

高精度边界格式的研究¹⁾

陈海昕 鄂 秦 李凤蔚

(西北工业大学第三研究室, 西安 710072)

摘要 利用有精确解的 Ringleb 流动, 构造了对流场数值解精度进行检验的“Ringleb 机器”. 重点讨论了边界格式对流场数值解的影响及高精度边界格式的建立. 计算表明, 在场内应用二阶精度格式情况下, 采用二阶精度的边界格式所得到的流场解精度将大大高于采用一阶边界格式所得到的精度. 为提高流场解的精度, 不仅需要高精度的边界格式, 还必须注意边界格式与场内格式的匹配. 计算还表明, 采用特征线修正的方法能有效地提高边界处理的精度.

关键词 精度, 边界格式, Ringleb 流动, 格式匹配, 特征线修正

引 言

对各种流场计算方法进行数值检验, 首先必须要有检测手段. Ringleb 流动是一个理想的“量具”, 因为它有精确解, 而且 Ringleb 流动中包括了亚、跨、超音速区, 用它构造的测试工具有广泛的适用性. 由于 Ringleb 流动是等熵流动, 它不能作为检验激波计算精度的工具. 激波计算的精度可采用其它方法进行检验.

流场计算精度与边界处理的精度有极为密切的关系. 使用本文构造的 Ringleb 机器进行分析表明, 边界处理误差的影响绝非仅限于边界附近, 而是由场内格式逐渐带入场内, 最终影响全场. 不同的边界处理有时会使整个流场的精度相差一两个数量级. 因此, 构造高精度的边界格式是十分有意义的. 计算实践表明, 并不是单纯采用精度阶次高的格式就能解决问题, 对此仍需进行进一步的细致分析.

1 Ringleb 流动及其精确解

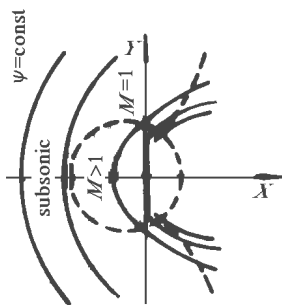


图 1 Ringleb 流动流线图
Fig. 1 Stream lines of Ringleb flow

F. Ringleb 找到了可压缩流的流函数方程的一个解 $\psi = \theta / W$, 其所对应的流动称之为 Ringleb 流动^[1]. 在物理平面上, 流线如图 1 所示. 如除去接近原点发生奇性的部分, Ringleb 流动可看作从右上方无穷远处来流绕过一个关于 X 轴对称的钝头体流向右下方无穷远处. 流场中任两条流线之间部分即可看作以这两条流线为管壁的管中流动. 流动从无穷远静止状态, 依次可能经历

¹⁾国防科工委 85 空气动力学预先性研究及教委博士点基金资助课题.

1995-04-17 收到第一稿, 1995-12-11 收到修改稿.

亚、跨、超音速区,在 X 轴上达到最大速度,然后以与 X 轴对称的形式流向右下方无穷远。上述过程是连续的,即无激波的。

由等熵可压缩势流的流函数方程出发,可得到 Ringleb 流动的精确解为

$$X = \frac{1}{S^5} \left(\frac{1}{2V^2} - j^2 \right) + \frac{L}{2} \quad (1)$$

$$Y = \pm \frac{j}{S^5 V} \sqrt{1 - V^2 j^2} \quad (2)$$

其中: j 为流函数, V 为速度大小, $S = \left(1 - \frac{V-1}{2} V^2 \right)^{1/2}$, V 为比热比, $L = \frac{1}{S} + \frac{1}{3S^3} + \frac{1}{5S^5} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+S}{1-S}$ 。

2 Ringleb 流动的主控方程组及数值求解方法

为方便数值求解及便于检验边界处理的精度,建立如图 2 所示的流管坐标系:取两条已知的流线 l_0, l_1 , 其流函数分别为 j_0, j_1

$$l_0: r = a(a)$$

$$l_1: r = b(a)$$

图中任一点 c 的 Z 坐标定义为

$$Z_c = \frac{r_c - a}{b - a} \quad (3)$$

即流场中任意点坐标可用 (a, Z) 来描述,且 $0 \leq Z \leq 1$ 。

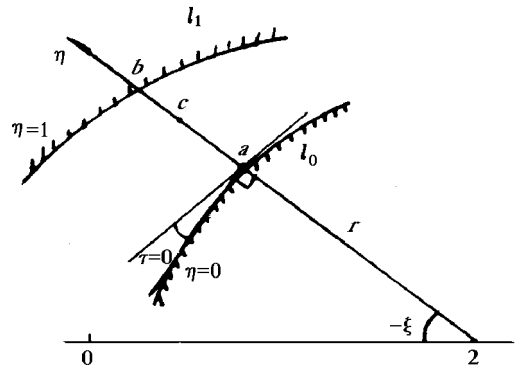


图 2 流管坐标系
Fig. 2 Stream tube coordinate system

在上述坐标系下,推导出适于 Ringleb 流动数值求解的主控方程

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \lambda_{pp} \frac{\partial P}{\partial Z} + \lambda_{pt} \frac{\partial T}{\partial Z} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \lambda_{tp} \frac{\partial P}{\partial Z} + \lambda_{tt} \frac{\partial T}{\partial Z} + (1 + T^2) \quad (5)$$

其中: $\lambda_{pp} = \frac{a^a + Z(b^a - a^a) - rM^2 T}{b - a}$, $\lambda_{pt} = \frac{-rM^2 V}{(b - a)}$, $\lambda_{tp} = \frac{-r(M^2 - 1)(1 + T^2)}{(b - a)V M^2}$, $\lambda_{tt} = M^2 - 1 - T^2$, $r = a + Z(b - a)$, $P = \ln P$, M 为马赫数, p 为静压, $T = \tan f$, f 为流动方向与 r 周向的夹角。

以 P, T 作为未知变量,则将 Ringleb 流动中的边界条件转化为 Dirichlet 型,即 T 是固壁边界条件, P 是自由喷流边界条件。这样边界值都能够精确给出,便于以后的分析。

(4), (5) 式可写为矩阵形式

$$W^a = A W Z + B \quad (6)$$

其中: $W = (P \ T)^T$, $A = \begin{bmatrix} \lambda_{pp} & \lambda_{pt} \\ \lambda_{tp} & \lambda_{tt} \end{bmatrix}$, $B = (0 \ 1 + T^2)^T$ 。

可以证明,当 $M > 1$ 时,方程组为双曲型, $M = 1$ 时,方程组为抛物型, $M < 1$ 时,方程组为椭圆型.

选用 $j = 0.7$, $j = 0.8$ 两条流线作为流管边界 l_0, l_1 , 研究 $-20^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$ 的区域. 由 Ringleb 流动精确解可知, 在此区域 $M > 1$, 则方程组 (6) 为双曲型.

在计算域, 求解区域为矩形: $0 \leq Z \leq 1$, $-20^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ$. 在 Z 方向划分均匀网格, 步长为 h ; 在 α 方向进行推进计算, 推进步长 k 由 CFL 条件确定. 在进行数值求解时, 场内差分格式我们选用了 Lax-Wendroff 格式与 MacCormack 格式. 初始条件由 Ringleb 流动精确解给出. 选用不同的边界格式, 就可以得到不同的流场解. 把它与精确解进行比较, 即可对边界格式的优劣作出评价并为构造高精度边算法提供依据. 实现上述计算并对数值解进行检验的计算程序我们称之为 Ringleb 机器.

3 边界格式对流场数值解的影响及边界格式场内格式的匹配

3.1 五种边界格式

i 表示 Z 方向第 i 个网格结点, j 表示推进的第 j 步第 j 层网格结点

$$\begin{aligned} W_i &= W(ih, \alpha_j) \\ W_i^{0.5} &= W(ih, \alpha_j + 0.5k) \\ W_i^{*1} &= W(ih, \alpha_j + k) \end{aligned}$$

1) Rusanov 格式

$$\begin{aligned} W_0^{*1} &= W_0 + \frac{k}{2h} [(A_{1.5}^{0.5} + A_{0.5}^{0.5})(W_{1.5}^{0.5} - W_{0.5}^{0.5}) + \\ &\quad (A_1 + A_0)(W_1 - W_0) - (A_2 + A_1)(W_2 - W_1)] \end{aligned}$$

2) 二阶外插格式

$$\begin{aligned} W_0^{*1} &= W_0 + \frac{k}{h} [(A_{1.5}^{0.5} + A_{0.5}^{0.5})(W_{1.5}^{0.5} - W_{0.5}^{0.5}) - \\ &\quad \frac{1}{2}(A_{2.5}^{0.5} + A_{1.5}^{0.5})(W_{2.5}^{0.5} - W_{1.5}^{0.5})] \end{aligned}$$

3) Version II 格式

$$\begin{aligned} \tilde{W}_0^{*1} &= W_0 + \frac{Uk}{2h} (A_{1.5}^{0.5} - A_{1.5}^{*0.5})(W_{1.5}^{0.5} - W_{0.5}^{0.5}) - \\ &\quad \frac{[(4 - 3U)A_{0.5}^{0.5} - (3 - U)A_{1.5}^{0.5} + A_{2.5}^{0.5}]}{2(1 - U)h} k \times \\ &\quad [(2 - U)W_{0.5}^{0.5} - (3 - U)W_{1.5}^{0.5} + W_{2.5}^{0.5}] \end{aligned}$$

4) Version II spez 格式

$$\begin{aligned} \tilde{W}_0^{*1} &= W_0 + \frac{k}{2h} (3A_{0.5}^{0.5} - A_{1.5}^{0.5})(W_{1.5}^{0.5} - W_{0.5}^{0.5}) - \frac{k}{h} [(2 + T)A_{0.5}^{0.5} - \\ &\quad (1 + 2T)A_{1.5}^{0.5} + TA_{2.5}^{0.5}](W_{2.5}^{0.5} - 2W_{1.5}^{0.5} + W_{0.5}^{0.5}) \end{aligned}$$

5) 一阶外插格式

$$\tilde{W}_0^{* -1} = 2W_1^{* -1} - W_2^{* -1}$$

可以证明上述前四种格式,在方程线性化条件下具有二阶精度,第五种格式显然只有一阶精度.上述边界格式都是对应左边界的,同理可写出对应右边界的格式.

由上述边界格式,计算出的边界值不满足流动的边界条件.为解决此问题,利用相容性条件,即沿特征线黎曼变量不变.若在边界上,由边界指向场内的特征线所对应的特征向量为 Q ,应用相容性条件,则有

$$W_0^{* -1}Q = \tilde{W}_0^{* -1}Q$$

再加上边界条件(此处 $T_0^{* -1}$ 为已知),代入上式即可求出 $P_0^{* -1}$.

3. 2 影响和匹配

1) 首先,边界值用精确值给出,场内格式分别采用 Lax-Wendroff 和 MacCormack 格式,用“Ringleb 机器”进行计算.计算结果的静压与精确解的相对误差分布示于图 3. 图 中所标出的数字为相对误差 E 的 10^5 倍.可看出,应用精确边界值,两种场内格式的计算误差均达到 10^{-5} 量级(图中注明的平均误差是指 E 的均方根误差的 10^5 倍).

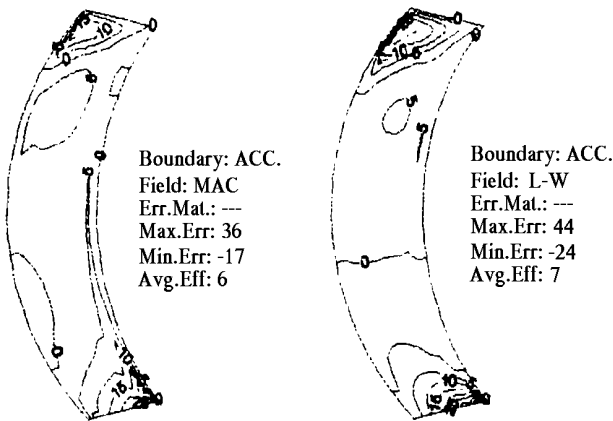


图 3

Fig. 3

2) 边界格式分别采用上述前四种格式用 Ringleb 机器进行计算,发现除 Rusanov 格式的误差达到 10^{-4} 量级之外,其它三种二阶格式的平均误差都在 10^{-3} 至 10^{-2} 量级(见图 4, 5, 6, 7 的左部). 同为二阶边界格式,结果却有如此巨大差异,为此,对场内及边界格式进行 Taylor 展开以便分析原因,寻求解决办法.

3) Taylor 展开分析及边界格式的匹配. Taylor 展开的工作量是十分巨大的,为简化,我们对标量拟线性方程 $u_t = a(u)u_x$ 的精确解,两个场内格式及四个二阶边界格式进行 Taylor 展开.从展开式的比较可看出,所有场内格式及边界格式前二阶项均相同,即它们都有二阶精度,但三阶项有差别.进一步分析发现,Version II 格式的三阶项除 u_{xxx} 系数与 Lax-Wendroff 格式不一致以外,其它项完全一样.但是,这种格式与 Lax-Wendroff 格式的配合并不比其它有更多的项不一致的格式好.同时,上述三种误差大的边界格式的 u_{xxx} 项的系数均为 $-5A$. 因此,我们在这三种格式中都加上一项 $A(u^3 - 3u^2 + 3u - u^0)$,由

于其展开式正好是 $\frac{h^3}{6} (6Au_{xxx})$, 使其 u_{xxx} 项系数由 $-5A$ 变为 A , 从而与场内格式的该项系数一致. 用 Ringleb 机器检验结果显示, 经过这样的匹配, 三种边界格式与 Lax-Wendroff 及 MacCormack 格式配合, 误差均达到 10^{-4} 量级 (见图 5, 6, 7 的右部). 这说明展开式中其它项的影响很小, 匹配的关键是 u_{xxx} . 从以上分析, 我们可以看出:

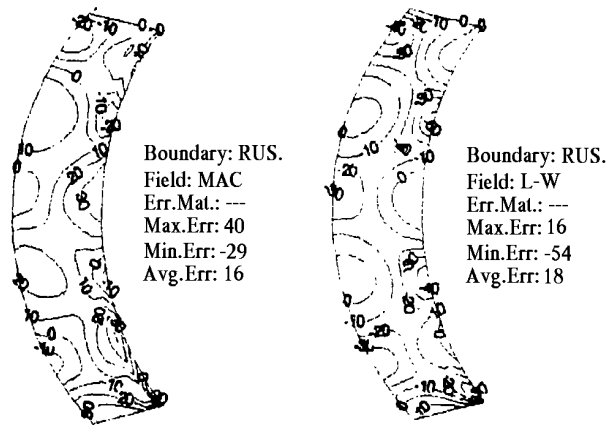


图 4
Fig. 4

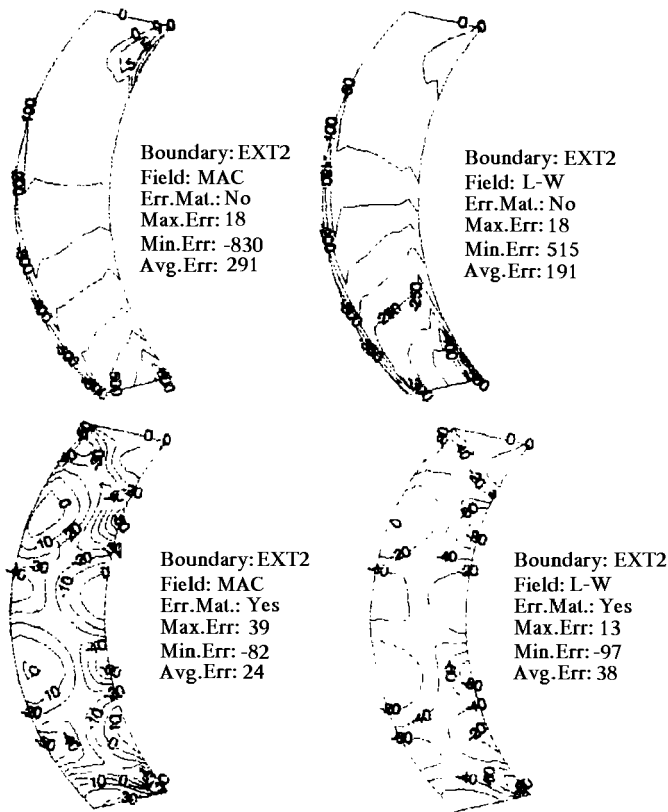


图 5
Fig. 5

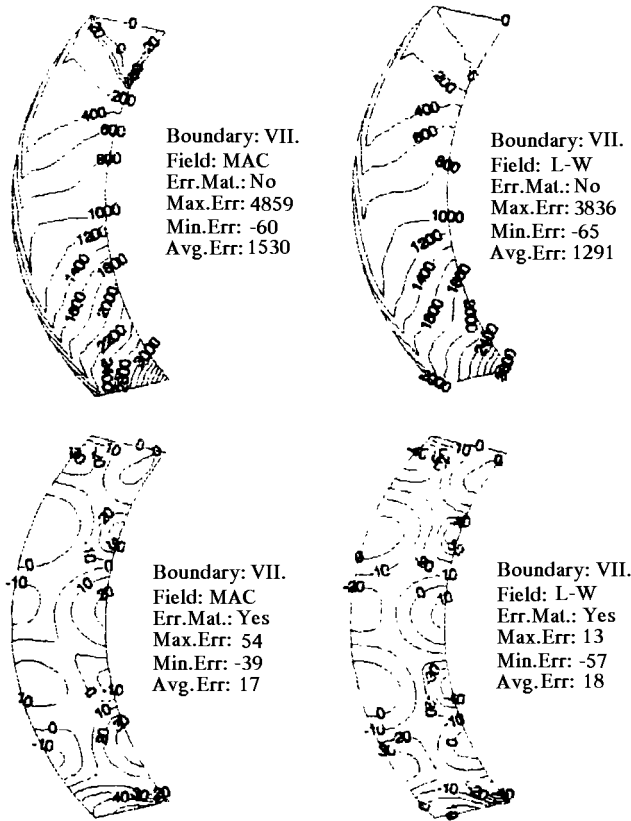


图 6
Fig. 6

i) 计算的精度不仅与边界格式本身精度阶次有关,还和它们与场内格式的配合有关.

ii) 二阶精度的边界格式与二阶场内格式必须匹配,才能达到理想的精度.进行匹配的基础是 Taylor 分析.

iii) 匹配只需对误差余项中的一些关键项进行.至于哪一项或哪些项是关键的,必须通过具体分析,有时还要经过数值实验来确定.

4) 利用 Ringleb 机器对一阶外插格式进行计算,结果显示,特征线修正使流场计算精度提高一个量级,在边界尤其显著.但与二阶边界格式相比其误差仍大一个量级(见图 8).

4 结 论

1) 应用本文所构造的 Ringleb 机器作为检验数值格式及边界处理对流场计算精度影响的工具是方便而有效的.

2) 边界处理的精度对流场解的精度有重大影响.在场内格式有二阶精度的情况下,应用与场内格式匹配的二阶精度的边界格式所得流场解的精度将大大高于采用一阶边界格式的精度.

3) 要提高流场解的精度,不仅需要高精度边界格式,还要注意边界格式与场内格式的匹配.

- 4) 采用特征线修正的方法 ,对提高边界处理的精度是十分有效的 .
- 5) 本工作有待进一步深入 ,比如对我们常用的格式及边界处理方法进行检验 ,并从中得出结论以指导我们的数值计算工作 .

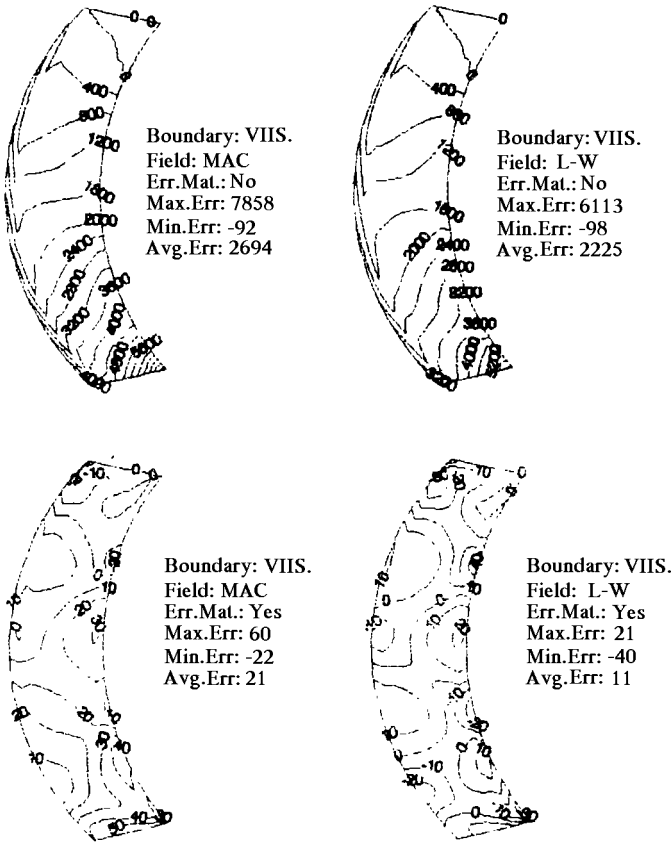


图 7
Fig. 7

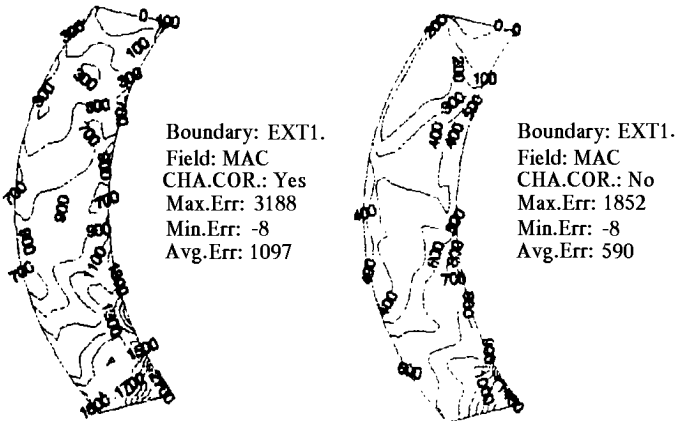


图 8
Fig. 8

参 考 文 献

- 1 Förster K. Boundary algorithms for multidimensional invicid hyperbolic flows. In Förster K, ed. Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 1, Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg, 1978
- 2 Förster K. Some Experiments on Explicit Boundary Algorithms. NASA CP2201, 1981
- 3 Ringeb F. Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung. ZAMM, 1940, 20 (4): 185~ 198
- 4 Rusanov V, Nazhestkina E. Boundary conditions in difference schemes for hyperbolic systems. In Förster K, ed. Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 2, Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg, 1980
- 5 李凤蔚, 鄂秦. 有限体积法的分析与改进. 空气动力学学报, 1994, 12(4): 465~ 470

STUDY ON HIGH ACCURACY BOUNDARY ALGORITHMS

Chen Haixin E Qin Li Fengwei

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract Based on the Ringeb Flow, for which there exists analytical solution, a numerical tool named Ringeb Machine is developed to test the accuracy of algorithms of CFD. The affection that boundary procession exerts on the solution of the field is discussed. Result of our calculation shows that 1) Accompanying with a 2nd order field algorithm, a 2nd order boundary algorithm can lead to much more accurate solution than a 1st order one. 2) To raise the accuracy of the solution, it's not enough to simply use a higher order boundary algorithm. Some work must be done to Match the boundary algorithm with the field algorithm. 3) Using Characteristic correction at boundaries can effectively raise the accuracy of boundary procession.

Key words accuracy, boundary algorithm, Ringeb Flow, algorithm matching, characteristic correction