



电 磁 学

北京邮电大学
理学院物理系

绪论

为什么要学习电磁学？

- 电在生活中无处不在
- 电磁理论是当今科技的基础
- 电磁知识是学习专业知识的基础

电磁学学习什么内容？

- 电磁的基本现象和一般规律
- 处理电磁问题的基本概念和方法

电磁学内容

第七章 真空中的静电场

第八章 静电场中的导体和电介质

第九章 稳恒电流的磁场

第十章 磁介质

第十一章 电磁感应



第七章 真空中的静电场

北京邮电大学
理学院物理系

本章内容

§ 1 电荷 库仑定律

§ 2 真空中的静电场 电场强度

§ 3 电场强度通量 高斯定理

§ 4 静电场的环路定理 电势

§ 5 等势面 电场强度与电势的微分关系

§ 1 电荷 库仑定律

主要内容:

1. 电荷及其属性
2. 点电荷(系)
3. 库仑定律
4. 静电力叠加原理
5. 计算带电体间的静电力

一、什么是电



英语electricity来源于
希腊文

“ $\eta\lambdaεκτρον$ ”，意
思是琥珀



中文“电”的含
义是闪电

二、电荷的基本属性

1. 正负性 正电荷和负电荷。

2. 量子性 电子所带电量 $e = 1.602\ 176\ 462 \times 10^{-19} \text{ C}$

密立根证实物体所带的电荷量是 e 的整数倍, 即

$$q = \pm Ne$$

1964年美国物理学家盖尔曼提出夸克模型,并预言夸克的电荷应为

$$\pm \frac{1}{3}e \text{ 或 } \pm \frac{2}{3}e$$

3. 守恒性

在一个孤立系统中,系统所有电荷的代数和保持不变.

——电荷守恒定律。

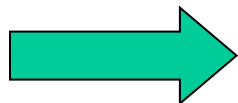
4. 相对论不变性

电荷的电量与它的运动速度和加速度无关。

三、库仑定律

1. 点电荷

离带电体很远



(1) 无大小和形状的几何点

(2) 具有电量 (Q)

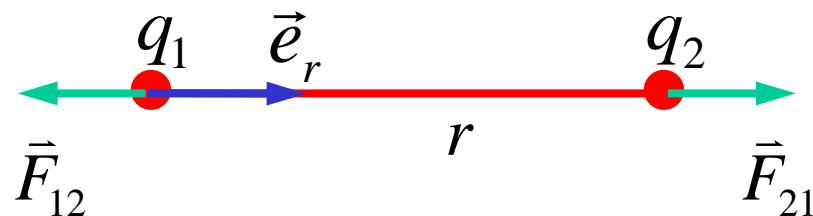
- 理想模型
- 对实际带电物体有条件的合理抽象

2. 库仑定律

在真空中，两个静止的点电荷 q_1 和 q_2 之间的静电相互作用力(静电力或库仑力)与这两个点电荷所带电荷量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，作用力的方向沿着两个点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

电荷 q_1 对 q_2 的作用力 F_{21}

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$



电荷 q_2 对 q_1 的作用力 F_{12}

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

实验测得比例系数 k 为 $k = 8.987\,55 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$

令 $k = 1/4\pi\epsilon_0$, 则 $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854\,187\,82 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{—— 真空中库仑定律}$$

- (1) 平方反比定律;
- (2) 适用于真空中的静止点电荷;
- (3) 满足牛顿第三定律。

比较库仑力和万有引力

$$\vec{F}_C = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r \quad \vec{F}_G = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \vec{e}_r$$

以氢原子为例：质子与电子之间距离 $5.3 \times 10^{-11} \text{m}$.

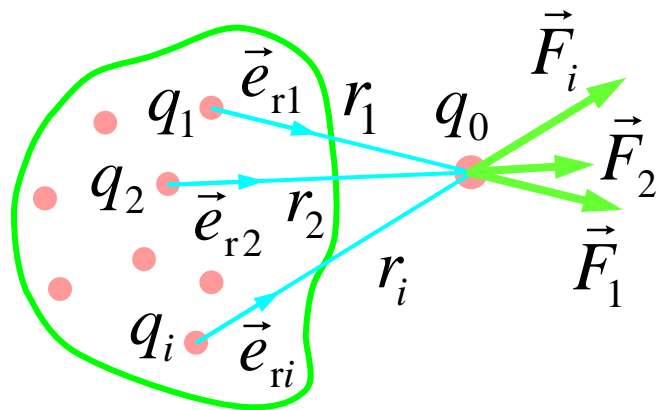
$$F_C = k \frac{e^2}{r^2} = (8.99 \times 10^9) \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$\begin{aligned} F_G &= G \frac{m_e m_p}{r^2} \\ &= (6.67 \times 10^{-11}) \frac{(9.11 \times 10^{-31})(1.67 \times 10^{-27})}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 3.6 \times 10^{-47} \text{ N} \end{aligned}$$

三、 静电力叠加原理

1. 由 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 组成的点电荷系对点电荷 q_0 的静电力

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \\ &= \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri}\end{aligned}$$

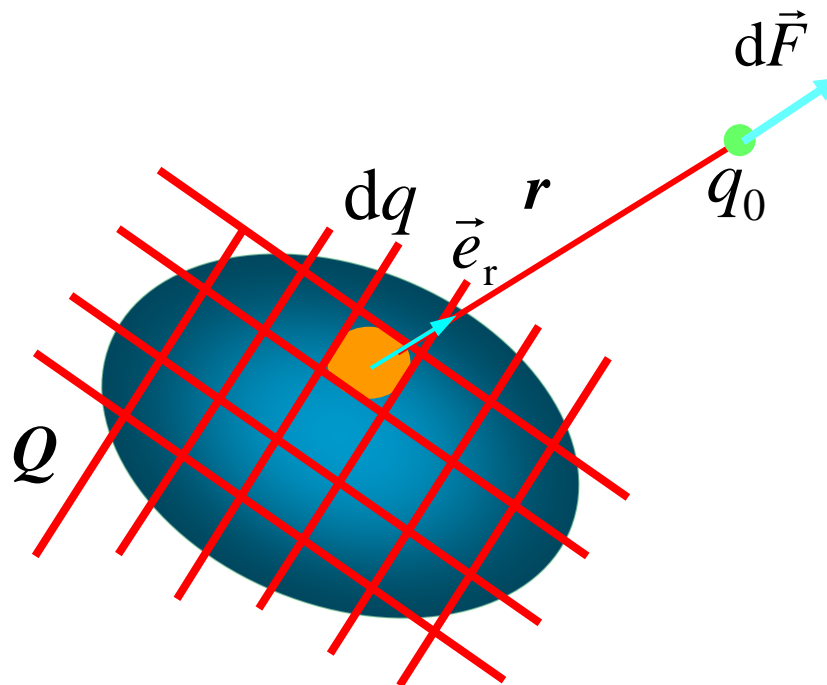


某点电荷受到来自其它点电荷的总静电力等于所有其它点电荷单独存在时的静电力的矢量和。这称为**静电力叠加原理**。

2. 对电荷连续分布的带电体

$$d\vec{F} = \frac{q_0 dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = \int_V \frac{q_0 dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$



例 如图所示，已知点电荷带电量为 q_0 ，细杆均匀带电，电量为 q ，长度为 L ，点电荷与细杆近端相距 a

求 点电荷与带电直杆之间的静电力。

解 设细杆的电荷线密度为 λ

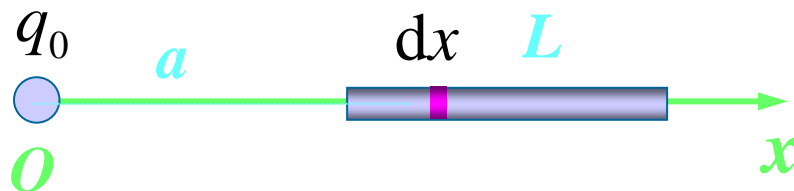
$$\lambda = q / L \quad dq = \lambda dx$$

$$dF = \frac{q_0 \lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

$$F = \int_a^{a+L} \frac{q_0 \lambda dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} = -\frac{q_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{a} \right)$$

$$= \frac{q_0 \lambda L}{4\pi\epsilon_0 a(a+L)} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 a(a+L)}$$

◆ 若 $L \ll a$ $F = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$



§ 2 真空中的静电场 电场强度

主要内容:

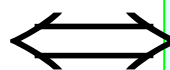
1. 静电场
2. 电场强度
3. 电场强度叠加原理
4. 电场强度的计算

一、 静电场

- 历史上曾有过两种对立的学说

安培“超距作用”学说

电荷



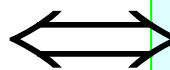
电荷

法拉第提出“场”

电荷



电场



电荷

电磁波证明：场是真实的物理实体

- 电场的特点

(1) 对位于其中的带电体有力的作用。

(2) 带电体在电场中运动, 电场力对其做功。

二、 电场强度

场源电荷 q —— 产生电场的电荷

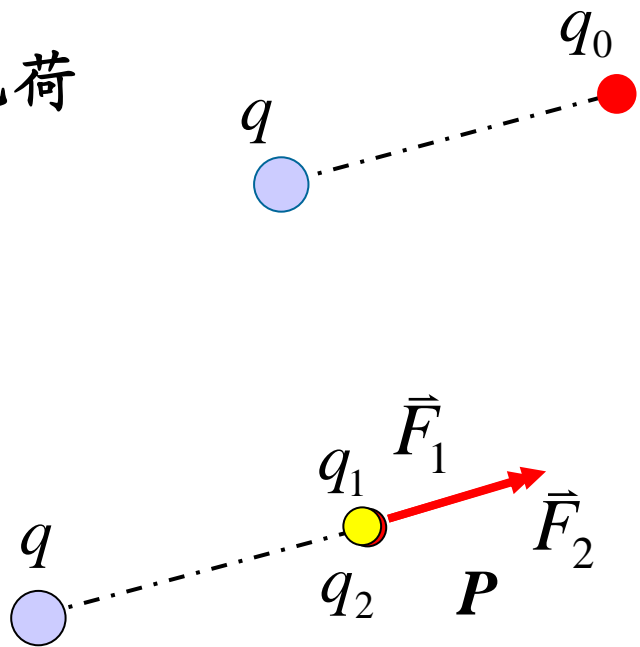
检验电荷 q_0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{带电量足够小} \\ \text{点电荷} \end{array} \right.$

在电场中任一位置处

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \vec{E}$$

定义：电场中某点的电场强度的大小等于单位电荷在该点受力的大小，其方向为正电荷在该点受力的方向。

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0$$



三、 电场强度的计算

1. 点电荷的电场强度

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \vec{e}_r \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$$

2. 电场强度叠加原理

对于点电荷系

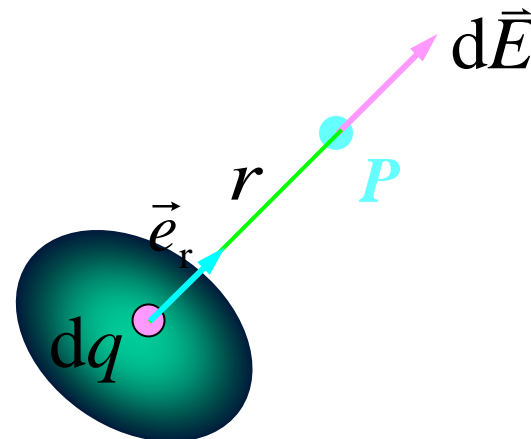
$$\vec{E} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{q_0} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

在点电荷系所激发的电场中，某点的电场强度等于各个点电荷单独存在时在该点产生的电场强度的矢量和。这称为电场强度叠加原理。

3. 连续分布电荷的电场强度

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

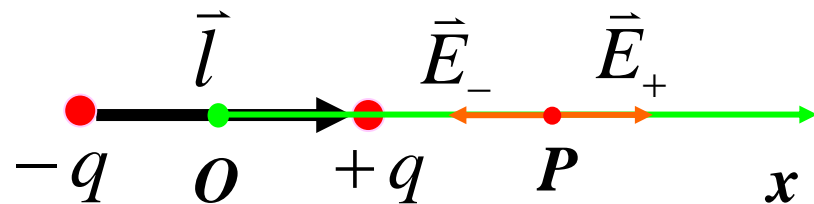


$$dq = \begin{cases} \lambda dl & (\text{线分布}) & \lambda: \text{线密度} \\ \sigma dS & (\text{面分布}) & \sigma: \text{面密度} \\ \rho dV & (\text{体分布}) & \rho: \text{体密度} \end{cases}$$

例 求电偶极子在延长线上和中垂线上一点产生的电场强度

解 电偶极矩: $\vec{p} = q\vec{l}$

对于延长线上任一点



$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x-l/2)^2} \vec{i}$$

$$\vec{E}_- = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(x+l/2)^2} \vec{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q \cdot 2xl}{4\pi\epsilon_0(x^2 - l^2/4)^2} \vec{i} = \frac{2x\vec{p}}{4\pi\epsilon_0(x^2 - l^2/4)^2}$$

◆ 若 $l \ll x$,

$$\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 x^3}$$

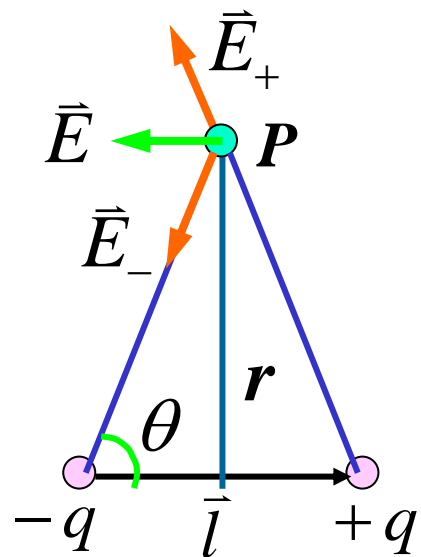
对于中垂线上任一点

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + l^2/4)}$$

$$\begin{cases} E = 2E_+ \cos \theta \\ \cos \theta = \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} \end{cases}$$



$$\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$



◆ 若 $l \ll r$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

◆ 若 $r = 0$

$$\vec{E} = -\frac{2\vec{p}}{\pi\epsilon_0 l^3}$$

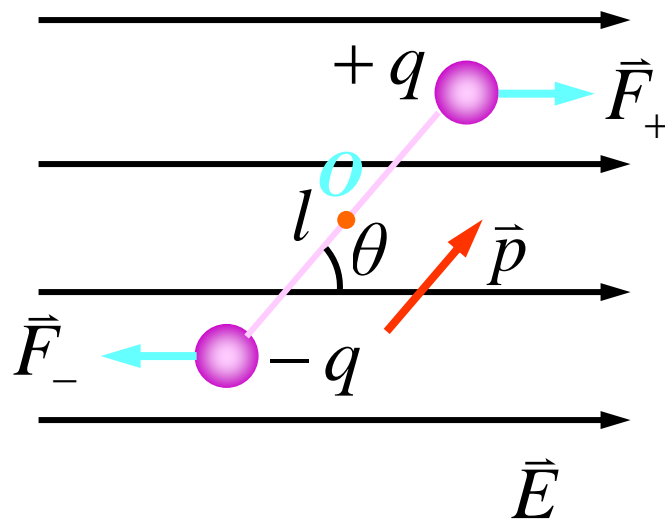
例 求电偶极子在均匀电场中受到的力偶矩。

解 $\vec{F}_+ = q\vec{E}$ $\vec{F}_- = -q\vec{E}$

相对于 O 点的力矩

$$\begin{aligned} M &= F_+ \cdot \frac{1}{2}l \sin\theta + F_- \cdot \frac{1}{2}l \sin\theta \\ &= qlE \sin\theta \end{aligned}$$

$$\vec{M} = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$



➤ 讨论

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 力偶矩最大;

$\theta = 0$ 力偶矩为零 (电偶极子处于稳定平衡);

$\theta = \pi$ 力偶矩为零 (电偶极子处于非稳定平衡)。

电荷连续分布

对于电荷连续分布的带电体，应用叠加原理求电场强度的方法和步骤是：

(1) 根据给定的电荷分布，选定便于计算的坐标系，确定电荷元 dq ($\lambda dl, \sigma ds, \rho dV$);

(2) 将 dq 作为点电荷，列出场点处 $d\vec{E}$ 的大小，并图示 $d\vec{E}$ 的方向：

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

写出 $d\vec{E}$ 的分量式 dE_x, dE_y, dE_z

(3) 统一变量，计算积分

$$E_x = \int dE_x \quad E_y = \int dE_y \quad E_z = \int dE_z$$

例 长为 L ，带电量为 q 的均匀带电直杆

求 带电直杆在空间任一点 P 处产生的电场强度

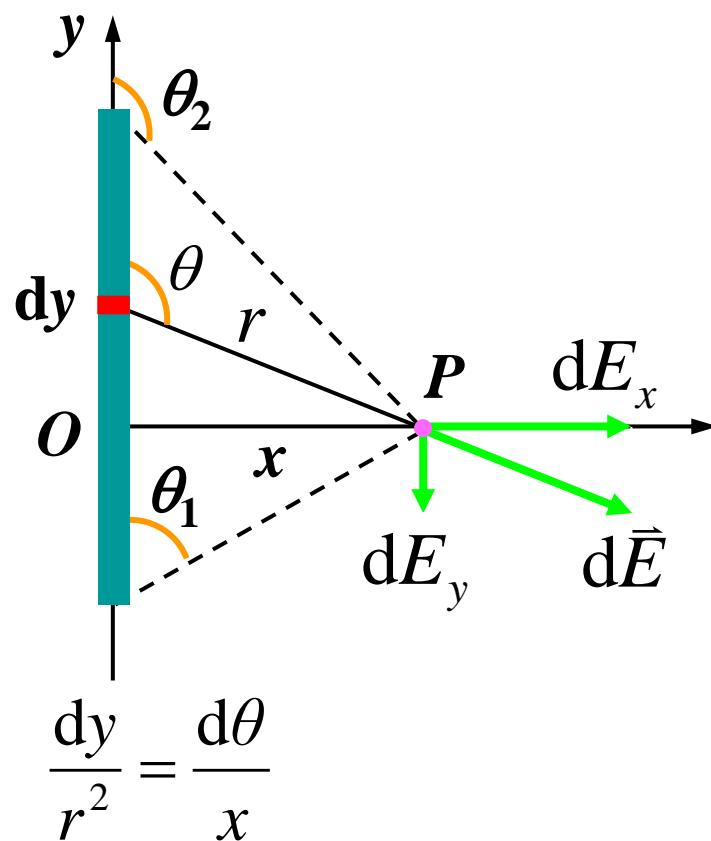
解 设带电直杆的电荷线密度为 λ ，
则 $\lambda = q / L$

$$dq = \lambda dy \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2}$$

$$dE_x = dE \sin \theta \quad dE_y = dE \cos \theta$$

由图上的几何关系

$$\begin{cases} r^2 = y^2 + x^2 = x^2 / \sin^2 \theta \\ y = -x \cot \theta \quad dy = x \sin^{-2} \theta d\theta \end{cases}$$



$$\rightarrow dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \sin \theta d\theta \quad dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos \theta d\theta$$

$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \sin\theta d\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

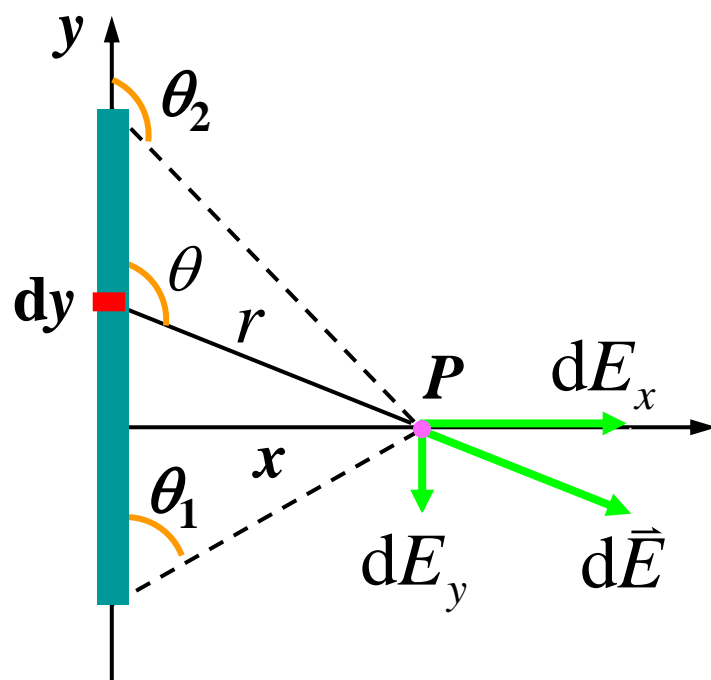
➤ 讨论

(1) $x \gg L$ 杆可以看成点电荷

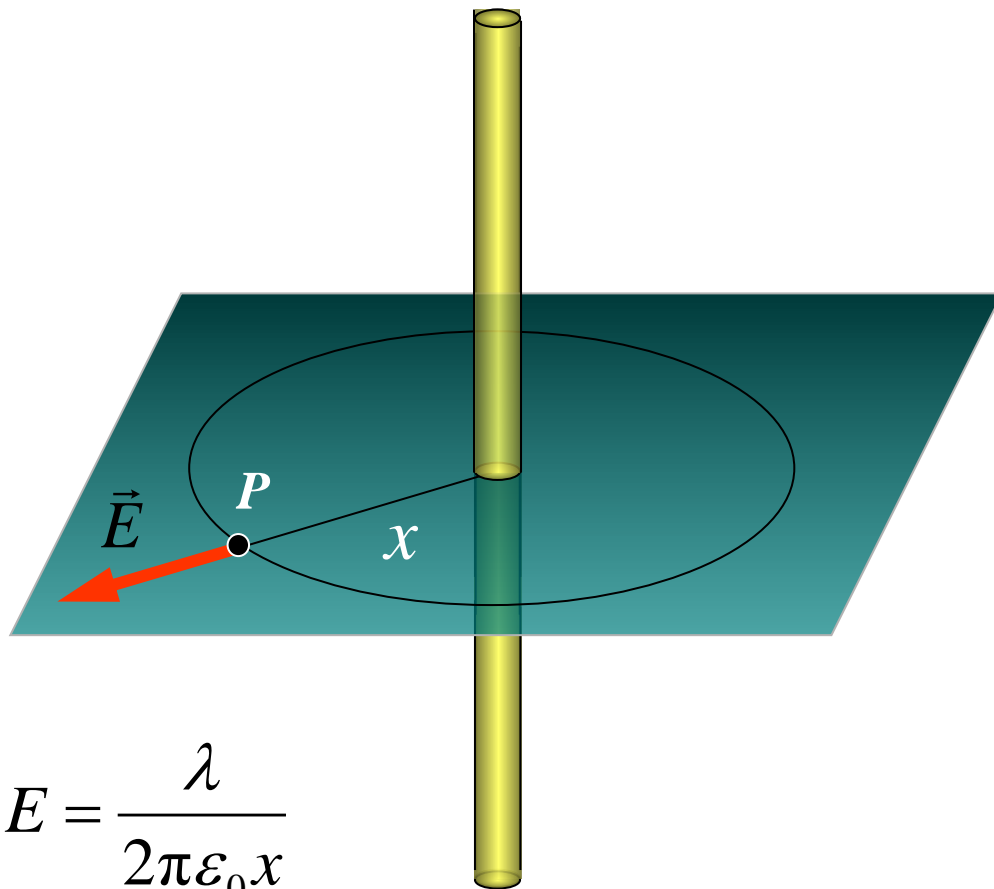
$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad E_y = 0$$

(2) 无限长直导线

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \\ E_y = 0 \end{array} \right.$$



“无限长” 均匀带电直线



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

例 半径为 R 的均匀带电细圆环，带电量为 q 。

求 圆环轴线上任一点 P 的电场强度。

解 $dq = \lambda dl$ $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$

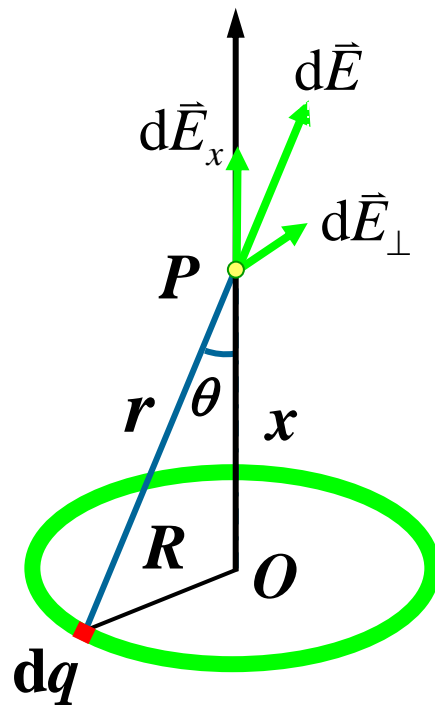
$$dE_{\perp} = dE \sin \theta \quad dE_x = dE \cos \theta$$

圆环上电荷分布关于 x 轴对称 $E_{\perp} = 0$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos \theta$$

由图上的几何关系 $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $r = (R^2 + x^2)^{1/2}$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



➤ 讨论

(1) 当 $x = 0$ (即 P 点在圆环中心处) 时,

$$E = 0$$

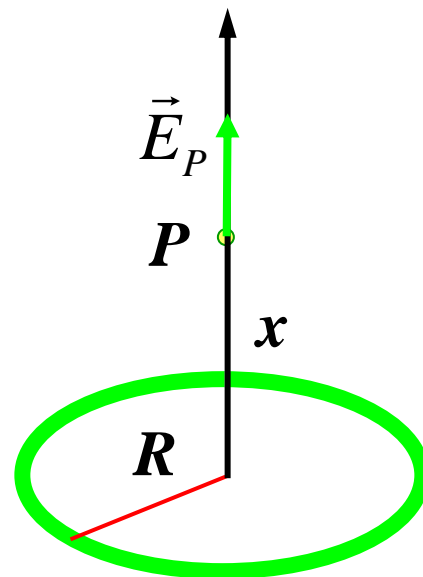
(2) 当 $x \gg R$ 时 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}$

可以把带电圆环视为一个点电荷。

(3) 令 $dE/dx=0$, 则得 E 的极值条件

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(R^2 - 2x^2)}{(R^2 + x^2)^{5/2}} = 0$$

$$\longrightarrow 2x^2 = R^2 \quad x = \pm\sqrt{2}R/2$$



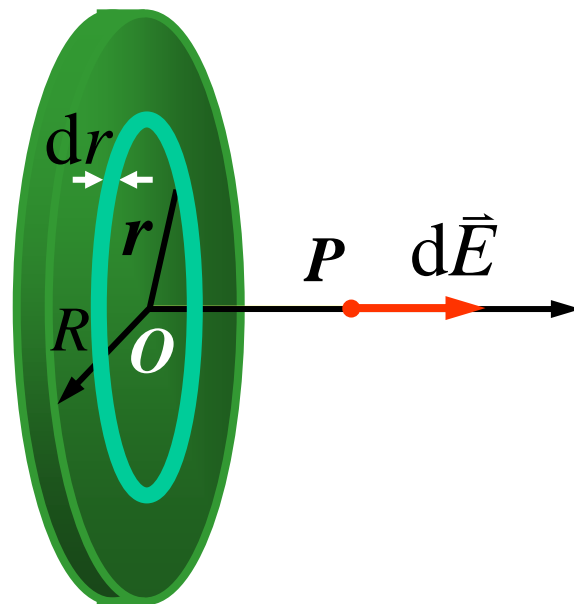
例 面密度为 σ ，半径为 R 的均匀带电圆板在轴线上任一点的电场强度。

解 $dq = 2\pi r dr \sigma$

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \int dE = \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$

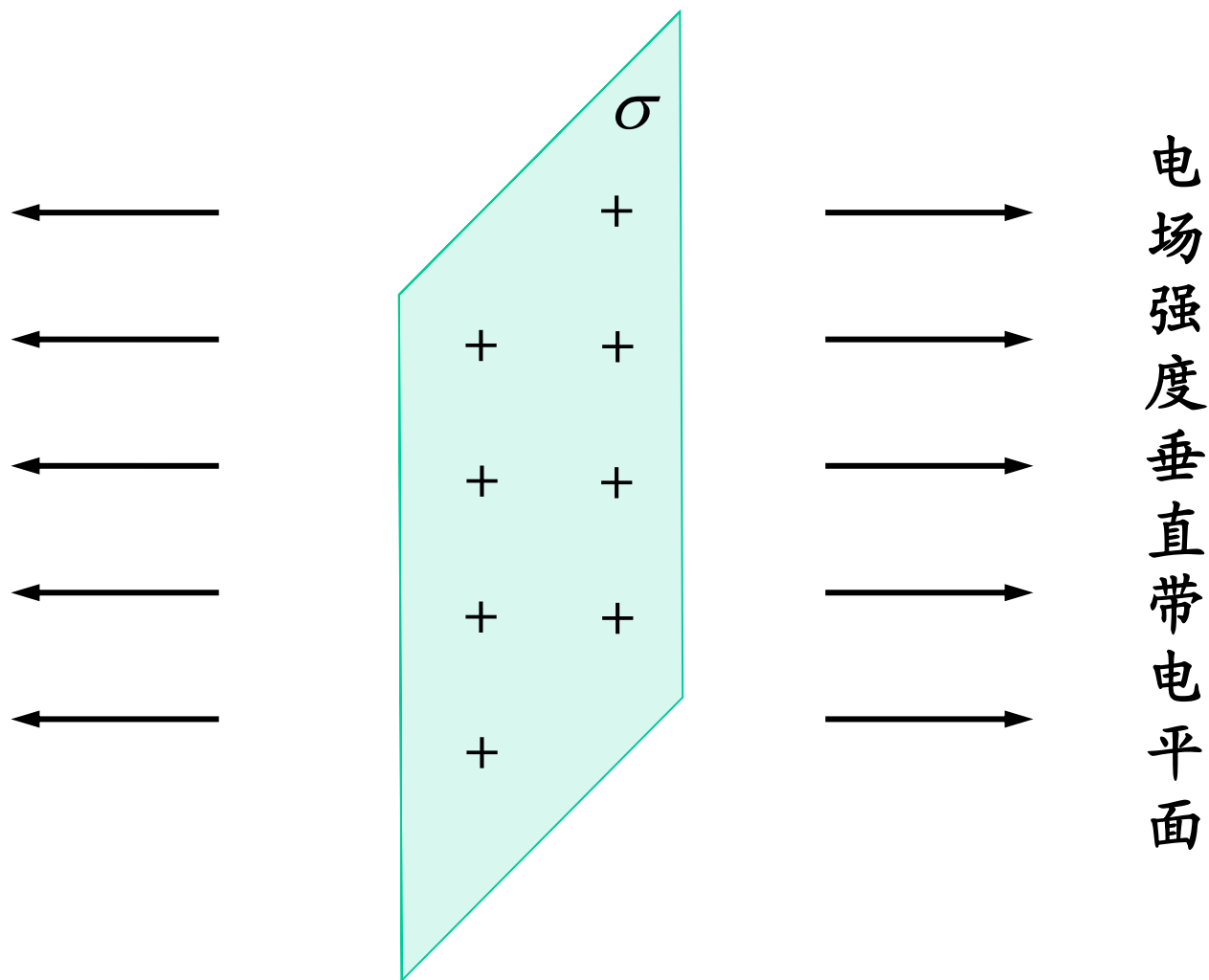
$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$



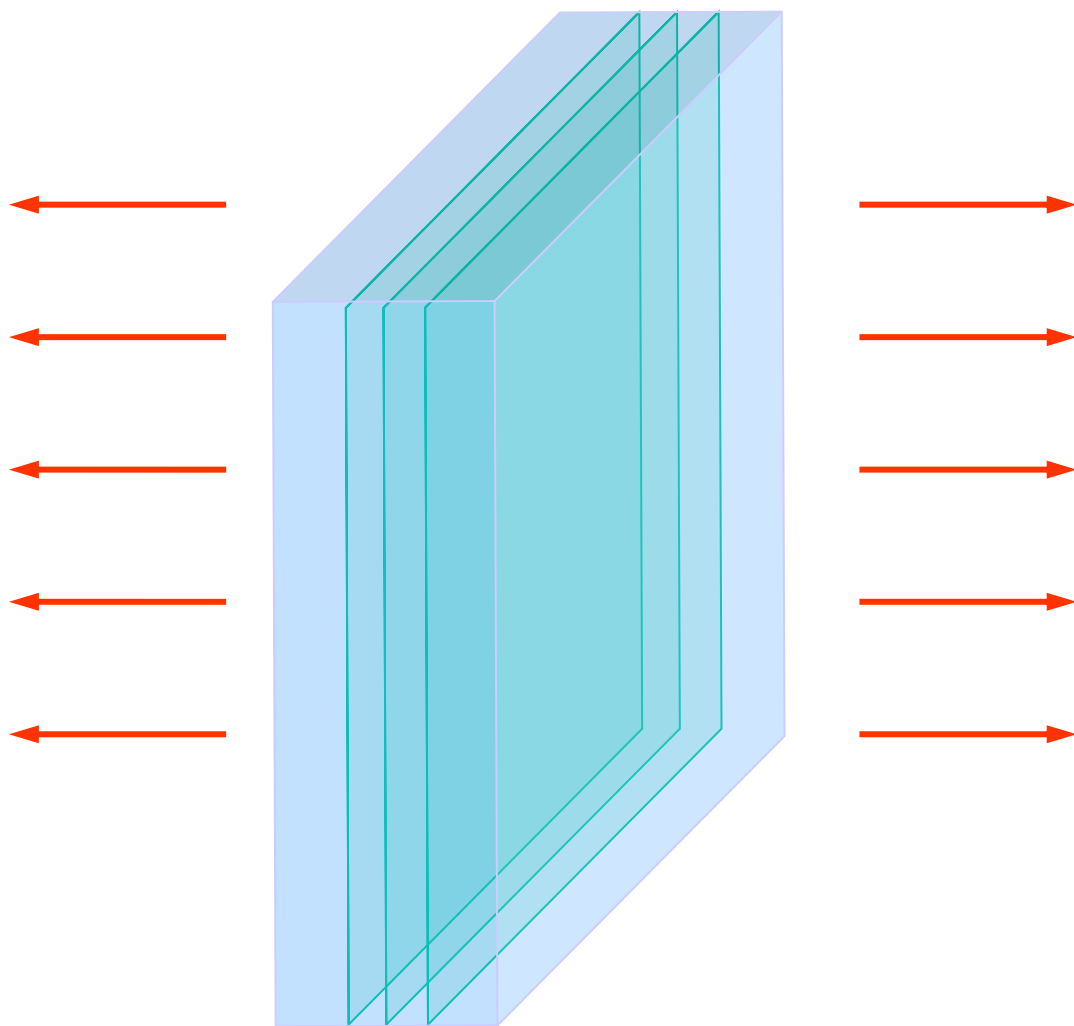
➤ 讨论

(1) 当 $R \gg x$, 圆板可视为无限大薄板

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



(2) 有限厚度“无限大”均匀带电平板



电场强度垂直带电平板

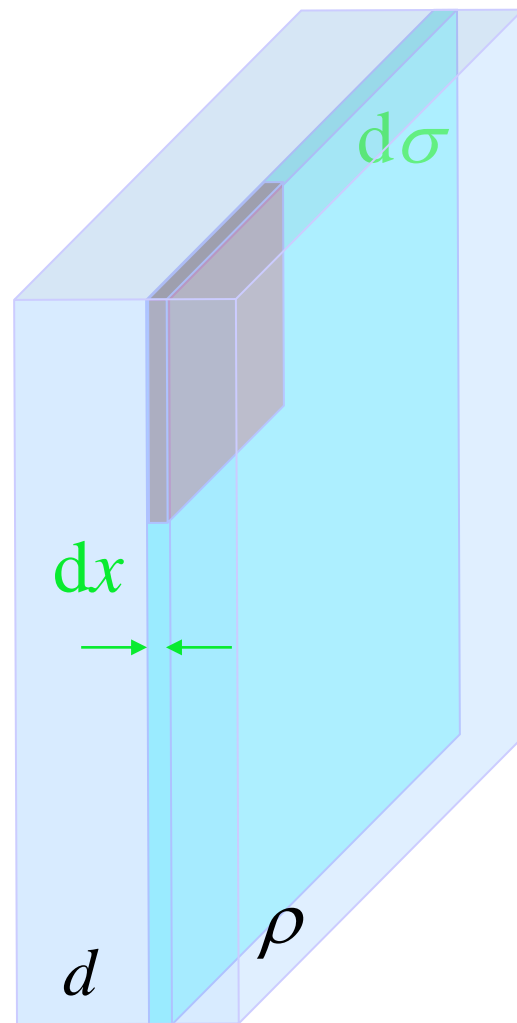
- “无限大”均匀带电平板

薄板电荷面密度为 $d\sigma$

单位面积薄板

体积 $dV = 1 \cdot dx$

带电量 $d\sigma = \rho dx$



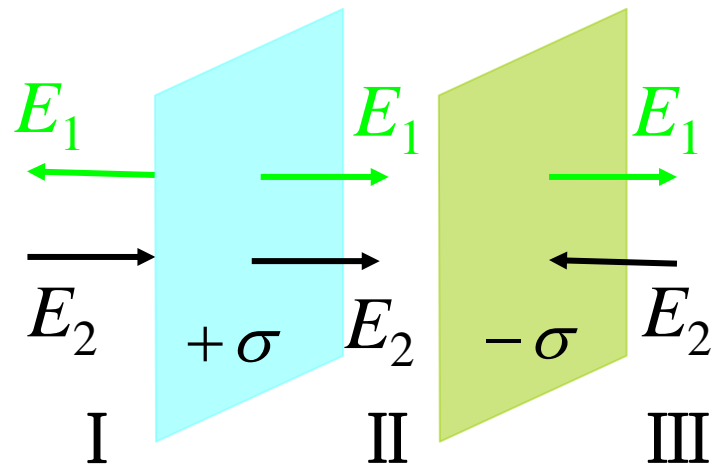
$$\bullet \xrightarrow{\quad} dE = \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \int dE = \int \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0} = \int \frac{\rho dx}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

$$(3) \quad E_{\text{I}} = E_1 - E_2 = 0$$

$$E_{\text{II}} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

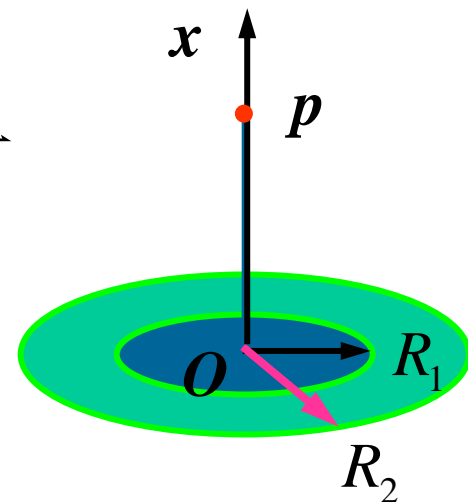
$$E_{\text{III}} = E_1 - E_2 = 0$$



(4) 补偿法

$$\vec{E} = \vec{E}_{R2} + \vec{E}_{R1}$$

$$= \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{(R_1^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_2^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$



§ 3 电场强度通量 高斯定理

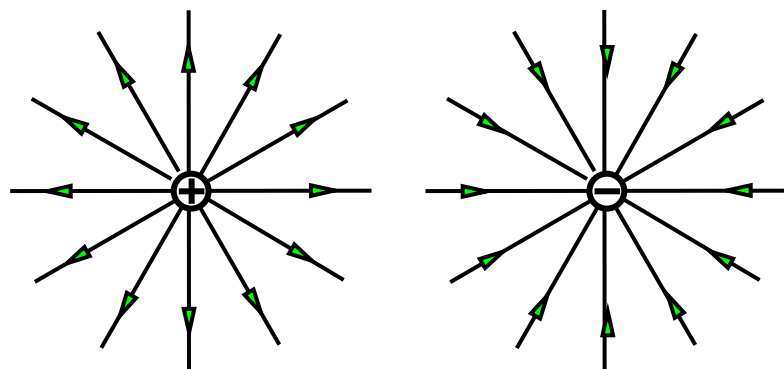
主要内容:

1. 电场线
2. 电场强度通量
3. 高斯定理
4. 库仑定律的实验证明
5. 高斯定理的应用

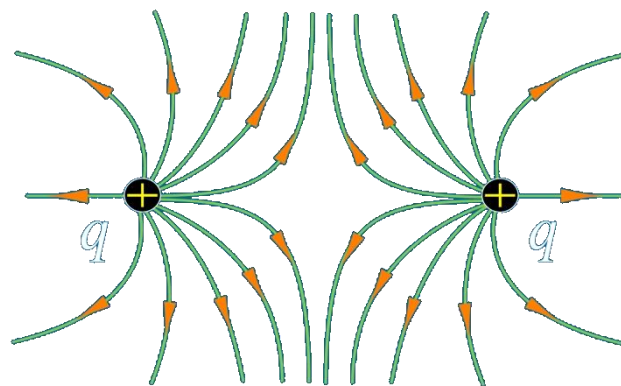
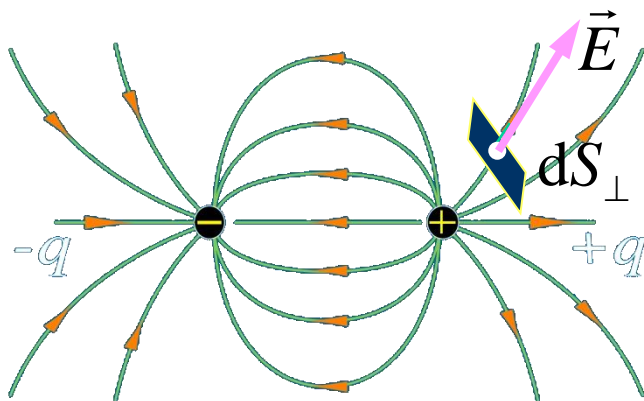
一、电场线

- 起始于正电荷(或无穷远处), 终止于负电荷(或无穷远处)。
- 场强方向沿电力线切线方向, 场强大小决定电力线的疏密。

$$E = \frac{dN}{dS_{\perp}}$$



- 电场线是非闭合曲线, 不相交。



二、 电场强度通量

在电场中穿过任意曲面 S 的电场线条数

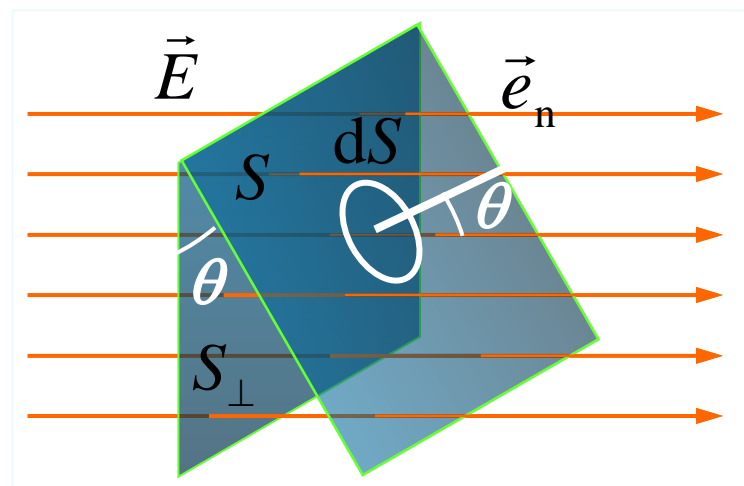
—— (穿过该面的) 电通量(Φ_e)

1. 均匀场中

$$\Phi_e = ES_{\perp} = ES \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

$$d\vec{S} = dS\vec{e}_n$$

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

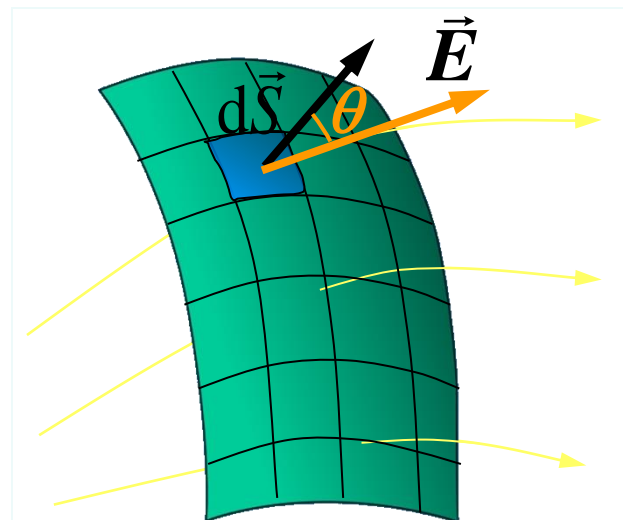


2. 非均匀场中

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

对闭合曲面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



➤ 讨论

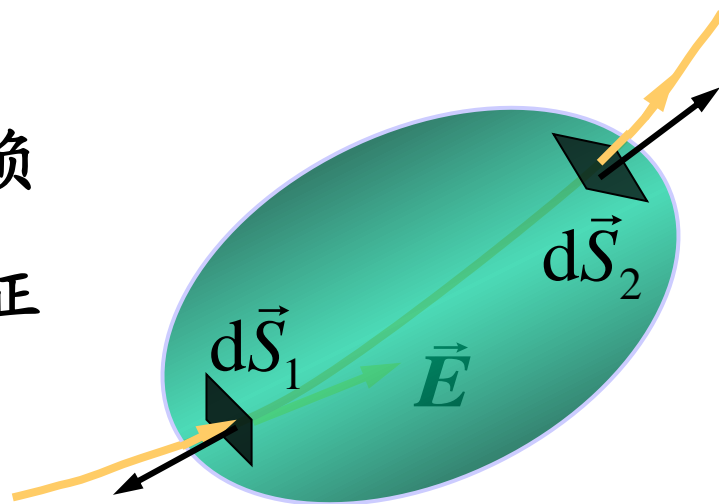
(1) \vec{S} 方向的规定: $\begin{cases} \text{非闭合曲面} & \text{任意, 连续原则} \\ \text{闭合曲面} & \text{向外为正, 向内为负} \end{cases}$

(2) 电通量是代数量

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	—— $d\Phi_e$	为正
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	—— $d\Phi_e$	为负

$$d\Phi_{e1} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 < 0 \quad \text{穿入为负}$$

$$d\Phi_{e2} = \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 > 0 \quad \text{穿出为正}$$



例 均匀电场中有一个半径为 R 的半球面

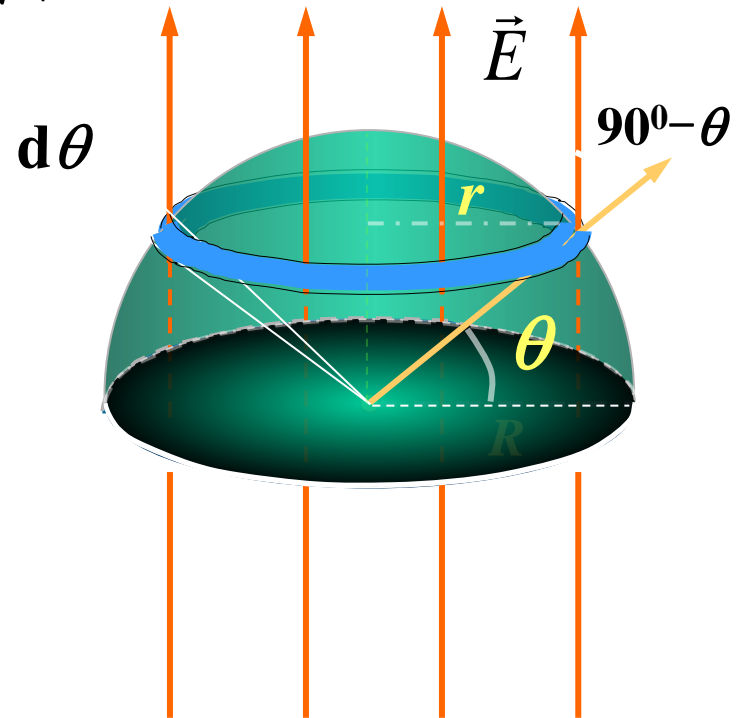
求 通过此半球面的电通量

解 方法1: 通过 dS 面元的电通量

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cos(90^\circ - \theta) dS$$

$$r = R \cos \theta \quad dS = 2\pi r \cdot R d\theta$$

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \int d\Phi_e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} E \pi R^2 \sin 2\theta d\theta \\ &= \pi R^2 E \end{aligned}$$



方法2:

$$\int_{\text{半球面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{底面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{\text{半球面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_{\text{底面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \pi R^2 E$$

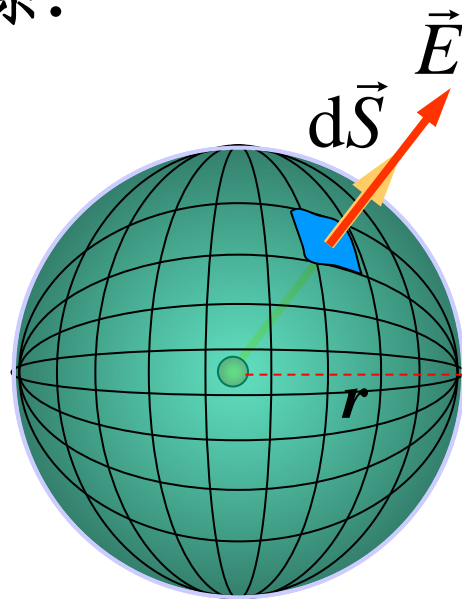
三、高斯定理

以点电荷(系)为例建立 Φ_e —— q 的关系:

1. 点电荷

- q 在球心处, 球面电通量为

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS \\ &= \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$



穿过球面的电场线条数为 q/ε_0

- q 在任意闭合面内, 电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

穿过闭合面的电场线条数仍为 q/ε_0

Φ_e 只与闭合曲面包围的电荷电量 q 有关。

- q 在闭合面外 $\Phi_e = 0$

穿出、穿入的电场线条数相等。

2. 点电荷系

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_5$$

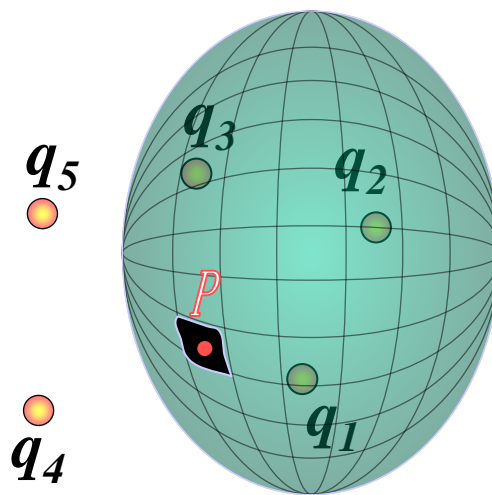
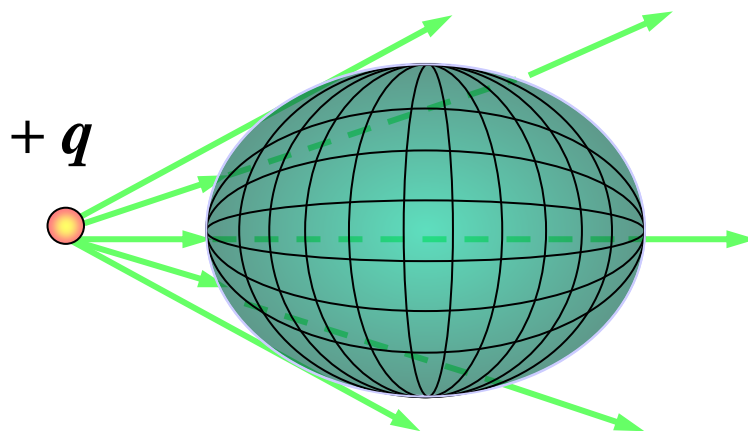
任意闭合面电通量为

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_5) \cdot d\vec{S}$$

$$= \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \dots + \oint \vec{E}_5 \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \frac{q_3}{\epsilon_0} + 0 + 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$



\vec{E} 是所有电荷产生的;
 Φ_e 只与内部电荷有关。

静电场高斯定理

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

真空中的任何静电场中，穿过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的电荷电量的代数和乘以 $1/\varepsilon_0$

3. 对于连续分布的源电荷

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

意义：反映静电场的性质 —— 有源场

讨论

- (1) 高斯定理是由库仑定律导出来的
- (2) 高斯定理反映了库仑定律的平方反比关系
- (3) 高斯定理+各项同性假设可以得到库仑定律
- (4) 高斯定理对静电场的描述是不完备的
- (5) 利用高斯定理可以求有特殊对称性的静电场

四、高斯定理的应用

例 均匀带电球面，电量 Q ，半径 R 。
求 电场强度分布。

解 \vec{E} 取过 P 点的
同心球面为高斯面，电通量为

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E dS = E \oint dS = E 4\pi r^2$$

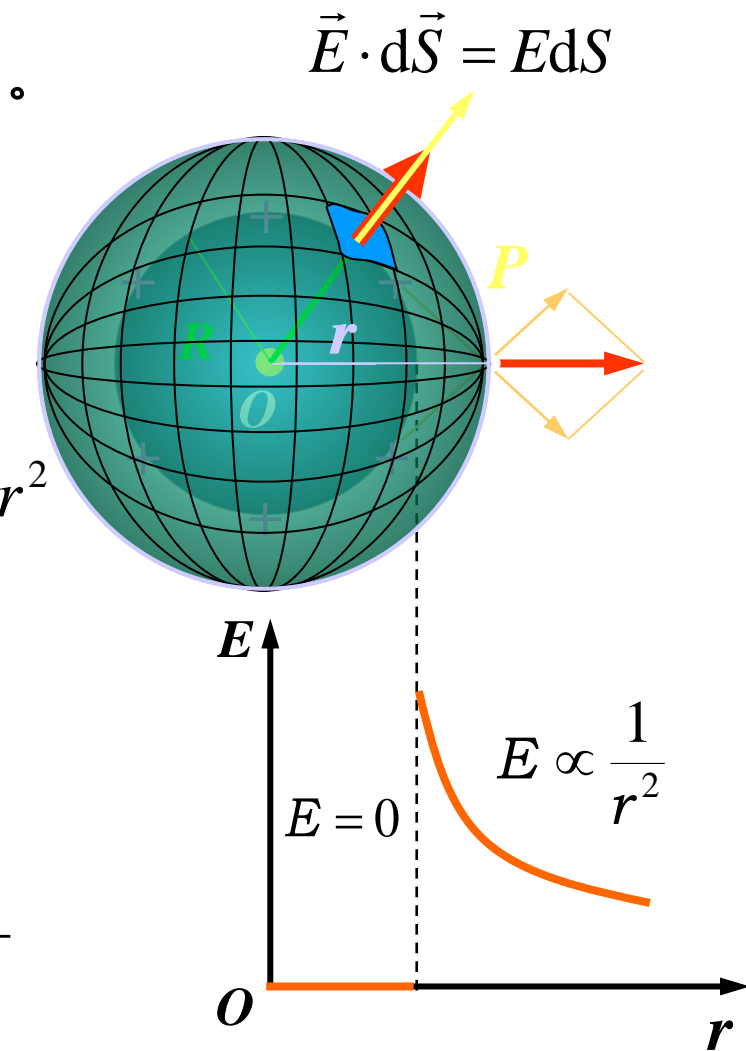
$$E 4\pi r^2 = \frac{\sum q_{\text{内}}}{\epsilon_0}$$

- 球外 ($r > R$)

$$\sum q_{\text{内}} = Q \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- 球内 ($r < R$)

$$\sum q_{\text{内}} = 0 \Rightarrow E = 0$$



◆ 球面 ($r = R$) 处 $E = ?$

例 均匀带电球体，半径为 R ，电荷体密度为 ρ 。

求 电场强度分布。

解 \vec{E} 沿球面法线方向。取同心球面为高斯面，电通量为

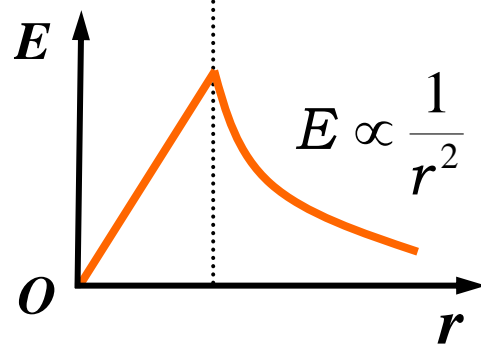
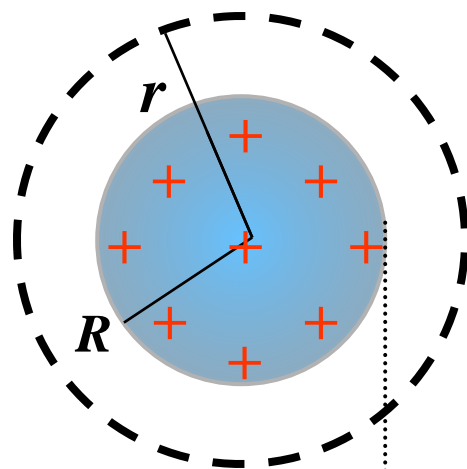
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{\sum q_{\text{内}}}{\varepsilon_0}$$

• 球外($r > R$)

$$\sum q_{\text{内}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \longrightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

• 球内($r < R$)

$$\sum q_{\text{内}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \longrightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



电场分布曲线

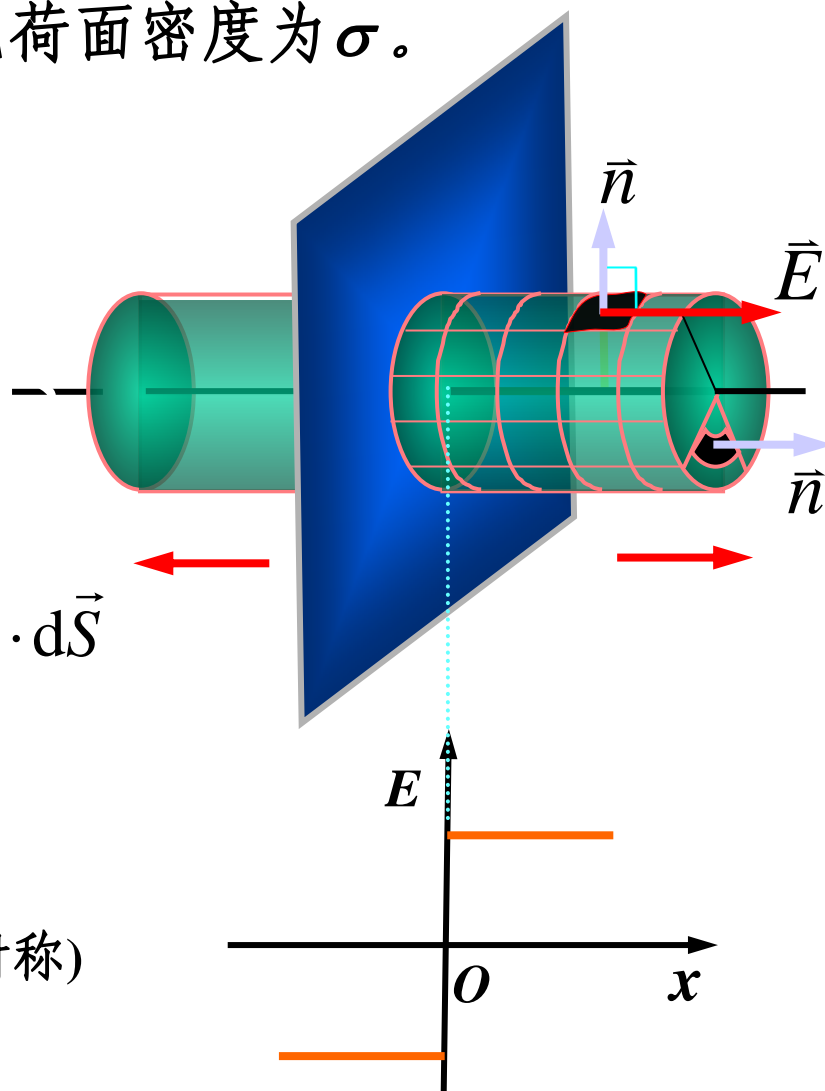
例 “无限大”均匀带电平面，电荷面密度为 σ 。

求 电场强度分布。

解 电场强度垂直带电平面，

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\text{侧}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{左底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{右底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= 0 + \int_{\text{左底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{右底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= 0 + E_1 S + E_2 S \quad (\text{两个底面对称}) \\ &= 2ES\end{aligned}$$

根据高斯定理 $2ES = \sigma S / \varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



➤ 讨论

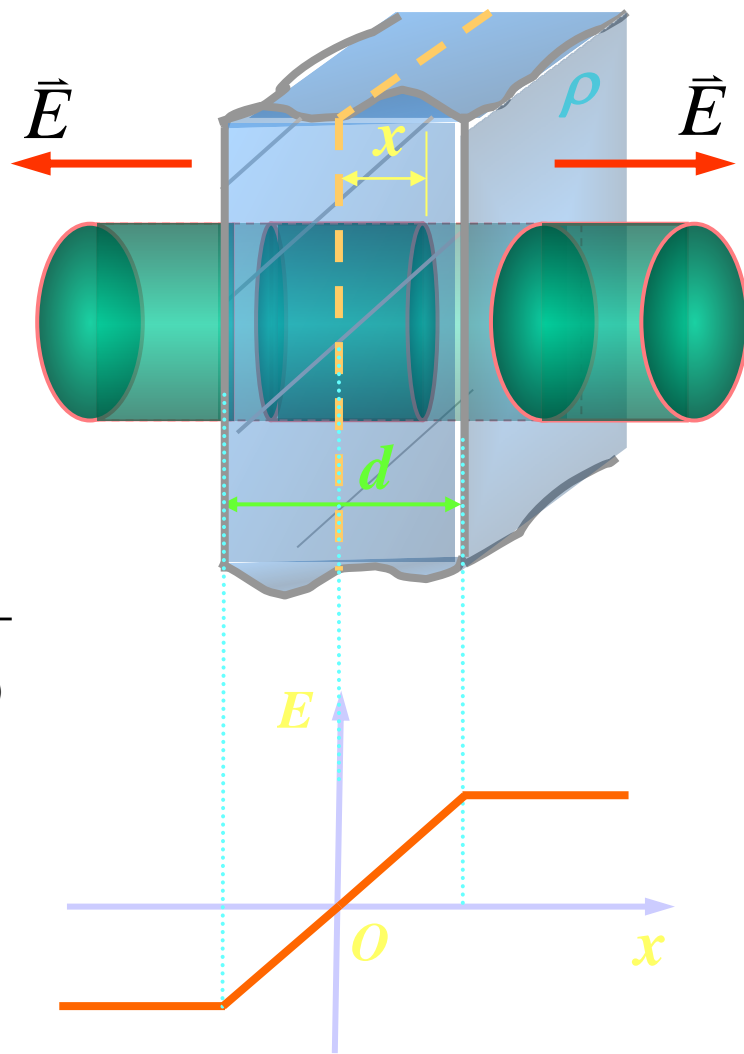
“无限大”均匀带电平板 (电荷体密度为 ρ , 厚度为 d)

取关于平板对称的圆柱面为高斯面。

$$\Phi_e = 2ES$$

$$\text{板外: } \sum q = \rho Sd \Rightarrow E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

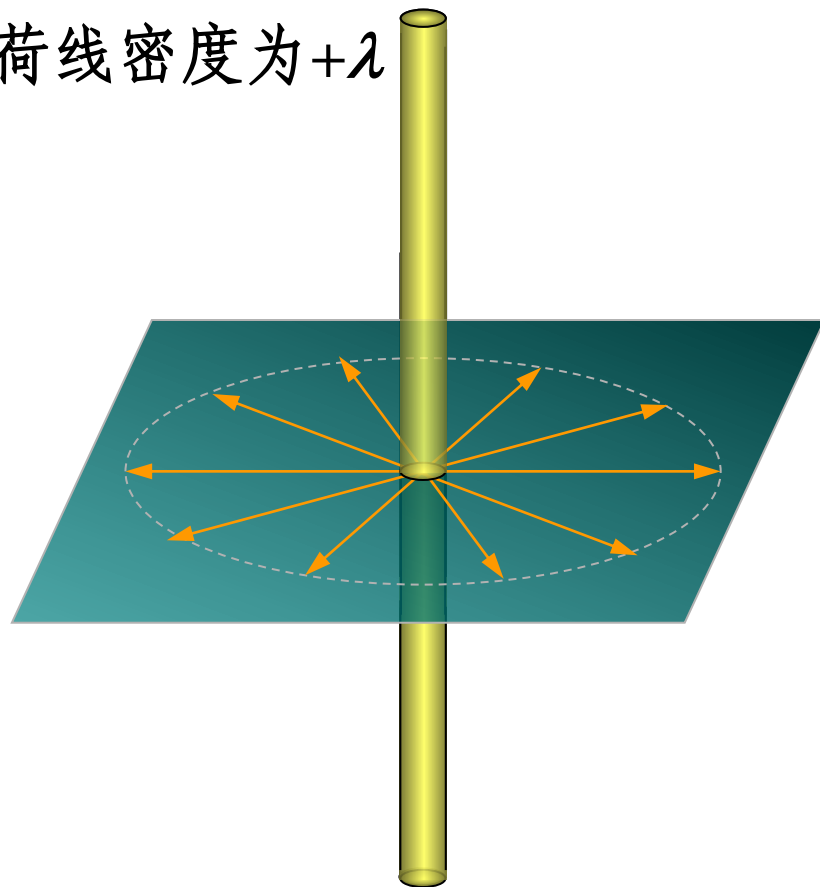
$$\text{板内: } \sum q = \rho S \cdot 2x \Rightarrow E = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$



例 “无限长” 均匀带电直线，电荷线密度为 $+\lambda$

求 电场强度分布

解：电场分布具有轴对称性



例 “无限长” 均匀带电直线，电荷线密度为 $+\lambda$

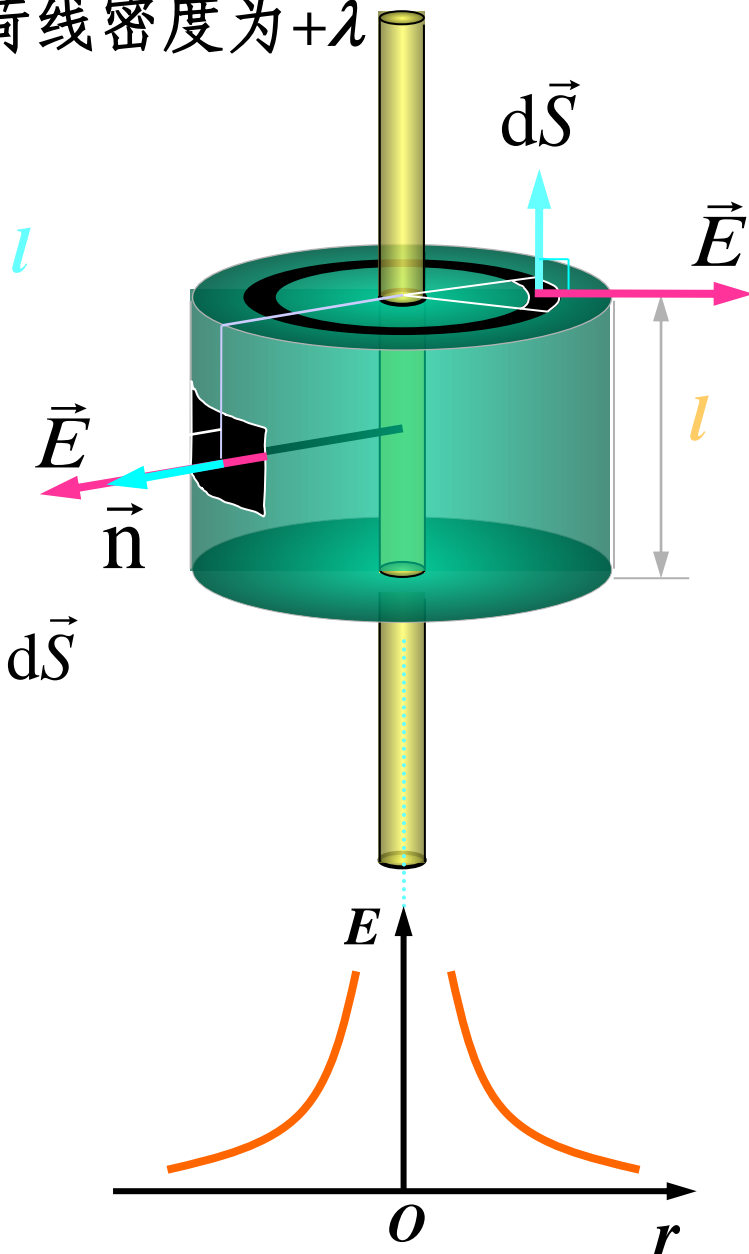
求 电场强度分布

解：电场分布具有轴对称性

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\text{侧}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{上底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{下底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\text{侧}} E dS = E \cdot 2\pi r l\end{aligned}$$

$$E \cdot 2\pi r l = \lambda l / \varepsilon_0$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



总结：

用高斯定理求电场强度的步骤：

- (1) 由电荷分布的对称性，分析电场强度分布的对称性。
- (2) 根据对称性选取适当的高斯面。
 - 高斯面必须是闭合曲面
 - 高斯面必须通过所求的点
 - 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算
- (3) 计算通过高斯面的电通量及其内包围的电荷量。
- (4) 根据高斯定理求电场强度。

§ 4 静电场的环路定理 电势

主要内容：

1. 静电场力的功
2. 静电场的环路定理
3. 电势能
4. 电势 电势差
5. 电势的计算

一、静电场力的功

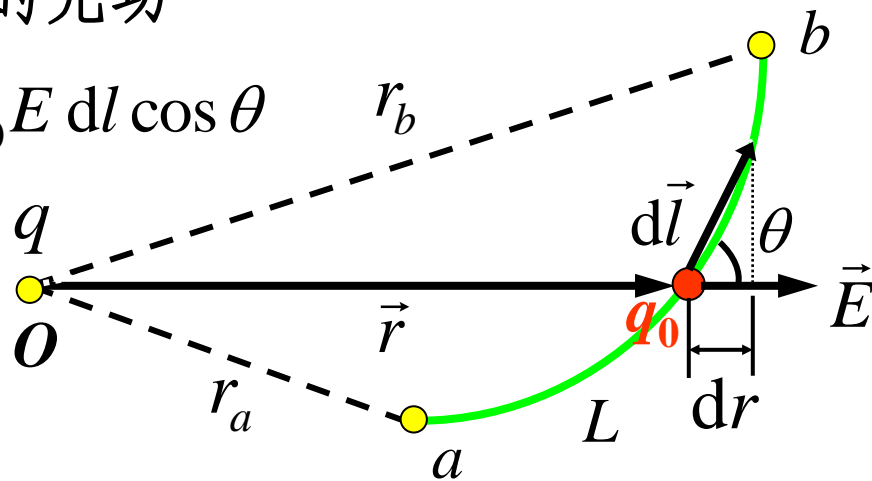
1. 单个点电荷产生的静电场

点电荷 q 的电场对 q_0 所作的元功

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E dl \cos \theta$$

$$dl \cos \theta = dr$$

$$\Rightarrow dA = q_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$



移动 q_0 从 $a \rightarrow b$, 静电场力所作的功

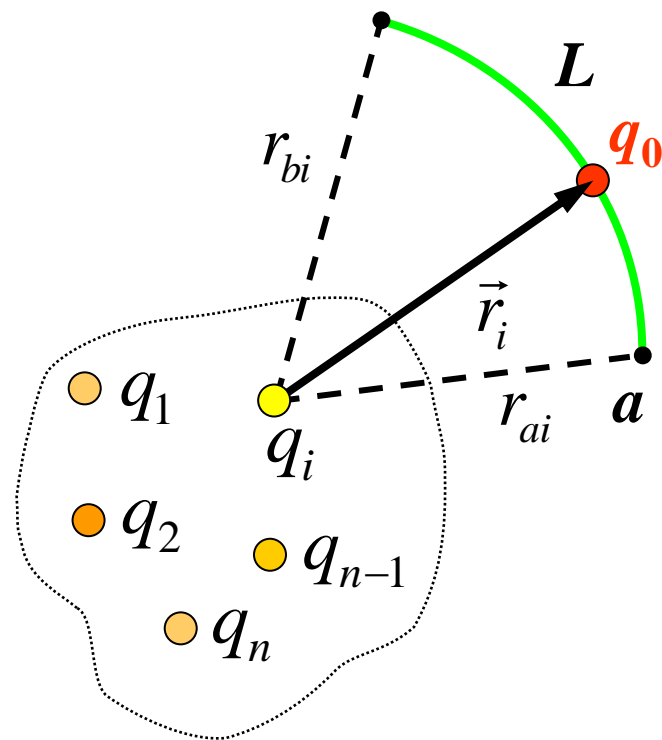
$$A = \int_{a(L)}^b dA = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

与路径无关

2.任意带电体系产生的静电场

在点电荷系 q_1 、 q_2 、...、 q_n 的电场中，移动 q_0 ，有 b

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \int_{a(L)}^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{a(L)}^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{a(L)}^b q_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a(L)}^b q_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \\ &= \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{ai}} - \frac{1}{r_{bi}} \right) \end{aligned}$$



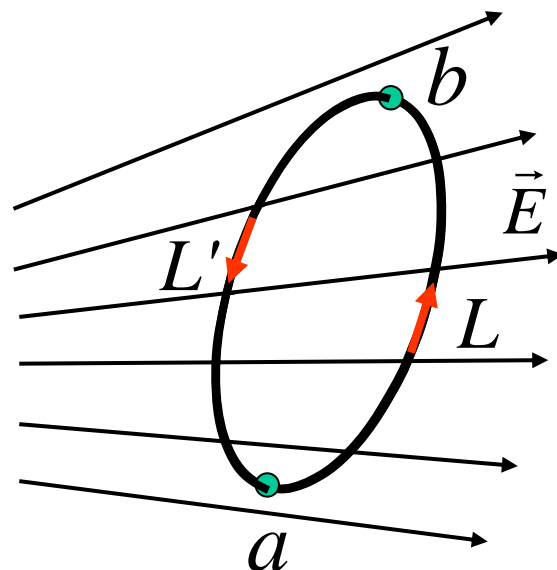
➤ 结论

电场力作功只与始末位置有关，与路径无关，所以静电力是保守力，静电场是保守力场。

二、静电场的环路定理

在静电场中，沿闭合路径移动 q_0 ，电场力作功

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{a(L)}^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{b(L')}^a q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{a(L)}^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{a(L')}^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{—— 静电场的环路定理}$$

在静电场中，电场强度的环流为零，静电场是无旋场。

➤ 讨论

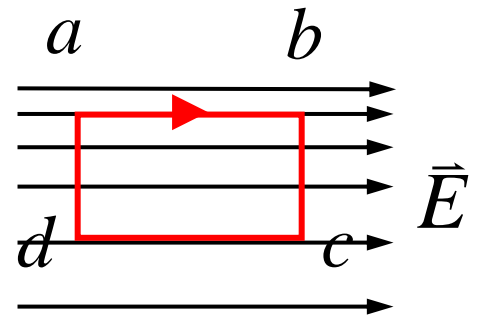
(1) 环路定理是静电场的另一重要定理，可用环路定理检验一个电场是不是静电场。

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_a^b E_1 dl + \int_c^d -E_2 dl$$

$$\neq 0$$

不是静电场。



(2) 环路定理要求电力线不能闭合。

(3) 静电场是有源、无旋场，可引入电势能。

{研究矢量场的方法}

二、电势能

- 电势能的差

静电场 \longrightarrow 保守场 \longrightarrow 引入静电势能

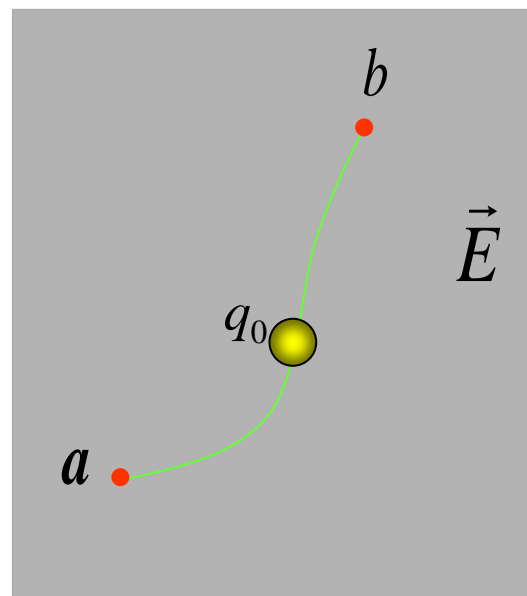
定义： q_0 在电场中 a 、 b 两点电势能之差等于把 q_0 自 a 点移至 b 点过程中电场力所作的功。

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_a - W_b$$

- 电势能

取势能零点 $W_{“0”} = 0$

q_0 在电场中某点 a 的电势能： $W_a = \int_a^{“0”} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$



$$W_a - W_b = ?$$

➤ 讨论

- (1) 电势能应属于 q_0 和产生电场的源电荷系统共有。
- (2) 电荷在某点电势能的值与零点选取有关，而两点的差值与零点选取无关。
- (3) 选势能零点的原则：
 - 当(源)电荷分布在有限范围内时，势能零点一般选在无穷远处。
 - 无限大带电体，势能零点一般选在有限远处一点。
 - 实际应用中取大地、仪器外壳等为势能零点。

三、电势 电势差

- 电势差

$$U_{ab} = \frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0} = \frac{A_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电场力对单位正电荷自 $a \rightarrow b$ 过程中所作的功。

- 电势定义

$$V_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{"0"}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电场力对单位正电荷自 a (所求点) \rightarrow “电势零点” 过程中所作的功。

四、电势 的计算

1. 点电荷电场中的电势

$$V_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

2. 点电荷系电场中的电势

设有 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 产生的电场中, 其电场强度

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

则某点 a 的电势可写成

$$\begin{aligned} V_a &= \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^\infty (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_a^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_a^\infty \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^\infty \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$V_a = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

在点电荷系产生的电场中, 任一点的电势等于每一个点电荷单独存在时在该点产生的电势的代数和 —— 电势叠加原理。

3. 电荷连续分布带电体电场中的电势

对连续分布的带电体 $V_a = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$

◆ 计算电势的方法

(1) 已知电荷分布 $V_a = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$

(2) 已知场强分布 $V_a = \int_a^{''0''} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

例 半径为 R ，带电量为 q 的均匀带电球面。

求 带电球面的电势分布。

解 根据高斯定律可得

$$E_1 = 0 \quad (r < R)$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

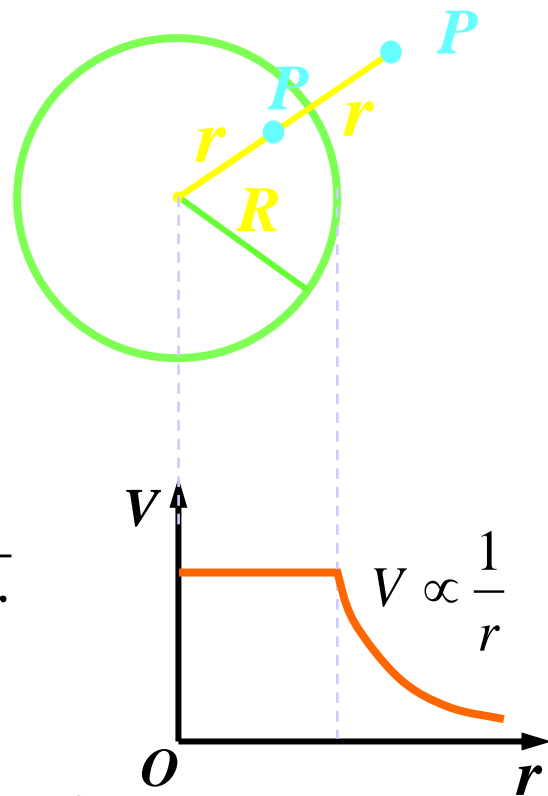
对球面外任一点 P ($r > R$)

$$V_{\text{out}} = \int_p^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

对球面内任一点 P ($r < R$)

$$V_{\text{in}} = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R \underline{E_1 dr} + \int_R^\infty E_2 dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

球内各点的电势相等，且等于球面上各点的电势。



➤ 讨论

对于半径为 R ，带电量为 q 的均匀带电球体，其电势分布

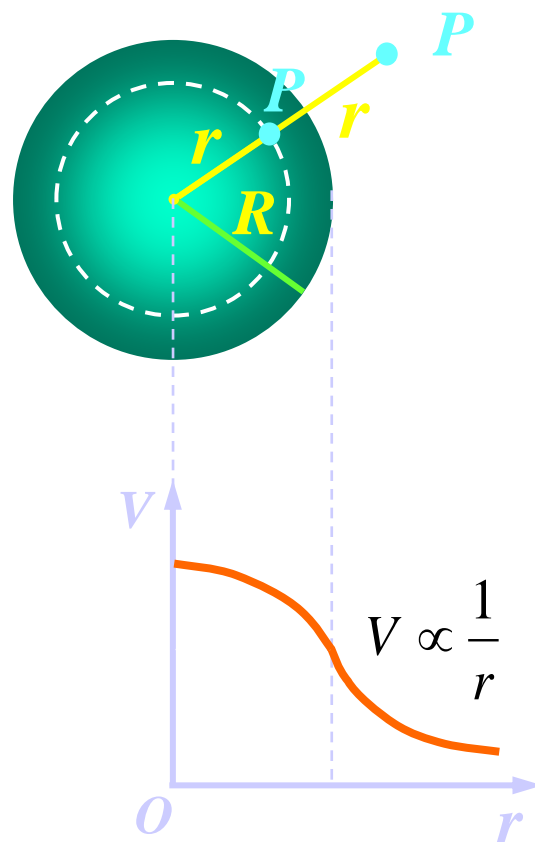
$$\begin{cases} E_1 = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} & r < R \\ E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

对球外任一点 P ($r > R$)

$$V_{\text{out}} = \int_p^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

对球面内任一点 P ($r < R$)

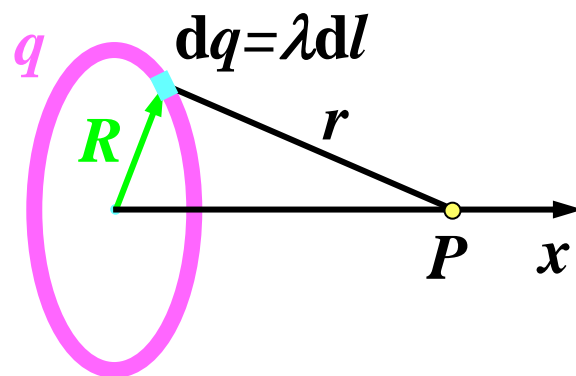
$$\begin{aligned} V_{\text{in}} &= \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) \end{aligned}$$



例 半径为 R ，带电荷为 q 的均匀带电圆环。

求 圆环轴线任一点 P 的电势。

解 建立如图坐标系，选取电荷元 dq ，



$$dq = \lambda dl, \quad \lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

以无穷远为电势零点

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$V_P = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

◆ 当 $x=0$ 时, $V_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

◆ 当 $x \gg R$ 时, $V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$

例 电荷线密度为 λ 的无限长均匀带电直线。

求 其电势分布。

解 根据高斯定律得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

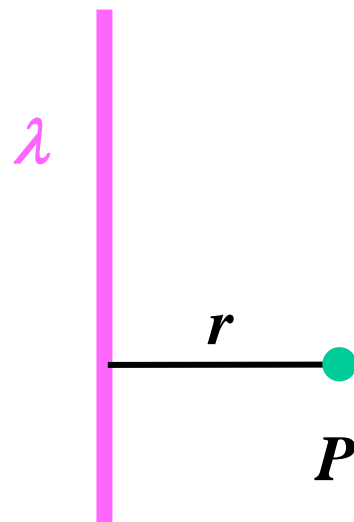
若仍以无穷远为电势零点，则由积分

$$V_P = \int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

得出的电势为无穷大，无意义；若以 $r=0$ 为电势零点，也无意义。为此，我们选取 $r=r_0$ 处为电势零点，得

$$V_P = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

◆ 当取 $r_0=1$ 时， $V_P = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r$

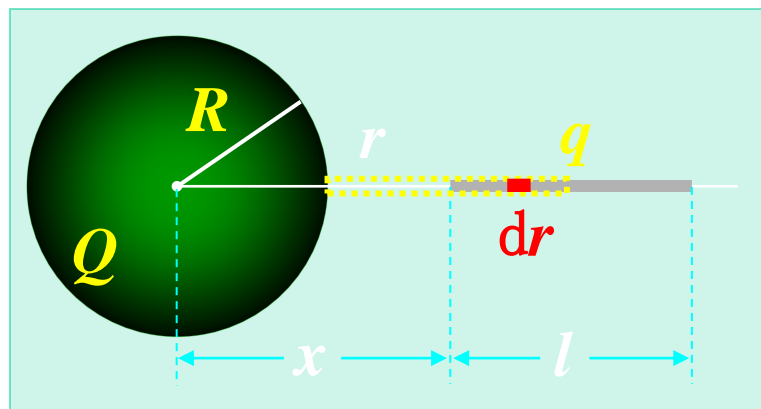


例 如图所示，球体半径 R ，均匀带电量 Q ，细杆长 l ，均匀带电量 q 。

求 (1) 杆在带电球的电场中所具有的电势能；

(2) 杆受到的电场力；

(3) 当杆的左端从球面运动到图示位置电场力所作的功。



解 (1) 球体外任一点的电势(以无穷远为电势零点)

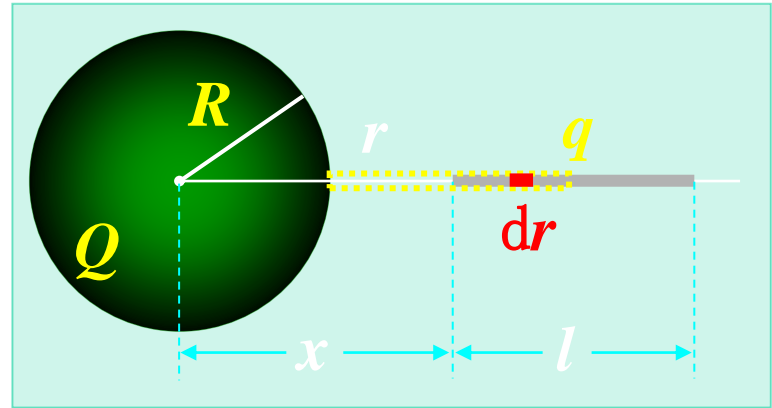
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

在细杆上取电荷元 $dq = \lambda dr$ ($\lambda = q/l$)，并取无穷远为势能零点，则电荷元 dq 在带电球体电场中所具有的电势能

$$dW = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{q}{l} dr$$

$$W = \int_x^{x+l} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{q}{l} dr$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x+l}{x}$$



$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+l} \right) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x(x+l)}$$

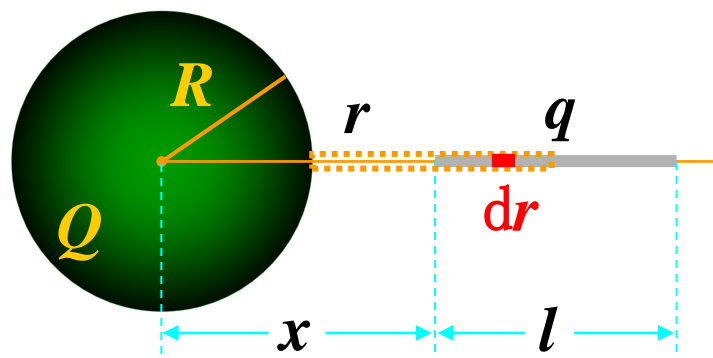
$$W_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R+l}{R}$$

x

$$W_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x+l}{x}$$

细杆左端从球面移到距球心 x 处的过程中，电场力所作的功为

$$\begin{aligned} A &= W_1 - W_2 \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\ln \frac{R+l}{R} - \ln \frac{x+l}{x} \right) \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{(R+l)x}{(x+l)R} \end{aligned}$$



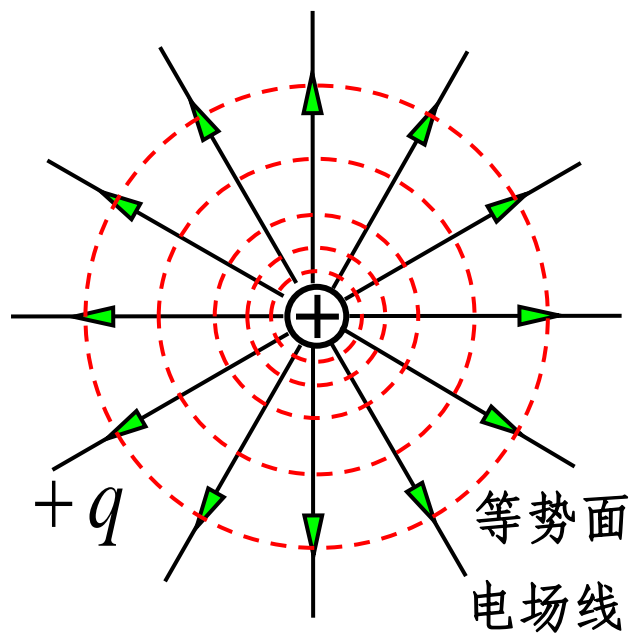
§ 5 等势面 电场强度与电势的微分关系

主要内容:

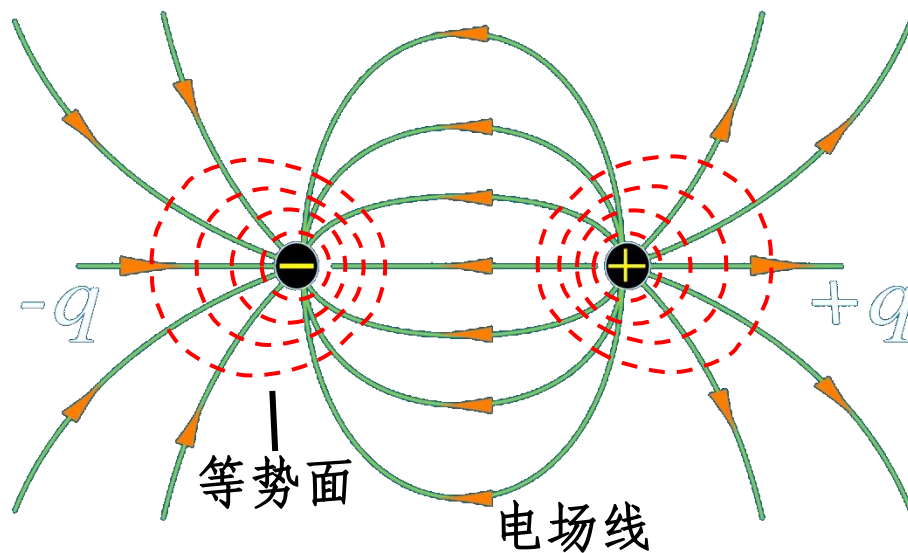
1. 等势面
2. 电场强度与电势的微分关系

一、等势面

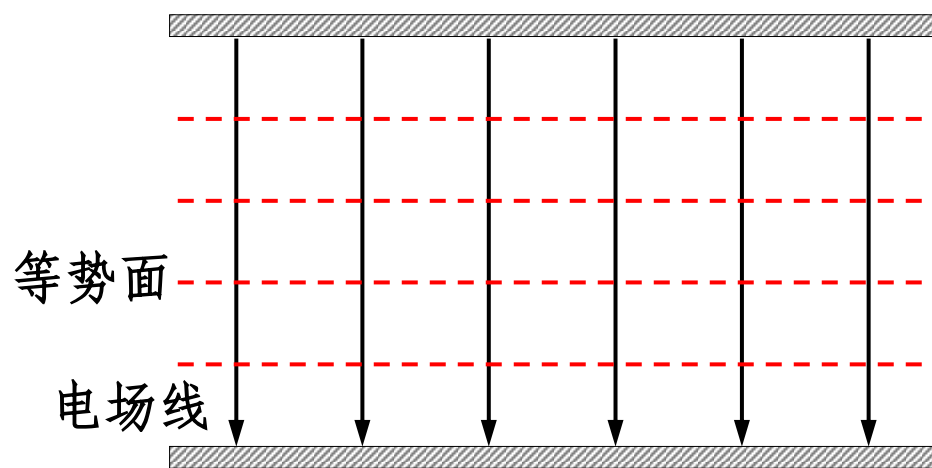
电场中电势相等的点连成的面称为等势面。



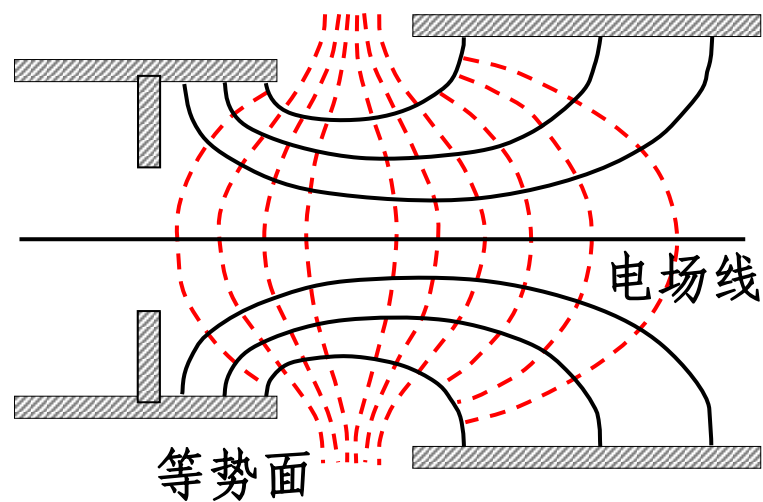
点电荷



电偶极子



带电平板电容器内部



示波管内部的电场

等势面的性质：

(1) 电场线与等势面处处正交。

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos \theta dl$$

$$dA = q_0 (V_a - V_b)$$

$$V_a = V_b \quad \longrightarrow \quad q_0 E \cos \theta dl = 0$$

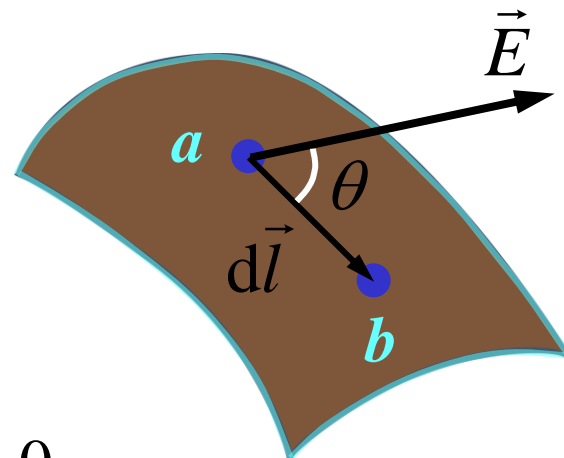
$$\cos \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

沿等势面移动电荷时，电场力所作的功为零。

(2) 规定相邻两等势面间的电势差都相同

等势面密 $\longrightarrow \vec{E}$ 大 等势面疏 $\longrightarrow \vec{E}$ 小

(3) 电场强度的方向总是指向电势降落的方向。



二、 电场强度与电势的微分关系

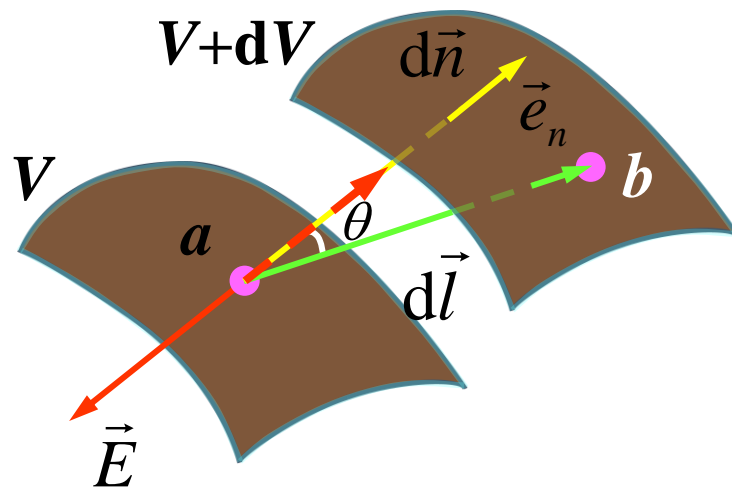
取两相邻的等势面

把点电荷 q_0 从 a 移到 b ， 电场力作功为

$$\begin{aligned} dA &= q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos \theta dl \\ &= q_0 E dn \end{aligned}$$

$$dA = q_0 [V - (V + dV)] = -q_0 dV$$


$$\begin{array}{c} \text{L} \rightarrow E \cos \theta dl = E dn = -dV \end{array} \quad \rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dn}$$



任意一场点处电场强度的大小等于沿过该点等势面法线方向上电势的变化率，负号表示电场强度的方向指向电势减小的方向。

元功 dA 也可按如下方法表示

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos \theta dl = q_0 E_l dl = -q_0 dV$$


$$E_l = -\frac{dV}{dl}$$

电场强度在 $d\vec{l}$ 方向的投影等于电势沿该方向变化率的负值。

$$dl \geq dn \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{dl} \leq \frac{dV}{dn}$$

电势沿等势面法线方向的变化率最大。

◆ 在直角坐标系中

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad } V$$

某点的电场强度等于该点电势梯度的负值。

例 已知 $V = 6x - 6x^2y - 7z^2$ 。

求 电场强度的分布。

解 $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(6 - 12xy)$ $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 6x^2$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 14z$$

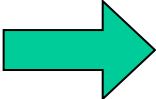
$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = (12xy - 6)\vec{i} + 6x^2 \vec{j} + 14z \vec{k}$$

例 证明电偶极子任一点电场强度

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-\vec{p} + (3\vec{p} \cdot \vec{r}^0) \vec{r}^0)$$

证 任一点 P 的电势为

$$V = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

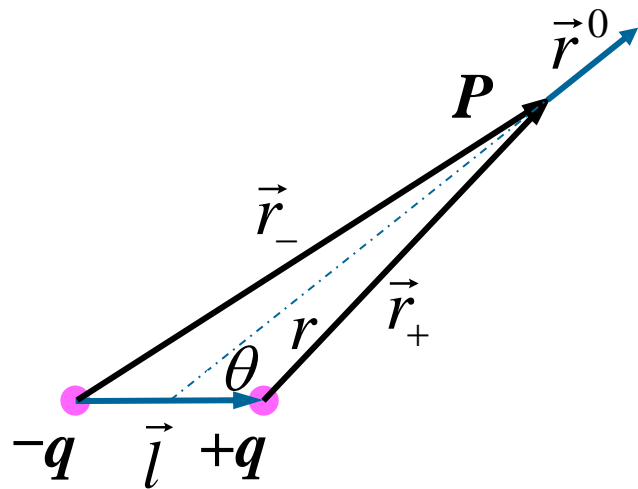
$r \gg l$ 

$$r_+ = r - \frac{l}{2} \cos \theta, \quad r_- = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$r_- - r_+ \approx l \cos \theta, \quad r_+ r_- = r^2$$

P 点电势可改写为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

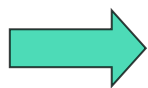


$$\vec{p} = q\vec{l} \quad \cos \theta = \frac{z}{r}$$

P 点电势为

$$V = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



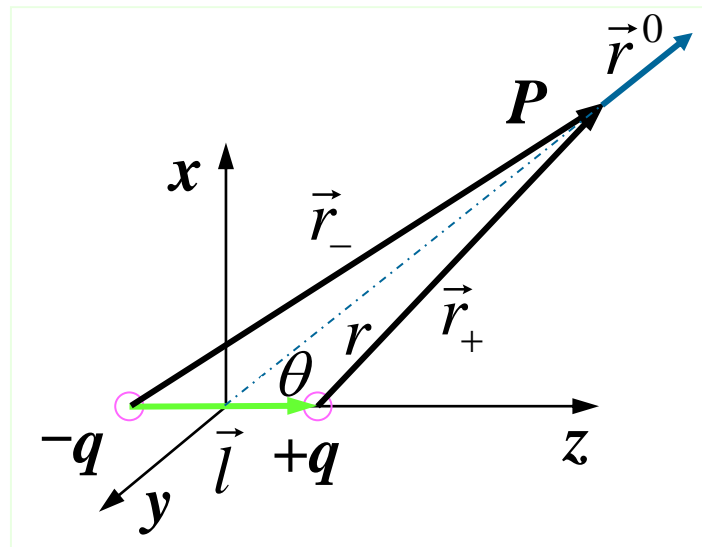
$$\partial r / \partial x = x / r, \quad \partial y / \partial x = y / r, \quad \partial r / \partial z = z / r$$

因此, P 点电场强度的分量

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3pzx}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3pzy}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

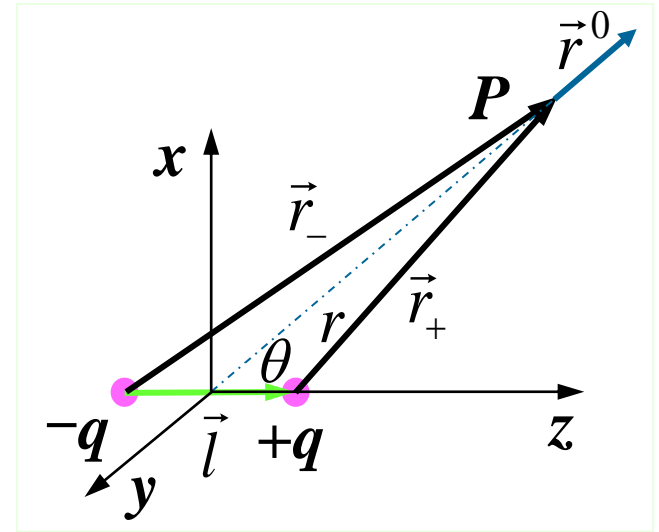
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right)$$



$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

$$= \frac{3pz}{4\pi\epsilon_0 r^5} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{k}$$

$$\vec{p} = p\vec{k}, \quad \vec{r} = r\vec{r}^0, \quad z = \vec{r} \cdot \vec{k}$$



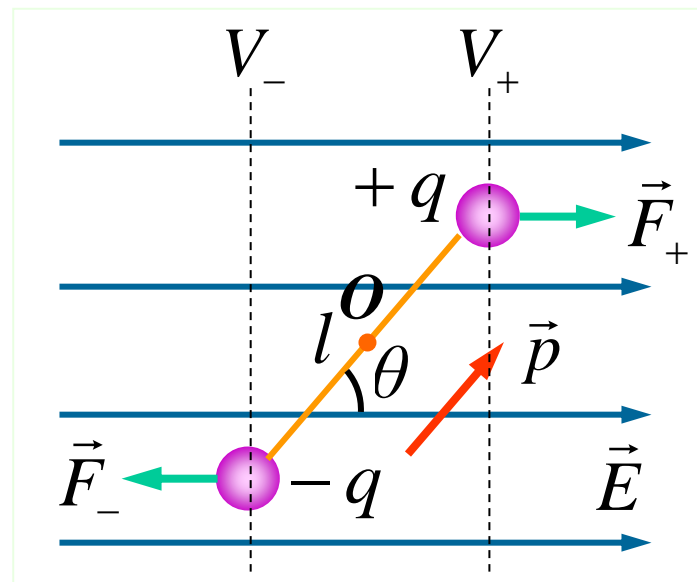
由此， P 点电场强度可写为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3p(r\vec{r}^0 \cdot \vec{k})r\vec{r}^0}{r^2} - \vec{p} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-\vec{p} + (3\vec{p} \cdot \vec{r}^0)\vec{r}^0)$$

例 求电偶极子在均匀电场中所具有的电势能。

解 电偶极子在电场中具有的电势能

$$\begin{aligned} W &= W_+ + W_- \\ &= qV_+ - qV_- \\ &= -q(V_- - V_+) \end{aligned}$$



$(V_- - V_+)$ 为 $-q$ 和 $+q$ 所在处的电势差，由定义有

$$V_- - V_+ = \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} = El \cos \theta \quad \longrightarrow \quad W = -qEl \cos \theta$$

进一步可表示为

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

本章小结

描述静电场基本性质的两个物理量  $\left\{ \begin{array}{l} \text{电场强度 } \vec{E} \\ \text{电势 } V \end{array} \right.$

两个基本定理 $\left\{ \begin{array}{l} \text{静电场的高斯定理} \\ \text{静电场的环路定理} \end{array} \right.$

1. 电场强度

(1) 定义式

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电场强度是描述静电场性质的物理量，其是空间点坐标的单值函数，是一个矢量。

真空中的库仑定律
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

(2) 点电荷 q 产生的电场强度 $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

(3) 电场强度的叠加原理

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

对于带电体(电荷连续分布), 其电场强度

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

注意: 电场强度的积分是矢量积分。

(4) 静电场高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

在真空中的静电场中, 通过任一闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的电荷电量的代数和除以 ϵ_0

高斯定理指出静电场是有源场, 电荷就是它的源。

用高斯定理求电场强度的步骤:

- (a) 由电荷分布的对称性, 分析电场强度分布的对称性;
- (b) 根据对称性选取适当的高斯面;
- (c) 计算通过高斯面的电通量及其内包围的电荷量;
- (d) 根据高斯定理求电场强度。

(4) 电通量

在电场中穿过任意曲面 S 的电场线条数

—— (穿过该面的) 电通量(Φ_e)

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

对于闭合曲面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

2. 电势

(1) 静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

(2) 电势能

q_0 在电场中某点 a 的电势能: $W_a = \int_a^{''0''} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$

(3) 电势

$$V_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{''0''} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(4) 点电荷电场中某点的电势

$$V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(5) 电势叠加原理

$$V_a = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

带电体(电荷连续分布)的电场中，其电势

$$V_a = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(6) 电势的计算方法

$$V_a = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V_a = \int_a^{''0''} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

3. 电场强度与电势的微分关系

$$E_n = -\frac{dV}{dn} \quad E_l = -\frac{dV}{dl}$$

在直角坐标系中

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

表示成矢量形式

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad } V$$

4. 电场中的电偶极子

电偶极子在均匀电场中受到的力矩为

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

在均匀电场中所具有的电势能为

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

good-bye

郎佩琳修改