

# Schwartz 函数和分布

2023 年 11 月 9 日

## 目录

<b>1</b>	<b>Schwartz 函数</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Schwartz 分布</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>再生公式</b>	<b>7</b>
3.1	连续再生公式 . . . . .	7
3.2	离散再生公式 . . . . .	7
3.2.1	齐次 . . . . .	7
3.2.2	非齐次 . . . . .	8
<b>4</b>	<b>特殊 Schwartz 函数的构造</b>	<b>9</b>
4.1	Pseudo-differential 算子 . . . . .	9

## 1 Schwartz 函数

下面给出 Schwartz 函数的定义.

**Definition 1.1.** A  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  complex-valued function  $f$  on  $\mathbb{R}^n$  is called a Schwartz function if for every pair of multi-indices  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ,

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial^\beta f)(x)| < \infty.$$

The set of all Schwartz functions on  $\mathbb{R}^n$  is denoted by  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

为了给出 Schwartz 函数的一个等价定义, 首先介绍来自 [2, (2.2.1),(2.2.2)] 的两个估计.

**Lemma 1.2.** 存在仅依赖于  $n$  和  $k$  的常数  $C$  使得, 对任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|x|^k \leq C \sum_{|\beta|=k} |x^\beta| \quad (1)$$

且

$$(1 + |x|)^k \leq 2^k (1 + C) \sum_{|\beta| \leq k} |x^\beta|. \quad (2)$$

下面介绍 Schwartz 函数的一个非常有用的等价定义.

**Theorem 1.3.** Let  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Then  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  if and only if for any  $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$  and  $N \in \mathbb{N}$ , there exists a positive constant  $C$  such that

$$|(\partial^\alpha f)(x)| \leq C \frac{1}{(1 + |x|)^N}.$$

在证明该结论前,

证明. 先证 " $\Leftarrow$ ". 对任意  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ,

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha, \beta}(f) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial^\beta f)(x)| \lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^{|\alpha|} |(\partial^\beta f)(x)| \\ &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{|\alpha|} |(\partial^\beta f)(x)| < \infty, \end{aligned}$$

故  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

再证 " $\Rightarrow$ ". 对任意  $N \in \mathbb{N}$  和  $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ,

$$\sup_{x \in B(0,1)} (1 + |x|)^N |(\partial^\beta f)(x)| < \infty$$

且

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} (1 + |x|)^N |(\partial^\beta f)(x)| \\ &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |x|^N |(\partial^\beta f)(x)| \\ &\lesssim \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha|=N} |x^\alpha| \right) |(\partial^\beta f)(x)| \\ &\lesssim \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha|=N} \rho_{\alpha, \beta}(f) < \infty, \end{aligned}$$

故

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |(\partial^\beta f)(x)| < \infty,$$

定理 1.3 证毕. □

**Remark 1.4.** 注意到对任意  $p \in (1, \infty)$  和  $N \in (p/n, \infty)$ ,

$$\frac{1}{(1+|x|)^N} \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

故对任意  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  和  $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ,  $\partial^\beta f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

下面给出  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  和其它空间的关系.

**Proposition 1.5.** 设  $p \in [1, \infty)$ . 则有以下性质:

(i)  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^p(\mathbb{R}^n)$ ;

(ii)  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  在  $L^p(\mathbb{R}^n)$  中稠.

证明. 先证 (i). 容易看出  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , 又  $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  但无紧支集, 故  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

又由定理 1.3 知, 对任意  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  和  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|f(x)| \lesssim \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}},$$

因此

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{p(n+1)}} dx \\ &\lesssim 1 + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{p(n+1)}} dx \sim 1 + \int_1^\infty \frac{1}{r^2} dx \sim 1. \end{aligned}$$

故  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ . 又显然  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n)$ , 从而  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^p(\mathbb{R}^n)$ . (i) 证毕.

(ii) 是经典结论, 用卷积去逼近即可. □

下面给出 Schwartz 函数意义下的收敛.

**Definition 1.6.** 设  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  且  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . 称  $f_k$  收敛到  $f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , as  $k \rightarrow \infty$ , 若对任意  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ,

$$\rho_{\alpha\beta}(f_k - f) \rightarrow 0, \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

通过收敛可以定义闭集, 从而有了拓扑. 在此拓扑意义下, Schwartz 空间可赋度量:

$$d: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty), (f, g) \mapsto \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\rho_{\alpha\beta}(f - g)}{1 + \rho_{\alpha\beta}(f - g)};$$

但是不能赋予范数.

下面给出 Schwartz 函数傅里叶变换的定义.

**Definition 1.7.** Let  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . For any  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , define

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx; \\ \widetilde{f}(\xi) &:= f(-\xi); \\ (\tau^y f)(\xi) &:= f(\xi - y), \quad \text{where } y \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

**Remark 1.8.** 傅里叶变换限制在  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  上, 是到自身的同胚.

**Proposition 1.9.** Let  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , then

- (i)  $\widehat{f^\vee}(\cdot) = \widehat{f}(-\cdot)$ ;
- (ii) 对任意  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\widehat{\tau^y f}(\xi) = e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$ ;
- (iii) 对任意  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau^y(\widehat{f})(\xi) = [e^{-2\pi i x \cdot y} f(x)]^\vee(\xi)$ ;
- (iv) 平移变换不改变傅里叶变换的支集. 即对任意  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{supp } \widehat{\tau^y f} = \text{supp } \widehat{f}$ .

证明. 现在证 (ii). 对任意  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{\tau^y f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau^y f)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= e^{-2\pi i y \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{f}(\xi),\end{aligned}$$

(ii) 得证.

(iv) 是 (ii) 的直接推论. □

**Lemma 1.10.** Let  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

- (i)  $\text{supp } f * g \subset \text{supp } f + \text{supp } g$ ;
- (ii)  $\text{supp } \widehat{fg} \subset \text{supp } \widehat{f} + \text{supp } \widehat{g}$ .

证明. (i) 由定义可以直接得到. 现证(ii).

$$\begin{aligned}\text{supp } \widehat{fg} &= \text{supp } \widetilde{\widehat{fg}} = \text{supp } (fg)^\vee = \text{supp } \check{f} * \check{g} \\ &\subset \text{supp } \check{f} + \text{supp } \check{g} = \text{supp } \widetilde{\check{f}} + \text{supp } \widetilde{\check{g}} = \text{supp } \widehat{f} + \text{supp } \widehat{g}.\end{aligned}$$

□

## 2 Schwartz 分布

下面给出 Schwartz 分布傅里叶变换的定义.

**Definition 2.1.** Let  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , define

$$\begin{aligned}\widehat{f} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle \widehat{f}, \varphi \rangle := \langle f, \widehat{\varphi} \rangle; \\ \widetilde{f} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle \widetilde{f}, \varphi \rangle := \langle f, \widetilde{\varphi} \rangle; \\ \tau^y f : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle \tau^y f, \varphi \rangle := \langle f, \tau^{-y} \varphi \rangle, \quad \text{where } y \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

**Definition 2.2.** Let  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  and  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . We say that  $f$  coincides with the function  $u$  if, for any  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \varphi(x) dx.$$

For any complex-valued function  $u$ , let

$$\text{supp } u := \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \neq 0\}.$$

For any  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , let

$$\begin{aligned}\text{supp } f &:= \bigcap \{\text{closed set } K \subset \mathbb{R}^n : \\ &\langle f, \varphi \rangle = 0 \text{ for any } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ with } \text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus K\}.\end{aligned}$$

由定义知,  $\text{supp } f$  是闭集.

**Remark 2.3.** Let  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  coincides with the function  $u$ , then

(i)

$$\widehat{f} = \widehat{u}, \quad \widetilde{f} = \widetilde{u}, \quad \tau^y f = \tau^y u,$$

where the '=' means 'coincides with' (这应该是 Definition 2.1 的由来);

(ii)  $\text{supp } f \subset \overline{\text{supp } u}$ ;

(iii) 若  $u$  是连续函数, 则

$$\text{supp } f = \text{supp } u,$$

其中  $\text{supp } u$  是函数意义下的支集.

证明. 由定义可直接得到 (i). 下证 (ii).  $\overline{\text{supp } u}$  是闭集且对任意  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  with  $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\text{supp } u}$ ,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \varphi(x) dx = 0,$$

因此由分布支集定义知  $\text{supp } f \subset \overline{\text{supp } u}$ .

再证 (iii). 由 (ii) 和  $u$  连续知  $\text{supp } f \subset \text{supp } u$ . 故只需证  $\text{supp } u \subset \text{supp } f$ . 对任意  $x \in \text{supp } u$ , 有  $u(x) \neq 0$ , 不妨设  $u(x) > 0$ . 因为  $u$  连续, 故存在  $r_x \in (0, \infty)$  使得  $u$  在  $B(x, r_x)$  上恒大于  $u(x)/2$ . 假设存在

$$K_x \in \{\text{closed set } K \subset \mathbb{R}^n : \quad (3)$$

$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \text{ for any } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ with } \text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus K\}$$

使得  $x \notin K_x$ , 则存在  $\delta \in (0, r_x)$  使得  $B(x, \delta) \cap K_x = \emptyset$ . 令  $\varphi_x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  满足

$$\varphi_x(t) := \begin{cases} 1, & t \in B(x, \delta/2), \\ \text{取值为 } [0, 1], & t \in B(x, \delta) \setminus B(x, \delta/2), \\ 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus B(x, \delta). \end{cases}$$

则

$$\langle f, \varphi_x \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(t) \varphi_x(t) dt = \int_{B(x, \delta)} u(t) \varphi_x(t) dt \geq \frac{u(x)}{2} \int_{B(x, \delta)} \varphi_x(t) dt > 0,$$

这与 (3) 相矛盾. 故

$$\begin{aligned} x &\in \bigcap \{\text{closed set } K \subset \mathbb{R}^n : \\ &\quad \langle f, \varphi \rangle = 0 \text{ for any } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ with } \text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus K\} \\ &= \text{supp } f. \end{aligned}$$

因此  $\text{supp } u \subset \text{supp } f$ , Remark 2.3 证毕. □

**Proposition 2.4.** Let  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , then

$$(i) \quad f^{\wedge\wedge}(\cdot) = \widetilde{f};$$

$$(ii) \quad \text{平移变换不改变傅里叶变换的支集. 即对任意 } y \in \mathbb{R}^n, \text{supp } \widehat{\tau^y f} = \text{supp } \widehat{f}.$$

证明. 现在证 (ii). 对任意  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\langle \widehat{\tau^y f}, \varphi \rangle = \langle \tau^y f, \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \tau^{-y} \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, [e^{-2\pi i x \cdot y} \varphi(x)]^\wedge \rangle = \langle \widehat{f}, e^{-2\pi i x \cdot y} \varphi(x) \rangle,$$

故  $\text{supp } \widehat{\tau^y f} = \text{supp } \widehat{f}$ , (ii) 得证. □

### 3 再生公式

本节主要参考[3].

先回顾一下  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  和  $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ .

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x) dx = 0 \quad \text{for any } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \right\}.$$

**Proposition 3.1.** *Let  $\Delta$  be a 拉普拉斯算子. Then*

$$\mathcal{S} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}(\Delta^k)$$

**Theorem 3.2.**

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$

这两个空间上的拓扑是什么?

下面给出  $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$  的一个特征刻画.

**Proposition 3.3.** *Let  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Then  $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$  if and only if  $\partial^\alpha \widehat{f}(\mathbf{0}) = 0$  for any  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ .*

证明的关键在于利用傅里叶变换的性质: 对任意  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$  和  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(\partial^\alpha \widehat{f})(\xi) = [(-2\pi i x)^\alpha f(x)]^\wedge(\xi),$$

证明. For any  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ,

$$0 = (\partial^\alpha \widehat{f})(\mathbf{0}) = [(-2\pi i x)^\alpha f(x)]^\wedge(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\alpha f(x) dx,$$

if and only if, for any  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x) dx = 0,$$

i.e.  $f \in \mathcal{S}_\infty$ . □

#### 3.1 连续再生公式

#### 3.2 离散再生公式

##### 3.2.1 齐次

**Lemma 3.4.** 设  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  满足

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{\varphi}(2^j \xi)} \widehat{\psi}(2^j \xi) = 1 \quad \text{if } \xi \neq 0$$

且  $\widehat{\varphi}$  和  $\widehat{\psi}$  支在一个环上, 即

$$\text{supp } \widehat{\varphi}, \text{supp } \widehat{\psi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : a \leq |\xi| \leq b\}.$$

则

(i) 对任意  $f \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$f = \sum_{Q \in \mathcal{D}} \langle f, \varphi_Q \rangle \psi_Q \quad (4)$$

in  $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ ;

(ii) 对任意  $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ , (4) 在  $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  意义下收敛.

下面考虑小波再生公式, 为了形式的简洁, 只考虑1维的Meyer小波  $\{\theta_Q\}_{Q \in \mathcal{D}}$ .

**Proposition 3.5.** 设  $\{\theta_Q\}_{Q \in \mathcal{D}}$  是  $L^2(\mathbb{R})$  的一组Meyer小波基. 则

(i) 对任意  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$f = \sum_{Q \in \mathcal{D}} \langle f, \theta_Q \rangle \theta_Q \quad (5)$$

in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ;

(ii) 对任意  $f \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$ , (5) 在  $S_\infty(\mathbb{R}^n)$  意义下收敛;

(iii) 对任意  $f \in S'_\infty(\mathbb{R}^n)$ , (5) 在  $S'_\infty(\mathbb{R}^n)$  意义下收敛.

证明. (i) 显然, (iii) 是 (ii) 的推论, 故只需证 (ii). □

### 3.2.2 非齐次

下面考虑小波再生公式, 为了形式的简洁, 只考虑1维的Meyer小波  $\{\Theta_Q\}_{Q \in \mathcal{D}_0} \cup \{\theta_Q\}_{Q \in \mathcal{D}_+}$ .

**Proposition 3.6.** 设  $\{\Theta_Q\}_{Q \in \mathcal{D}_0} \cup \{\theta_Q\}_{Q \in \mathcal{D}_+}$  是  $L^2(\mathbb{R})$  的一组Meyer小波基. 则

(i) 对任意  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$f = \sum_{Q \in \mathcal{D}_0} \langle f, \Theta_Q \rangle \Theta_Q + \sum_{Q \in \mathcal{D}_+} \langle f, \theta_Q \rangle \theta_Q \quad (6)$$

in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ;

(ii) 对任意  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ , (6) 在  $S(\mathbb{R}^n)$  意义下收敛;

(iii) 对任意  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ , (6) 在  $S'(\mathbb{R}^n)$  意义下收敛.

证明. 待补 □



## 4 特殊 Schwartz 函数的构造

很多时候, 我们需要构造一些特殊的 Schwartz 函数, 下面来举几个例子.

### 4.1 Pseudo-differential 算子

在证明 pseudo-differential 算子在 Besov 和 Triebel-Lizorkin 空间上有界性时, 需要用到 Calderón reproducing formulae 的特殊情况, 即让

$$f = \sum_Q \langle f, \varphi_Q \rangle \psi_Q$$

中的  $\varphi = \psi$ .

参考 [1, Lemma (6.9)] 的证明可以构造满足上述条件的  $\varphi$ .

**Lemma 4.1.** *There exists a  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  such that  $0 \notin \text{supp } \widehat{\varphi}$  and, for any  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(2^j \xi)|^2 = 1.$$

证明. 令  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  满足

$$\begin{aligned} \text{supp } \widehat{h} &\subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}, \\ \widehat{h}(\xi) &\geq c, \quad \text{for any } \frac{3}{5} \leq |\xi| \leq \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

对任意  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , 令

$$\psi(\xi) := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{h}(2^j \xi)|^2 \right\}^{1/2},$$

则对任意  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\psi(2^i \xi) = \psi(\xi)$ , 对任意  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\psi(\xi) \geq c$ , 且  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . 注意到

$$\widehat{h}/\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{Proposition 1.5(i)}}{\subset} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

故可令  $\varphi := (\widehat{h}/\psi)^\vee$ . 则  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  且

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} [\widehat{\varphi}(2^j \xi)]^2 = \frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}} [\widehat{h}(2^j \xi)]^2}{[\psi(\xi)]^2} = 1.$$

□

## 参考文献

- [1] M. Frazier, B. Jawerth and G. Weiss, Littlewood–Paley Theory and The Study of Function Spaces, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 79, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.
- [2] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Third edition, Graduate Texts in Mathematics 249, Springer, New York, 2014.
- [3] A. Bényi and R. Torres, The discrete Calderón reproducing formula of Frazier and Jawerth, in: Functional analysis, harmonic analysis, and image processing: a collection of papers in honor of Björn Jawerth, 79–107, Contemp. Math., 693, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.