

# 投影算子

November 26, 2020

## 1 投影算子

**Definition 1.1.** 设 $\mathcal{X}$  是Banach 空间. 线性映射 $P: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  若满足

$$P^2 = P,$$

则称 $P$  是 $\mathcal{X}$  上的投影算子. 记

$$\mathcal{R}(P) := \{Px : x \in \mathcal{X}\} \quad \text{且} \quad \mathcal{N}(P) := \{x \in \mathcal{X} : Px = \theta\}.$$

**Definition 1.2.** 设 $V_1, V_2$  是线性空间 $V$  的两个线性子空间, 若对 $\forall x \in V_1 + V_2$ , 分解

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{其中 } x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$$

是唯一的, 则称 $V_1 + V_2$  是 $V_1$  和 $V_2$  的直和, 记为 $V_1 \oplus V_2$ .

**Proposition 1.3.** 设 $\mathcal{X}$  是Banach 空间且 $P$  是 $\mathcal{X}$  上的投影算子. 则

- (i)  $P$  的不动点全体就是 $\mathcal{R}(P)$ , 即对 $\forall x \in \mathcal{R}(P)$ ,  $Px = x$ ;
- (ii)  $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$ ;
- (iii)  $\mathcal{R}(P)$  和 $\mathcal{N}(P)$  是 $\mathcal{X}$  的两个线性子空间;
- (iv)  $\mathcal{X} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ .

**Proposition 1.4.** 设 $\mathcal{X}$  是Banach 空间且 $P$  是 $\mathcal{X}$  上的投影算子.  $P$  有界当且仅当 $\mathcal{R}(P)$  和 $\mathcal{N}(P)$  闭.

*Proof.* <https://math.stackexchange.com/questions/664155/operator-theory-textbook-question>

□

**Remark 1.5.** Proposition 1.4 中 $\mathcal{X}$  的完备性是必须的.

*Proof.* 设  $\ell_{finite}^1 := \{\ell^1 \text{中有限项非0的数列}\}$ , 范数与  $\ell^1$  一致, 令

$$P: \ell_{finite}^1 \rightarrow \ell_{finite}^1, \quad x := \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_k, 0, 0, \dots \right).$$

则  $P$  是投影算子且  $\mathcal{R}(P)$  和  $\mathcal{N}(P)$  闭, 但  $P$  无界.

下证  $\mathcal{N}(P)$  闭, 其余显然. 设  $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}(P)$  在  $\ell_{finite}^1$  中收敛到  $x^{(0)}$ . 存在  $N \in \mathbb{N}$  使得对  $\forall k > N$ ,  $x_k^{(0)} = 0$ . 对  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(0)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(0)} - \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} \right| \leq \|x^{(n)} - x^{(0)}\|_{\ell_{finite}^1} \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

故  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(0)} = 0$ , 即  $x^{(0)} \in \mathcal{N}(P)$ . 从而  $\mathcal{N}(P)$  闭. □

## 2 Hilbert 空间上的正交补

**Definition 2.1.** 设  $\mathcal{H}$  是 Hilbert 空间且  $M \subset \mathcal{H}$ . 称

$$M^{\perp} := \{x \in \mathcal{H} : \forall y \in M, (x, y) = 0\}$$

为  $M$  的正交补.

**Theorem 2.2** (正交分解). 设  $\mathcal{H}$  是 Hilbert 空间且  $M$  是  $\mathcal{H}$  的闭线性子空间. 则

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}.$$

**Proposition 2.3.** 设  $\mathcal{H}$  是 Hilbert 空间且  $M \subset \mathcal{H}$ . 则  $M^{\perp}$  是闭线性子空间且  $M^{\perp} = \overline{M^{\perp}}$ .

**Proposition 2.4.** 设  $\mathcal{H}$  是 Hilbert 空间且  $M$  是  $\mathcal{H}$  的子集. 则

- (i)  $M \subset M^{\perp\perp}$ ;
- (ii) 若  $M$  是  $\mathcal{H}$  的线性子空间, 则  $\overline{M} = M^{\perp\perp}$ .

*Proof.* 先证(i). 对任意  $x \in M$ , 有  $x \perp M^{\perp}$ , 从而  $x \in \overline{M^{\perp\perp}}$ , 故  $M \subset \overline{M^{\perp\perp}}$ . (i) 证毕.

再证(ii). 直观上来看, 由正交分解有

$$\overline{M} \oplus M^{\perp} = \mathcal{H} = M^{\perp} \oplus M^{\perp\perp},$$

又有  $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$  (这个不能少), 故  $\overline{M} = M^{\perp\perp}$ .

另一个证明: 由(i) 及  $M^{\perp\perp}$  闭知,  $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$ , 故只需证  $M^{\perp\perp} \subset \overline{M}$ . 对任意固定  $x \in M^{\perp\perp}$ , 由 Proposition 2.3 知,  $x \perp M^{\perp} = \overline{M^{\perp}}$ . 由正交分解定理, 存在  $x_{\overline{M}} \in \overline{M}$  和  $x_{\overline{M}^{\perp}} \in \overline{M}^{\perp}$  使得

$$x = x_{\overline{M}} + x_{\overline{M}^{\perp}}.$$

进一步由  $x \perp \overline{M}^\perp$  得

$$0 = (x, x_{\overline{M}^\perp}) = \|x_{\overline{M}^\perp}\|^2$$

因此

$$x = x_{\overline{M}} \in \overline{M}.$$

由  $x \in M^{\perp\perp}$  的任意性知,  $M^{\perp\perp} \subset \overline{M}$ . (ii) 证毕. 至此, Proposition 2.4 证毕.  $\square$

**Remark 2.5.**  $A \oplus B = A \oplus C$  不一定能推出  $B = C$ , 必须加上条件  $B \subset C$ . 反例: 设  $\mathcal{H} := \mathbb{R}^2$ ,  $A := \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ ,  $B := \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ ,  $C := \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . 则  $A \oplus B = A \oplus C$  但  $B \neq C$ .

### 3 Hilbert 空间上的投影算子

**Proposition 3.1.** 设  $\mathcal{H}$  是 Hilbert 空间,  $P$  是  $\mathcal{H}$  上的投影算子且  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . 则  $\mathcal{R}(P) = [\mathcal{N}(P)]^\perp$  当且仅当  $P$  是对称算子.

*Proof.* 先证“ $\Rightarrow$ ”. 设  $\mathcal{R}(P) = [\mathcal{N}(P)]^\perp$ , 则

$$\begin{aligned} (Px, y) &= (Px, Py + (I - P)y) = (Px, Py) \\ &= (Px + (I - P)x, Py) = (x, Py). \end{aligned}$$

再证“ $\Leftarrow$ ”. 设  $P$  是对称算子, 则对  $\forall x \in \mathcal{R}(P)$ ,  $\forall y \in \mathcal{N}(P)$ , 存在  $z \in \mathcal{H}$  使得  $x = Pz$ , 因此

$$(x, y) = (Pz, y) = (z, Py) = 0.$$

故  $\mathcal{R}(P) \subset [\mathcal{N}(P)]^\perp$ . 又因为由正交分解有

$$\mathcal{N}(P) \oplus [\mathcal{N}(P)]^\perp = \mathcal{H} = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{R}(P),$$

因此  $\mathcal{R}(P) = [\mathcal{N}(P)]^\perp$ .  $\square$

**Remark 3.2.** Proposition 3.1 中条件  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  应该不能去掉, 反例没想到.

**Definition 3.3.** 有界对称投影算子被称为正交投影算子(orthogonal projection), 有界非对称投影算子被称为斜投影算子(oblique projection).

**Remark 3.4.** 由正交分解来定义正交投影算子更为直观.

设  $\alpha \in \mathbb{R}$  且  $P_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (0, \alpha x + y)$ . 则  $P_0$  是正交投影算子, 对  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $P_\alpha$  是斜投影算子.