一维 Burgers 方程的时间/空间有限元方法研究

赵东华
(四川大学 数学学院, 四川 成都 610064)

摘要: 结合稳定化思想, 对一维 Burgers 方程的空间/时间有限元方法, 进行了一般性的讨论. 提出了相应于此问题的空间/时间有限元格式, 并在适当的假设条件下, 证明了一般性的误差结果.

关键词: 空间/时间有限元; 稳定化; 误差估计
中图分类号: O241.82　　文献标识码: A　　文章编号: 1001-8395(2001)03-0235-03

0　引言

在对非定常问题的有限元处理中, 空间/时间有限元方法与一般用的较多的半离散/全离散有限元法的区别在于: 后者先在空间方向上采用有限元离散, 再在时间方向进行差分近似; 而前者则在空间方向和时间方向上同时采用有限元离散, 因而是一种非结构化风格方法. 由于空间/时间有限元方法具有良好的稳定性, 所以用它来处理不稳定问题常能取得较好的效果. 这种优点是半离散/全离散等其他有限元方法所不可比拟的.

Burgers 方程是物理学中一类重要的流体力学方程, 对它的研究一直没有中断过. 忻孝康等人[1]、付德勋[2]、C. A. Fletcher[3]、罗振东等[4]分别用标准有限元、差分法、谱方法、混合有限元方法进行研究, 均取得一定成果. 本文的目的是结合稳定化思想, 即在方程中添加最小二乘项以增强稳定性. 我们给出了一维 Burgers 方程的空间/时间有限元格式, 并证明了相应的误差估计.

本文提出相应的空间/时间有限元格式, 给出了一个稳定性结果, 并证明误差估计结果. 文中字母 C 均表示与 h 无关的常数, 每次出现都可能代表不同的值.

1　问题、记号及格式

(1) 考虑问题: 求 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times I,$$
$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times I,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega.$$

这里 $\Omega = (a_1, b_1)$ 为有界开区间, $I = (0, T]$ 为时间区域. 设 $a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b_1$ 将 Ω 剖分为 $\Omega_n = (x_n, x_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$. 设 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_M = T$, 将时间区域剖分为 $I_m = (t_m, t_{m+1})$, $m = 0, 1, 2, \cdots, M-1$. 令 $S = \Omega \times I$, 相应的剖分为 $J_h = \{K\}$, $K = \Omega_n \times I_m$, $S_m = \Omega \times I_m$, h 为剖分的最大直径. $P_k(K)$ 为 K 上关于自变量 x, t 的次数不超过 k 的多项式.

对于 $k \geq 1$, 定义如下一些空间:

$$V_h^m = \{ v \in V(S_m); \quad v|_k \in P_k(\Omega_m), \quad \forall K = \Omega_n \times I_m \in J_h \},$$
$$V_h = \prod_{m=0}^{M-1} V_h^m,$$

即 V_h 为关于(x, t)的次数不超过 k 的分片多项式, 它关于 x 连续, 但在 $t = t_m$ 可能不连续. 为方便起见, 记

$$\| v \|_{S_m} = (v, v)_{S_m}^{1/2} = \Big(\iint_{S_m} v \times v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{2}},$$
$$\langle w, v \rangle_m = (w(\circ, t_m), v(\circ, t_m))_\Omega = \iint_\Omega w((\circ, t_m) \times v(\circ, t_m) \mathrm{d}x,$$
$$| v |_m = \langle v, v \rangle_m^{1/2},$$
$$v_\pm(x, t) = \lim_{\varepsilon \to 0^\pm} v(x, t + \varepsilon),$$
$$[v] = v_+ - v_-,$$
$$v^m = v(\circ, t_m).$$

下面给出问题(1)的稳定化的空间/时间有限元格式.

(2) 求 $u_h \in V_h$, 使得对 $\forall v \in V_h$,

收稿日期: 2001-03-12
作者简介: 赵东华(1975-), 男, 硕士生

$$(u_{h_t}+u_hu_{h_x}-\upsilon u_{h_{xx}},v+\delta(v_t+vv_x-\upsilon v_{xx}))+\sum_{m=1}^{M-1}(u_{h_+}^m-u_{h_-}^m,v_+^m)_\Omega=0,$$

其中 δ 为稳定化常数,待定.引入双线性形式及线性形式

$$F(u,v)=\sum_{m=0}^{M-1}(u_t+uu_x-\upsilon u_{xx},v+\delta(v_t+vv_x-\upsilon v_{xx}))_{S_m}+\sum_{m=1}^{M-1}(u_+^m-u_-^m,v_+^m)+(u_+^0,v_+^0)_\Omega.$$

$$L(v)=(u_+^0,v_+^0),$$

则问题(2)可写成:求 $u_h\in V_h$,使得对 $\forall v\in V_h$ 有

$$F(u_h,v)=L(v).$$

2 误差估计

定义范数 $\| |(\cdot,\cdot)| \|$ 如下

$$\| |v| \|^2=\sum_{m=0}^{M-1}h\|v_t+vv_x-\upsilon v_{xx}\|_{S_m}^2+\sum_{m=0}^{M-1}\upsilon\|v_x\|_{S_m}^2+\frac{1}{2}[|v_-^M|^2+|v_-^0|^2+\sum_{m=1}^{M-1}|[v^m]|^2],$$

则有引理2.1.

引理2.1 $F(v,v)=\| |v| \|^2,\ \forall v\in V_h$.

$$\sum_{m=1}^{M-1}(v_t,v)_{S_m}+\sum_{m=1}^{M-1}(v_+^m-v_-^m,v_+^m)_\Omega+(v_t^0,v_t^0)_\Omega=\frac{1}{2}[|v_-^M|^2+|v_-^0|^2+\sum_{m=1}^{M-1}|[v^m]|^2].$$

令

$$E=u-u_h=(u-\pi u)-(u_h-\pi u)\equiv\eta-\xi,$$

这里 u,u_h 分别为(1),(2)的解,πu 为 u 的某种性质的插值.

取 $\delta=h$,并设 $\varphi(x)\in H^{m+2}(\Omega)$,于是对于误差估计有定理2.2.

定理2.2 $\| |E| \|^2\leqslant ch^{2m+1}$.

证明 对 $\forall v\in V_h$,有 $F(u,v)=L(v)$,$F(u_h,v)=L(v)$,所以 $F(u_h-u,v)=0$,令 $v=\eta$,则

$$\| |\xi| \|^2=\| |u_h-\pi u| \|=F(u_h-\pi u,u_h-\pi u)=F(u_h-u,u_h-\pi u)+F(u-\pi u,u_h-\pi u)=F(\eta,\xi)=$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}(\eta_t+\eta\eta_x-\upsilon\eta_{xx},\xi+h(\xi_t+\xi\xi_x-\upsilon\xi_{xx}))_{S_m}+\sum_{m=1}^{M-1}(\eta_+^m-\eta_-^m,\xi_+^m)_\Omega+(\eta_+^0,\xi_+^0)_\Omega=$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}(\eta\eta_x-\upsilon\eta_{xx},\xi)_{S_m}+\sum_{m=0}^{M-1}h(\eta_t+\eta\eta_x-\upsilon\eta_{xx},\xi_t+\xi\xi_x-\upsilon\xi_{xx}))_{S_m}+\sum_{m=1}^{M-1}[(\eta_-^{m+1},\xi_-^{m+1})_\Omega-(\eta_+^m,\xi_+^m)_\Omega]-\sum_{m=0}^{M-1}(\eta,\xi_t)_{S_m}+\sum_{m=1}^{M-1}(\eta_+^m-\eta_-^m,\xi_+^m)_\Omega+(\eta_+^0,\xi_+^0)_\Omega=$$

$$(\eta_-^M,\xi_-^M)_\Omega+(\eta_+^0,\xi_+^0)_\Omega-\sum_{m=1}^{M-1}(\eta_-^m,\xi_+^m-\xi_-^m)+\sum_{m=0}^{M-1}(\eta\eta_x-\upsilon\eta_{xx},\xi)+\sum_{m=0}^{M-1}h(\eta_t+\eta\eta_x-\upsilon\eta_{xx},\xi_t+\xi\xi_x-\upsilon\xi_{xx})-\sum_{m=0}^{M-1}(\eta,\xi_t+\xi\xi_x-\upsilon\xi_{xx})+\sum_{m=0}^{M-1}(\eta,\xi\xi_x-\upsilon\xi_{xx}).$$

使用Holder不等式、Cauchy不等式以及Poincare不等式,进一步可推知有

$$\| |\xi| \|^2\leqslant\frac{3}{4}\| |\xi| \|^2+\frac{h}{2}\sum_{m=0}^{M-1}\|\eta_t+\eta\eta_x-\upsilon\eta_{xx}\|_{S_m}^2+2h^{-1}\|\eta\|^2+c_1|\eta_-^m|^2+c_2\|\eta_x\|^2,$$

其中 c_1,c_2 是与 h 无关的常数.

再由标准的插值估计[5,6]:

$$\sum_{m=0}^{M-1}\|\eta\|^2\leqslant ch^{2m+4}\|u\|_{m+2},$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}\|\eta_-^m\|^2\leqslant c^{2m+3}\|u\|_{m+2},$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}\|\eta_{xx}\|^2\leqslant c^{2m}\|u\|_{m+2},$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}\|\eta_t\|^2\leqslant c^{2m+2}\|u\|_{m+2}.$$

略去 h 的高阶项,易得

$$\| |\xi| \|^2\leqslant ch^{2m+1}\|u\|_{m+2},$$

$$\| |\eta| \|^2\leqslant ch^{2m+1}\|u\|_{m+2}.$$

又 $\varphi\in H^{m+2}(\Omega)$,故 $\|u\|_{m+2}\leqslant\|\varphi\|_{m+2}\leqslant c$,见文[4,7].所以

$$\| |E| \|^2\leqslant ch^{2m+1}.$$

证毕.

致谢 衷心感谢冯民富的悉心指导.

参考文献

[1] 忻孝康, 刘儒勋, 蒋伯诚. 计算流体动力学[M]. 北京: 国防科技大学出版社, 1994.

[2] 付德勋. 流体力学数值模拟[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.

[3] Fletcher C A. A comparison of finite element and finite difference solution of the one and two dimensional Burgers' equations[J]. J Comp Phys, 1983, 51: 159～188.

[4] 罗振东, 刘儒勋. Burgers方程的混合元分析及其数值模拟[J]. 计算数学, 1999, 21: 257～262.

[5] Ciarlet P G. The Finite Element Methods for Ellipric Problems[M]. Amsterdan: North-Holland, 1978.

[6] 谢小平, 罗鲲, 胡兵. 一类混合型问题的空间/时间有限元方法[J]. 四川大学学报(自然科学版), 1999, 36(4): 668～672.

[7] Shang Y D. Initial boundary value problem for a class of generalized Burgers type equation[J]. Mathematica Applicata, 1996, 9: 166～171.

On the Space/Time Finite Element Method for the One-Dimensional Burgers Equation

ZHAO Dong-hua

(*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu* 610064, *Sichuan*)

Abstract: The space/time finite element method of a class of one-dimensional Burgers equation is discussed via stabilization method, a space/time finite element scheme corresponding these problems is given. Under certain hypothesis, the general error estimation is obtained.

Key words: Space/time finite element method; Stabilization; Error estimation

2000 MSC: 65N30

(编辑 李德华)