

Vitali covering lemma

2021 年 6 月 11 日

1 度量空间

Lemma 1. 设 \mathcal{F} 是度量空间 (\mathcal{X}, d) 中的一族球且 $\sup_{B \in \mathcal{F}} r(B) < \infty$. 则存在两两不交的子球族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 使得

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B, \quad (1)$$

且对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 存在 $\tilde{B} \in \mathcal{G}$ with $r(B) \leq 2r(\tilde{B})$ 使得 $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$.

可以利用 Zorn 引理(若非空偏序集的任意全序子集有上界, 则该偏序集存在极大元)来证明这个结论.

证明一. 该证明来自 [J. Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Space, Theorem 1.2].

定义偏序集

$$\Omega := \{\omega \subset \mathcal{F} : \omega \text{ is pairwise disjoint and, for any } B \in \mathcal{F}, \text{ if } B \cap \bigcup_{\tilde{B} \in \omega} \tilde{B} \neq \emptyset, \quad (2)$$

then there exists a $\tilde{B} \in \omega$ with $r(\tilde{B}) \geq r(B)/2$ such that $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset\}$.

易证 Ω 非空且满足 Zorn 引理的条件, 因此存在极大元 $\mathcal{G} \in \Omega$.

下证 \mathcal{G} 满足条件. 由 (2) 知, \mathcal{G} 两两不交. 令

$$\mathcal{P} := \left\{ B \in \mathcal{F} : B \cap \bigcup_{\tilde{B} \in \mathcal{G}} \tilde{B} = \emptyset \right\}.$$

若 \mathcal{P} 非空, 由 $\sup_{B \in \mathcal{F}} r(B) < \infty$ 知, 可取 $B_0 \in \mathcal{P}$ 使得 $r(B_0) \geq \sup_{B \in \mathcal{P}} r(B)/2$, 则 $\mathcal{G} \cup \{B_0\} \in \Omega$, 这与 \mathcal{G} 的极大性相矛盾. 故 $\mathcal{P} = \emptyset$, 从而对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 存在 $\tilde{B} \in \mathcal{G}$ with $r(\tilde{B}) \geq r(B)/2$ 使得 $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$, 从而 $B \subset 5\tilde{B}$. 引理证毕. \square

证明二. 也可以构造性的证明此结论. \square

Remark 2. (i) 若度量空间是几何双倍度量空间 (任意球 B 可被 N 个半径为 $r(B)/2$ 的球包住, 其中 N 与 B 无关), 则由于 \mathcal{G} 两两不交, 故至多可数(see, for instance, [1, Lemma 2.5]);

(ii) 双倍度量空间(赋予双倍测度)是几何双倍度量空间(see, for instance, [2, p. 67]), 则由于 \mathcal{G} 两两不交, 故至多可数;

(iii) (1) 中的 5 可以改为任意比 3 大的数, 且当 \mathcal{F} 是无穷集时, 不可以取 3, 当 \mathcal{F} 是有限集时, 可以取 3.

(iv) 条件中的半径有上界是必须的, 反例:

证明. 先证 (i). 取定参考点 $x_0 \in \mathcal{X}$. 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{G}_k := \{B \in \mathcal{G} : B \subset B(x_0, k), r(B) \in (1/k, \infty)\}.$$

对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在有限个圆心属于 $B(x_0, k)$, 半径为 $1/k$ 的球族 \mathcal{C} 把 $B(x_0, k)$ 盖住. 因此对 $\forall B \in \mathcal{G}_k$, 存在 $\tilde{B} \in \mathcal{C}$ 使得 $x_B \in \tilde{B}$. 注意到 \mathcal{G}_k 两两不交, 故 $B \mapsto \tilde{B}$ 的映射是单射 (否则 $B_1 \cap B_2 \supset \{x_{\tilde{B}}\}$ 非空), 从而 $\#\mathcal{G}_k \leq \#\mathcal{C}$ 也是有限集. 从因此

$$\mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k$$

至多可数.

再证(ii). 对任意球 $B \subset \mathcal{X}$, 取 B 中半径为 $r(B)/4$ 且两两不交的球族 \mathcal{C} , 则对 $\forall \tilde{B} \in \mathcal{C}$,

$$\mu(B) \leq \mu(8\tilde{B}) \leq [C_{(\mu)}]^3 \mu(\tilde{B}),$$

因此

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{\tilde{B} \in \mathcal{C}} \tilde{B}\right) = \sum_{\tilde{B} \in \mathcal{C}} \mu(\tilde{B}) \geq \#\mathcal{C} \mu(B) / [C_{(\mu)}]^3,$$

即 $\#\mathcal{C} \leq [C_{(\mu)}]^3$. 设 \mathcal{C} 是极大的, 则 $\{2\tilde{B}\}_{\tilde{B} \in \mathcal{C}}$ 是半径为 $r(B)/2$ 且能盖住 B 的球族. 故 (\mathcal{X}, d, μ) 是几何双倍度量空间.

现在证 (iii). 只需证 \mathcal{F} 是无穷集时不能取 3. 反例: 待补 <https://math.stackexchange.com/questions/288153-a-bad-constant-in-the-vitali-covering-lemma-infinite-version>

最后证(iv). 反例: \mathbb{R}^n 中的球族 $\{B(\mathbf{0}, k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. □

2 拟度量空间

应该是差不多的.

参考文献

- [1] T. Hytönen, A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa, Publ. Mat. 54 (2010), 485–504.
- [2] R. R. Coifman and G. Weiss, Analyse Harmonique Non-commutative sur Certains Espaces Homogènes, (French) Étude de Certaines Intégrales Singulières, Lecture Notes in Mathematics 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.