该 pdf 为 Fourier Analysis 书51–55页, 第三章第三节: The theorems of M. Riesz and Kolmogorov 相关内容补充.

## 1 Theorem 3.2(1) 以及 Hilbert 变换是弱 $(1,1)$ 的

**注 1.1.** *Fourier Analysis 书53页: 函数* $b,\ g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

*证明.* 已知对于非负 Schwartz (或 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$) 函数 $f$ 以及给定的 $\lambda > 0$

$$\{I_j\} \quad \text{两两不交且} \quad \Omega = \bigcup_j I_j; \tag{1}$$

$$|\Omega| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathcal{X})} < \infty \tag{2}$$

以及

$$\lambda < \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)\,dy \le 2\lambda \quad \forall j. \tag{3}$$

首先注意到, 对于任意的 $r \in \{1,\ 2\}$,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_j \frac{\mathbb{1}_{I_j}}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)\,dy\right\|_{L^r(\mathbb{R})} &\le 2\lambda \left\|\sum_j \mathbb{1}_{I_j}\right\|_{L^r(\mathbb{R})} && \text{((3) 式以及 } \lambda > 0) \\
&= 2\lambda\|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^r(\mathbb{R})} && \text{((1) 式)} \\
&\le 2\lambda|\Omega|^{1/r} < 2\lambda^{1-1/r}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/r}. && \text{((2) 式)}
\end{aligned}$$

从而 $\sum_j \frac{\mathbb{1}_{I_j}}{|I_j|}\int_{I_j} f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. 又 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$), 进一步可以得到

$$g = f\mathbb{1}_{(\Omega)^\complement} + \sum_j \frac{\mathbb{1}_{I_j}}{|I_j|}\int_{I_j} f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

以及

$$b = f - g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

□

**注 1.2.** *Fourier Analysis 书52页:*

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ |H(g)(x)|>\lambda/2\}|\le\frac{8}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx.$$

证明.

$$\begin{aligned}
|\{x\in\mathbb{R}:\ |H(g)(x)|>\lambda/2\}| &= \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\{x\in\mathbb{R}:\ |H(g)(x)|>\lambda/2\}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 dx\\
&\le \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\{x\in\mathbb{R}:\ |H(g)(x)|>\lambda/2\}}|H(g)(x)|^2\,dx\\
&\le \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\mathbb{R}}|H(g)(x)|^2\,dx\\
&= \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2\,dx && (\text{书 (3.4) 式})\\
&\le \frac{8}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}g(x)\,dx && (0\le g(x)\le 2\lambda)\\
&= \frac{8}{\lambda}\left[\int_{(\Omega)^\complement}f(x)\,dx+\sum_j\int_{I_j}\frac{\mathbb{1}_{I_j}(x)}{|I_j|}\int_{I_j}f(y)\,dy\,dx\right]\\
&= \frac{8}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx. && ((1)\ \text{式})
\end{aligned}$$

由于 $g\in L^1(\mathbb{R})$, 由积分对定义域的可数可加性 ([2, 定理 4.11]), 倒数第二个等号成立. □

**注 1.3.** *Fourier Analysis 书53页:*

$$|\Omega^*|\le\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

证明. 记 $\Omega^*:=\bigcup_j 2I_j$.

注意到 $|\Omega|\le\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ 且 $\Omega=\bigcup_j I_j$, $I_j$ 两两不交, 故

$$|\Omega^*|\le\sum_j|2I_j|=2\sum_j|I_j|=2|\Omega|\le\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

□

**注 1.4.** *Fourier Analysis 书53页: 对于* $b(x)=\sum_j b_j(x)$, *有*

$$|Hb(x)| \le \sum_j |H(b_j)(x)| \quad a.e.$$

*证明.* 若 $b(x)=\sum_j b_j(x)$ 为有限项求和, 由Hilbert变换 $H$ 在 $L^2(\mathcal{X})$ 上的线性性质易知, 对于几乎处处的 $x\in\mathbb{R}$,

$$|H(b)(x)| = \left|H\left(\sum_j b_j\right)(x)\right| = \left|\sum_j H(b_j)(x)\right| \le \sum_j |H(b_j)(x)|. \tag{4}$$

若 $b(x)=\sum_j b_j(x)$ 为无穷可数项求和, 不妨记 $b(x)=\sum_{j=1}^{\infty} b_j(x)$. 首先, 由 $b_j$ 的定义, 对于任意的 $j\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|b_j\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\le \left[\|f\mathbb{1}_{I_j}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)\,dy|I_j|^{1/2}\right]^2 \\
&\le \left[\|f\mathbb{1}_{I_j}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f\mathbb{1}_{I_j}\|_{L^2(\mathbb{R})}\right]^2 \qquad \text{(Hölder 不等式)} \\
&= 4\|f\mathbb{1}_{I_j}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

又对于任意的 $j\in\mathbb{N}$, $\operatorname{supp} b_j\subset I_j$ 且 $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 两两不交, 由上式, 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$ 有

$$\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty} b_j\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty}\|b_j\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le 4\sum_{j=n+1}^{\infty}\|f\mathbb{1}_{I_j}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

由 $\Omega=\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 两两不交以及 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$) 可知

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|f\mathbb{1}_{I_j}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|f\mathbb{1}_{\Omega}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty.$$

从而

$$\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty} b_j\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty$$

即当 $n\to\infty$ 时

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \to b \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

由 Hilbert 变换在 $L^2(\mathcal{X})$ 上的有界性 (书51页 (3.4) 式) 以及其线性性质知

$$Hb = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} H(b_j) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

从而, 存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足 $k \to \infty$ 时 $n_k \to \infty$, 使得, 对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$,

$$Hb(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} H(b_j)(x). \tag{5}$$

注意到, 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sum_{j=1}^{n_k} H(b_j)(x)\right| \le \sum_{j=1}^{n_k} |H(b_j)(x)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |H(b_j)(x)|. \tag{6}$$

由 (5) 和 (6) 可得, 对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$,

$$|Hb(x)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |H(b_j)(x)|. \tag{7}$$

综上, (4) 和 (7)完成了注记的证明. $\square$

**注 1.5.** *Fourier Analysis 书53页:“只需要证明”*

$$\sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} |H(b_j)(x))|\,dx \le C\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

*证明.* 记 $\Omega^* := \bigcup_j 2I_j$. 事实上, 若上式成立

$$\begin{aligned}
&|\{x\in\mathbb{R}:\ |H(b)(x)|>\lambda/2\}|\\
&\quad\le \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}+\frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}|H(b)(x)|\,dx && \text{(书中已证)}\\
&\quad\le \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}+\frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}\sum_j|H(b_j)(x)|\,dx && \Big(|Hb(x)|\le \textstyle\sum_j|b_j(x)|\Big)\\
&\quad= \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}+\frac{2}{\lambda}\sum_j\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}|H(b_j)(x)|\,dx && \text{(单调递增序列)}\\
&\quad\le \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}+\frac{2}{\lambda}\sum_j\int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j}|H(b_j)(x)|\,dx && (2I_j\subset\Omega^*)\\
&\quad\le \frac{(2+2C)\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\lambda}. && \text{(假设条件)}
\end{aligned}$$

□

**注 1.6.** *Fourier Analysis 书53页: 对于 $b_j$ 以及对于几乎处处的 $x\notin 2I_j$, 有*

$$Hb_j(x)=\frac{1}{\pi}\int_{I_j}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy.$$

*证明.* 注意到 $b_j(y)\neq 0$ 当且仅当 $y\in I_j$. 记 $I_j:=[c_j-s_j,c_j+s_j)$ 其中 $c_j\in\mathbb{R}$ 以及 $s_j\in(0,\infty)$. 由于 $b_j\in L^2(\mathcal{X})$ 且 $\operatorname{supp} b_j\subset I_j=[c_j-s_j,c_j+s_j)$, 故对于任意的 $x\notin 2I_j$ 以及 $y\in I_j$ 有 $|x-y|>s_j>0$, 由 Hilbert 变换在 $L^2(\mathbb{R})$ 上的定义可知, 对于任意的 $x\notin 2I_j$,

$$\begin{aligned}
\pi H(b_j)(x)&=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\\
&=\int_{|x-y|>s_j}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy=\int_{I_j}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy.
\end{aligned}$$

结论证毕. □

**注 1.7.** *Fourier Analysis 书53页: $b_j$ 积分为0 且*

$$\sum_j \int_{I_j} |b_j(x)|\,dx \le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

证明. 由 $b_j$ 定义

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} b_j(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left( f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)\,dy \right) \mathbb{1}_{I_j}(x)\,dx \\ &= \int_{I_j} f(x)\,dx - |I_j|\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)\,dy = 0.\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\int_{I_j} |b_j(x)|\,dx &= \int_{I_j} \left| f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)\,dy \right| dx \\ &\le \int_{I_j} |f(x)|\,dx + |I_j| \left| \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)\,dy \right| \\ &\le 2\int_{I_j} |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

由于 $I_j$ 两两不交, 故

$$\sum_j \int_{I_j} |b_j(x)|\,dx \le 2\int_{\Omega} |f(x)|\,dx \le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

□

**注 1.8.** *Fourier Analysis 书53页:*

$$|y - c_j| \le |I_j|/2 \quad \text{并且} \quad |x - y| \ge |x - c_j|/2.$$

证明. 由于 $y \in I_j$ 且 $c_j$ 为 $I_j$ 中心, 故显然有 $|y - c_j| \le |I_j|/2$.

另一方面, 由三角不等式以及 $x \notin 2I_j$ 有

$$|x - c_j| \le |x - y| + |y - c_j| \le |x - y| + |I_j|/2 \le |x - y| + |x - y|.$$

综上, 结论成立. □

**注 1.9.** *Fourier Analysis 书53页最后: 弱 $(1,1)$ 不等式对任意的实值以及复值 Schwarz 函数 (或 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$) 仍然成立.*

证明. 首先考虑实值情况. 对于任意的 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$), 不妨令 $f=f_1-f_2$ 其中

$$f_1 := f\cdot \mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)\geq 0\}} \quad \text{以及} \quad f_1 := -f\cdot \mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)<0\}}.$$

则 $f_1$, $f_2$ 均为非负函数且 $f_1$, $f_2\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$.

由 Theorem 3.2(1) 可知, 存在不依赖于 $f$ 的常数 $C$ 使得, 对于任意的 $\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ |H(f_1)(x)|>\lambda/2\}|\leq \frac{C}{\lambda}\|f_1\|_{L^1(\mathcal{X})}=\frac{C}{\lambda}\|f\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)\geq 0\}}\|_{L^1(\mathcal{X})}$$

以及

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ |H(f_2)(x)|>\lambda/2\}|\leq \frac{C}{\lambda}\|f_2\|_{L^1(\mathcal{X})}=\frac{C}{\lambda}\|f\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)<0\}}\|_{L^1(\mathcal{X})}.$$

故

$$\begin{aligned}
&|\{x\in\mathbb{R}:\ |H(f)(x)|>\lambda\}|\\
&\quad\leq |\{x\in\mathbb{R}:\ |H(f_1)(x)|+|H(f_2)(x)|>\lambda\}|\\
&\quad\leq |\{x\in\mathbb{R}:\ |H(f_1)(x)|>\lambda/2\}|+|\{x\in\mathbb{R}:\ |H(f_2)(x)|>\lambda/2\}|\\
&\quad\leq \frac{C}{\lambda}\left[\|f\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)\geq 0\}}\|_{L^1(\mathcal{X})}+\|f\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}:\ f(x)<0\}}\|_{L^1(\mathcal{X})}\right]\\
&\quad= \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathcal{X})}.
\end{aligned}$$

接下来考虑复值情况 (以下讨论当 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 被替换为 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ 时结论仍成立). 不妨设 $f=u+iv$, 其中 $u$, $v$ 均为实值 Schwartz 函, $i$ 为虚数单位. 事实上, 注意到 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 则有 $\bar{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 故

$$u=\frac{f+\bar{f}}{2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{以及} \quad v=\frac{f-\bar{f}}{2i}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

首先

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |u(x)+iv(x)|\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|u(x)|^2+|v(x)|^2}\,dx \\ &\gtrsim \int_{\mathbb{R}} |u(x)|+|v(x)|\,dx \\ &\sim \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}+\|v\|_{L^1(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

上式隐含的正常数不依赖于 $f$. 根据已知的关于实值 Schwartz 函数的结论,

$$\begin{aligned}&|\{x\in\mathbb{R}:\ |H(f)(x)|>\lambda\}| \\ &\quad\le |\{x\in\mathbb{R}:\ |H(u)(x)|+|H(v)(x)|>\lambda\}| \\ &\quad\le |\{x\in\mathbb{R}:\ |H(u)(x)|>\lambda/2\}|+|\{x\in\mathbb{R}:\ |H(v)(x)|>\lambda/2\}| \\ &\quad\lesssim \frac{1}{\lambda}\left[\|u\|_{L^1(\mathcal{X})}+\|v\|_{L^1(\mathcal{X})}\right] \\ &\quad\lesssim \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathcal{X})},\end{aligned}$$

上式隐含的正常数不依赖于 $f$ 和 $\lambda$. 综上所述, 结论得证. □

以上部分为所有关于 Theorem 3.2(1) 证明过程相关步骤的补充. 以下由该定理将 Hilbert 变换延拓到 $L^1(\mathbb{R})$ 上且是弱 $(1,1)$ 的.

**注 1.10.** *由 Fourier Analysis 书 51-52 页 Theorem 3.2(1), Hilbert 变换能够延拓到 $L^1(\mathbb{R})$ 上且是弱 $(1,1)$ 的, 该弱 $(1,1)$ 有界常数与 Theorem 3.2(1) 得到的有界性常数一致. (测度版本)*

*证明.* 对于任意的 $f\in L^1(\mathbb{R})$, 取 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$) 满足

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n = f \text{ in } L^1(\mathbb{R}). \tag{8}$$

从而 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $L^1(\mathbb{R})$ 中的 Cauchy 列. 由 Theorem 3.2(1) 可知, 对于任意的 $\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}&|\{x\in\mathbb{R}:|H(\phi_n)(x)-H(\phi_m)(x)|>\epsilon\}| \\ &\quad\le \frac{C_1\|\phi_n-\phi_m\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\epsilon}\to 0 \quad \text{as} \quad n,\ m\to\infty\end{aligned}$$

即 $\{H(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为依测度的 Cauchy 列. 由 [2, 定理 3.16] 以及 [2, 定理 3.13], 在几乎处处意义下存在唯一的可测函数 $g$ 使得 $H(\phi_n)$ 依测度收敛于 $g$. 综上, 对于几乎处处的 $x\in\mathbb{R}$, 定义

$$H(f)(x) := g(x).$$

上述 $H(f)$ 的定义不依赖于 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的选取即 $H(f)$ 是良定义的. 事实上, 另取 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$) 满足 (8). 下证 $H(\varphi_n)$ 依测度收敛于 $g$. 对于任意的 $\epsilon\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
&|\{x\in\mathbb{R}: |g(x)-H(\varphi_n)(x)|>\epsilon\}| \\
&\quad\le |\{x\in\mathbb{R}: |g(x)-H(\phi_n)(x)|>\epsilon/2\}| \\
&\qquad + |\{x\in\mathbb{R}: |H(\varphi_n)(x)-H(\phi_n)(x)|>\epsilon/2\}| \\
&\quad\le |\{x\in\mathbb{R}: |g(x)-H(\phi_n)(x)|>\epsilon/2\}| \\
&\qquad + \frac{2C_1\|\varphi_n-\phi_n\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\epsilon}\to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty. \qquad (g \text{ 的定义以及 Theorem 3.2(1)})
\end{aligned}$$

故 $H(\varphi_n)$ 依测度收敛于 $g$ 即 $H(f)$ 不依赖于 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的选取.

最后, 以下说明 Hilbert 变换的弱 $(1,1)$ 有界常数与 Theorem 3.2(1) 中得到的有界常数一致. 不妨记 Theorem 3.2(1) 中得到的有界常数为 $C_1$, 对于任意的 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 以及 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (8), 任意的 $\lambda\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}
&|\{x\in\mathbb{R}: |H(f)(x)|>\epsilon\}| \\
&\quad\le |\{x\in\mathbb{R}: |H(f)(x)-H(\phi_n)(x)|>\lambda\epsilon\}| \\
&\qquad + |\{x\in\mathbb{R}: |H(\phi_n)(x)|>(1-\lambda)\epsilon\}| \\
&\quad\le |\{x\in\mathbb{R}:\ |H(f)(x)-H(\phi_n)(x)|>\lambda\epsilon\}| + \frac{C_1\|\phi_n\|_{L^1(\mathbb{R})}}{(1-\lambda)\epsilon} \qquad (\text{Theorem 3.2(i)}) \\
&\quad\to 0 + \frac{C_1\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{(1-\lambda)\epsilon} \quad \text{as} \quad n\to\infty. \qquad (L^1(\mathbb{R}) \text{ 上 Hilbert 变换的定义})
\end{aligned}$$

由 $\lambda\in(0,1)$ 的任意性, 令 $\lambda\to 0^+$ 则有

$$|\{x\in\mathbb{R}: |H(f)(x)>\epsilon|\}| \le \frac{C_1\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\epsilon}$$

即 $H$ 的弱 $(1,1)$ 有界常数与 Theorem 3.2(1) 中的有界常数一致. $\square$

**注 1.11.** *定义在 $L^1(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换 ($L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 版本).*

*证明.* 首先, 以下给出 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 空间的相关定义以及性质. [3, Chapter 1.1.1]

对于 $\mathbb{R}$ 上的可测函数 $f$, 对于任意的 $\lambda \in [0,\infty)$, 定义函数 $f$ 的分布函数 $d_f(\lambda)$ 为

$$d_f(\lambda) := |\{x \in \mathbb{R} : \ |f(x)| > \lambda\}|.$$

$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 定义为所有满足 $\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} < \infty$ 的可测函数全体, 其中

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} &:= \inf\{C > 0 : \ d_f(\lambda) \leq \frac{C}{\lambda} \quad \text{对于所有的} \quad \lambda > 0\} \\ &= \sup\{\lambda d_f(\lambda) : \ \lambda > 0\}.\end{aligned}$$

两个 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 中的函数称为相等的, 若这两个函数依侧度几乎处处相等.

以下列举 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 中函数的部分性质:

(1) 对于任意的 $k \in \mathbb{C}$ 以及 $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$,

$$\|kf\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} = |k|\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})};$$

(2) 对于任意的 $f,\ g \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$,

$$\|f+g\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \leq 2\left(\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\right);$$

(3) 对于任意的 $f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$,

$$\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{依侧度几乎处处};$$

(4) 对于任意的 $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

即 $L^1(\mathbb{R}) \subset L^{1,\infty}(\mathbb{R})$. 另一方面, 令 $h(x) := |x|^{-1}$ 则有 $h \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 且 $h \notin L^1(\mathbb{R})$.

(5) $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 是完备的.

接下来, 定义 $L^1(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换. 对于任意的 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 取 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$) 满足

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = f \text{ in } L^1(\mathbb{R}). \tag{9}$$

从而 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $L^1(\mathbb{R})$ 中的 Cauchy 列. 由 Theorem 3.2(1) 可知, 对于任意的 $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\epsilon\,|\{x \in \mathbb{R} : |H(\phi_n)(x) - H(\phi_m)(x)| > \epsilon\}| \\
&\quad \le C_1 \|\phi_n - \phi_m\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{as} \quad n,\ m \to \infty.
\end{aligned}$$

由 $\epsilon$ 的任意性知

$$\begin{aligned}
\|H(\phi_n) - H(\phi_m)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} &= \sup_{\epsilon>0} \epsilon\,|\{x \in \mathbb{R} : |H(\phi_n)(x) - H(\phi_m)(x)| > \epsilon\}| \\
&\le C_1 \|\phi_n - \phi_m\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{as} \quad n,\ m \to \infty
\end{aligned}$$

即 $\{H(\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 中的 Cauchy 列. 由 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 的完备性可知, 存在 $g \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 使得 $H(\phi_n)$ 在 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 中收敛于 $g$. 综上, 定义

$$H(f) := g \quad \text{in} \quad L^{1,\infty}(\mathbb{R}).$$

上述 $H(f)$ 的定义不依赖于 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的选取即 $H(f)$ 是良定义的. 事实上, 另取 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$) 满足 (9). 下证 $H(\varphi_n)$ 在 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 中收敛于 $g$. 对于任意的 $\epsilon \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned}
&\epsilon|\{x \in \mathbb{R} : |g(x) - H(\varphi_n)(x)| > \epsilon\}| \\
&\quad \le \epsilon|\{x \in \mathbb{R} : |g(x) - H(\phi_n)(x)| > \epsilon/2\}| \\
&\qquad + \epsilon|\{x \in \mathbb{R} : |H(\varphi_n)(x) - H(\phi_n)(x)| > \epsilon/2\}| \\
&\quad \le 2\|g - H(\phi_n)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} + 2C_1 \|\varphi_n - \phi_n\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

故 $H(\varphi_n)$ 在 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 中收敛于 $g$ 即 $H(f)$ 不依赖于 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的选取.

最后, 以下说明 Hilbert 变换的弱 $(1, 1)$ 有界常数与 Theorem 3.2(1) 中得到的有界常数一致. 不妨记 Theorem 3.2(1) 中得到的有界常数为 $C_1$, 对

于任意的 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 以及 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 (9), 任意的 $\lambda\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}
&\epsilon\,|\{x\in\mathbb{R}:|H(f)(x)|>\epsilon\}|\\
&\quad\le \epsilon\,|\{x\in\mathbb{R}:|H(f)(x)-H(\phi_n)(x)|>\lambda\epsilon\}|\\
&\qquad\quad+\epsilon\,|\{x\in\mathbb{R}:|H(\phi_n)(x)|>(1-\lambda)\epsilon\}|\\
&\quad\le \frac{1}{\lambda}\|H(f)-H(\phi_n)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}+\frac{C_1\|\phi_n\|_{L^1(\mathbb{R})}}{1-\lambda}\\
&\quad\to 0+\frac{C_1\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{1-\lambda}\quad\text{as}\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

由 $\epsilon\in(0,\infty)$ 以及 $\lambda\in(0,1)$ 的任意性, 令 $\lambda\to 0^+$ 则有

$$\|H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\le C_1\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

即 $H$ 的弱 $(1,1)$ 有界常数与 Theorem 3.2(1) 中的有界常数一致. $\square$

接下来说明分别通过 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 或者 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中的稠密性得到的 $L^1(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换在几乎处处意义下 (或 $L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 中) 是等价的. 首先, 记 $H_S$ 为通过 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中的稠密得到的 $L^1(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换; $H_{(2)}$ 为通过 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中的稠密得到的 $L^1(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换且对于任意的 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ 以及几乎处处的 $x\in\mathbb{R}$,

$$H_{(2)}(f)(x):=\mathcal{F}^{-1}[-i\,\mathrm{sgn}\,(\cdot)\mathcal{F}(f)(\cdot)](x).$$

注意到 $\mathcal{S}(\mathbb{R})\subset L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, 从而对于任意的 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 以及几乎处处的 $x\in\mathbb{R}$,

$$H_{(2)}(f)(x)=H_S(f)(x).$$

由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在 $L^1(\mathbb{R})$ 中稠且 $H_S$ 和 $H_{(2)}$ 均是弱 $(1,1)$ 的, 从而对于任意的 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 以及 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=f$ in $L^1(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
&\|H_{(2)}(f)-H_S(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\\
&\quad\lesssim \|H_{(2)}(f)-H_{(2)}(\varphi_n)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}+\|H_{(2)}(\varphi_n)-H_S(\varphi_n)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\\
&\qquad\quad+\|H_S(\varphi_n)-H_S(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\\
&\quad\lesssim \|f-\varphi_n\|_{L^1(\mathbb{R})}\to 0\quad\text{as}\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

即

$$H_{(2)}(f) = H_S(f) \quad \text{几乎处处 (或 } L^{1,\infty}(\mathbb{R})).$$

综上所述, 记 $H_2$ 为 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换, 则有对于任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 有, 对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$,

$$H_2(f)(x) = H_{(2)}f(x) = H_S(f)(x).$$

# 2 Theorem 3.2(2) 以及 Hilbert 变换是强 $(p, p)$ 的

## 2.1 $p \in (1, 2)$ 时的情况

此时需要 Marcinkiewicz 插值定理 (详见 Fourier Analysis 书 28 页 Theorem 2.4).

**定理 2.1.** *(Marcinkiewicz Interpolation). Let $(X, \mu)$ and $(Y, \upsilon)$ be measure spaces, $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, and let $T$ be a sublinear operator from $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ to the measurable functions on $Y$ that is weak $(p_0, p_0)$ and weak $(p_1, p_1)$. Then $T$ is strong $(p, p)$ for $p_0 < p < p_1$.*

首先给出 Hilbert 变换在 $L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$ 上的定义. 事实上, 分别记 $L^1(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换为 $H_1$, $L^2(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换为 $H_2$. 由 Hilbert 变换在 $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$ 上的定义可知对于任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 以及几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$,

$$H_1 f(x) = H_2 f(x). \tag{10}$$

定义 $L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换如下: 对于任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$ 以及任意的 $u \in L^1(\mathbb{R})$, $v \in L^2(\mathbb{R})$ 满足 $f = u + v$ 点点成立, 对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$ 定义 Hilbert 变换

$$H(f)(x) := H_1(u)(x) + H_2(v)(x). \tag{11}$$

上述 Hilbert 变换是良定义的. 事实上, 对于任意的 $u_1$, $u_2 \in L^1(\mathbb{R})$ 以及 $v_1$, $v_2 \in L^2(\mathbb{R})$ 满足, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = u_1(x) + v_1(x) = u_2(x) + v_2(x).$$

由上式注意到

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

从而由 (10) 以及 $H_1$ 和 $H_2$ 的线性性质可知, 对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&H_1(u_1)(x) + H_2(v_1)(x) \\
&\quad = H_1[(u_1 - u_2) + u_2](x) + H_2[v_2 - (v_2 - v_1)](x) \\
&\quad = [H_1(u_1 - u_2)(x) - H_2(v_2 - v_1)(x)] + H_1(u_2)(x) + H_2(v_2)(x) \\
&\quad = H_1(u_2)(x) + H_2(v_2)(x).
\end{aligned}$$

综上, Hilbert 变换在 $L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$ 上是良定义的.

由 (11) 给出的 Hilbert 变换定义以及 Marcinkiewicz 插值定理, 当 $1 < p < 2$ 时, Hilbert 变换是强 $(p,p)$ 的 $(L^p(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R}))$. 由此对于任意的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或 $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$), Theorem 3.2(2) 自然成立.

## 2.2 $p \in (2, \infty)$ 时的情况

本节证明 $p \in (2, \infty)$ 时 Theorem 3.2(2) 成立, 并由该定理定义 $L^p(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换且证明其是强 $(p,p)$ 的.

首先回顾以下两个定理以及简单函数定义: 称 $f$ 为一个简单函数 (simple function) 若 $f$ 为如下的有限求和

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{E_k}(x),$$

其中, 对于任意的 $k \in \{1, \ldots, N\}$, $a_k$ 为常数, $E_k$ 为测度有限的可测集.

**定理 2.2.** *[4, Theorem 4.1 in Section 4 of Chapter 1] 对于任意定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数 $f$, 存在一列非负递增的简单函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足*

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \quad \textit{and} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x), \ \textit{for all } x.$$

**定理 2.3.** *([5, Lemma 4.2 in Section 4 of Chapter 1] 的一个变形) 令 $1 \leq p, q \leq \infty$ 互为共轭指标. 设可测函数 $g$ 满足, 对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)\, dx \right| < \infty$$

以及
$$\sup_{f\in L^2(\mathbb{R})\cap L^p(\mathbb{R}),\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\le 1}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx\right| = M < \infty.$$
则 $g\in L^q(\mathbb{R})$ 且 $\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}=M$.

证明. 若 $g(x)=0$ a.e., 定理显然成立. 以下设 $|\{x\in\mathbb{R}:\ |g(x)|>0\}|>0$.

首先考虑 $1<p\le\infty$ 时的情况 ($q\in[1,\infty)$). 由定理 2.2, 存在一列递增的非负简单函数 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}$, $0\le g_n(x)\le|g(x)|$ 以及 $\lim_{n\to\infty}g_n(x)=|g(x)|$. 记

$$\alpha(g)(x)=\begin{cases}0 & \text{if } g(x)=0;\\ |g(x)|/g(x) & \text{if } g(x)\ne 0.\end{cases}$$

不妨设, 对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, $\|g_n\|_{L^q(\mathbb{R})}>0$, 取

$$f_n(x)=\frac{g_n(x)^{q-1}\alpha(g)(x)}{\|g_n\|_{L^q(\mathbb{R})}^{q-1}}.$$

显然有 $f_n\in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})}=1$. 另一方面

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,dx=\frac{\int_{\mathbb{R}} g_n(x)^{q-1}|g(x)|\,dx}{\|g_n\|_{L^q(\mathbb{R})}^{q-1}}\ge\|g_n\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

由定理条件可知 $\|g_n\|_{L^q(\mathbb{R})}\le M$. 由 Levi 引理 (非负渐升函数列积分定理)

$$\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^q\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)^q\,dx\le M^q$$

即 $g\in L^q(\mathbb{R})$ 且 $\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}\le M$. 由此及 Hölder 不等式可知, 对于任意的 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 且满足 $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\le 1$, 有

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx\right|\le\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}\le\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

即 $M\le\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$. 综上 $M=\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$.

当 $p=1$ 时, 记 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递增且测度有限的可测集列满足 $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$, 定义
$$E_n:=\{x\in\mathbb{R}:\ |g(x)|>M\}\cap D_n.$$

若 $|E_n| \neq 0$, 取 $f_n(x) = \alpha(g)(x)\mathbb{1}_{E_n}(x)/|E_n|$, 显然 $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$. 由定理条件有

$$M \geq \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,dx = \frac{1}{|E_n|}\int_{E_n} |g(x)|\,dx > M.$$

矛盾, 从而 $|E_n| = 0$. 注意到 $E_n$ 单调递增, 故

$$|\{x \in \mathbb{R} :\ |g(x)| > M\}| = \left|\lim_{n\to\infty} E_n\right| = \lim_{n\to\infty} |E_n| = 0$$

即 $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ 且 $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M$. 从而, 对于任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 且满足 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 1$, 有

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx\right| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

由 $f$ 的任意性知 $M \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, 综上可知 $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = M$. □

**注 2.4.** *Fourier Analysis* 书 *52* 页*: Theorem 3.2(2)* 当 $p \in (2,\infty)$ 时成立*.*

证明. 设 $p \in (2,\infty)$, 记 $p'$ 为 $p$ 的共轭指标满足 $1/p+1/p' = 1$, 则 $p' \in (1,2)$.

由上一节中的讨论记 $C_{p'}$ 为 Hilbert 变换在 $L^{p'}(\mathbb{R})$ 上的有界性指标. 对于任意的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 以及任意的 $g \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^{p'}(\mathbb{R})$ 有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} H(f)(x)g(x)\,dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)H(g)(x)\,dx\right| && \text{((3.6) 式)}\\
&\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|H(g)\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} && \text{(Hölder 不等式)}\\
&\leq C_{p'}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} < \infty. && \text{(Hilbert 变换在 } L^{p'}(\mathbb{R})\text{上的有界性)}
\end{aligned}$$

由定理 2.3 则有

$$\|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_{p'}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

注记得证. □

**注 2.5.** *Fourier Analysis* 书*54*页*:* 定义在 $L^p(\mathbb{R})$ $(2 \leq p < \infty)$ 上的 *Hilbert* 变换*.* 为了方便起见, 注记证明中记 $C_p$ 为 *Theorem 3.2(2)* 中相关于指标 $p \in (2,\infty)$ 得到的有界性常数*.*

证明. 当 $p \in (2,\infty)$ 时, 对于任意的 $f \in L^p(\mathbb{R})$, 取 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或者 $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$) 满足

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = f \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}). \tag{12}$$

由 (12), Theorem 3.2(2) 以及 $L^p(\mathbb{R})$ 的完备性可知 $\{H(\phi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $L^p(\mathbb{R})$ 中的收敛列. 定义

$$H(f) := \lim_{n\to\infty} H(\phi_n) \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}).$$

上述给出的 Hilbert 变换是良定义的: 另取序列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或者 $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$) 满足 (12), 从而

$$\begin{aligned} \|H(f) - H(\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\le \|H(f) - H(\phi_n)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|H(\phi_n) - H(\varphi_n)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\le \|H(f) - H(\phi_n)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\quad + C_p\|\phi_n - \varphi_n\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

故 $H(f)$ 的定义不依赖于收敛序列的选取. 另一方面, 对于任意的 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 以及 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或 $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$) 满足 (12),

$$\begin{aligned} \|H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\le \|H(f) - H(\phi_n)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|H(\phi_n)\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\le \|H(f) - H(\phi_n)\|_{L^p(\mathbb{R})} + C_p\|\phi_n\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\to C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \text{as} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

即上述定义的 $L^p(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换是强 $(p,p)$ 的且其有界性常数与 Theorem 3.2(2) 得到的有界性常数一致.

最后, 记 $H_S$ 和 $H_{(2)}$ 分别为通过 Schwartz 函数空间或者 $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密延拓得到的定义在 $L^p(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换, 以下说明两种定义在几乎处处意义下等价. 事实上, 由于 $H_S$ 和 $H_{(2)}$ 限制在 Schwartz 空间上在几乎处处意义下等价, 同时 $H_S$ 和 $H_{(2)}$ 均是强 $(p,p)$ 的, 由 Schwartz 空间在 $L^p(\mathbb{R})$ 中的稠密性, 类似于 $p=1$ 时的证明, $H_S$ 和 $H_{(2)}$ 在几乎处处意义下是等价的. □

当 $1 \leq p < \infty$ 时, 对于任意的 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 以及 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (或者 $L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$) 满足

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = f \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}).$$

从而 $H(\phi_n)$ 依测度收敛于 $H(f)$. 故由 [2, 定理 3.17] 知, 存在子列 $\{\phi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 子列的选取依赖于 $f$, 满足, 对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k\to\infty} H(\phi_{n_k})(x) = H(f)(x).$$

**注 2.6.** *Fourier Analysis 书54页: 记 $C_p$ 为 Hilbert 变换在 $L^p(\mathbb{R})$ 上的有界性指标 ($p \in (1, \infty)$), 则有*

$$C_p = O(p) \quad as \quad p \to \infty, \quad and \quad C_p = O((p-1)^{-1}) \quad as \quad p \to 1.$$

以下定理来自[1, Theorem 4.1]

**定理 2.7.** *$H$ 为 Hilbert 变换, 则*

$$\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} = \begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2p}) & 1 < p \leq 2; \\ \cot(\frac{\pi}{2p}) & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

*注记 2.3 证明.* 当 $2 < p < \infty$ 时, $\frac{\pi}{2p} \in (0,1)$, 从而有 $\tan(\frac{\pi}{2p}) > \frac{\pi}{2p}$. 此时

$$\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} = \cot(\frac{\pi}{2p}) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2p})} < \frac{2p}{\pi}.$$

另一方面, 当 $p \in (1,2)$ 时, 记 $p'$ 为 $p$ 的共轭指标, 故有

$$\|H\|_{L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})} = \|H\|_{L^{p'}(\mathbb{R})\to L^{p'}(\mathbb{R})} < \frac{2p'}{\pi} = \frac{2p}{\pi(p-1)}.$$

综上, 注记得证. □

**注 2.8.** *Fourier Analysis 书54页: 当 $p = 1$ 或 $p = \infty$ 时, Theorem 3.2(2) 不成立.*

*证明.* 事实上, 注意到 $\mathbb{1}_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 且 $\mathbb{1}_{[0,1]} \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. 从而, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
H(\mathbb{1}_{[0,1]})(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)}{y}\, dy \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \left[ \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)}{y}\, dy + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)}{y}\, dy \right].
\end{aligned}
$$

当 $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ 时,

$$
\pi H(\mathbb{1}_{[0,1]})(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{1}{y}\, dy = \ln \frac{|x|}{|x-1|}.
$$

当 $x \in (0,1)$ 时,

$$
\begin{aligned}
\pi H(\mathbb{1}_{[0,1]})(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \left[ \int_{\epsilon}^{x} \frac{1}{y}\, dy + \int_{x-1}^{-\epsilon} \frac{1}{y}\, dy \right] \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left[ \ln \frac{|x|}{\epsilon} + \ln \frac{\epsilon}{|x-1|} \right] \\
&= \ln \frac{|x|}{|x-1|}.
\end{aligned}
$$

当 $x \to +\infty$ 时 $\frac{1}{x} \to 0$, 从而

$$
\ln \frac{x}{x-1} = -\ln(1 - \frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}.
$$

由上述等价性可知 $H(\mathbb{1}_{[0,1]})$ 在 $x$ 足够大时, 消逝性质与 $1/x$ 类似, 从而 $H(\mathbb{1}_{[0,1]}) \notin L^1(\mathbb{R})$. 另一方面, 注意到当 $x \to 1$ 时 $H(\mathbb{1}_{[0,1]}) \to \infty$ 即 $H(\mathbb{1}_{[0,1]}) \notin L^\infty(\mathbb{R})$. □

**注 2.9.** *Fourier Analysis 书55页: 对于任意的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $H(f) \in L^1(\mathbb{R})$ 当且仅当 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 0$.*

*证明.* $\Rightarrow$: 首先证明, 对于任意的 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f)$ 为连续函数. 事实上, 对于任意的 $\xi \in \mathbb{R}$ 易知 $|f(y)e^{-2\pi i \xi \cdot y}| = |f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$. 由控制收敛定

理, 对于任意的 $\xi_0 \in \mathbb{R}$ 以及 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0$, 有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f)(\xi_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi_n \cdot y}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi_n \cdot y}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi_0 \cdot y}\, dy = \mathcal{F}(f)(\xi_0).
\end{aligned}$$

故 $\mathcal{F}(f)$ 为连续函数.

由于 $H(f) \in L^1(\mathbb{R})$ 且 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 故 $\mathcal{F}(H(f))$, $\mathcal{F}(f)$ 均为连续函数. 另一方面, 由书 (3.4) 上的式子可知, 对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(H(f))(x) = -i \operatorname{sgn}(x) \mathcal{F}(f)(x).$$

上式左侧为连续函数, 上式右侧在零点以外区间上连续, 故对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(H(f))(x) = -i \operatorname{sgn}(x) \mathcal{F}(f)(x).$$

从而上式右侧在零点连续, 从而 $\mathcal{F}(f)(0) = 0$, 即 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 0$.

$\Leftarrow$: 由于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 知 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 且 $H(f) \in L^2(\mathbb{R})$. 另一方面, 由于 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 0$, 故

$$\begin{aligned}
xH(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{xf(y)}{x-y}\, dy \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y)\, dy + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{yf(y)}{x-y}\, dy \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{yf(y)}{x-y}\, dy = H(yf(y))(x).
\end{aligned}$$

注意到 $yf(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 故 $H(yf(y)) \in L^2(\mathbb{R})$ 即 $xH(f)(x) \in L^2(\mathbb{R})$. 从而

$$\int_{\mathbb{R}} |H(f)(x)|\, dx \le \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\, dx \right)^{1/2} \left[ \int_{\mathbb{R}} (1+x^2) |H(f)(x)|^2\, dx \right]^{1/2} < \infty.$$

因此 $H(f) \in L^1(\mathbb{R})$.

综上所述, 注记得证. $\square$

[1] S. K. Pichorides, On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov, Studia Math. 44 (1972), 165–179.

[2] 周民强, 实变函数论, 第二版, 北京大学出版社, 2008.

[3] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Graduate Texts in Mathematics, 249, Third Edition, Springer, New York, 2014.

[4] E. M. Stein and R. Shakarchi, Real Analysis, Princeton Lectures in Analysis, 3, Measure theory, integration, and Hilbert spaces, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[5] E. M. Stein and R. Shakarchi, Functional Analysis, Princeton Lectures in Analysis, 4, Introduction to further topics in analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.