A_p权基本性质

Xiaosheng Lin

2021 年 1 月 31 日

本文中可测集均指Lebesgue 可测集. 设 w 是 $\mathbb{R}^d$ 上一个非负的局部可积函数. 任取可测集 E, 记 $w(E) := \int_E w(x)\,dx$.

Definition 1. 设 $p \in [1,\infty)$. w 是 $\mathbb{R}^d$ 上一个非负的局部可积函数.称 w 是 A_p 权函数, 如果 w 满足如下条件:

(i) 当 $p \in (1,\infty)$时

$$[w]_{A_p} := \sup_{Q\subseteq\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right]\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q [w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right\}^{p-1} < \infty.$$

(ii) 当 $p = 1$ 时

$$[w]_{A_1} := \sup_{Q\subseteq\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right]\|w^{-1}\|_{L^\infty(Q)} < \infty.$$

此外, 定义 $A_\infty := \cup_{p\in[1,\infty)} A_p$.

Definition 2. 设 $p \in (0,\infty)$, $w \in A_\infty$. 定义 $L^p_w(\mathbb{R}^d)$ 为满足如下条件的可测函数 f 全体

$$\|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^d)} := \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definition 3. 设 $p \in (0,\infty)$, $w \in A_\infty$. 定义 $L^{p,\infty}_w(\mathbb{R}^d)$ 为满足如下条件的可测函数 f 全体

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_w(\mathbb{R}^d)} := \sup_{\lambda>0} \lambda[w(\{x \in \mathbb{R}^d :\ Mf(x) > \lambda\})]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

其中 M 为关于方块的非中心极大函数, 即

$$Mf(x) := \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy.$$

研究 A_p 权的初始动机是为了让极大算子 M 在 $L^1_w(\mathbb{R}^d)$ 上弱有界和在 $L^p_w(\mathbb{R}^d)$ 上强有界, 更具体的细节参见[1, p. 500]和[2, p. 133].

A_p 权有如下重要性质.

Proposition 4. ([1, Proposition 7.1.5]) 设 $w \in A_p$, $p \in [1, \infty)$, 则

(i) (单调性)若 $1 \le p < q < \infty$, 则 $[w]_{A_q} \le [w]_{A_p}$. 从而 $A_p \subseteq A_q$.

(ii) (等价刻画)

$$[w]_{A_p} = \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^d} \sup_{\substack{f \in L^p_w(Q) \\ \int_Q |f(t)|^p w(t)\,dt > 0}} \frac{\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)|dt\right]^p}{\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(t)|^p w(t)\,dt}.$$

(iii) (dual weight)设 $p \in (1, \infty)$. 则 $w \in A_p$ 当且仅当 $w^{1-p'} \in A_{p'}$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(iv) (双倍测度性质) $\forall \lambda > 1$ 及对任意的方块 $Q \subseteq \mathbb{R}^d$, 有

$$w(\lambda Q) \le \lambda^{dp} [w]_{A_p} w(Q),$$

其中 λQ 表示将 Q 同中心扩大 λ 倍得到的方块.

A_p 权的双倍测度性质是十分重要的性质, 后面有与之相对应的逆双倍测度性质. 关于 A_p 权的第一个重要定理就是极大算子的有界性.

Theorem 5. ([1, Theorem 7.1.9])

(i) 设 $w \in A_1$, 则

$$\|M\|_{L^1_w(\mathbb{R}^d) \to L^{1,\infty}_w(\mathbb{R}^d)} \le 3^d [w]_{A_1}.$$

(ii) 设 $w \in A_p, p \in (1, \infty)$, 则存在常数 $C_{d,p}$ 使得

$$\|M\|_{L^p_w(\mathbb{R}^d) \to L^p_w(\mathbb{R}^d)} \le C_{d,p} [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}.$$

第二个重要的定理是逆Hölder 不等式.

Theorem 6. ([1, Theorem 7.2.2]) 设 $w \in A_p$, $p \in [1, \infty)$. 则存在只依赖于 d, p 和 $[w]_{A_p}$ 的正常数 C 和 γ, 使得对任意的方块 $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ 有

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q [w(t)]^{1+\gamma}\,dt\right\}^{\frac{1}{1+\gamma}} \le \frac{C}{|Q|}\int_Q w(t)\,dt.$$

上述不等式称为逆Hölder 不等式是因为上述不等式的反向由Hölder 不等式容易得到. 逆Hölder 不等式有下面两个重要推论.

Proposition 7. ([1, Corollary 7.2.6]) 设 $p \in (1, \infty)$, 则

$$A_p = \bigcup_{q \in (1,p)} A_q$$

Proposition 8. ([1, Proposition 7.2.8]) 设 $w \in A_p$, $p \in [1, \infty)$. 则存在常数 $\delta \in (0, 1)$ 和 $C_1 > 0$, 其中 δ 和 C_1 只依赖于 d, p 和 $[w]_{A_p}$, 使得对任意的方块 $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 Q 的可测子集 S 有

$$\frac{w(S)}{w(Q)} \leq C_1 \left(\frac{|S|}{|Q|} \right)^{\delta}.$$

由上述命题可以直接得到下述结论

Proposition 9. (逆双倍测度性质)设 $w \in A_p$, $p \in [1, \infty)$. 则 $\forall \lambda > 0$ 及对任意的方块 $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ 有

$$\frac{w(Q)}{w(\lambda Q)} \leq \frac{C_1}{\lambda^{n\delta}},$$

其中常数 C_1 和 δ 于上一个命题相同, λQ 是将 Q 同中心扩大 λ 倍得到的方块.

关于 A_1 权有两个重要的结论.

Theorem 10. ([2, Proposition 7.2]) 设 $w_1 \in A_1$, $w_2 \in A_1$, $p \in [1, \infty)$. 则 $w_1 w_2^{1-p} \in A_p$.

上述定理的逆定理也成立.

Theorem 11. ([1, Theorem 7.5.1])(权的分解定理) 设 $p \in [1, \infty)$, $w \in A_p$. 则存在 $w_1 \in A_1$, $w_2 \in A_1$, 使得 $w = w_1 w_2^{1-p}$.

关于 A_p 权有如下重要的外插定理.

Theorem 12. ([4, Theorem 1.4])(外插定理) 给定算子 T. 设存在某个 $p_0 \in [1, \infty)$ 满足对每个 $w \in A_{p_0}$, 存在只依赖于 $[w]_{p_0}$ 的常数C, 使得对 $\forall f \in L_w^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^{p_0} w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{p_0} w(x) dx.$$

则对任意给定的 $p \in (1, \infty)$ 和 $w \in A_p$, 存在只依赖于 $[w]_{A_p}$ 的常数 C_1, 使得对 $\forall f \in L_w^p(\mathbb{R}^d)$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(x)|^p w(x) dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p w(x) dx.$$

最后介绍在科研工作中常用的一个工具. 设 $w \in A_\infty$, 记

$$q_w := \inf\{q \in (1,\infty):\ w \in A_q\}.$$

显然 $q_w \in [1,\infty)$. 由Proposition 7 可以直接得到下述结论

Proposition 13. 设 $w \in A_\infty$. 若 $q_w \in (1,\infty)$, 则 $w \notin A_{q_w}$.

但是当 $q_w = 1$ 时, w 和 q_w的关系是不确定的. 一方面,如果 $w \in A_1$, 则显然 $q_w = 1$. 另一方面[3, p. 254] 证明了 $\bigcap_{p>1} A_p \setminus A_1 \neq \varnothing$. 由此知存在 $w \notin A_1$, 但是 $q_w = 1$.

References

[1] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, third edition, Grad. Texts in Math. 249, Springer, New York, 2014.

[2] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[3] R. Johnson and C. J. Neugebauer, Homeomorphisms preserving Ap, Rev. Mat. Iberoam. 3 (1987) 249 – 273.

[4] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell and C. Pérez, Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia, Operator Theory: Advances and Applications, 215. Birkhuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.