Cartesian Product and Product Space

January 23, 2020

1 Cartesian product

1.1 Definition

以下定义来自论文[1, p.113].

集合$\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 的笛卡尔积, 记为$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, 是

$$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}:=\{(x,y):x\in\mathcal{X},y\in\mathcal{Y}\}.$$

这种定义通俗易懂但不利于推广. $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 的另一种定义是

$$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}:=\{f:\{0,1\}\to\mathcal{X}\cup\mathcal{Y}:f(0)\in\mathcal{X},f(1)\in\mathcal{Y}\}.$$

这种定义能自然地推广到无穷维乘积空间.

设I 是指标集, $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ 是集合列. 定义

$$\prod_{i\in I}\mathcal{X}_i:=\left\{f:I\to\bigcup_{i\in I}\mathcal{X}_i:\ \text{for any } i\in I, f(i)\in\mathcal{X}_i\right\}.$$

1.2 Example

取值为$\mathbb{R}$ 的数列就是一个常见的笛卡尔积, 我们通常将其简写成$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, 但事实上它的定义是

$$\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}:\ \text{for any } i\in\mathbb{N}, f(i)\in\mathbb{R}\}.$$

以下是我自己瞎写的. 单纯的集合操作空间太小了, 我们需要尝试定义集合$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 上的结构. 集合$\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 上一般会有拓扑结构τ_x,τ_y, 集合+结构=空间, 如果我们能由τ_x,τ_y 诱导出$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 上的拓扑τ, 那我们就能得到乘积空间$(\mathcal{X}\times\mathcal{Y},\tau)$.

2 Product Space

2.1 Definition

以下定义来自[1, p.114].

乘积空间在集合意义下就是笛卡尔积, 关键是拓扑结构的诱导.

设I 是指标集, $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ 是一列拓扑空间. 定义

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i\in I} U_i : \text{ for any } i \in I, U_i \text{ is open set in } \mathcal{X}_i \right\}.$$

为笛卡尔积$\prod_{i\in I} \mathcal{X}_i$ 的拓扑基. 令τ 为拓扑基$\mathcal{B}$ 诱导的拓扑, i.e.

$$\tau := \left\{ \bigcup_{j\in J} U_j : \text{ for any } j \in J, U_j \in \mathcal{B} \right\}.$$

称$(\prod_{i\in I} \mathcal{X}_i, \tau)$ 为乘积空间.

2.2 Example

取值为$\mathbb{R}$ 的数列也是一个常见的乘积空间, 它上面的拓扑是

$$\left\{ \prod_{k=1}^{\infty} U_k : \text{ for any } k \in \mathbb{N}, U_k \text{ is open set in } \mathbb{R} \right\}.$$

References

[1] J. R. Munkres, Topology, Second edition, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1975.