小波

2023 年 3 月 6 日

1 基础概念的回顾

对于 Hilbert 空间来说, 由它的内积可以诱导出正交补的概念.

Definition 1. 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $x, y \in \mathscr{H}$ 且 $N, M \subset \mathscr{H}$.

(i) 我们称 $x \perp y$, 若 $(x, y) = 0$.

(ii) 我们称 $x \perp M$, 若 $(x, y) = 0$ 对任意 $y \in M$.

(iii) 我们称 $N \perp M$, 若 $(x, y) = 0$ 对任意 $x \in N$ 和 $y \in M$.

Proposition 2. 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $\{M_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathscr{H}$. 则

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} (M_j)^{\perp} = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} M_j\right)^{\perp}.$$

证明.

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} (M_j)^{\perp} &\Longleftrightarrow x \perp M_j \qquad \text{for any } j \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow x \perp \left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} M_j\right) \Longleftrightarrow x \in \left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} M_j\right)^{\perp}. \end{aligned}$$

Proposition 2 证毕. □

小波背景下直和的定义与代数中定义的有一定区别, 这是因为此处要推广到无穷维直和.

Definition 3 ([1, p. 124])**.** 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathscr{H}$ 的线性子空间. 我们称 $\mathscr{H}$ 是 $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 的正交直和, 记为

$$\mathscr{H} := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j,$$

若对任意 $j, j' \in \mathbb{Z}$, $W_j \perp W_{j'}$, 且对任意 $x \in \mathscr{H}$, 它可以表示为

$$x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j$$

in $\mathscr{H}$, 其中 $y_j \in W_j$ 对任意 $j \in \mathbb{Z}$.

数分的一个简单结论.

Lemma 4. 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间, 单减闭集列 $\{M_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ 满足

$$M_1 \supset M_2 \supset \cdots$$

若 $\{x_j \in M_j\}_{j=1}^{\infty}$ 的极限存在, $x_\infty := \lim_{j\to\infty} x_j$, 则

$$x_\infty \in \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j.$$

证明. 对任意 $j \in \mathbb{N}$, 由单减性知 $\{x_i\}_{i=j}^{\infty} \subset M_j$. 又因为 M_j 闭, 故

$$x_\infty = \lim_{j\to\infty} x_j \in M_j.$$

从而

$$x_\infty \in \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j.$$

引理证毕. □

现在回顾 Riesz 基的定义.

Definition 5. 设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert 空间. 称 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathscr{H}$ 是该空间的 Riesz 基, 若

(i) 对任意 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k e_k\right\|_{\mathscr{H}} \sim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|^2\right)^{1/2};$$

(ii)

$$\left\{\sum_{k \text{ finite}} \alpha_k e_k : \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}\right\}$$

在 $\mathscr{H}$ 中稠.

对任意 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$, 令

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx.$$

此时 Plancherel 定理变为, 对任意 $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$(2\pi)^{-1/2} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

在研究 Fourier 级数的时候, 有两个经典的核, 这里给出它们的定义, 但不深入研究. 对任意 $N \in \mathbb{Z}_+$ 和 $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$D_N(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

被称为 Dirichlet 核;

$$F_N(t) := \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(t) = \frac{1}{2\pi(N+1)}\left[\frac{\sin((N/2+1/2)t)}{\sin(t/2)}\right]^2$$

被称为 Fejér 核. 容易看出, 对任意 $N \in \mathbb{Z}_+$, D_N 和 F_N 都是 $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的有限线性组合且

$$\int_0^{2\pi} D_N(t)\,dt = (2\pi)^{-1}\sum_{k=-N}^{N}\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,dt = 1,$$

$$\int_0^{2\pi} F_N(t)\,dt = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\int_0^{2\pi} D_k(t)\,dt = 1.$$

Lemma 6. 设 $p \in [1,\infty)$ 且 $f \in L^p([0,2\pi])$. 则

(i) 对任意 $N \in \mathbb{Z}_+$, $F_N * f \in L^p([0,2\pi])$.

(ii) 对几乎处处 $x \in [0,2\pi]$,

$$\lim_{N\to\infty}(F_N * f)(x) = f(x).$$

(iii) 若 f 还是连续函数, 则 (ii) 的收敛是一致的, 这给出了 Weierstrass theorem 的一个证明.

证明. (i) 由 Young's convolution inequality 直接得到. 其余待补. □

下面这个结论来自 Meyer 的 [2, p. 26, Theorem 1], 也可以参看 Daubechies 的 [?, p. 139].

Lemma 7. 设 $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, $C_1, C_2 \in (0,\infty)$. 则下面两条等价,

(i) 对任意 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$C_1\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\alpha_k|^2 \le \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\varphi(\cdot-k)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le C_2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\alpha_k|^2;$$

(ii) 对几乎处处 $\xi \in \mathbb{R}$,

$$C_1 \le \sum_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+2\pi l)|^2 \le C_2.$$

证明. 先来一些准备工作. 由 Plancherel 定理知, 对任意 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned}(1)\qquad \left\|\sum_{k \text{ finite}}\alpha_k\varphi(\cdot-k)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi}\left\|\left[\sum_{k \text{ finite}}\alpha_k\varphi(\cdot-k)\right]^\wedge\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi}\left\|\sum_{k \text{ finite}}\alpha_k[\varphi(\cdot-k)]^\wedge\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\sum_{k \text{ finite}}\alpha_k e^{-ik\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|m(\xi)|^2\omega(\xi)\,d\xi,\end{aligned}$$

其中

$$m(\xi) := \sum_{k \text{ finite}}\alpha_k e^{-ik\xi}, \qquad \omega(\xi) := \sum_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(\xi+2\pi l)|^2.$$

又由 $\{e^{-ik\xi}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的正交性知,

$$(2)\qquad \sum_{k\text{ finite}} |\alpha_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\langle m, m\rangle_{L^2([0,2\pi])} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2\, d\xi,$$

有了这两估计, 可以开始等价性的证明了.

先证 (i) 推 (ii). 对任意 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, 由 (1) 和 (2) 知

$$(3)\qquad C_1 \int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2\, d\xi \le \int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi \le C_2 \int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2\, d\xi.$$

对任意 $\xi_0 \in \mathbb{R}$, 取 $m(\cdot) := (\frac{2\pi}{2N+1})^{1/2} D_N(\cdot - \xi_0)$, 则对任意 $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_0 + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$[m(\xi)]^2 = \frac{2\pi}{2N+1}\,[D_N(\xi-\xi_0)]^2 = \frac{1}{2\pi(2N+1)}\left[\frac{\sin((N+1/2)(\xi-\xi_0))}{\sin((\xi-\xi_0)/2)}\right]^2 = F_{2N}(\xi_0-\xi),$$

因此 (3) 变为

$$C_1 \le (F_{2N} * \omega)(\xi_0) := \int_0^{2\pi} F_{2N}(\xi_0-\xi)\omega(\xi)\, d\xi \le C_2.$$

注意到

$$\|\omega\|_{L^2([0,2\pi])} = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+2\pi l)|^2\, d\xi = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

故对几乎处处 $\xi_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to\infty} (F_{2N} * \omega)(\xi_0) = \omega(\xi_0),$$

故

$$C_1 \le \omega(\xi_0) \le C_2.$$

这样就推出了 (ii).

再证 (ii) 推 (i). 取定 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. 由 (1) 和 (2) 知, 对任意 $N, M \in \mathbb{Z}$ 且 $N \le M$,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=N}^{M} \alpha_k \varphi(\cdot-k)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \left\|\sum_{k=N}^{M} \alpha_k \varphi(\cdot-k)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&= \int_0^{2\pi} \left|\sum_{k=N}^{M} \alpha_k e^{-ik\xi}\right|^2 \omega(\xi)\, d\xi \\
&\le C_2 \int_0^{2\pi} \left|\sum_{k=N}^{M} \alpha_k e^{-ik\xi}\right|^2 d\xi \\
&= C_2 \sum_{k=N}^{M} |\alpha_k|^2 \to 0
\end{aligned}$$

当 $N, M \to \infty$ 或 $N, M \to -\infty$, 故 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(\cdot-k)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中收敛. 对任意 $M \in \mathbb{N}$, 取 $N := -M$ 有

$$\left\|\sum_{k=-M}^{M} \alpha_k \varphi(\cdot-k)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le C_2 \sum_{k=M}^{M} |\alpha_k|^2,$$

令 $M\to\infty$ 得

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\varphi(\cdot-k)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\le C_2\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\alpha_k|^2.$$

另一半不等式类似可证. Lemma 7 证毕. □

Remark 8. (i) 推 (ii) 可能有另一个证明思路, 不一定对, 感觉也很麻烦. 由于多项式在 $L^2([0,2\pi])$ 中稠, 故 (3) 可转变为对任意 $f\in L^2([0,2\pi])$,

$$C_1\int_0^{2\pi}f(\xi)\,d\xi\le\int_0^{2\pi}f(\xi)\omega(\xi)\,d\xi\le C_2\int_0^{2\pi}f(\xi)\,d\xi.$$

化简得, 对任意 $f\in L^2([0,2\pi])$ 且 $\|f\|_{L^2([0,2\pi])}=1$,

$$C_1\le\int_0^{2\pi}f(\xi)\omega(\xi)\,d\xi\le C_2.$$

故对几乎处处 $\xi\in\mathbb{R}$,

$$C_1\le\omega(\xi)\le C_2.$$

2 小波的构造

Definition 9. 称函数 $\theta\in L^2(\mathbb{R})$ 是小波, 若

$$\theta_{j,k}(x):=2^{j/2}\theta(2^jx-k)\qquad\text{for any } j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组标准正交基.

Example 10. Haar 小波

$$\theta(x):=\begin{cases}1, & x\in[0,\frac{1}{2}),\\ -1, & x\in[\frac{1}{2},1),\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

是一个经典小波.

一个很自然的问题是, 有没有什么方法来方便的构造想要的小波呢? 一个经典的方法是通过“multiresolution analysis”这一框架来构造小波. 本节我们先回顾什么是“multiresolution analysis”, 再给出 Meyer 小波和 Daubechies 小波的构造.

2.1 Multiresolution analysis

Definition 11 (Meyer, [2, p. 21])**.** 一列 $L^2(\mathbb{R})$ 的闭线性子空间 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 被称为 $L^2(\mathbb{R})$ 的多尺度逼近, 若它满足以下条件:

(i) 对任意 $j\in\mathbb{Z}$, $V_j\subset V_{j+1}$;

(ii) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j}=L^2(\mathbb{R})$, 这个闭包是 $L^2(\mathbb{R})$ 空间意义下的闭包;

(iii) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{\theta\}$, 此处的 θ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中的零元;

(iv) 对任意 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 和 $j \in \mathbb{Z}$,

$$f(\cdot) \in V_j \Longleftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1};$$

(v) 对任意 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 和 $k \in \mathbb{Z}$,

$$f(\cdot) \in V_0 \Longleftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0;$$

(vi) 存在 $\varphi \in V_0$ 使得 $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 V_0 的标准正交基.

这样的 φ 被称为 scaling function (或 father wavelet). 事实上, Definition (11)(vi) 可以减弱.

Remark 12. Definition (11)(vi) 可减弱为存在 $\varphi \in V_0$ 使得 $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 V_0 的 Riesz 基. 这是因为该条件可以推出存在 $\varphi^\# \in V_0$ 使得 $\{\varphi^\#(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 V_0 的标准正交基.

证明. 由 Lemma 7 知, 对几乎处处 $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 \sim 1.$$

令 $\varphi^\# \in L^2(\mathbb{R})$ 满足对几乎处处 $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\varphi^\#}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\left[\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2\right]^{-1/2}.$$

则 $\varphi^\# \in V_0$ 且 $\{\varphi^\#(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 V_0 的标准正交基. 证明待补. □

Proposition 13. 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的多尺度逼近. 对任意 $j \in \mathbb{Z}$, 令 W_j 为 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补, 即

$$W_j := \{x \in V_{j-1} : \ x \perp V_j\}.$$

则关于 $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, 我们有如下性质.

(i) 对任意 $j \in \mathbb{Z}$,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

(ii) 对任意 $j \in \mathbb{Z}$,

$$V_{j+1} = \bigoplus_{j'=-\infty}^{j} W_{j'}. \tag{4}$$

$$(V_j)^\perp = \bigoplus_{j'=j}^{\infty} W_{j'}. \tag{5}$$

(iii)

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j'\in\mathbb{Z}} W_{j'} = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j'=0}^{\infty} W_{j'}\right).$$

直观上来说, 不断迭代 (i) 就能得到 (ii), 但其实严格证明挺麻烦的.

证明. (i) 就是正交分解定理, (iii) 可以直接由 (ii) 得到. 故只需证 (ii). 集合两两正交繁琐且平凡, 证明略去, 只考虑直和中的分解.

先证 (4). 取定 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $x_{j+1} \in V_{j+1}$. 对任意 $J \in \mathbb{Z}$ 且 $J < j$, 由 (i) 知

$$V_{j+1} = V_J \oplus \left(\bigoplus_{j'=J}^{j} W_{j'}\right),$$

从而存在 $x_J \in V_J$ 和 $\{y_{j'} \in W_{j'}\}_{j'=J}^{j}$ (此处的 $y_{j'}$ 与 J 无关), 使得

$$x_{j+1} = x_J + \sum_{j'=J}^{j} y_{j'}. \tag{6}$$

由此及正交性知

$$\|x_{j+1}\|^2 = \|x_J\|^2 + \sum_{j'=J}^{j} \|y_{j'}\|^2.$$

因此

$$\sum_{j'=-\infty}^{j} \|y_{j'}\|^2 < \|x_{j+1}\|^2 < \infty,$$

再一次利用正交性知, 对任意 $N \in \mathbb{Z}$ 且 $-N \le j$ 和 $p \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{j'=-N}^{j} y_{j'} - \sum_{j'=-(N+p)}^{j} y_{j'}\right\| = \left\|\sum_{j'=-(N+p)}^{-(N+1)} y_{j'}\right\| = \sum_{j'=-(N+p)}^{-(N+1)} \|y_{j'}\|^2 \to 0, \qquad \text{当} \quad N \to \infty.$$

故

$$\sum_{j'=-\infty}^{j} y_{j'} \quad \text{收敛}.$$

由此及 (6) 知,

$$x_\infty := \lim_{J\to-\infty} x_J = \lim_{J\to-\infty}\left(x_{j+1} - \sum_{j'=J}^{j} y_{j'}\right) = x_{j+1} - \sum_{j'=-\infty}^{j} y_{j'}.$$

注意到

$$x_{j+1} - \sum_{j'=J}^{j} y_{j'} = x_J \in W_J \subset V_J,$$

由 Lemma 4 知,

$$x_\infty = x_{j+1} - \sum_{j'=-\infty}^{j} y_{j'} \in \bigcap_{J\in\mathbb{Z}} V_J = \{\theta\},$$

最后一个等号是定义. 故

$$x_{j+1} = \sum_{j'=-\infty}^{j} y_{j'},$$

分解证毕. 从而 (4) 证毕.

再证 (5). 固定 $j \in \mathbb{Z}$. 注意到, 由正交分解和 (i) 知

$$L^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus (V_j)^{\perp}$$

且

$$L^2(\mathbb{R}) = V_{j+1} \oplus (V_{j+1})^{\perp} = V_j \oplus W_j \oplus (V_{j+1})^{\perp}.$$

故

$$(V_j)^{\perp} = W_j \oplus (V_{j+1})^{\perp}.$$

有限次迭代可得, 对任意 $J \in \mathbb{N}$ 且 $J > j$,

$$(V_j)^{\perp} = \left(\bigoplus_{j'=j}^{J-1} W_j\right) \oplus (V_J)^{\perp}. \tag{7}$$

类似 (ii) 的证明知

$$(V_j)^{\perp} = \bigoplus_{j'=j}^{\infty} W_{j'}.$$

故 (5) 证毕. 从而 Proposition 13 证毕. □

Remark 14. 为了读者的便利, 此处还是给出 (5) 的完整证明. 注意到

$$\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots,$$

故

$$\cdots \subset (V_1)^{\perp} \subset (V_0)^{\perp} \subset (V_{-1})^{\perp} \subset \cdots.$$

取定 $j \in \mathbb{Z}$ 和 $x_j \in (V_j)^{\perp}$. 对任意 $J \in \mathbb{Z}$ 且 $J > j$, 由 (7) 知

$$(V_j)^{\perp} = \left(\bigoplus_{j'=j}^{J-1} W_j\right) \oplus (V_J)^{\perp}.$$

从而存在 $\{y_{j'} \in W_{j'}\}_{j'=j}^{J-1}$ (此处的 $y_{j'}$ 与 J 无关) 和 $x_J \in (V_J)^{\perp}$, 使得

$$x_j = \sum_{j'=j}^{J-1} y_{j'} + x_J. \tag{8}$$

由此及正交性知

$$\|x_j\|^2 = \sum_{j'=j}^{J-1} \|y_{j'}\|^2 + \|x_J\|^2.$$

因此
$$\sum_{j'=j}^{J-1}\|y_{j'}\|^2 < \|x_{j+1}\|^2 < \infty,$$
再一次利用正交性知, 对任意 $N \in \mathbb{Z}$ 且 $-N \le j$ 和 $p \in \mathbb{N}$,
$$\left\|\sum_{j'=j}^{N} y_{j'} - \sum_{j'=j}^{N+p} y_{j'}\right\| = \left\|\sum_{j'=N+1}^{N+p} y_{j'}\right\| = \sum_{j'=N+1}^{N+p}\|y_{j'}\|^2 \to 0, \qquad \text{当} \quad N \to \infty.$$
故
$$\sum_{j'=j}^{\infty} y_{j'} \quad \text{收敛}.$$
由此及 (8) 知
$$x_\infty := \lim_{J\to-\infty} x_J = \lim_{J\to-\infty}\left(x_j - \sum_{j'=j}^{J-1} y_{j'}\right) = x_j - \sum_{j'=j}^{\infty} y_{j'}.$$
注意到
$$x_j - \sum_{j'=j}^{J-1} y_{j'} = x_J \in W_J \subset (V_J)^\perp.$$
由 Lemma 4 和 Proposition 2 知,
$$x_\infty = x_j - \sum_{j'=j}^{\infty} y_{j'} \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}}(V_j)^\perp = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j\right)^\perp = \{\theta\},$$
最后一个等号是定义. 故
$$x_j = \sum_{j'=j}^{\infty} y_{j'},$$
分解证毕. 从而 (4) 证毕.

Lemma 15. 设 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的多尺度逼近. 若存在 $\psi \in W_0$ 使得 $\{\psi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 W_0 的标准正交基, 则$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基. 这样的 ψ 被称为 wavelet function (或 mother wavelet).

对于高维小波, 可以用 father wavelet 和 mother wavelet 的张量积来生成.

Lemma 16. 设 φ 和 ψ 分别是 $L^2(\mathbb{R})$ 对应的 father wavelet 和 mother wavelet, 对任意 $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E := \{0,1\}^n \setminus \{0,\ldots,0\}$ 和二进方体 $Q := Q_{jk} = \prod_{i=1}^n 2^{-j}[k_i, k_i+1)$, 令
$$\theta_Q^{(\lambda)} := 2^{jn/2}\psi^{(\lambda_1)}(2^j x_1 - k_1)\cdots\psi^{(\lambda_n)}(2^j x_n - k_n),$$
其中 $\psi^{(0)} := \varphi, \psi^{(1)} := \psi$. 则 $\{\theta_Q^{(\lambda)} :\ Q \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in E\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的正交规范基.

2.2 Daubechies 小波

Daubechies 小波是具有紧支集的小波, 它具有很好的性质, 目前只关注与它的基本构造, 一些它的相关性质以后再补.

参考文献

[1] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, Measure, Lebesgue Integrals, and Hilbert Space, Academic Press, New York-London, 1961. [1]

[2] Y. Meyer, Wavelets and Operators, Translated from the 1990 French original by D.H. Salinger, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge, 1992. [3, 5]