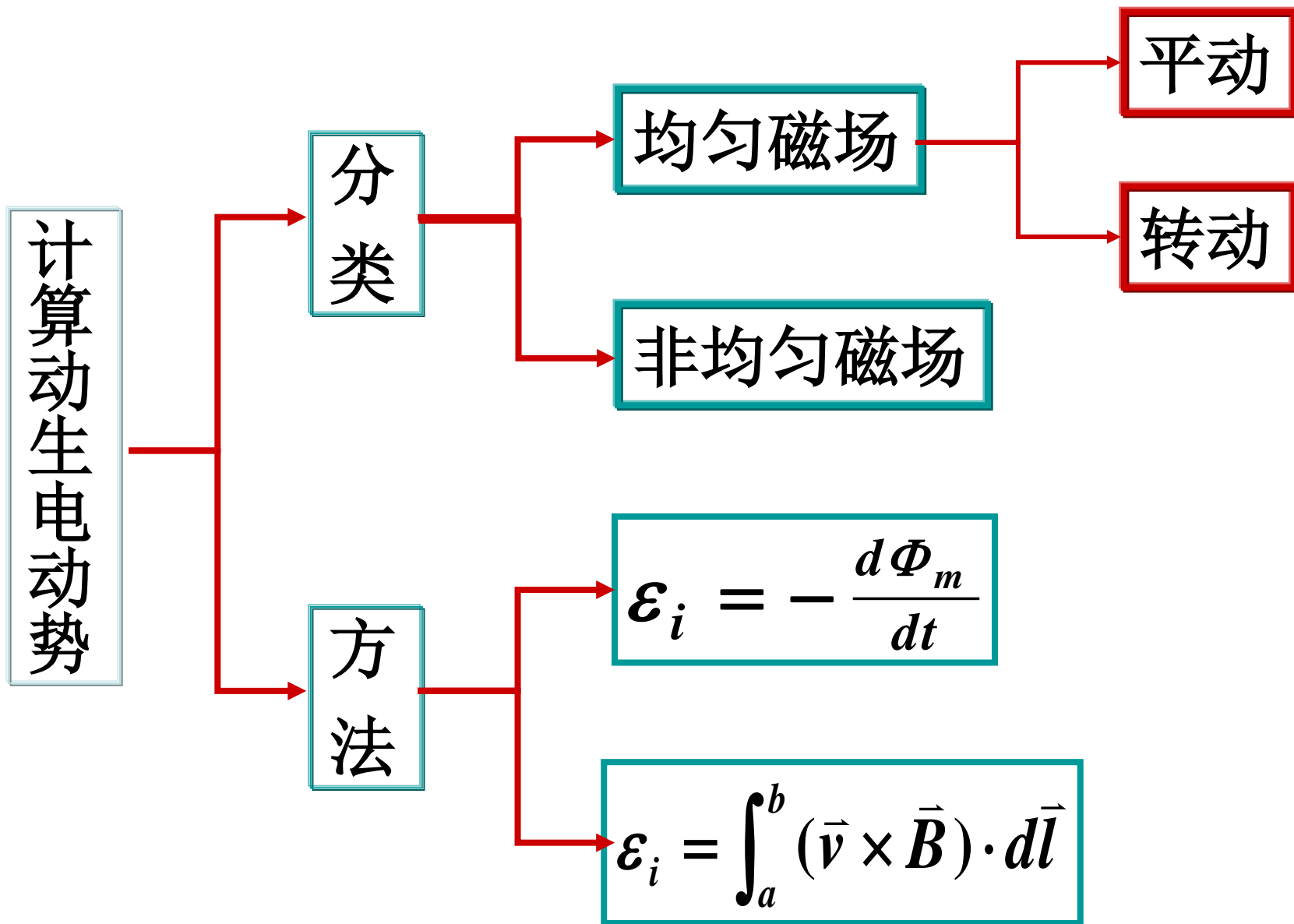
$$\varepsilon_i = \int d\varepsilon_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

②关于动生电动势的夹角问题

$$\text{若 } \vec{v} \parallel \vec{B}$$

$\vec{v} \times \vec{B} \perp d\vec{l}$ 不产生动生电动势





五、动生电动势的计算

均匀磁场 平动

例 已知: $\vec{v}, \vec{B}, \alpha, L$ 求: \mathcal{E}

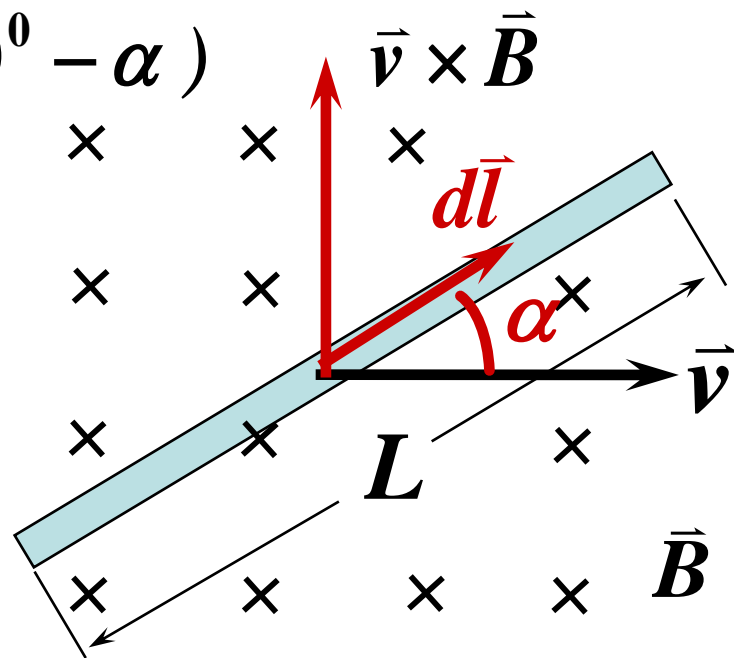
解: $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

$$= vB \sin 90^\circ dl \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$= Bv \sin \alpha dl$$

$$\mathcal{E} = \int Bv \sin \alpha dl$$

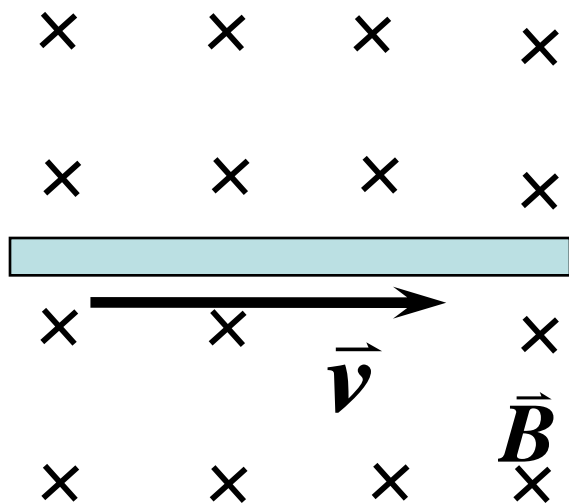
$$= BvL \sin \alpha$$



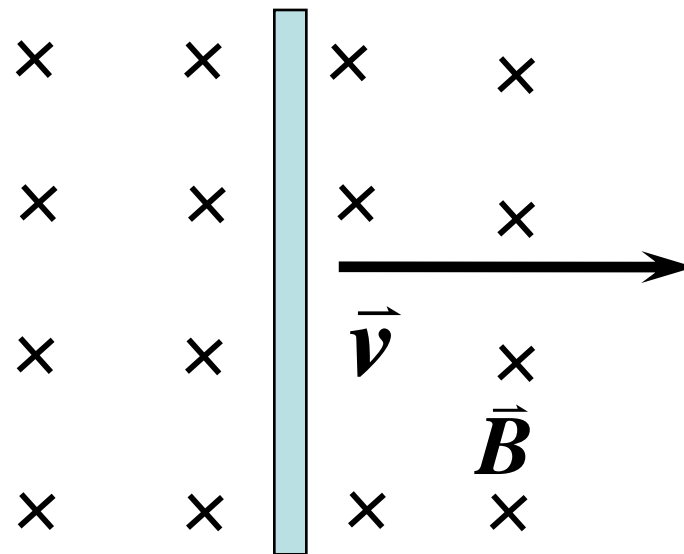
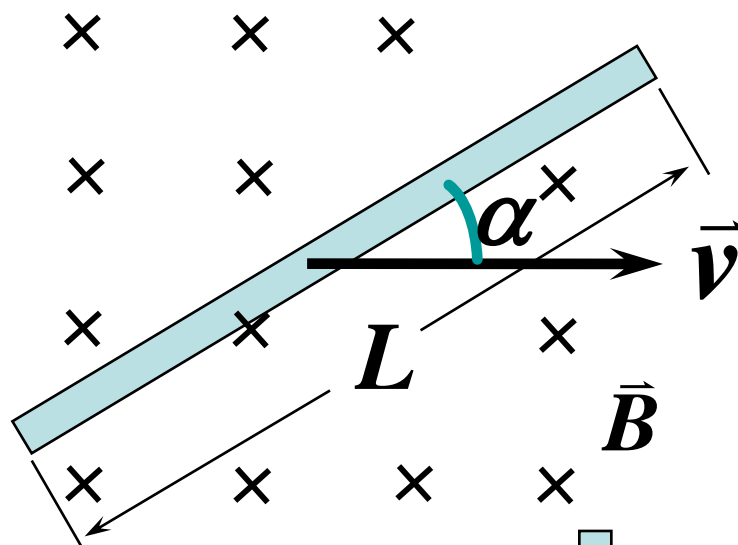
典型结论

$$\varepsilon = BvL \sin \alpha$$

特例



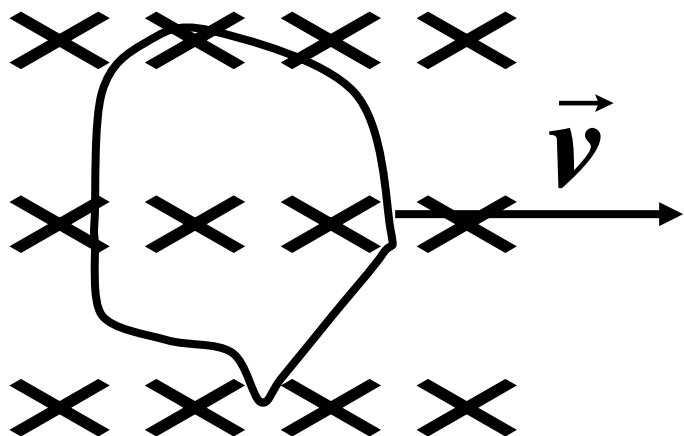
$$\varepsilon = 0$$



$$\varepsilon = BvL$$

均匀磁场

闭合线圈平动



$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

例 有一半圆形金属导线在匀强磁场中作切割磁力线运动。已知： \vec{v}, \vec{B}, R .

求：动生电动势。

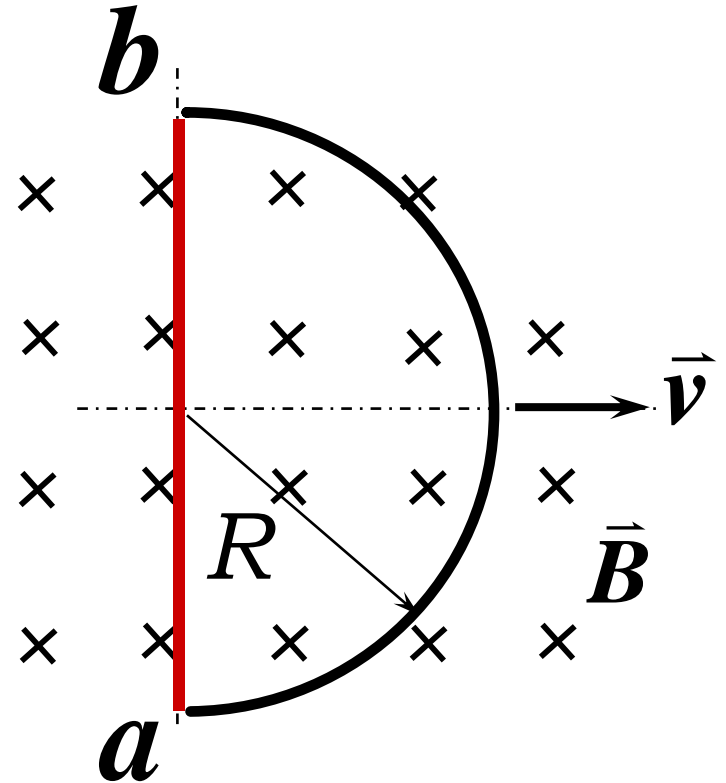
解：方法一

作辅助线，形成闭合回路

$$\mathcal{E}_i = 0$$

$$\mathcal{E}_{\text{半圆}} = \mathcal{E}_{\overline{ab}} = 2RBv$$

方向： $a \rightarrow b$



例 有一半圆形金属导线在匀强磁场中作切割磁力线运动。已知： \vec{v}, \vec{B}, R 。

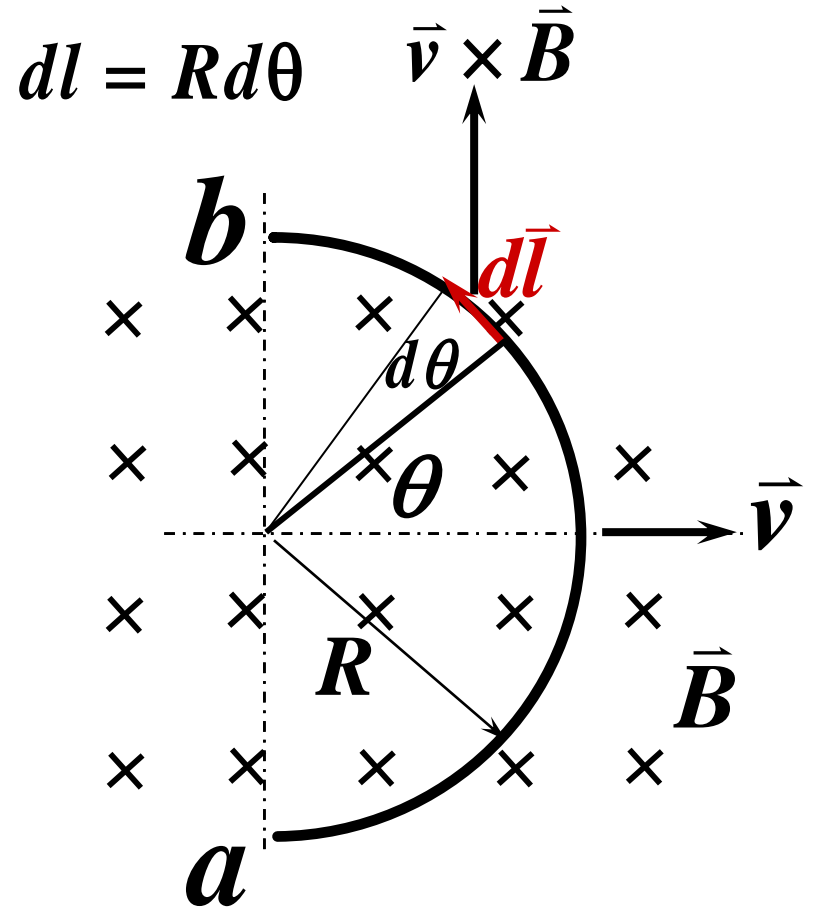
求：动生电动势。

解：方法二

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= vB \sin 90^\circ dl \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= vBR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= vB 2R \end{aligned}$$

方向： $a \rightarrow b$



均匀磁场 转动

例 如图，长为 L 的铜棒在磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中，以角速度 ω 绕 O 轴转动。

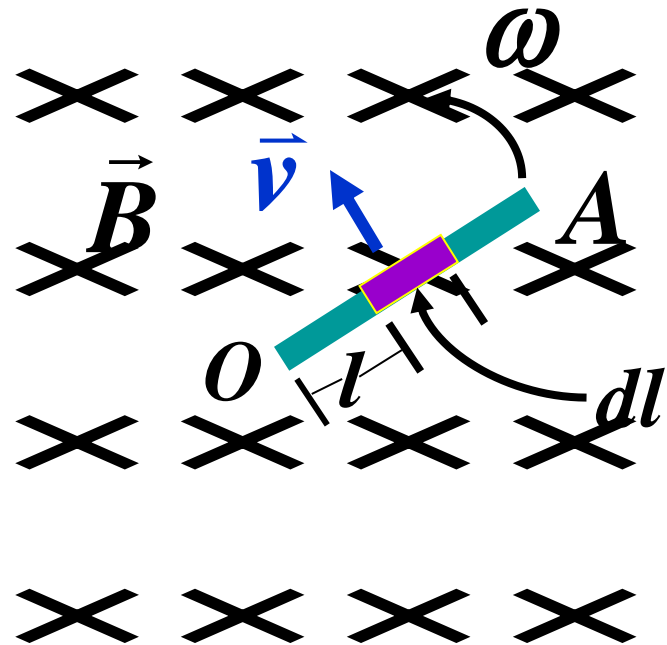
求：棒中感应电动势的大小和方向。

解：方法一

$$\begin{aligned}\text{取微元 } d\varepsilon &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= -Bvdl = -Bl\omega dl\end{aligned}$$

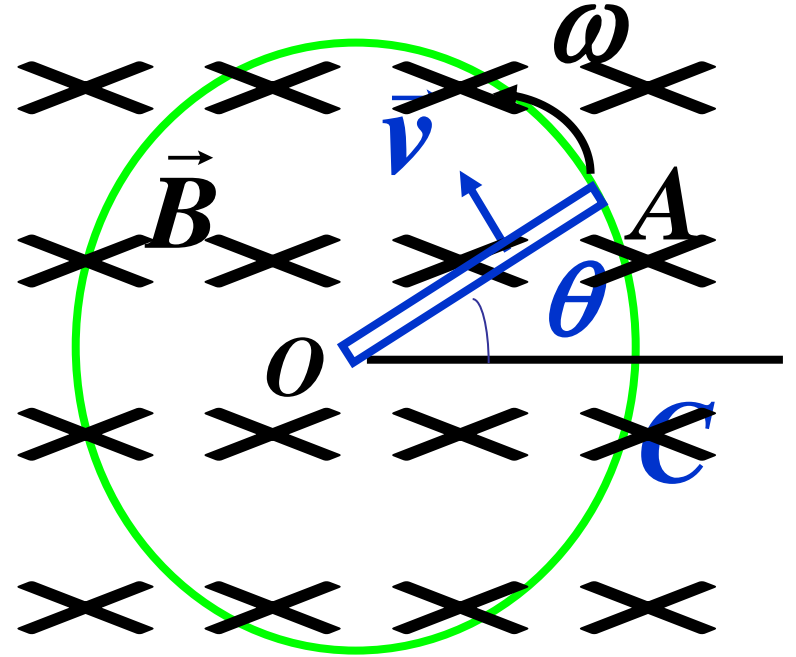
$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \int d\varepsilon_i = -\int_0^L Bl\omega dl \\ &= -\frac{1}{2}B\omega L^2 < 0\end{aligned}$$

方向 $A \rightarrow O$



方法二 作辅助线，形成闭合回路 $OACO$

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B dS \\ &= BS_{OACO} = \frac{1}{2} B \theta L^2 \\ \varepsilon_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} BL^2 \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} B \omega L^2\end{aligned}$$



负号表示方向沿**AOCA** OC 、 CA 段没有动生电动势

问题

把铜棒换成金属圆盘，
中心和边缘之间的电动势是多少？

非均匀磁场

例 一直导线 CD 在一无限长直电流磁场中作切割磁力线运动。求：动生电动势。

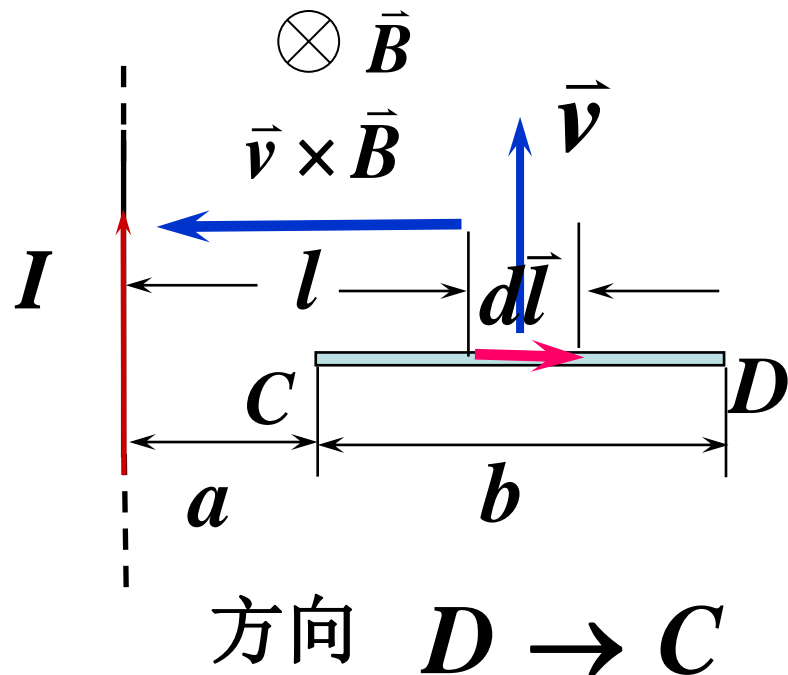
解：方法一

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= v \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \sin 90^\circ dl \cos 180^\circ$$

$$= -\frac{\mu_0 v I}{2\pi} dl$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 v I}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dl}{l} = -\frac{\mu_0 v I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$



方法二 作辅助线，形成闭合回路***CDEF***

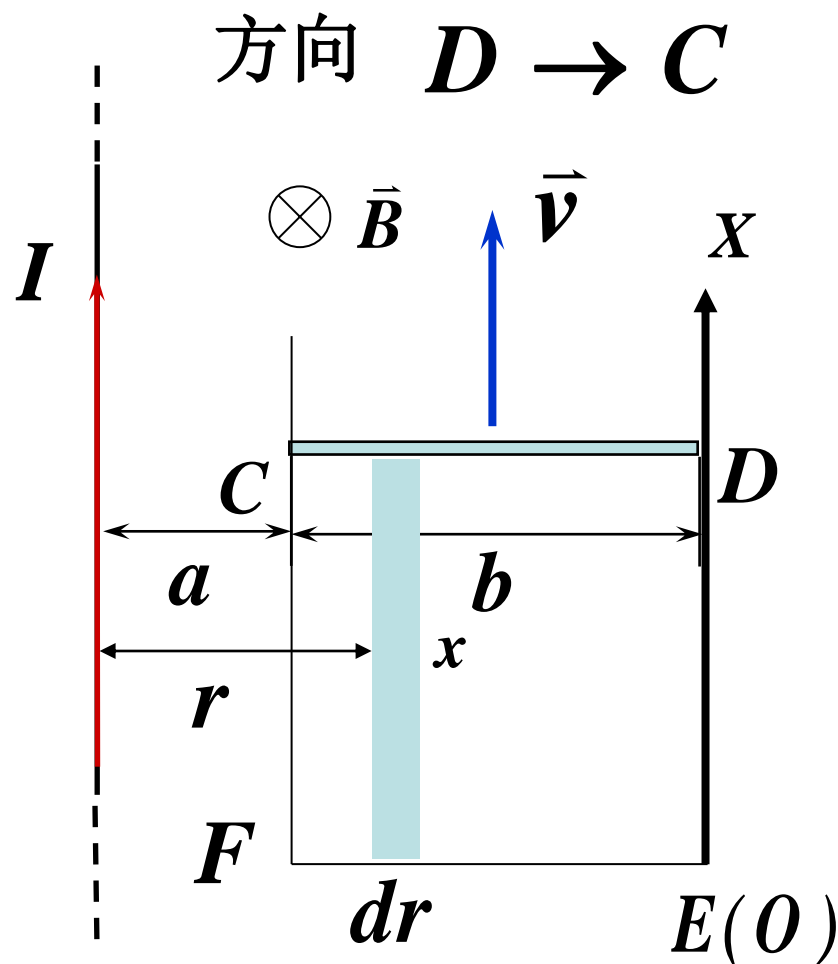
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} x dr$$

$$= \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$= - \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \right) \frac{dx}{dt}$$

$$= - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$



例：如图，金属棒长为 l ，水平放置，以长度的 $\frac{1}{3}$ 处为轴在水平面内匀速运动，转速为 ω ，均匀磁场垂直向上，磁感应强度为 \vec{B} 。求金属棒两端的

$$u_A - u_B = ?$$

解：在 OB 段

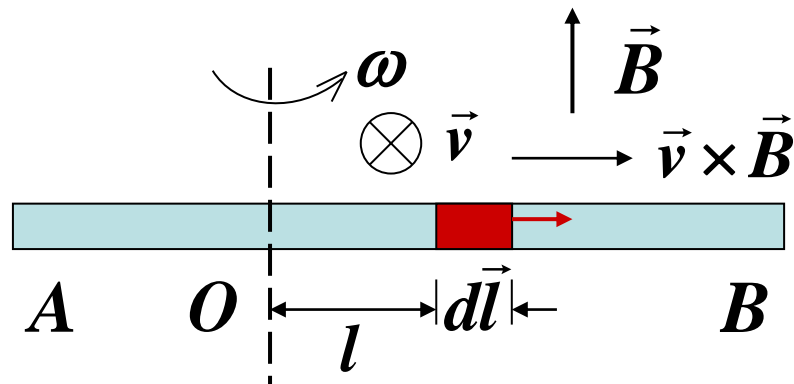
$$\begin{aligned} d\varepsilon_i &= \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = vBdl \\ &= l \cdot \omega \cdot B \cdot dl \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{i1} = \int_0^{2l/3} \omega B l dl = \frac{2}{9} \omega B l^2$$

方向： $O \rightarrow B$

同理 $\varepsilon_{i2} = \int_0^{l/3} \omega B l dl = \frac{1}{18} \omega B l^2$ 方向： $O \rightarrow A$

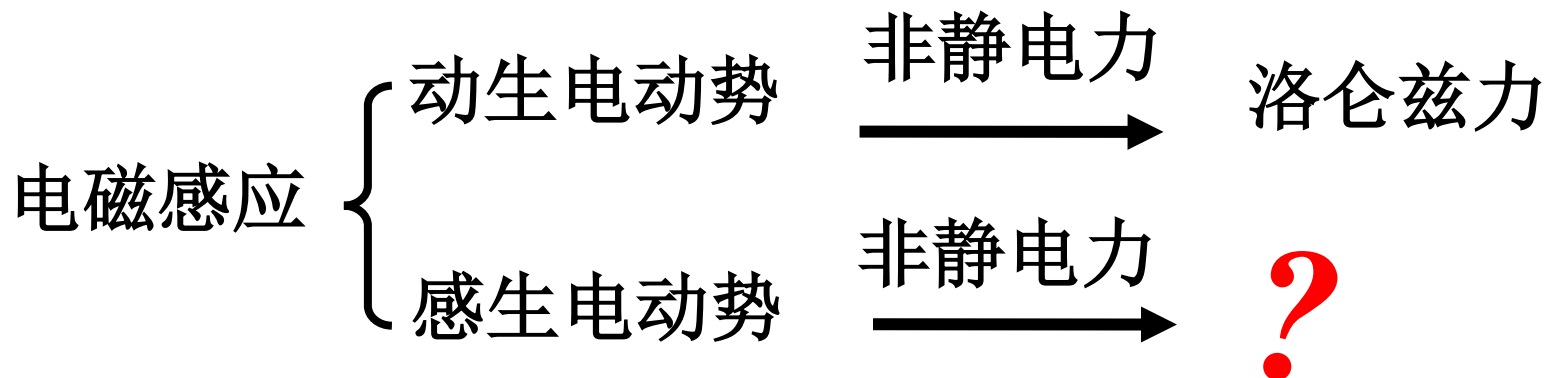
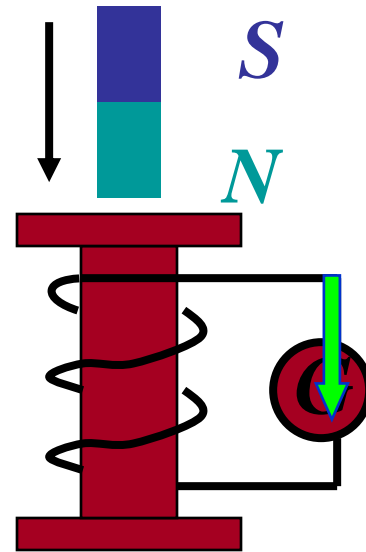
$$\therefore u_A - u_B = \varepsilon_{i2} - \varepsilon_{i1} = -\frac{1}{6} \omega B l^2 \quad u_B \text{ 高于 } u_A$$



§ 3 感生电动势和感生电场

一、感生电动势

由于磁场发生变化而
激发的电动势



二、麦克斯韦假设

变化的磁场在其周围空间会激发一种涡旋状的电场，称为涡旋电场或感生电场。记作 $\vec{E}_{\text{涡}}$ 或 $\vec{E}_{\text{感}}$

注意：① $\vec{E}_{\text{感}}$ 弥漫在整个空间，不仅局限在磁场变化的区域内；

② $\vec{E}_{\text{感}}$ 在空间中存在，若有回路则形成 I_i

③真空，电介质一样。

三、感生电场的环路定理

由电动势的定义 $\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l}$

由法拉第电磁感应定律 $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$

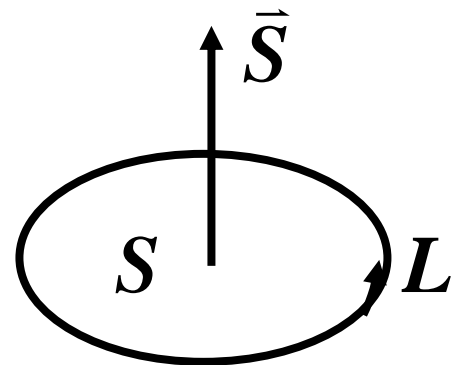
$$\oint_L \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

感生电场的
环路定理

说明： **S** 是以 **L** 为边界的任一曲面。

\vec{S} 的法线方向应选得与曲线 **L** 的
积分方向成右手螺旋关系



$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 是曲面上的任一面元上磁感应强度的变化率

不是积分回路线元上的磁感应强度的变化率

讨论：A.此式反映变化磁场和感生电场的相互关系，
即感生电场是由变化的磁场产生的。

B. $\vec{E}_{\text{涡}}$ 的性质：

$$\therefore \oint \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

$\therefore \vec{E}_{\text{涡}}$ 是涡旋电场，其电力线为无头无尾的闭合曲线。

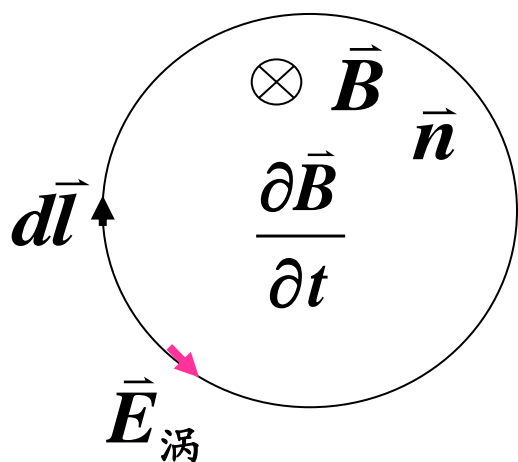
$$\therefore \oint \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{是无源场}$$

C. 若在空间即有感生电场，又有静电场，则：

$$\begin{aligned} \oint \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} &= \oint (\vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_{\text{涡}}) \cdot d\vec{l} \\ &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

D. $\vec{E}_{\text{涡}}$ 与 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 构成左旋关系。

设空间有一磁场 \vec{B} ，方向 \otimes
在其中取一回路， $\vec{n} \otimes$

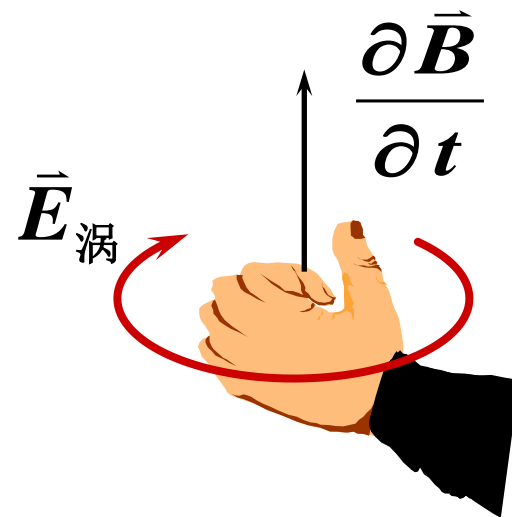
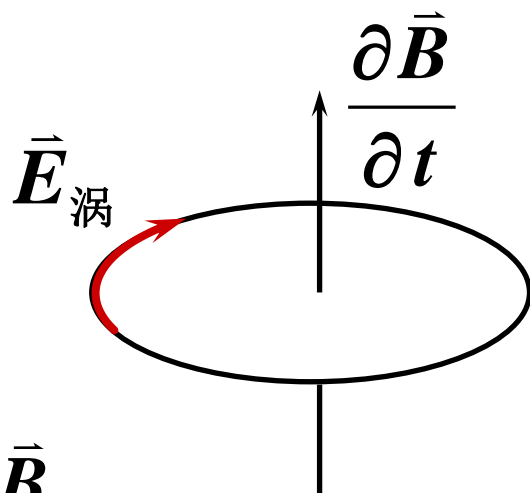


设 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} > 0$

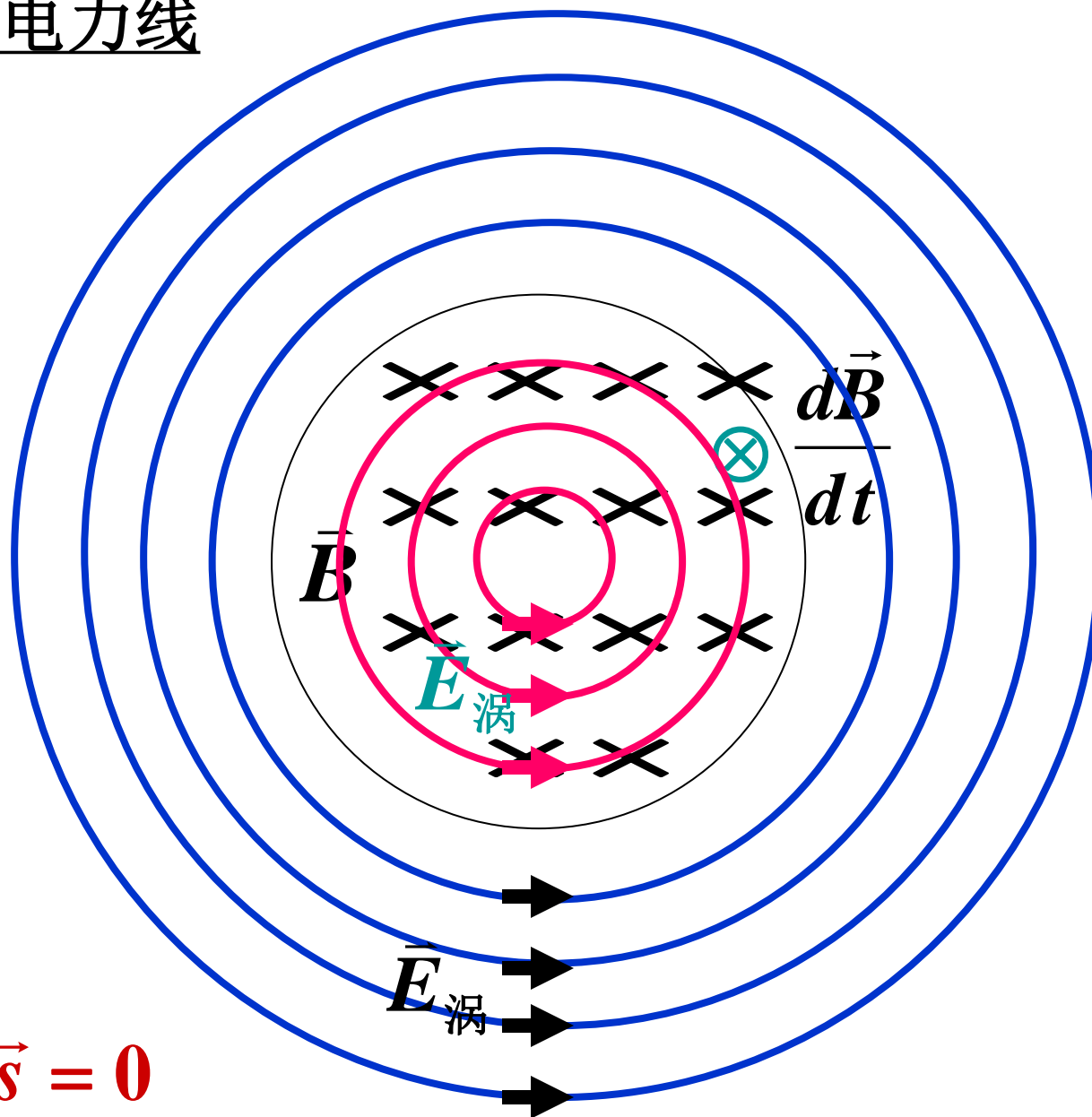
$$\oint \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = - \iint \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \theta < 0$$

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{B}, \vec{n}$ 同向

$\vec{E}_{\text{涡}}$ 与 $d\vec{l}$ 的环绕的方向相反



感生电场电力线



无源场

$$\oint \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{s} = 0$$

静电场（库仑场）

具有电能、对电荷有作用力

由静止电荷产生

$\vec{E}_{\text{库}}$ 线是“有头有尾”的，
起于正电荷而终于负电荷

$$\oint_S \vec{E}_{\text{库}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{库}} \cdot d\vec{l} = 0$$

感生电场（涡旋电场）

具有电能、对电荷有作用力

由变化磁场产生

$\vec{E}_{\text{感}}$ 线是“无头无尾”的
是一组闭合曲线

$$\oint_S \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

动生电动势

$$\varepsilon_i = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

特点

磁场不变，闭合电路的整体或局部在磁场中运动导致回路中磁通量的变化

原因

由于S的变化引起回路中 Φ_m 变化

非静电力来源

洛仑兹力

感生电动势

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

闭合回路的任何部分都不动，空间磁场发生变化导致回路中磁通量变化

由于 \vec{B} 的变化引起回路中 Φ_m 变化

感生电场力

四、感生电场的计算

例1 局限于半径 R 的圆柱形空间内分布有均匀磁场，方向如图。磁场的变化率 $\partial B / \partial t > 0$

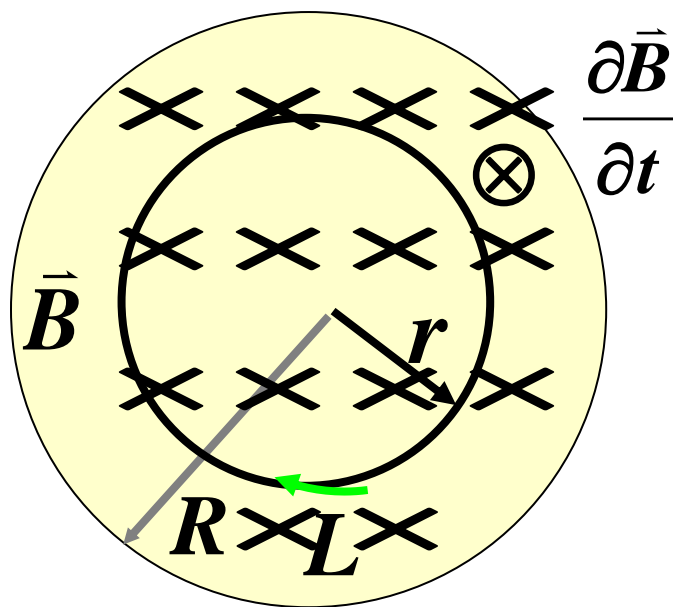
求：圆柱内、外的 $\vec{E}_{\text{涡}}$ 分布。

解： $r < R$

$$\oint_l \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = - \oint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l E_{\text{涡}} dl \cos 0^\circ = - \oint_s \frac{\partial B}{\partial t} dS \cos 0^\circ$$

$$E_{\text{涡}} 2\pi r = - \frac{dB}{dt} \pi r^2 \quad E_{\text{涡}} = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

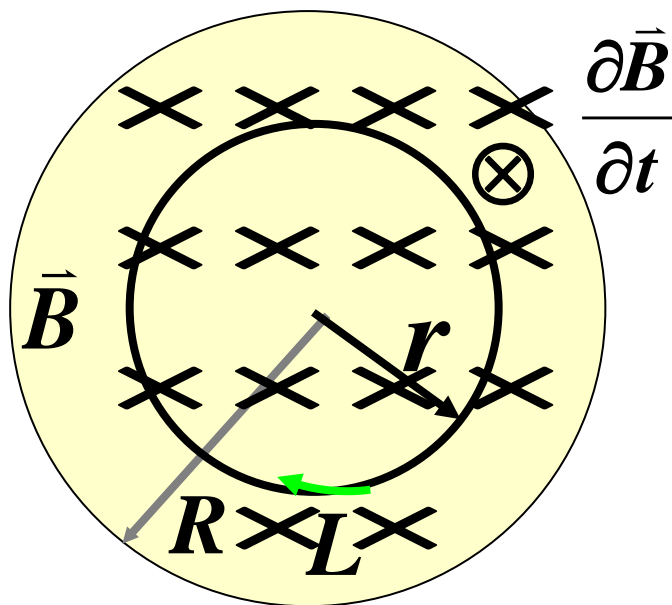


方向：
逆时针方向

讨论

$$E_{\text{涡}} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

负号表示 $\vec{E}_{\text{涡}}$ 与 dB/dt 成左手系



(1) $|\vec{B}| \downarrow$ 则 $dB/dt < 0 \rightarrow E_{\text{涡}} > 0$

$\vec{E}_{\text{涡}}$ 与 L 积分方向切向同向

(2) $|\vec{B}| \uparrow$ 则 $dB/dt > 0 \rightarrow E_{\text{涡}} < 0$

$\vec{E}_{\text{涡}}$ 与 L 积分方向切向相反

$$r > R$$

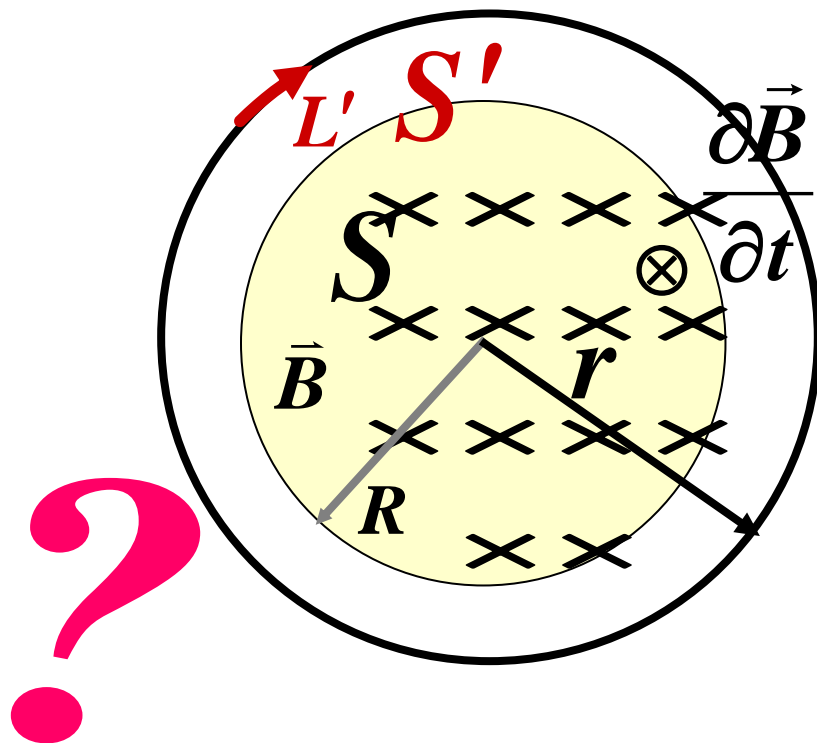
$$\oint_{L'} \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = - \oint_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

在圆柱体外，由于 $B=0$

故 $L' \perp \partial \vec{B} / \partial t = 0$

$\therefore \oint_{L'} \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = 0$

于是 L' 上 $\vec{E}_{\text{感}} = 0$



虽然 $\partial B / \partial t$ 在 L' 上每点为 0，但在 S' 上则并非如此。
由图可知，这个圆面积包括柱体内部部分的面积，而
柱体内 $\partial \vec{B} / \partial t \neq 0$

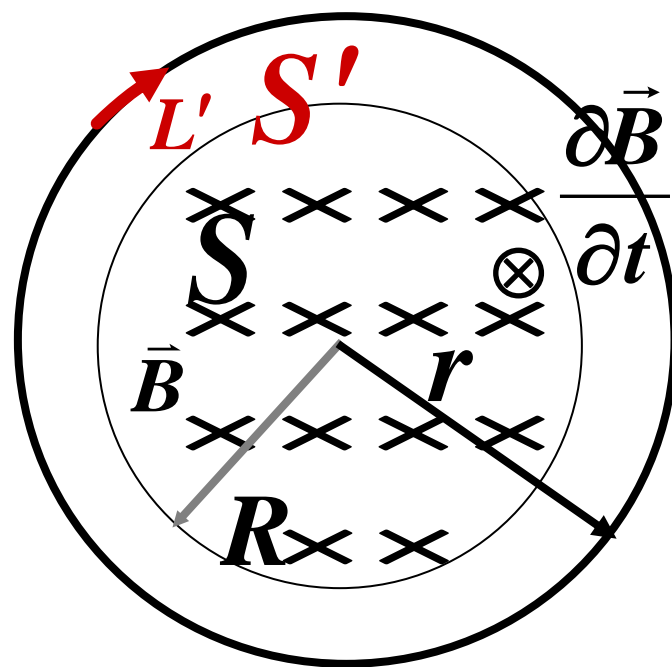
$$\therefore \oint_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{dB}{dt} \pi R^2$$

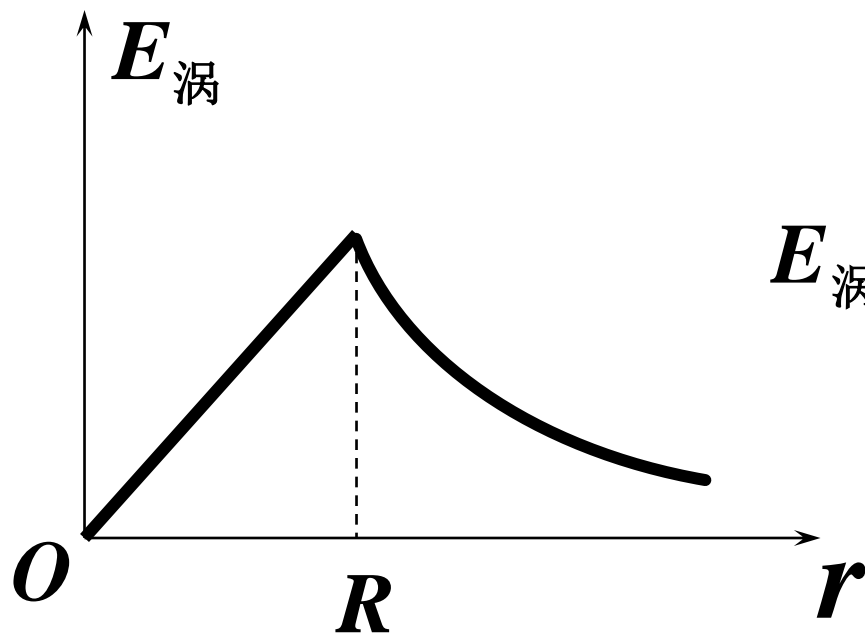
$$\oint_{L'} \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = -\frac{dB}{dt} \pi R^2$$

$$E_{\text{涡}} 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi R^2$$

$$E_{\text{涡}} = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

方向：逆时针方向





$$E_{\text{涡}} = \begin{cases} -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} & r > R \\ -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} & r < R \end{cases}$$

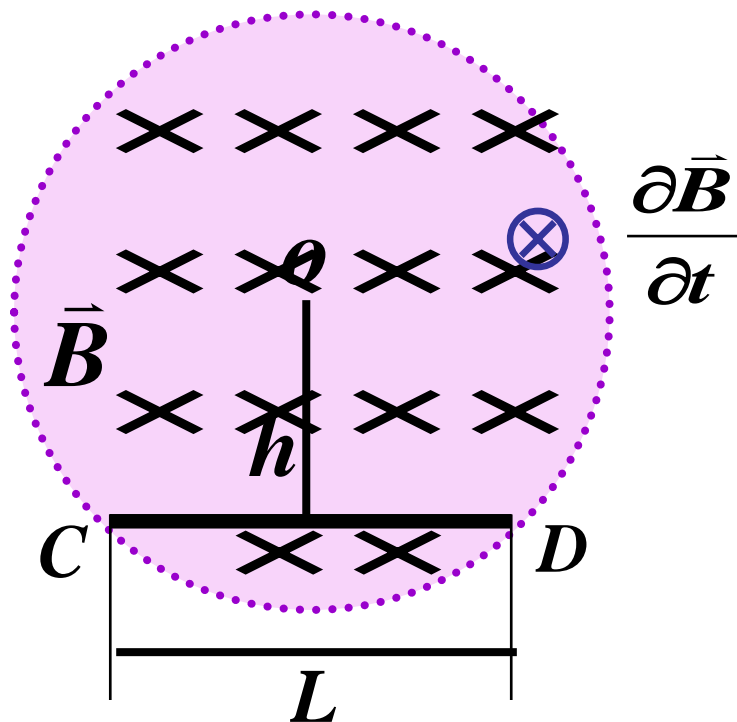
例2 有一匀强磁场分布在一圆柱形区域内，

已知： h 、 L 、 $\partial \vec{B} / \partial t > 0$ 方向如图。

求： \mathcal{E}_{CD}

分析：同前题，

$\vec{E}_{\text{涡}}$ 的方向为逆
时针



解: $\varepsilon_i = \oint \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l}$

$$|\vec{E}_{\text{涡}}| = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

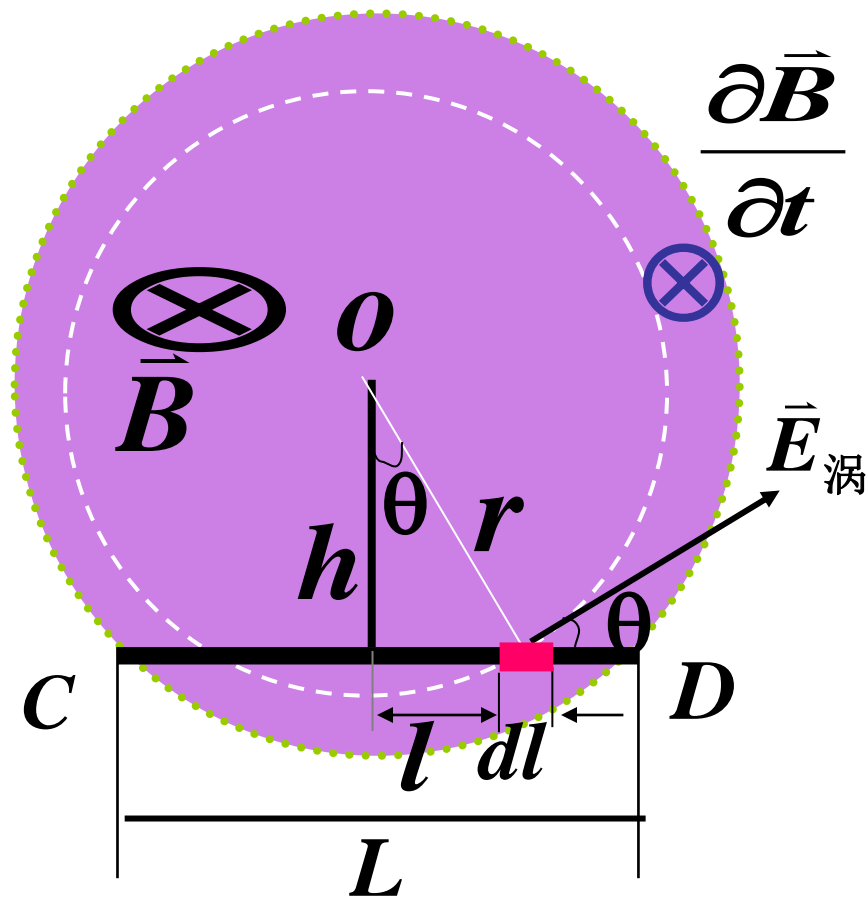
$$d\varepsilon = \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} dl \cos \theta$$

$$= \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} dl$$

$$\varepsilon_{CD} = \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \int_L dl = \frac{1}{2} h L \frac{dB}{dt}$$

电动势的方向由C指向D



$$r \cos \theta = h$$

用法拉第电磁感应定理求解

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \oint_{OCDO} \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = \int_O^C \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} + \int_D^O \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} \\ &= \underline{\mathbf{0}} + \mathcal{E}_{CD} + \underline{\mathbf{0}}\end{aligned}$$

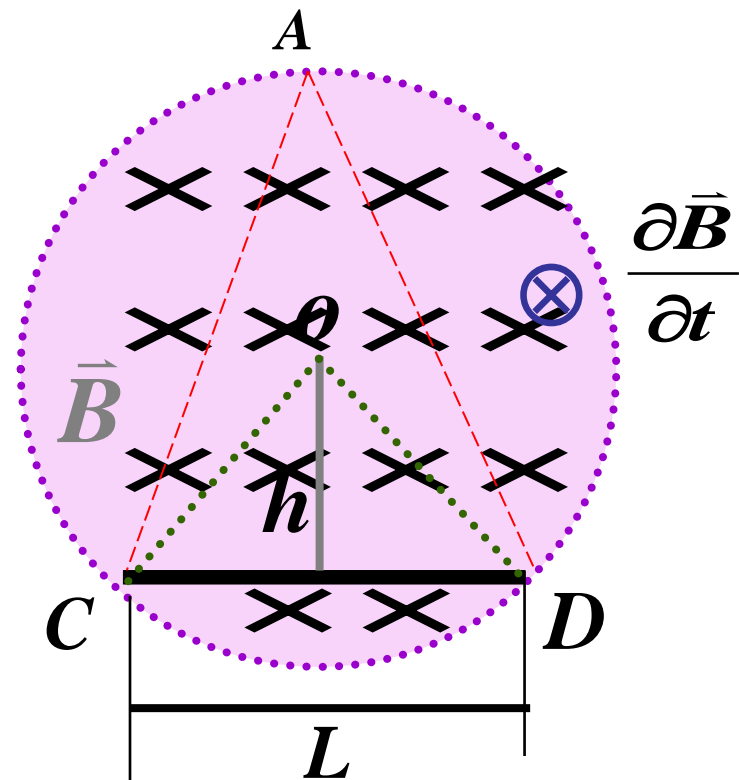
?

?

$OCDC$ 所围面积为: $S = \frac{1}{2}hL$

磁通量 $\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}hLB$

$$\mathcal{E}_i = \left| -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \right| = \frac{1}{2}hL \frac{dB}{dt}$$



问题：是否可以在圆周上任找一点连成三角形，
进行计算？

讨论 CD 导体存在时，
电动势的方向由 C 指向 D

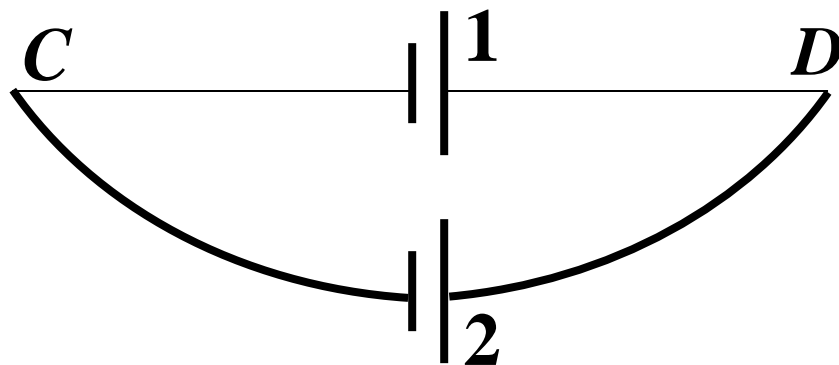
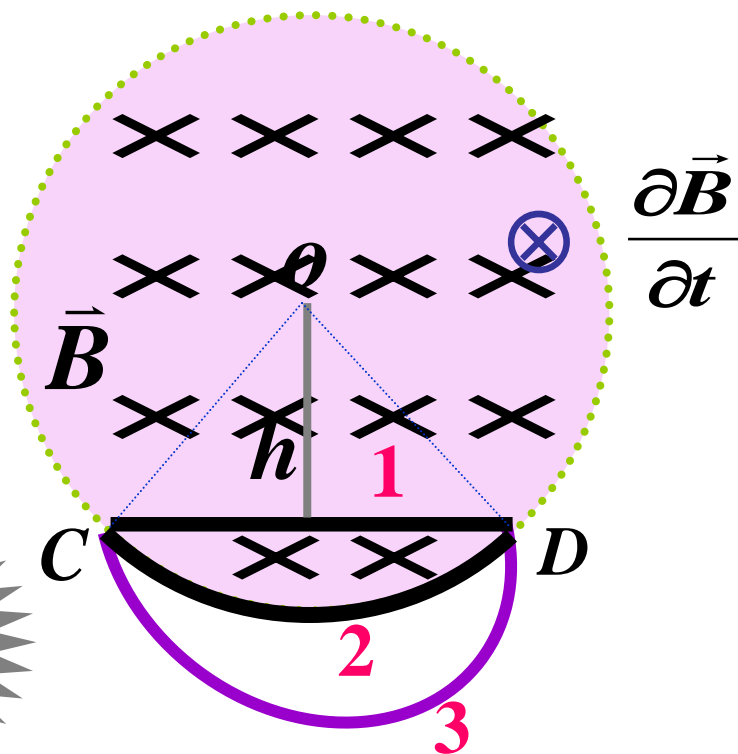
加圆弧连成闭合回路

由楞次定理知：感生电流的方向是逆时针方向……..

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \frac{1}{2} h L \frac{dB}{dt} \\ &= S_{\triangle OCD} \frac{dB}{dt}\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_2 = S_{\text{扇}OCD} \frac{dB}{dt} \quad \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2$$

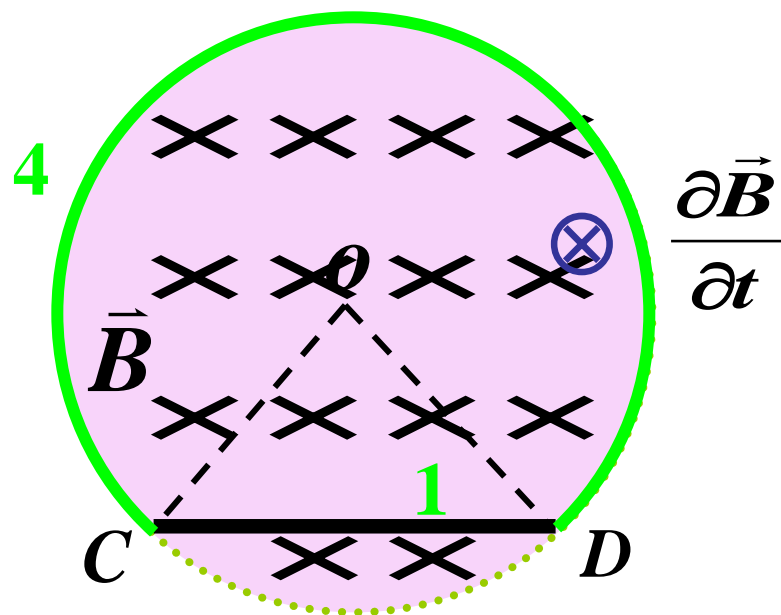


$$\mathcal{E}_1 = S_{\triangle OCD} \frac{dB}{dt}$$

\mathcal{E}_4 的方向逆时针 $D \rightarrow 4 \rightarrow C$

$$\mathcal{E}_4 = S_{\text{扇}OD4C} \frac{dB}{dt}$$

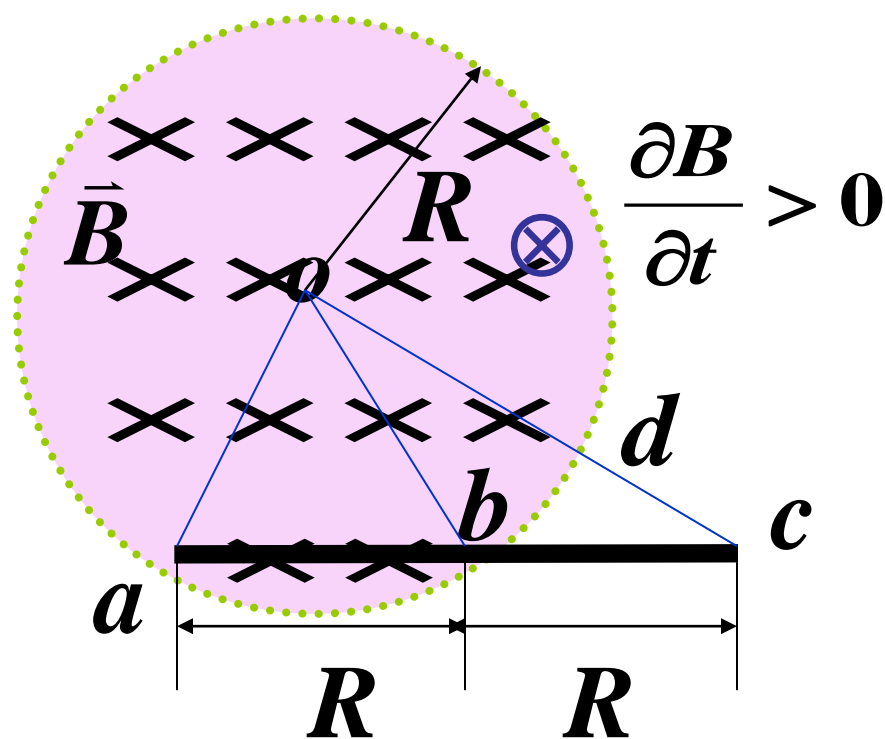
$$\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_4$$



\mathcal{E}_1 和 \mathcal{E}_4 的大小不同，说明感生电场不是保守场，其做功与路径有关

练习

求杆两端的感应电动势的大小和方向



$$|\varepsilon| = S_{oabdo} \frac{dB}{dt}$$

$$S_{oabdo} = S_{oab} + S_{obd}$$

$$= \frac{1}{2} R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R + \frac{1}{2} R^2 \frac{\pi}{6}$$

$$|\varepsilon| = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} R^2 + \frac{\pi}{12} R^2 \right) \frac{dB}{dt}$$

方向 $a \rightarrow c$

问题: b, c 点的电势谁高?

问题：圆柱形空间区域内存在着均匀磁场，(1)对直导线 AB 和弯曲的导线 \widehat{AB} ：

$$\mathcal{E}_{\overline{AB}} < \mathcal{E}_{\widehat{AB}} \quad (\text{填} >、< \text{或} =)$$

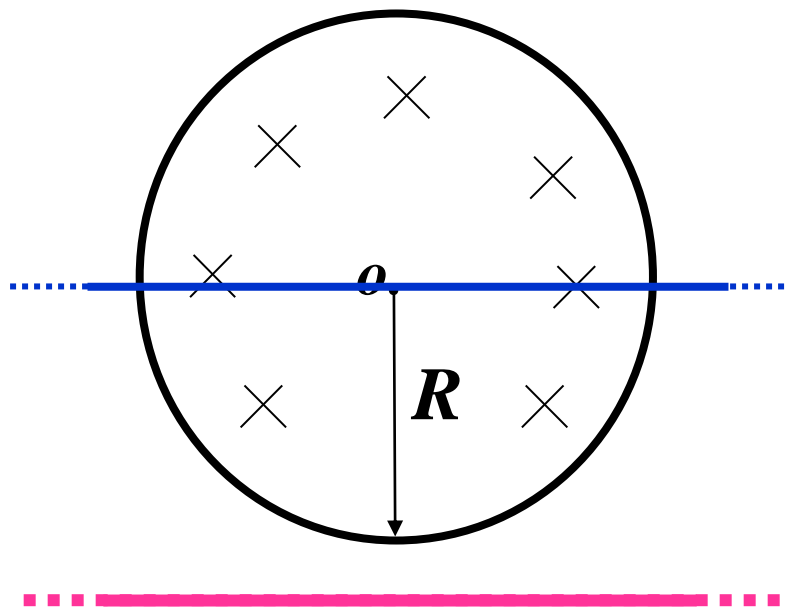
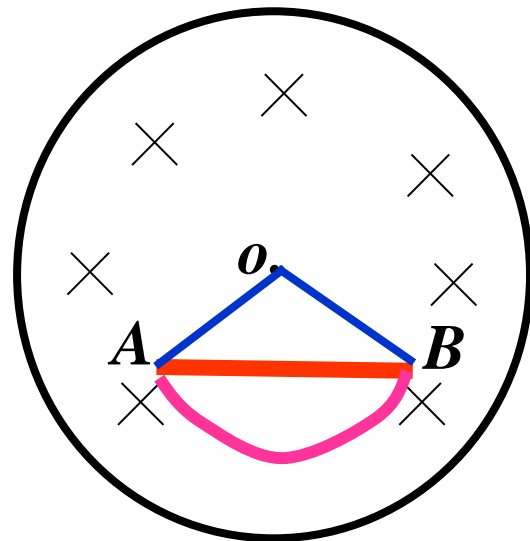
连接 oA 、 oB 组成回路,由

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d(Bs)}{dt} = -s \frac{dB}{dt}$$

得知。

(2)如图所示的长直导线中的感生电动势：

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{dB}{dt}$$



§ 4 自感和互感

一、自感

1、自感现象

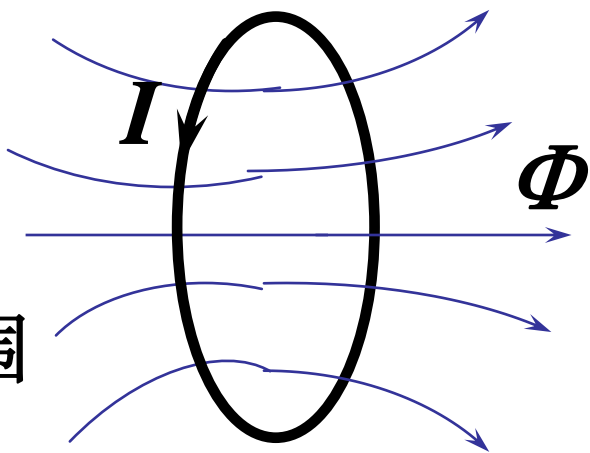
由于回路自身电流、回路的形状、或回路周围的磁介质发生变化时，穿过该回路自身的磁通量随之改变，从而在回路中产生感应电动势的现象。

$$\Psi \propto I \quad \underline{\Psi} = LI$$

磁通链数

L ——自感系数，单位：亨利（ H ）

与回路的大小、形状、匝数及周围的介质有关



2、自感系数与自感电动势

1) L 的意义: 若 $I = 1 \text{ A}$, 则 $L = \Psi$

自感系数在数值上等于回路中通过单位电流时, 通过自身回路所包围面积的磁通链数。

L 的计算 $\Psi = LI \rightarrow L = \frac{\Psi}{I}$

2) 自感电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$$

若回路几何形状、尺寸不变, 周围介质的磁导率不变

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

$$L = \left| -\frac{\varepsilon_{iL}}{dI/dt} \right|$$

讨论:

1. 若： $\frac{dI}{dt} < 0$ 则： $\varepsilon_L > 0$, ε_L 与 I 方向相同

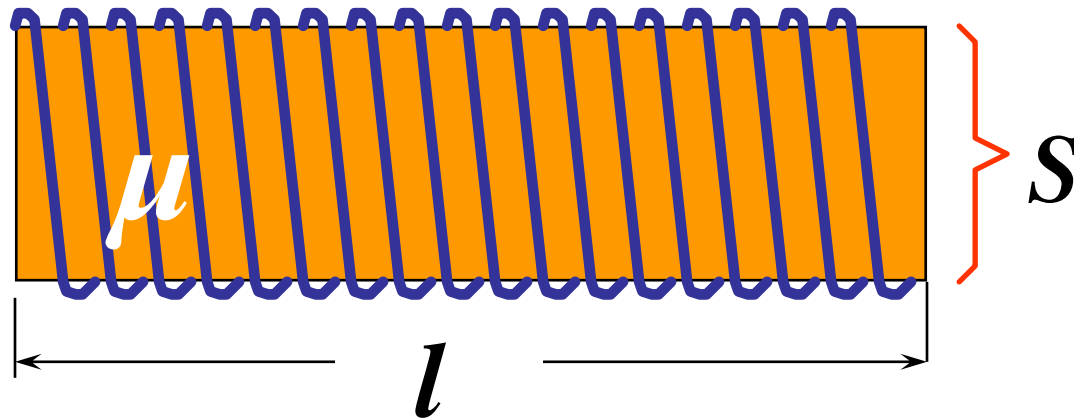
若： $\frac{dI}{dt} > 0$ 则： $\varepsilon_L < 0$, ε_L 与 I 方向相反

2. L 的存在总是阻碍电流的变化，所以自感电动势是反抗电流的变化，而不是反抗电流本身。

——电磁惯性

例1 、 试计算长直螺线管的自感。

已知： 匝数 N ,横截面积 S ,长度 l ,磁导率 μ



自感的计算步骤:

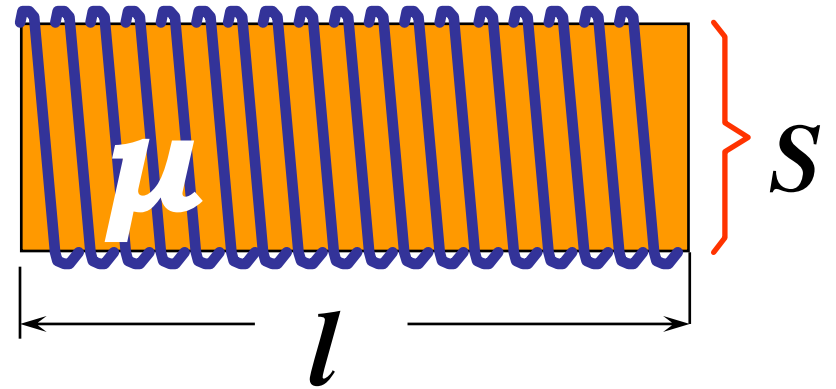
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Psi = N\Phi = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \Psi = LI$$

$$\vec{H} \longrightarrow \vec{B} \longrightarrow \Psi \longrightarrow L$$

$$\vec{H} \longrightarrow \vec{B} \longrightarrow \psi \longrightarrow L$$

$$H = nI = \frac{N}{l} I$$

$$B = \mu H = \frac{\mu N}{l} I$$



$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS = \frac{\mu NI}{l} S$$

$$\psi = N\Phi = \frac{\mu N^2 I}{l} S$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu N^2}{l^2} lS = \mu n^2 V$$

例2 求一无限长同轴传输线单位长度的自感.

已知: R_1 、 R_2

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

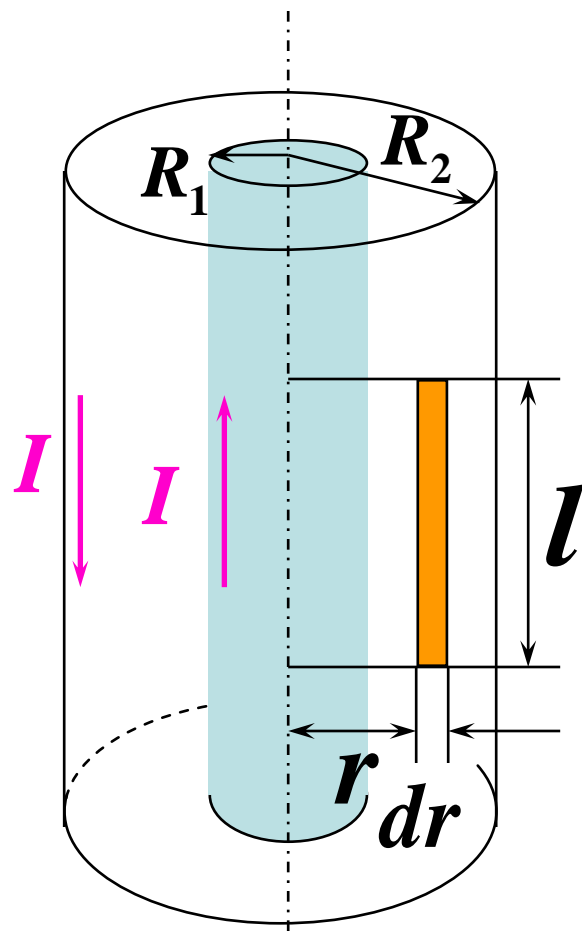
$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu I l}{2\pi r} dr$$

$$\Phi = \frac{\mu I l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$L = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

单位长度的自感为:

$$L_o = \frac{L}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$



例3 求一环形螺线管的自感。已知： R_1 、 R_2 、 h 、 N

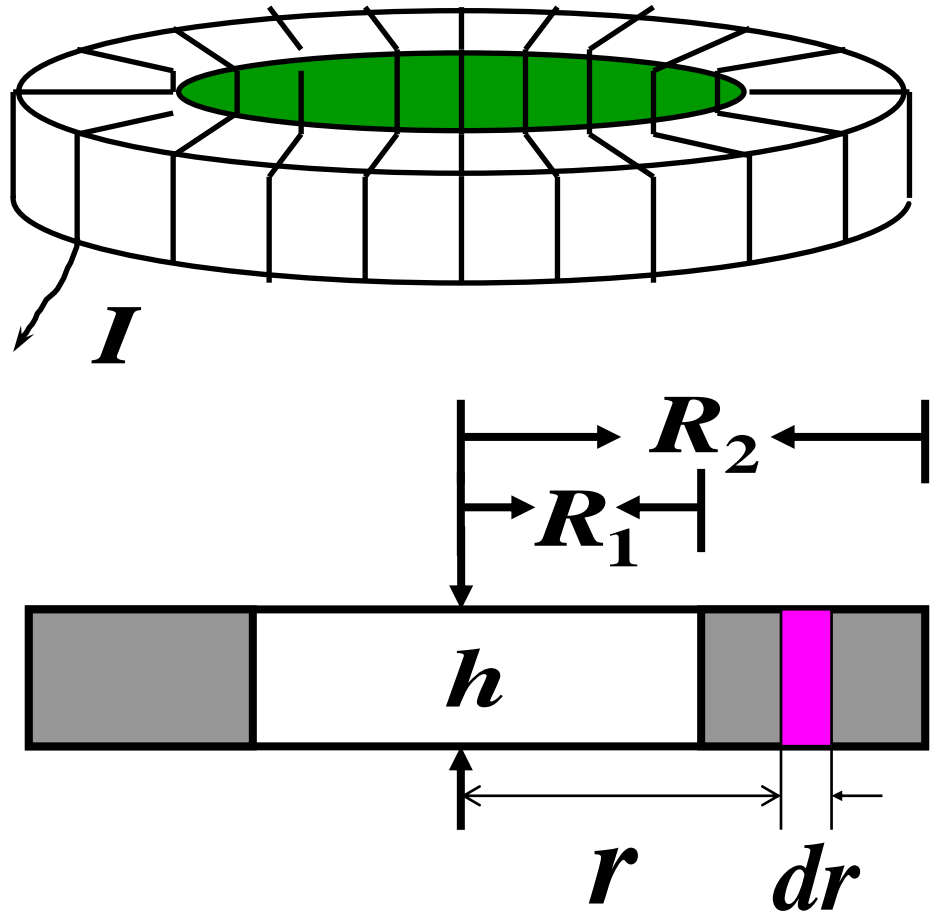
$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

$$H \cdot 2\pi r = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

$$B = \frac{\mu NI}{2\pi r}$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu NI}{2\pi r} h dr$$



$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu NI}{2\pi r} h dr$$

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu NIh}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu NIh}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

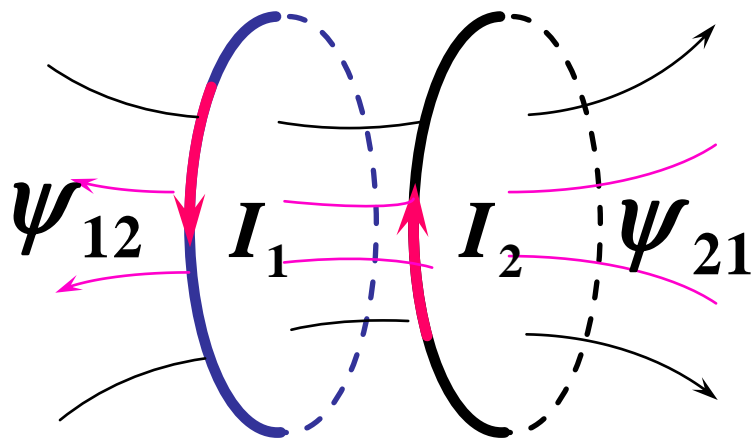
$$\psi = N\Phi = \frac{\mu N^2 Ih}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

二、互感

1、互感现象

因两个载流线圈中电流变化而在对方线圈中激起感应电动势的现象称为互感应现象。



2、互感系数与互感电动势

1) 互感系数(M)

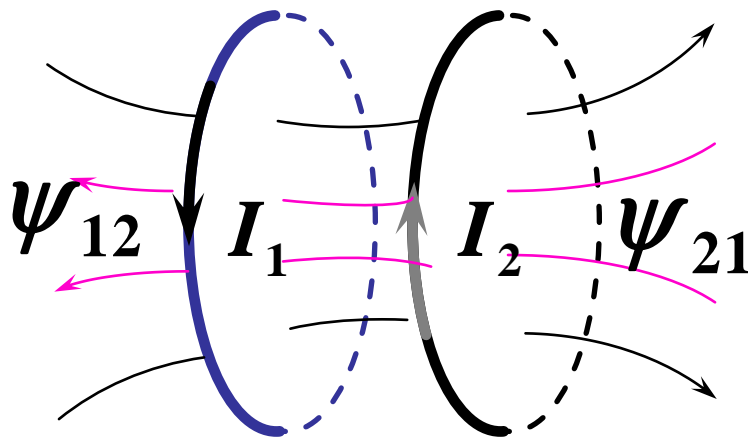
若两回路几何形状、尺寸及相对位置不变，周围无铁磁性物质。实验指出：

$$\Psi_{21} = M_{21}I_1 \quad \Psi_{12} = M_{12}I_2$$

实验和理论都可以证明：

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$M = \frac{\Psi_{m21}}{I_1} = \frac{\Psi_{m12}}{I_2}$$



2) 互感电动势：

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt} \quad \varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

- 互感系数和两回路的几何形状、尺寸，它们的相对位置，以及周围介质的磁导率有关。
- 互感系数的大小反映了两个线圈磁场的相互影响程度。

$$M = \left| -\frac{\varepsilon_{i12}}{dI_2/dt} \right| = \left| -\frac{\varepsilon_{i21}}{dI_1/dt} \right|$$

互感系数的物理意义

在 $\varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$ 中

若 $\frac{dI_2}{dt} = 1$ 则有 $|\varepsilon_{12}| = |M|$

互感系数在数值上等于当第二个回路电流变化率为每秒一安培时，在第一个回路所产生的互感电动势的大小。

例1 有两个直长螺线管，它们绕在同一个圆柱面上。

已知： μ_0 、 N_1 、 N_2 、 l 、 S 求：互感系数

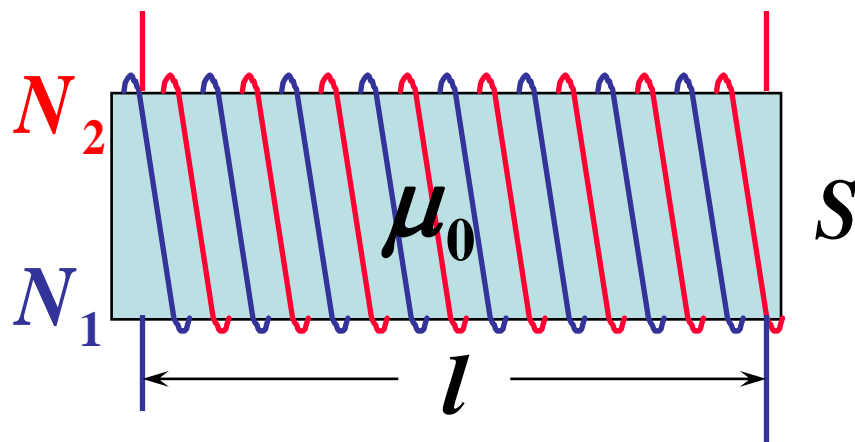
$$H_2 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \psi_{12}$$

$$H_2 = n_2 I_2 = \frac{N_2}{l} I_2$$

$$B_2 = \mu_0 H_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l} I_2$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_2 S = \mu_0 \frac{N_2}{l} I_2 S$$

$$\psi_{12} = N_1 \Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_2 S}{l}$$



$$M = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l^2} l S$$

$$M = \mu_0 n_1 n_2 V$$

$$\therefore L_1 = \mu_0 n_1^2 V \quad L_2 = \mu_0 n_2^2 V$$

$$\therefore M = \sqrt{L_1 L_2}$$

在此例中，线圈1的磁通全部通过线圈2，称为无漏磁。
在一般情况下

$$M = K \sqrt{L_1 L_2}$$

称 K 为耦合系数 $0 \leq K \leq 1$

耦合系数的大小反映了两个回路磁场耦合松紧的程度。由于在一般情况下都有漏磁通，所以耦合系数小于一。

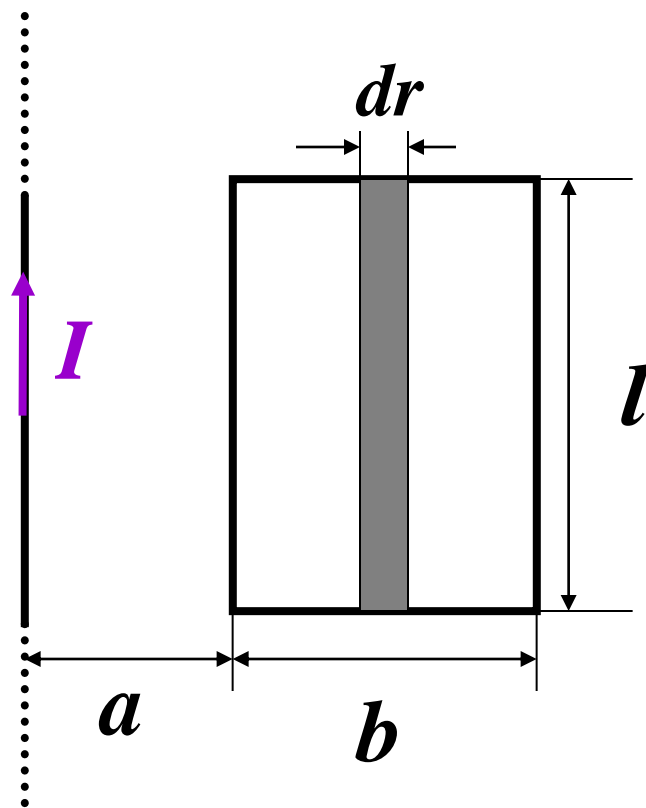
例2. 如图所示, 在磁导率为 μ 的均匀无限大磁介质中, 一无限长直载流导线与矩形线圈一边相距为 a , 线圈共 N 匝, 其尺寸见图示, 求它们的互感系数.

解: 设直导线中通有自下而上的电流 I , 它通过矩形线圈的磁通链数为

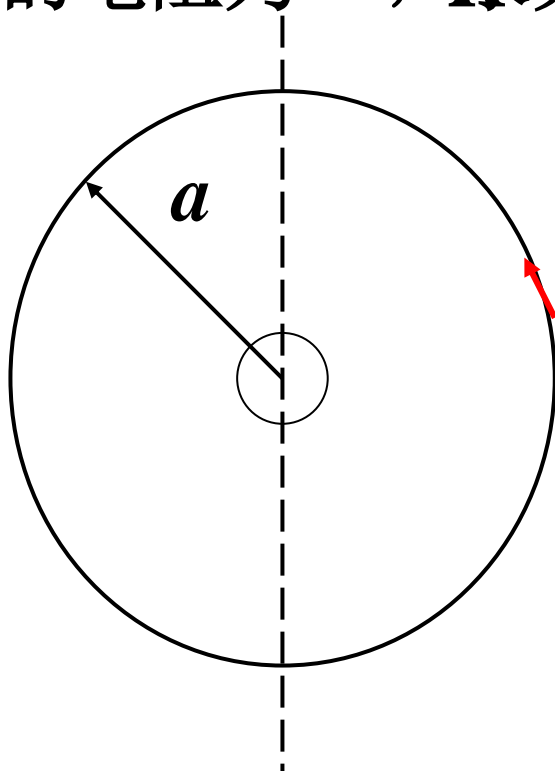
$$\begin{aligned}\psi &= N \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= N \int_a^{a+b} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu N I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}\end{aligned}$$

互感为 $M = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu N l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$

互感系数仅取决于两回路的形状, 相对位置, 磁介质的磁导率.



例3 如图所示，一半径为 r 的很小的金属环，在初始时刻与一半径为 a ($a \gg r$) 的大金属圆环共面且同心。在大圆环中通以恒定的电流 I ，方向如图，如果小圆环以角速度 ω 绕其任一方向的直径转动，并设小圆环的电阻为 R ，求大环中的感应电动势 \mathcal{E}_i 。



解：小环在大环的磁场中转动

$$I \rightarrow \mathcal{E}_{i1} \rightarrow I_{i1} \rightarrow B_i(t) \rightarrow \text{大环中有 } \mathcal{E}_i$$

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \pi r^2 \cos \omega t \\ &= \frac{\mu_0 I}{2a} \pi r^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{i1} = \frac{\mu_0 I \pi r^2}{2a} \omega \sin \omega t$$

$$I_{i1} = \frac{\mu_0 I \pi r^2}{2aR} \omega \sin \omega t$$

$$\text{又} \because \varepsilon_i = -M \frac{dI}{dt}$$

大环对小环的互感为

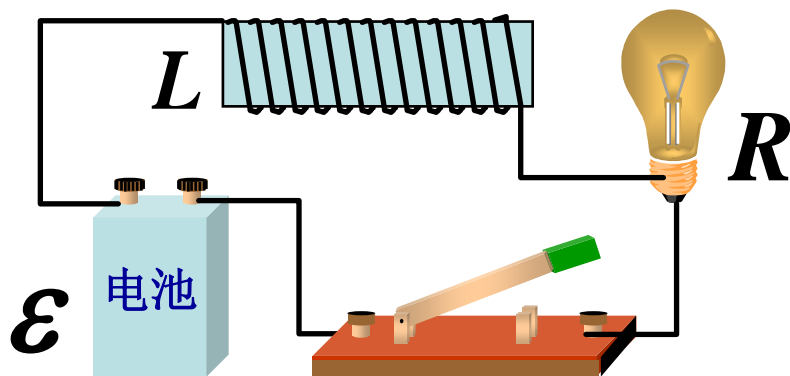
$$M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2a} \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} \therefore \varepsilon_i &= -\frac{\mu_0 \pi r^2}{2a} \cos \omega t \frac{dI_{i1}}{dt} \\ &= -\frac{\mu_0 \pi r^2}{2a} \cos \omega t \frac{\mu_0 I \pi r^2}{2aR} \omega^2 \cos \omega t \\ &= -\frac{\mu_0^2 I}{4a^2 R} (\pi r^2 \omega \cos \omega t)^2 \end{aligned}$$

§ 5 磁场能量

一、自感磁能

考察在开关合上后的一段时间内，电路中的电流增长过程：



由全电路欧姆定律 $-\mathcal{E} + L \frac{di}{dt} + iR = 0$

$$\int_0^\infty i \mathcal{E} dt = \int_0^I L \frac{di}{dt} i dt + \int_0^t i R i dt = \frac{1}{2} L I^2 + \int_0^\infty i^2 R dt$$

电源所作的功

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

电源克服自感电动势所做的功

电阻上的热损耗

计算自感系数可归纳为三种方法

1. 静态法: $\Psi = LI$

2. 动态法: $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$

3. 能量法: $W = \frac{1}{2} LI^2$

二、磁场的能量

螺线管特例: $L = \mu n^2 V$ $H = nI$ $B = \mu nI$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = \frac{1}{2} B H V$$

磁场能量密度: 单位体积中储存的磁场能量 w_m

$$w_m = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} B H$$

任意磁场 $dW_m = w_m dV = \frac{1}{2} B H dV$

$$W = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2} B H dV$$

例 如图. 求同轴传输线之磁能及自感系数

解: $H = \frac{I}{2\pi r}$ $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$ $dV = 2\pi r l dr$

$$W = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2} \mu H^2 dV$$

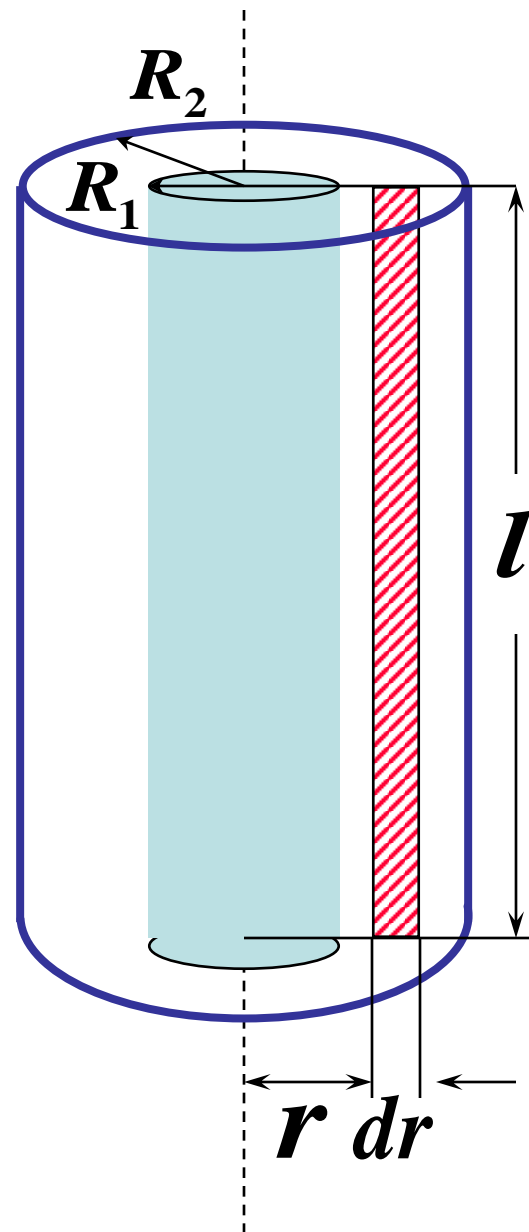
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \mu \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi r l dr$$

$$= \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\frac{1}{2} L I^2 = W = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

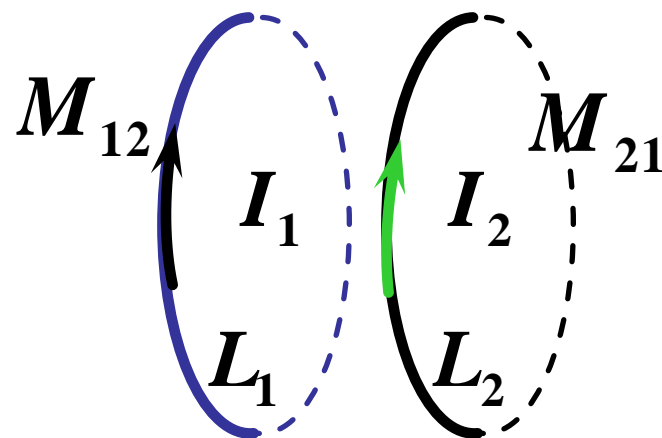
可得同轴电缆
的自感系数为

$$L = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$



三、互感磁能

将两相邻线圈分别与电源
相连，在通电过程中



电源所做功

线圈中产
生焦耳热

反抗自感
电动势做功

反抗互感
电动势做功

互感磁能

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2}_{\text{自感磁能}} + \underbrace{M I_1 I_2}_{\text{互感磁能}}$$

自感磁能

互感磁能

§ 6 麦克斯韦电磁场理论

麦克斯韦 (James Clerk Maxwell 1831----1879)

麦克斯韦是19世纪英国伟大的物理学家、数学家。

麦克斯韦主要从事电磁理论、分子物理学、统计物理学、光学、力学、弹性理论方面的研究。尤其是他建立的电磁场理论，将电学、磁学、光学统一起来，是19世纪物理学发展的最光辉的成果，是科学史上最伟大的综合之一。



一、位移电流

1、恒定电、磁场的性质

静电场的性质：

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0 \quad \text{——说明静电场是有源场}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{——说明静电场是保守力场}$$

恒定磁场的性质：

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{——说明恒定磁场是无源场}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \quad \text{——说明恒定磁场是非保守力场}$$

2、变化的电磁场

对于变化的磁场，麦克斯韦提出了“有旋电场”假说，根据法拉第电磁感应定律可以得到普遍情况下电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

另外，当时的理论和实验都表明电场的高斯定理和磁场的高斯定理在变化的电、磁场中依然成立。因此，问题的焦点就集中在磁场的安培环路定理在变化的电、磁场中是否还适用？如不适用应如何修正。

恒定磁场中，安培环路定理可以写成：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_L I_0$$

式中 $\sum I_0$ 是穿过以 L 回路为边界的任意曲面 S 的传导电流。

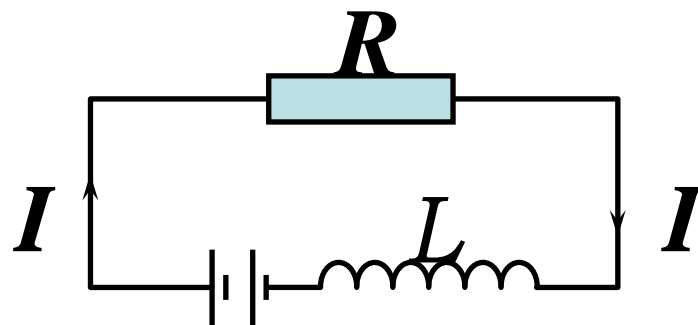
问题

在电流非稳恒状态下,安培环路定理是否正确？

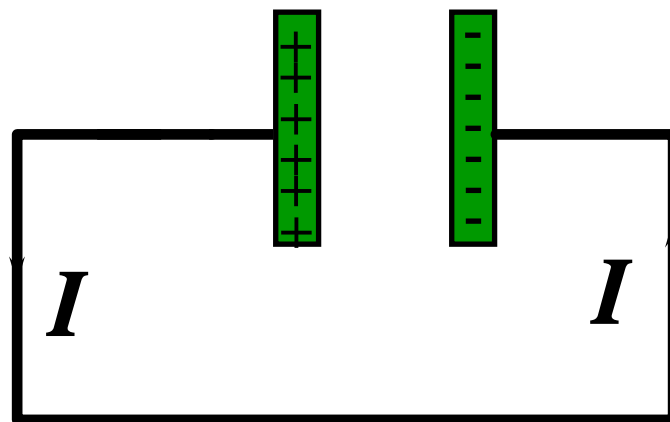
3、位移电流

☀ 电流的连续性问题:

包含电阻、电感线圈
的电路,电流是连续的.



包含有电容的电
流是否连续?



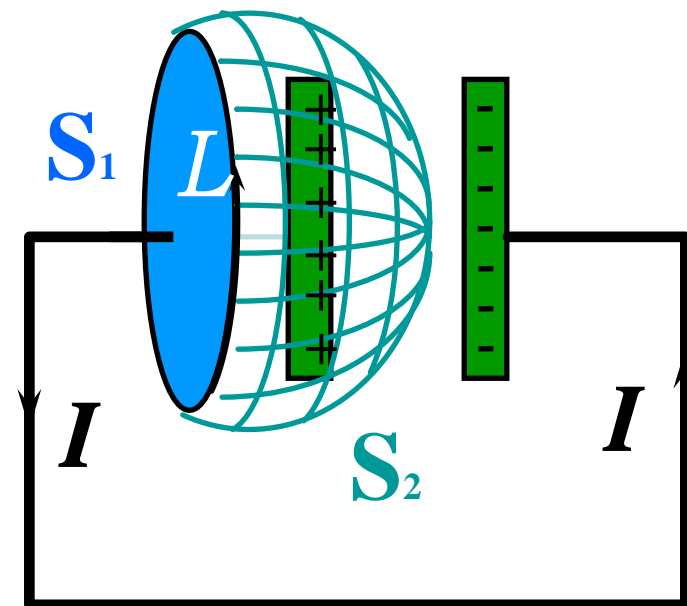
对L所围成的 S_1 面

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I$$

对L所围成的 S_2 面

矛盾

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

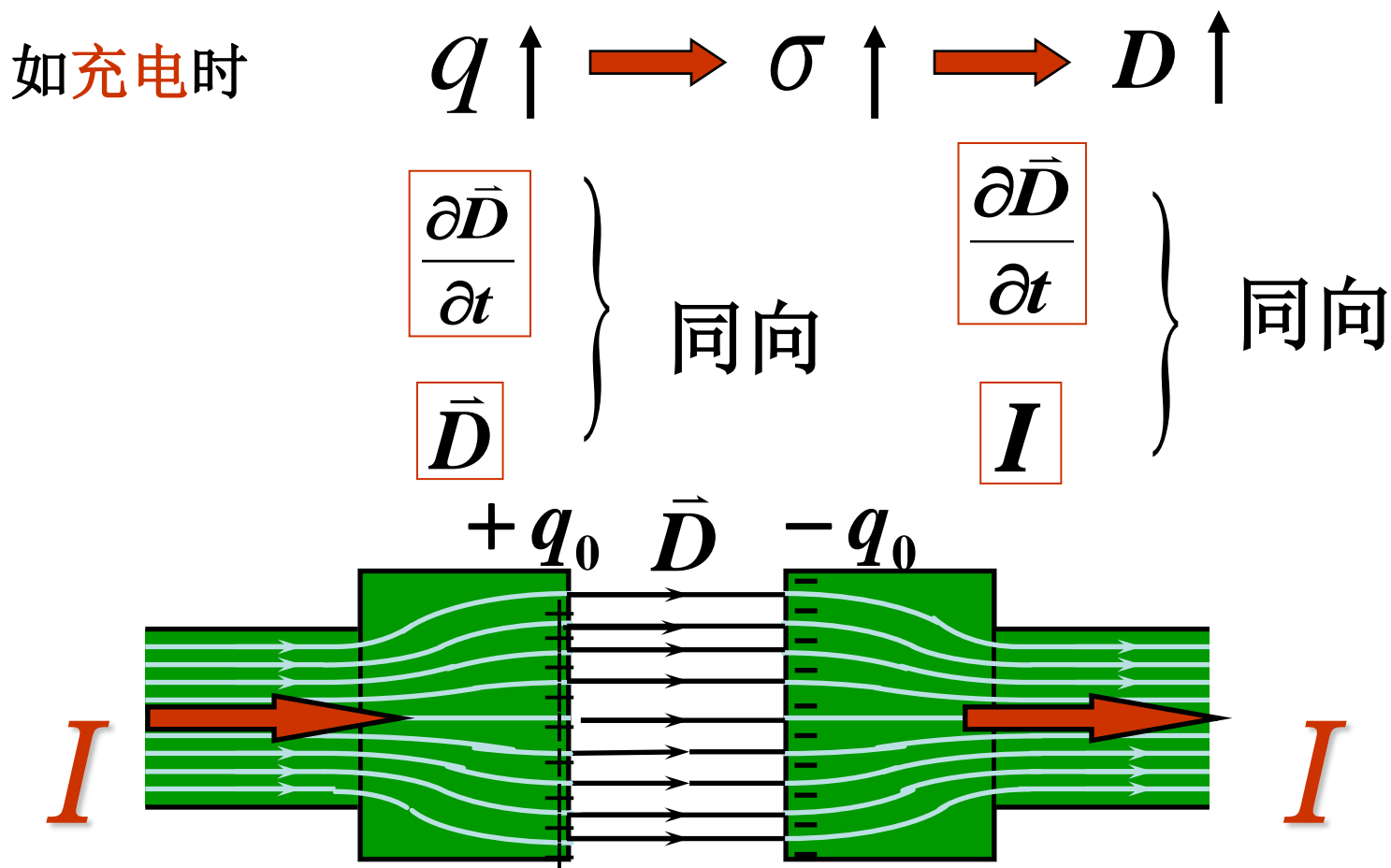


显然， H 的环流不再是唯一确定的了。

这说明安培环路定律在非恒定场中须加以修正。

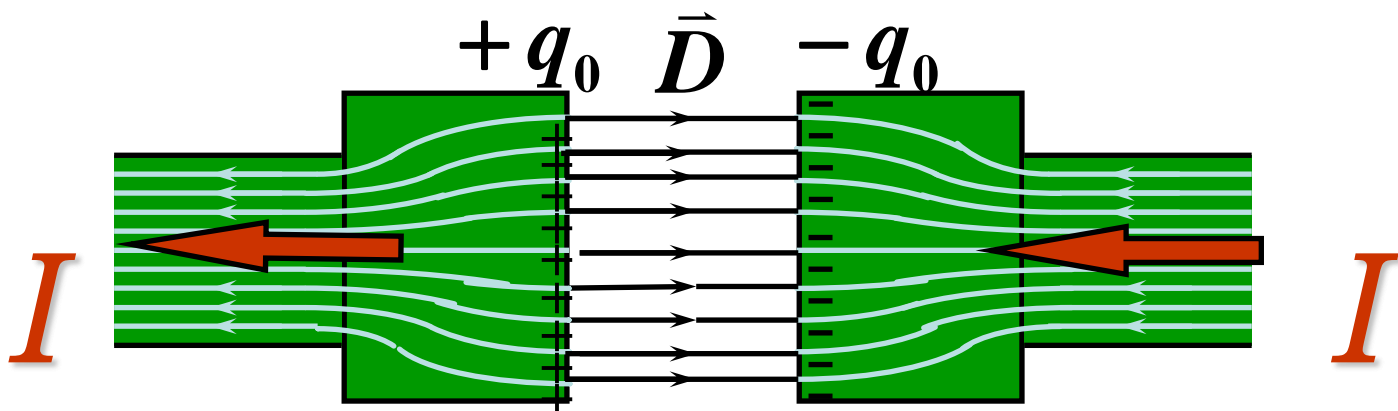
实验分析

电容器充放电时传导电流和极板上电荷、极板间电场存在什么样的关系呢？



如放电时 $q \downarrow \longrightarrow \sigma \downarrow \longrightarrow D \downarrow$

$$\left. \begin{array}{c} \boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \\ \boxed{\vec{D}} \end{array} \right\} \text{反向} \quad \left. \begin{array}{c} \boxed{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \\ \boxed{\mathbf{I}} \end{array} \right\} \text{同向}$$

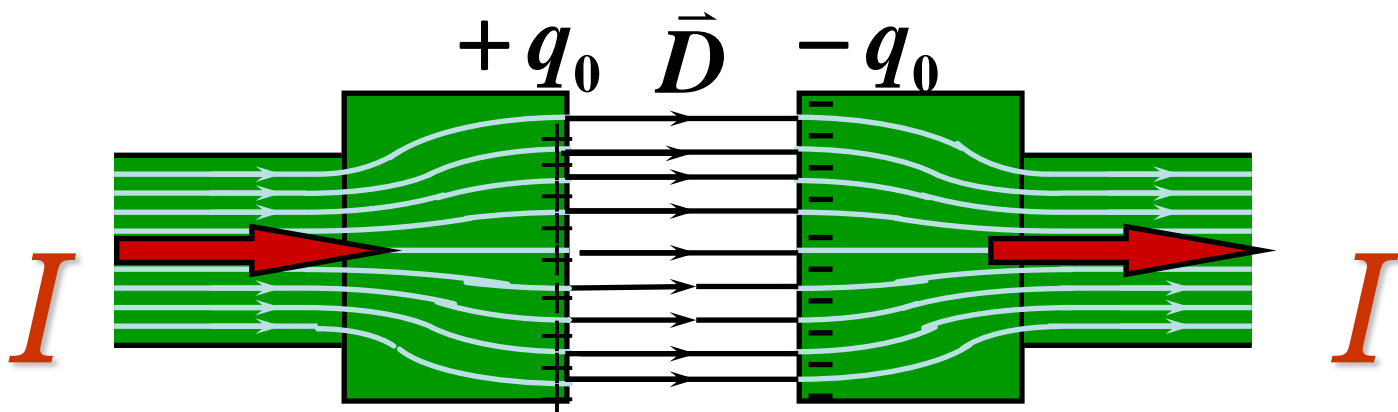


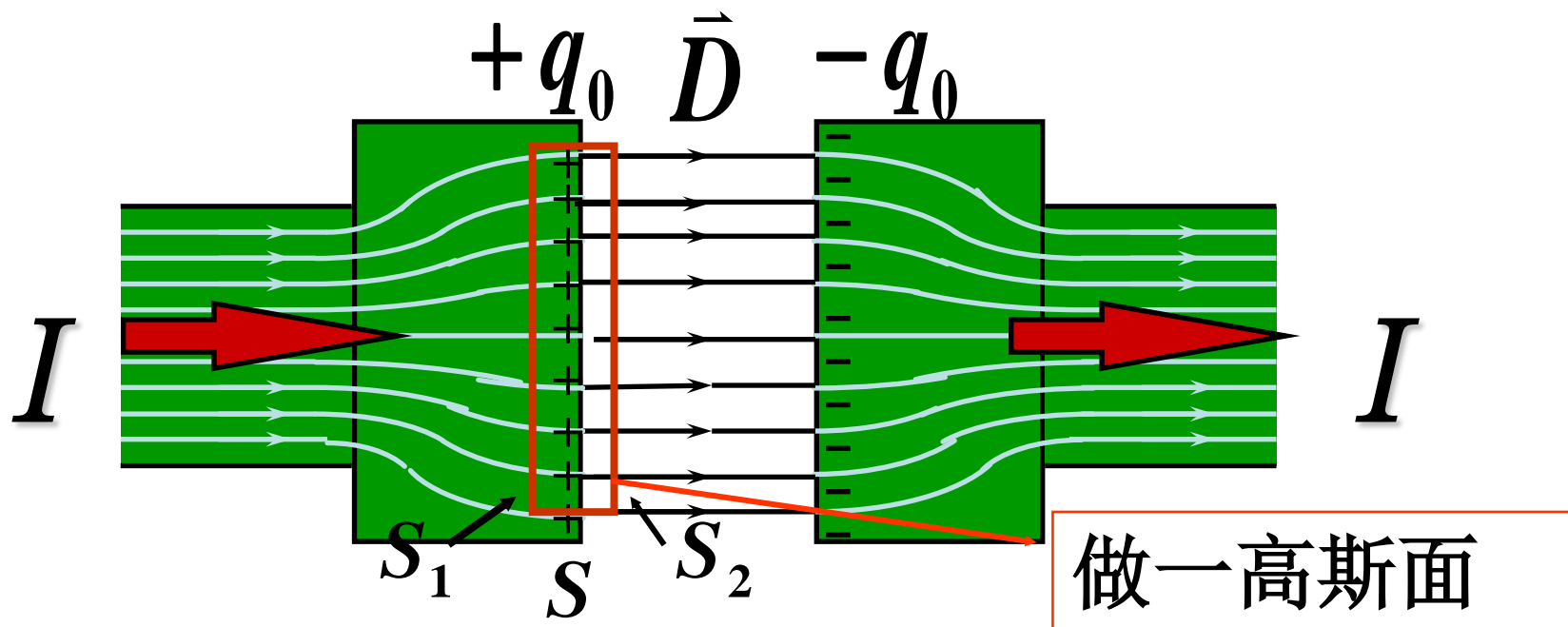
结论:

充电时，极板间变化电场 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的方向和传导电流同向。

放电时，极板间变化电场 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的方向仍和传导电流同向。

通过演示现象观察可知：回路中的传导电流和极板间的电位移对时间的变化率有密切的关系！





由高斯定理:

$$q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

即 $q = \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Phi_D$

$$q = \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Phi_D$$

$$\text{则 } I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{S_1+S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

式中： I —— 传导电流

通过对传导电流和极板间 \vec{D} 的通量之间关系的推导，
可以得出一个重要的结论：

在非恒定的情况下， $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 的地位与电流密度 \vec{j} 相当。

若把最右端 **电通量的时间变化率** 看作为一种电流，那么电路就连续了。麦克斯韦把这种电流称为 **位移电流**。

麦克斯韦假设：变化的电场象传导电流一样能产生磁场,从产生磁场的角度看，变化的电场可以等效为一种电流.

定义
$$\begin{cases} I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j}_d \cdot d\vec{S} \\ \vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (\text{位移电流密度}) \end{cases}$$

通过电场中某截面的位移电流强度 I_d 等于通过该截面的电位移通量对时间的变化率。

电场中某点位移电流密度矢量 \vec{j}_d 等于该点电位移矢量对时间的变化率。

二、全电流和全电流定律

1、全电流

全电流 通过某一截面的全电流是通过这一截面的传导电流、运流电流和位移电流的代数和。

$$I_s = I + \frac{d\Phi_D}{dt}$$

在任一时刻,电路中的全电流总是连续的.

在非稳恒的电路中,安培环路定律仍然成立.

2、全电流定律

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I + I_d = \int_s \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I + I_d = \int_s \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

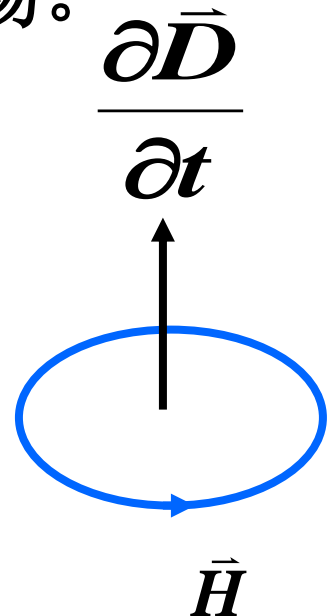
位移电流的实质

麦克斯韦位移电流假说的实质在于，

它指出不仅传导电流可以在空间激发磁场，
位移电流同样可以在空间激发磁场。

位移电流假说的核心：
变化的电场可以激发磁场。

而且，变化的电场和它激发的磁场在方向上的右手螺旋关系。



麦克斯韦的有旋电场假说和位移电流假说
为建立统一的电磁场理论奠定了理论基础。

位移电流与传导电流的比较：

传导电流

自由电荷的定向移动

通过导体产生焦耳热

只能存在于导体中

位移电流

电场的变化

真空中无热效应

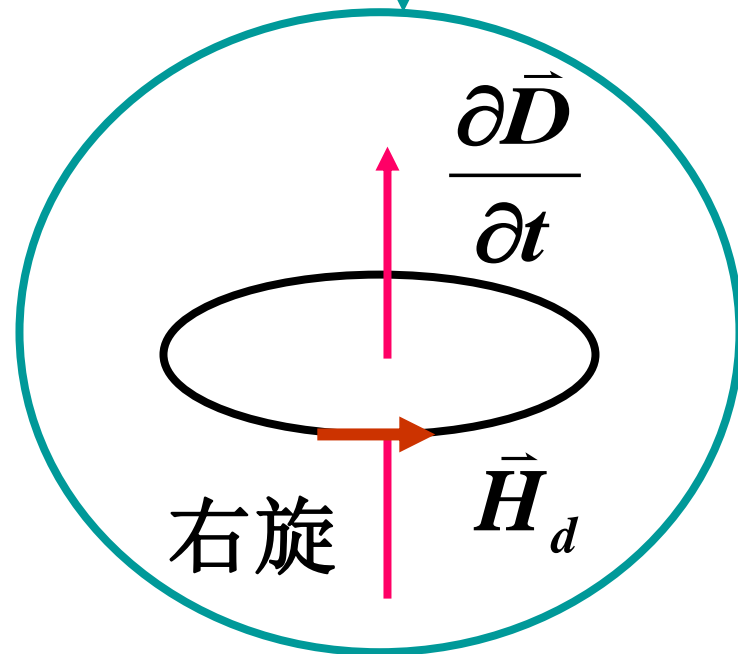
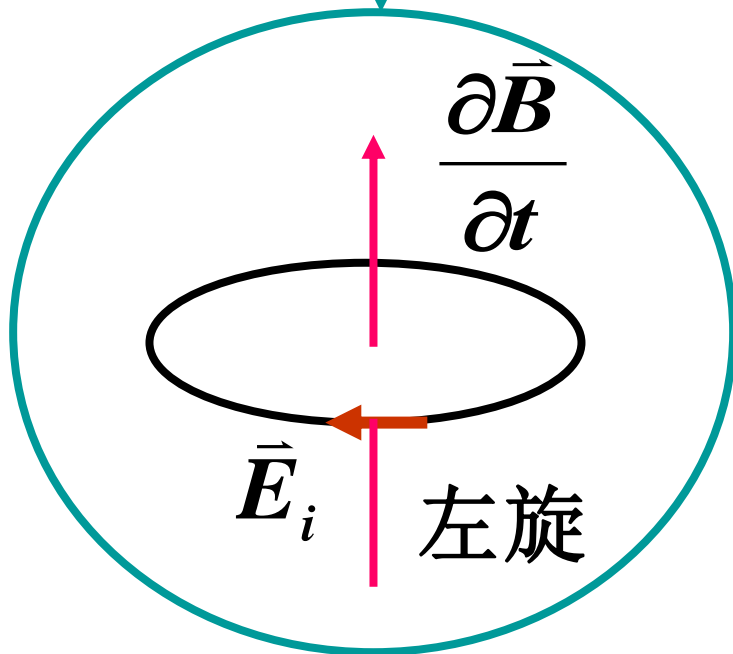
可以存在于真空、
导体、电介质中

传导电流和位移电流方向相同，
在激发磁场上是等效。

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}_d \cdot d\vec{l} = \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

(H_d 为 I_d 产生的涡旋磁场)



对称美

例、半径为 R , 相距 $l(l \ll R)$ 的圆形空气平板电容器, 两端加上交变电压 $U = U_0 \sin \omega t$, 求电容器极板间的:

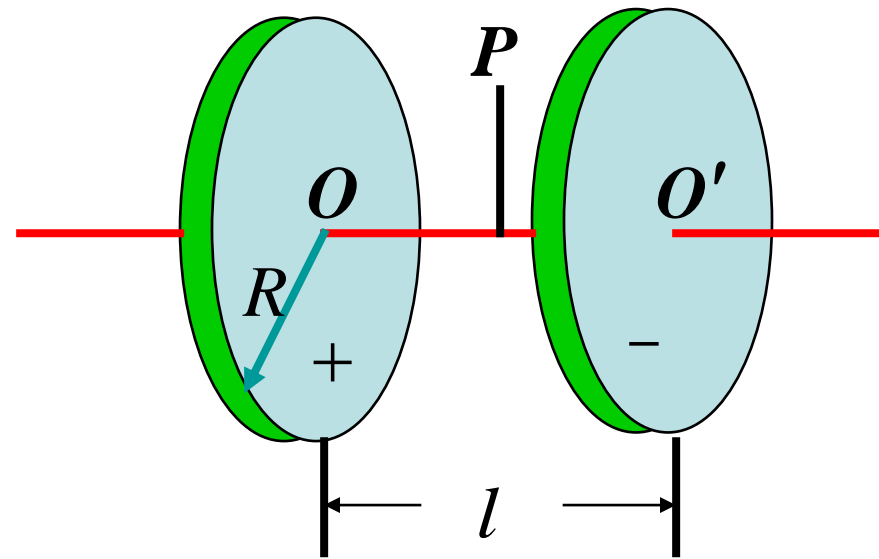
- (1) 位移电流; (2) 位移电流密度的大小;
- (3) 位移电流激发的磁场分布 $B(r)$, r 为圆板的中心距离。

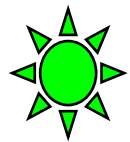
解 (1) 由于 $l \ll R$, 故平板间可作匀强电场处理,

$$E = \frac{U}{l}$$

根据位移电流的定义

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d(DS)}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi R^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{l} U_0 \omega \cos \omega t$$





另解

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

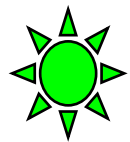
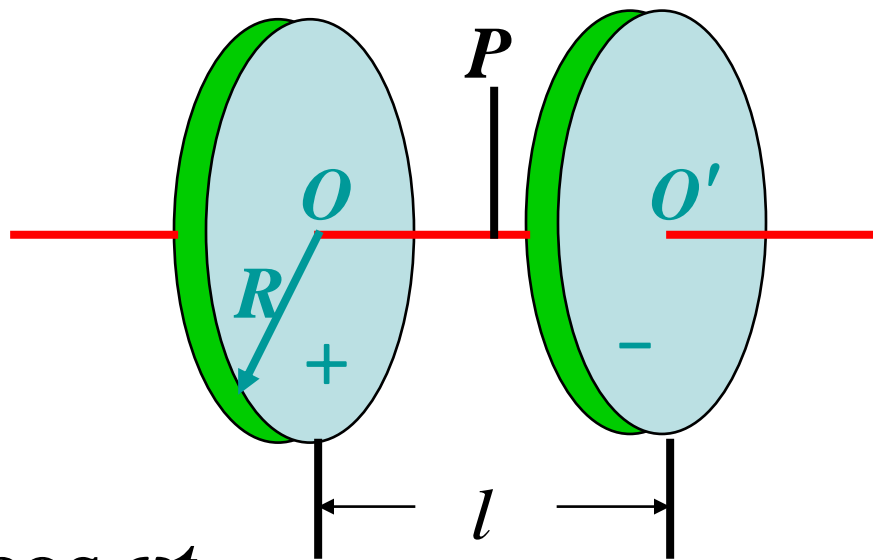
平行板电容器的电容 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{l}$

代入上式,可得同样结果.

(2)由位移电流密度的定义

$$j_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\epsilon_0 U_0}{l} \omega \cos \omega t$$



或者 $J_d = I_d / \pi R^2$

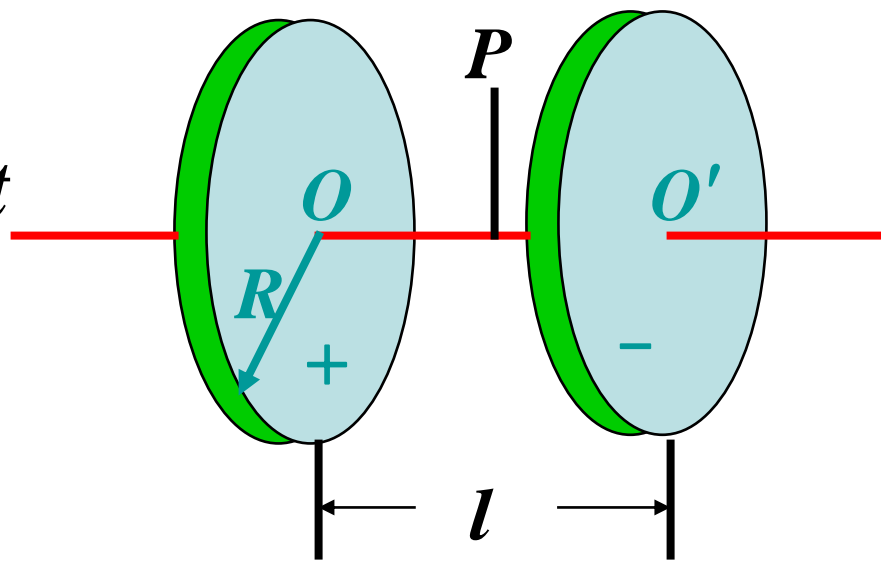
(3) 因为电容器内 $\Sigma \mathbf{I} = 0$, 且磁场分布应具有轴对称性, 由全电流定律得

$$\boxed{r < R} \quad \oint_{L_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_d \cdot d\vec{S} = j_d \pi r^2$$

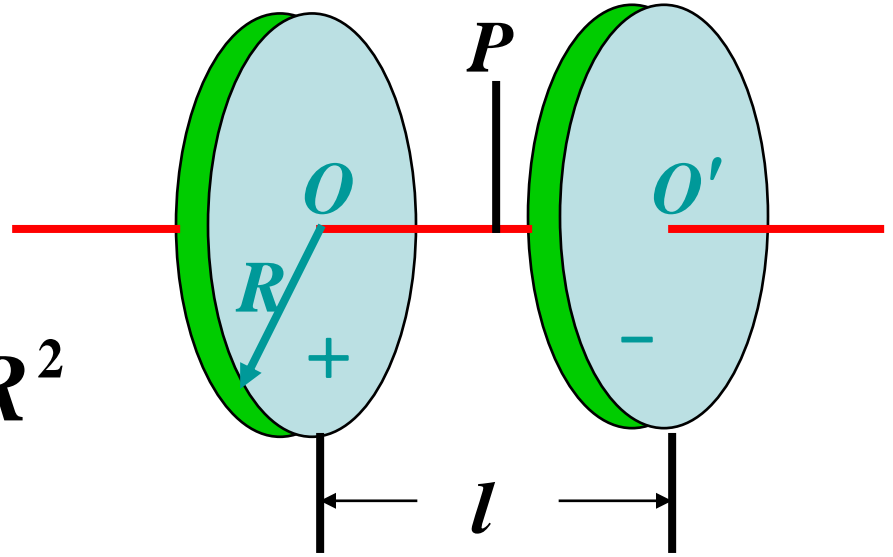
$$H_1 2\pi r = \frac{\varepsilon_0 U_0}{l} \pi r^2 \omega \cos \omega t$$

$$H_1 = \left(\frac{\varepsilon_0 U_0}{2l} \omega \cos \omega t \right) r$$

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 U_0}{2l} \omega \cos \omega t \right) r = \left(\frac{U_0 \omega}{2lc^2} \cos \omega t \right) r$$



$$r > R$$



$$\oint_{L_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = I_d = J_d \pi R^2$$

$$H_2 = \frac{I_d}{2\pi r} = \left(\frac{\varepsilon_0 R^2 U_0}{2l} \omega \cos \omega t \right) \frac{1}{r}$$

$$B_2 = \mu_0 H_2 = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 U_0}{2l} \omega \cos \omega t \right) \frac{1}{r} = \left(\frac{R^2 U_0 \omega}{2lc^2} \cos \omega t \right) \frac{1}{r}$$

二、麦克斯韦方程组

静电场

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

稳恒磁场

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

E 涡

变

I_d

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

麦克斯韦 在系统地总结了前人电磁学理论的基础上，提出了**涡旋电场**和**位移电流**假说，这是他对电磁理论最伟大的贡献。

这两个假说的核心思想是：

变化的磁场可以激发涡旋电场；

变化的电场可以激发涡旋磁场。

从而在人类科学史上第一次揭示了电场和磁场的内在联系，建立了完整的电磁场理论体系，而这个理论体系的核心就是麦克斯韦方程组。

麦克斯韦认为静电场的高斯定理和磁场的高斯定理也适用于一般电磁场.所以,可以将电磁场的基本规律写成麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$$

麦克斯韦方程组的积分形式反映了空间某区域的 D 、 E 、 B 、 H 、 I 、 q 间的关系。

方程组的微分形式反映了空间某点 D 、 E 、 B 、 H 、 j 、 ρ 间的关系。

由麦克斯韦方程组的微分形式可以证明电磁波的存在。

对于各向同性介质，有

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

麦克斯韦方程组物理意义：

- 1、通过任意闭合面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷的代数和。
- 2、电场强度沿任意闭曲线的线积分等于以该曲线为边界的任意曲面的磁通量对时间变化量的负值。
- 3、通过任意闭合面的磁通量恒等于零。
- 4、稳恒磁场沿任意闭合曲线的线积分等于穿过以该曲线为边界的曲面的全电流。

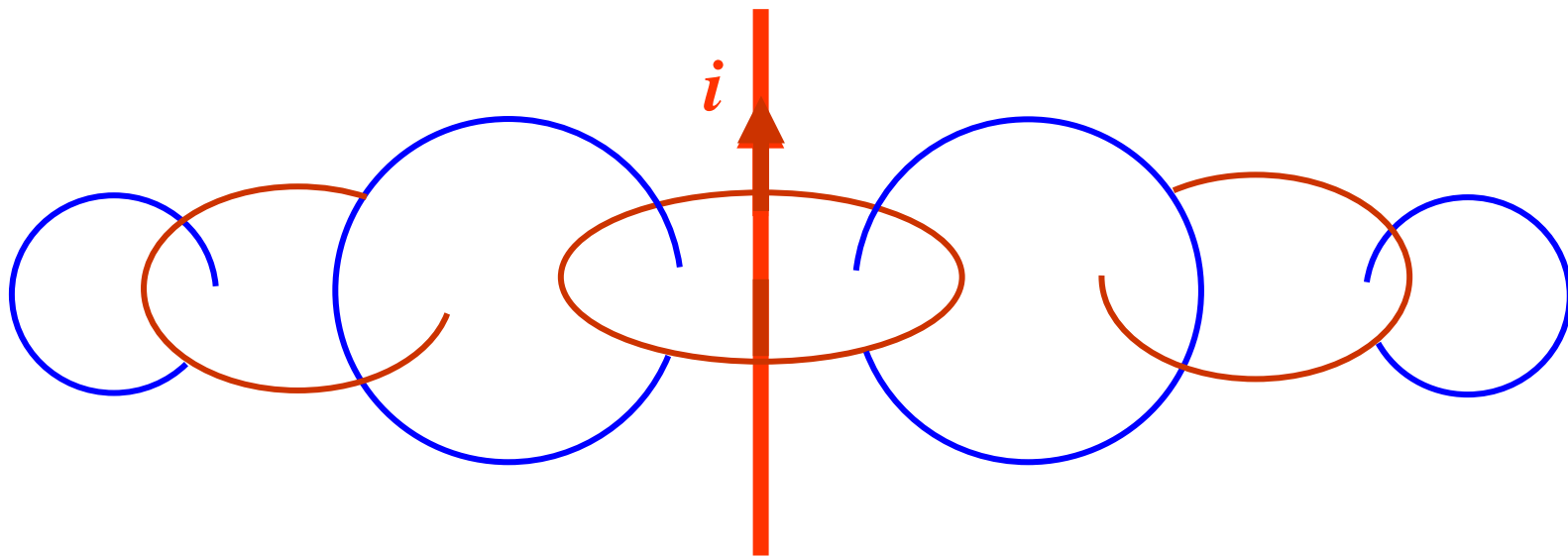
麦克斯韦方程组的意义：

(1) 概括、总结了一切宏观电磁现象的规律。

(2) 预见了电磁波的存在

变化的磁场激发电场 \longleftrightarrow 变化的电场激发磁场

电磁场这样交替激发，就可以离开场源而在空间作为一个整体传播开去，从而形成电磁波。



麦克斯韦方程组的微分形式

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{某点的 } \vec{D}、\vec{B} \text{ 的散度} \\ &\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{某点的 } \vec{D}、\vec{B} \text{ 的旋度} \end{aligned}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$