# 笔记-J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis

November 6, 2020

## 1 待整理

**Lemma 1.1.** 设$N \in \mathbb{N}$, 开区间$\{I_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}$ 且

$$\bigcap_{k=1}^N I_k \neq \emptyset.$$

则存在$k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^N I_k = I_{k_0},$$

或存在$k_1, k_2 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^N I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}.$$

*Proof.* 若存在$k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^N I_k = I_{k_0},$$

Lemma 1.7 证毕. 否则由$\bigcap_{k=1}^N I_k \neq \emptyset$ 知, 存在$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ 使得

$$\bigcup_{\alpha \in A} I_k = (a, b).$$

存在$k_1, k_2 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\inf I_{k_1} = a, \quad \text{and} \quad \sup I_{k_2} = b.$$

由此及$I_{k_1} \cap I_{k_2} \neq \emptyset$ 知

$$\bigcup_{k=1}^N I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}.$$

□

**Lemma 1.2** (Lemma 2.6)**.** *Let $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ be a collection of open intervals in $\mathbb{R}^n$ and let $K$ be a compact set contained in their union. Then there exists a finite subcollection $\{I_j\}$ such that*

$$K \subset \bigcup_j I_j, \quad \textit{and} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_j 1_{I_j}(x) \le 2.$$

*Proof.* 由$K$ 是紧集知, 存在$\{I_k^{(0)}\}_{k=1}^{N_0} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k^{(0)}.$$

若存在$x_0 \in \mathbb{R}$ 使得$\sum_{k=1}^{N_0} 1_{I_j^{(0)}}(x_0) \ge 3$, 则由Lemma 1.7 知, 存在$\{I_k^{(1)}\}_{k=1}^{N_1} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得$N_1 \le N_0 - 1$ 且

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N_1} I_k^{(1)}.$$

若存在$x_1 \in \mathbb{R}$ 使得$\sum_{k=1}^{N_1} 1_{I_j^{(1)}}(x_1) \ge 3$, 重复之前的过程. 由于$\{N_k\}$ 严格减且大于0, 故此过程经过有限次后会停止, 此时存在$\{I_k^{(s)}\}_{k=1}^{N_s} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N_s} I_k^{(s)} \quad \text{and} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{N_s} 1_{I_k^{(s)}}(x) \le 2.$$

□

Lemma 2.12 的证明中会用到如下事实.

**Theorem 1.3.** 设方体$Q_1, Q_2$ 满足$Q_1 \subset Q_2$, 则对$\forall \alpha \in [1, \infty)$, $\alpha Q_1 \subset \alpha Q_2$. 其中$\alpha Q_1$ 表示与$Q_1$ 中心相同, 长度为$\alpha\ell(Q_1)$ 的方体.

*Proof.* 由$Q_1 \subset Q_2$ 知, $\ell(Q_1) \le \ell(Q_2)$, 因此对$\forall x := (x_1, \ldots, x_n) \in \alpha Q_1$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
|x_k - (x_{Q_2})_k| &\le |x_k - (x_{Q_1})_k| + |(x_{Q_1})_k - (x_{Q_2})_k| \\
&\le \frac{\alpha\ell(Q_1)}{2} + \frac{\ell(Q_2) - \ell(Q_1)}{2} \\
&= \frac{(\alpha - 1)\ell(Q_1)}{2} + \frac{\ell(Q_2)}{2} \le \frac{\alpha\ell(Q_2)}{2}.
\end{aligned}$$

因此$x \in \alpha Q_2$. □

## 3.4 Truncated integrals and pointwise convergence

For $\varepsilon > 0$, the functions $y^{-1}\mathbf{1}_{\{|y|>\varepsilon\}}$ belong to $L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \le \infty$, so the functions

$$H_\varepsilon(f)(x) := \frac{1}{\pi}\int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,dy$$

are well defined if $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty)$.

在以下全文中, 对$\forall \varepsilon \in (0,\infty)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, 令$\psi := y^{-1}\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>1\}}$,

$$\psi_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & |y| > \varepsilon, \\ 0, & |y| \le \varepsilon. \end{cases}$$

设$\varepsilon \in (0,\infty)$, $p \in [1,\infty)$. 则对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$H_\varepsilon(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\psi_\varepsilon(y)\,dy = \frac{1}{\pi}(f * \psi_\varepsilon)(x),$$

即在点点意义下

$$H_\varepsilon(f) = \frac{1}{\pi}(f * \psi_\varepsilon).$$

**Remark 1.4.** 设$\varepsilon \in (0,\infty)$.

(i) 对$q \in (1,\infty]$, $\psi_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R})$;

(ii) 若$f \in L^1(\mathbb{R})$, 则对$\forall q \in (1,\infty]$, $H_\varepsilon(f) \in L^q(\mathbb{R})$.

*Proof.* 先证(i). 当$q = \infty$ 时,

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R})} = \operatorname*{esssup}_{y\in\mathbb{R}} |\psi_\varepsilon(y)| = \sup_{y\in\mathbb{R}, |y|>\varepsilon} \left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{\varepsilon} < \infty.$$

当$q \in (1,\infty)$ 时,

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R})} = \left[\int_{\mathbb{R}} |\psi_\varepsilon(y)|^q\,dy\right]^{1/q} = \left(2\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{y^q}\,dy\right)^{1/q} = \left(\frac{2\varepsilon^{1-q}}{q-1}\right)^{1/q} < \infty.$$

因此对$\forall q \in (1,\infty]$, $\psi_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R})$.

再证(ii). 对$\forall q \in (1,\infty]$, 由(i) 知$\psi_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R})$. 由此, $f \in L^1(\mathbb{R})$ 和Young 不等式([丁勇, 定理1.1.2]) 知,

$$H_\varepsilon(f) = \frac{1}{\pi}(f * \psi_\varepsilon) \in L^q(\mathbb{R}).$$

注1.4 证毕. □

**Remark 1.5.** 设$p \in [1,\infty)$ 且$f \in L^p(\mathbb{R})$. 则$H_\varepsilon(f)$ 是良定义的.

*Proof.* 由Hölder 不等式知, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\psi_\varepsilon(y)|\, dy \overset{\text{Hölder 不等式}}{\leq} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\psi_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} < \infty.$$

因此$H_\varepsilon(f)$ 是良定义的. □

> Moreover, $H_\varepsilon$ satisfies weak $(1,1)$ and strong $(p,p)$ estimates like those in Theorem 3.2 with constants that are uniformly bounded for all $\varepsilon$. To see this, we first note that
> $$\left(\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\varepsilon\}}\right)^\wedge(\xi) = -2i\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\lim_{N\to\infty}\int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|}\frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$
> This is uniformly bounded, so the strong $(2,2)$ inequality holds with constant independent of $\varepsilon$.

**Lemma 1.6.** 可测函数列$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 依测度收敛到$f$ 且几乎处处收敛到$g$. 则对几乎处处$x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

*Proof.* 由$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 依测度收敛到$f$ 和Riesz 定理([周民强, 定理3.17])知, 存在子列$\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得对几乎处处$x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x).$$

从而对几乎处处$x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x),$$

引理1.5 证毕. □

**Corollary 1.7.** 设$p \in [1,\infty)$.

(i) 若$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R})$ 依范数收敛到$f$ 且几乎处处收敛到$g$. 则对几乎处处$x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$;

(ii) 若$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R})$ 依拟范数收敛到$f$ 且几乎处处收敛到$g$. 则对几乎处处$x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

**Lemma 1.8.** 对$\forall x \in [0,\infty)$, $F(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$, 则$F \in C([0,\infty))$ 且

$$\|F\|_{C([0,\infty))} := \sup_{x\in[0,\infty)} |F(x)| < \infty.$$

*Proof.* 先证$F \in C([0,\infty))$. 任取$x_0 \in [0,\infty)$, 对$\forall x \in [0,\infty)$,

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x \frac{\sin t}{t}\, dt\right| \leq |x - x_0| \to 0, \quad \text{as} \quad x \to x_0.$$

因此$F$ 在点$x_0$ 处连续. 由$x_0 \in [0,\infty)$ 的任意性知, $F \in C([0,\infty))$.

再证$\|F\|_{C([0,\infty))} < \infty$. 由Dirichlet 判别法([伍胜健, 定理8.2.5])知, 极限

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

存在. 事实上,

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

从而存在$N \in \mathbb{N}$ 使得对$\forall x > N$, $|F(x) - \pi/2| < 1$. 又因为$F \in C([0,\infty))$, 故可记$M := \max_{x\in[0,N]} |F(x)|$, 从而

$$\|F\|_{C([0,\infty))} = \sup_{x\in[0,\infty)} |F(x)| \le \max\left\{M, \frac{\pi}{2} + 1\right\} < \infty.$$

引理1.7 证毕. □

**Remark 1.9.** 对几乎处处$\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(-\xi) = -\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi),$$

且存在正常数$C$ 使得对$\forall \varepsilon \in (0,\infty)$, $\|\widehat{\psi_\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C$.

*Proof.* 由注1.4(i) 知$\psi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$. 由此及书上Thm 1.18 知, 在$L^2(\mathbb{R})$ 意义下,

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) &= \lim_{N\to\infty} \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|<N\}} \psi_\varepsilon(y) \mathrm{e}^{-2\pi i y\xi}\, dy && \text{(Thm 1.18)}\\
&= \lim_{N\to\infty} \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon<|y|<N\}} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi i y\xi}}{y}\, dy\\
&= \lim_{N\to\infty} \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon<|y|<N\}} \left[\frac{\cos(2\pi y\xi)}{y} - i\frac{\sin(2\pi y\xi)}{y}\right] dy\\
&= -i \lim_{N\to\infty} \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon<|y|<N\}} \frac{\sin(2\pi y\xi)}{y}\, dy && \left(\frac{\cos(2\pi y\xi)}{y}\ \text{是奇函数}\right)\\
&= -2i \lim_{N\to\infty} \int_\varepsilon^N \frac{\sin(2\pi y\xi)}{y}\, dy\\
&= -2i \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon\xi}^{2\pi N\xi} \frac{\sin t}{t}\, dt && (t := 2\pi y\xi)\\
&= -2i \operatorname{sgn}(\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\, dt.
\end{aligned}$$

又由Dirichlet 判别法知, 对$\forall \xi \in \mathbb{R}$, 极限

$$-2i \operatorname{sgn}(\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

存在, 从而由推论1.6 知, 对几乎处处$\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) = -2i \operatorname{sgn}(\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

因此对几乎处处$\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\psi_\varepsilon}(-\xi) &= -2i \operatorname{sgn}(-\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\, dt \\ &= 2i \operatorname{sgn}(\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi),\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)\right| &= 2\left|\lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\, dt\right| \\ &= 2\left|\lim_{N\to\infty} \int_{0}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\, dt - \int_0^{2\pi\varepsilon|\xi|} \frac{\sin t}{t}\, dt\right| \\ &\leq 4 \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt\right|.\end{aligned}$$

故由引理1.7 知,

$$\left\|\widehat{\psi_\varepsilon}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)\right| \leq 4 \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt\right| \overset{\text{引理1.7}}{<} \infty.$$

注1.8 证毕. □

**Lemma 1.10.** 设$\varepsilon \in (0,\infty)$. 则存在与$\varepsilon$ 无关的正常数$C$ 使得, 对$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

*Proof.* 先证$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 时的结论. 对$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 有$f \in L^1(\mathbb{R})$. 由注1.4(ii) 知, $H_\varepsilon(f) \in L^2(\mathbb{R})$. 由此, Thm 1.18, 卷积定理([丁勇, 定理2.2.6])和注1.8 知,

$$\begin{aligned}\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\overset{\text{Thm 1.18}}{=} \|[H_\varepsilon(f)]^\wedge\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\frac{1}{\pi}(f * \psi_\varepsilon)^\wedge\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\overset{\text{卷积定理}}{=} \frac{1}{\pi}\left\|\widehat{f}\,\widehat{\psi_\varepsilon}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\pi}\left\|\widehat{f}\,\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\widehat{\psi_\varepsilon}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\overset{\text{Thm 1.18}}{=} \frac{1}{\pi}\left\|\widehat{\psi_\varepsilon}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \overset{\text{注1.8}}{\leq} C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned} \tag{1}$$

其中$C$ 是与$\varepsilon$ 无关的正常数.

再将结论推广到$L^2(\mathbb{R})$. 对任意固定的$f \in L^2(\mathbb{R})$, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在$L^2(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

由(1) 知, 对$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\|H_\varepsilon(f_k)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C\|f_k\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

进一步由$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是$L^2(\mathbb{R})$ 中柯西列知, $\{H_\varepsilon(f_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 也是$L^2(\mathbb{R})$ 中柯西列. 由此及$L^2(\mathbb{R})$ 的完备性知, 存在函数$g \in L^2(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|H_\varepsilon(f_k) - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0. \tag{3}$$

对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(f_k)(x) - H_\varepsilon(f)(x)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{f_k(x-y) - f(x-y)}{y}\,dy\right| \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \left|\frac{f_k(x-y) - f(x-y)}{y}\right| dy \\
&\le \frac{1}{\pi}\|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R})}\,\|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\to 0, \quad \text{as } k \to \infty.
\end{aligned}$$

由此, (3) 及推论1.6 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$, $g(x) = H_\varepsilon(f)(x)$. 因此由(2) 和(3) 知,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \overset{(3)}{=} \lim_{k\to\infty} \|H_\varepsilon(f_k)\|_{L^2(\mathbb{R})} \overset{(2)}{\le} \lim_{k\to\infty} C\|f_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

由$f$ 的任意性, Lemma 1.9 证毕. □

We can now prove the weak $(1,1)$ inequality exactly as in Theorem 3.4(原文是Theorem 3.2, 但计算时发现要改成Theorem 3.4), and the strong $(p,p)$ inequalities follow by interpolation and duality.

在zyy 师兄的帮助下, 对Theorem 1.10(i) 的证明进行了改进,

**Theorem 1.11.** 设$\varepsilon \in (0,\infty)$.

(i) 存在与$\varepsilon$ 无关的正常数$C_{(1)}$ 使得, 对$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in (0,\infty)$,

$$|\{x \in \mathbb{R}:\ |H_\varepsilon(f)(x)| > \lambda\}| \le \frac{C_{(1)}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})};$$

(ii) 对$\forall p \in (1,\infty)$, 存在与$\varepsilon$ 无关的正常数$C_{(p)}$ 使得, 对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_{(p)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

*Proof.* 先证(i). 对任意固定的$f \in L^1(\mathbb{R})$, 不妨设$f$ 是非负实值函数. 由书上Theorem 2.11(Calderón-Zygmund 分解) 知, 对任意给定的正常数$\lambda$, 存在两两不交的二进方体序列$\{I_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}$ 使得

- 对几乎处处$x \notin \Omega := \bigcup_{j\in J} I_j$, $f(x) \le \lambda$;
- $|\Omega| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$;
- 对$\forall j \in J$,
$$\lambda < \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt \le 2\lambda.$$

对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \notin \Omega, \\ \dfrac{1}{|I_j|}\displaystyle\int_{I_j} f(t)\,dt, & x \in I_j, \end{cases}$$

且

$$b(x) := \sum_{j\in J} b_j(x),$$

其中对$\forall j \in J$,

$$b_j(x) := \left[f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt\right]\mathbf{1}_{I_j}(x).$$

则对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) + b(x).$$

首先注意到, 对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \le 2\lambda,$$

因此对$\forall p\in[1,\infty)$,

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} [g(x)]^p\,dx \qquad (4)\\
&\le (2\lambda)^{p-1}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx\\
&= (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^{\complement}} g(x)\,dx+\sum_{j\in J}\int_{I_j} g(x)\,dx\right] \qquad (g\ge 0 \text{ and Levi})\\
&= (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^{\complement}} f(x)\,dx+\sum_{j\in J}\int_{I_j}\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt\,dx\right]\\
&\le (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^{\complement}} f(x)\,dx+\sum_{j\in J}\int_{I_j} f(t)\,dt\right]\\
&= (2\lambda)^{p-1}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, \qquad (f\ge 0 \text{ and Levi})
\end{aligned}
$$

从而$g\in L^p(\mathbb{R})$. 进一步由$f\in L^1(\mathbb{R})$ 知,

$$b=f-g\in L^1(\mathbb{R}),$$

又由(4) 有

$$\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\le \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}+\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{5}$$

注意到, 对$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
H_\varepsilon(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{f(x-y)}{y}\,dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{g(x-y)+b(x-y)}{y}\,dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{g(x-y)}{y}\,dy+\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{b(x-y)}{y}\,dy\\
&= H_\varepsilon(g)(x)+H_\varepsilon(b)(x).
\end{aligned}
$$

因此对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(f)(x)>\lambda\}|\le|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(g)(x)>\lambda/2\}|+|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(b)(x)>\lambda/2\}|. \tag{6}$$

关于$H_\varepsilon(g)$ 的估计. 由引理1.9 知, 存在与$\varepsilon$, $g$ 无关的正常数$C_{(2)}$ 使得

$$\|H_\varepsilon(g)\|_{L^2(\mathbb{R})}\le C_{(2)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{7}$$

由此及(4) 知, 对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
&|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(g)(x)>\lambda/2\}| \qquad (8)\\
&\quad=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(g)(x)>\lambda/2\}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2dx\\
&\quad\le\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(g)(x)>\lambda/2\}}[H_\varepsilon(g)(x)]^2\,dx\\
&\quad\le\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\mathbb{R}}[H_\varepsilon(g)(x)]^2\,dx\\
&\quad\overset{(7)}{\le}\left[\frac{2}{\lambda}C_{(2)}\right]^2\int_{\mathbb{R}}[g(x)]^2\,dx\\
&\quad=\left[\frac{2}{\lambda}C_{(2)}\right]^2\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\\
&\quad\overset{(4)}{\le}\frac{8[C_{(2)}]^2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

对于$H_\varepsilon(b)$ 的估计, 记$\Omega^*:=\bigcup_{j\in J}2I_j$. 注意到$|\Omega|\le\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ 且$\Omega=\bigcup_{j\in J}I_j$, $I_j$ 两两不交, 故

$$|\Omega^*|\le\sum_{j\in J}|2I_j|=2\sum_{j\in J}|I_j|=2|\Omega|\le\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

因此

$$\begin{aligned}
|\{x\in\mathbb{R}:\ |H_\varepsilon(b)(x)|>\lambda/2\}|&\le|\Omega^*|+|\{x\notin\Omega^*:\ |H_\varepsilon(b)(x)|>\lambda/2\}|\\
&\le\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}+|\{x\notin\Omega^*:\ |H_\varepsilon(b)(x)|>\lambda/2\}|.
\end{aligned}\tag{9}$$

如果已经证明存在与$\varepsilon$, $b$ 无关的正常数$C$使得, 对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\notin\Omega^*:\ H_\varepsilon(b)(x)>\lambda/2\}|\le\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.\tag{10}$$

由此, (6), (8) 和(9) 知, 存在与$\varepsilon$, $f$ 无关的正常数$\widetilde{C}$使得, 对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(f)(x)>\lambda\}|\le\frac{\widetilde{C}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

下证(10) 成立. 首先注意到, 对$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{j\in J}\left|\frac{b_j(x-\cdot)}{\cdot}\right|=\left|\frac{b(x-\cdot)}{\cdot}\right|\in L^1(\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}),$$

由此及逐项积分([周民强, 推论4.16])知,

$$\sum_{j\in J}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{b_j(x-y)}{y}\,dy=\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{b(x-y)}{y}\,dy.\tag{11}$$

从而对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
|H_\varepsilon(b)(x)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{b(x-y)}{y}\,dy\right| \overset{(11)}{=} \left|\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{b_j(x-y)}{y}\,dy\right| \qquad (12)\\
&\le \sum_{j\in J}\left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{b_j(x-y)}{y}\,dy\right| = \sum_{j\in J}|H_\varepsilon(b_j)(x)|.
\end{aligned}
$$

下面估算$H_\varepsilon(b_j)$. 对任意固定$x \notin \Omega^*$ 和$j \in J$, 断言以下三种情况有且只有其中一种成立:

(a) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap I_j = I_j$;

(b) $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap I_j = \emptyset$;

(c) $x-\varepsilon \in I_j$ 或$x+\varepsilon \in \mathring{I}_j$.

事实上, 设$I_j := [a_j, b_j)$, 其中$a_j,\ b_j \in \mathbb{R}$ 且$a_j < b_j$. 若$x+\varepsilon \in (-\infty, a_j]$, 则

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap I_j = \emptyset,$$

属于情况(b)且不属于(a)(c). 若$x+\varepsilon \in (a_j, b_j) = \mathring{I}_j$, 则属于情况(c)且不属于(a)(b). 若$x+\varepsilon \in [b_j, \infty)$ 且$x-\varepsilon \in (-\infty, a_j)$, 则

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap I_j = I_j,$$

属于情况(a)且不属于(b)(c). 若$x+\varepsilon \in [b_j, \infty)$ 且$x-\varepsilon \in [a_j, b_j) = I_j$, 属于情况(c)且不属于(a)(b). 若$x+\varepsilon \in [b_j, \infty)$ 且$x-\varepsilon \in [b_j, \infty)$, 则

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap I_j = \emptyset,$$

属于情况(b)且不属于(a)(c). 综上, 断言成立.

对于情况(a). $I_j \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, 因此

$$H_\varepsilon(b_j)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|>\varepsilon\}} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|>\varepsilon\}\cap I_j} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy = 0.$$

对于情况(b). $I_j \subset \{y \in \mathbb{R}:\ |x-y| \ge \varepsilon\}$, 因此

$$
\begin{aligned}
H_\varepsilon(b_j)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|>\varepsilon\}} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|\ge\varepsilon\}} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy.
\end{aligned}
$$

令$c_j$ 是$I_j$ 的中心, 因为

$$\int_{I_j} b_j(y)\,dy = \int_{I_j}\left[f(y) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt\right]dy = 0,$$

故

$$|H_\varepsilon(b_j)(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{I_j}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{I_j}\left[\frac{b_j(y)}{x-y}-\frac{b_j(y)}{x-c_j}\right]\,dy\right|$$
$$\le \frac{1}{\pi}\int_{I_j}\left|\frac{b_j(y)}{x-y}-\frac{b_j(y)}{x-c_j}\right|\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{I_j}\frac{|b_j(y)||y-c_j|}{|(x-y)(x-c_j)|}\,dy.$$

注意到对$\forall y\in I_j$, 有$|y-c_j|\le |I_j|/2$, 又因为由$x\notin\Omega^*$ 知$|x-c_j|\ge |I_j|$, 从而

$$|x-y|\ge |x-c_j|-|y-c_j|\ge |x-c_j|-\frac{1}{2}|I_j|\ge \frac{1}{2}|x-c_j|,$$

因此

$$|H_\varepsilon(b_j)(x)|\le \frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\,\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\,.$$

对于情况(c).

$$|H_\varepsilon(b_j)(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|>\varepsilon\}}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{I_j}\left|\frac{b_j(y)}{x-y}\right|\,dy.$$

若$x+\varepsilon\in \mathring{I}_j$, 则$|x+\varepsilon-c_j|<|I_j|/2$. 又由$x\notin\Omega^*$ 知, $|x-c_j|\ge|I_j|$, 从而

$$\varepsilon\ge |x-c_j|-|x+\varepsilon-c_j|>\frac{1}{2}|I_j|.$$

由此及$x+\varepsilon\in\mathring{I}_j$ 知,

$$I_j\subset B(x+\varepsilon,|I_j|)\subset B(x+\varepsilon,2\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+3\varepsilon).$$

若$x-\varepsilon\in I_j$, 则$|x-\varepsilon-c_j|\le|I_j|/2$, 从而

$$\varepsilon\ge |x-c_j|-|x-\varepsilon-c_j|\ge\frac{1}{2}|I_j|.$$

由此及$x-\varepsilon\in\mathring{I}_j$ 知,

$$I_j\subset B(x-\varepsilon,|I_j|)\subset B(x-\varepsilon,2\varepsilon)=(x-3\varepsilon,x+\varepsilon).$$

因此$I_j\subset(x-3\varepsilon,x+3\varepsilon)$. 若$x+\varepsilon\in\mathring{I}_j$, 则对$\forall y\in I_j$,

$$\varepsilon\le |x-y|+|(x+\varepsilon)-y|<|x-y|+|I_j|$$

且

$$|x-y|\ge|x-c_j|-|y-c_j|\ge|x-c_j|-\frac{1}{2}|I_j|\ge\frac{1}{2}|I_j|,$$

故$|x-y|\ge\varepsilon/3$. 若$x-\varepsilon\in I_j$, 则对$\forall y\in I_j$,

$$\varepsilon\le |x-y|+|(x-\varepsilon)-y|<|x-y|+|I_j|$$

且
$$|x-y| \geq |x-c_j| - |y-c_j| \geq |x-c_j| - \frac{1}{2}|I_j| \geq \frac{1}{2}|I_j|,$$
故$|x-y| \geq \varepsilon/3$. 因此
$$|H_\varepsilon(b_j)(x)| \leq \frac{3}{\pi\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b_j(y)|\, dy.$$
综上, 对$\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(b)(x)| &\overset{(12)}{\leq} \sum_{j\in J} |H_\varepsilon(b_j)(x)| \qquad (13)\\
&\leq \sum_{j\in J}\left[\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{3}{\pi\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b_j(y)|\, dy\right]\\
&= \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{3}{\pi\varepsilon}\sum_{j\in J}\int_{B(x,3\varepsilon)\cap I_j} |b(y)|\, dy\\
&= \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{3}{\pi\varepsilon}\int_{B(x,3\varepsilon)\cap \Omega} |b(y)|\, dy \qquad (\text{Levi 定理})\\
&\leq \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{3}{\pi\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b(y)|\, dy\\
&\leq \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{18}{\pi}M(b)(x).
\end{aligned}$$

因此对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
&|\{x\notin\Omega^*:\ H_\varepsilon(b)(x)>\lambda\}| &(14)\\
&\quad\le\left|\left\{x\notin\Omega^*:\ \sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}>\lambda/2\right\}\right|\\
&\qquad+\left|\left\{x\notin\Omega^*:\ \frac{18}{\pi}M(b)(x)>\lambda/2\right\}\right|\\
&\quad\lesssim\frac{1}{\lambda}\int_{\{x\notin\Omega^*:\ \sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}>\lambda/2\}}\lambda\,dx+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\quad\lesssim\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}\sum_{j\in J}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\,dx+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\quad\sim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\left[\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\,dx\right]+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})} &(\text{Levi 定理})\\
&\quad\lesssim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\left[\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}\setminus(2I_j)}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\,dx\right]+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\quad\lesssim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\left[\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}\setminus[-|I_j|,|I_j|)}\frac{|I_j|}{|x|^2}\,dx\right]+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\quad\sim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\left[\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{|I_j|}^{\infty}\frac{|I_j|}{x^2}\,dx\right]+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\quad\sim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\quad\sim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\int_{\mathbb{R}}|b_j(x)|\,dx+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\quad\sim\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{j\in J}|b_j(x)|\right]\,dx+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})} &(\text{Levi 定理})\\
&\quad\sim\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\overset{(5)}{\lesssim}\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

即(10) 成立. 从而存在与$\varepsilon$ 无关的正常数$C_{(1)}$ 使得, 对$\forall f\in L^1(\mathbb{R})$, $\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(f)(x)>\lambda\}|\le\frac{C_{(1)}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{15}$$

(i) 成立.

下证(ii). 由Lemma 1.9 知, 存在与$\varepsilon$ 无关的正常数$C_{(2)}$ 使得, 对$\forall f\in L^p(\mathbb{R})$,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}\le C_{(2)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

从而由Marcinkiewicz 插值定理(书上Theorem 2.4)知, 对$\forall p \in (1,2)$, $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le 2p^{1/p}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2-p}\right)^{1/p}\left[C_{(1)}\right]^{1-2(1-1/p)}\left[C_{(2)}\right]^{2(1-1/p)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

在证明$p \in (2,\infty)$, $H_\varepsilon$ 是强$(p,p)$ 算子之前, 先证明$H_\varepsilon$ 的反自伴性.

**Lemma 1.12.** 设$\varepsilon \in (0,\infty)$, $p \in (1,\infty)$. 则对$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx.$$

*Proof.* 对任意固定$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 和$g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, 有$f \in L^1(\mathbb{R})$, 从而由注1.4(ii) 知, $H_\varepsilon(f) \in L^p(\mathbb{R})$. 由此及$g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ 和Hölder 不等式知, $H_\varepsilon(f)g \in L^1(\mathbb{R})$. 进一步由Tonelli 定理和Fubini 定理有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)}{y}\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\,dy\right]g(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)}{y}g(x)\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\,dxdy && \text{(Tonelli and Fubini)} \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x+y)}{y}g(x)\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\,dxdy && (y := -y) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)}{y}g(x-y)\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\,dxdy && (x := x+y) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{g(x-y)}{y}\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\right]dxdy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx
\end{aligned}$$

由$f$, $g$ 的任意性知, 引理1.11 证毕. □

下面继续证明对$\forall p \in (2,\infty)$, $H_\varepsilon$ 是强$(p,p)$ 算子. 对于$p \in (2,\infty)$, 先证$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 时的情况. 对$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 有$f \in L^1(\mathbb{R})$, 由注1.4(ii) 知, $H_\varepsilon(f) \in L^p(\mathbb{R})$, 从而由引理1.11 有,

$$\begin{aligned}
\|H_\varepsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}=1}\left|\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx\right| && (H_\varepsilon(f) \in L^p(\mathbb{R})) \qquad (16) \\
&= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}=1}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx\right| && (\text{引理}1.11) \\
&\le \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}=1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|H_\varepsilon(g)\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} && (\text{Hölder 不等式}) \\
&\le C_{(p')}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, && (H_\varepsilon \text{ 是强}(p',p') \text{ 算子})
\end{aligned}$$

其中$C_{(p')}$ 是与$\varepsilon$ 无关的正常数.

下面将结论推广到$L^p(\mathbb{R})$ 上. 对任意固定的$f \in L^p(\mathbb{R})$, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

由(16) 知, 对$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\|H_\varepsilon(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_{(p')}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{17}$$

进一步由$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是$L^p(\mathbb{R})$ 中柯西列知, $\{H_\varepsilon(f_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 也是$L^p(\mathbb{R})$ 中柯西列. 由此及$L^p(\mathbb{R})$ 的完备性知, 存在函数$g \in L^p(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|H_\varepsilon(f_k) - g\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0. \tag{18}$$

又因为对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(f_k)(x) - H_\varepsilon(f)(x)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{f_k(x-y) - f(x-y)}{y}\,dy\right| \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}} \left|\frac{f_k(x-y) - f(x-y)}{y}\right|\,dy \\
&\le \frac{1}{\pi}\|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\psi_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \\
&\to 0, \quad \text{as } k\to\infty.
\end{aligned}$$

由此, (18) 及推论1.6 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$, $g(x) = H_\varepsilon(f)(x)$. 因此由(17) 和(18) 知,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \overset{(18)}{=} \lim_{k\to\infty}\|H_\varepsilon(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})} \overset{(17)}{\le} \lim_{k\to\infty} C_{(p')}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R})} = C_{(p')}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

由$f$ 的任意性, $H_\varepsilon$ 是强$(p,p)$ 算子, 且对应的常数与$\varepsilon$ 无关. 定理1.10 证毕. □

**Lemma 1.13.** 设$p \in (1,\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ 且$f_k$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中收敛到$f$. 则

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k(x)g(x)\,dx.$$

*Proof.* 事实上, 由Hölder 不等式有,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f_k(x)g(x)\,dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} [f(x)g(x) - f_k(x)g(x)]\,dx\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_k(x)||g(x)|\,dx \\
&\le \|f - f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \to 0, \quad \text{as } k\to\infty.
\end{aligned}$$

引理1.12 证毕. □

**Remark 1.14.** 设$p \in (1,\infty)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ 且对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$T_g(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,d\mu(x).$$

则由引理1.12 可看出, $T_g$ 是$L^p(\mathbb{R})$ 上的有界线性泛函.

**Theorem 1.15.** 设$\varepsilon \in (0,\infty)$, $p \in (1,\infty)$. 则对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx.$$

*Proof.* 对任意固定的$f \in L^p(\mathbb{R})$ 和$g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

进一步由$H_\varepsilon$ 是强$(p,p)$ 算子知, $H_\varepsilon(f_k)$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中收敛到$H_\varepsilon(f)$. 又由$H_\varepsilon$ 是强$(p',p')$ 算子和$g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ 知, $H_\varepsilon(g) \in L^{p'}(\mathbb{R})$. 综上, 引理1.11 和引理1.12 知

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f_k)(x)g(x)\,dx && \text{(引理1.12)}\\
&= -\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx && \text{(引理1.11)}\\
&= -\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx. && \text{(引理1.12)}
\end{aligned}$$

由$f$, $g$ 的任意性知, 定理1.14 证毕. □

If we fix $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, then the sequence $\{H_\varepsilon f\}$ converges to $Hf$ as defined above in $L^p(\mathbb{R})$ norm if $p \in (1,\infty)$ and in measure if $p = 1$. To see this, fix a sequence $\{f_k\}$ converging to $f$ in $L^p(\mathbb{R})$. Then

$$Hf = \lim_{k\to\infty} Hf_k = \lim_{k\to\infty}\lim_{\varepsilon\to0^+} H_\varepsilon f_k = \lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{k\to\infty} H_\varepsilon f_k = \lim_{\varepsilon\to0^+} H_\varepsilon f;$$

the second and third equalities hold because of the corresponding (uniform) $(p,p)$ inequality.

**Theorem 1.16.** 设$\varepsilon \in (0,\infty)$.

(i) 若$p \in (1,\infty)$, 对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0;$$

(ii) 对$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} = 0;$$

*Proof.* 下面证明(i). 先证$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 时的情况. 对任意固定$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in (0,1)$ 且$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. 存在$N \in \mathbb{N}$, 使得$\operatorname{supp}(f) \subset [-N, N]$. 对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|H_{\varepsilon_1}(f)(x) - H_{\varepsilon_2}(f)(x)| &= \left| \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2\}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy \right| \qquad (19)\\
&= \left| \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2\}} \frac{f(x-y)-f(x)}{y}\,dy \right| \\
&= \left| \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2\}} f'(\xi_y)\,dy \right| \qquad (\text{Lagrange 中值定理})\\
&\le 2\left[\sup_{y\in\mathbb{R}} |f'(y)|\right](\varepsilon_2-\varepsilon_1). \qquad (f \in C_c^\infty(\mathbb{R}))
\end{aligned}$$

同时, 对任意$x \in \mathbb{R}$ 且$|x| \ge N+1$ 和任意$y \in \mathbb{R}$ 且$\varepsilon_1 < |y| \le \varepsilon_2$, 有

$$|x-y| \ge |x| - |y| > N,$$

故$x - y \notin [-N, N]$, 又因为$\operatorname{supp}(f) \subset [-N, N]$, 从而

$$|H_{\varepsilon_1}(f)(x) - H_{\varepsilon_2}(f)(x)| = \left| \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2\}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy \right| = 0. \qquad (20)$$

由此及(19) 知,

$$\begin{aligned}
\|H_{\varepsilon_1}(f) - H_{\varepsilon_2}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \left[\int_{\mathbb{R}} |H_{\varepsilon_1}(f)(x) - H_{\varepsilon_2}(f)(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&= \left[\int_{\{x\in\mathbb{R}:\ |x|<N+1\}} |H_{\varepsilon_1}(f)(x) - H_{\varepsilon_2}(f)(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&\overset{(19)}{\le} [2(N+1)]^{1/p} 2\left[\sup_{y\in\mathbb{R}} |f'(y)|\right](\varepsilon_2-\varepsilon_1) \\
&\to 0, \quad \text{as } \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \to 0^+.
\end{aligned}$$

故$\{H_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 是$L^p(\mathbb{R})$ 中Cauchy 列. 进一步由$L^p(\mathbb{R})$ 的完备性知, 存在$g \in L^p(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - g\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

由此, $H_\varepsilon(f)$ 点点收敛到$H(f)$ (因为$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$), 和推论1.6(i) 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = H(f)(x),$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0. \qquad (21)$$

再将结论推广到$L^p(\mathbb{R})$, $p\in(1,\infty)$ 上. 对任意固定的$f\in L^p(\mathbb{R})$, 由$C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密([周民强, 定理6.23])知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^p(\mathbb{R})}=0.$$

由定理1.10(ii) 和$H$ 是强$(p,p)$ 算子知, 对$\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|H_\varepsilon(f)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}&\le\|H_\varepsilon(f)-H_\varepsilon(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|H_\varepsilon(f_k)-H(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|H(f_k)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\\&\lesssim\|f-f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|H_\varepsilon(f_k)-H(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

其中常数与$\varepsilon$ 无关. 令$\varepsilon\to0^+$, 由(21) 知, 对$\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}\|H_\varepsilon(f)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\lesssim\|f-f_k\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

再令$k\to\infty$ 有

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}\|H_\varepsilon(f)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\le0.$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\|H_\varepsilon(f)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}=0.$$

下面证明(ii). 先证$f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 时的情况. 对任意固定$f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2\in(0,1)$ 且$\varepsilon_1<\varepsilon_2$. 存在$N\in\mathbb{N}$, 使得$\operatorname{supp}(f)\subset[-N,N]$. 由(19) 知, 对$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|H_{\varepsilon_1}(f)(x)-H_{\varepsilon_2}(f)(x)|\le2\left[\sup_{y\in\mathbb{R}}|f'(y)|\right](\varepsilon_2-\varepsilon_1).$$

由(20) 知, 对$\forall x\in\mathbb{R}$ 且$|x|\ge N+1$,

$$|H_{\varepsilon_1}(f)(x)-H_{\varepsilon_2}(f)(x)|=0.$$

从而

$$\begin{aligned}&\|H_{\varepsilon_1}(f)-H_{\varepsilon_2}(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\\&\quad=\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda|\{x\in\mathbb{R}:\ |H_{\varepsilon_1}(f)(x)-H_{\varepsilon_2}(f)(x)|>\lambda\}|\\&\quad=\sup_{\lambda\in(0,2[\sup_{y\in\mathbb{R}}|f'(y)|](\varepsilon_2-\varepsilon_1))}\lambda|\{x\in(-N-1,N+1):\ |H_{\varepsilon_1}(f)(x)-H_{\varepsilon_2}(f)(x)|>\lambda\}|\\&\quad\le2\left[\sup_{y\in\mathbb{R}}|f'(y)|\right](\varepsilon_2-\varepsilon_1)[2(N+1)]\\&\quad\to0,\quad\text{as }\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\to0^+.\end{aligned}$$

故$\{H_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 是$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 中Cauchy 列. 进一步由$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 的完备性知, 存在$g\in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\|H_\varepsilon(f)-g\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}=0.$$

由此, $H_\varepsilon(f)$ 点点收敛到$H(f)$(因为$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$), 和推论1.6(ii) 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = H(f)(x),$$

从而

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} = 0. \tag{22}$$

再将结论推广到$L^1(\mathbb{R})$ 上. 对任意固定的$f \in L^1(\mathbb{R})$, 由$C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在$L^1(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

由定理1.10(i) 和$H$ 是弱$(1,1)$ 算子知, 对$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} &\lesssim \|H_\varepsilon(f) - H_\varepsilon(f_k)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} + \|H_\varepsilon(f_k) - H(f_k)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} + \|H(f_k) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \|f - f_k\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|H_\varepsilon f_k - Hf_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

令$\varepsilon \to 0^+$, 由(22) 知,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \lesssim \|f - f_k\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

再令$k \to \infty$ 有

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \le 0.$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} = 0.$$

定理1.15 证毕. □

由定理1.15(i) 和$H_\varepsilon$ 的反自伴性可以推出$H$ 的反自伴性.

**Corollary 1.17.** 设$\varepsilon \in (0,\infty)$, $p \in (1,\infty)$. 则对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall g \in L^{p'}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} H(f)(x)g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)H(g)(x)\,dx.$$

*Proof.* 对任意固定$f \in L^p(\mathbb{R})$ 和$g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, 由定理1.15(i) 知,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H(f) - H_\varepsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0, \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H(g) - H_\varepsilon(g)\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} = 0.$$

由此, 引理1.11 和引理1.12 知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} H(f)(x)g(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx && (\text{引理1.12}) \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx && (\text{定理1.14}) \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)H(g)(x)\,dx. && (\text{引理1.12})\end{aligned}$$

推论1.16 证毕. □

不用$H_\varepsilon$ 的反自伴性也能得到$H$ 的反自伴性. 注意到, 之前已经证明了对$\forall f$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} H(f)(x)g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)H(g)(x)\,dx.$$

由此及$H$ 是强$(p,p)$, $p \in (1,\infty)$ 算子, 不难得到$H$ 的反自伴性.

We now want to show that the same equality holds pointwise almost everywhere.

**Theorem 3.3.** Given $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, then

$$H(f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f)(x) \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Since we know that (3.7) holds for some subsequence $\{H_{\varepsilon_k} f\}$, we only need to show that lim $H_\varepsilon(f)(x)$ exists for almost every $x$. By Theorem 2.2 (and the remarks following it) it will suffice to show that the maximal operator

$$H^*(f)(x) := \sup_{\varepsilon>0} |H_\varepsilon(f)(x)|$$

is weak $(p,p)$.

**Definition 1.18.** 设$p \in [1,\infty)$. 对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$H^*(f)(x) := \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(f)(x)|.$$

*Proof of Theorem 3.3.* 由书上Theorem 3.4 知, 对$\forall p \in [1,\infty)$, $H^*$ 是弱$(p,p)$ 的, 进一步由书上Theorem 2.2 知,

$$\left\{f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f) \text{ exists a.e.}\right\}$$

在$L^p(\mathbb{R})$ 中是闭集. 又因为

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \left\{f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f) \text{ exists a.e.}\right\}$$

故

$$L^p(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \subset \left\{f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f) \text{ exists a.e.}\right\} \subset L^p(\mathbb{R}),$$

从而

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f) \text{ exists a.e.}\right\},$$

即对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f)(x)$ 存在. 由此, 定理1.15 和推论1.6 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$,

$$H(f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f)(x).$$

Theorem 3.3 证毕. □

**Theorem 3.4.** $H^*$ is strong $(p,p)$, $1<p<\infty$, and weak $(1,1)$.

To prove this we need a lemma which is referred to as Cotlar's inequality.

**Lemma 3.5.** If $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ then $H^*(f)(x)\le M(Hf)(x)+CM(f)(x)$.

Lemma 3.5 的证明, 贾洪潮师兄已经讲过了.
在zyy 师兄的帮助下, 对Theorem 3.4 弱$(1,1)$ 的证明进行了改进.

*Proof of Theorem 3.4.* 先证$p\in(1,\infty)$ 时, $H^*$ 是强$(p,p)$ 算子. 对任意固定的$f\in L^p(\mathbb{R})$, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^p(\mathbb{R})}=0.$$

从而, 对$\forall\varepsilon\in(0,\infty)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 由Hölder 不等式知

$$\begin{aligned}|H_\varepsilon(f)(x)-H_\varepsilon(f_k)(x)|&=\left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{f(x-y)-f_k(x-y)}{y}\,dy\right|\\&\le\frac{1}{\pi}\|f-f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\psi_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\to0,\quad\text{as }k\to\infty,\end{aligned}$$

由此及Lemma 3.5 知,

$$|H_\varepsilon(f)(x)|=\lim_{k\to\infty}|H_\varepsilon(f_k)(x)|\overset{\text{Lemma 3.5}}{\le}\liminf_{k\to\infty}[M(Hf_k)(x)+CM(f_k)(x)].$$

从而对$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|H^*(f)(x)|=\sup_{\varepsilon\in(0,\infty)}|H_\varepsilon(f)(x)|\le\liminf_{k\to\infty}[M(Hf_k)(x)+CM(f_k)(x)].$$

进一步由Fatou 引理和$M$, $H$ 是强$(p,p)$ 算子知,

$$\begin{aligned}\|H^*(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}&\le\left\|\liminf_{k\to\infty}[M(Hf_k)+CM(f_k)]\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\\&\le\liminf_{k\to\infty}\|M(Hf_k)+CM(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})}\qquad\text{(Fatou Lemma)}\\&\lesssim\liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}\sim\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

即$H^*$ 是强$(p,p)$ 算子.

再证$H^*$ 是弱$(1,1)$ 算子. 对任意固定的$f\in L^1(\mathbb{R})$, 不妨设$f$ 是非负实值函数. 由书上Theorem 2.11(Calderón-Zygmund 分解) 知, 对任意给定的正常数$\lambda$, 存在两两不交的二进方体序列$\{I_j\}_{j\in J}\subset\mathbb{R}$ 使得

- 对几乎处处$x\notin\Omega:=\bigcup_{j\in J}I_j$, $f(x)\le\lambda$;

- $|\Omega| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$;
- 对$\forall j \in J$,

$$\lambda < \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt \le 2\lambda.$$

对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \notin \Omega, \\ \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt, & x \in I_j, \end{cases}$$

且

$$b(x) := \sum_{j\in J} b_j(x),$$

其中对$\forall j \in J$,

$$b_j(x) := \left[f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt\right]\mathbf{1}_{I_j}(x).$$

则对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) + b(x).$$

首先注意到, 对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \le 2\lambda,$$

因此对$\forall p \in [1,\infty)$,

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} [g(x)]^p\,dx \\ &\le (2\lambda)^{p-1}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx \\ &= (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^{\complement}} g(x)\,dx + \sum_{j\in J}\int_{I_j} g(x)\,dx\right] && (g \ge 0 \text{ and Levi}) \\ &= (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^{\complement}} f(x)\,dx + \sum_{j\in J}\int_{I_j} \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt\,dx\right] \\ &\le (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^{\complement}} f(x)\,dx + \sum_{j\in J}\int_{I_j} f(t)\,dt\right] \\ &= (2\lambda)^{p-1}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, && (f \ge 0 \text{ and Levi}) \end{aligned} \tag{23}$$

从而$g \in L^p(\mathbb{R})$. 进一步由$f \in L^1(\mathbb{R})$ 知,

$$b = f - g \in L^1(\mathbb{R}),$$

又由(23) 有

$$\|b\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{24}$$

注意到, 对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H^*(f)(x) &= \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(f)(x)| \\ &= \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(g)(x) + H_\varepsilon(b)(x)| \\ &\le \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(g)(x)| + \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(b)(x)| \\ &= H^*(g)(x) + H^*(b)(x). \end{aligned}$$

因此对$\forall \lambda \in (0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(f)(x) > \lambda\}| \le |\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(g)(x) > \lambda/2\}| + |\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(b)(x) > \lambda/2\}|. \tag{25}$$

关于$H^*(g)$ 的估计. 由$H^*$ 是强$(2,2)$ 算子知, 存在与$g$ 无关的正常数$C_{(2)}$ 使得

$$\|H^*(g)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C_{(2)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{26}$$

由此及(23) 知, 对$\forall \lambda \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned} &|\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(g)(x) > \lambda/2\}| \\ &\quad= \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(g)(x)>\lambda/2\}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 dx \\ &\quad\le \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(g)(x)>\lambda/2\}} [H^*(g)(x)]^2\, dx \\ &\quad\le \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} [H^*(g)(x)]^2\, dx \\ &\quad\overset{(26)}{\le} \left[\frac{2}{\lambda}C_{(2)}\right]^2 \int_{\mathbb{R}} [g(x)]^2\, dx \\ &\quad= \left[\frac{2}{\lambda}C_{(2)}\right]^2 \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad\overset{(23)}{\le} \frac{8[C_{(2)}]^2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{27}$$

对于$H^*(b)$ 的估计, 记$\Omega^* := \bigcup_{j\in J} 2I_j$. 注意到$|\Omega| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ 且$\Omega = \bigcup_{j\in J} I_j$, $I_j$ 两两不交, 故

$$|\Omega^*| \le \sum_{j\in J} |2I_j| = 2\sum_{j\in J} |I_j| = 2|\Omega| \le \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

因此

$$\begin{aligned} |\{x\in\mathbb{R}:\ |H^*(b)(x)| > \lambda/2\}| &\le |\Omega^*| + |\{x\notin\Omega^*:\ |H^*(b)(x)| > \lambda/2\}| \\ &\le \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + |\{x\notin\Omega^*:\ |H^*(b)(x)| > \lambda/2\}|. \end{aligned} \tag{28}$$

如果已经证明存在正常数$C$ 使得, 对$\forall\lambda \in (0,\infty)$,

$$|\{x \notin \Omega^*:\ H^*(b)(x) > \lambda/2\}| \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{29}$$

由此, (25), (27) 和(28) 知, 存在与$f$ 无关的正常数$\widetilde{C}$使得, 对$\forall\lambda \in (0,\infty)$,

$$|\{x \in \mathbb{R}:\ H^*(f)(x) > \lambda\}| \le \frac{\widetilde{C}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

下证(29) 成立. 由(13) 知, 对$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall\varepsilon \in (0,\infty)$,

$$|H_\varepsilon(b)(x)| \le \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{18}{\pi}M(b)(x),$$

故

$$|H^*(b)(x)| = \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)}|H_\varepsilon(b)(x)| \le \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{18}{\pi}M(b)(x).$$

因此对$\forall\lambda \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
&|\{x \notin \Omega^*:\ H^*(b)(x) > \lambda\}| \\
&\quad \le \left|\left\{x \notin \Omega^*:\ \sum_{j\in J}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})} > \lambda/2\right\}\right| \\
&\qquad + |\{x \notin \Omega^*:\ 18M(b)(x) > \lambda/2\}| \\
&\quad \overset{(14)}{\lesssim} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

即(29) 成立. 从而存在正常数$C_{(1)}$ 使得, 对$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall\lambda \in (0,\infty)$,

$$|\{x \in \mathbb{R}:\ H^*(f)(x) > \lambda\}| \le \frac{C_{(1)}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{30}$$

Theorem 3.4 证毕. □

用到的一些定理

[丁勇, 现代分析基础, p.1]

**定理 1.1.2** (Young 不等式) 设 $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 及 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则 $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.1.1}$$

[周民强, 实变函数论(第2版), p.186]

**推论 4.16(逐项积分)** 设 $f_k \in L(E)$ $(k=1,2,\cdots)$. 若有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)| \mathrm{d}x < \infty,$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 $E$ 上几乎处处收敛；若记其和函数为 $f(x)$，则 $f \in L(E)$ 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

[周民强, 实变函数论(第2版), p.139]

**定理 3.17(Riesz)** 若 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$，则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$，使得

$$\lim_{i \to \infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

[伍胜健, 数学分析(第2册), p.107]

**定理 8.2.5 (狄利克雷判别法)** 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 且满足下面两个条件:

(1) 对于 $\forall X > a$, $f(x)$ 在区间 $[a, X]$ 上可积, 并且 $\exists M > 0$, 使得对于 $\forall X > a$, 有

$$\left| \int_a^X f(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant M;$$

(2) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调, 并且 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$,

则无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x) g(x) \mathrm{d}x$ 收敛.

[丁勇, 现代分析基础, p.50]

**定理 2.2.6** 如 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么 $\widehat{(f * g)}(x) = \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)$ a.e..

[周民强, 实变函数论(第2版), p.326]

**定理 6.23** 具有紧支集且无限次可微的函数类 $C_c^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 中稠密.

周民强定理中的$p \in [1, \infty)$. 事实上, 孙镜淞证明了当$p \in (0, 1)$ 时, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 同样在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密.

[G. B. Folland, Real Analysis, p.188]

**6.13 Proposition.** *Suppose that $p$ and $q$ are conjugate exponents and $1 \leq q < \infty$. If $g \in L^q$, then*

$$\|g\|_q = \|\phi_g\| = \sup\left\{ \left| \int fg \right| : \|f\|_p = 1 \right\}.$$