Vitali covering lemma

2021 年 5 月 9 日

1 度量空间

Lemma 1. 设 $\mathcal{F}$ 是度量空间 $(\mathcal{X}, d)$ 中的一族球且 $\sup_{B\in\mathcal{F}} r(B) < \infty$. 则存在两两不交的至多可数子球族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 使得

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B, \tag{1}$$

且对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 存在 $\widetilde{B} \in \mathcal{G}$ with $r(B) \leq 2r(\widetilde{B})$ 使得 $B \cap \widetilde{B} \neq \emptyset$.

可以利用 Zorn 引理(若非空偏序集的任意全序子集有上界, 则该偏序集存在极大元)来证明这个结论.

证明一. 定义偏序集

$$\begin{aligned}\Omega :=\{\omega \subset \mathcal{F}:\ &\omega \text{ is pairwise disjoint and, for any } B \in \mathcal{F},\ \text{if } B \cap \bigcup_{\widetilde{B}\in\omega} \widetilde{B} \neq \emptyset, \\ &\text{then there exits a } \widetilde{B} \in \omega \text{ with } r(\widetilde{B}) \geq r(B)/2 \text{ such that } B \cap \widetilde{B} \neq \emptyset\}.\end{aligned} \tag{2}$$

易证 Ω 非空且满足 Zorn 引理的条件, 因此存在极大元 $\mathcal{G} \in \Omega$.

下证 $\mathcal{G}$ 满足条件. 由 (2) 知, $\mathcal{G}$ 两两不交. 令

$$\mathcal{P} := \left\{ B \in \mathcal{F}:\ B \cap \bigcup_{\widetilde{B}\in\mathcal{G}} \widetilde{B} = \emptyset \right\}.$$

若 $\mathcal{P}$ 非空, 由 $\sup_{B\in\mathcal{F}} r(B) < \infty$ 知, 可取 $B_0 \in \mathcal{P}$ 使得 $r(B_0) \geq \sup_{B\in\mathcal{P}} r(B)/2$, 则 $\mathcal{G} \cup \{B_0\} \in \omega$, 这与 $\mathcal{G}$ 的极大性相矛盾. 故 $\mathcal{P} = \emptyset$, 从而对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 存在 $\widetilde{B} \in \mathcal{G}$ with $r(\widetilde{B}) \geq r(B)/2$ 使得 $B \cap \widetilde{B} \neq \emptyset$, 从而 $B \subset 5\widetilde{B}$. 引理证毕. □

证明二. 也可以构造性的证明此结论. □

Remark 2. (i) 若度量空间是几何双倍度量空间 (任意球 B 可被 N 个半径为 $r(B)/2$ 的球包住, 其中 N 与 B 无关), 则由于 $\mathcal{G}$ 两两不交, 故至多可数(see, for instance, [1, Lemma 2.5]);

(ii) 双倍度量空间(赋予双倍测度)是几何双倍度量空间(see, for instance, [2, p. 67]), 则由于 $\mathcal{G}$ 两两不交, 故至多可数;

(iii) (1) 中的 5 可以改为任意比 3 大的数, 且当 $\mathcal{F}$ 是无穷集时, 不可以取 3, 当 $\mathcal{F}$ 是有限集时, 可以取 3.

(iv) 条件中的半径有上界是必须的, 反例:

证明. 先证 (i). 取定参考点 $x_0 \in \mathcal{X}$. 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{G}_k := \{B \in \mathcal{G}:\ B \subset B(x_0, k),\ r(B) \in (1/k, \infty)\}.$$

对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在有限个圆心属于 $B(x_0,k)$, 半径为 $1/k$ 的球族 $\mathcal{C}$ 把 $B(x_0,k)$ 盖住. 因此对 $\forall B \in \mathcal{G}_k$, 存在 $\widetilde{B} \in \mathcal{C}$ 使得 $x_B \in \widetilde{B}$. 注意到 $\mathcal{G}_k$ 两两不交, 故 $B \mapsto \widetilde{B}$ 的映射是单射 (否则 $B_1 \cap B_2 \supset \{x_{\widetilde{B}}\}$ 非空), 从而 $\#\mathcal{G}_k \le \#\mathcal{C}$ 也是有限集. 从因此

$$\mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k$$

至多可数.

再证(ii). 对任意球 $B \subset \mathcal{X}$, 取 B 中半径为 $r(B)/4$ 且两两不交的球族 $\mathcal{C}$, 则对 $\forall \widetilde{B} \in \mathcal{C}$,

$$\mu(B) \le \mu\left(8\widetilde{B}\right) \le \left[C_{(\mu)}\right]^3 \mu\left(\widetilde{B}\right),$$

因此

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{\widetilde{B}\in\mathcal{C}} \widetilde{B}\right) = \sum_{\widetilde{B}\in\mathcal{C}} \mu\left(\widetilde{B}\right) \ge \#\mathcal{C}\mu(B)/\left[C_{(\mu)}\right]^3,$$

即 $\#\mathcal{C} \le \left[C_{(\mu)}\right]^3$. 设 $\mathcal{C}$ 是极大的, 则 $\{2\widetilde{B}\}_{\widetilde{B}\in\mathcal{C}}$ 是半径为 $r(B)/2$ 且能盖住 B 的球族. 故 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是几何双倍度量空间.

现在证 (iii). 只需证$\mathcal{F}$ 是无穷集时不能取 3. 反例: $\mathbb{R}^2$ 中的

$$\{B(x, |x| + \delta):\ |x| < 1/2\}$$

满足

$$\bigcup_{|x|=1} B(x, 1+\delta) = B(\mathbf{0}, 2+\delta) \subset \frac{|x|+2+\delta}{|x|+\delta} B(x, |x|+\delta).$$

若取 $\delta \in$

最后证(iv). 反例: $\mathbb{R}^n$ 中的球族 $\{B(\mathbf{0},k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. $\square$

2 拟度量空间

应该是差不多的.

参考文献

[1] T. Hytönen, A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa, Publ. Mat. 54 (2010), 485–504.

[2] R. R. Coifman and G. Weiss, Analyse Harmonique Non-commutative sur Certains Espaces Homogènes, (French) Étude de Certaines Intégrales Singulières, Lecture Notes in Mathematics 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.