BMO

Definition 1. (积分平均)

设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$, 令 f_Q 表示 f 上的积分平均

$$f_Q \coloneqq \frac{1}{|Q|}\int_Q f(t)\,dt.$$

并定义 sharp 极大函数

$$M^{\#}f(x) \coloneqq \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|\,dx, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

其中, 上确界取遍所有包含 x 的方体 Q.

下面来验证 sharp 极大函数定义的合理性, 证明 $M^{\#}f$ 是可测的. 实际上有如下命题成立.

Proposition 2. 对 $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$, 设 $E_\lambda \coloneqq \{x\in\mathbb{R}^n:\ M^{\#}f(x)>\lambda\}$, 则 E_λ 是一个开集.

证明. 注意到 $M^{\#}(f)(x)\geqslant 0$. 为此, 不妨设 $\lambda\in[0,\infty)$, 对任意给定的 $x\in E_\lambda$, 有

$$M^{\#}(f)(x)>\lambda,$$

故存在一个方体 Q, 满足 $x\in Q$, 使得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|\,dx>\lambda,$$

设 $\{Q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是一系列与 Q 同中心, 边长向外延伸 $\frac{1}{m}$ 的开方体族. 显然对于任意的 m, 有 $x\in Q_m$. 定义 $h_m\coloneqq\frac{1}{|Q_m|}f\mathbf{1}_{Q_m}$, $h\coloneqq\frac{1}{|Q|}f\mathbf{1}_Q$, 显然当 $m\to\infty$ 时, h_m 几乎处处收敛到 h. 注意到 $|h_m|\leqslant\frac{1}{|Q|}f\mathbf{1}_{Q_1}$, 并且 $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 故 $\frac{1}{|Q|}f\mathbf{1}_{Q_1}\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由控制收敛定理知

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{|Q_m|}\int_{Q_m} f=\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} h_m=\int_{\mathbb{R}^n} h=\frac{1}{|Q|}\int_Q f, \tag{1}$$

以此便得到 $f_{Q_m}\to f_Q, m\to\infty$. 定义 $g_m\coloneqq\frac{1}{|Q_m|}|f-f_{Q_m}|\,\mathbf{1}_{Q_m}$, $g\coloneqq\frac{1}{|Q|}|f-f_Q|\,\mathbf{1}_Q$, 根据 (1) 知, $\lim_{m\to\infty}g_m(x)=g(x)$, a.e. x. 由于

$$|f_{Q_m}|\leqslant\frac{1}{|Q|}\int_{Q_1}|f|,$$

故

$$|g_m|\leqslant\frac{1}{|Q|}\left(|f|+\frac{1}{|Q|}\int_{Q_1}|f|\right)\mathbf{1}_{Q_1},$$

再由 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 可知 $\frac{1}{|Q|}\left(|f| + \frac{1}{|Q|}\int_{Q_1}|f|\right)\mathbf{1}_{Q_1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由控制收敛定理知

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{|Q_m|}\int_{Q_m}|f - f_{Q_m}| = \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|g_m| = \int_{\mathbb{R}^n}|g| = \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|.$$

于是, $\exists\, m_0 > 0$ 使得

$$\frac{1}{|Q_{m_0}|}\int_{Q_{m_0}}\left|f - f_{Q_{m_0}}\right| > \lambda,$$

故对 $\forall\ x \in Q_{m_0}$, 有 $M^{\#}f(x) > \lambda$. 由于 Q_{m_0} 是开集, 因此存在 $\epsilon_0 > 0$, 使得开球 $B(x,\epsilon_0) \subset Q_{m_0}$, 即对 $\forall\ y \in B(x,\epsilon_0)$, 均有 $M^{\#}f(y) > \lambda$, 命题得证. □

下面我们考察 Sharp 极大函数与 Hardy–Littlewood 极大函数的关系. 为此, 首先回顾 Hardy–Littlewood 极大函数的定义.

Definition 3. (Hardy–Littlewood 极大函数) 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则 f 的 Hardy–Littlewood 极大函数定义为

$$M(f)(x) := \sup_{r>0}\frac{1}{|B(\mathbf{0},r)|}\int_{B(\mathbf{0},r)}|f(x-y)|\,dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$M'(f)(x) := \sup_{r>0}\frac{1}{(2^r)^n}\int_{Q_r}|f(x-y)|\,dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

$$M''(f)(x) := \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)|\,dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $B(\mathbf{0},r) := \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| < r\}$, $Q_r := [-r,r]^n$, Q 为 $\mathbb{R}^n$ 中包含 x 的任意方体.

在 [1, p. 30] 中已经验证过定义 3 中的三种 Hardy–Littlewood 极大函数是点态等价的, 即存在只与 n 有关的正常数 c_n, C_n 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$M(f)(x) \le c_n M'(f)(x) \le c_n M''(f)(x) \le C_n M(f)(x).$$

Proposition 4. 对任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 及任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$M^{\#}(f)(x) \le 2M''(f)(x),$$

由此进一步知, 存在只与 n 有关的正常数 c_n, C_n 使得对任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 及任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$M^{\#}(f)(x) \le c_n M(f)(x),$$

$$M^{\#}(f)(x) \le C_n M'(f)(x).$$

证明. 事实上, 对任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 及任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$
\begin{aligned}
M^{\#}(f)(x) &= \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q| \, dt \\
&\leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q [|f(t)| + |f_Q|] \, dt \\
&\leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)| \, dt + \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q f(t) \, dt \right| \\
&\leq 2 \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)| \, dt \\
&= 2M''(f)(x),
\end{aligned}
$$

由此及 Hardy–Littlewood 极大函数的等价知命题成立. □

Remark 5. 命题 4 的反面是不对的, 即不存在只与 n 有关的正常数 c_n 使得对任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 及任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$
M''(f)(x) \leq c_n M^{\#}(f)(x).
$$

事实上, 假设上式成立, 令 $f(x) := c_n + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, 则有

$$
c_n + 1 = M''(f)(x) \leq c_n M^{\#}(f)(x),
$$

故

$$
1 \leq \frac{c_n + 1}{c_n} \leq M^{\#}(f)(x) = 0,
$$

矛盾, 故假设不成立, 说明 Hardy–Littlewood 极大函数不被 Sharp 极大函数控制.

下面给出 BMO 空间的定义.

Definition 6. (BMO 空间) $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 空间定义为

$$
\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \ M^{\#}(f) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \right\},
$$

对任意 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$
\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} := \left\| M^{\#}(f) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}.
$$

Proposition 7. $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 构成 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 空间上的一个半范数.

证明. 首先说明 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 空间中的线性运算为一般的函数加法与数乘运算.

下面验证 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 构成半范数.

(i) 非负性. 对任意 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 因 $M^{\#}(f)$ 非负, 故

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \left\|M^{\#}(f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq 0.$$

(ii) 齐次性. 任取 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 及 $\lambda \in \mathbb{C}$, 注意到对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}
M^{\#}(\lambda f)(x) &= \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |(\lambda f)(t) - (\lambda f)_Q| \, dt \\
&= \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |\lambda f(t) - \lambda f_Q| \, dt \\
&= \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |\lambda| \, |f(t) - f_Q| \, dt \\
&= |\lambda| \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q| \, dt \\
&= |\lambda| \, M^{\#}(f)(x),
\end{aligned}$$

由此及 $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 的齐次性即知

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} &= \left\|M^{\#}(\lambda f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\||\lambda| \, M^{\#}(f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= |\lambda| \left\|M^{\#}(f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= |\lambda| \, \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

(iii) 三角不等式. 任取 $f, g \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 注意到对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}
M^{\#}(f+g)(x) &= \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |(f+g)(t) - (f+g)_Q| \, dt \\
&= \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q + g(t) - g_Q| \, dt \\
&\leq \sup_{Q \ni x} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q| \, dt + \frac{1}{|Q|} \int_Q |g(t) - g_Q| \, dt \right\} \\
&\leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q| \, dt + \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |g(t) - g_Q| \, dt \\
&= M^{\#}(f)(x) + M^{\#}(g)(x),
\end{aligned}$$

由此及 $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 的三角不等式即知

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} &= \left\|M^{\#}(f+g)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \left\|M^{\#}(f)+M^{\#}(g)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \left\|M^{\#}(f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \left\|M^{\#}(g)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

又显然 $\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$ 关于一般的函数加法与数乘构成线性空间. 故综上, $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 为 $\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$ 上的一个半范数. 命题证毕. $\square$

但 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 不构成 $\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$ 上的范数, 因为对于任意一个几乎处处取常值的函数 f, 显然都有 $\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = 0$. 事实上, 该结论的反面也是对的. 为此, 我们证明以下命题.

Proposition 8. 设 $f \in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$, 则 $\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = 0$ 当且仅当 f 在几乎处处意义下等于一个常数, 即存在 $C \in \mathbb{C}$, 对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n$ 有 $f(x) = C$.

证明. **必要性**. 由 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 的定义及条件知

$$\left\|M^{\#}(f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

故存在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 且 $|E| = 0$, 对任意 $x \in (\mathbb{R}^n \setminus E)$ 有

$$M^{\#}(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q|\, dt = 0. \tag{2}$$

对任意 $m \in \mathbb{N}$, 定义 $Q_m := [-m, m]^n$. 由 (2) 知存在 $x_m \in (Q_m \setminus E)$ 使得

$$\frac{1}{|Q_m|} \int_{Q_m} |f(t) - f_{Q_m}|\, dt \le \sup_{Q \ni x_m} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q|\, dt = 0$$

成立.

令 $E_m := \{x \in Q_m :\ f(x) \neq f_{Q_m}\}$, 则由上式知 $|E_m| = 0$ 且对 $x \in (Q_m \setminus E_m)$ 有

$$f(x) = f_{Q_m}.$$

类似地, 对任意 $l \in \mathbb{N}$, 不妨设 $l \ge m$, 则对 $x \in (Q_l \setminus E_l)$ 有

$$f(x) = f_{Q_l}.$$

令 $E := \cup_{m=1}^{\infty} E_m$, 则 $|E| = 0$ 且因

$$(Q_m \setminus E) \subset (Q_m \setminus (E_m \cup E_l)) = ((Q_m \setminus E_m) \cap (Q_m \setminus E_l)) \subset ((Q_m \setminus E_m) \cap (Q_l \setminus E_l)),$$

故对 $x \in (Q_m \setminus E)$ 有

$$f(x) = f_{Q_m} = f_{Q_l}. \tag{3}$$

由此及 m, l 的任意性知

$$f_{Q_m} = f_{Q_l}, \quad \forall\, m,\ l \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

对任意 $x \in (\mathbb{R}^n \setminus E)$, 总可以找到一个足够大的 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in (Q_m \setminus E)$, 从而由 (3) 及 (4) 知

$$f(x) = f_{Q_m} = f_{Q_1}, \quad \forall\, x \in (\mathbb{R}^n \setminus E).$$

故必要性成立.

充分性. 设存在 $C \in \mathbb{C}$, 对几乎处处 $x \in \mathbb{R}^n$ 有 $f(x) = C$. 故对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$M^{\#}(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q|\ dt = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |C - C|\ dt = 0.$$

于是

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \left\| M^{\#}(f) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

故充分性成立. 综上, 命题证毕. □

由命题 7 及命题 8 可得以下推论.

Corollary 9. 在 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 空间中引入等价关系

$$f \sim g \Longleftrightarrow f(x) - g(x) = Const, \quad \text{a. e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

并定义

$$\|[f]\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}^{*} = \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, [f] \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) / \sim,$$

则 $\left(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) / \sim,\ \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}^{*}\right)$ 构成一个线性赋范空间. 在之后的讨论中, 将其简记为 $\left(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n),\ \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\right)$ 或 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

下面证明 $\left(\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n),\ \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\right)$ 为 Banach 空间. 为此首先介绍一个引理, 作为 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 的一个重要刻画.

Lemma 10. 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q|\, dt.$$

证明. 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 由 $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 中的下确界可以达到知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个可测集 E_f 且 $|E_f| = 0$ 使得

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \left\|M^{\#}(f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\left(\mathbb{R}^n\setminus E_f\right)} \left|M^{\#}(f)(x)\right|.$$

一方面, 任取 $\mathbb{R}^n$ 中的方体 Q, 则 $Q \setminus E_f \neq \varnothing$, 故存在 $x \in (Q \setminus E_f) \subset (\mathbb{R}^n \setminus E_f)$, 于是

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t) - f_Q|\,dt \le \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t) - f_Q|\,dt = M^{\#}(f)(x) \le \sup_{x\in\left(\mathbb{R}^n\setminus E_f\right)} \left|M^{\#}(f)(x)\right|.$$

两边关于 $\mathbb{R}^n$ 中的全体方体 Q 取上确界即得

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t) - f_Q|\,dt \le \sup_{x\in\left(\mathbb{R}^n\setminus E_f\right)} \left|M^{\#}(f)(x)\right| = \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.$$

另一方面, 对任意 $x \in (\mathbb{R}^n \setminus E_f)$ 有,

$$M^{\#}(f)(x) = \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t) - f_Q|\,dt \le \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t) - f_Q|\,dt.$$

两边关于 $x \in (\mathbb{R}^n \setminus E_f)$ 取上确界即得

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\left(\mathbb{R}^n\setminus E_f\right)} \left|M^{\#}(f)(x)\right| \le \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t) - f_Q|\,dt.$$

综上

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t) - f_Q|\,dt.$$

命题证毕. □

Theorem 11. $\left(\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)\,,\,\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\right)$ 是 Banach 空间.

证明. 设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 $\left(\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)\,,\,\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\right)$ 中的基本列, 则对任意 $\epsilon \in (0, \infty)$, 存在 $K_\epsilon \in \mathbb{N}$, 使得当 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ 且 $k_1, k_2 > K_\epsilon$ 时有

$$\|f_{k_1} - f_{k_2}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

由此及引理 10 知对 $\mathbb{R}^n$ 中任意方体 Q 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\left(f_{k_1} - f_{k_2}\right)(t) - \left(f_{k_1} - f_{k_2}\right)_Q\right| dt \\ &\quad = \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|f_{k_1}(t) - \left(f_{k_1}\right)_Q - f_{k_2}(t) + \left(f_{k_2}\right)_Q\right| dt < \epsilon,\end{aligned} \tag{5}$$

故 $\{f_k - (f_k)_Q\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 $L^1(Q)$ 中的基本列. 由此及 $L^1(Q)$ 的完备性知, 存在 $g^Q \in L^1(Q)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \left\| g^Q - f_k + (f_k)_Q \right\|_{L^1(Q)} = 0. \tag{6}$$

类似地, 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意包含 Q 的方体 Q', 存在 $g^{Q'} \in L^1(Q')$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \left\| g^{Q'} - f_k + (f_k)_{Q'} \right\|_{L^1(Q')} = 0. \tag{7}$$

由此及

$$\left\| g^{Q'} - f_k + (f_k)_{Q'} \right\|_{L^1(Q)} \le \left\| g^{Q'} - f_k + (f_k)_{Q'} \right\|_{L^1(Q')}$$

知

$$\lim_{k\to\infty} \left\| g^{Q'} - f_k + (f_k)_{Q'} \right\|_{L^1(Q)} = 0. \tag{8}$$

下面说明在几乎处处意义下 g^Q 与 $g^{Q'}$ 只相差一个常数, 即存在一个常数 $C(Q,\ Q') \in \mathbb{C}$ 以及 $F \subset Q$ 且 $|F| = 0$ 使得

$$g^Q(x) - g^{Q'}(x) = C(Q, Q'), \quad \forall\, x \in (Q \setminus F)\,. \tag{9}$$

事实上, 由 (6) 及 (8) 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \int_Q \left| g^Q(t) - g^{Q'}(t) + (f_k)_Q - (f_k)_{Q'} \right| dt \\
&\quad = \lim_{k\to\infty} \left\| g^Q - g^{Q'} + (f_k)_Q - (f_k)_{Q'} \right\|_{L^1(Q)} \\
&\quad \le \lim_{k\to\infty} \left\| g^Q - f_k + (f_k)_Q \right\|_{L^1(Q)} + \lim_{n\to\infty} \left\| g^{Q'} - f_k + (f_k)_{Q'} \right\|_{L^1(Q)} = 0.
\end{aligned}$$

故 $\{g^Q - g^{Q'} + (f_k)_Q - (f_k)_{Q'}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 存在子列 $\{g^Q - g^{Q'} + (f_{k_l})_Q - (f_{k_l})_{Q'}\}_{l\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\lim_{l\to\infty} \left[g^Q(x) - g^{Q'}(x) + (f_{k_l})_Q - (f_{k_l})_{Q'} \right] = 0, \quad \text{a.e. } x \in Q, \tag{10}$$

由此进一步有

$$g^Q(x) - g^{Q'}(x) = \lim_{l\to\infty} \left[(f_{k_l})_{Q'} - (f_{k_l})_Q \right] =: C(Q, Q'), \quad \text{a.e. } x \in Q,$$

且 $|C(Q, Q')| < \infty$.

事实上, 令

$$F_1 := Q \setminus \left\{ x \in Q : \lim_{l\to\infty} \left[g^Q(x) - g^{Q'}(x) + (f_{k_l})_Q - (f_{k_l})_{Q'} \right] = 0 \right\},$$

则由 (10) 知 $|E_1| = 0$. 再令

$$F_2 := \left\{x \in Q : \left|g^Q(x)\right| = \infty\right\}, \quad F_3 := \left\{x \in Q : \left|g^{Q'}(x)\right| = \infty\right\},$$

则由 $g^Q \in L^1(Q)$ 及 $g^{Q'} \in L^1(Q')$ 知 $|F_2| = |F_3| = 0$. 于是记

$$F := F_1 \cup F_2 \cup F_3,$$

则 $|F| = 0$, 且对任意 $x \in (Q \setminus F)$ 有

$$\left|C(Q, Q')\right| = \left|\lim_{l\to\infty}\left[(f_{k_l})_{Q'} - (f_{k_l})_Q\right]\right| = \lim_{l\to\infty}\left|(f_{k_l})_{Q'} - (f_{k_l})_Q\right| = \left|g^Q(x) - g^{Q'}(x)\right| < \infty,$$

故 (9) 成立.

下面构造 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的极限函数.

为此, 记 $Q_m := [-m, m]^n$, 显然 $\mathbb{R}^n = \cup_{m=1}^{\infty} Q_m$. 由 (6), (7), (8) 及 (9) 知, 存在函数列 $\{g^{Q_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$, 复数列 $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 及 $E_m \subset Q_m$ 且 $|E_m| = 0$, 使得对任意 $m \in \mathbb{N}$ 及 $\mathbb{R}^n$ 中任意方体 Q 和包含 Q 的方体 Q_m 有

$$g^{Q_m} \in L^1(Q_m), \tag{11}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|g^{Q_m} - f_k + (f_k)_{Q_m}\right\|_{L^1(Q_m)} = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|g^{Q_m} - f_k + (f_k)_{Q_m}\right\|_{L^1(Q)} = 0, \tag{13}$$

$$g^{Q_m}(x) = g^{Q_{m+1}}(x) + C_m, \quad \forall\, x \in (Q_m \setminus E_m), \tag{14}$$

其中 $C_m := C(Q_m, Q_{m+1})$.

定义

$$f(x) := g^{Q_m}(x) + \sum_{i=0}^{m-1} C_i, \quad \forall\, x \in Q_m,\ \forall\, m \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

其中 $C_0 := 0$.

下面说明 f 的取值不依赖于 m, 即对任意 m_1, $m_2 \in \mathbb{N}$ 且 $m_1 \le m_2$ 及几乎处处 $x \in Q_{m_1}$ 有

$$g^{Q_{m_1}}(x) + \sum_{i=0}^{m_1-1} C_i = g^{Q_{m_2}}(x) + \sum_{i=0}^{m_2-1} C_i.$$

事实上, 令 $E:=\cup_{m=1}^{\infty}E_m$, 则 $|E|=0$. 由 (14) 知对任意 $x\in(Q_{m_1}\setminus E)$ 有

$$
\begin{aligned}
& g^{Q_{m_2}}(x)+\sum_{i=0}^{m_2-1}C_i \\
&= g^{Q_{m_2}}(x)+\sum_{i=m_1}^{m_2-1}C_i+\sum_{i=0}^{m_1-1}C_i \\
&= g^{Q_{m_2}}(x)+C_{m_2-1}+\sum_{i=m_1}^{m_2-2}C_i+\sum_{i=0}^{m_1-1}C_i \\
&= g^{Q_{m_2-1}}(x)+\sum_{i=m_1}^{m_2-2}C_i+\sum_{i=0}^{m_1-1}C_i, \qquad \text{since } x\in(Q_{m_1}\setminus E)\subset(Q_{m_2-1}\setminus E_{m_2-1}) \\
&= g^{Q_{m_2-1}}(x)+C_{m_2-2}+\sum_{i=m_1}^{m_2-3}C_i+\sum_{i=0}^{m_1-1}C_i \\
&= g^{Q_{m_2-2}}(x)+\sum_{i=m_1}^{m_2-3}C_i+\sum_{i=0}^{m_1-1}C_i, \qquad \text{since } x\in(Q_{m_1}\setminus E)\subset(Q_{m_2-2}\setminus E_{m_2-2}) \\
&= \cdots \\
&= g^{Q_{m_1+1}}(x)+\sum_{i=m_1}^{m_1}C_i+\sum_{i=0}^{m_1-1}C_i \\
&= g^{Q_{m_1+1}}(x)+C_{m_1}+\sum_{i=0}^{m_1-1}C_i \\
&= g^{Q_{m_1}}(x)+\sum_{i=0}^{m_1-1}C_i, \qquad \text{since } \left(Q_{m_1}\setminus E\right)\subset\left(Q_{m_1}\setminus E_{m_1}\right).
\end{aligned}
$$

由此及 m_1, m_2 的任意性说明 f 是良定义的.

下面说明 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

事实上, 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意紧集 E, 总可以取 m 足够大使得 $E\subset Q_m$. 此时由 f 的定义 (15) 知

$$f(x)=g^{Q_m}(x)+\sum_{i=0}^{m-1}C_i,\quad \forall\, x\in E.$$

由此及 $g^{Q_m} \in L^1(Q_m)$ 知,

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|\, dx &= \int_E \left| g^{Q_m}(x) + \sum_{i=0}^{m-1} C_i \right| dx \\
&\le \int_E \left| g^{Q_m}(x) \right| dx + \sum_{i=0}^{m-1} \int_E |C_i|\, dx \\
&\le \int_{Q_m} \left| g^{Q_m}(x) \right| dx + \sum_{i=0}^{m-1} \int_{Q_m} |C_i|\, dx \\
&= \left\| g^{Q_m} \right\|_{L^1(Q^m)} + |Q_m| \sum_{i=0}^{m-1} |C_i| < \infty.
\end{aligned}$$

由此及 E 的任意性知 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

下证 $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = 0$, 为此即证对任意 $\epsilon \in (0, \infty)$, 存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $k \in \mathbb{N}$ 且 $k > K$ 有

$$\|f - f_k\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \le \epsilon.$$

由此及引理 10 知我们证明对任意 $\epsilon \in (0, \infty)$, 存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $k \in \mathbb{N}$ 且 $k > K$ 使得 $\mathbb{R}^n$ 中任意方体 Q 满足

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \left| f(x) - f_Q - f_k(x) + (f_k)_Q \right| dx < \epsilon. \tag{16}$$

固定 $\mathbb{R}^n$ 中任一方体 Q, 总可以取 m 足够大使得 $Q_m \supset Q$. 由此及 f 的定义 (15) 知, 此时

$$f(x) = g^{Q_m}(x) + \sum_{i=0}^{m-1} C_i, \quad \forall\, x \in Q. \tag{17}$$

首先注意到由 (13) 知

$$\lim_{k\to\infty} \left\| g^{Q_m} - f_k + (f_k)_{Q_m} \right\|_{L^1(Q)} = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left| (g^{Q_m})_Q - (f_k)_Q + (f_k)_{Q_m} \right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q \left[g^{Q_m}(x) - f_k(x) + (f_k)_{Q_m} \right] dx \right| \\
&\le \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| g^{Q_m}(x) - f_k(x) + (f_k)_{Q_m} \right| dx = 0,
\end{aligned}$$

故

$$(g^{Q_m})_Q = \lim_{k\to\infty} \left[(f_k)_Q - (f_k)_{Q_m} \right]. \tag{18}$$

下证

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g^Q(x)-g^{Q_m}(x)+(g^{Q_m})_Q\right| dx=0. \tag{19}$$

事实上, 由 (18), Fatou 引理, (12) 及 (13) 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g^Q(x)-g^{Q_m}(x)+(g^{Q_m})_Q\right| dx\\
&\quad=\frac{1}{|Q|}\int_Q \lim_{k\to\infty}\left|g^Q(x)-g^{Q_m}(x)+(f_k)_Q-(f_k)_{Q_m}\right| dx\\
&\quad\le \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g^Q(x)-g^{Q_m}(x)+(f_k)_Q-(f_k)_{Q_m}\right| dx\\
&\quad=\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q-\left[g^{Q_m}(x)-f_k(x)+(f_k)_{Q_m}\right]\right| dx\\
&\quad\le \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\left[\int_Q \left|g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q\right| dx+\int_Q\left|g^{Q_m}(x)-f_k(x)+(f_k)_{Q_m}\right| dx\right]\\
&\quad=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q\right| dx\\
&\qquad+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g^{Q_m}(x)-f_k(x)+(f_k)_{Q_m}\right| dx\\
&\quad=0.
\end{aligned}$$

故 (19) 成立.

下证对任意 $\epsilon\in(0,\infty)$, 当 $k\in\mathbb{N}$ 且 $k>K_\epsilon$ 时有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q\right| dx<\epsilon. \tag{20}$$

事实上, 因

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q\right| dx\\
&\quad\le \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|g^Q(x)-f_{k_1}(x)+(f_{k_1})_Q\right| dx\\
&\qquad+\frac{1}{|Q|}\int_Q \left|f_{k_1}(x)-(f_{k_1})_Q-f_k(x)+(f_k)_Q\right| dx.
\end{aligned}$$

两边令 $k_1\to\infty$, 再由 (12) 及 (5) 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q\right|\,dx\\&\quad\le\lim_{k_1\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g^Q(x)-f_{k_1}(x)+(f_{k_1})_Q\right|\,dx\\&\qquad+\lim_{k_1\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|f_{k_1}(x)-(f_{k_1})_Q-f_k(x)+(f_k)_Q\right|\,dx\\&\quad<\epsilon.\end{aligned}$$

故 (20) 成立.

对任意 $\epsilon\in(0,\infty)$, 令 $K:=K_\epsilon$, 则当 $k\in\mathbb{N}$ 且 $k>K$ 时, 由 (17), (19) 及 (20) 知, 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意方体 Q 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|f(x)-f_Q-f_k(x)+(f_k)_Q\right|\,dx\\&\quad=\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\left[g^{Q_m}(x)+\sum_{i=0}^{m-1}C_i\right]-\frac{1}{|Q|}\int_Q\left[g^{Q_m}(t)+\sum_{i=0}^{m-1}C_i\right]\,dt-f_k(x)+(f_k)_Q\right|\,dx\\&\quad=\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g^{Q_m}(x)-(g^{Q_m})_Q-f_k(x)+(f_k)_Q\right|\,dx\\&\quad=\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g^{Q_m}(x)-(g^{Q_m})_Q-g^Q(x)+g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q\right|\,dx\\&\quad\le\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g^{Q_m}(x)-(g^{Q_m})_Q-g^Q(x)\right|\,dx+\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q\right|\,dx\\&\quad=\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g^Q(x)-g^{Q_m}(x)+(g^{Q_m})_Q\right|\,dx+\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q\right|\,dx\\&\quad=\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g^Q(x)-f_k(x)+(f_k)_Q\right|\,dx<\epsilon,\end{aligned}$$

故 (16) 成立. 由此及引理 10 知, 对任意 $\epsilon\in(0,\infty)$, 令 $K:=K_\epsilon\in\mathbb{N}$, 则当 $k\in\mathbb{N}$ 且 $k>K$ 时有

$$\|f-f_k\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\le\epsilon.$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}=0. \tag{21}$$

由此, 取 k_0 充分大, 则由范数的三角不等式及 $f_{k_0}\in(\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n),\ \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)})$ 知

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\le\|f-f_{k_0}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}+\|f_{k_0}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}<1+\|f_{k_0}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}<\infty.$$

故说明

$$f \in \left(\mathrm{BMO}\left(\mathbb{R}^n\right),\ \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{22}$$

综上, 由 (21) 及 (22) 知 $\left(\mathrm{BMO}\left(\mathbb{R}^n\right),\ \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\right)$ 是 Banach 空间. 定理证毕. □

下面我们介绍一个与 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 等价的范数. 为此, 我们首先证明以下命题.

Proposition 12. 设 $f \in \mathrm{BMO}\left(\mathbb{R}^n\right)$, 则

$$\frac{1}{2}\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-a|\ dt \leq \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}, \tag{23}$$

其中上确界取自 $\mathbb{R}^n$ 中的一切方体.

证明. 一方面, 任取 $\mathbb{R}^n$ 中方体 Q, 则由引理 10 知

$$\begin{aligned}\inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-a|\ dt &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-f_Q|\ dt\\ &\leq \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-f_Q|\ dt\\ &= \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

两边关于 $\mathbb{R}^n$ 中全体方体取上确界, 即得

$$\sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-a|\ dt \leq \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.$$

另一方面, 注意到对任意 $a \in \mathbb{C}$ 有

$$\begin{aligned}\int_Q |f(t)-f_Q|\ dt &\leq \int_Q |f(t)-a|\ dt + \int_Q |a-f_Q|\ dt\\ &= \int_Q |f(t)-a|\ dt + |Q|\left|a - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(t)\, dt\right|\\ &= \int_Q |f(t)-a|\ dt + |Q|\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q a\, dt - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(t)\, dt\right|\\ &\leq \int_Q |f(t)-a|\ dt + \int_Q |a-f(t)|\ dt\\ &= 2\int_Q |f(t)-a|\ dt.\end{aligned}$$

两边除以 $2|Q|$, 再关于 $a \in \mathbb{C}$ 取下确界即得

$$\frac{1}{2}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-f_Q|\ dt \leq \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-a|\ dt.$$

由此及引理 10, 在两边关于 $\mathbb{R}^n$ 中任意方体 Q 取上确界即得

$$\frac{1}{2}\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{2}\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-f_Q|\ dt \le \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-a|\ dt.$$

故 (23) 证毕. □

(23) 提供了一种无需计算 f 在方体 Q 上的积分平均 f_Q 的方法证明 $f\in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$, 即只需验证存在正常数 $C\in\mathbb{R}^n$ 使得对任意方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$, 可以找到一个 $a\in\mathbb{C}$(这一常数可以依赖于方体 Q) 满足

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-a|\ dt \le C.$$

事实上, (23) 还定义了一个与 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 等价的范数, 即以下命题.

Proposition 13. 对任意 $f\in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$|||f|||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} := \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-a|\ dt,$$

则 $|||\cdot|||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 是 $\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$ 上的范数且

$$\Big(\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n),\ |||\cdot|||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\Big)$$

为 Banach 空间.

证明. 首先验证 $|||\cdot|||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 是 $\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$ 上的范数.

(i) 非负性. $|||\cdot|||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 显然非负, 又由 (23) 知

$$|||f|||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = 0 \Longleftrightarrow \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = 0 \Longleftrightarrow f(x) = Const,\ \text{a. e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

非负性成立.

(ii) 齐次性. 任取 $f\in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$.

若 $\lambda = 0$, 则

$$\begin{aligned}
0 \le |||\lambda f|||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |(\lambda f)(t)-a|\ dt \\
&= \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |a|\ dt \\
&\le \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |0|\ dt \\
&= 0 \\
&= |\lambda|\,|||f|||_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

故 $\|\lambda f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}=\lambda\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$.

若 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 则

$$
\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |(\lambda f)(t)-a|\ dt\\
&= \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |\lambda f(t)-a|\ dt\\
&= |\lambda| \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|f(t)-\frac{a}{\lambda}\right|\ dt\\
&= |\lambda| \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-a|\ dt\\
&= |\lambda|\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

故 $\|\lambda f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}=\lambda\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$.

齐次性成立.

(iii) 三角不等式. 任取 $f,\,g\in\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$, 则

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |(f+g)(t)-a|\ dt\\
&= \sup_Q \inf_{a\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)+g(t)-a|\ dt\\
&= \sup_Q \inf_{b,c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)+g(t)-b-c|\ dt\\
&\le \sup_Q \inf_{b,c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q [|f(t)-b|+|g(t)-c|]\ dt\\
&= \sup_Q \left[\inf_{b\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-b|\ dt + \inf_{c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |g(t)-c|\ dt\right]\\
&\le \sup_Q \inf_{b\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-b|\ dt + \sup_Q \inf_{c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |g(t)-c|\ dt\\
&= \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}+\|g\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

三角不等式成立.

故 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$ 是 $\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$ 上的范数. 由此, (23) 及 $\left(\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n),\ \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\right)$ 是 Banach 空间知

$$\left(\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n),\ \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}\right)$$

是 Banach 空间. □

我们知道对 $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p\in[1,\infty]$ 而言, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $|f|\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 相应的, 我们考察 $\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$ 空间是否具有这一性质. 为此, 我们首先证明以下命题.

Proposition 14. 设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$M^{\#}(|f|)(x)\le 2M^{\#}(f)(x). \tag{24}$$

证明. 任取 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则由 Sharp 极大函数的定义知对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}
M^{\#}(|f|)(x) &= \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left||f(t)|-|f|_Q\right|\,dt\\
&= \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left||f(t)|-|f_Q|+|f_Q|-|f|_Q\right|\,dt\\
&\le \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left[\left||f(t)|-|f_Q|\right|+\left||f_Q|-|f|_Q\right|\right]\,dt\\
&\le \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left||f(t)|-|f_Q|\right|dt+\sup_{Q\ni x}\left||f|_Q-|f_Q|\right|\\
&= \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left||f(t)|-|f_Q|\right|dt+\sup_{Q\ni x}\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q\left[|f(t)|-|f_Q|\right]dt\right|\\
&\le 2\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q \left||f(t)|-|f_Q|\right|dt\\
&\le 2\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)-f_Q|\,dt\\
&= 2M^{\#}(f)(x).
\end{aligned}$$

命题证毕. □

Remark 15. 由命题 14 知, 若 $f\in\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$, 则 $|f|\in\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$. 但这一命题的反命题是不对的, 即存在 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $|f|\in\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$, 但 $f\notin\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$.

事实上, 令

$$f(x):=\begin{cases}\ln|x|, & x_1\ge 0,\ x\ne\mathbf{0},\\ 0, & x=\mathbf{0},\\ -\ln|x|, & x_1<0,\ x\ne\mathbf{0},\end{cases}$$

其中 x_1 表示 x 的第一个分量, 则

$$|f|(x):=\begin{cases}\left|\ln|x|\right|, & x\ne\mathbf{0},\\ 0, & x=\mathbf{0}.\end{cases}$$

下证 $|f|\in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$. 为此, 我们定义

$$g(x):=\begin{cases}\ln|x|, & x\neq \mathbf{0},\\ 0, & x=\mathbf{0}\end{cases}$$

并证明 $g\in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$, 从而由 $|g|=|f|$ 及命题 14 可知 $|f|\in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$.

下证 $g\in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$. 由 (23) 知, 只需找到一个正常数 $C\in\mathbb{R}^n$ 使得对 $\mathbb{R}^n$ 中任意方体 Q, 都存在一个依赖于方体 Q 的常数 $a_Q\in\mathbb{C}$ 满足

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |g(t)-a_Q|\,dt\le C.$$

为此, 令

$$C:=\max\left(\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n\frac{v_n}{n}\ln 2,\ \frac{v_n}{2^n}\left[\frac{(3\sqrt{n})^n\ln(3\sqrt{n})}{n}+\frac{2-(3\sqrt{n})^n}{n^2}\right]\right),$$

其中 $v_n:=\int_{S^{n-1}}d\sigma(u)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球 S^{n-1} 的面积. 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意方体 Q, 不妨记其中心为 x_0, 边长为 $2R$, 令

$$a_Q:=a_{x_0,R}:=\begin{cases}\ln|x_0|, & |x_0|>2\sqrt{n}R,\\ \ln R, & |x_0|\le 2\sqrt{n}R,\end{cases}$$

则有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |g(t)-a_Q|\,dt=\frac{1}{|Q|}\int_Q |g(t)-a_{x_0,R}|\,dt\le C.$$

事实上, 当 $|x_0|>2\sqrt{n}R$ 时, 对任意 $t\in B(x_0,\sqrt{n}R)$ 有

$$|t|\in\big(|x_0|-\sqrt{n}R,|x_0|+\sqrt{n}R\big)\subset\left(\frac{1}{2}|x_0|,\frac{3}{2}|x_0|\right),$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |g(t)-a_Q|\,dt&=\frac{1}{(2R)^n}\int_Q \big|\ln|t|-\ln|x_0|\big|\,dt\\ &\le\frac{1}{(2R)^n}\int_{B(x_0,\sqrt{n}R)}\left|\ln\frac{|t|}{|x_0|}\right|\,dt\\ &\le\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n\frac{v_n}{n}\sup_{t\in B(x_0,\sqrt{n}R)}\left|\ln\frac{|t|}{|x_0|}\right|\\ &=\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n\frac{v_n}{n}\ln 2.\end{aligned}$$

当 $|x_0|\le 2\sqrt{n}R$ 时, 有 $Q\subset B(x_0,\sqrt{n}R)\subset B(\mathbf{0},3\sqrt{n}R)$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |g(t)-a_Q|\,dt &= \frac{1}{(2R)^n}\int_Q |\ln|t|-\ln R|\,dt\\ &\le \frac{1}{(2R)^n}\int_{B(x_0,\sqrt{n}R)}\left|\ln\frac{|t|}{R}\right|\,dt\\ &\le \frac{1}{(2R)^n}\int_{B(\mathbf{0},3\sqrt{n}R)}\left|\ln\frac{|t|}{R}\right|\,dt\\ &= \frac{1}{2^n}\int_{B(\mathbf{0},3\sqrt{n})}|\ln|t||\,dt\\ &= \frac{1}{2^n}\int_{S^{n-1}}d\sigma(u)\int_0^{3\sqrt{n}}\left|r^{n-1}\ln r\right|\,dr\\ &= \frac{v_n}{2^n}\left[\frac{(3\sqrt{n})^n\ln(3\sqrt{n})}{n}+\frac{2-(3\sqrt{n})^n}{n^2}\right].\end{aligned}$$

下证 $f\notin \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$. 对任意 $\epsilon\in(0,\frac{1}{\sqrt{n}})$, 取方体 $Q_\epsilon:=(-\epsilon,\epsilon)^n$, 定义 $Q_{\epsilon,1}:=(-\epsilon,0)\times(-\epsilon,\epsilon)^{n-1}$, $Q_{\epsilon,2}:=[0,\epsilon)\times(-\epsilon,\epsilon)^{n-1}$, 则显然 $Q_{\epsilon,1}\cap Q_{\epsilon,2}=\varnothing$ 且 $Q_\epsilon=Q_{\epsilon,1}\cup Q_{\epsilon,2}$. 令 $B_\epsilon:=B(\mathbf{0},\epsilon)$ 以及

$$\begin{aligned}f_{B_\epsilon}&:=\frac{1}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon}f(t)\,dt\\ &=-\frac{1}{|B(\mathbf{0},\epsilon)|}\int_{B(\mathbf{0},\epsilon)\cap Q_{\epsilon,1}}\ln|t|\,dt+\frac{1}{|B(\mathbf{0},\epsilon)|}\int_{B(\mathbf{0},\epsilon)\cap Q_{\epsilon,2}}\ln|t|\,dt\\ &=-\frac{n}{v_n\epsilon^n}\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}d\sigma(u)\int_0^\epsilon r^{n-1}\ln|r|\,dr+\frac{n}{v_n\epsilon^n}\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}d\sigma(u)\int_0^\epsilon r^{n-1}\ln|r|\,dr\\ &=0.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B_\epsilon|}\int_{B_\epsilon}|f(t)-f_{B_\epsilon}|\,dt\\ &\quad=\frac{1}{|B(\mathbf{0},\epsilon)|}\int_{B(\mathbf{0},\epsilon)}|\ln|t||\,dt\\ &\quad=-\frac{n}{v_n\epsilon^n}\int_{S^{n-1}}d\sigma(u)\int_0^\epsilon r^{n-1}\ln r\,dr\\ &\quad=\frac{1}{n}-\ln\epsilon\longrightarrow+\infty,\quad as\quad \epsilon\longrightarrow 0^+.\end{aligned}\tag{25}$$

又由于

$$\begin{aligned}
\int_{B_\epsilon} |f(t) - f_{B_\epsilon}|\, dt &\le \int_{B_\epsilon} |f(t) - f_{Q_\epsilon}|\, dt + \int_{B_\epsilon} |f_{Q_\epsilon} - f_{B_\epsilon}|\, dt \\
&= \int_{B_\epsilon} |f(t) - f_{Q_\epsilon}|\, dt + |B_\epsilon| \left| f_{Q_\epsilon} - \frac{1}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon} f(t)\, dt \right| \\
&\le \int_{B_\epsilon} |f(t) - f_{Q_\epsilon}|\, dt + \int_{B_\epsilon} |f_{Q_\epsilon} - f(t)|\, dt \\
&= 2 \int_{B_\epsilon} |f(t) - f_{Q_\epsilon}|\, dt \\
&\le 2 \int_{Q_\epsilon} |f(t) - f_{Q_\epsilon}|\, dt,
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{|Q_\epsilon|} \int_{Q_\epsilon} |f(t) - f_{Q_\epsilon}|\, dt \ge \frac{|B_\epsilon|}{2|Q_\epsilon|} \frac{1}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon} |f(t) - f_{B_\epsilon}|\, dt = \frac{v_n}{n 2^{n+1}} \frac{1}{|B_\epsilon|} \int_{B_\epsilon} |f(t) - f_{B_\epsilon}|\, dt.$$

由此及 (25) 知

$$\frac{1}{|Q_\epsilon|} \int_{Q_\epsilon} |f(t) - f_{Q_\epsilon}|\, dt \longrightarrow +\infty, \quad as \quad \epsilon \longrightarrow 0^+.$$

故对任意 $K > 0$, 总是存在 $\epsilon \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ 使得

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q|\, dt \ge \frac{1}{|Q_\epsilon|} \int_{Q_\epsilon} |f(t) - f_{Q_\epsilon}|\, dt > K.$$

故

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \infty,$$

由此即知 $f \notin \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$.

下面介绍一个重要事实, $L^\infty\,(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$ 的真子空间.

Proposition 16. $L^\infty\,(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$.

证明. 对任意 $f \in L^\infty\,(\mathbb{R}^n)$ 及 $\mathbb{R}^n$ 中任意方体 Q 有

$$|f_Q| = \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t)\, dt \right| \le \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)|\, dt \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

故对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\begin{aligned}
M^\#(f)(x) &= \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f_Q|\, dt \\
&\le \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q [|f(t)| + |f_Q|]\, dt \\
&\le 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

故
$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \left\|M^{\#}(f)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$
从而 $f \in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$. 由此及 f 的任意性知
$$L^\infty\,(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)\,.$$

下证 $L^\infty\,(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$.

事实上, 令
$$f(x) := \begin{cases} \ln|x|, & x \neq \mathbf{0}, \\ 0, & x = \mathbf{0}. \end{cases}$$
则由注记 15 知 $f \in \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$, 又显然 $f \notin L^\infty\,(\mathbb{R}^n)$, 故综上
$$L^\infty\,(\mathbb{R}^n) \subsetneqq \mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)\,.$$
命题证毕. □

参考文献

[1] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.