Borel Algebra 的平移不变性和伸缩不变性

May 5, 2020

Definition 0.1 (W. Rudin, Real and Complex Analysis, p.12)**.** 设(X, τ) 是拓扑空间. 称包含τ 的最小σ-algebra 为X 中的Borel algebra. 称Borel algebra 中的元素为Borel set.

Lemma 0.2. 设$\mathfrak{M}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的σ*-algebra.* 则

(i) 对$\forall r \in \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M} + r$ 是σ*-algebra;*

(ii) 对$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t\mathfrak{M}$ 是σ*-algebra.*

Proof. $\mathfrak{M}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的σ-algebra, 因此

(i) $\mathbb{R}^n \in \mathfrak{M}$, 故$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n + r \in \mathfrak{M} + r$;

(ii) 对$\forall A \in \mathfrak{M} + r$, 有$A - r \in \mathfrak{M}$, 故$A^c - r = (A - r)^c \in \mathfrak{M}$, 从而$A^c \in \mathfrak{M} + r$;

(iii) 若$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M} + r$, 则$\{A_n - r\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$, 故

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - r = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n - r) \in \mathfrak{M},$$

从而$\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M} + r$.

综上, $\mathfrak{M} + r$ 也是σ-algebra, (i) 得证. (ii) 类似可证. □

Lemma 0.3. 设$\mathcal{U}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中全体开集构成的集合. 则

(i) 对$\forall r \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} + r = \mathcal{U}$*;*

(ii) 对$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t\mathcal{U} = \mathcal{U}$*.*

Proof. 断言: 对$\forall A \in \mathcal{U}$, $\forall r \in \mathbb{R}^n$, $A + r \in \mathcal{U}$. 事实上, 对$\forall x \in A + r$, 有$x - r \in A$, 因为A 是开集, 存在$\delta \in (0, \infty)$ 使得$B(x - r, \delta) \subset A$, 从而$B(x, \delta) \subset A + r$, 故$A + r$ 是开集, 断言成立. 由断言易证$\mathcal{U} + r = \mathcal{U}$, (i) 得证. (ii) 类似可证. □

Theorem 0.4. 设$\mathscr{B}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的*Borel algebra.*

(i) 对$\forall r \in \mathbb{R}^n$, $\mathscr{B} + r = \mathscr{B}$*;*

(ii) 对$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t\mathscr{B} = \mathscr{B}$.

Proof. 对$\forall r \in \mathbb{R}^n$, 由Lemma 0.2 和Lemma 0.3 知, $\mathscr{B} + r$ 是σ-algebra 且包含$\mathbb{R}^n$ 中的所有开集. 由此及Borel algebra 定义知, $\mathscr{B} \subset \mathscr{B} + r$. 取$r := -r$ 得$\mathscr{B} \subset \mathscr{B} - r$, 因此$\mathscr{B} + r \subset \mathscr{B}$. 综上, $\mathscr{B} + r = \mathscr{B}$, (i) 得证. (ii) 类似可证. □

Theorem 0.5. *一般拓扑空间的Borel algebra 没有上述性质. 就算是$\mathbb{R}^n$ 也不一定.*

Proof. 一般拓扑空间可能没有加法和数乘.

设$\tau := \{\emptyset, B(0,1), B(0,1)^c, \mathbb{R}^n\}$, 则$(\mathbb{R}^n, \tau)$ 是个拓扑空间. 此时$\mathbb{R}^n$ 中的Borel algebra $\mathscr{B} = \tau$ 不满足

$$\mathscr{B} + r = \mathscr{B} \quad \text{and} \quad t\mathscr{B} = \mathscr{B}.$$

□