第9章 真空中的稳恒磁场

§1 稳恒电流

§2 磁场 磁感应强度

§3 毕奥–萨法尔定律

§4 磁场的“高斯定理”和安培环路定理

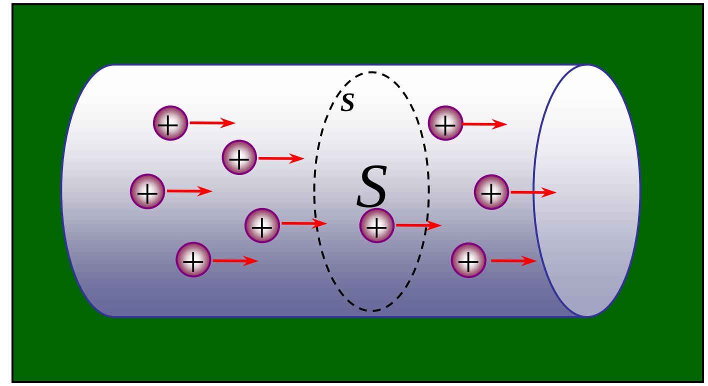
§5 磁场对电流的作用

§6 磁场对运动电荷的作用

§1 稳恒电流

一、电流强度（复习）

电流 ： 大量电荷的定向运动。



形成电流的两个基本条件:

(1) 导体中存在自由电荷;

(2) 导体中要维持一定的电场。

载流子：导体中承载电荷的粒子（例如，导体中的自由电子或正负离子）。

电流强度（I）：

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

规定正电荷流动的方向为正方向.

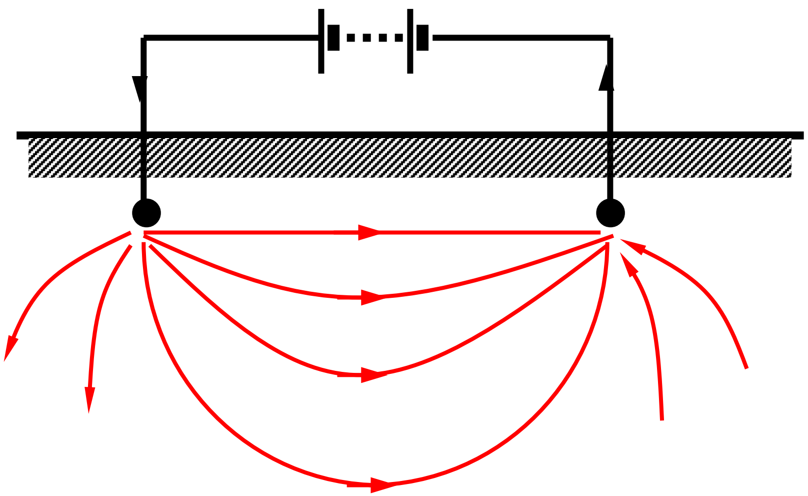
单位：库仑/秒=安培 $(CT^{-1}) = A$

它是国际单位中的基本量. 常用毫安(mA)、微安(μA)

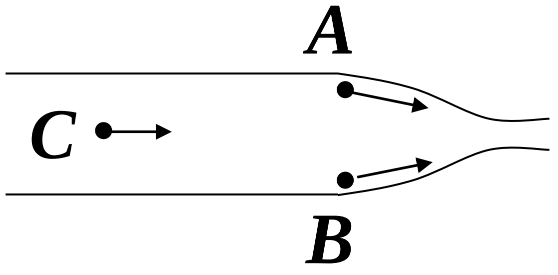
二、电流密度矢量$\vec{j}$

例如:

电阻法探矿

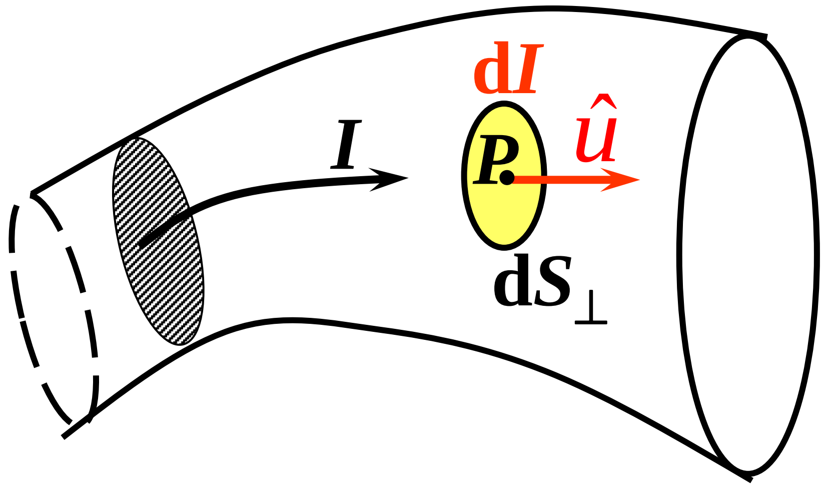


当通过任一截面的电量不均匀时



为描写导体内每一点的电流情况，需引入“电流密度矢量” 的概念描写电流的分布。

1. 定义:



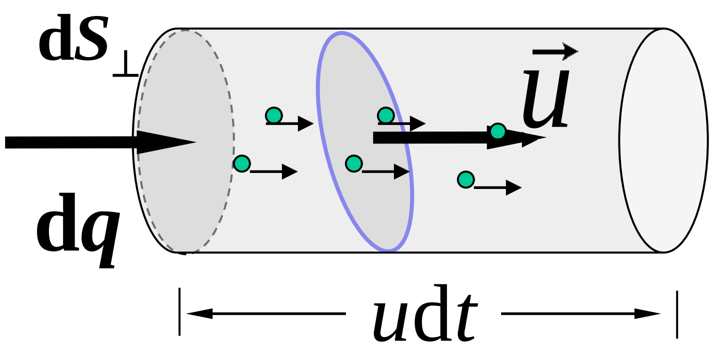
$$\vec{j} = \frac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}\,S_\perp}\hat{u}$$

大小：该处垂直于载流子运动方向单位面积的电流强度

方向：该处正载流子的运动方向

单位 A/m^2 量纲 $[j]=[L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}]$

2. $\vec{j}$与微观量的关系：



设 n为单位体积内正载流子的密度.

$\vec{u}$ 为正载流子的定向移动速度

在$\mathrm{d}t$ 时间内穿过 $\mathrm{d}S_{\perp}$面的正载流子数，即电量为：

$$\mathrm{d}q = q_0 n \cdot \mathrm{d}S_{\perp} u \cdot \mathrm{d}t$$

$$I = q_0 n u S \qquad \therefore \vec{j} = q_0 n \vec{u}$$

若P点处载流子的速度不同:

设单位体积中，速度为 $\vec{u}_i$ 的载流子数目为 $\boldsymbol{n_i}$ ，

则 $$\vec{j}=\sum_i \vec{j}_i=\sum n_i q_0 \vec{u}_i=nq_0\frac{\sum n_i\vec{u}_i}{n}=nq_0\langle\vec{u}\rangle$$

$\langle\vec{u}\rangle$为载流子平均定向流动速度，也叫“飘移速度”。

无外电场时,载流子作无规则热运动 $\langle\vec{u}\rangle=0$

有外电场时,载流子作定向流动 $\langle\vec{u}\rangle\neq 0$

一般 $\langle\vec{u}\rangle$: $10^{-2}-10^{-1} mm/s$

例如，Cu导线 $n = 8.5 \times 10^{28}/\mathrm{m}^3$，$j = 6\mathrm{A/mm}^2$ 时，

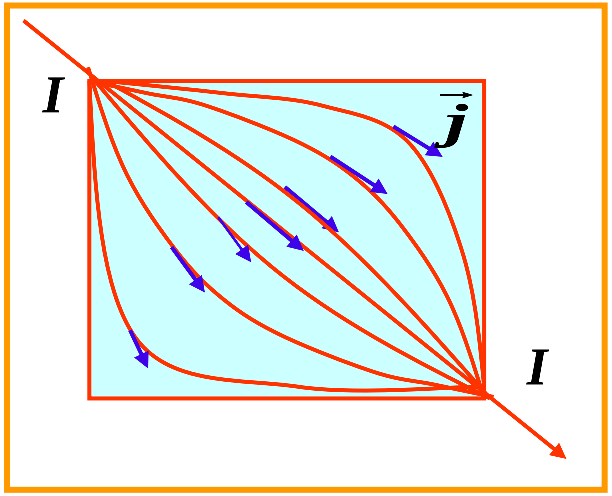
$$\langle u \rangle = \frac{j}{nq_0} = \frac{6}{(8.5\times 10^{28}/10^9)1.6\times 10^{-19}} = 0.44\mathrm{mm/s}$$

电流的传播速度是电场的传播速度 为光速c

漂移速度 $u << c$

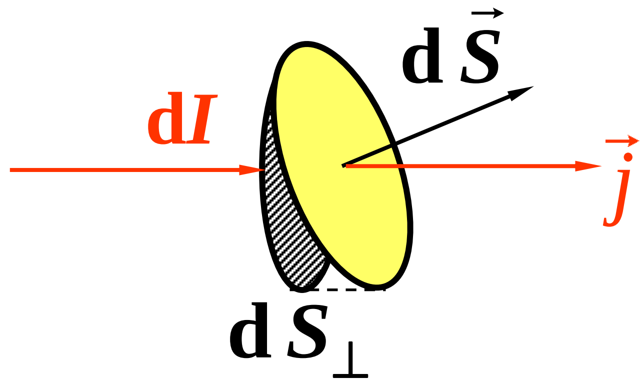
3. I与 $\vec{j}$ 的关系：

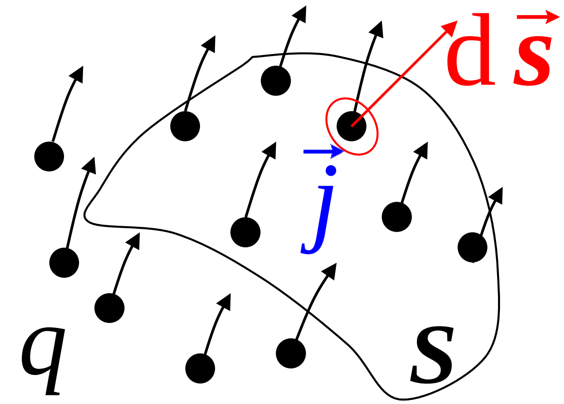
分布：电流线



$\left\{ \begin{array}{l} \text{其切向即 } \vec{j} \text{ 方向} \\ \text{其疏密 } \propto \vec{j} \text{大小} \end{array} \right.$

♦对任意小面元$\mathrm{d}\vec{S}$，$\mathrm{d}I = j\,\mathrm{d}S_{\perp} = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$





♦对于有限大的面积S:

$$I = \int \mathrm{d}I = \iint_{S} \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

即电流强度等于电流密度的通量。

♦对于一个封闭面S:

$$I = \oiint_s \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

——净流出封闭面的电流强度

根据电荷守恒定律，单位时间净流出封闭面的电量等于单位时间内封闭面内减少的电量，有

$$\oiint_s \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}q_{内}}{\mathrm{d}t}$$

……电流的“连续性方程”

三、 稳恒电流与稳恒电场

$\vec{j}$稳恒 ➡ $\vec{E}$ 稳恒 ➡ 电荷分布不随时间变化

即对任一封闭面应满足 $\dfrac{\mathrm{d}q_{内}}{\mathrm{d}t}=0$

$$\oint\!\!\oint_s \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=-\frac{\mathrm{d}q_{内}}{\mathrm{d}t}$$

即 $$\oint\!\!\oint_s \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=0$$

……“稳恒条件”

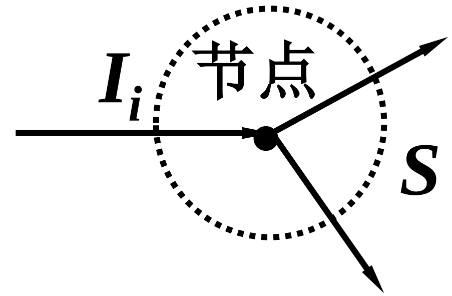
实验表明：稳恒电场和静电场的性质相同，也遵守静电场的高斯定理和环路定理。

稳恒电场与静电场的异同

	静电场	稳恒电场
相同点	电荷分布 和 电场分布 都不随时间变化	
	都服从 高斯定理 和 环路定理	
不同点	激发静电场的电荷是静止的	激发稳恒电场的电荷是流动的（它们分布于导体表面、不均匀处）
	导体内部的静电场为零;导体内没有电场线、导体表面与电场线垂直	导体内部的稳恒电场不为零; 导线内有电场线、且与导线平行
	维持静电场不需要能量	维持稳恒电场需要能量（转化）

例 节点电流方程

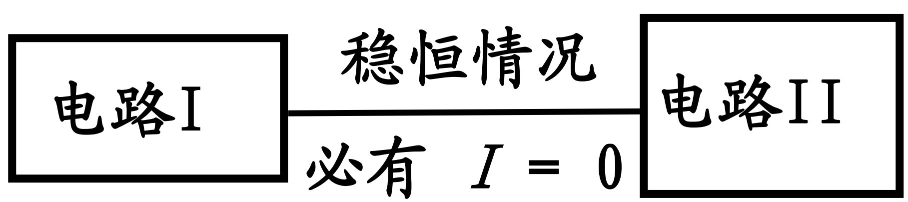
对电路的“节点”：

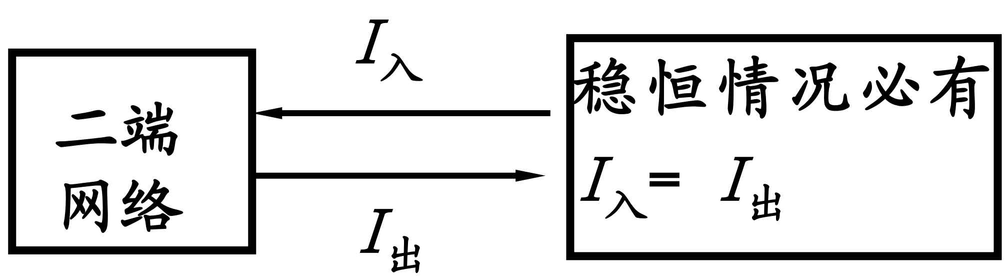


$$\oiint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \longrightarrow \sum_i I_i = 0 \quad i = 1, 2, \ldots$$

— 基尔霍夫第一定律

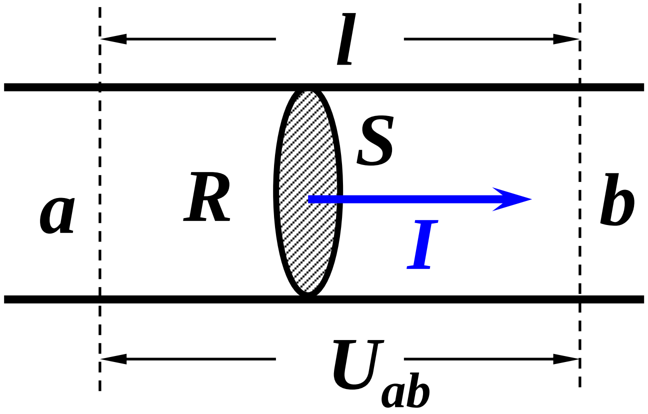
规定从节点流出：I ＞ 0 ，流入节点：I ＜ 0 。





例 欧姆定律的微分形式

对一段均匀金属导体:



$$U_{ab} = IR$$

$$R = \rho \frac{l}{s} = \frac{l}{\sigma s}$$

ρ ……电阻率　　单位: $\Omega \cdot \mathrm{m}$

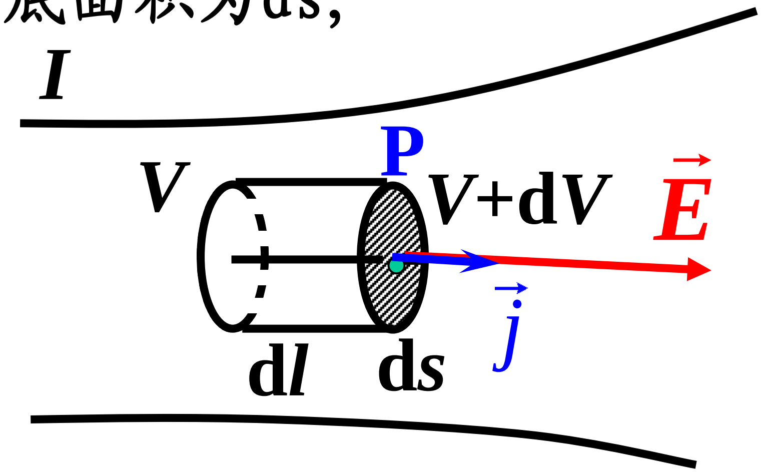
$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$ ……电导率（单位: 1/Ωm)

（西门子）$\frac{1}{\Omega} = S$

将欧姆定律用于导体中的一微小段，设导体中有电流*I*流过，

某点P处的 $\vec{j},\vec{E}$ 如图所示。

取微小体积：长为dl，垂直 $\vec{j}$ 的底面积为ds，



两端电压

$$U = V - (V + dV) = -dV$$

代入欧姆定律， $U = IR$

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\rho dl}{dS} \\ I &= jdS \\ -dV &= \vec{E}\cdot d\vec{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \therefore \vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$

$\vec{j} = \gamma\vec{E}$ （点点对应） ……欧姆定律的微分形式

小结　欧姆定律与焦耳定律的微分形式

	欧姆定律	焦耳定律（自推）
积分形式	$I=\frac{\Delta U}{R}$	$Q=I^2R\Delta t;\quad P=I^2R$
微分形式	电流密度 $\vec{j}=\gamma\vec{E}$	热功率密度 $w=\gamma E^2$

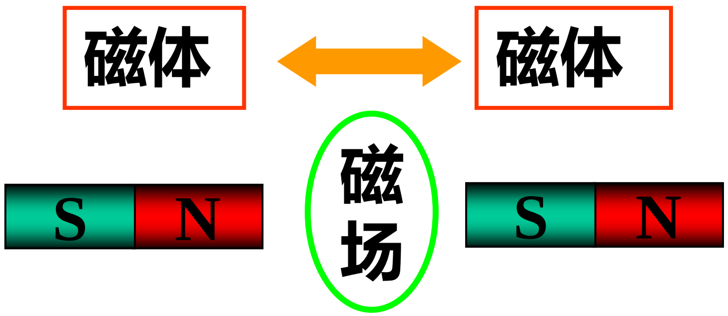
电阻定律: $R=\rho\frac{L}{S}$　　电阻率: ρ

电导率: $\gamma=\frac{1}{\rho}$

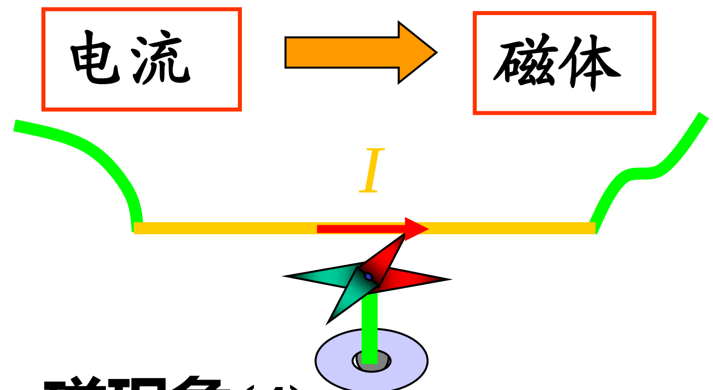
§2 磁场 磁感应强度

一、基本磁现象

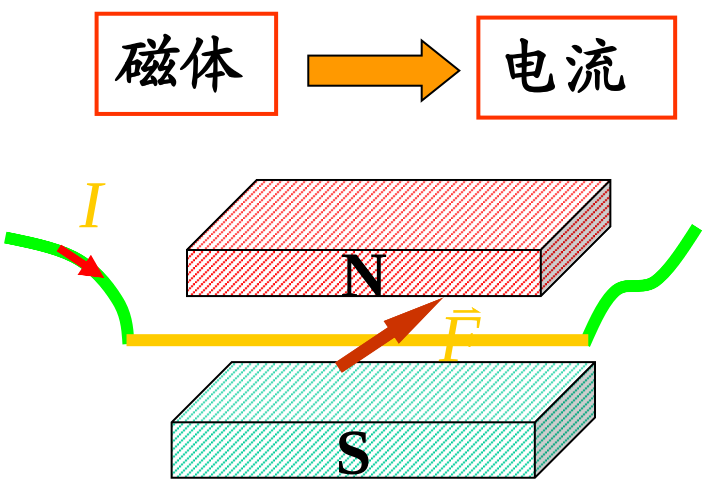
- 磁现象(1)



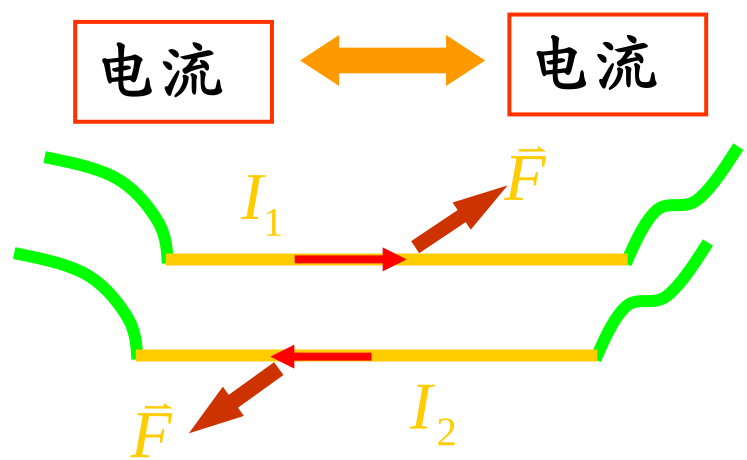
- 磁现象(2)



- 磁现象(3)



- 磁现象(4)



二、 磁场　　磁感应强度

1. 磁场

安培提出：一切磁现象起源于电荷运动

本质	运动电荷 载流导线 磁　　体	⟺	磁场	⟺	运动电荷 载流导线 磁　　体

磁场的性质

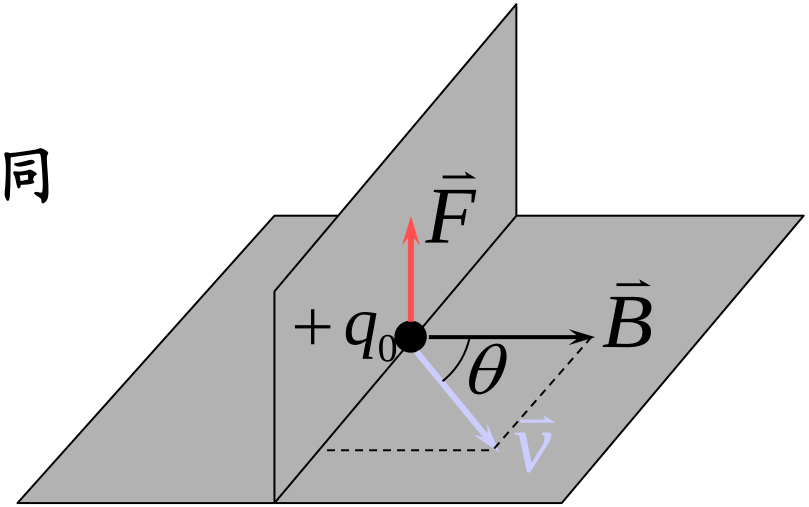
(1) 对运动电荷(或电流)有力的作用

(2) 磁场有能量

2.磁感应强度

实验:

（1）点电荷q_0以同一速率v沿不同方向运动。



实验结果:

1. $\vec{F} \perp \vec{v}$

2. $\vec{F}$的大小随$\vec{v}$而变化

3. 电荷q_0沿磁场方向运动时，$\vec{F}=0$

4. 电荷q_0垂直磁场方向运动时，$\vec{F}=\vec{F}_{\max}$

（2）在垂直于磁场方向改变运动电荷的速率v，改变点电荷的电量q_0。

实验结果:

1. 在磁场中同一场点，$F_{max}/q_0 v$ 为一恒量;
2. 在磁场中不同场点，$F_{max}/q_0 v$ 的量值不同。

定义磁感应强度$\vec{B}$的大小:

$$B = \frac{F_{max}}{q_0 v}$$

国际单位：特斯拉（T）

常用单位：高斯（G）

$$1G = 10^{-4} T$$

➢ 说明

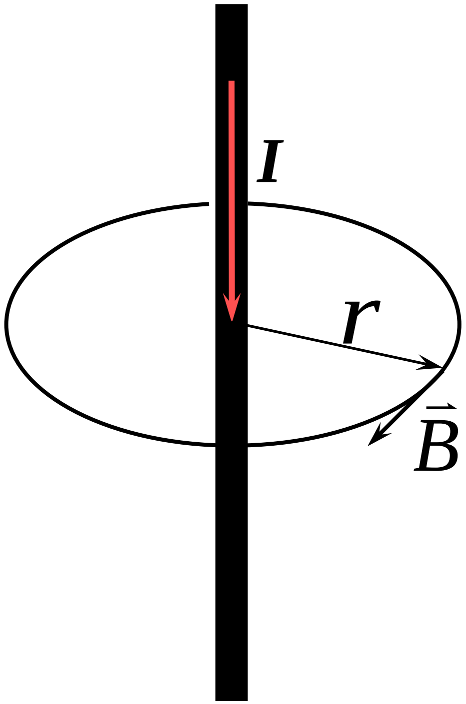
磁感应强度有各种定义方法，除上述方法外，我们还可以用电流元在磁场中的受力来定义。

§3 毕奥－萨伐尔－拉普拉斯定律

一、 毕奥–萨伐尔－拉普拉斯定律

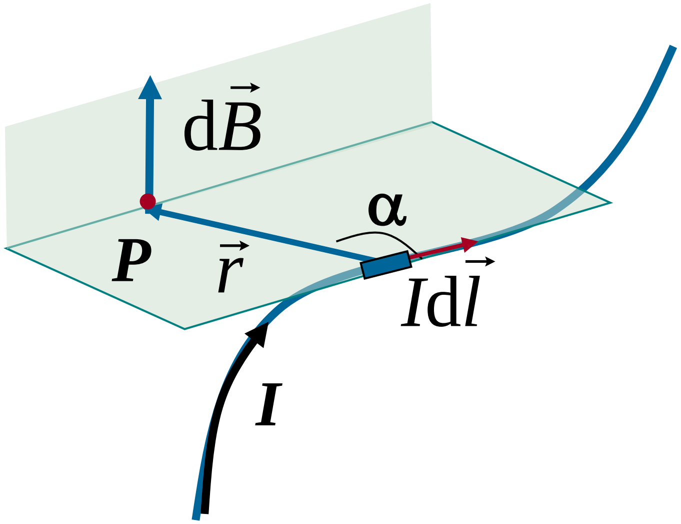
1820年，毕奥和萨伐尔用实验的方法证明：长直载流导线周围的磁感应强度与距离成反比与电流强度成正比。

$$B \propto \frac{I}{r}$$



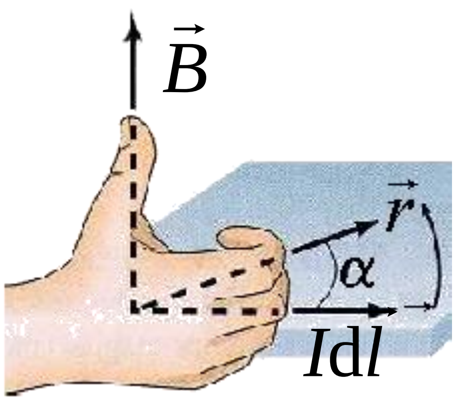
后经拉普拉斯分析总结，得出电流元 $Id\vec{l}$ 产生的磁感应强度

$$\mathrm{d}\vec{B}=k\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$



大小:
$$\mathrm{d}B=k\frac{I\mathrm{d}l\,r\sin\alpha}{r^3}$$

方向:



$$\mathrm{d}\vec{B} = k\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

在SI制中： $k = \dfrac{\mu_0}{4\pi}$ $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,N/A^2$

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

B的单位：特斯拉(T) $[B] = I^{-1}MT^{-2}$

一段载流导线L的磁场

由叠加原理： $\vec{B} = \int_L \mathrm{d}\vec{B} = \int_L \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$ $\begin{cases} B_x = \int \mathrm{d}B_x \\ B_y = \int \mathrm{d}B_y \\ B_z = \int \mathrm{d}B_z \end{cases}$

毕—萨—拉定律 + 叠加原理 → 原则上可以求得任意电流的磁场

二、利用毕－萨－拉定律求解 $\vec{B}$

1、载流长直导线的磁场

条件:L、I、d、 α_1 、 α_2

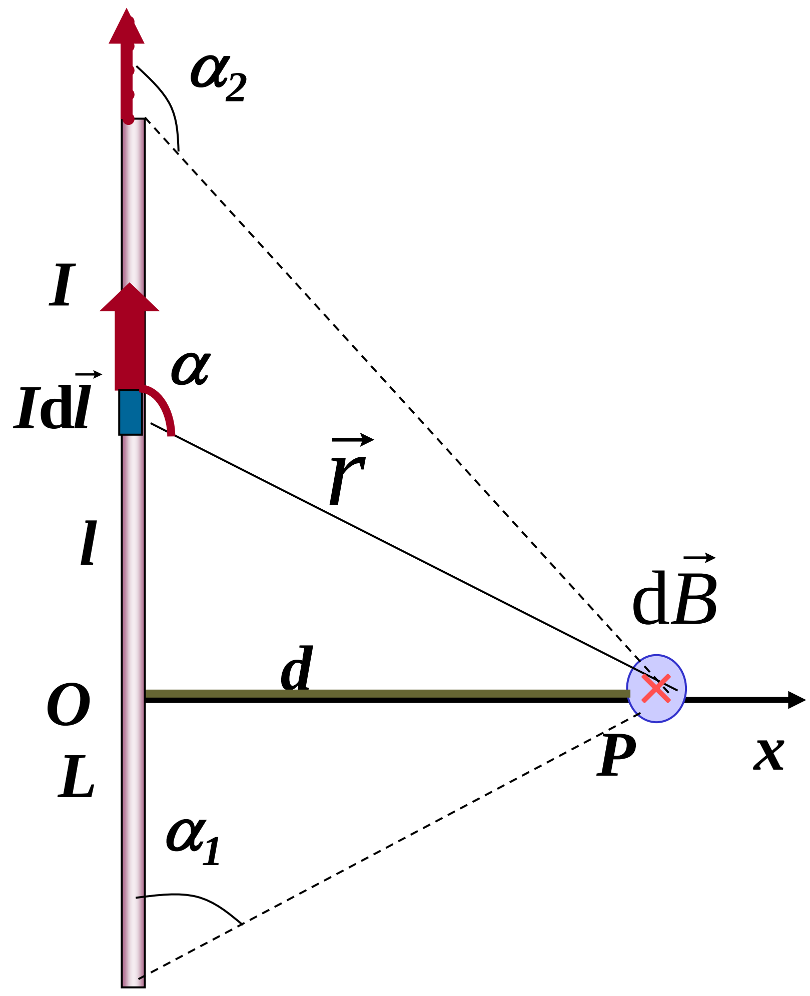
电流元的磁场:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$B = \int_L \mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

统一变量

$r=d/\sin\alpha$, $l=-d\,\mathrm{ctg}\,\alpha$



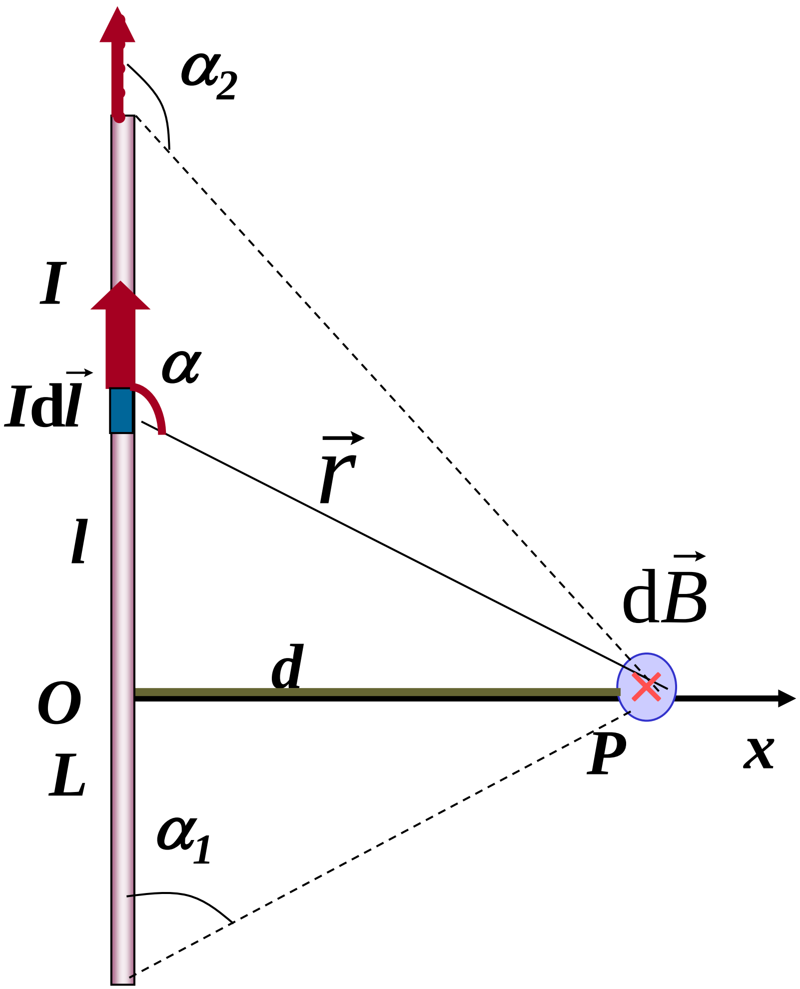
$$B=\int_L \mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{I\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

统一变量 $r=d/\sin\alpha,\ l=-d\,\mathrm{ctg}\,\alpha$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{\mathrm{d}l\sin\alpha}{r^2}$$

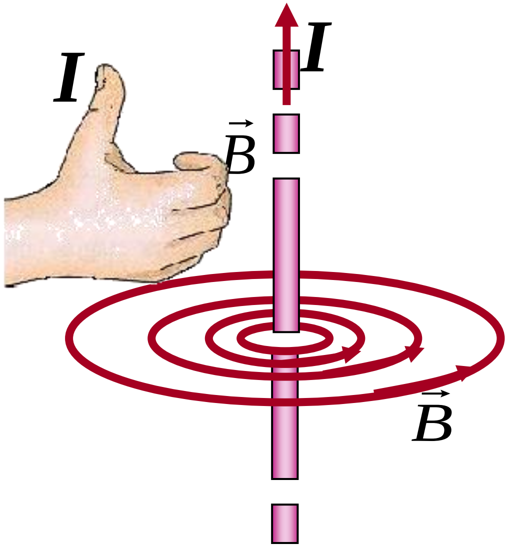
$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\sin\alpha}{d}\mathrm{d}\alpha$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right)$$



方向：直导线电流与各电流元的磁场同方向,与导线垂直.

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$$

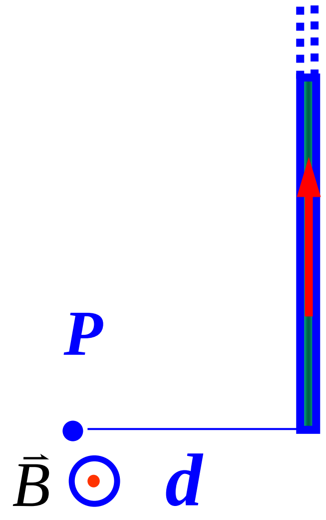


讨论:

(1) α_1=0,α_2=π，无限长载流直导线，

$$\boldsymbol{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}}$$

(2) 半无限长载流直导线



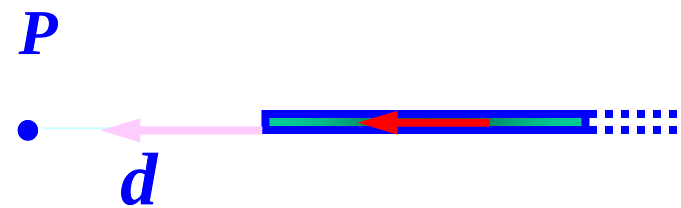
过半无线长载流直导线端点垂线上任意一点的磁场

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\cos 90^0-\cos 180^0)=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right)$$

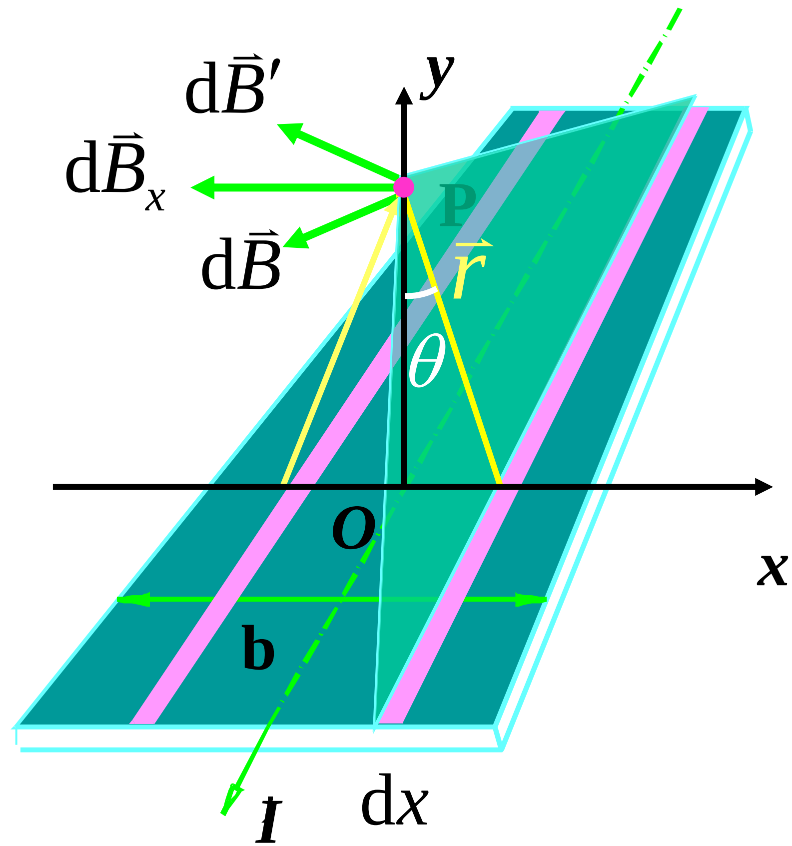
(2) 半无限长载流直导线

延长线上任意一点的磁场



$$B_1=0$$

(3) 无限长载流平板中垂面上任一点的磁场



解 $$\mathrm{d}I=\frac{I\mathrm{d}x}{b}$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}x}{2\pi b y\sec\theta}$$

$$B_P=B_x=\int \mathrm{d}B_x$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}x}{2\pi b y \sec\theta}$$

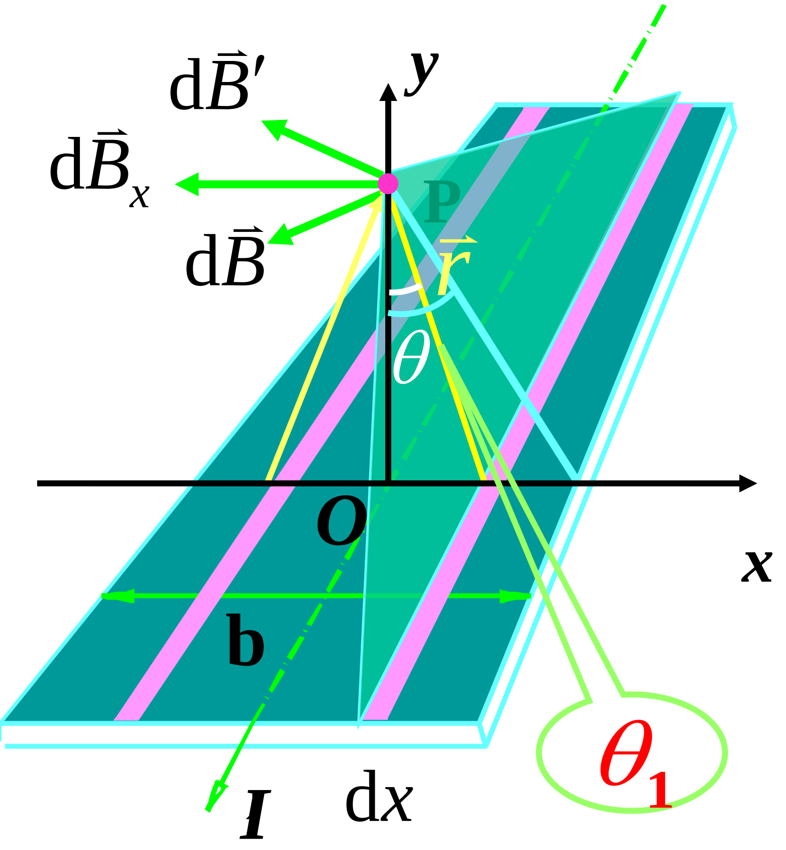
$$B_P = B_x = \int \mathrm{d}B_x = \int \mathrm{d}B \cos\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi b y} \frac{\mathrm{d}x}{\sec^2\theta}$$

$$\mathrm{d}x = y \sec^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\theta_1 = \arctan\frac{b}{2y}$$

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{\pi b}\int_0^{\theta_1} \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi b}\arctan\frac{b}{2y}$$



讨论:

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{\pi b}\arctan\frac{b}{2y}$$

(1) $y >> b$ $\Rightarrow$ $\arctan\frac{b}{2y} \approx \frac{b}{2y}$

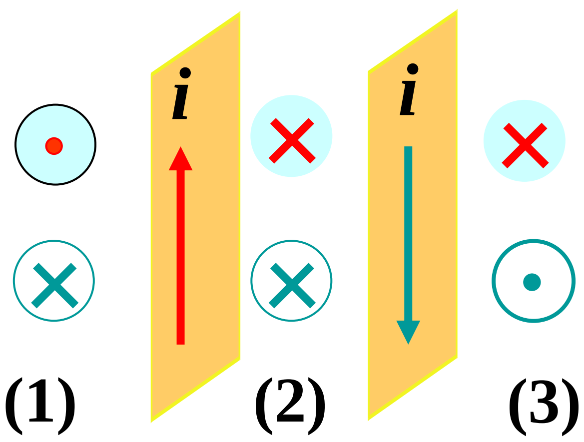
$$B_P \approx \frac{\mu_0 I b}{2y\pi b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$ 无限长载流直导线

(2) $y << b$ $\Rightarrow$ $\arctan\frac{b}{2y} \approx \frac{\pi}{2}$ 无限大板

$$B_P \approx \frac{\mu_0 I \pi}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I}{2b} = \frac{1}{2}\mu_0 i$$

$$B_1 = B_3 = 0 \qquad B_2 = \mu_0 i$$

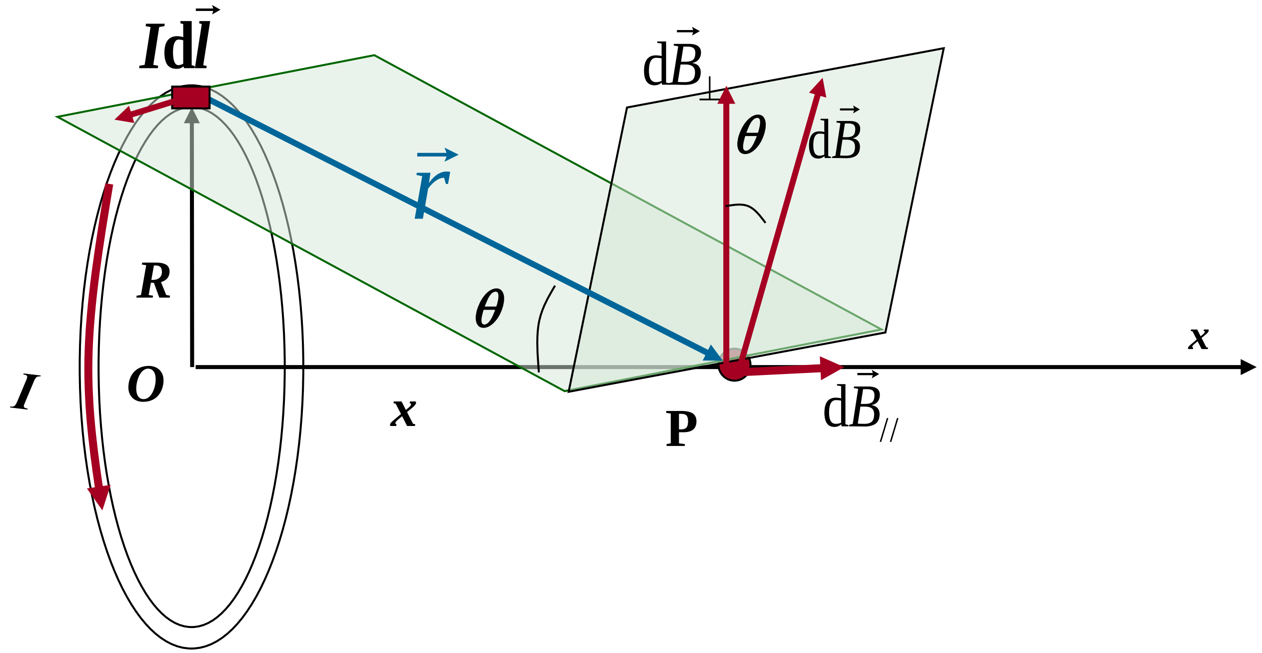
磁屏蔽



2、载流线圈轴线上的磁场

载流圆线圈如图：

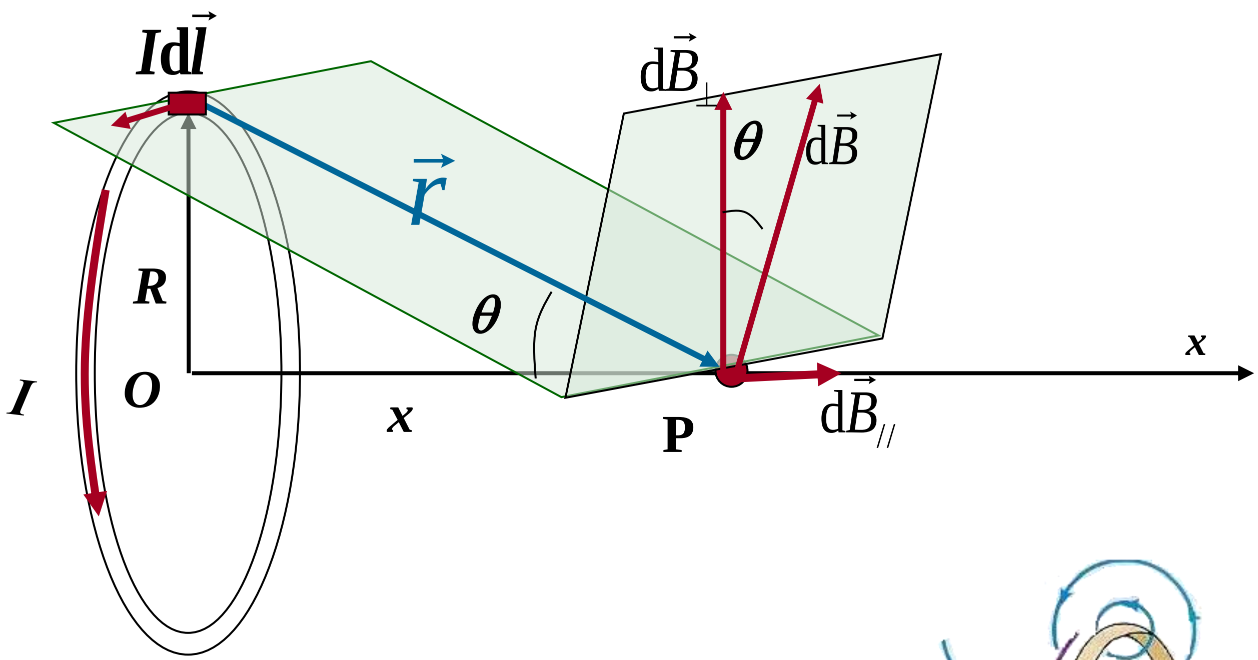
已知I、R、x.



电流元的磁场：

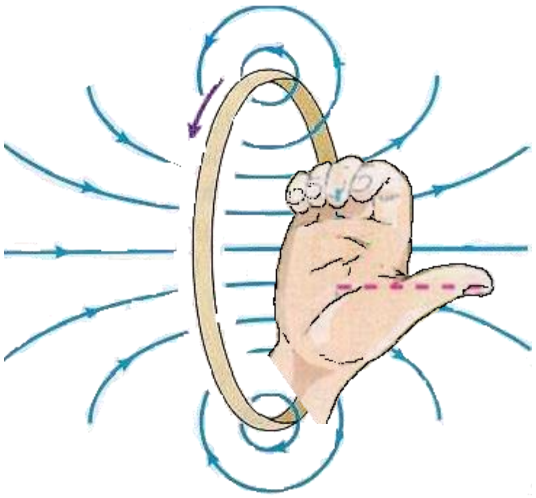
$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \qquad dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$$

$d\vec{B}$的方向垂直于电流元和r组成的平面



合磁场： $\boldsymbol{B}=\int_L \mathrm{d}\boldsymbol{B}_{//}=\int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}\sin\theta$

$$=\frac{\mu_0 I\sin\theta}{4\pi r^2}\int_L \mathrm{d}l=\frac{\mu_0 IR\sin\theta}{2r^2}$$



方向：沿轴线，与 I 满足右手螺旋法则。

$$\sin\theta = \frac{R}{r}$$

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

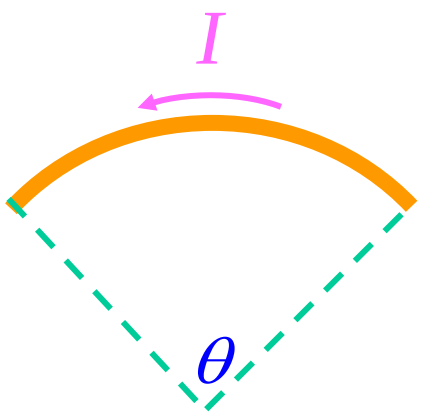
$$B = \frac{\mu_0 I R \sin\theta}{2\left(R^2 + x^2\right)} = \frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

讨论:

(1) $x=0$,圆心处 $$B_O = \frac{\mu_0 I}{2R}$$ 重要的结论!

推广:一段圆弧电流圆心处的磁感应强度

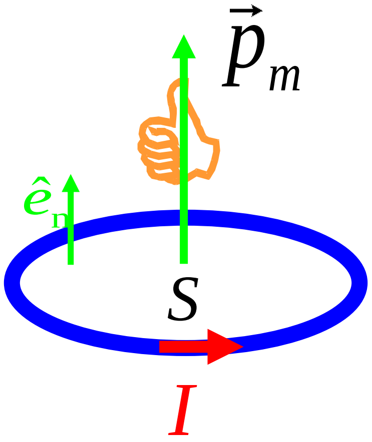
$$B_o = \frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{\theta}{2\pi}$$



$$B=\frac{\mu_0 IR\sin\theta}{2\left(R^2+x^2\right)}=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

(2) $x>>R$ 轴线上的磁感应强度

$$B\approx\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}$$



引入线圈的磁矩:

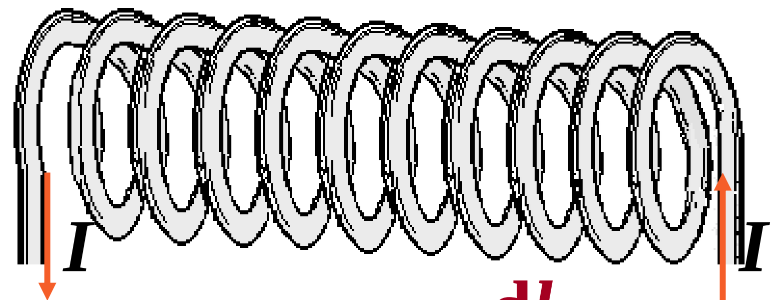
$$\vec{p}_m=IS\hat{e}_n \qquad \boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{p}_m}{x^3}}$$

如果线圈有N匝,则磁矩: $\vec{p}_m=NIS\hat{e}_n$

磁偶极磁场: 圆电流产生的磁场。

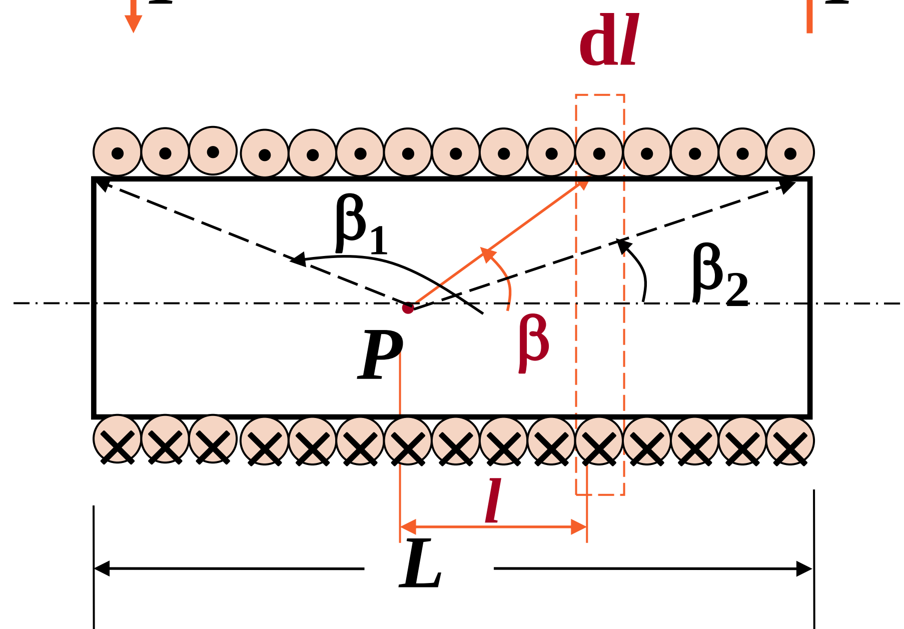
3、载流直螺线管内部的磁场

载流直螺线管单位长匝数 n. 求管中轴线任一点的磁感应强度?



纵剖面如图,

已知I、n、R、L、β_1、β_2



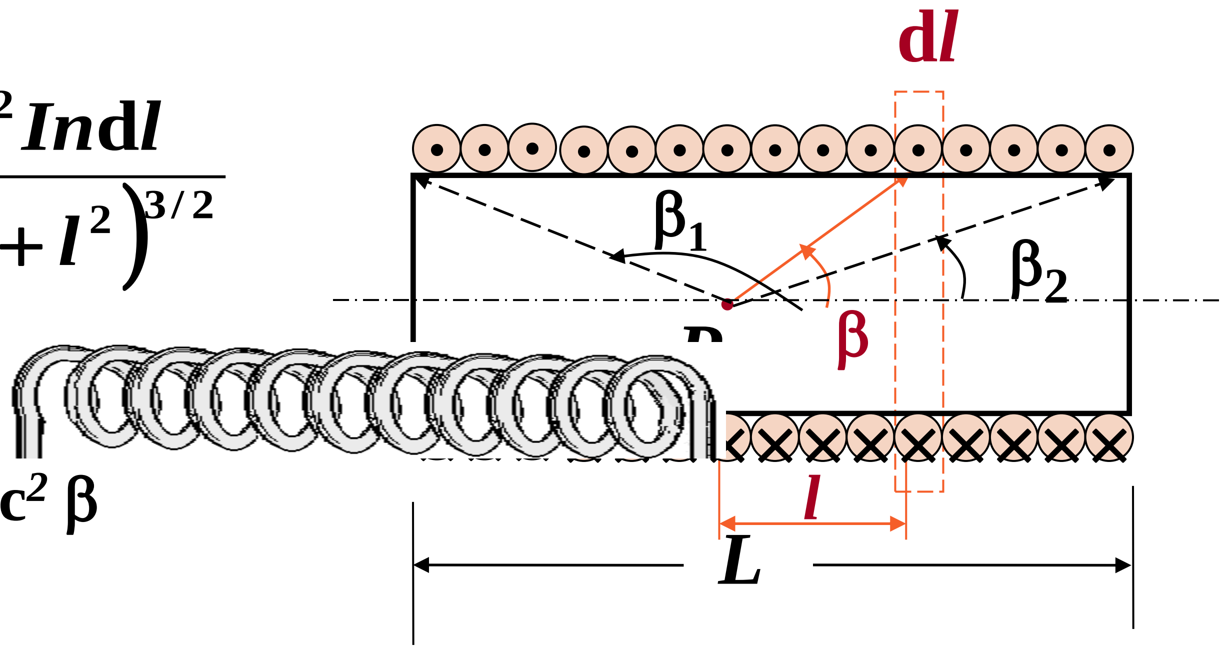
取**圆环形**电流元, $\mathrm{d}I = nI\mathrm{d}l$:

圆电流 $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 IS}{2\pi r^3}}$

电流元磁场方向沿轴线

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 In\mathrm{d}l}{\left(R^2 + l^2\right)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I n \mathrm{d}l}{\left(R^2+l^2\right)^{3/2}}$$



换用角量:

$l=R\cot\beta$, $\mathrm{d}l=R\csc^2\beta$

$R^2+l^2=R^2\csc^2\beta$

$$B=\frac{\mu_0}{2}nI\int\left(-\sin\beta\right)\mathrm{d}\beta=\frac{\mu_0}{2}nI\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)$$

方向: 螺线管内磁场的方向用右手判断.

结果: $$\boldsymbol{B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)}$$

讨论:

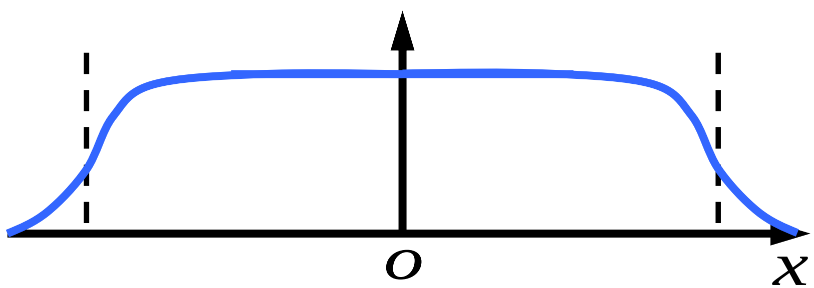
(1) $\beta_1\to\pi,\ \beta_2\to 0$, **螺线管无限长，** 轴线上的磁场:

$$\boldsymbol{B=\mu_0 nI}$$ **重要的结论!**

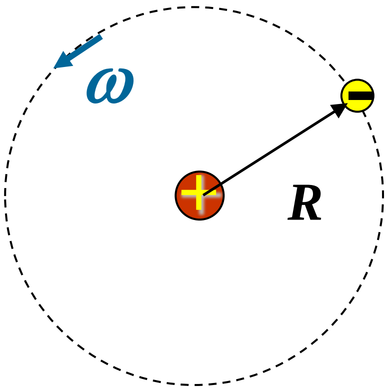
(2) $\beta_1\to\pi/2,\ \beta_2\to 0$,半无限长载流螺线管端点

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI$$

长直螺线管轴线上各处的磁场大小变化如图所示。



4、运流产生的磁场-----一种重要的情形



等效于一个圆电流!

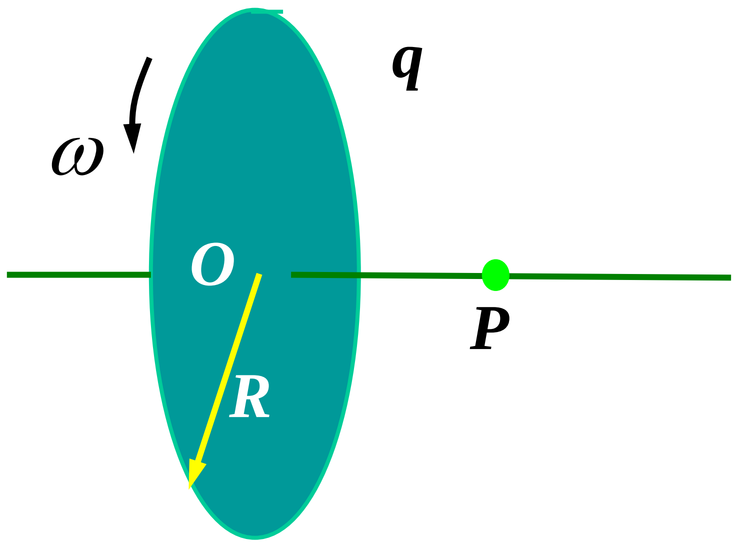
<u>等效电流</u> $I = \dfrac{e}{2\pi R}\cdot v = \dfrac{e}{2\pi R}\cdot R\omega = \dfrac{\omega}{2\pi}\cdot e$

或 $I = e\cdot \nu = e\cdot \dfrac{\omega}{2\pi}$ （ν 为回转频率）

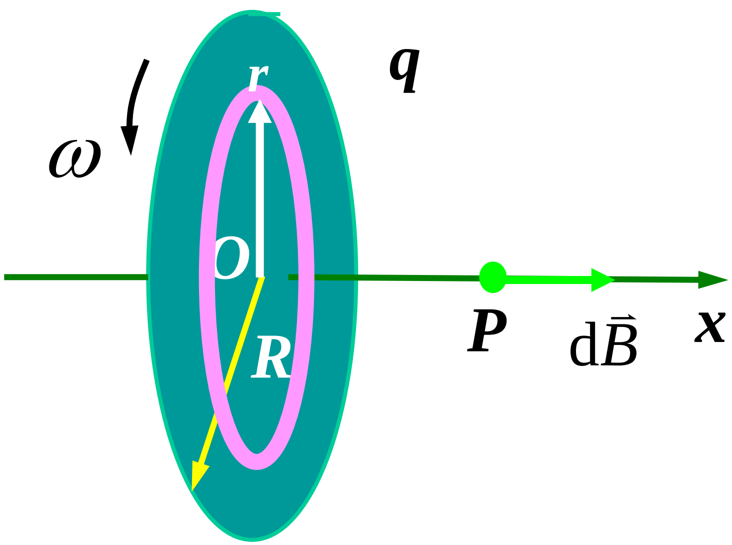
<u>圆心处:</u> $\boldsymbol{B = \dfrac{\mu_0 I}{2R} = \dfrac{\mu_0 e\omega}{4\pi R}}$

例 半径为R的均匀带电圆盘，带电为$+q$，圆盘以匀角速度ω绕通过圆心垂直于圆盘的轴转动.

求：圆盘轴线上的磁场和圆盘的磁矩?



解 $\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r \qquad \sigma=q/\pi R^2$



$$\mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q=\omega\sigma r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 r^2\mathrm{d}I}{2(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0\sigma\omega r^3\mathrm{d}r}{2(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{x^2+R^2}}-2x\right]$$

圆盘圆心处,

$$x=0 \qquad B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}R$$

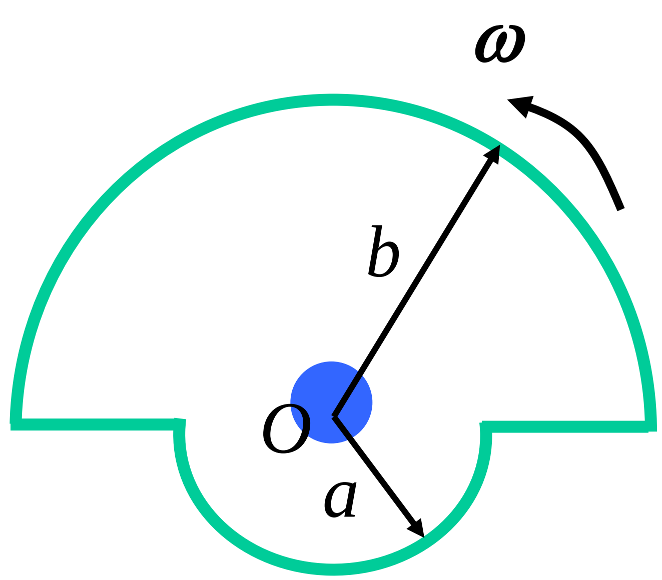
圆盘的磁矩

$$\mathrm{d}p_m=\pi r^2\mathrm{d}I=\pi r^3\omega\sigma\mathrm{d}r$$

$$p_m=\int\mathrm{d}p_m=\int_0^R\pi r^3\sigma\omega\mathrm{d}r=\frac{\pi\omega\sigma R^4}{4}$$ **方向沿 x 轴正向**

例 如图的均匀带电曲线，已知电荷线密度为 λ，

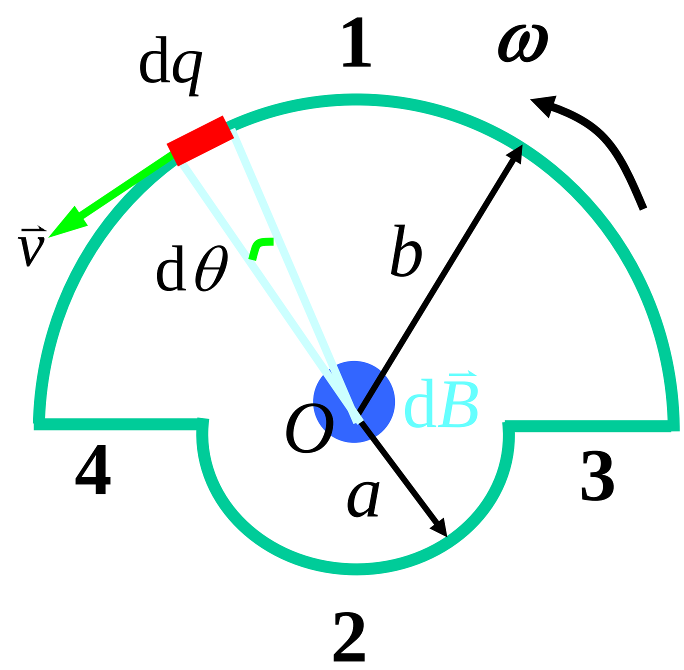
当绕 O 点以 ω 转动时，求 O 点的磁感应强度。



解　线段1： $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \lambda b \mathrm{d}\theta$

$$\mathrm{d}B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q \cdot \omega b}{b^2} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$B_1 = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\mu_0 \lambda \omega$$



线段2：　同理 $B_2 = \frac{1}{4}\mu_0 \lambda \omega$

线段3： $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda \mathrm{d}r \cdot \omega r}{r^2} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi r}\mathrm{d}r \qquad B_3 = \int_a^b \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

线段4：　同理 $B_4 = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\pi}\ln\frac{b}{a}\right)\mu_0 \lambda \omega$$

5、运动电荷产生的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

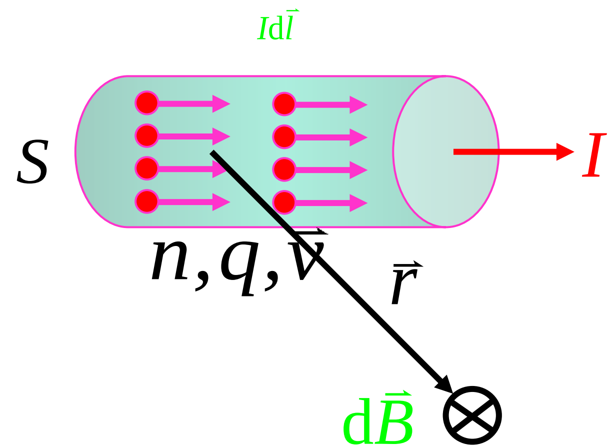
电流强度

$$I=nqvS$$

$$I\mathrm{d}l=nqvS\mathrm{d}l=qv\mathrm{d}N$$

$$I\mathrm{d}\vec{l}=q\vec{v}\mathrm{d}N$$

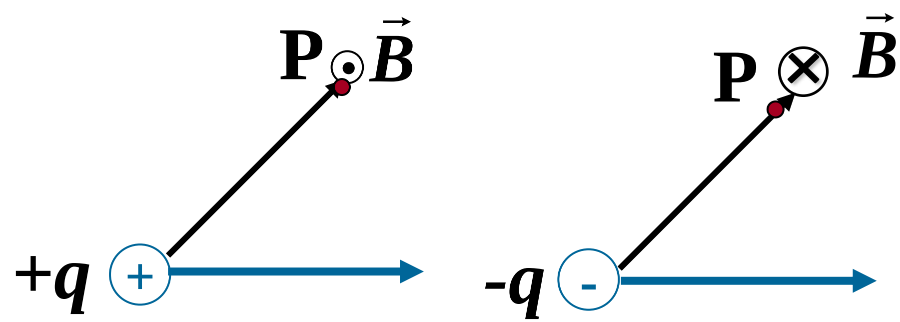
$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}N$$



简化的电流模型

一个电荷产生的磁场

$$\vec{B}=\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$



运动的电荷产生磁场，同时也产生电场.

小结

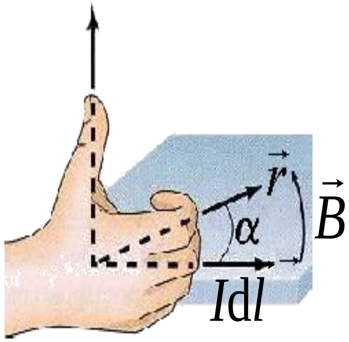
1、电场与磁场的对比

	电场	磁场
场源:	电荷 q	电流 I
	电荷元 $\mathrm{d}q$	电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$
	$\mathrm{d}\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q\vec{r}}{r^3}$	$\mathrm{d}\vec{B}=k\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$
场量:	$\vec{E}$	$\vec{B}$
叠加原理:	$\vec{E}=\int\mathrm{d}\vec{E}$	$\vec{B}=\int\mathrm{d}\vec{B}$

基本思路: $I \longrightarrow I\mathrm{d}\vec{l} \longrightarrow \mathrm{d}\vec{B} \longrightarrow \vec{B}=\int\mathrm{d}\vec{B}$

2、毕奥–萨伐尔–拉普拉斯定律:电流元产生的磁感应强度:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$ 方向的判断是重点!



3、毕奥–萨伐尔定律的应用:

✪直线电流:有限长=>无限长 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$

✪圆电流: 圆心处 $B_O=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

✪载流长直螺线管: $B=\mu_0 nI$

✪运流电流: 等效电流 $I=q\cdot\nu=q\cdot\dfrac{\omega}{2\pi}$

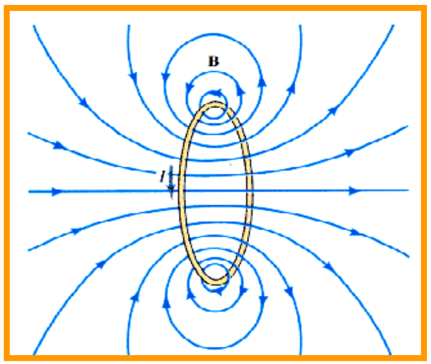
圆心处: $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}=\dfrac{\mu_0 q\omega}{4\pi R}$

4、运动电荷产生的磁场 $$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

§4 磁场的“高斯定理”和安培环路定理

一、磁场的高斯定理

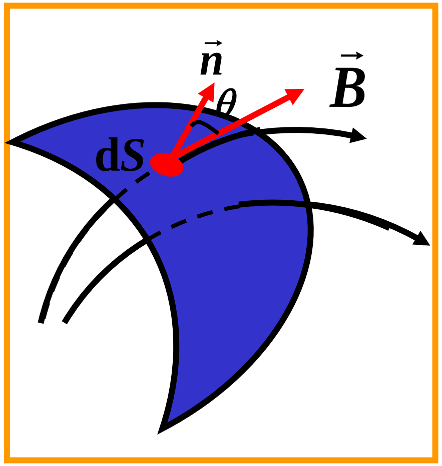
1. 磁感应线
- 切向：该点 $\vec{B}$ 方向
- 疏密：正比于该点 $\vec{B}$ 的大小



特点
- 闭合， 或两端伸向无穷远;
- 与载流回路互相套联;
- 互不相交.

2. 磁通量

通过磁场中某给定面的磁感应线的总条数



微元分析法（以平代曲，以恒代变）

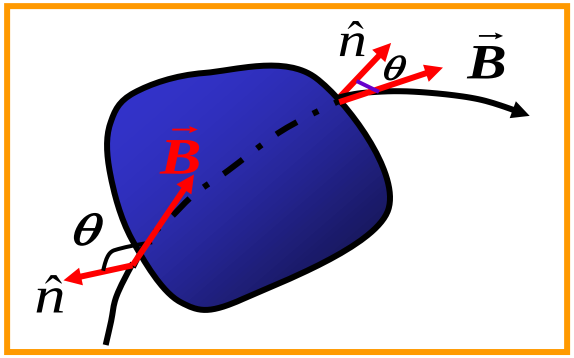
$$\mathrm{d}\varphi_m = B\mathrm{d}S_{\perp} = B\cos\theta\mathrm{d}S = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\varphi_m = \iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

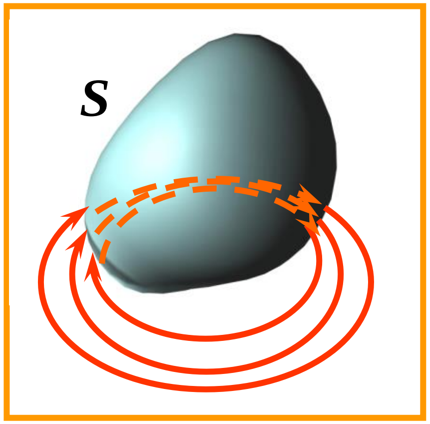
对封闭曲面，规定外法向为正方向。

进入的磁感应线 $\varphi_m < 0$

穿出的磁感应线 $\varphi_m > 0$



$$\therefore \quad \oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



3. 磁场的高斯定理

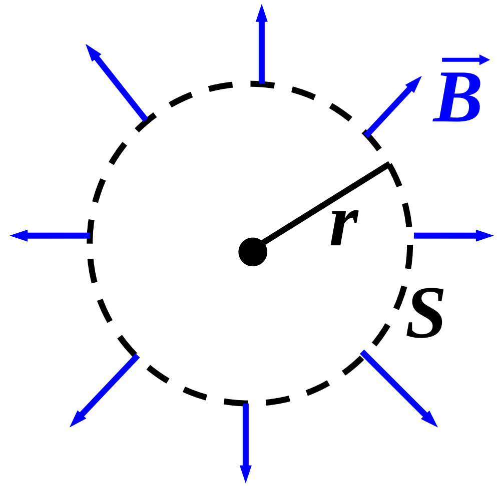
穿过磁场中任意封闭曲面的磁通量为零:

$$\boxed{\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

磁场是无源场

$$\left\{\begin{array}{l}\text{磁感应线闭合成环，无头无尾;}\\[2ex]\text{不存在磁单极.}\end{array}\right.$$

例：证明不存在球对称辐射状的磁场



证明： 用反证法

设有 $\vec{B} = f(r)\hat{r}$ ，

作球对称的高斯面S

有 $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = f(r) \cdot 4\pi r^2 \neq 0$

违反 $\vec{B}$ 的高斯定理

所以，不存在球对称辐射状的磁场。

二. 稳恒磁场的安培环路定理

1. 导出：　可由毕–萨 – 拉定律出发严格推证

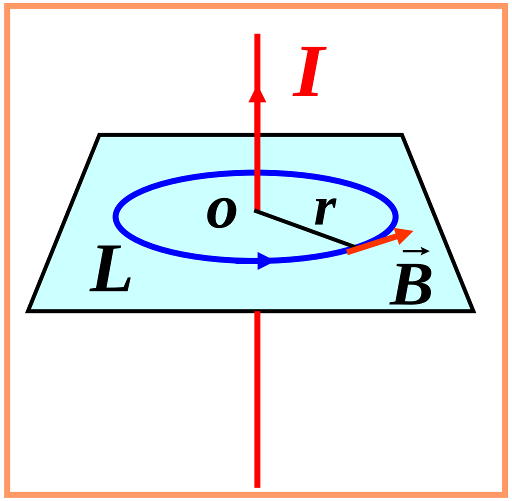
采用：　以无限长直电流的磁场为例验证

推广到任意稳恒电流磁场（从特殊到一般）

1）选在垂直于长直载流导线的平面内，以导线与平面交点o为圆心，半径为 r 的圆周路径 L，其指向与电流成右旋关系。

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot \mathrm{d}l \cdot \cos 0^\circ$$

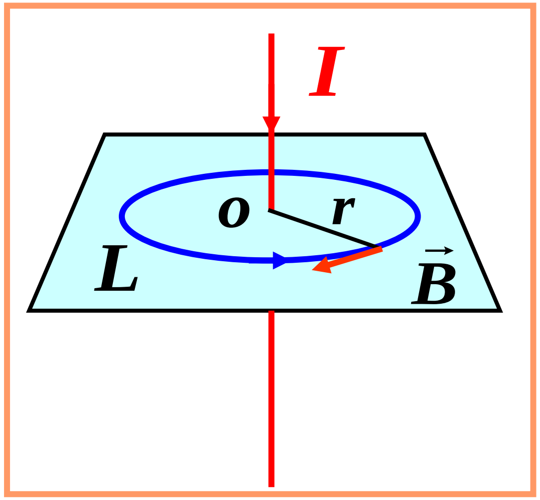
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_0^{2\pi r} \mathrm{d}l = \mu_0 I$$



若电流反向:

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathrm{d}l \cos\pi$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_0^{2\pi r} \mathrm{d}l = -\mu_0 I$$

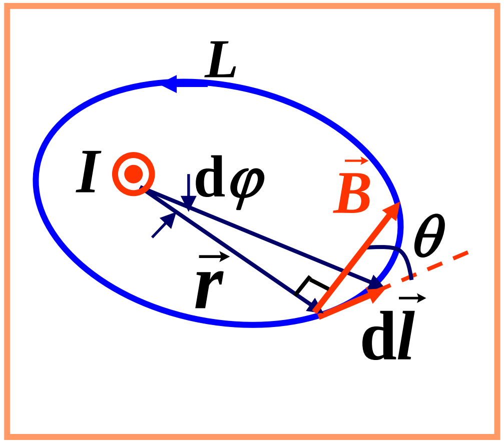


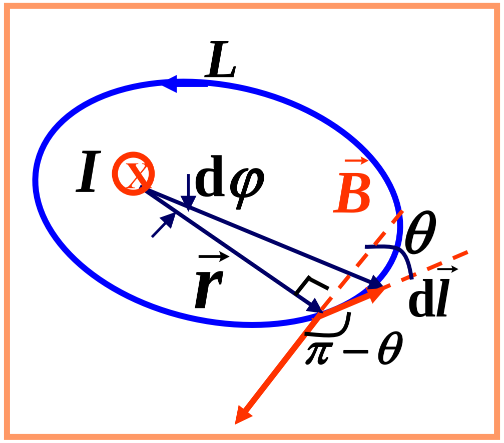
与环路绕行方向成右旋关系的电流对环流的贡献为正，反之为负。

如果规定 $\begin{cases} \text{与}L\text{绕向成右旋关系} & I>0 \\ \text{与}L\text{绕向成左旋关系} & I<0 \end{cases}$

统一为: $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$

2）选择在垂直于导线平面内围绕电流的任意闭合路径





$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos\theta\mathrm{d}l = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$$

若电流反向，则为 $-\mu_0 I$

如果规定与L绕向成右旋关系 $I>0$，反之 $I<0$

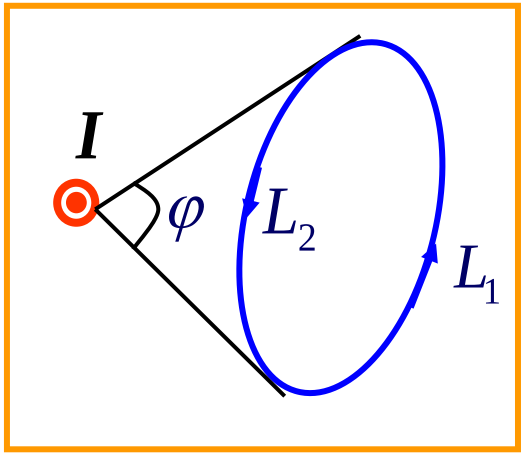
统一为： $$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

3）闭合路径不包围电流

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} \mathrm{d}\varphi + \int_{L_2} \mathrm{d}\varphi\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\varphi + (-\varphi)\right] = 0$$

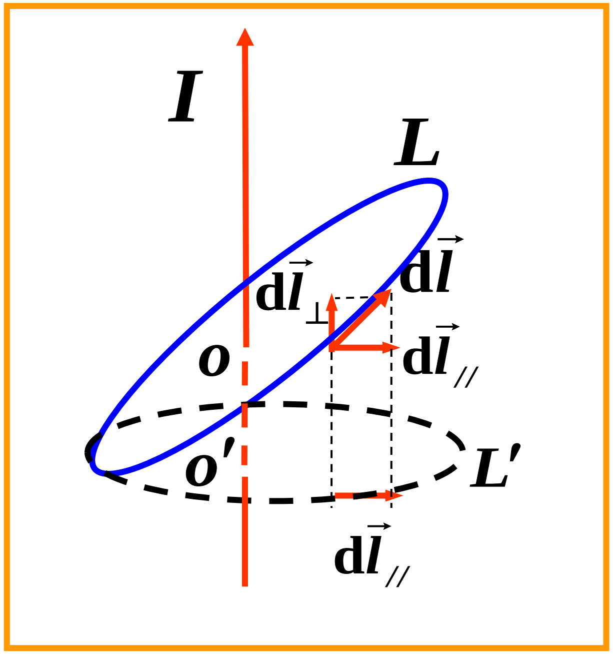


穿过 L 的电流：对 $\vec{B}$ 和 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 均有贡献

不穿过 L 的电流：对 L 上各点 $\vec{B}$ 有贡献；

对 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 无贡献。

4）闭合路径不在垂直于电流的平面内



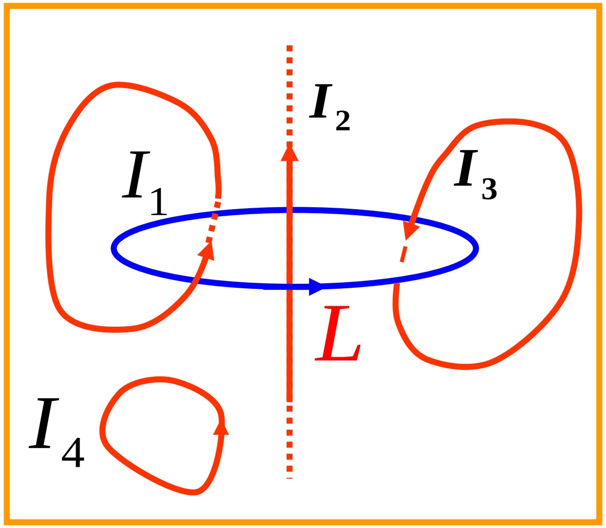
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}_{//} + \mathrm{d}\vec{l}_{\perp})$$

$$= \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{//} + \oint_L \underbrace{\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{\perp}}_{\boxed{\cos\theta = 0}}$$

$$= \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{//} + 0$$

$$= \begin{cases} \mu_0 I & (I\text{穿过}L) \\ 0 & (I\text{不穿过}L) \end{cases}$$

5）空间存在多个长直电流时



由磁场叠加原理

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_L \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_n \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i$$

2. 推广：稳恒磁场的安培环路定理

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$$

稳恒磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任意闭合路径 L 的线积分（环流）等于穿过闭合路径的电流的代数和与真空磁导率的乘积.

成立条件：稳恒电流的磁场

L： 场中任一闭合曲线 — 安培环路（规定绕向）

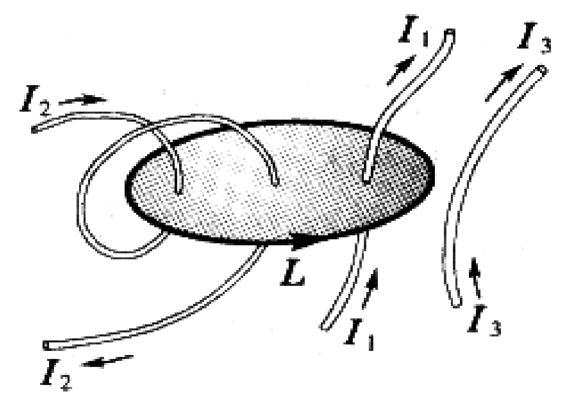
$\vec{B}$： 环路上各点总磁感应强度（包含空间穿过 L，不穿过 L 的所有电流的贡献）

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$$

$\sum\limits_{(\text{穿过}L)} I_i$ ：穿过以 L 为边界的任意曲面的电流的代数和.

规定: $\begin{cases} \text{与}L\text{绕向成右旋关系} & I_i > 0 \\ \text{与}L\text{绕向成左旋关系} & I_i < 0 \end{cases}$

例如:



$$\sum_{(\text{穿过}L)} I_i = I_1 - 2I_2$$

注意:

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$$

$\vec{B}$：　与空间所有电流有关

$\vec{B}$ 的环流：只与穿过环路的电流代数和有关

穿过 L 的电流：对 $\vec{B}$ 和 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 均有贡献

不穿过 L 的电流：对 L 上各点 $\vec{B}$ 有贡献；

对 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 无贡献

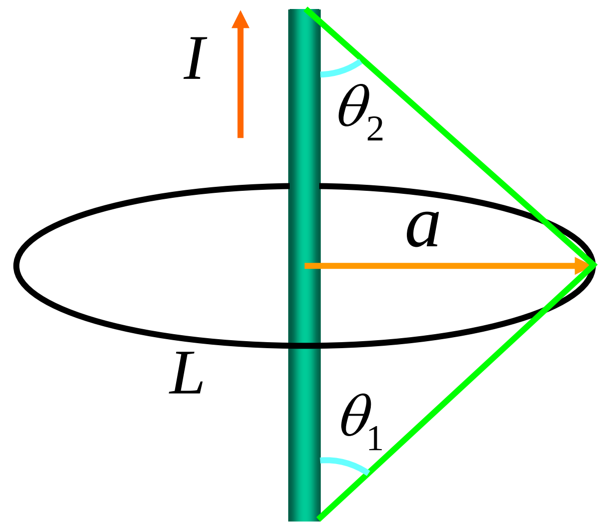
安培环路定理揭示磁场是非保守场（无势场，涡旋场）

例 图中载流直导线，设 $\theta_1 = \theta_2 = \pi / 4$

则 L 的环流为

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\mathrm{d}l$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} 2\pi a = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{2} \neq \mu_0 I$$



安培定理成立条件：电流是稳恒的　（闭合或伸展到∞）；

安培环路定理只适用于闭合的载流导线，对于任意设想的一段载流导线不成立。

比较	高斯定理	环路定理
静电场	$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 有源场	$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ 保守场、有势场
稳恒磁场	$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ 无源场	$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{（穿过L）} I_i$ 非保守场、无势场 （涡旋场）

三 . 安培环路定理的应用

1) 可以用安培环路定理定性分析场的分布

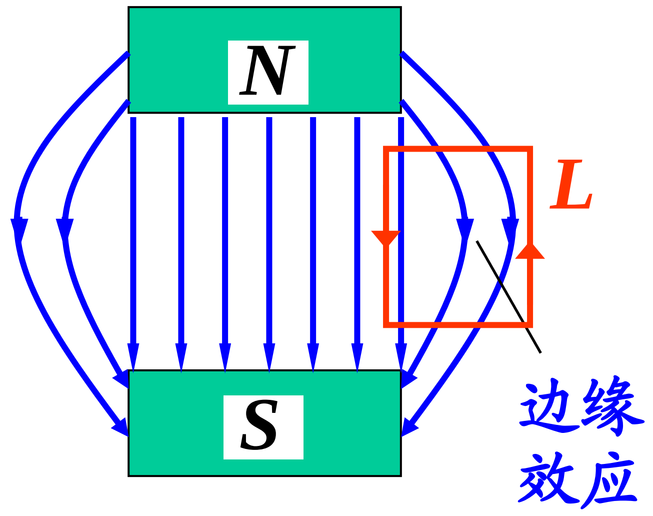
例. 证明磁场不可能在某边界突变为0。

证明: 选图示的闭合回路L,

应有: $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内} = 0$

但若磁场突然降到零,

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$$



所以不存在这样的磁场。

实际情况应有边缘效应,这样才能满足安培环路定理。

2） 求解具有某些对称性的磁场分布

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(\text{穿过}L)} I_i}$$

适用条件：稳恒电流的磁场

求解条件：电流分布（磁场分布）具有某些对称性，

以便可以找到恰当的安培环路 L ，使积分 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

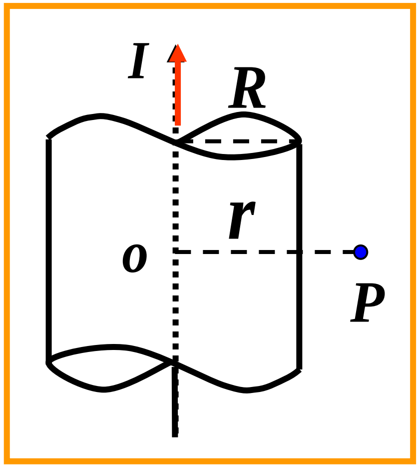
能够计算，成为B与路径长度的乘积形式，从而方

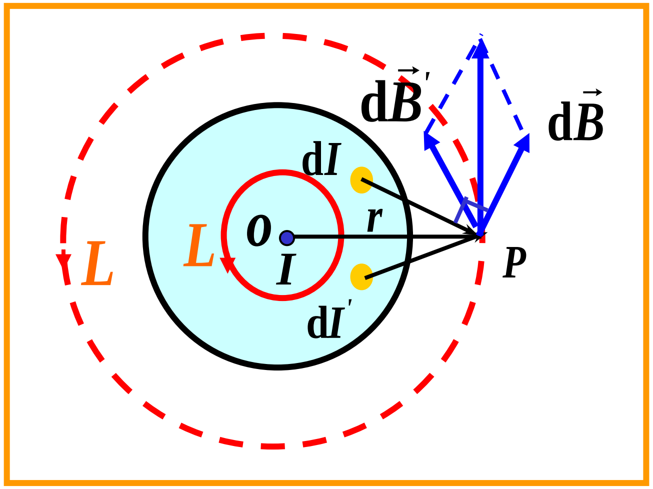
便地求解 $\vec{B}$

与用高斯定理计算场强的条件和方法作比较！

例　无限长均匀载流圆柱体 (I,R) 内外磁场.

（电流分布均匀。）





对称性分析:

在 $\perp I$ 平面内，作以 o 为中心、半径 r 的圆环 L，

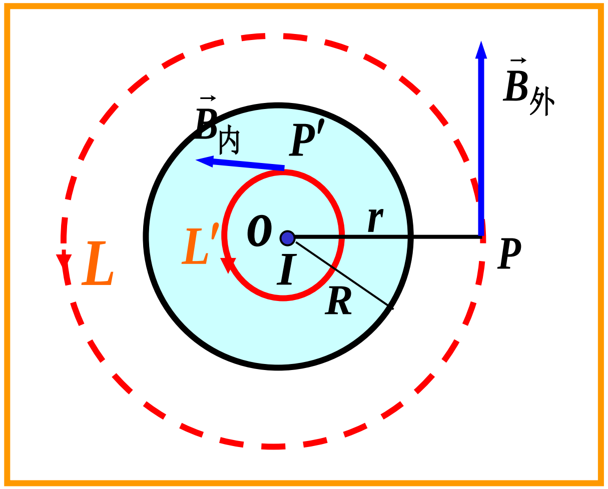
L 上各点等价: $\vec{B}$ 大小相等，方向沿切向。

以 L 为安培环路，逆时针绕向为正:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内}$$

$r \geq R:$ $\quad \sum I_{内} = I$

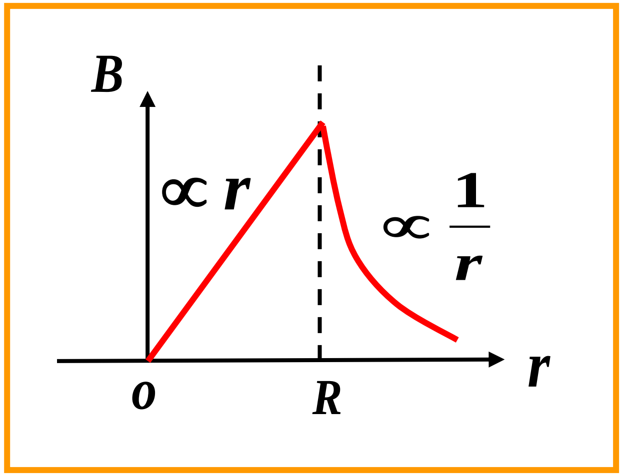
$$B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$



$r \leq R:$

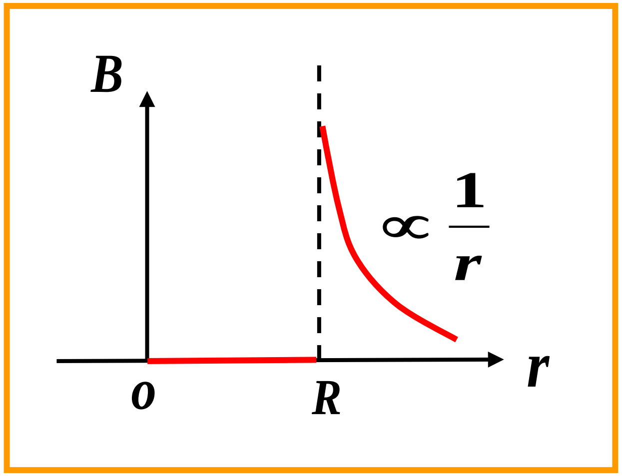
$$\sum I_{内} = \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2 = \frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B_{内} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \propto r$$



$\vec{B}$ 方向与 I 指向满足右旋关系

思考：无限长均匀载流直圆筒 $B \sim r$ 曲线?



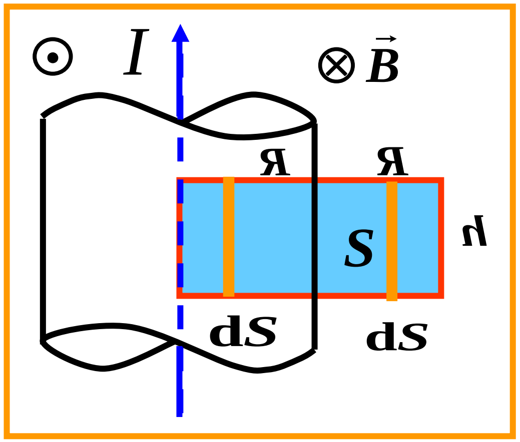
$$B_{内} = 0$$

$$B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$\vec{B}_{外}$ 方向与 I 指向满足右旋关系

等价于全部电流集中于轴线的无限长直电流

练习： 无限长均匀载流圆柱体（R，I）如图，求通过截面 S（$2R, h$）的磁通量.



解：磁场分布

$$B_{内} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \qquad B_{外} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向如图所示

微元分析法：取 $\mathrm{d}S = h\mathrm{d}r$ 且$\mathrm{d}\vec{S}$与$\vec{B}$方向相同

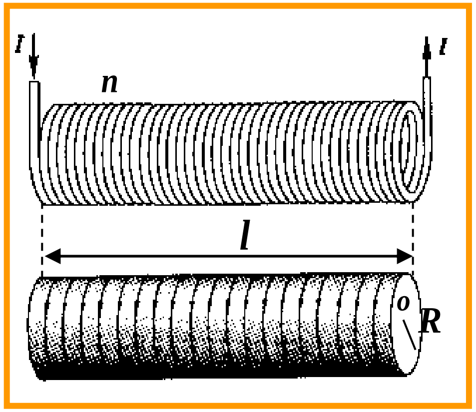
$$\varphi_m = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_{内}} B_{内} \mathrm{d}S + \int_{S_{外}} B_{外} \mathrm{d}S$$

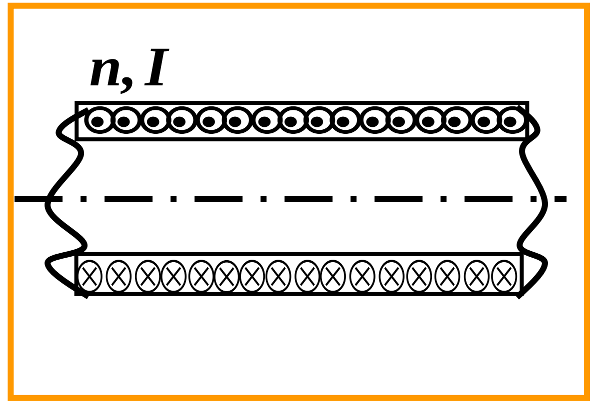
$$= \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} h\mathrm{d}r + \int_R^{2R} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I h}{4\pi}(1 + 2\ln 2)$$

例　无限长载流直螺线管的磁场（I . n .线密绕）

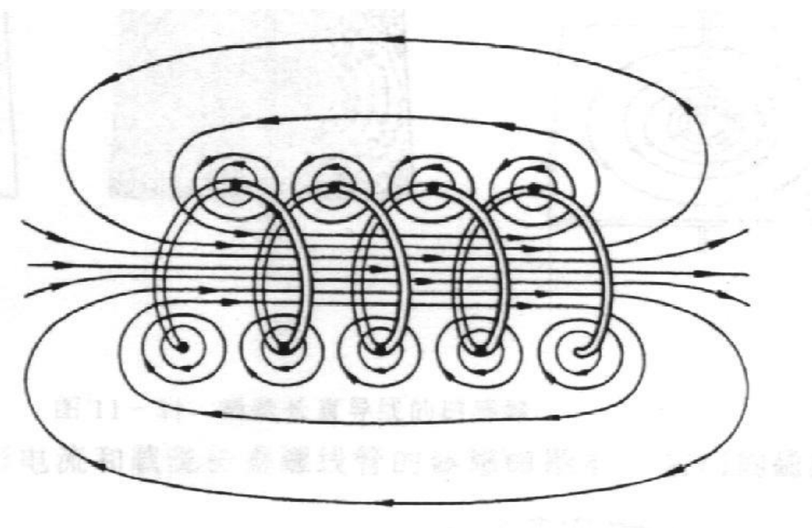
$R << l$，对邻近场点

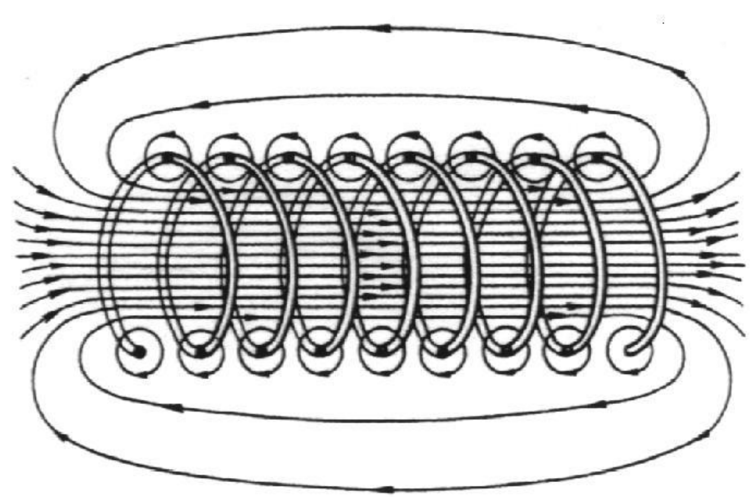
单位长度上的匝数



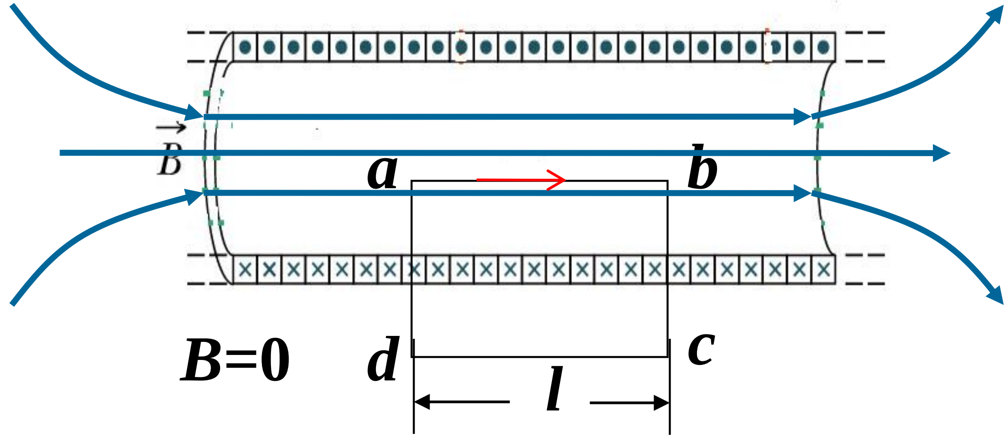


模型：螺距为零，视为一系列平行圆电流紧密排列。





解 1）对称性分析螺旋管内为均匀场，方向沿轴向，外部磁感强度趋于零，即 $B \cong 0$ 。磁场 $\vec{B}$ 的方向与电流 I 成右螺旋.



2）选回路。取矩形回路abcda:

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 nlI$$

$$\int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\therefore \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Bl = \mu_0 nlI$$

结果:　　$$B=\mu_0 nI=\frac{\mu_0 NI}{L}$$

比较:

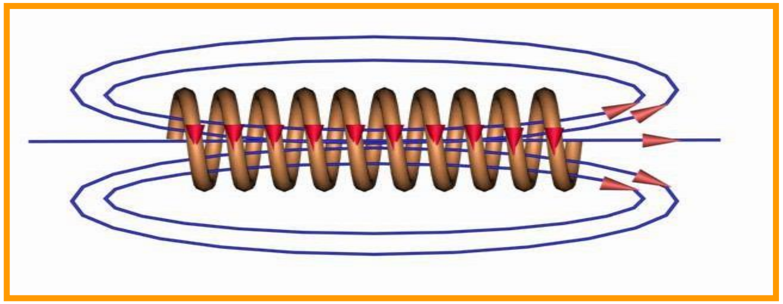
上节例题：无限长圆截面螺线管轴线上　$B=\mu_0 nI$

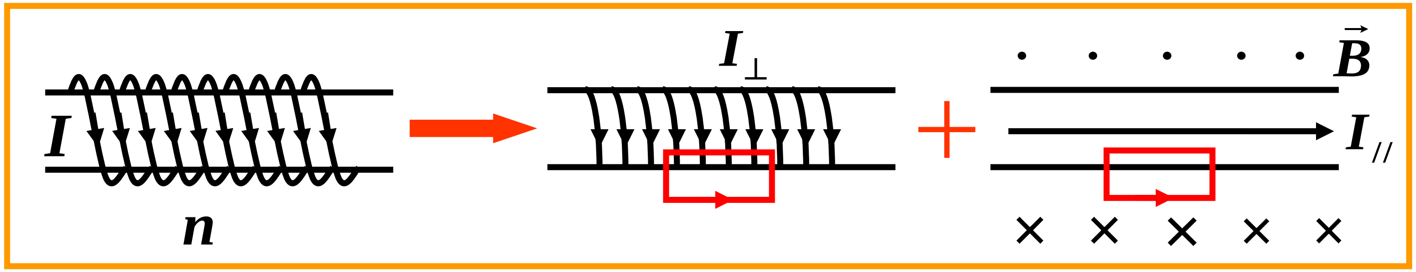
本例：螺线管截面可以是任意异形截面，

无限长载流螺线管内为均匀磁场。　$B_{内}=\mu_0 nI$

思考:

如果螺距不为零（螺旋电流）对以上结果有无影响?





$$B_{内} = \mu_0 nI,$$ 螺线管内磁场不变

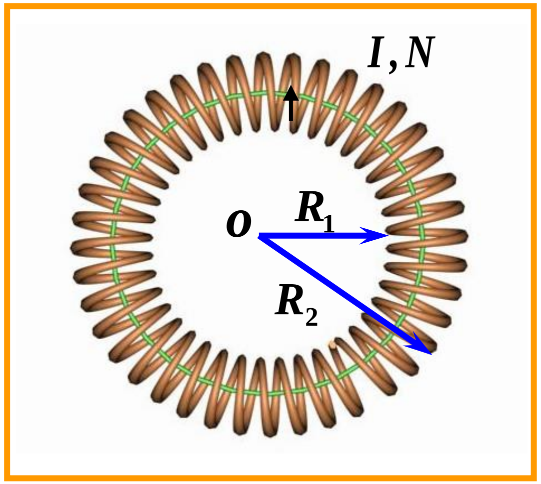
$$B_{外} = \frac{\mu_0 I_{//}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

$$\frac{B_{外}}{B_{内}} = \frac{1}{2\pi nr};$$ 取： $n = 4000\mathrm{m}^{-1}, R = 0.02\mathrm{m}, r = 0.2\mathrm{m},$

得： $$\frac{B_{外}}{B_{内}} = 2\times10^{-4}$$

前面认为在螺线管外磁场为零－－可行!

例　　载流螺绕环的磁场分布（ R_1 . R_2 . N . I ）

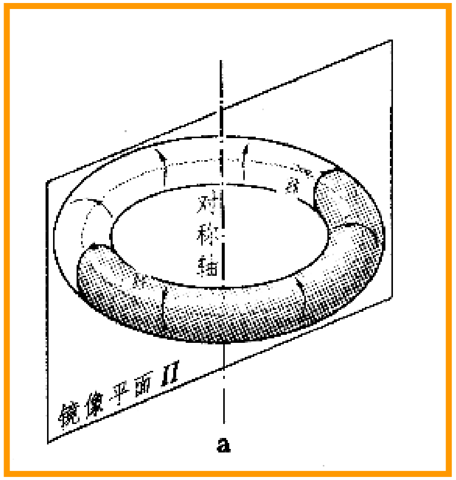


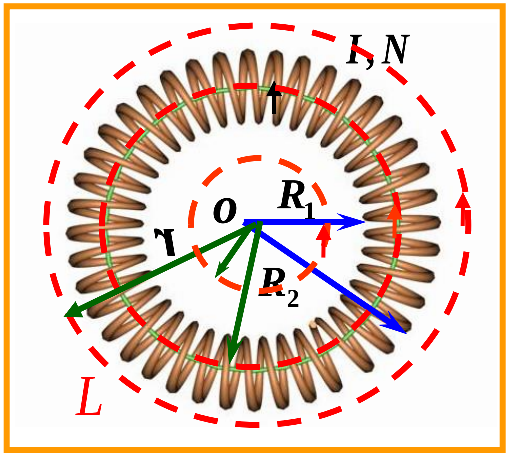
对称性分析:

$\vec{B}$ 大小相等的点的集合:

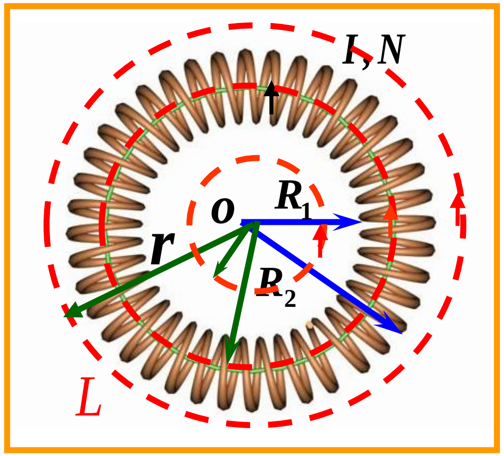
同心圆环

环上各点 $\vec{B}$ 方向：切向





以中心o ,半径 r 的圆环为安培环路



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内}$$

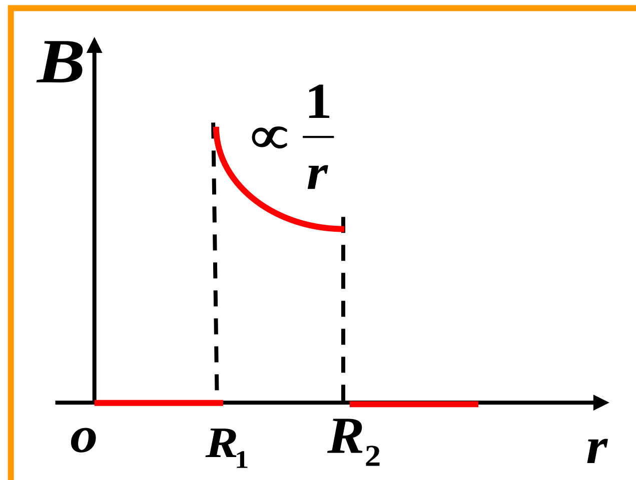
$$r < R_1\ ,\ r > R_2 :$$

$$\sum I_{内} = 0 \qquad B_{外} = 0$$

$$R_1 < r < R_2 :$$

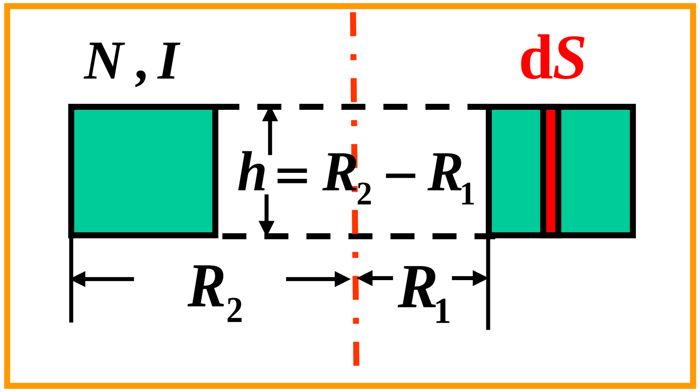
$$\sum I_{内} = NI$$

$$B_{内} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



练习:

若螺绕环截面为正方形，求通过螺绕环截面的磁通量 .



$$\mathrm{d}S = h\mathrm{d}r = (R_2 - R_1)\mathrm{d}r$$

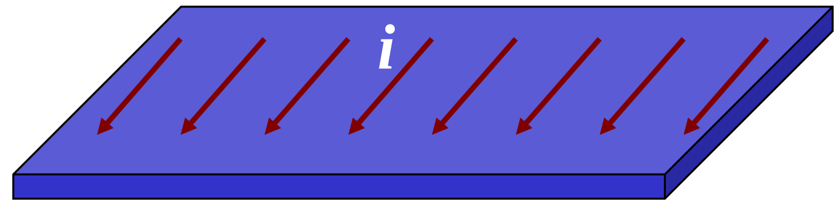
$$\mathrm{d}\varphi_m = \vec{B}_{内} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}(R_2 - R_1)\mathrm{d}r$$

$$\varphi_m = \int \mathrm{d}\varphi_m = \frac{\mu_0 NI}{2\pi}(R_2 - R_1)\int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2\pi}(R_2 - R_1)\ln\frac{R_2}{R_1}$$

例 无限大均匀载流平面的磁场



电流线密度均匀，大小为i,

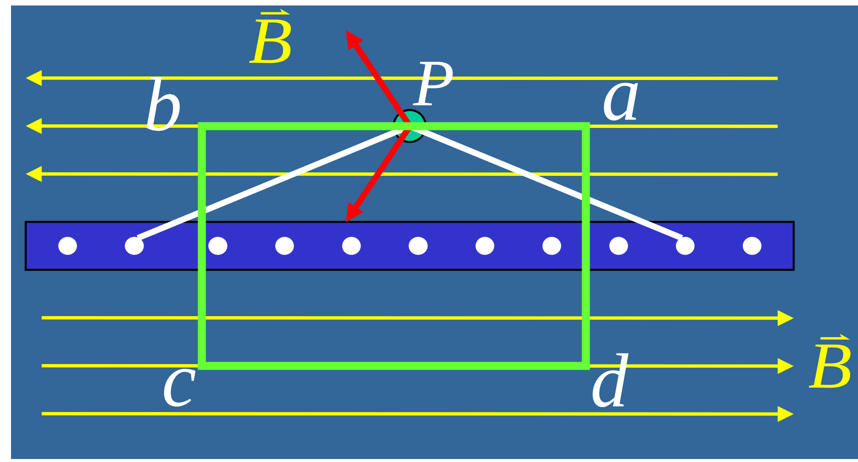
选取矩形回路$abcd$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \left[\int_b^a + \int_c^b + \int_d^c + \int_a^d\right]\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= B\cdot ab + 0 + Bcd + 0$$

$$= \mu_0 I$$

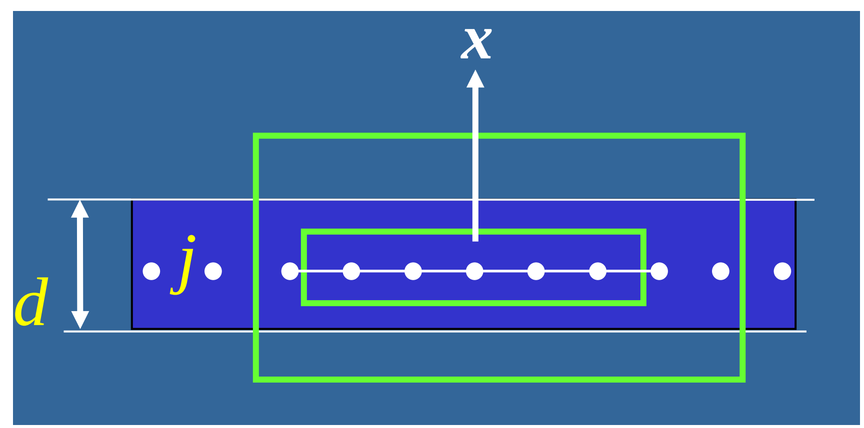
$$= \mu_0 iab$$



$$2Bab = \mu_0 iab \qquad B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

推广：有厚度的无限大载流导体

- 在外部 $B = \mu_0 jd/2$
- 在内部 $B = \mu_0 jx$



小结：

1. 熟悉典型问题结果

运动点电荷，
无限长直电流，
圆电流轴线上，
长直载流螺线管，
螺绕环 ...

2. 总结出用安培环路定理求解磁场分布的思路

对称性分析 — 选环路 L 并规定绕向.

— 由 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}$ 求 $\vec{B}$ 分布.

与用高斯定理计算场强的条件和方法作比较！

电场和磁场的对比

实验规律（静电场）

静电场线：起始于正电荷终止于负电荷

静电场的通量

$$\varphi_e = \iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

高斯定理

$$\boxed{\oint\!\!\!\!\iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}}$$

电荷元

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

连续带电体

叠加原理

$$\vec{E} = \int \mathrm{d}\vec{E}$$

静电场的环量

$$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势

环路定理

$$\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

稳恒电流的磁场(静磁场)

静磁场线：无头无尾的闭合曲线

电流元 $Id\vec{l}$

稳恒磁场的通量

$$\varphi_m = \iint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

高斯定理

$$\oiint_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

毕--萨- 拉定律

一段电流的磁场

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

稳恒磁场的环流

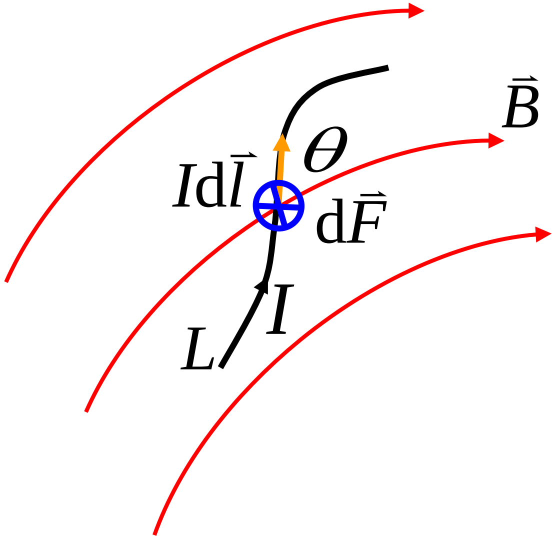
安培环流定理

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_i I_i$$

学会类比方法！！

§5 磁场对电流的作用

一、 磁场对载流导线的作用



安培力 $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

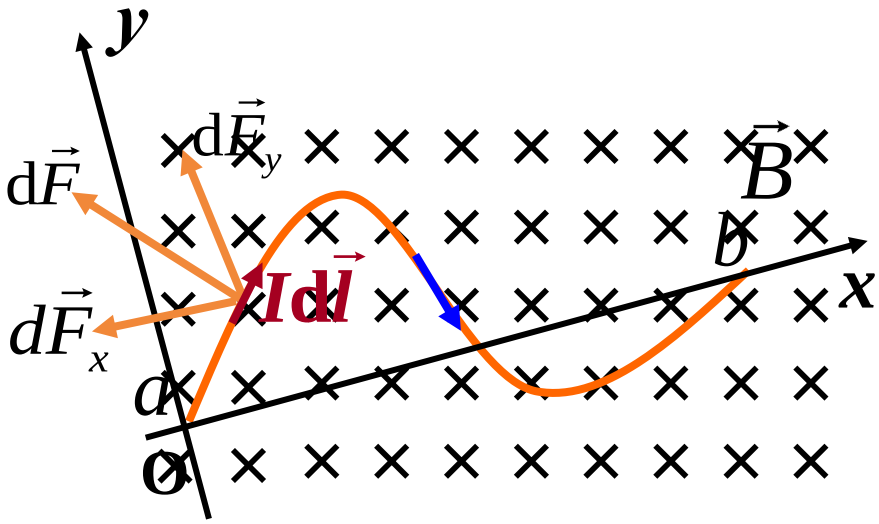
大小： $\mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB\sin\theta$

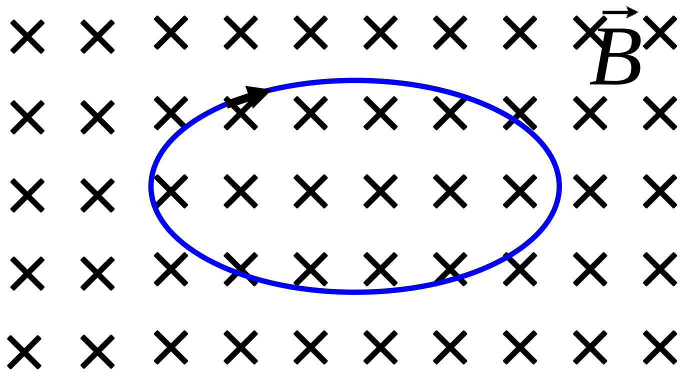
方向：右手螺旋定则确定

任意形状载流导线在外磁场中受到的安培力

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

分析：均匀磁场中任意形状载流导线受到的安培力





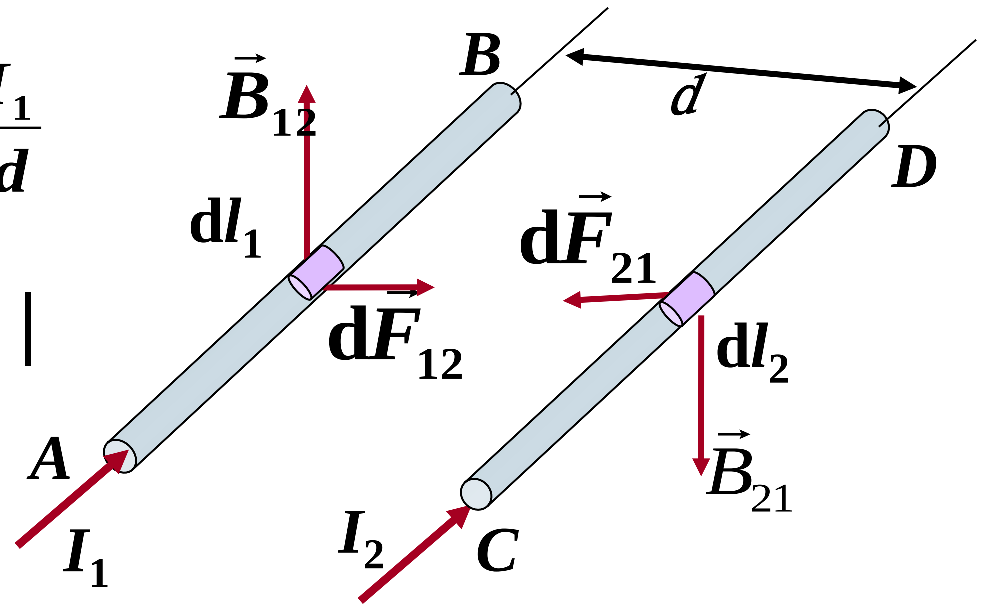
结论：

均匀磁场中任意闭合导线所受的磁场力等于0。

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

例：无限长平行载流直导线间的相互作用力

$$B_{12}=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \qquad B_{21}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$



$$|\mathrm{d}\vec{F}_{12}|=|I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{B}_{12}|$$

$$=I_1\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}\mathrm{d}l_1$$

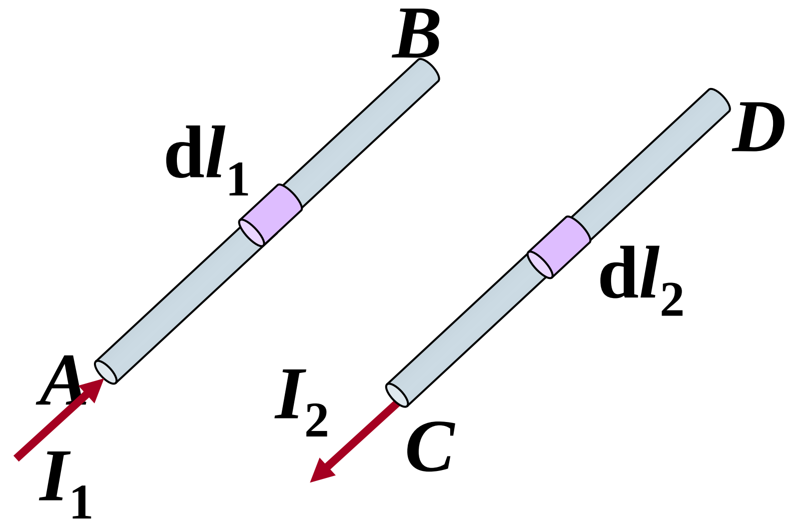
$$|\mathrm{d}\vec{F}_{21}|=|I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\vec{B}_{21}|=I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\mathrm{d}l_2$$

载流导线AB单位长度所受的力:

$$\frac{\mathrm{d}F_{12}}{\mathrm{d}l_1}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

$$\frac{dF_{12}}{dl_1}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

思考:



电流单位“安培”定义如下:

真空中当两无限长圆形截面平行载流导线相距1m,通有相同电流,单位长度的相互作用力为2×10^{7} N时,导线内电流为1安培.

验证如下: 当$I_1=I_2=1$A,

$$\frac{d\vec{F}}{dl}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}=\frac{\mu_0}{2\pi}=2\times10^{7}\ \mathrm{N/m}$$

二、均匀磁场对载流线圈的作用

在均匀磁场中的刚性矩形载流线圈

$$\left.\begin{aligned} F_{ab} &= I\overline{ab}B\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \\ F_{cd} &= I\overline{cd}B\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \end{aligned}\right\}\text{大小相等，方向相反}$$

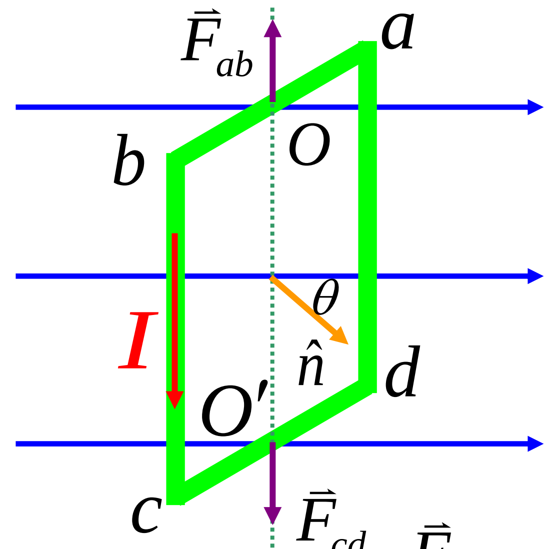
$$\left.\begin{aligned} F_{bc} &= I\overline{bc}B \\ F_{da} &= I\overline{da}B \end{aligned}\right\}\text{大小相等，方向相反}$$

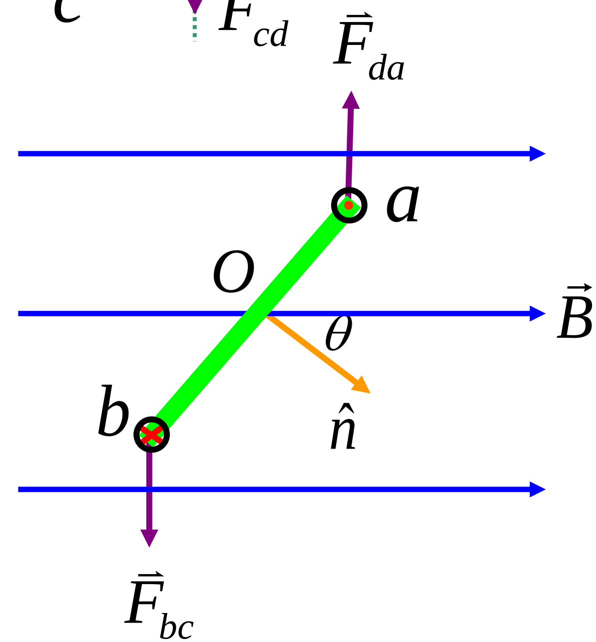
载流线圈受的合力为零。

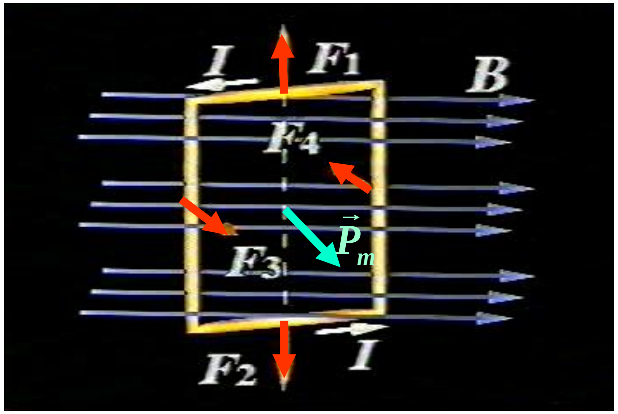
$F_{bc}=F_{da}$ —— 形成力偶。

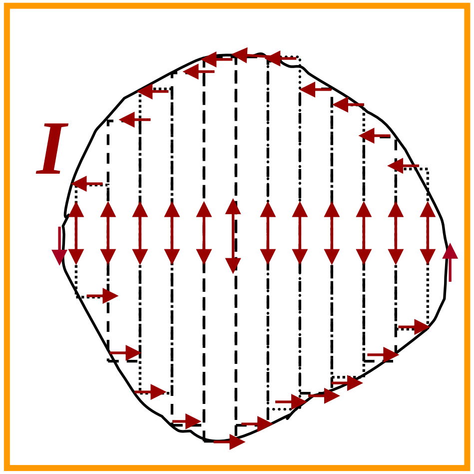
线圈所受的磁力矩

$$\vec{M}=\vec{p}_m\times\vec{B}$$









$\sum \vec{F} = 0 \qquad \vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$

对于任意形状平面载流线圈 ～许多小矩形线圈的组合 .

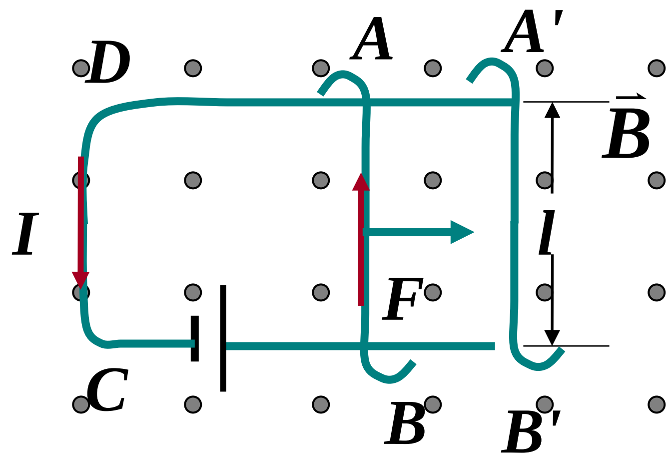
所以平面载流线圈在均匀磁场中 $\sum \vec{F} = 0$ 不平动

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B} \begin{cases} \text{转动到 } \vec{P}_m \text{ 与 } \vec{B} \text{ 同向：稳定平衡} \\ \text{若 } \vec{P}_m \text{ 与 } \vec{B} \text{ 反向：不稳定平衡 .} \end{cases}$$

非均匀磁场中：$\left.\begin{array}{l} \sum \vec{F} \neq 0 \\ \sum \vec{M} \neq 0 \end{array}\right\}$ 不但转动，还要平动，移向 $\vec{B}$ 较强的区域 .

三、磁力的功

1、载流导线在均匀磁场中运动时磁力所作的功



载流导线AB在均匀磁场所受的磁力:

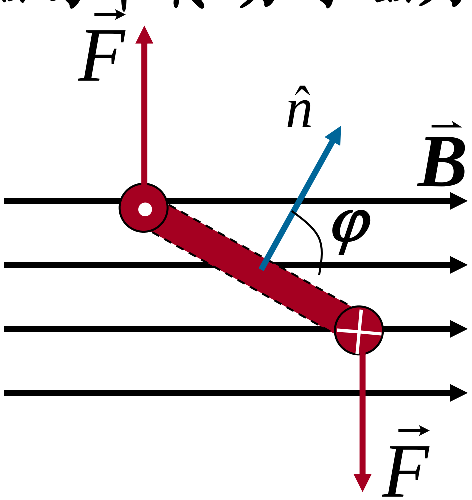
$$F = BIl$$

导线AB在磁力作用下移动到A'B':

$$A = Fs = BIl\overline{AA'} = I\Delta\varphi_m$$

在导线移动中，磁力作的功 $A = I\Delta\varphi_m$

2、载流线圈在均匀磁场中转动时磁力所作的功



载流线圈在磁场中受到的磁力矩:

$$M = BIS\sin\varphi$$

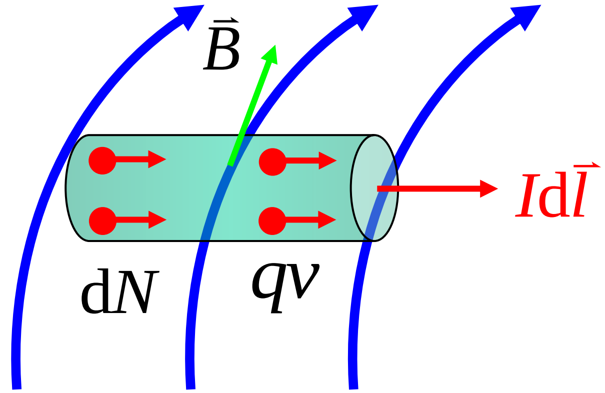
设载流线圈在磁力矩作用下偏转一个微小的角度d φ:

$$dA = -Md\varphi = -BIS\sin\varphi \cdot d\varphi = BISd(\cos\varphi) = Id(BS\cos\varphi)$$

载流线圈在磁场中转动时磁力所作的功 $A = I\int d\Phi = I\Delta\Phi$

§6 磁场对运动电荷的作用

一、 洛仑兹力



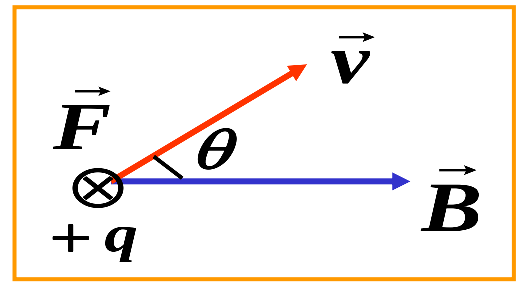
在磁场中运动的带电粒子受磁场力--洛仑兹力:

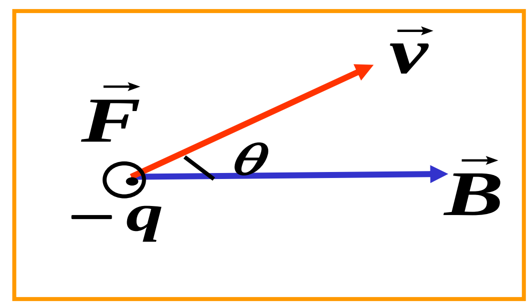
$$\vec{f}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

大小: $F = qvB\sin\theta$

方向: 垂直于 ($\vec{v}$, $\vec{B}$) 平面

$$\begin{cases} +q: & \vec{v} \times \vec{B} \text{ 方向} \\ -q: & -(\vec{v} \times \vec{B}) \text{ 方向} \end{cases}$$





特点: 不改变 $\vec{v}$ 大小，只改变 $\vec{v}$ 方向.
不对 q 做功.

$$\vec{f}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

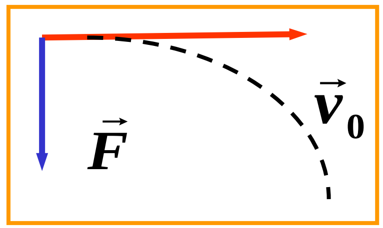
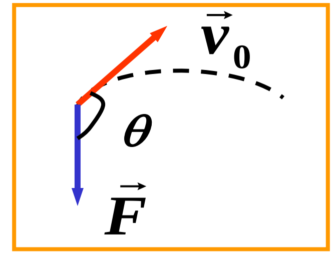
- 讨论

(1) 在一般情况下，空间中电场和磁场同时存在

$$\vec{f}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \mathrm{d}\vec{p} / \mathrm{d}t$$

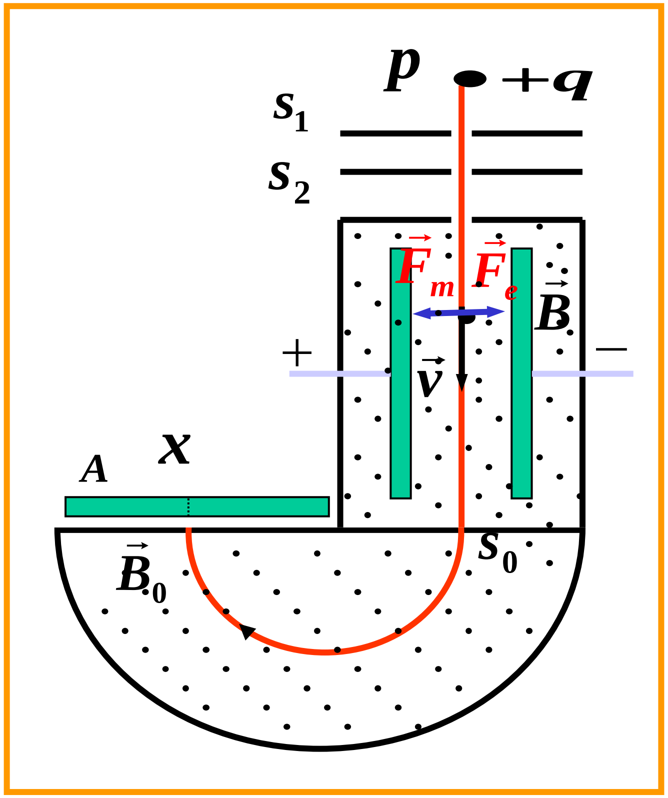
(2) 安培力是大量带电粒子洛仑兹力的叠加。

2. 带电粒子在电磁场中的运动

匀强电场	$\vec{v}_0 // \vec{E}$	$\vec{v}_0 \perp \vec{E}$	$\vec{v}_0$与 $\vec{E}$ 夹θ角
	$\vec{F} = q\vec{E}$		
	匀变速直线运动	类平抛 	类斜抛 
匀强磁场	$\vec{v}_0 // \vec{B}$	$\vec{v}_0 \perp \vec{B}$	$\vec{v}_0$ 与 $\vec{B}$ 夹θ 角
	$f_L = 0$	$f_L = qv_0B$	$f_L = qv_0B\sin\theta$
	匀速直线运动	匀速率圆周运动 $R = mv_0/qB$ $T = 2\pi m/qB$	等螺距螺旋线运动 $R = mv_{\perp}/qB = mv_0\sin\theta/qB$ $h = Tv_{//} = \dfrac{2\pi m}{qB}v_0\cos\theta$

应用：

a）质谱仪



滤速器： $qE = qvB$

$$v = E/B$$

质谱分析：

$$x = 2R = \frac{2mv}{qB_0}$$

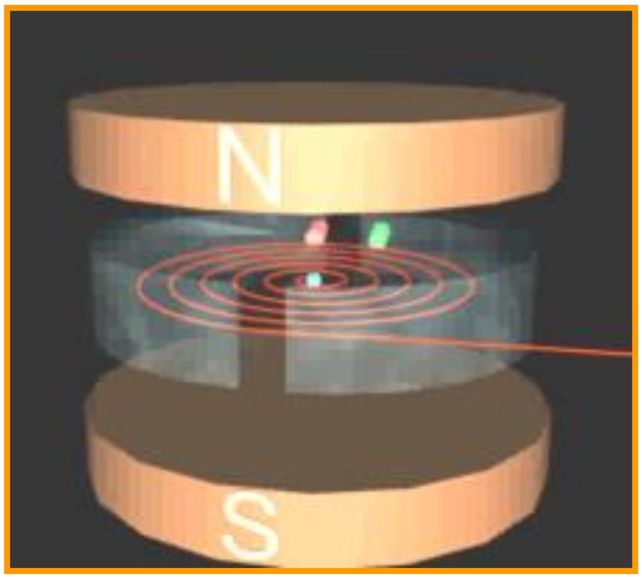
$$m = \frac{qB_0Bx}{2E}$$

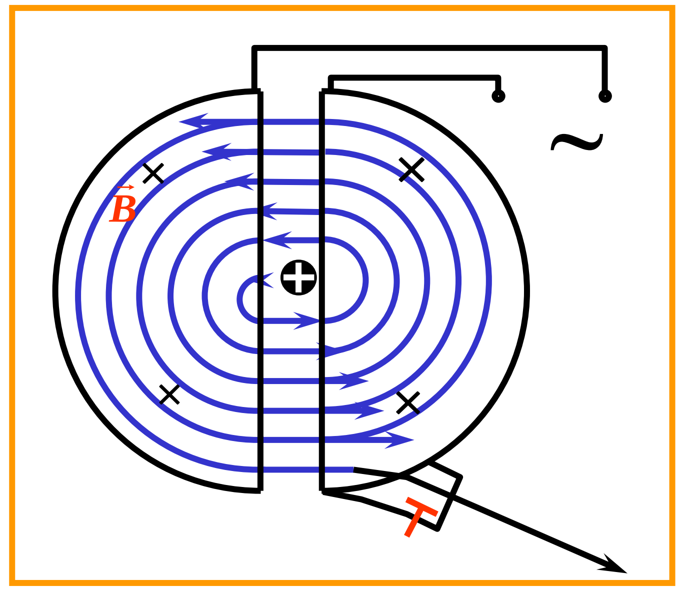
谱线位置：同位素质量

谱线黑度：相对含量

b)回旋加速器

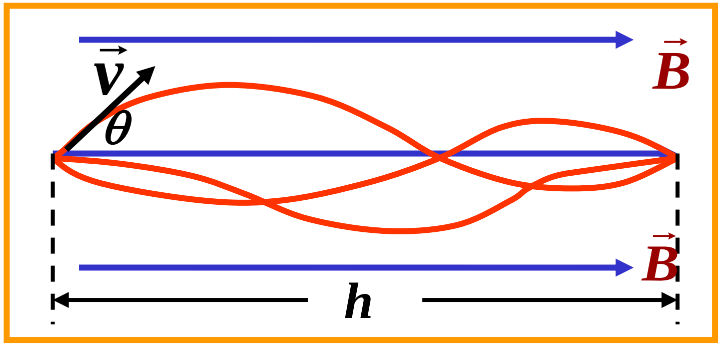
用于产生高能粒子的装置，其结构为金属双 *D* 形盒，在其上加有磁场和交变的电场。将一粒子置于双 *D*形盒的缝隙处，在电场的作用下，能量不断增大，成为高能粒子后引出轰击靶.





c）磁聚焦

均匀磁场，且θ很小：



$$v_{\perp} = v\sin\theta \approx v\theta$$

$$v_{//} = v\cos\theta \approx v$$

$$h = Tv_{//} = \frac{2\pi mv}{qB}$$

带电粒子作不同半径的螺旋线运动，螺距 h 近似相等，带电粒子经过距离h又重新汇集——磁聚集。

具有轴对称性的磁场对电子束说来起着透镜的作用

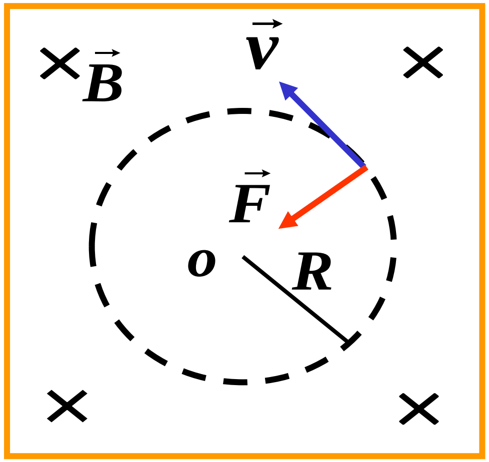
磁透镜 → 电子显微镜

↓

开创物质微观结构研究的新纪元。

d）磁约束:

磁约束: 用磁场将高温等离子体约束在一定空间区域。



横向: $R = mv/qB$

$B\uparrow, R\downarrow$

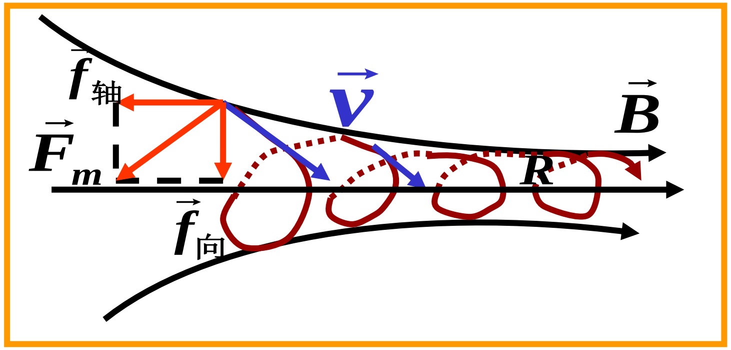
在强磁场中可以将离子约束在小范围。脱离器壁。

[例] 受控热核聚变（磁约束、惯性约束）

惯性约束: 应用于激光核聚变。即依赖核燃料自身惯性来约束，用高能脉冲激光激发核燃料（氘、氚丸），在其飞散前（～10^{-10}s）完成热核反应。

纵向：非均匀磁场。

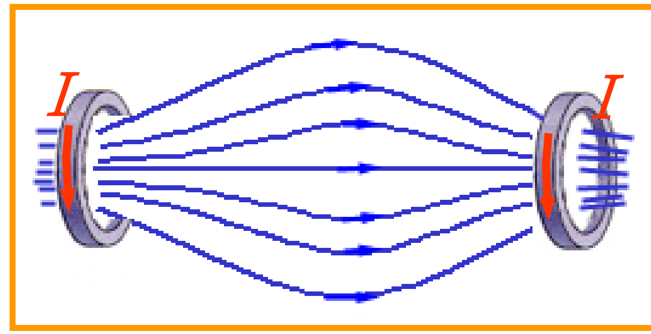
$$h = Tv_{//} = \frac{2\pi mv}{qB}$$

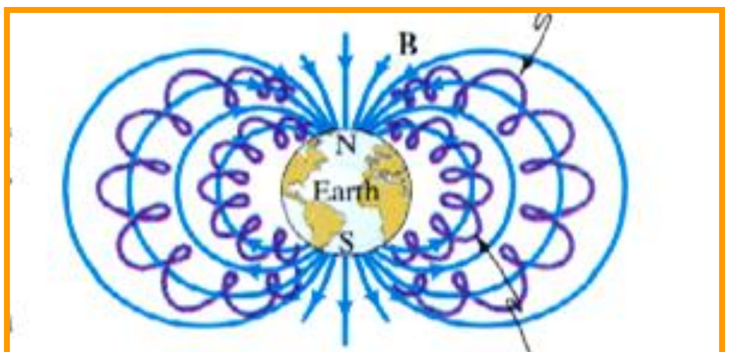


$B\uparrow$, $h\downarrow$, $h\to 0$

反射—— 磁镜

磁瓶：离子在两磁镜间振荡。



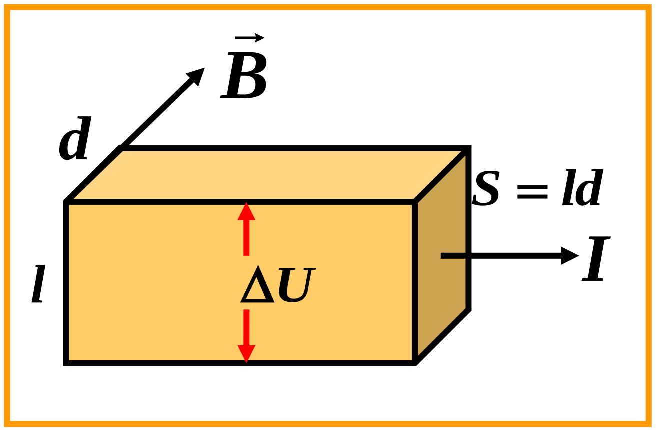


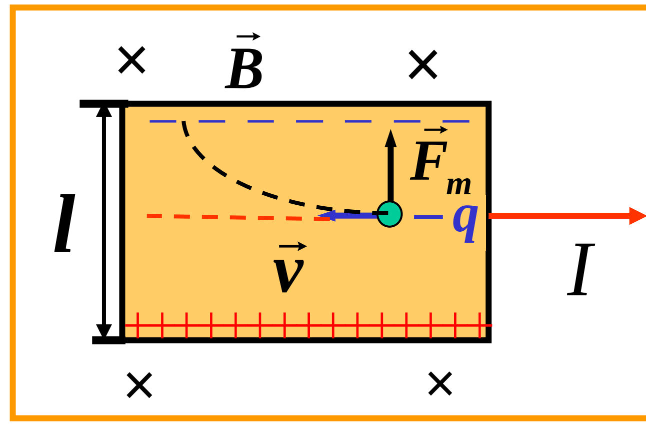
地磁场俘获宇宙射线中带电粒子形成内、外两层范艾伦辐射带

3．霍尔效应（美国人霍尔1879年发现）

（1）现象:

导体中通电流I，磁场$\vec{B}$垂直于I，在既垂直于I，又垂直于$\vec{B}$方向出现电势差ΔU．

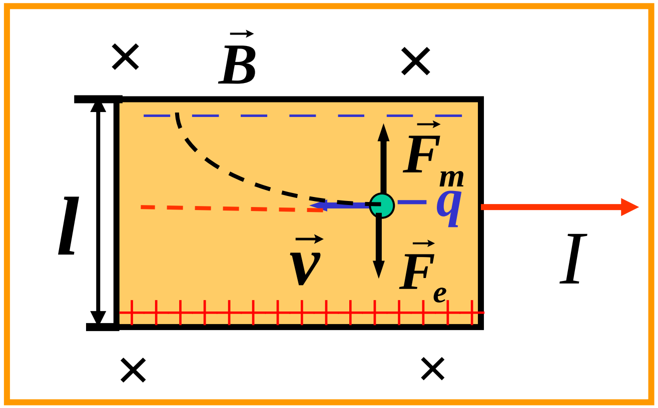




（2）用电子论解释

载流子$q = -e$，漂移速率$\vec{v}$

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$ 方向向上，形成ΔU



$$F_e = qE = q\frac{\Delta U}{l}$$

平衡条件: $F_m = F_e$

$$qvB = q\frac{\Delta U}{l}$$

$$\Delta U = Blv$$

$$I = qvnS = qvnld, \quad v = \frac{I}{qnld}$$

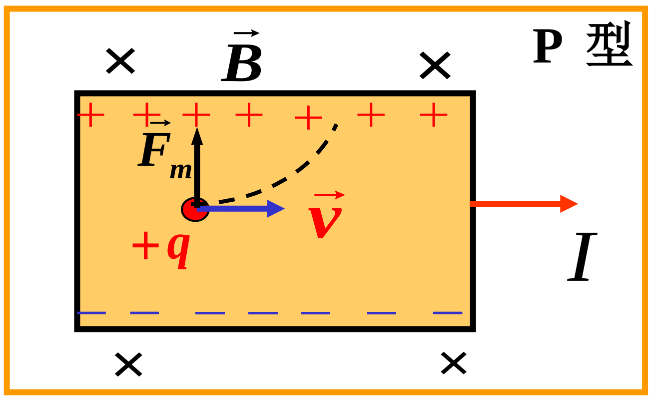
$$\Delta U = Blv = Bl\frac{I}{qnld} = \frac{1}{qn}\frac{BI}{d} = k\frac{BI}{d}$$

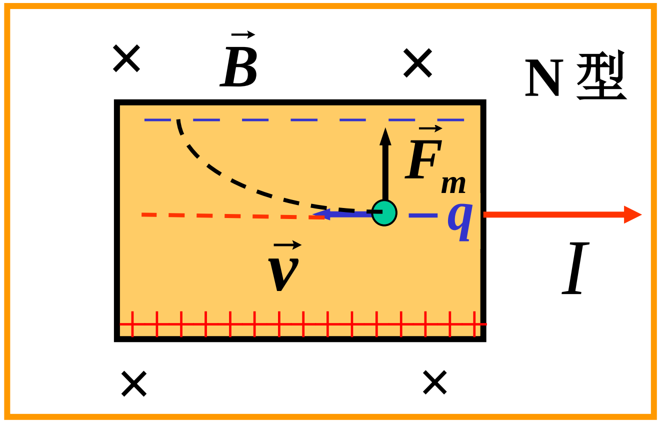
霍尔系数: $\boxed{k = \frac{1}{qn}}$ (金属导体 $k = -\frac{1}{en} < 0$)

(3) 应用:

- 测载流子密度 $n = \dfrac{BI}{\Delta U \cdot q \cdot d}$

- 测载流子电性 — 半导体类型



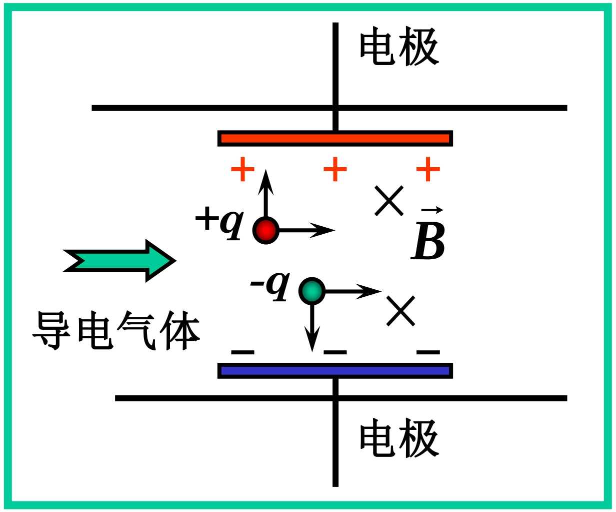


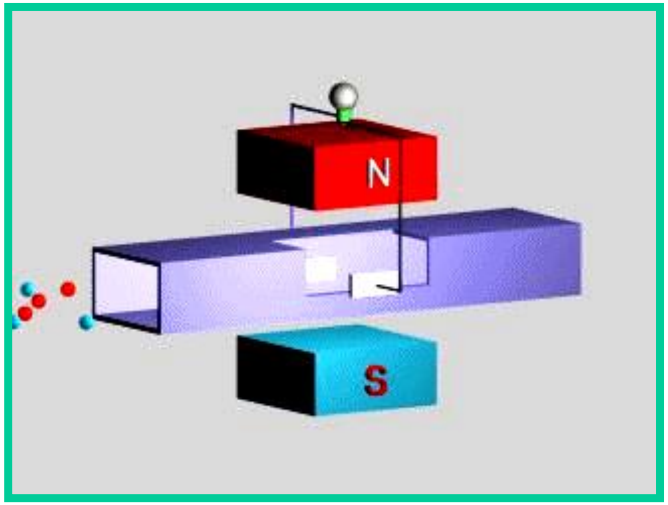
- 测磁场 $\vec{B}$ (霍尔元件)

- 磁流体发电

磁流体发电

把燃料加热而产生的高温（约3000K）等离子体，以高速（约1000 m/s）通过用耐高温材料制成的导管，如在垂直于气体运动的方向加上磁场，则气流中的正、负离子由于受洛仑兹力的作用，将分别向两个相反方向偏转，结果在导管两个电极上产生电势差。如果不断提供高温、高速的等离子气体，便能连续产生电能.



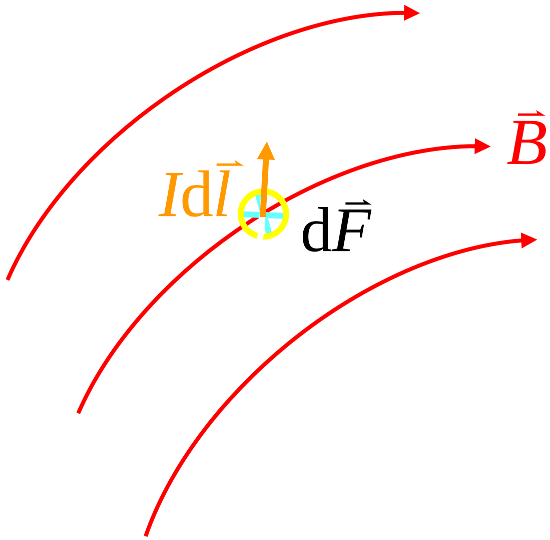


小 结

1、 磁场对电流的作用

(1) 安培力

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$



大小： $\mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB\sin\theta$

方向： $I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

(2) 匀强磁场对平面载流线圈的作用

合力: $\sum \vec{F} = 0$

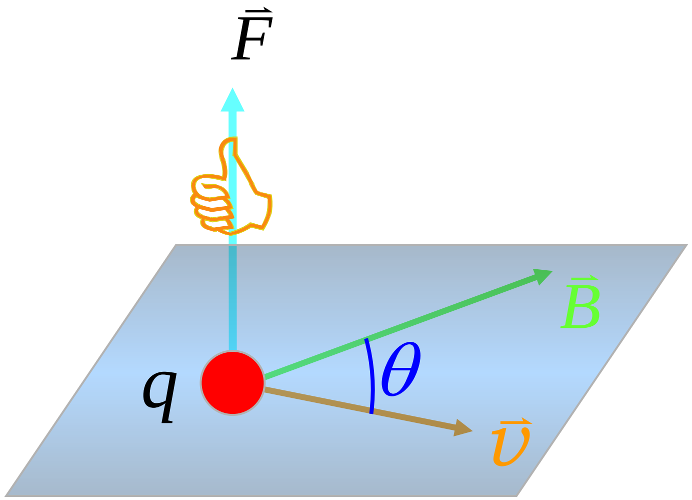
磁力矩: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ ， $\vec{m} = IS\hat{e}_{\mathrm{n}}$ **(磁矩)**

(3) 磁力的功

$$A = \int_{\varphi_{m1}}^{\varphi_{m2}} I\mathrm{d}\varphi_{m} = I\Delta\varphi_{m}$$

2、 磁场对运动电荷的作用

(1) 磁场对运动电荷的作用



洛伦兹力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

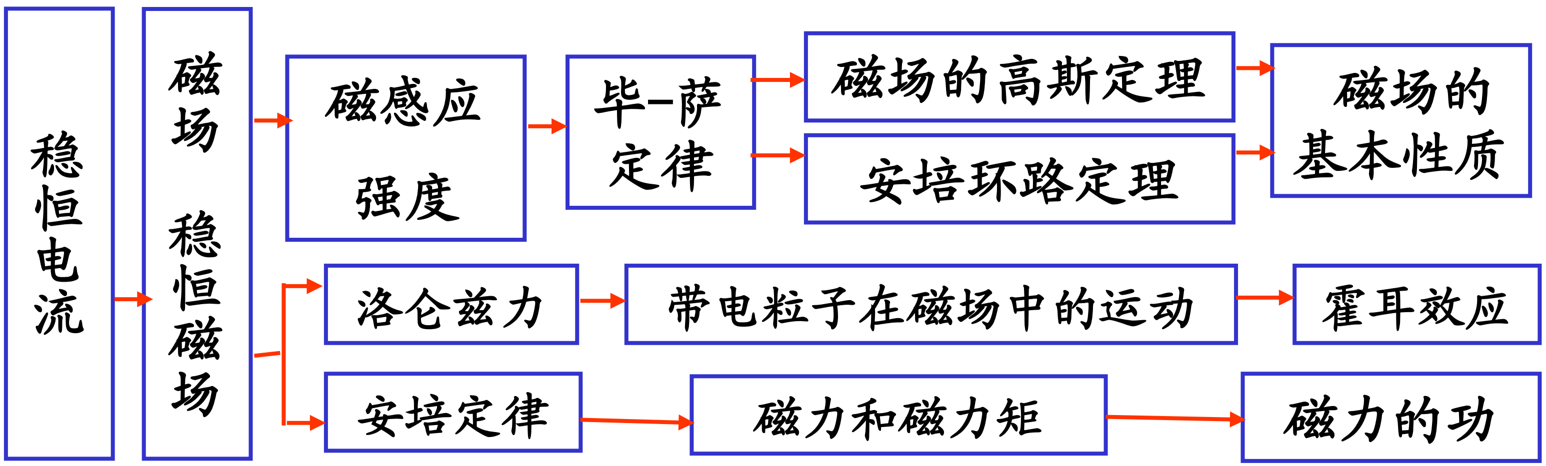
洛伦兹力始终与电荷运动方向垂直，对电荷不作功。

(2) 霍耳效应

霍耳电压 $U_{ab} = R_{\mathrm{H}} \dfrac{IB}{d}$

霍耳系数 $R_{\mathrm{H}} = \dfrac{1}{nq}$

结构框图



稳恒电流
磁场 稳恒磁场
磁感应强度
毕-萨定律
磁场的高斯定理
安培环路定理
磁场的基本性质
洛仑兹力
带电粒子在磁场中的运动
霍耳效应
安培定律
磁力和磁力矩
磁力的功

重点

基本概念： 稳恒电流 磁感应强度，磁通量，电流磁矩

基本规律： 磁场叠加原理， 毕－萨－拉定律及其应用，

稳恒磁场高斯定理和环路定理，

磁场的基本性质（无源场、涡旋场）

基本计算： 稳恒磁场 $\vec{B}$ 分布， 洛仑兹力，安培力，磁力矩

难点

运动电荷之间的相互作用