

Calderón-Zygmund Decomposition

February 10, 2020

Calderón-Zygmund Decomposition 由Calderon 和Zygmund 在[1] 中引入.

1 Calderón-Zygmund Lemma

Theorem 1.1 (Calderón-Zygmund Lemma). 设 f 是非负可积函数, 则对任意给定的正常数 λ , 存在两两不交的二进方体序列 $\{Q_j\}_{j \in J}$ 使得

- (i) 对 $a.e. x \notin \bigcup_{j \in J} Q_j$, $f(x) < \lambda$;
- (ii) $|\bigcup_{j \in J} Q_j| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;
- (iii) 对 $\forall j \in J$,

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(t) dt < 2^n \lambda.$$

1.1 本人觉得很自然的证明

此证明来自[2, Lemma 1.2]. 在证明Calderón-Zygmund Lemma 之前, 首先回顾一下经典的Lebesgue differentiation theorem.

Theorem 1.2 (Lebesgue differentiation theorem). 设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则对 $a.e. x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(t) - f(x)| dt = 0.$$

Remark 1.3. 显然对 $a.e. x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(t) dt = f(x).$$

事实上, 里面的 $B(x, r)$ 可以换成 $B \ni x$, 球也可以换成方体.

Proof of Theorem 1.1. 设 \mathcal{D} 为二进方体全体, 考虑 \mathcal{D} 的子集

$$D_{f, \lambda} := \left\{ Q \in \mathcal{D} : \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t) dt > \lambda \right\}.$$

称 Q_0 是 $D_{f,\lambda}$ 中的极大方体, 若对 $\forall Q \in D_{f,\lambda} \setminus \{Q_0\}$, $Q_0 \not\subset Q$. 将 $D_{f,\lambda}$ 中的全体极大方体记为 $\{Q_j\}_{j \in J}$. 下证 $\{Q_j\}_{j \in J}$ 满足(i), (ii), (iii). 先证(iii), 对 $\forall j \in J$, 设 $\tilde{Q}_j \in \mathcal{D}$ 满足 $Q_j \subset \tilde{Q}_j$ 且 $|\tilde{Q}_j| = 2^n |Q_j|$. 由此及 Q_j 是 $D_{f,\lambda}$ 中的极大方体知

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f(t) dt \leq \frac{|\tilde{Q}_j|}{|Q_j|} \frac{1}{|\tilde{Q}_j|} \int_{\tilde{Q}_j} f(t) dt \leq 2^n \lambda.$$

由此及 $Q_j \in D_{f,\lambda}$ 知, (iii) 成立. 再证(ii), 由(iii) 知, 对 $\forall j \in J$,

$$|Q_j| < \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} f(t) dt. \quad (1)$$

断言, $\{Q_j\}_{j \in J}$ 两两不交. 事实上, 对 $\forall i, j \in J$ 且 $i \neq j$, Q_i, Q_j 是 $D_{f,\lambda}$ 中的极大方体, 故 $Q_i \not\subset Q_j$ 且 $Q_j \not\subset Q_i$. 由此及 $Q_i, Q_j \in \mathcal{D}$ 知, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, 断言成立. 由断言及(1) 知,

$$\left| \bigcup_{j \in J} Q_j \right| = \sum_{j \in J} |Q_j| < \sum_{j \in J} \frac{1}{\lambda} \int_{Q_j} f(t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\bigcup_{j \in J} Q_j} f(t) dt \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

(ii) 成立. 最后证(i) 成立, 对 $\forall x \notin \bigcup_{j \in J} Q_j$, 由 $\{Q_j\}_{j \in J}$ 的构造知, 对 $\forall Q \in \mathcal{D}$ 且 $Q \ni x$,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f(t) dt \leq \lambda. \quad (2)$$

否则 $Q \in D_{f,\lambda}$, 从而 $x \in \bigcup_{j \in J} Q_j$, 矛盾. 由Lebesgue differentiation theorem 及(2) 知, 对a.e. $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \lim_{Q \ni x, |Q| \rightarrow 0^+} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t) dt \leq \lambda.$$

(i) 成立. 综上, Theorem 1.1 证毕. \square

1.2 一种挺奇怪的证明

该证明来自[3, Theorem 2.11]. 首先交代一下符号. \mathcal{D} 是二进方体全体, \mathcal{D}_k 是第 k 层二进方体. 对 $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$E_k f(x) := \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q f(t) dt \right] 1_Q(x).$$

E_k 算子是连续函数的离散化. 由此可以定义二进极大函数

$$M_d f(x) := \sup_{k \in \mathbb{Z}} |E_k f(x)|.$$

Theorem 1.4. 对于 E_k 和 M_d , 有如下两个结论:

(i) M_d 是弱(1, 1) 型算子;

(ii) 若 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则对 $a.e. x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k f(x) = f(x).$$

证明的关键是利用二进极大算子, 好吧, 还是有点不懂怎么想到的.

Proof of Theorem 1.1. 略.

□

2 Calderón-Zygmund Decomposition

暂时没有用到, 鸽!

References

- [1] A. Calderon and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, Acta Math. 88 (1952), 85–139.
- [2] S. Kislyakov, N. Kruglyak, Extremal Problems in Interpolation Theory, Whitney-Besicovitch Coverings, and Singular Integrals, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.
- [3] J. Duoandikoetxea, Fourier analysis, American Mathematical Soc., 2001.