本周主要学习了第二章线性代数的内容。这一章分为 8 节，主要讲解了 4 个方面的问题：线性代数概述、线性方程组、向量的线性相关性和线性空间。

一、概述

1、如何理解向量：

（1）从几何的角度：

向量具有方向和幅度两个参数，均可由它的坐标得到。一个 n 维向量对应着 n 维空间中的一个点，n 个线性独立的 n 维向量可表示出 n 维空间中的任意一点。从这个角度理解向量，可将问题从低维扩展到高维；同时，这个角度是理解后续的线性空间相关概念的基础。

（2）从数据集合的角度：

向量是一些数据的集合，通过对向量的操作可以实现对向量中所含数据的批量操作；矩阵是向量的集合，矩阵的运算实际就是对向量的批量操作。这个角度在求解线性方程组中有重要的体现。在机器学习领域，矩阵运算更是数据处理的基础。

2、一些基本概念

矩阵的逆 A^{-1}，矩阵的转置 A^T，矩阵的加法、乘法与数乘运算等。

（除了 A^{-1} 的判断和求法，均较为基础，不再赘述。）

二、线性方程组的解法

这一部分主要讲解如何通过矩阵的运算来较为简便地求解高维线性方程组，不仅可以简化手动计算，更因为矩阵的表示法使计算机能够方便进行计算，对于大量数据的处理有重要意义。

1、线性方程组的求解步骤

对于线性方程 $Ax=b$，求它的通解可分为三个步骤：

a、求出 $Ax=b$ 的一个特解（particular solution）

b、求出齐次方程 $Ax=0$ 的通解（general solution）

c、a 与 b 中的解相加即得 $Ax=b$ 的通解。

2、求解 $Ax=b$

首先将向量 b 添加到系数矩阵 A 的最后一列得到增广矩阵（augmented matrix）$\tilde{A}$，然后通过高斯消元法（Gaussian Elimination）将 $\tilde{A}$ 转换为行阶梯阵（row echelon form）。接着在解向量中，依次将其中一个自由向量所在的列置 1，其余自由向量所在列置 0，再带入方程组中，即可求得齐次方程的通解和非齐次方程的特解，进而求得非齐次方程的通解。

3、The Minus -1 Trick

在本书中介绍了一种针对特殊形式的系数矩阵，快速求解齐次线性方程组通解的技巧，叫做 The Minus -1 Trick。

若系数矩阵 $A_{k\times n}(k<n)$ 为行阶梯阵，且每一行的第一个非零元素均为 1。求解 $Ax=0$ 时，可用行向量[0...0 -1 0...0]将矩阵 $A_{k\times n}(k<n)$ 扩展成 n 阶方阵 $A_{n\times n}$，则在 $A_{n\times n}$ 中，-1 所在的列向量的集合即为 $Ax=0$ 的基础解系。具体示例可参考教材。

4、高斯消元法求解 A^{-1}

设 A 为 n 阶方阵，I_n 为 n 阶方阵，则可通过高斯消元法求解 A^{-1}，具体过程为：$[A|I_n]\rightarrow...\rightarrow[I_n|A^{-1}]$。

三、向量的线性相关性

这一部分内容主要讲解向量的线性相关性，通过求解向量组的线性相关性，可以进一步简化数据的表示，并研究数据之间的线性关系。

1、线性表示：

若向量 $v=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_kx_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_ix_i$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k\in R$，则称 v 可由 $x_1,x_2,...,x_k$ 线性表示。

2、线性相关性：

令 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_kx_k=0$，若 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ 全为 0，则称 $x_1,x_2,...,x_k$ 线性无关，否则 $x_1,x_2,...,x_k$ 线性相关。

3、线性相关性的判断

（1）定义法。

（2）求秩法：

设 $x_1,x_2,...,x_k$ 构成的矩阵为 $A_{n\times k}$，对 $A_{n\times k}$ 做初等变换，将 $A_{n\times k}$ 转换为行最简形，求得 $A_{n\times k}$ 的秩 $r(A_{n\times k})$，若 $r(A_{n\times k})<k$，则向量线性相关，否则线性无关。

（3）相关定理：若在集合 $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ 中，

a、存在零向量，则这些向量线性相关。

b、其中一个向量可由其他向量线性表示，则这些向量线性相关。

4、矩阵的秩

（1）定义：

向量组的一个部分组，若这个部分组中的所有向量是线性无关的，且再从这个向量组的其余向量中任选一个向量（如果还有的话）添加到这个部分组中，这个部分组就线性相关，则这个部分组称为该向量组的一个极大线性无关组。

向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩。

（2）性质：

a、 $r(A)=r(A^T)$

b、若 A 为 n 阶方阵，且 $r(A)=n$，则 A 是可逆矩阵。

c、 $A_{m\times n}$，对于非齐次线性方程 $Ax=b$，若 $r(A)=r(A|b)=n$，则方程组有唯一解；若 $r(A)=r(A|b)<n$，则方程组有无穷多解；若 $r(A)\neq r(A|b)$，则方程组无解。

d、 $A_{m\times n}$，则齐次线性方程 $Ax=0$ 的基础解系中有 $n-r(A)$ 个向量。

e、若 $A_{m\times n}$ 满秩矩阵，则 $r(A)=\min(m,n)$。

四、向量空间与线性映射

这一部分的内容主要讲解向量空间的相关理论，向量空间的引入进一步将问题从低位推向高维，并从整体上研究向量的一些性质。由于这一部分较为抽象，且还没有对其进行具体的应用，因此自己对该内容的理解还不是十分清晰，有待进一步学习。

1、群、向量空间与向量子空间：

（由于这些概念的定义较为复杂，在此只简述，精确定义可参考教材）

（1）群：

定义 $G=(g,\otimes)$，其中 g 为向量集合，$\otimes$ 是一种定义在 g 上的运算。若 G 具有以下性质，则 G 称为群(group)：

a、封闭性

b、结合性

c、任意元素具有中性元

d、任意元素具有逆元

若 G 的一个群，且其具有交换性，则 G 是一个阿贝尔群(Abelian Group)。

（2）向量空间：

定义 $V=(v,+,\cdot)$，若 V 满足以下性质，则 V 是一个向量空间：

a、 $(v,+)$ 是阿贝尔群。

b、 $(v,\cdot)$ 满足分配性、结合性和中性元性质。

（3）向量子空间：

若 $U=(\mathrm{u},+,\cdot)$ 是向量空间 $V=(v,+,\cdot)$ 的一个子集，且 $(\mathrm{u},\cdot)$ 具有封闭性，则 $U=(\mathrm{u},+,\cdot)$ 是一个向量子空间。

2、线性映射（Linear Mapping）

（1）线性映射：

若 V 和 W 是两个向量空间，Φ 是一个 $V\rightarrow W$ 的映射，若有以下关系成立，则 Φ 是一个线性映射：$\forall x,y\in V,\forall\lambda\in R:\Phi(\lambda x+\psi y)=\lambda\Phi(x)+\psi\Phi(y)$。

相关概念：单射(injective)、满射(surjective)、双射(bijective)。

（2）矩阵在向量空间下的表示：

a、坐标：

若$\{b_1,b_2,...,b_n\}$是 n 维向量空间 V 的一组基向量，则$\forall x=\alpha_1 b_1+...+\alpha_n b_n \in V$，$(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$是 x 是在V 中以$\{b_1,b_2,...,b_n\}$表示的坐标。

b、过渡矩阵(transformation matrix)：

若$B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$和$C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$分别是向量空间V 和W 的一组基向量，若存在唯一的线性映射Φ使$\Phi(b_j)=\alpha_{1j}c_1+...+\alpha_{mj}c_m=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}c_i$，则$A_\Phi$是关于$\Phi$的过渡矩阵，其中$A_\Phi(i,j)=\alpha_{ij}$。

假设$\hat{x}$是向量 x 在 V 中用 B 表示的坐标，$\hat{y}$是向量 y 在 W 中用 C 表示的坐标。若有$y=\Phi(x)$，则$\hat{y}=A_\Phi \hat{x}$。

3、核(kernel)与象(image)

A、定义：

设$\Phi:V\to W$是一个线性映射，W 中的零向量在映射Φ下的原象集成为Φ的核，记为$Ker(\Phi)$，Φ的象记为$\text{Im}(\Phi)$。显然有$Ker(\Phi)\subseteq V,\text{Im}(\Phi)\subseteq W$。

B、性质：

a、Φ是单射当且仅当$Ker(\Phi)=0$；

b、Φ是满射当且仅当$\text{Im}(\Phi)=W$；

c、$\dim(Ker(\Phi))+\dim(\text{Im}(\Phi))=\dim(V)$。

4、仿射(Affine Mapping)

（1）仿射子空间：

向量$x_0\in V$，向量子空间$U\subseteq V$，则集合 L 满足下列关系，则 L 称为一个仿射子空间：$L=x_0+U=\{x_0+u:u\in U\}=\{v\in V\mid \exists u\in U:v=x_0+u\}$。

其中，x_0称为 *support point*，U 称为 *direction space*。

若仿射子空间 $L=x_0+U\subseteq V$，且 $U=\{b_1,b_2,...,b_k\}$，则对 $\forall x\in L$，有 $x=x_0+\lambda_1 b_1+...+\lambda_k b_k$，其中$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k\in R$。因此，非齐次线性方程组$Ax=b$的解空间要么是空集，要么是$n-r(A)$维仿射子空间。

（2）仿射：

V 和 W 是两个向量空间，$\Phi:V\to W$是一个线性映射，向量$a\in W$，则映射$\phi:V\to W,x\to a+\Phi(x)$是一个从 V 到 W 的仿射，a 称为ϕ的 *traslation matrix*。