$L^p(\mathbb{R}^n)$ 对偶等式的推广

December 5, 2020

1 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的对偶

讲到$L^p(\mathbb{R}^n)$ 的对偶, 那就会提到如下定理.

Theorem 1.1. 设$p \in [1,\infty)$. 则对$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g\in L^{p'}(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx.$$

事实上, 该定理条件中的$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 可减弱为f 是$\mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

Theorem 1.2 (H. Brezis, Functional Analysis, Exercise 4.7)**.** 设$p \in [1,\infty)$, f 是$\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 若$\forall g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 有$fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Corollary 1.3. 设$p \in [1,\infty)$, f 是$\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 则存在$g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$,$\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 1$ 使得

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx.$$

另一种推广如下. 要求一致有界, 但可以减弱g 的范围.

Theorem 1.4. 设$p \in [1,\infty)$, f 是$\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 则

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx. \tag{1}$$

1.1 实分析角度的证明

证明思路: $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 时, 该定理回到了经典情况, 故只需证明$\|f\|_p = \infty$ 时, 右边也等于无穷. 即证右边小于无穷时, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 此时先证

$$\sup_{g\in L^\infty(\mathbb{R}^n), g\text{有紧支集}, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx < \infty.$$

再取一列g_n 使得fg_n 逼近$|f|^p$. 从而证得$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

首先定义卷积核. 对$\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

则$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\rho) = \overline{B(0,1)}$ 且$\rho \geq 0$. 对$\forall k \in \mathbb{N}$ 和$\forall x \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\rho_k(x) := \frac{k^n}{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}\rho(kx) = \begin{cases} \dfrac{k^n}{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \exp\left(\dfrac{1}{|kx|^2-1}\right), & |kx| < 1, \\ 0, & |kx| \geq 1, \end{cases}$$

则$\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\rho_k) = \overline{B(0,1/k)}$, $\rho_k \geq 0$ 且$\|\rho_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$.

Lemma 1.5. 设$A \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $A \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集, 则$A+B$ 为闭集.

Proof. 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A+B$ 在$\mathbb{R}^n$ 中收敛到x_0. 则存在$\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ 和$\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B$ 使得, 对$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$x_k = y_k + z_k.$$

由于A 为有界闭集, 故可取$\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为$\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的收敛子列. 记$y_0 := \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$, 则$y_0 \in A$. 又由$B$ 是闭集知

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0 - y_0 \in B.$$

故

$$x_0 = y_0 + (x_0 - y_0) \in A + B.$$

因此$A+B$ 是闭集. □

Remark 1.6. 注意, 两闭集必须有其中之一是有界的, 否则结论不一定成立. 取

$$A := \left\{k + \frac{1}{k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad \text{and} \quad B := \mathbb{Z},$$

则

$$A + B = \left\{k + \frac{1}{m} : \ k \in \mathbb{Z}, \ m \in \mathbb{N}\right\}$$

不是闭集.

有了这些准备工作, 现在可以开始证明Theorem 1.4 了.

Proof of Theorem 1.4. 当$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 时, (1) 是经典的等式, 证明略.

断言, 若

$$\sup_{g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx =: M < \infty.$$

则$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 事实上, 当$M < \infty$ 时, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 是自动的. 令$g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有紧支集且$\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 1$. 对$\forall k \in \mathbb{N}$, 设$g_k := \rho_k * g$, 则$g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_k(x)\, dx \le M \|g_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

因为$\lim_{k\to\infty} \|g_k - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$, 由Riesz 定理知, 存在子列$g_{n_k}$ 几乎处处收敛到g. 又由g_k 的定义知, $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 且由引理1.5 知,

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(g_k) &= \operatorname{supp}(\rho_k * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(\rho_k) + \operatorname{supp}(g)} \\ &= \overline{\overline{B(0,1/k)} + \operatorname{supp}(g)} = \overline{B(0,1/k)} + \operatorname{supp}(g) \subset \overline{B(0,1)} + \operatorname{supp}(g),\end{aligned}$$

由此及$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 知, 对$\forall k \in \mathbb{N}$, 在几乎处处意义下

$$|f g_k| \le \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |f \mathbf{1}_{\operatorname{supp}(g_k)}| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left| f \mathbf{1}_{\overline{B(0,1)} + \operatorname{supp}(g)} \right| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

故由控制收敛定理

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f(x) g_{n_k}(x)\, dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_{n_k}(x)\, dx \\ &\le \lim_{k\to\infty} M \|g_{n_k}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = M.\end{aligned}$$

从而

$$\sup_{g \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\, g\text{有紧支集},\, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x)\, dx \le M.$$

若$p = 1$. 对$\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$g_k := \operatorname{sign}(f) \mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则$g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, g_k 有紧支集且$\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1$, 从而

$$\int_{B(0,k)} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_k(x)\, dx \le M.$$

令$k \to \infty$, 由Levi 定理知

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le M.$$

若$p \in (1, \infty)$. 对$\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$g_k := |f|^{p-1} \operatorname{sign}(f) \mathbf{1}_{\{|f|<k\}} \mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则$g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且g_k 有紧支集, 从而

$$\begin{aligned}\int_{B(0,k)\cap\{|f|<k\}} |f(x)|^p\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_k(x)\, dx \le M \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &= M \left[\int_{B(0,k)\cap\{|f|<k\}} |f(x)|^p\, dx \right]^{1/p'},\end{aligned}$$

故
$$\left[\int_{B(0,k)\cap\{|f|<k\}} |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \le M.$$
令$k\to\infty$, 由Levi 定理知
$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le M.$$
综上, 断言成立.

因此, 当$f\notin L^p(\mathbb{R}^n)$ 时,
$$\sup_{g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = \infty$$
(1) 仍然成立. 至此Theorem 1.4 证毕. □

2 泛函角度的证明

Theorem 1.4 的第一种证明思路来源于Brezis 书中Corollary 4.24 的证明. 同样的思路在张恭庆的泛函分析中也有提到. 实际上直接利用此结论, 从泛函角度能快速证明Theorem 1.4.

Theorem 2.1 (H. Brezis, Functional Analysis, Corollary 4.24)**.** 设开集$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 且$f\in L^1_{loc}(\Omega)$ 满足对$\forall g\in C_c^\infty(\Omega)$,
$$\int_\Omega f(x)g(x)\,dx = 0.$$
则f 在Ω 上几乎处处为0.

Proof. 为了方便, 只证$\Omega=\mathbb{R}^n$ 时的情况. 令$g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且有紧支集. 对$\forall k\in\mathbb{N}$, 设$g_k:=\rho_k * g$, 则$g_k\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 从而
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x)\,dx = 0.$$
因为$\lim_{k\to\infty}\|g_k-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=0$, 由Riesz 定理知, 存在子列$g_{n_k}$ 几乎处处收敛到g. 又由g_k 的定义知, $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 且
$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(g_k) &= \operatorname{supp}(\rho_k * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(\rho_k)+\operatorname{supp}(g)}\\ &= \overline{\overline{B(0,1/k)}+\operatorname{supp}(g)} = \overline{B(0,1/k)}+\operatorname{supp}(g) \subset \overline{B(0,1)}+\operatorname{supp}(g),\end{aligned}$$
由此及$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 知, 对$\forall k\in\mathbb{N}$, 在几乎处处意义下
$$|fg_k| \le \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|f\mathbf{1}_{\operatorname{supp}(g_k)}| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left|f\mathbf{1}_{\overline{B(0,1)}+\operatorname{supp}(g)}\right| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

故由控制收敛定理

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f(x)g_{n_k}(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_{n_k}(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

对$\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$g_k := \mathrm{sign}(f)\mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则$g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且有紧支集, 从而

$$\int_{B(0,k)} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x)\,dx = 0,$$

故对a.e. $x \in B(0,k)$, $f(x) = 0$. 再由k 的任意性知, 对a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = 0$. □

下面给出Theorem 1.4 的另一种证明.

Proof of Theorem 1.4. 当$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 时, (1) 是经典的等式, 证明略.

若

$$\sup_{g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx =: M < \infty.$$

则可定义算子

$$T:\ C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ g \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx.$$

该算子是连续线性泛函, 从而可以沿拓为$L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续泛函$\widetilde{T}$. 对于$\widetilde{T}$, 存在$\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\widetilde{T}(g) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)g(x)\,dx, \quad \forall g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n).$$

对$\forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = T(g) = \widetilde{T}(g) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)g(x)\,dx,$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[f(x) - \tilde{f}(x)\right] g(x)\,dx = 0.$$

由此及Theorem 2.1 知, f 和$\tilde{f}$ 几乎处处相等, 故$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □