

[文章编号] 1001-246X(2005)02-0108-09

流体力学方程的间断有限元方法

蔚喜军¹, 周 铁²

(1. 北京应用物理与计算数学研究所 计算物理实验室, 北京 100088; 2. 北京大学数学系, 北京 100871)

[摘 要] 在二维区域三角形网格上应用一阶、二阶和三阶精度间断有限元方法, 对流体力学方程和方程组进行了数值模拟. 计算结果与差分方法计算结果比较, 认为间断有限元方法在求解复杂边界条件和区域问题上有一定的优势.

[关键词] 三角形网格; 间断有限元方法; 前台阶问题; 双马赫反射问题

[中图分类号] O35; O241.82 [文献标识码] A

0 引言

间断有限元方法是 1973 年由 Reed 和 Hill^[1] 首先提出, 并应用于求解中子输运方程, 但这种方法长期以来一直没有得到很好的研究和应用. 直到 20 世纪 80 年代后期和 90 年代, Cockburn 和 Shu 等^[2~7, 16] 结合 Runge-Kutta 方法, 将间断有限元方法推广到非线性一维守恒律方程和方程组, 高维守恒律方程和方程组, 并给出了部分收敛性理论证明后^[9~11], 这一方法才引起人们的注意, 并逐渐开始应用于流体力学计算领域^[8, 12, 13].

间断有限元方法应用于流体力学计算领域, 并受到人们的关注, 主要因其保持了通常有限元方法的优点:

1) 能够处理复杂的区域边界和具有复杂的边界条件问题, 并获得与区域内部一致的计算精度; 易于网格加密和高精度处理边界条件, 实现自适应计算^[14, 15].

2) 可以得到任意阶精度的格式, 同时又具有很好的局部紧致性, 构造的高阶格式不需要非常宽的模板 (Stencil) (实际上这比较符合守恒律方程的解的性质, 一般来说, 模板太宽, 会抹平激波).

同时由于间断有限元方法吸收了差分方法的一些特点, 能够显式求解. 因此

3) 容易实现并行算法^[15].

4) 具有很好的稳定性, 满足 l^2 稳定性和熵相容性.

间断有限元方法的缺点是程序设计比较复杂和计算量大. 然而近十年来, 随着计算机条件不断的改善, 各种大型向量计算机和并行计算机的相继问世, 间断有限元方法能够较为容易地把求解二维问题的方法推广到三维问题, 实现自适应算法和并行算法. 对于原来应用差分方法求解的流体力学问题, 由于定解的区域不规则或者边界条件难以处理, 逐步开始应用间断有限元方法进行求解. 目前间断有限元方法除应用于守恒律方程计算外, 同时也被应用于求解可压缩 N-S 方程和对流扩散方程的数值计算^[12, 13], 特别在美国 ASCI 计划中, 把这一方法应用于求解辐射流体力学问题等^[18, 19].

本文在二维区域三角形网格上应用一阶、二阶和三阶间断有限元方法, 对于 Euler 可压缩流体力学方程和方程组进行了数值模拟, 并与差分方法计算结果比较, 认为间断有限元方法在求解复杂边界条件和复杂区域问题上有一定的优势.

1 间断有限元方法

考虑二维非定常流体力学方程组

$$U_t + (f(U))_x + (g(U))_y = 0, \quad (1)$$

[收稿日期] 2003-11-26

[基金项目] 863 高技术惯性约束聚变主题、国家自然科学基金(10471011)和中物院基金资助项目

[作者简介] 蔚喜军(1959-), 男, 内蒙古, 研究员, 博士, 从事流体力学计算方法的研究

其中

$U = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T$, $f(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E + p))^T$, $g(U) = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(E + p))^T$, ρ 是密度, u, v 是 x, y 方向的速度分量, p 是压力; 对于气体动力学方程

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$$

是总能, $\gamma = 1.4$ 是绝热比. 状态方程是 $p = (\gamma - 1) \rho e$, 这里 e 是内能.

间断有限元方法^[9] 求解方程组(1), 首先将求解区域 Ω 剖分成互不重叠的小区域 $\Omega_i: \Omega = \bigcup \Omega_i$, Ω_i 可以是任意形状, 如四边形、三角形网格等, 这里我们采用三角形网格. 假定 Ω_i 和 $\Omega_j (i \neq j)$ 相交, 则它们只有公共的顶点或有公共的边, 于是得到剖分 τ_h . 间断有限元空间 V_h 定义为

$$V_h = \{v_h \in L^\infty(\Omega), v_h|_k \in V_h(k), \forall k \in \tau_h\}.$$

$V_h(k)$ 是局部函数空间, 取作 p^k 次多项式的集合, 对每个时刻 $t \in [0, T]$, 在 V_h 中求近似解 $u_h(x, t)$,

$$u_h(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_{k,j}(t) v_j(x),$$

这里 $x = (x, y)$.

流体力学方程组(1)写成变分形式, 由 Green 公式, 能够表示为

$$\frac{d}{dt} \int_k u(x, t) v(x) dx + \sum_{e \in \partial k} \int_e F(u(x, t)) \cdot n_{e,k} v(x) d\Gamma - \int_k F(u(x, t)) \cdot \text{grad} v(x) dx = 0 \quad (2)$$

对任意光滑函数 $v(x)$ 成立, 其中 $n_{e,k}$ 表示单元边界 e 的单位外法向量,

$$F(u(x, t)) = (f(u(x, t)), g(u(x, t))).$$

用 Gauss 数值积分代替(2)式中的积分, 我们有

$$\begin{aligned} \int_e F(u(x, t)) \cdot n_{e,k} v(x) d\Gamma &\approx \sum_{l=1}^L w_l F(u(x_{el}, t)) \cdot n_{e,k} v(x_{el}) |e|, \\ \int_k F(u(x, t)) \cdot \text{grad} v(x) dx &\approx \sum_{j=1}^M w_j F(u(x_{kj}, t)) \cdot \text{grad} v(x_{kj}) |k|, \end{aligned}$$

用数值通量 $h_{e,k}(x, t)$ 代替通量 $F(u(x, t)) \cdot n_{e,k}$, 近似解 u_h 代替解 u , 检验函数 v 取作 $v_h \in V(k)$, 于是有数值格式

$$\begin{aligned} u_h(t=0) &= P_{V_h}(u_0), \\ \frac{d}{dt} \int_k u_h(x, t) v_h(x) dx + \sum_{e \in \partial k} \sum_{l=1}^L w_l h_{e,k}(x_{el}, t) v(x_{el}) |e| - \\ &\sum_{j=1}^M w_j F(u_h(x_{kj}, t)) \cdot \text{grad} v_h(x_{kj}) |k| = 0, \quad \forall v_h \in V(k), \quad \forall k \in \tau_h, \end{aligned} \quad (3)$$

这里算子 P_{V_h} 是有限元空间 V_h 到 L^2 的投影.

数值通量 $h_{e,k}(x, t)$ 在单元 k 的边界 e 上点 x 的值依赖于近似解在 (x, t) 的两个值, 一个是从单元 k 内部求得的, 即

$$u_h(x^{k^{\text{内}}}, t) = \lim_{y \rightarrow x, y \in K} u_h(y, t),$$

另一个是从单元 k 之外部求得的, 即

$$u_h(x^{k^{\text{外}}}, t) = \begin{cases} \gamma_h(x, t), & x \in \partial\Omega \\ \lim_{y \rightarrow x, y \notin k} u_h(y, t), & x \notin \partial\Omega, \end{cases}$$

离散边界值 $\gamma_h(x, t)$ 是精确边界数据 γ 到 V_h 限制在单元边界 $\partial\Omega$ 之迹形成的有限元空间的 L^2 投影.

数值通量定义为 $h_{e,k}(x, t) = h_{\alpha k}(u_h(x^{k^{\text{内}}}, t), u_h(x^{k^{\text{外}}}, t))$, 其中 $h_{\alpha k}$ 是近似 Riemann 解法器. $h_{e,k}$ 和 $F(U) \cdot n_{e,k}$ 是相容的, 即

$$h_{e,k}(U, U) = F(U) \cdot n_{e,k},$$

而且是守恒的, 即

$$h_{e,k}(u_h(x^{k'内}, t), u_h(x^{k'外}, t)) + h_{e,k'}(u_h(x^{k'内}, t), u_h(x^{k'外}, t)) = 0, \quad k' \cap k = e.$$

数值通量通常取(局部)Lax-Friedrichs 通量

$$h_{e,k}(a, b) = \frac{1}{2}[F(a) \cdot n_{e,k} + F(b) \cdot n_{e,k} - \alpha_{e,k}(b - a)], \quad (4)$$

其中 $\alpha_{e,k}$ 是 Jacobi 矩阵 $(\partial/\partial u)F(u_h(x, t)) \cdot n_{e,k}$ 在边界 e 上最大特征值的估计. 如果上述插值空间取 $V_h = V_h^0$, 且在边界上的数值积分对常数是准确的, 则所得格式(3)成为有限体积格式, 故间断有限元方法可看作有限体积方法的高阶推广.

由于 V_h 中的函数在单元边界是间断的, 故“质量”矩阵是分块对角矩阵. 每块的阶数等于局部函数空间 $V(k)$ 的维数, 因此, 易于求逆. 如果用局部正交基, 则质量矩阵是对角矩阵. 因此, 式(1)通过空间离散得到常微分方程组

$$\left(\frac{d}{dt} \right) u_h = L_h(u_h, \gamma_h). \quad (5)$$

对常微分方程组(5), 利用 TVD 的龙格—库塔方法进行时间离散, 要求它至少有 $k+1$ 阶精度. 设 $\{t^n\}_{n=0}^N$ 是 $[0, T]$ 的一个剖分, 且设 $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n, n=0, 1, \dots, N-1$, 得到时间方向的迭代格式:

设 $u_h^0 = P_{V_h}(u_0)$; 对 $n=0, \dots, N-1$, 按如下步骤计算 u_h^{n+1} :

- 1) 令 $u_h^{(0)} = u_h^n$,
- 2) 对 $i=1, \dots, k+1$ 计算中间函数

$$u_h^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \{ \alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(u_h^{(l)}, \gamma_h(t^n + d_l \Delta t^n)) \},$$

- 3) 令 $u_h^{n+1} = u_h^{(k+1)}$.

上述迭代格式, 如果有限元插值函数空间采用分片常数逼近时, 即当 $V_h = V_h^0$ 时, 由于上风机制, 格式(3)中的数值通量所引入的格式粘性足以使格式稳定. 但在高阶情况, 数值通量的稳定性影响不足以保证伪振荡不出现. 为提高方法的稳定性, 保证在近似解中不出现伪振荡, 在时间方向的迭代格式中需引入局部斜率限制算子 $\Delta \Pi_h$:

设 $u_h^0 = \Delta \Pi_h P_{V_h}(u_0)$, 对 $n=0, \dots, N-1$, 按如下步骤计算 u_h^{n+1} :

- 1) 令 $u_h^{(0)} = u_h^n$;
- 2) 对 $i=1, \dots, k+1$ 计算中间函数

$$u_h^{(i)} = \Delta \Pi_h \sum_{l=1}^{i-1} \{ \alpha_{il} u_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(u_h^{(l)}, \gamma_h(t^n + d_l \Delta t^n)) \},$$

- 3) 令 $u_h^{n+1} = u_h^{(k+1)}$.

Cockburn 和 Shu^[9] 在 Euler 方程计算中按如下思想给出一种实用的 $\Delta \Pi_h$. 为计算 $\Delta \Pi_h u_h$, 设在 u_h 中出现伪振荡, 则一定出现在 u_h 的 P^1 部份 u_h^1 , 它是解 u_h 在分片线性函数 V_h^1 空间的 L^2 投影. 这样, 如果

$$u_h^1 = \Delta \Pi_h u_h^1,$$

则认为 u_h 不出现伪振荡, 因此不加任何限制

$$\Delta \Pi_h u_h = u_h.$$

假如伪振荡出现在解的 P^1 部份 u_h^1 上, 即

$$u_h^1 \neq \Delta \Pi_h u_h^1,$$

则砍掉数值解的高阶部份并限制余下的 P^1 部份

$$\Delta \Pi_h u_h = \Delta \Pi_h u_h^1.$$

进一步考察图 1, 图中 m_1 是三角形单元 k_0 的一个边上的中点, 而 b_i 表示单元 $k_i (i=0, 1, 2, 3)$ 的重心. 由于

$$m_1 - b_0 = \alpha_1(b_1 - b_0) + \alpha_2(b_2 - b_0),$$

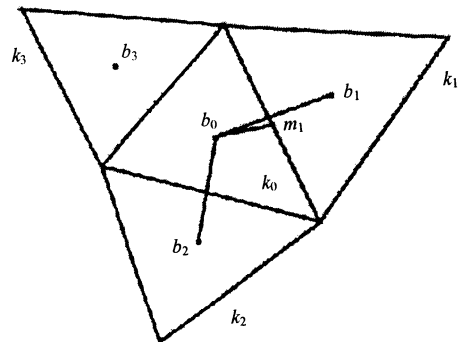


图 1 限制器说明图

Fig. 1 Illustration of limiting

其中 α_1 和 α_2 是依赖于 m_1 和 4 个单元几何的两个非负系数. 从而对任一线性函数 u_h 有

$$u_h(m_1) - u_h(b_0) = \alpha_1(u_h(b_1) - u_h(b_0)) + \alpha_2(u_h(b_2) - u_h(b_0)),$$

由于

$$\bar{u}_{k_i} = \frac{1}{|k_i|} \int_{k_i} u_h = u_h(b_i), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

故有

$$\bar{u}_h(m_1, k_0) \equiv u_h(m_1) - \bar{u}_{k_0} = \alpha_1(\bar{u}_{k_1} - \bar{u}_{k_0}) + \alpha_2(\bar{u}_{k_2} - \bar{u}_{k_0}) \equiv \Delta \bar{u}(m_1, k_0).$$

考虑分片线性函数 u_h , 且令 $m_i (i=1, 2, 3)$ 是单元 k_0 的 3 个边的中点. 对于 $(x, y) \in k_0$ 有

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_h(m_i) \varphi_i(x, y) = \bar{u}_{k_0} + \sum_{i=1}^3 \tilde{u}_h(m_i, k_0) \varphi_i(x, y).$$

设 u_h 为标量, 斜率限制器 $\Delta \Pi_h$ 定义如下: 计算

$$\Delta_i = \bar{m}(\tilde{u}_h(m_i, k_0), v \Delta \bar{u}(m_i, k_0)),$$

参数 $v > 1$, 通常取 $v = 1.5$. 判别 $\sum_{i=1}^3 \Delta_i = 0$ 是否成立. 若等号成立, 则

$$\Delta \Pi_h u_h(x, y) = \bar{u}_{k_0} + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \varphi_i(x, y),$$

若等号不成立, 计算

$$pos = \sum_{i=1}^3 \max(0, \Delta_i), \quad neg = \sum_{i=1}^3 \max(0, -\Delta_i),$$

$$\text{令 } \theta^+ = \min\left(1, \frac{neg}{pos}\right), \quad \theta^- = \min\left(1, \frac{pos}{neg}\right), \quad \Delta_i = \theta^+ \max(0, \Delta_i) - \theta^- \max(0, -\Delta_i),$$

定义 $\Delta \Pi_h$ 为

$$\Delta \Pi_h u_h(x, y) = \bar{u}_{k_0} + \sum_{i=1}^3 \Delta_i \varphi_i(x, y).$$

对于三角形单元, 这里 Jacobi 矩阵 $(\partial/\partial u)f(\bar{u}_{k_0}) \circ n_{e,k}$ 用 $(\partial/\partial u)f(\bar{u}_{k_0}) \circ ((m_i - b_0)/|m_i - b_0|)$ 代替. 限制算子 $\Delta \Pi_h$ 可以认为是方程组分量限制算子, 也可以认为是方程组特征分量限制算子. 一般高阶(二阶以上)精度的计算格式, 采用方程组分量限制算子计算效果并不好. 下面的数值实验也证实了这一点.

2 数值实验

在二维区域上采用上述三角形网格上的间断有限元方法对流体力学方程和方程组进行了数值实验计算. 给出的线性对流方程和 Burgers 方程的数值计算结果, 与精确解相比, 其高阶精度算法完全达到了我们对程序设计的要求^[20]. 对二维流体力学方程组, 计算了前台阶问题和双马赫反射问题, 其数值结果与 Woodward 和 Colella 差分方法^[4]的计算结果进行了对比, 也非常好.

例 1 (线性对流方程) 考虑下述线性对流方程

$$u_t + u_x + u_y = 0, \quad (x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2],$$

具有周期边界条件和初值为 $u(x, y, 0) = \sin \frac{\pi}{2}(x+y)$. 方程的精确解为

$$u(x, y, t) = \sin \frac{\pi}{2}(x+y-2t).$$

采用二阶和三阶间断有限元方法求解该方程, 数值解和图 2, 3 都说明: 计算结果达到了我们对程序设计的要求.

例 2 (Burgers 方程)

$$u_t + (1/2 u^2)_x + (1/2 u^2)_y = 0, \quad (x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2],$$

具有周期边界条件和初值为

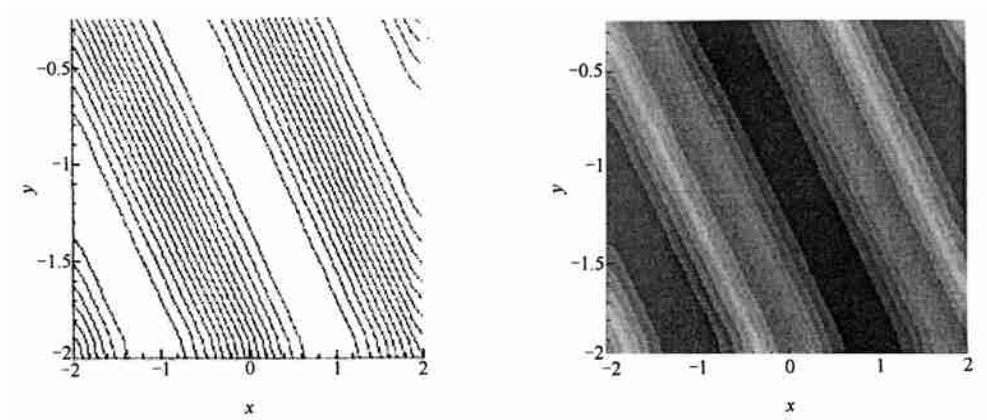


图 2 二阶精度和舒限制器下线性问题在 $t=2$ 时刻, 从 0.8684 到 0.8677 的 15 条等值线

Fig 2 Linear problem with second order accuracy and Shu's limiting at $t=2$, contour 15 from 0.8684 to 0.8677

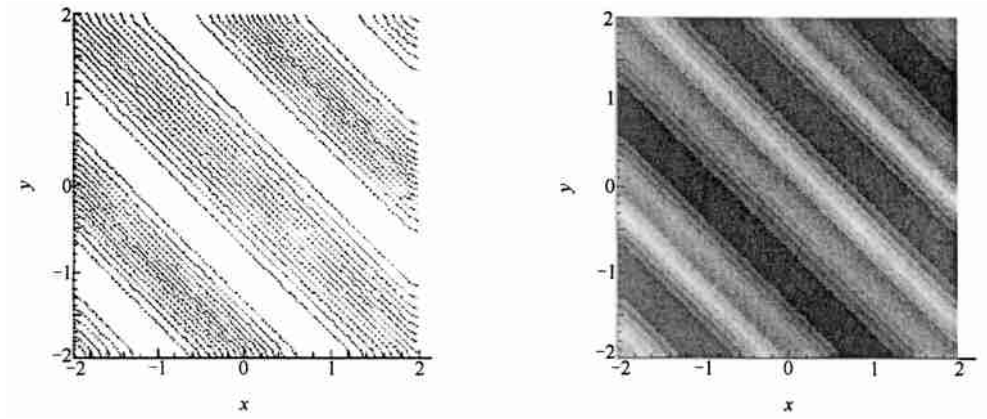


图 3 三阶精度和舒限制器下线性问题在 $t=2$ 时刻, 从 0.8684 到 0.8677 的 15 条等值线

Fig 3 Linear problem with third order accuracy and Shu's limiting at $t=2$, contour 15 from 0.8684 to 0.8677

$$u(x, y, 0) = 0.3 + 0.7 \sin\left[\frac{\pi}{2}(x + y)\right], \quad (x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2],$$

方程在 $t=0.5\pi$ 时, 解是光滑的, 精确解为 $u=0.3+0.7\sin\frac{\pi}{2}(x+y-2ut)$,

同样在这里我们采用 2 阶间断有限元方法进行求解, 数值解和精确解作了对比, 程序达到了相应的精度 (图 4).

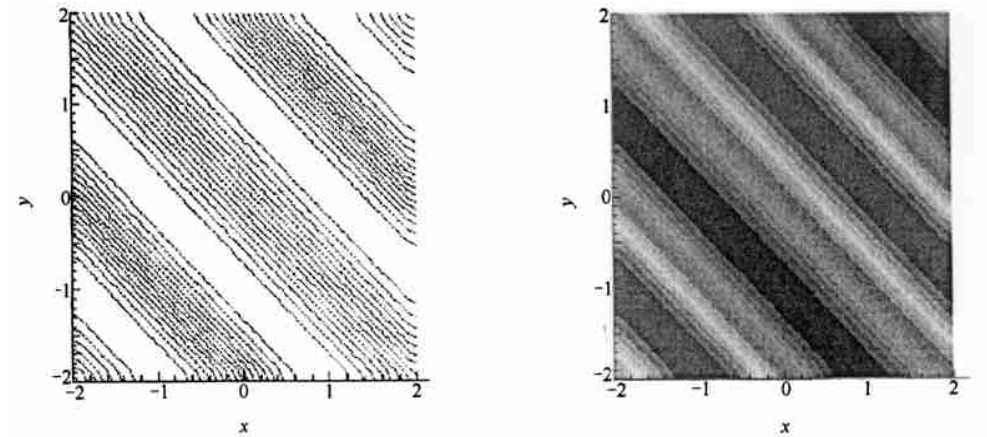


图 4 二阶精度和舒限制器下 Burgers 方程在 $t=1/2\pi^2$, 从 0.310 到 0.9098 的 15 条等值线

Fig 4 Burgers equation with second order accuracy and Shu's limiting at $t=1/2\pi^2$, contour 15 from 0.310 to 0.9098

以下我们用同样的方法, 对流体力学前台阶问题和双马赫反射问题进行了数值模拟, 并与 Woodward 和 Colella 差分方法^[17] 的计算结果进行了对比.

例 3(前台阶问题) 假定风洞长为 3, 宽为 1 和台阶高为 0.2 单位长度, 台阶位于离风洞左端 0.6 单位长度处. 初始条件是右行马赫数 3 的来流; 左边界是出流边界; 其余边界是反射边界条件. 台阶的拐角点是奇异点, 采用三角形网格剖分, 其中在 x, y 方向三角形单元的最长边长为 $\Delta x = \Delta y = 0.05$, 我们给出网格图形 5.

采用一阶、二阶和三阶精度的有限元方法和分量限制方法、特征分量限制方法, 我们分别得到密度函数等值线在时间 $t=0.5$ 和 $t=4$ 时刻的计算图形 6~15. 虽然图 6, 7 采用二阶精度有限元插值, 但限制器上采用解的平均投影方法, 因此计算精度只有一阶精度. 图 8, 9 是采用二阶精度有限元插值和方程组分量限制器的方法得到的计算图形; 图形 10, 11 是采用二阶精度有限元插值和方程组特征分量限制器的方法得到的计算图形; 图形 12, 13 是采用三阶精度有限元插值和方程组分量限制器的方法得到的计算图形; 图形 14, 15 是网格加密一倍, x, y 方向三角形单元的最长边长为 $\Delta x = \Delta y = 0.025$, 采用二阶精度有限元插值和方程组特征分量限制器的方法得到的密度等值线计算图形.

在时间 $t=0.5$ 时刻, 图 6, 8, 10, 12 和 14 进行比较, 二阶精度的计算结果比一阶精度的计算结果好, 三阶精度由于采用的是方程组分量限制器的方法, 并没有表现出比二阶精度好的地方, 这也说明方程组分量限制器方法对高精度计算格式作用不大. 与 Woodward 和 Colella 差

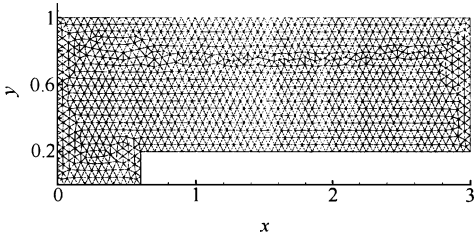


图 5 $x=0.05, y=0.05$ 网格

Fig 5 Mesh $x=0.05, y=0.05$

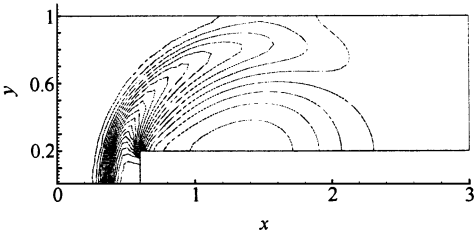


图 6 二阶精度和平均限制密度下, 在 $t=0.5$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题从 0.2365 到 5.647 的 30 条等值线

Fig 6 The Mach 3 wind tunnel problem with second order accuracy and flatten all density with 30 contours; 0.2365~5.647 at time=0.5

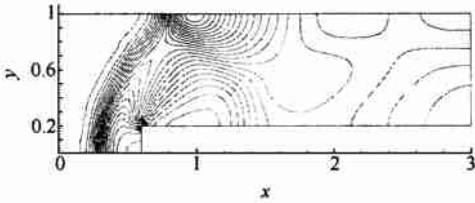


图 7 二阶精度和平均限制密度在 $t=4.0$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题从 0.2568 到 6.067 的 30 条等值线

Fig 7 The Mach 3 wind tunnel problem with second order accuracy and flatten all density with 30 contours; 0.2568~6.067 at time=4.0

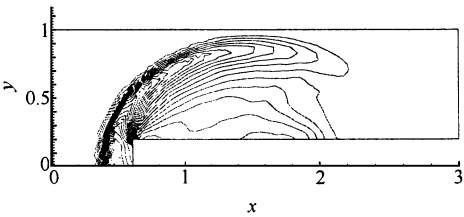


图 8 二阶精度和分量限制密度在 $t=0.5$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题, 从 0.2364 到 5.647 的 30 条等值线

Fig 8 The Mach 3 wind tunnel problem with second order accuracy and component limiting density with 30 contours; 0.2365~5.647 at time=0.5

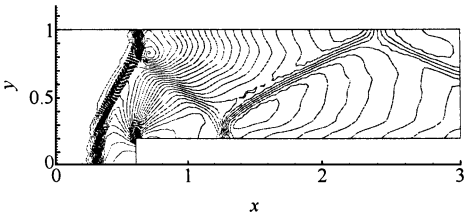


图 9 二阶精度和分量限制密度在 $t=4.0$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题从 0.2568 到 6.067 的 30 条等值线

Fig 9 The Mach 3 wind tunnel problem with second order accuracy and component limiting density with 30 contours; 0.2568~6.067 at time=4.0

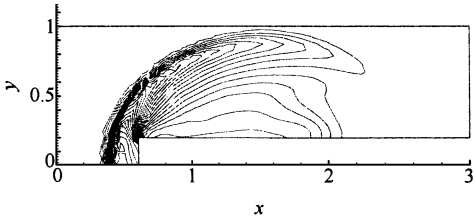


图 10 二阶精度和特征分量限制密度在 $t=0.5$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题从 0.2365 到 5.647 的 30 条等值线
Fig. 10 The Mach 3 wind tunnel problem with second order accuracy and characteristic limiting density with 30 contours; 0.2365~5.647 at time=0.5

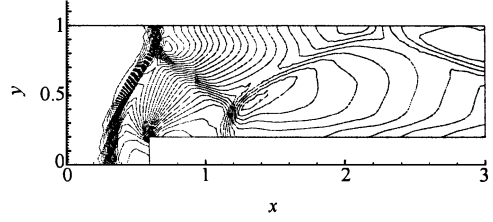


图 11 二阶精度和特征分量限制密度在 $t=4.0$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题从 0.2568 到 6.067 的 30 条等值线
Fig. 11 The Mach 3 wind tunnel problem with second order accuracy and characteristic limiting density with 30 contours; 0.2568~6.067 at time=4.0

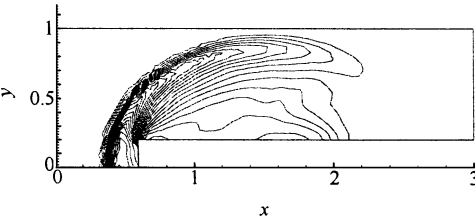


图 12 三阶精度和分量限制密度, 在 $t=0.5$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题从 0.2365 到 5.647 的 30 条等值线
Fig. 12 The Mach 3 wind tunnel problem with third order accuracy and component limiting density with 30 contours; 0.2365~5.647 at time=0.5

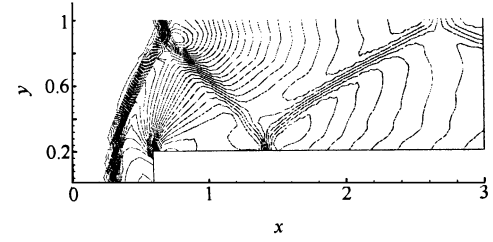


图 13 三阶精度和分量限制密度在 $t=3.0$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题从 0.2573 到 6.383 的 30 条等值线
Fig. 13 The Mach 3 wind tunnel problem with third order accuracy and component limiting density with 30 contours; 0.2573~6.383 at time=3.0

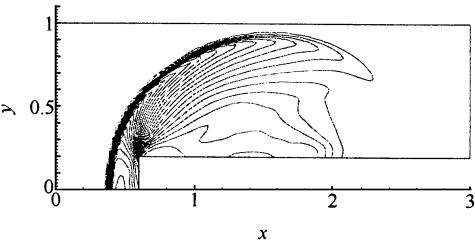


图 14 二阶精度和特征分量限制密度, 在 $t=4.0$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题, 从 0.2365~5.647 的 30 条等值线
Fig. 14 The Mach 3 wind tunnel problem with second order accuracy and characteristic limiting density with 30 contours; 0.2365~5.647 at time=4.0

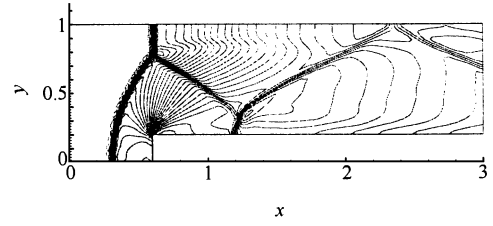


图 15 二阶精度和特征分量限制密度, 在 $t=4.0$ 时刻, 马赫数为 3 前台阶问题从 0.2568 到 6.067 的 30 条等值线
Fig. 15 The Mach 3 wind tunnel problem with second order accuracy and characteristic limiting density with 30 contours; 0.2568~6.067 at time=4.0

分方法^[17] 计算结果(图 3)进行比较, 显然本文计算结果不如文[17], 因为他们的四边形是 $\Delta x = \Delta y = 0.0125$. 相信如果我们进行网格加密, 计算结果也能够得到他们那样的计算效果(见图 14).

在时间 $t=4$ 时刻, 图 7, 9, 11, 13 和 15 进行比较, 同样二阶精度的计算结果比一阶精度的计算结果好, 但是特征分量限制器不如分量限制器计算效果好; 与 Woodward 和 Colella 差分方法^[17] 计算结果(图 3, 7)比较, 同样本文计算结果不如他们的计算结果; 原因是高阶精度方法对于前台阶问题, 在奇异点附近一般需要作一些特殊的处理, 我们没有作.

例 4(双马赫反射问题) 如图所示的区域, 在右端 $x=1.6$ 处有一马赫数为 10 的强激波, 以与 x 轴夹角为 60° 射入. 其余边界条件为反射边界条件.

这里间断有限元网格剖分为 $\Delta x = \Delta y = 1/12$ 和 $\Delta x = \Delta y = 1/60$. 图 16, 17 为在时间 $t = 0.2$ 时刻、网格边长 $\Delta x = \Delta y = 1/12$ 的密度等值线计算图, 图 18 为在时间 $t = 0.2$ 时刻、网格边长 $\Delta x = \Delta y = 1/60$ 的密度等值线计算图. 比较图 16, 17 可以看出, 如果都采用特征分量限制器的办法, 三阶精度的计算效果稍好于二阶精度的计算效果. 但由于网格比较粗, 需要进一步进行考证. 从图 18 可以看出, 本文计算效果与 Woodward 和 Colella 差分方法^[7] $\Delta x = \Delta y = 1/60$ 计算效果(图 9)一样.

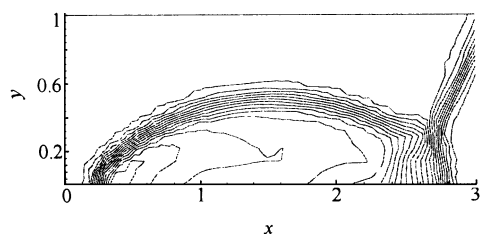


图 17 二阶精度和特征限制器在 $t = 0.2$ 时刻, $\Delta x = \Delta y = 1/12$ 强激波双马赫反射, 马赫数为 10, 密度从 1.728 到 20.74 的 30 条等值线

Fig 17 Double Mach reflection of a strong shock with second order accuracy and characteristic limiting. The Mach 10 density with 30 contours; 1.728 ~ 20.74 at time = 0.2, $\Delta x = \Delta y = 1/12$

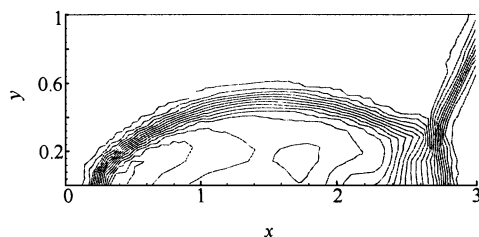


图 16 三阶精度和特征限制器, 在 $t = 0.2$ 时刻, $\Delta x = \Delta y = 1/12$ 强激波双马赫反射, 马赫数为 10, 密度从 1.728 到 20.74 的 30 条等值线

Fig 16 Double Mach reflection of a strong shock with third order accuracy and characteristic limiting, The Mach 10, density with 30 contours; 1.728 ~ 20.74 at time = 0.2, $\Delta x = \Delta y = 1/12$

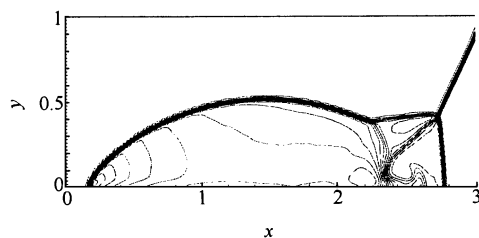


图 18 二阶精度和特征限制器在 $t = 0.2$ 时刻, $\Delta x = \Delta y = 1/60$, 强激波双马赫反射, 马赫数为 10, 密度从 1.728 到 20.74 的 30 条等值线

Fig 18 Double Mach reflection of a strong shock with second order accuracy and characteristic limiting. The Mach 10 density with 30 contours; 1.728 ~ 20.74 at time = 0.2, $\Delta x = \Delta y = 1/60$

3 结论

从上述 4 个算例得出如下结论, 间断有限元方法同样能够计算一些复杂流体力学问题, 且计算效果不比差分方法计算效果差. 而且, 由于有限元方法固有的特点, 能够采用四边形单元(计算结果见文[6])和三角形单元进行计算. 因此, 相对差分方法, 间断有限元方法能够比较容易地处理一些具有复杂边界条件和复杂区域上的流体力学问题.

[参 考 文 献]

- [1] Reed N H, Hill T R. Triangle mesh methods for the Neutron transport equation [R]. Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-UR-73-479, 1973.
- [2] Cockburn B, Shu C W. The Runge-Kutta local projection P^1 -discontinuous Galerkin method for scalar conservation law [J]. *M²AN* 1991, **337**: 337—361.
- [3] Cockburn B, Shu C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework [J]. *Math Comp*, 1989, **52**: 411—435.
- [4] Cockburn B, Lin S Y. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one-dimensional systems [J]. *J Comp Phys*, 1989, **84**: 90—113.
- [5] Cockburn B, Hou S G, Shu C W. TVB Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws IV: the multidimensional case [J]. *J Comp Phys*, 1990, **54**: 545—581.
- [6] Cockburn B, SHU C W. TVB Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: Multidimensional systems [J]. *J Comp Phys*, 1998, **144**: 199—224.
- [7] Bassi F, Rebay S. High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equation [J]. *J Comput Phys*, 1997, **131**: 233—239.

- 138: 251—285.
- [8] Cockburn B, Shu C W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems [J]. SIAM J Numer Anal, 1998, 35: 2440—2463.
- [9] Jiang G, Shu C W. On cell entropy inequality for discontinuous Galerkin methods [J]. Math Comp, 1994, 62: 531—538.
- [10] Cockburn B, Gresho P A. A priori error estimates for numerical methods for scalar conservation law Part I The general approach [J]. Math Comp, 1996, 65: 533—573.
- [11] Johnson C, Pitkäranta J. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation [J]. Math Comp, 1986, 46: 1—26.
- [12] Bassi F, Rebay S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations [J]. J Comput Phys, 1997, 131: 267—279.
- [13] Lomtev I, Karniadakis G. A discontinuous Galerkin method for the Navier-Stokes equations [J]. Int Num Meth Fluids, 1999, 29: 587—603.
- [14] Oden J T, Babuska, Baumann C E. A discontinuous hp finite element method for diffusion problems [J]. J Comput Phys, 1998, 146: 495—519.
- [15] Biswas R, Devine K D, Flaherty J E. Parallel adaptive finite element methods for conservation laws [J]. Applied Numer Math, 1994, 14: 255—283.
- [16] DeCougny H L, Devine K D, Flaherty J E, Loy R M, Özturan C, Shephard M S. High-order accurate discontinuous finite element solution of the 2D Euler equations [J]. Applied Numer Math, 1994, 16.
- [17] Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two dimensional fluid flow with strong shocks [J]. J Comput Phys, 1984, 54.
- [18] Marinak M M, Haan S W, Tipton R E, Weber S V, Remington B A. Three-dimensional simulations of ablative hydrodynamic instabilities in indirectly driven targets [R]. UCRL-LR-105821-95-3, 168—178.
- [19] Kershaw D S, Prasad M K, Shaw M J. Three-dimensional unstructured-mesh Eulerian hydrodynamics with the upwind discontinuous finite element method [Z]. Preprint, 160—168.
- [20] Zhou Tie, Li Yinfan, Shu Chi-wang. Numerical comparison of WENO finite volume and Runge-Kutta Galerkin methods [J]. J Sci Computing, 2001, 16: 145—171.

Discontinuous Finite Element Methods for Solving Hydrodynamic Equations

YU Xi-jun¹, ZHOU Tie²

(1. Laboratory of Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China;

2. Department of Mathematics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: The discontinuous finite element method with first, second and third order accuracy on triangular meshes on two-dimensional domain is applied to simulate hydrodynamic equations. The calculation results are compared with those from difference methods. It is reckoned that the discontinuous finite element method has advantages in solving hydrodynamic problems with complicated boundary conditions or a domain with a complicated boundary.

Key words: triangular mesh; discontinuous finite element method; wind tunnel with a step; double Mach reflection of a strong shock