$L^p(\mathbb{R}^n)$ 对偶等式的推广

2024 年 6 月 17 日

1 $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1, \infty]$ 的对偶

讲到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的对偶, 那就会提到如下等式.

Lemma 1.1 (Benedek and Panzone, The space L^p, with mixed norm, Theorem 2)**.** *设 $p \in [1, \infty)$, f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 则*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \max_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx.$$

Remark 1.2. 当 $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \infty$ 时, 存在 g 使得 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx = \infty$ 是由 Brezis 书中结论保证的.

[H. Brezis, Functional Analysis, Exercise 4.7]: 设 $p \in [1, \infty)$, f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若 $\forall g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 有 $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 1中可从两个角度来减弱 g 的范围. 第一种是减弱为简单函数, 另一种是减弱为$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 感谢 xs 的建议, Stein 的结论跟 Theorem 1.4 有所不同, 有记录的必要.

Lemma 1.3 (E. M. Stein, Functional Analysis, Theorem 4.1 of Chapter 1)**.** *设 $p \in [1, \infty)$, f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 则*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g \text{ is simple}, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx. \tag{1}$$

Theorem 1.4. *设 $p \in [1, \infty)$, f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 则*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx. \tag{2}$$

1.1 实分析角度的证明

证明思路: $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 时, 该定理回到了经典情况, 故只需证明 $\|f\|_p = \infty$ 时, 右边也等于无穷. 即证右边小于无穷时, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 此时先证

$$\sup_{g \in L^\infty(\mathbb{R}^n), g\text{有紧支集}, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx < \infty.$$

再取一列 g_n 使得 fg_n 逼近 $|f|^p$. 从而证得 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

首先定义卷积核. 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

则 $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\rho) = \overline{B(0,1)}$ 且 $\rho \geq 0$. 对 $\forall k \in \mathbb{N}$ 和 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\rho_k(x) := \frac{k^n}{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}\rho(kx) = \begin{cases} \dfrac{k^n}{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \exp\left(\dfrac{1}{|kx|^2-1}\right), & |kx| < 1, \\ 0, & |kx| \geq 1, \end{cases}$$

则 $\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\rho_k) = \overline{B(0,1/k)}$, $\rho_k \geq 0$ 且 $\|\rho_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$.

Lemma 1.5. *设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $A \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集, 则 $A + B$ 为闭集.*

证明. 设 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A + B$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中收敛到 x_0. 则存在 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ 和 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ 使得, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$x_k = y_k + z_k.$$

由于 A 为有界闭集, 故可取 $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的收敛子列. 记 $y_0 := \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$, 则 $y_0 \in A$. 又由 B 是闭集知

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0 - y_0 \in B.$$

故

$$x_0 = y_0 + (x_0 - y_0) \in A + B.$$

因此 $A + B$ 是闭集. □

Remark 1.6. 注意, 两闭集必须有其中之一是有界的, 否则结论不一定成立. 取

$$A := \left\{k + \frac{1}{k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad \text{and} \quad B := \mathbb{Z},$$

则
$$A+B=\left\{k+\frac{1}{m}:\ k\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}\right\}$$
不是闭集.

有了这些准备工作, 现在可以开始证明 Theorem 1.4 了.

Proof of Theorem 1.4. 当 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 时, (2) 是经典的等式, 证明略.

断言, 若
$$\sup_{g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\,dx=:M<\infty.$$
则 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 事实上, 当 $M<\infty$ 时, $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 是自动的. 令 $g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有紧支集且 $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1$. 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 设 $g_k:=\rho_k*g$, 则 $g_k\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 从而
$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g_k(x)\,dx\le M\|g_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$
因为 $\lim_{k\to\infty}\|g_k-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=0$, 由 Riesz 定理知, 存在子列 g_{n_k} 几乎处处收敛到 g. 又由 g_k 的定义知, $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 且由引理 1.5 知,
$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(g_k)&=\operatorname{supp}(\rho_k*g)\subset\overline{\operatorname{supp}(\rho_k)+\operatorname{supp}(g)}\\&=\overline{\overline{B(0,1/k)}+\operatorname{supp}(g)}=\overline{B(0,1/k)}+\operatorname{supp}(g)\subset\overline{B(0,1)}+\operatorname{supp}(g),\end{aligned}$$
由此及 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 知, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 在几乎处处意义下
$$|fg_k|\le\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|f\mathbf{1}_{\operatorname{supp}(g_k)}|\le\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left|f\mathbf{1}_{\overline{B(0,1)}+\operatorname{supp}(g)}\right|\in L^1(\mathbb{R}^n).$$
故由控制收敛定理
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\,dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{k\to\infty}f(x)g_{n_k}(x)\,dx\\&=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g_{n_k}(x)\,dx\\&\le\lim_{k\to\infty}M\|g_{n_k}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=M.\end{aligned}$$
从而
$$\sup_{g\in L^\infty(\mathbb{R}^n),g\text{有紧支集},\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\,dx\le M.$$

若 $p=1$. 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 令
$$g_k:=\operatorname{sign}(f)\mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则 $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, g_k 有紧支集且 $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1$, 从而

$$\int_{B(0,k)} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_k(x)\, dx \le M.$$

令 $k \to \infty$, 由 Levi 定理知

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le M.$$

若 $p \in (1, \infty)$. 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$g_k := |f|^{p-1} \operatorname{sign}(f) \mathbf{1}_{\{|f|<k\}} \mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则 $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 g_k 有紧支集, 从而

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,k)\cap\{|f|<k\}} |f(x)|^p\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_k(x)\, dx \le M \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&= M \left[\int_{B(0,k)\cap\{|f|<k\}} |f(x)|^p\, dx \right]^{1/p'},
\end{aligned}$$

故

$$\left[\int_{B(0,k)\cap\{|f|<k\}} |f(x)|^p\, dx \right]^{1/p} \le M.$$

令 $k \to \infty$, 由 Levi 定理知

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le M.$$

综上, 断言成立.

因此, 当 $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ 时,

$$\sup_{g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx = \infty$$

(2) 仍然成立. 至此 Theorem 1.4 证毕. $\square$

2 泛函角度的证明

Theorem 1.4 的第一种证明思路来源于 Brezis 书中 Corollary 4.24 的证明. 同样的思路在张恭庆的泛函分析中也有提到. 实际上直接利用此结论, 从泛函角度能快速证明 Theorem 1.4.

Theorem 2.1 (H. Brezis, Functional Analysis, Corollary 4.24)**.** 设开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 且 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ 满足对 $\forall g \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,dx = 0.$$

则 f 在 Ω 上几乎处处为 0.

证明. 为了方便, 只证 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 时的情况. 令 $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且有紧支集. 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 设 $g_k := \rho_k * g$, 则 $g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x)\,dx = 0.$$

因为 $\lim_{k\to\infty} \|g_k - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$, 由 Riesz 定理知, 存在子列 g_{n_k} 几乎处处收敛到 g. 又由 g_k 的定义知, $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 且

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}\,(g_k) = \ &\mathrm{supp}\,(\rho_k * g) \subset \overline{\mathrm{supp}\,(\rho_k) + \mathrm{supp}\,(g)} \\ &= \overline{\overline{B(0,1/k)} + \mathrm{supp}\,(g)} = \overline{B(0,1/k)} + \mathrm{supp}\,(g) \subset \overline{B(0,1)} + \mathrm{supp}\,(g), \end{aligned}$$

由此及 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 知, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 在几乎处处意义下

$$|fg_k| \le \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |f\mathbf{1}_{\mathrm{supp}\,(g_k)}| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left| f\mathbf{1}_{\overline{B(0,1)}+\mathrm{supp}\,(g)} \right| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

故由控制收敛定理

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f(x)g_{n_k}(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_{n_k}(x)\,dx = 0. \end{aligned}$$

对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$g_k := \mathrm{sign}(f)\mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则 $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且有紧支集, 从而

$$\int_{B(0,k)} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x)\,dx = 0,$$

故对 a.e. $x \in B(0,k)$, $f(x) = 0$. 再由 k 的任意性知, 对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = 0$. □

下面给出 Theorem 1.4 的另一种证明.

Proof of Theorem 1.4. 当 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 时, (2) 是经典的等式, 证明略.

若

$$\sup_{g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx =: M < \infty.$$

则可定义算子

$$T:\ C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ g \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx.$$

该算子是连续线性泛函, 从而可以沿拓为 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续泛函 $\widetilde{T}$. 对于 $\widetilde{T}$, 存在 $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\widetilde{T}(g) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)g(x)\,dx, \quad \forall g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n).$$

对 $\forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = T(g) = \widetilde{T}(g) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)g(x)\,dx,$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[f(x) - \tilde{f}(x)\right] g(x)\,dx = 0.$$

由此及 Theorem 2.1 知, f 和 $\tilde{f}$ 几乎处处相等, 故 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

3 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的对偶

下面是 zcf 告诉我的一个结论.

Theorem 3.1. $(L^1(\mathbb{R}^n))' \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

4 Lemma 1的特殊情况

Lemma 4.1. 设$p \in [1,\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$且$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 则存在$g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$满足$\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 1$使得

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx.$$

证明. If $f \equiv 0$, then Lemma 4.1 is obviously true. Next, we will only consider the case where $f \not\equiv 0$.

Case 1) $p=1$. In this case, $p'=\infty$. Let $g := \overline{\operatorname{sgn}(f(x))}$, where, for any $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} z/|z| & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0. \end{cases}$$

Then $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1$ and

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

This finishes the proof of Lemma 4.1 in this case.

Case 2) $p \in (1,\infty)$. In this case, letting

$$g := \frac{|f(x)|^{p-1}\overline{\operatorname{sgn}(f(x))}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p-1}},$$

then

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} &= \frac{1}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p-1}}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{pp'-p'}\,dx\right]^{\frac{1}{p'}} \\ &= \frac{1}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p-1}}\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p}\,dx\right]^{\frac{1}{p}\frac{p}{p'}} = 1\end{aligned}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p-1}}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

This finishes the proof of Lemma 4.1 in this case and hence Lemma 4.1. □