单调函数的间断点集

December 4, 2020

1 单调函数的间断点集

众所周知, 单调函数的间断点集是可数集.

2 双变量单调函数的间断点集

首先需要定义什么是$\mathbb{R}^2$ 上的单调函数.

Definition 2.1. 称$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$, 若$(x_1 \leq x_2)$ 且$(x_1 \leq x_2)$. 若函数$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 满足, 对任意$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$, 有$f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_2)$, 则称$f$ 单调.

Theorem 2.2. $\mathbb{R}^2$ 上单调函数的间断点集是零测度集.

证法一. 设f 是$\mathbb{R}^2$ 上的单增函数. 对任意$n \in \mathbb{N}$ 将$[-n, n]^2$ 均分, 计算达布上下和, 不难看出它们的差趋于0, 故f 在$[-n, n]^2$ 上黎曼可积, 从而f 在$[-n, n]^2$ 上的间断点集$D_n(f)$ 是零测度集. 因此f 在$\mathbb{R}^2$ 上的间断点集

$$D(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n(f)$$

也是零测度集. Theorem 2.2 证毕. □

另一种证明来自[https://math.stackexchange.com/questions/ 2338318/bivariate-function-monotone-in-each-variable-rightarrow-continuous-a-e].

证法二. 设f 是$\mathbb{R}^2$ 上的单增函数且D_f 为f 在$\mathbb{R}^2$ 上的间断点集. 则

$$\begin{aligned}
|D_f| &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{D_f}(x, y)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{D_f}(s - t, s + t)\, ds \right] dt && (x, y) := (s - t, s + t) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |E_t|\, dt && E_t := \{(s - t, s + t) \in D_f :\ s \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

下面计算$|E_t|$. 对任意固定$t \in \mathbb{R}$, 定义$g_t:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s \mapsto f(s-t, s+t)$, 由$f$ 是$\mathbb{R}^2$ 上的单增函数知g_t 在$\mathbb{R}$ 上单增. 记g_t 在$\mathbb{R}$ 上的间断点集为D_{g_t}, 则D_{g_t} 是至多可数集. 断言

$$E_t \subset D_{g_t}.$$

若断言成立, 则$|E_t| \le |D_{g_t}| = 0$. 从而

$$|D_f| = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |E_t|\, dt = 0.$$

下证断言. 事实上, 对$\forall s_0 \in E_t$, 若$s_0 \notin D_{g_t}$, 即g_t 在s_0 点连续, 则对$\forall \varepsilon \in (0,\infty)$, 存在$\delta \in (0,\infty)$ 使得

$$g_t(s_0+\delta) - \varepsilon \le g_t(s_0) \le g_t(s_0-\delta) + \varepsilon,$$

即

$$f(s_0+\delta-t, s_0+\delta+t) - \varepsilon \le f(s_0-t, s_0+t) \le f(s_0-\delta-t, s_0-\delta+t) + \varepsilon. \tag{1}$$

对$\forall (x,y) \in B((s_0-t, s_0+t), \delta)$, 有

$$s_0-\delta-t < x < s_0+\delta-t \quad \text{和} \quad s_0-\delta+t < y < s_0+\delta+t,$$

由此及f 是$\mathbb{R}^2$ 上的单增函数知

$$f(s_0-\delta-t, s_0-\delta+t) \le f(x,y) \le f(s_0+\delta-t, s_0+\delta+t)$$

结合(2.3), 我们有

$$f(s_0-t, s_0+t) - \varepsilon \le f(x,y) \le f(s_0-t, s_0+t) + \varepsilon,$$

即f 在点(s_0-t, s_0+t) 处连续, 从而$s_0 \notin E_t$, 矛盾. 因此$s_0 \in D_{g_t}$. 由s_0 的任意性知, 断言成立. Theorem 2.2 证毕. □

实际上, 上述证明还差一个重要事实.

Theorem 2.3. 设$(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ 和$(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$ 是度量空间, $f:\ \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, A 是f 在$\mathcal{X}$ 上的连续点集. 则A 是G_δ 集(可数个开集的交).

Proof. 对$\forall x \in \mathcal{X}$, 定义$f$ 在点x 处的振动(oscillation)

$$\omega_f(x) := \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{y,z \in B_{\mathcal{X}}(x,\delta)} d_{\mathcal{Y}}\left(f(x), f(y)\right).$$

f 在点x 处连续当且仅当$\omega_f(x) = 0$. 因此

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \text{其中} \quad A_n := \left\{x \in \mathcal{X}:\ \omega_f(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

容易看出来A_n 是开集, 故A 是G_δ 集. □

Remark 2.4. 对于Lebesgue 测度来说, G_δ 集可测, 至此证明二才算圆满.