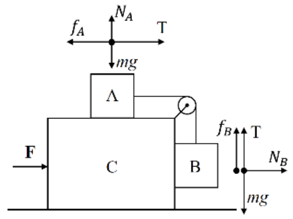
北京邮电大学 2018-2019 学年第二学期

《大学物理（上）》期中考试答案和评分标准

一．解：F 较小时，B 有下落趋势，故 A 受到摩擦力向左，B 受到摩擦力向上

设滑块共同加速度为 a，受力分析可得



$$T - f_A = ma \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

$$T + f_B = mg \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

$$f_A \le \mu N_A = \mu mg \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

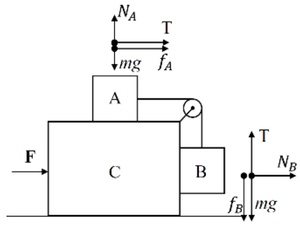
$$f_B \le \mu N_B = \mu ma \qquad \cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore mg - ma = f_A + f_B \le \mu mg + \mu ma$$

可得 $a \ge \dfrac{1-\mu}{1+\mu} g$ ……1 分

F 较大时，A 有向左趋势，故 A 受到摩擦力向右，B 受到摩擦力向下

设滑块共同加速度为 a，受力分析可得



$$T + f_A = ma \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

$$T = mg + f_B \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore ma - mg = f_A + f_B \le \mu mg + \mu ma$$

可得 $a \le \dfrac{1+\mu}{1-\mu} g$ ……1 分

$\because \quad F = (M+2m)a$

$\therefore$ F 的大小范围为 $\dfrac{1-\mu}{1+\mu}(M+2m)g \le F \le \dfrac{1+\mu}{1-\mu}(M+2m)g$ ……2 分

二．解：（1）由对称性知，质心 x 坐标为 0，只需求 y 坐标 ……5 分

设线圈线密度为 λ，则半圆弧质量 $m_1 = \lambda \cdot \pi R$，

取与 x 轴呈 θ 角处对应圆心角为 $d\theta$ 的圆弧为微元

其质量 $dm = \lambda \cdot R d\theta$，其 y 坐标为 $R\sin\theta$，则半圆弧质心 y 坐标

$$y_{c1} = \frac{\int y \cdot dm}{m_1} = \frac{\int_0^R R\sin\theta \cdot \lambda \cdot R d\theta}{\lambda \cdot \pi R} = \frac{2R}{\pi} \qquad \cdots\cdots 5 \text{ 分}$$

直径质量为 $m_2 = \lambda \cdot 2R$，其质心 y 坐标 $y_{c2} = 0$

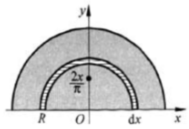
线圈质心 y 坐标为

$$y_c = \frac{m_1 y_{c1} + m_2 y_{c2}}{m_1 + m_1} = \frac{2R}{\pi + 2} \qquad \cdots\cdots 5 \text{ 分}$$

（2）解 1：取半径为 r，宽度为 dr 的半圆环为微元，其质量为

$$dm' = \sigma \cdot \pi r dr$$

由（1）可知，微元质心 y 坐标为 $y'_{c1} = \dfrac{2r}{\pi}$

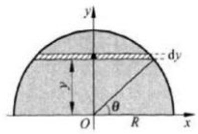


半圆盘质心 y 坐标为

$$y'_c = \frac{\int y'_{c1} \cdot dm'}{m'} = \frac{\int_0^R \frac{2r}{\pi} \cdot \sigma \cdot \pi r dr}{\sigma \cdot \pi R^2 / 2} = \frac{4R}{3\pi} \qquad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

解 2：设圆盘面密度为 σ，取距 x 轴距离为 y，宽为 dy 的长条形微元，其质量

$$dm' = \sigma \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}dy$$



半圆盘质心 y 坐标为

$$y_c' = \frac{\int y \cdot dm'}{m'} = \frac{\int_0^R y \cdot \sigma \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2}dy}{\sigma \cdot \pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi} \qquad \cdots\cdots 10$$

分

三. 解：(1) 以炮车与炮弹为系统，地面为参考系，水平方向动量守恒.

设炮车相对于地面的速率为 V_x，则有

$$-MV_x + m(u\cos\alpha - V_x) = 0 \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$V_x = mu\cos\alpha / (M + m) \qquad \cdots\cdots 1\text{ 分}$$

(2) 解法一：

以炮车与炮弹为系统，地面为参考系，系统水平方向不受外力，

根据质心运动定理，质心水平速度为 0 不变，即质心水平坐标不变，

设发炮前炮车和炮弹坐标分别为 x_1 和 x_2，发炮过程中两者位移为 d_1 和 d_2，则

$$Mx_1 + mx_2 = M\left(x_1 + d_1\right) + m\left(x_2 + d_2\right) \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$d_2 - d_1 = l\cos\alpha \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

解得 $\quad d_1 = -ml\cos\alpha / (M + m)$ $\qquad \cdots\cdots 2$ 分

炮车后退了 $ml\cos\alpha/(M+m)$ 的距离.

解法二：

以 $u(t)$表示发炮过程中任一时刻炮弹相对于炮身的速度，该瞬时炮车的速度为

$$V_x(t) = -mu(t)\cos\alpha/(M + m) \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

积分求炮车后退距离

$$\Delta x = \int_0^t V_x(t)\,\mathrm{d}t = -m/(M+m)\int_0^t u(t)\cos\alpha\,\mathrm{d}t \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$\Delta x = -ml\cos\alpha/(M + m) \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

即向后退了 $ml\cos\alpha/(M+m)$ 的距离.

(3) 由题意知，炮车所受阻力 $f = -kv$

根据牛顿第二定律，质点加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{M}v$$

移项，两边同时做定积分 $\int_{V_x}^{v}\frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{k}{M}dt$

可得速度随时间变化公式 $v = V_x e^{-\frac{k}{M}t}$ $\qquad \cdots\cdots 4$ 分

由于 $v = dx/dt$，可得

$$dx = V_x e^{-\frac{k}{M}t}dt$$

两边同时做定积分 $\int_0^x dx = \int_0^t V_x e^{-\frac{k}{M}t}dt$

可得距离随时间变化公式 $x = \frac{MV_x}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{M}t}dt\right)$ $\qquad \cdots\cdots 4$ 分

当 $t = \infty$ 时，炮车有最大移动距离

$$x_m = \frac{MV_x}{k} = \frac{Mmu\cos\alpha}{k(M+m)} \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

四．解：机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - GMm/R = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - GMm/(3R)$$ ……10 分

根据小球绕 O 角动量守恒

$$Rm\upsilon_0 = 3Rm\upsilon\sin\theta$$ ……10 分

可解得．$$\sin\theta = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{9\upsilon_0^2 - 12GM/R}}$$ ……5 分