

复分析总结

March 14, 2020

1 解析函数基本性质

以下均源自[1].

Definition 1.1 (p.7). 开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 被称为连通的, 若不存在两个不交的非空开集 Ω_1 和 Ω_2 使得

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

\mathbb{C} 中的连通开集被称为区域.

Definition 1.2 (p.93). 粗略地讲, 称区域 Ω 中拥有相同端点的两条曲线是同伦的, 若这其中一条能不离开区域 Ω 连续的变换成另一条曲线.

Definition 1.3 (p.96). 称区域 Ω 是单连通的, 若 Ω 中拥有相同端点的任意两条曲线是同伦的.

Definition 1.4 (p.20). 粗略地讲, 一个光滑或者分段光滑曲线被称为是闭的, 若曲线首尾相连. 一个光滑或者分段光滑曲线被称为是简单的, 若曲线不自交.

Theorem 1.5 (Theorem 2.2, p.351). 设 Γ 是一段简单的, 闭的, 分段光滑的曲线. 则 Γ^c 等于两个不交区域的并. 特别的, 这两个区域一个是有界单连通区域, 称它为 Γ 的内部; 另一个是无界单连通区域, 称它为 Γ 的外部.

铁爷书中区域的定义太乱了, 我觉得按他的意思, 如果明确指出是区域, 那就是连通开集.

Theorem 1.6 (命题1.2.2). 设 f 定义在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的复值函数, $a \in \Omega$. 若 f 在点 $a \in \Omega$ 处实可微, 则 f 在点 $a \in \Omega$ 处复可微当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|_a = 0$. 若 f 在点 $a \in \Omega$ 处复可微, 则 f 在点 $a \in \Omega$ 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|_a = f'(a)$.

Remark 1.7. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 是复可微与否的关键. $\frac{\partial f}{\partial z}$ 就是导数.

Theorem 1.8 (定理1.2.3). 设 ω 是有界开集且 $f \in H(\omega) \cap C^1(\bar{\omega})$, 则

$$\int_{\partial\omega} f(z)dz = 0.$$

Remark 1.9. 上面这个是柯西定理很一般的形式, 比较抽象, 下面是一个更直观的版本.

设 Ω 改为单连通开集, 由柯西定理及定理2.1.8 $H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ 知, 对任意简单的, 闭的, 分段光滑曲线 $\Gamma \subset \Omega$,

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = 0.$$

大致是这个意思, 曲线的条件可能有偏差.

Theorem 1.10 (定理1.2.4). 设 ω 是有界开集且 $z \in \omega$. 若 $f \in C^1(\bar{\omega})$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{\omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\lambda(\zeta).$$

若 $f \in H(\omega) \cap C^1(\bar{\omega})$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Remark 1.11. 上面这个是柯西公式很一般的形式, 比较抽象, 下面是一个更直观的版本.

设 Ω 改为单连通开集, 由柯西公式及定理2.1.8 $H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ 知, 对任意简单的, 闭的, 分段光滑曲线 $\Gamma \subset \Omega$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

大致是这个意思, 曲线的条件可能有偏差.

Theorem 1.12 (定理2.1.8). 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, 则

$$H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega).$$

Remark 1.13. 设 Ω 是区域, 则

$$H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega) \cap \{\text{无穷可微函数}\},$$

即全纯函数无穷可微且一阶偏导连续.

Proof. 由定理2.1.8 知, $H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, 即全纯函数一阶偏导连续. 由此及定理1.2.6 知,

$$H(\Omega) = H(\Omega) \cap C^1(\Omega) \subset \{\text{无穷可微函数}\}.$$

因此全纯函数无穷可微且一阶偏导连续. □

Theorem 1.14 (定理1.1.12). 设 X 是连通空间且 $E \subset X$ 既开又闭, 则 $E \in \{\emptyset, X\}$.

Remark 1.15. 定理1.1.12 是更一般的结论, 不过没有这个直观. 此结论可用于证明超级有用的最大模定理.

Theorem 1.16 (定理1.2.10). 设 Ω 是有界开集且 $f \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, 则存在 $z_0 \in \partial\Omega$ 使得 $f(z_0) = \sup_{z \in \overline{\Omega}} f(z)$.

Remark 1.17. 记 $M := \sup_{z \in \overline{\Omega}} f(z)$. 则 f 有两种可能. (i) $f \equiv M$; (ii) 对 $\forall z \in \Omega$, $f(z) < M$.

Theorem 1.18 (Hadamard, p.11). 设 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

的收敛半径 R 满足

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

若 $R \in (0, \infty]$, 则级数在 $D(a, R)$ 中内闭一致收敛. 若 $R \in [0, \infty)$, 则级数在 $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| > R\}$ 中发散.

Theorem 1.19 (定理1.2.11 和定理1.2.14). 设 Ω 是有界开集. $f \in H(\Omega)$ 当且仅当 f 可以写成形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

的幂级数.

Remark 1.20. 有这个定理也能看出来全纯函数无穷可微, 多角度理解方便记忆. 注意, 导数是能算出来的, 直接对积分内部求导即可.

Theorem 1.21 (定理1.2.16). 设 $f \in H(\mathbb{C})$ 且有界, 则 f 是常值函数.

Remark 1.22. 著名的Liouville 定理, 必须牢记. 称 f 是整函数, 若 $f \in H(\mathbb{C})$.

Theorem 1.23 (定理1.2.18). (零点的孤立性). 设 Ω 是开集, $f \in H(\Omega)$ 且 f 不恒等于0. 记 $Z(f) := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$, 则 $Z(f)$ 在 Ω 中没有极限点.

(零点处函数的分解). 设 $a \in Z(f)$, 则存在唯一正整数 $m \in \mathbb{N}$ 和非0 函数 $g \in H(\Omega)$, 使得对 $\forall z \in \Omega$,

$$f(z) = (z - a)^m g(z).$$

Theorem 1.24 (Theorem 4.8). 看待零点的孤立性的另一个角度, 来自stein. 若存在点 $z_0 \in \Omega$ 和序列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 使得

$$z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

且对 $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = 0$, 则 $f \equiv 0$.

Remark 1.25. 零点的孤立性, 非常有用. 由零点的孤立性, 容易看出 $Z(f)$ 至多可数.

Theorem 1.26 (Theorem 1.2.20). 设 $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R < \infty$,

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}.$$

若 $f \in H(\Omega)$, 则存在序列 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ 使得, 对 $\forall z \in \Omega$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

其中对 $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

其中 $\rho \in (r, R)$, 由柯西公式, 上式右边的积分与 ρ 的选取无关.

Remark 1.27. Laurent 展开, 非常有用. 没有坏点, 就用泰勒, 有坏点, 就只能用 Laurent 展开了.

References

- [1] E. M. Stein and R. Shakarchi, Complex Analysis, Princeton University Press, 2010.