Calderón-Zygmund Decomposition

February 7, 2020

Calderón-Zygmund Decomposition 由Calderon 和Zygmund 在[1] 中引入.

1 Calderón-Zygmund Lemma

Theorem 1.1 (Calderón-Zygmund Lemma)**.** *设f 是非负可积函数, 则对任意给定的正常数λ, 存在两两不交的二进方体序列$\{Q_j\}_{j\in J}$ 使得*

(i) 对$a.e.$ $x \notin \bigcup_{j\in J} Q_j$, $f(x) < \lambda$;

(ii) $|\bigcup_{j\in J} Q_j| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;

(iii) 对$\forall j \in J$,

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(x)dx < 2^n\lambda.$$

1.1 本人觉得很自然的证明

此证明来自[2, Lemma 1.2]. 在证明Calderón-Zygmund Lemma 之前, 首先回顾一下经典的Lebesgue differentiation theorem.

Theorem 1.2 (Lebesgue differentiation theorem)**.** *设$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则对$a.e.$ $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(t) - f(x)|dt = 0.$$

Remark 1.3. 显然对a.e. $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(t)dt = f(x).$$

1.2 一种挺奇怪的证明

该证明来自[3, Theorem 2.11]. 首先交代一下符号. $\mathcal{D}$ 是二进方体全体, $\mathcal{D}_k$ 是第k 层二进方体. 对$\forall\, k \in \mathbb{Z}, f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$E_k f(x) := \sum_{Q\in\mathcal{D}_k}\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q f(t)dt\right] 1_Q(x).$$

E_k 算子是连续函数的离散化. 由此可以定义二进极大函数

$$M_d f(x) := \sup_{k\in\mathbb{Z}} |E_k f(x)|.$$

Theorem 1.4. 对于E_k 和M_d, 有如下两个结论:

(i) M_d 是弱$(1,1)$ 型算子;

(ii) 若$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则对$a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{k\to\infty} E_k f(x) = f(x).$$

证明的关键是利用二进极大算子, 好吧, 还是有点不懂怎么想到的.

Proof of Theorem 1.1. 略 □

2 Calderón-Zygmund Decomposition

暂时没有用到, 鸽!

References

[1] A. Calderon and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, Acta Math. 88 (1952), 85–139.

[2] S. Kislyakov, N. Kruglyak, Extremal Problems in Interpolation Theory, Whitney-Besicovitch Coverings, and Singular Integrals, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

[3] J. Duoandikoetxea, Fourier analysis, American Mathematical Soc., 2001.