本周主要学习了第二章线性代数的内容。这一章分为8节，主要讲解了4个方面的问题：线性代数概述、线性方程组、向量的线性相关性和线性空间。

1. 概述
2. 如何理解向量：

（1）从几何的角度：

向量具有方向和幅度两个参数，均可由它的坐标得到。一个n维向量对应着n维空间中的一个点，n个线性独立的n维向量可表示出n维空间中的任意一点。从这个角度理解向量，可将问题从低维扩展到高维；同时，这个角度是理解后续的线性空间相关概念的基础。

（2）从数据集合的角度：

向量是一些数据的集合，通过对向量的操作可以实现对向量中所含数据的批量操作；矩阵是向量的集合，矩阵的运算实际就是对向量的批量操作。这个角度在求解线性方程组中有重要的体现。在机器学习领域，矩阵运算更是数据处理的基础。

1. 一些基本概念

矩阵的逆，矩阵的转置，矩阵的加法、乘法与数乘运算等。

（除了 的判断和求法，均较为基础，不再赘述。）

1. 线性方程组的解法

这一部分主要讲解如何通过矩阵的运算来较为简便地求解高维线性方程组，不仅可以简化手动计算，更因为矩阵的表示法使计算机能够方便进行计算，对于大量数据的处理有重要意义。

1. 线性方程组的求解步骤

对于线性方程，求它的通解可分为三个步骤：

1. 求出的一个特解（particular solution）
2. 求出齐次方程的通解（general solution）
3. a与b中的解相加即得的通解。
4. 求解

首先将向量添加到系数矩阵的最后一列得到增广矩阵（augmented matrix），然后通过高斯消元法（Gaussian Elimination）将转换为行阶梯阵（row echelon form）。接着在解向量中，依次将其中一个自由向量所在的列置1，其余自由向量所在列置0，再带入方程组中，即可求得齐次方程的通解和非齐次方程的特解，进而求得非齐次方程的通解。

1. The Minus -1 Trick

在本书中介绍了一种针对特殊形式的系数矩阵，快速求解齐次线性方程组通解的技巧，叫做The Minus -1 Trick。

若系数矩阵为行阶梯阵，且每一行的第一个非零元素均为1。求解时，可用行向量将矩阵扩展成n阶方阵，则在中，-1所在的列向量的集合即为的基础解系。具体示例可参考教材。

1. 高斯消元法求解

设为n阶方阵，为n阶方阵，则可通过高斯消元法求解，具体过程为：。

1. 向量的线性相关性

这一部分内容主要讲解向量的线性相关性，通过求解向量组的线性相关性，可以进一步简化数据的表示，并研究数据之间的线性关系。

1. 线性表示：

若向量，其中，则称可由线性表示。

1. 线性相关性：

令，若全为0，则称线性无关，否则线性相关。

1. 线性相关性的判断

（1）定义法。

（2）求秩法：

设构成的矩阵为，对做初等变换，将转换为行最简形，求得的秩，若，则向量线性相关，否则线性无关。

（3）相关定理：若在集合中，

a、存在零向量，则这些向量线性相关。

b、其中一个向量可由其他向量线性表示，则这些向量线性相关。

4、矩阵的秩

（1）定义：

向量组的一个部分组，若这个部分组中的所有向量是线性无关的，且再从这个向量组的其余向量中任选一个向量（如果还有的话）添加到这个部分组中，这个部分组就线性相关，则这个部分组称为该向量组的一个极大线性无关组。

向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩。

（2）性质：

a、

b、若为n阶方阵，且，则是可逆矩阵。

c、，对于非齐次线性方程，若，则方程组有唯一解；若，则方程组有无穷多解；若，则方程组无解。

d、，则齐次线性方程的基础解系中有个向量。

e、若满秩矩阵，则。

四、向量空间与线性映射

这一部分的内容主要讲解向量空间的相关理论，向量空间的引入进一步将问题从低位推向高维，并从整体上研究向量的一些性质。由于这一部分较为抽象，且还没有对其进行具体的应用，因此自己对该内容的理解还不是十分清晰，有待进一步学习。

1、群、向量空间与向量子空间：

（由于这些概念的定义较为复杂，在此只简述，精确定义可参考教材）

（1）群：

定义，其中为向量集合，是一种定义在上的运算。若具有以下性质，则称为群(group)：

1. 封闭性
2. 结合性
3. 任意元素具有中性元

d、任意元素具有逆元

若的一个群，且其具有交换性，则是一个阿贝尔群(Abelian Group)。

（2）向量空间：

定义，若满足以下性质，则是一个向量空间：

a、是阿贝尔群。

b、满足分配性、结合性和中性元性质。

（3）向量子空间：

若是向量空间的一个子集，且具有封闭性，则是一个向量子空间。

1. 线性映射（Linear Mapping）

（1）线性映射：

若*V*和*W*是两个向量空间，是一个的映射，若有以下关系成立，则是一个线性映射：。

相关概念：单射(injective)、满射(surjective)、双射(bijective)。

（2）矩阵在向量空间下的表示：

a、坐标：

若是*n*维向量空间*V*的一组基向量，则，是是在中以表示的坐标。

b、过渡矩阵(transformation matrix)：

若和分别是向量空间和的一组基向量，若存在唯一的线性映射使，则是关于的过渡矩阵，其中。

假设是向量*x*在*V*中用*B*表示的坐标，是向量*y*在*W*中用*C*表示的坐标。若有，则。

1. 核(kernel)与象(image)

A、定义：

设是一个线性映射，中的零向量在映射下的原象集成为的核，记为，的象记为。显然有。

B、性质：

a、是单射当且仅当；

b、是满射当且仅当；

c、。

4、仿射(Affine Mapping)

（1）仿射子空间：

向量，向量子空间，则集合L满足下列关系，则L称为一个仿射子空间：。

其中，称为*support point*，*U*称为*direction space*。

若仿射子空间，且，则对，有，其中。因此，非齐次线性方程组的解空间要么是空集，要么是维仿射子空间。

（2）仿射：

V和W是两个向量空间，是一个线性映射，向量，则映射是一个从*V*到*W*的仿射，*a*称为的*traslation matrix*。