共轭空间

2021 年 2 月 2 日

1 共轭算子 (Adjoint operator)

共轭算子是个非常有用的工具.

Definition 1.1. 设 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ 是线性赋范空间, $T \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. 若 $T^* \in \mathscr{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ 满足: 对 $\forall x \in \mathcal{X}$ 和 $\forall f \in \mathcal{Y}^*$,

$$\langle f, Tx \rangle = \langle T^* f, x \rangle,$$

则称 T^* 是 T 的共轭算子.

Remark 1.2. 注意, 共轭算子是一定存在的, 且 $\|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)} = \|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$.

证明. 先证存在性. 对 $\forall f \in \mathcal{Y}^*$, 定义

$$g_f: \ \mathcal{X} \to \mathbb{K}, \ x \mapsto \langle f, Tx \rangle,$$

则易证 $g_f \in \mathcal{X}^*$. 令

$$T^*: \ \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*, \ f \to g_f,$$

则易证 $T^* \in \mathscr{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ 且对 $\forall x \in \mathcal{X}$ 和 $\forall f \in \mathcal{Y}^*$,

$$\langle f, Tx \rangle = \langle T^* f, x \rangle.$$

再证 $\|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)} = \|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$. 一方面,

$$\begin{aligned} \|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)} &= \sup_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} \|T^* f\|_{\mathcal{X}^*} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} |\langle T^* f, x \rangle| \\ &= \sup_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} |\langle f, Tx \rangle| \le \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Tx\|_{\mathcal{Y}} \le \|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}. \end{aligned}$$

另一方面, 由 Hahn-Banach 定理推论 (Corollary 2.4) 知

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1}\|Tx\|_{\mathcal{Y}} \overset{Corollary\,2.4}{=} \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1}\max_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} f(Tx) \\ &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1}\max_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1}\langle T^*f, x\rangle \le \max_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1}\|T^*f\|_{\mathcal{X}^*} \le \|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)}.\end{aligned}$$

因此 $\|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} = \|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. □

共轭算子会保持原来算子的性质.

Proposition 1.3. 设 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ 是 Banach 空间, $T \in \mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. 若 T 是双射, 则 T^* 也是双射.

证明. 由开映射定理知, $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$, 因此 $(T^{-1})^*$ 存在. 对 $\forall x^* \in \mathcal{X}^*$, 令 $y^* := (T^{-1})^*(x^*)$, 则 $y^* \in \mathcal{Y}^*$ 且对 $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = \langle (T^{-1})^*(x^*), Tx\rangle = \langle x^*, x\rangle,$$

即 $T^*(y^*) = x^*$. 故 T^* 是满射. 对 $\forall y_1^*,\ y_2^* \in \mathcal{Y}^*$, 若 $T^*(y_1^*) = T^*(y_2^*)$, 则对 $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\langle y_1^*, Tx\rangle = \langle T^*(y_1^*), x\rangle = \langle T^*(y_2^*), x\rangle = \langle y_2^*, Tx\rangle$$

由此及 T 是满射知, $y_1^* = y_2^*$. 故 T^* 是单射. □

Remark 1.4. 反过来, 若 T^* 是双射, 能否推出 T 是双射? 似乎是对的, Rudin 的书中有零散的结论.

Proposition 1.5. 设 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ 是 Banach 空间, $T \in \mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. 若 T 是线性等距同构映射 (满的等距映射), 则 T^* 也是线性等距同构映射.

证明. T 是线性等距同构映射, 故 T 是双射, 由此及 Proposition 1.3 知, T^* 是双射. 又对 $\forall y^* \in \mathcal{Y}^*$,

$$\|T^*y^*\|_{\mathcal{X}^*} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1}|\langle T^*y^*, x\rangle| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1}|\langle y^*, Tx\rangle| = \sup_{\|y\|_{\mathcal{Y}}=1}|\langle y^*, y\rangle| = \|y^*\|_{\mathcal{Y}^*}.$$

故 T^* 也是线性等距同构映射. □

2 自反空间 (Reflexive Spaces)

Definition 2.1. 设 $\mathcal{X}$ 是线性赋范空间. 称 $\mathcal{X}^* := \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ 为 $\mathcal{X}$ 的共轭空间, 称 $\mathcal{X}^{**} := (\mathcal{X}^*)^*$ 为 $\mathcal{X}$ 的第二共轭空间,

Definition 2.2. 设 $\mathcal{X}$ 是线性赋范空间. 对 $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$X: \ \mathcal{X}^* \to \mathbb{K}, \ f \mapsto \langle f, x \rangle$$

是 $\mathcal{X}^{**}$ 中的元素, 称

$$J_{\mathcal{X}}: \ \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}, \ x \mapsto X$$

为 $\mathcal{X}$ 的自然映射.

Definition 2.3. 设 $\mathcal{X}$ 是线性赋范空间. 称 $\mathcal{X}$ 是自反空间, 若自然映射 $J_{\mathcal{X}}$ 是满射.

Corollary 2.4 (H. Brezis, Functional Analysis, Corollary 1.4)**.** 设 $\mathcal{X}$ 是线性赋范空间. 则对 $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}^*}=1} |f(x)| = \max_{\|f\|_{\mathcal{X}^*}=1} |f(x)|.$$

Proposition 2.5. $J_{\mathcal{X}}$ 是线性等距映射.

证明. $J_{\mathcal{X}}$ 线性显然. 又由 Hahn-Banach 定理推论 (Corollary 2.4) 知

$$\|J_{\mathcal{X}} x\|_{\mathcal{X}^{**}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}^*}=1} |\langle J_{\mathcal{X}} x, f \rangle| = \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}^*}=1} |f(x)| \overset{Corollary\, 2.4}{=} \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

故 $J_{\mathcal{X}}$ 是线性等距映射. $\square$

Remark 2.6. 若线性赋范空间 $\mathcal{X}$ 是自反空间, 则 $J_{\mathcal{X}}$ 是满的线性等距映射, 故 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}^{**}$ 等距同构. 注意到, $\mathcal{X}^{**}$ 是完备的, 因此自反空间必定完备.

一个很自然的问题是, 如果 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}^{**}$ 等距同构, 能否推出 $\mathcal{X}$ 自反呢? 答案是否定的, James 在 [1] 中给出了反例.

下面引入另外两种拓扑, 弱收敛和 *-弱收敛.

Definition 2.7. 设 $\mathcal{X}$ 是线性赋范空间, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{X}$. 若对 $\forall f \in \mathcal{X}^*$,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0),$$

则称 x_n 弱收敛到 x_0, 记为 $x_n \rightharpoonup x_0$.

Definition 2.8. 设 $\mathcal{X}$ 是线性赋范空间, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{X}^*$. 若对 $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x),$$

则称 f_n *-弱收敛到 f_0, 记为 $w^* - \lim_{n\to\infty} f_n = f_0$.

自反空间有些有意思的性质, 比如:

Theorem 2.9. 设 $\mathcal{X}$ 是自反空间, $E \subset \mathcal{X}$. 则 E 弱列紧当且仅当 E 有界.

Remark 2.10. "E 弱列紧 $\Longrightarrow E$ 有界" 只需要 E 是线性赋范空间即可.

Theorem 2.11 (H. Brezis, Functional Analysis, Proposition 3.20)**.** 自反空间的闭线性子空间也自反.

Lemma 2.12. 等距同构的两线性赋范空间, 自反性相同.

证明. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是等距同构的线性赋范空间, 则存在 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的线性等距同构映射 φ. 由 Proposition 1.5 知, φ^{**} 也是线性等距同构映射.

设 $\mathcal{X}$ 自反, 则 $J_{\mathcal{X}}$ 是满射, 从而 $J_{\mathcal{X}}$ 是双射. 下证 $\mathcal{Y}$ 自反. 事实上, 对 $\forall y^{**} \in \mathcal{Y}^{**}$, 令 $y := \varphi((J_{\mathcal{X}})^{-1}((\varphi^{**})^{-1}(y^{**})))$, 则 $y \in \mathcal{Y}$ 且对 $\forall y^* \in \mathcal{Y}^*$,

$$\begin{aligned}\langle J_{\mathcal{Y}} y, y^* \rangle &= \langle y^*, y \rangle = \langle y^*, \varphi((J_{\mathcal{X}})^{-1}((\varphi^{**})^{-1}(y^{**}))) \rangle \\ &= \langle \varphi^*(y^*), (J_{\mathcal{X}})^{-1}((\varphi^{**})^{-1}(y^{**})) \rangle = \langle (\varphi^{**})^{-1}(y^{**}), \varphi^*(y^*) \rangle = \langle y^{**}, y^* \rangle,\end{aligned}$$

即 $J_{\mathcal{Y}} y = y^{**}$. 故 $J_{\mathcal{Y}}$ 是满射, 从而 $\mathcal{Y}$ 自反. □

下面给出自反的等价特征.

Theorem 2.13. 设 $\mathcal{X}$ 是 Banach 空间. 则以下叙述等价:

(i) $\mathcal{X}$ 自反;

(ii) $\mathcal{X}^*$ 自反;

(iii) 单位球弱列紧.

证明. 先证"(i) $\Longrightarrow$ (ii)". 对 $\forall x^{***} \in \mathcal{X}^{***}$, 令 $x^* := (J_{\mathcal{X}})^*(x^{***})$, 则 $x^* \in \mathcal{X}^*$ 且对 $\forall x^{**} \in \mathcal{X}^{**}$,

$$\begin{aligned}\langle J_{\mathcal{X}^*} x^*, x^{**} \rangle &= \langle x^{**}, x^* \rangle = \langle x^{**}, x^* \rangle = \langle J_{\mathcal{X}}((J_{\mathcal{X}})^{-1} x^{**}), x^* \rangle \\ &= \langle x^*, (J_{\mathcal{X}})^{-1} x^{**} \rangle = \langle (J_{\mathcal{X}})^*(x^{***}), (J_{\mathcal{X}})^{-1} x^{**} \rangle = \langle x^{***}, x^{**} \rangle,\end{aligned}$$

即 $J_{\mathcal{X}^*}x^* = x^{***}$. 故 $J_{\mathcal{X}^*}$ 是满射, 从而 $\mathcal{X}^*$ 自反.

再证"(ii) $\Longrightarrow$ (i)". 因 $\mathcal{X}$ 完备, 故 $J_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{X}^{**}$ 的闭线性子空间. 又因为 $\mathcal{X}^*$ 自反和"(i) $\Longrightarrow$ (ii)" 知, $\mathcal{X}^{**}$ 自反. 进一步由 Theorem 2.11 知, $J_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ 自反. 而 $J_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ 与 $\mathcal{X}$ 等距同构, 故由 Lemma 2.12 知, $\mathcal{X}$ 自反.

"(i) $\Longrightarrow$ (iii)" 是经典结论. 下证"(iii) $\Longrightarrow$ (i)". 证明非常复杂, 需要弄清楚拓扑的构造. 思路是证 $J_{\mathcal{X}}(B_{\mathcal{X}}) = B_{\mathcal{X}^{**}}$, 从而有 $J_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^{**}$. □

参考文献

[1] R. C. James, A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 37 (1951), 174–177.