笔记-J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis

January 3, 2021

1 待整理

Lemma 1.1. 设$N \in \mathbb{N}$, 开区间$\{I_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}$ 且

$$\bigcap_{k=1}^{N} I_k \neq \emptyset.$$

则存在$k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^{N} I_k = I_{k_0},$$

或存在$k_1, k_2 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^{N} I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}.$$

Proof. 若存在$k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^{N} I_k = I_{k_0},$$

Lemma 1.1 证毕. 否则由$\bigcap_{k=1}^N I_k \neq \emptyset$ 知, 存在$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ 使得

$$\bigcup_{\alpha \in A} I_k = (a, b).$$

存在$k_1, k_2 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\inf I_{k_1} = a, \quad \text{and} \quad \sup I_{k_2} = b.$$

由此及$I_{k_1} \cap I_{k_2} \neq \emptyset$ 知

$$\bigcup_{k=1}^{N} I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}.$$

□

Lemma 1.2 (Lemma 2.6)**.** *Let* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *be a collection of open intervals in* $\mathbb{R}^n$ *and let* K *be a compact set contained in their union. Then there exists a finite subcollection* $\{I_j\}$ *such that*

$$K \subset \bigcup_j I_j, \quad \textit{and} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_j 1_{I_j}(x) \leq 2.$$

Proof. 由K 是紧集知, 存在$\{I_k^{(0)}\}_{k=1}^{N_0} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k^{(0)}.$$

若存在$x_0 \in \mathbb{R}$ 使得$\sum_{k=1}^{N_0} 1_{I_j^{(0)}}(x_0) \geq 3$, 则由Lemma 1.8 知, 存在$\{I_k^{(1)}\}_{k=1}^{N_1} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得$N_1 \leq N_0 - 1$ 且

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N_1} I_k^{(1)}.$$

若存在$x_1 \in \mathbb{R}$ 使得$\sum_{k=1}^{N_1} 1_{I_j^{(1)}}(x_1) \geq 3$, 重复之前的过程. 由于$\{N_k\}$ 严格减且大于0, 故此过程经过有限次后会停止, 此时存在$\{I_k^{(s)}\}_{k=1}^{N_s} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N_s} I_k^{(s)} \quad \text{and} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=1}^{N_s} 1_{I_k^{(s)}}(x) \leq 2.$$

□

Lemma 2.12 的证明中会用到如下事实.

Theorem 1.3. *设方体Q_1, Q_2 满足$Q_1 \subset Q_2$, 则对$\forall \alpha \in [1,\infty)$, $\alpha Q_1 \subset \alpha Q_2$. 其中$\alpha Q_1$ 表示与Q_1 中心相同, 长度为$\alpha\ell(Q_1)$ 的方体.*

Proof. 由$Q_1 \subset Q_2$ 知, $\ell(Q_1) \leq \ell(Q_2)$, 因此对$\forall x := (x_1, \ldots, x_n) \in \alpha Q_1$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} |x_k - (x_{Q_2})_k| &\leq |x_k - (x_{Q_1})_k| + |(x_{Q_1})_k - (x_{Q_2})_k| \\ &\leq \frac{\alpha\ell(Q_1)}{2} + \frac{\ell(Q_2) - \ell(Q_1)}{2} \\ &= \frac{(\alpha-1)\ell(Q_1)}{2} + \frac{\ell(Q_2)}{2} \leq \frac{\alpha\ell(Q_2)}{2}. \end{aligned}$$

因此$x \in \alpha Q_2$. □

3.4 Truncated integrals and pointwise convergence

For $\varepsilon > 0$, the functions $y^{-1}\mathbf{1}_{\{|y|>\varepsilon\}}$ belong to $L^q(\mathbb{R})$, $1 < q \le \infty$, so the functions

$$H_\varepsilon(f)(x) := \frac{1}{\pi}\int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,dy$$

are well defined if $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1,\infty)$.

在以下全文中, 对$\forall \varepsilon \in (0,\infty)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, 令$\psi := y^{-1}\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>1\}}$,

$$\psi_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & |y| > \varepsilon, \\ 0, & |y| \le \varepsilon. \end{cases}$$

设$\varepsilon \in (0,\infty)$, $p \in [1,\infty)$. 则对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$H_\varepsilon(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\psi_\varepsilon(y)\,dy = \frac{1}{\pi}(f*\psi_\varepsilon)(x),$$

即在点点意义下

$$H_\varepsilon(f) = \frac{1}{\pi}(f*\psi_\varepsilon).$$

Remark 1.4. 设$\varepsilon \in (0,\infty)$.

(i) 对$q \in (1,\infty]$, $\psi_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R})$;

(ii) 若$f \in L^1(\mathbb{R})$, 则对$\forall q \in (1,\infty]$, $H_\varepsilon(f) \in L^q(\mathbb{R})$.

Proof. 先证(i). 当$q = \infty$ 时,

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R})} = \operatorname*{esssup}_{y\in\mathbb{R}} |\psi_\varepsilon(y)| = \sup_{y\in\mathbb{R},|y|>\varepsilon}\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{\varepsilon} < \infty.$$

当$q \in (1,\infty)$ 时,

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^q(\mathbb{R})} = \left[\int_{\mathbb{R}} |\psi_\varepsilon(y)|^q\,dy\right]^{1/q} = \left(2\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{y^q}\,dy\right)^{1/q} = \left(\frac{2\varepsilon^{1-q}}{q-1}\right)^{1/q} < \infty.$$

因此对$\forall q \in (1,\infty]$, $\psi_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R})$.

再证(ii). 对$\forall q \in (1,\infty]$, 由(i) 知$\psi_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R})$. 由此, $f \in L^1(\mathbb{R})$ 和Young 不等式([丁勇, 定理1.1.2]) 知,

$$H_\varepsilon(f) = \frac{1}{\pi}(f*\psi_\varepsilon) \in L^q(\mathbb{R}).$$

注1.4 证毕. □

Remark 1.5. 设$p \in [1,\infty)$ 且$f \in L^p(\mathbb{R})$. 则$H_\varepsilon(f)$ 是良定义的.

Proof. 由Hölder 不等式知, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\psi_\varepsilon(y)|\,dy \overset{\text{Hölder 不等式}}{\leq} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\psi_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} < \infty.$$

因此$H_\varepsilon(f)$ 是良定义的. □

Moreover, H_ε satisfies weak $(1,1)$ and strong (p,p) estimates like those in Theorem 3.2 with constants that are uniformly bounded for all ε. To see this, we first note that

$$\left(\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\varepsilon\}}\right)^{\wedge}(\xi) = -2i\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\lim_{N\to\infty}\int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|}\frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

This is uniformly bounded, so the strong $(2,2)$ inequality holds with constant independent of ε.

Lemma 1.6. 可测函数列$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 依测度收敛到f 且几乎处处收敛到g. 则对几乎处处$x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)$.

Proof. 由$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 依测度收敛到f 和Riesz 定理([周民强, 定理3.17])知, 存在子列$\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得对几乎处处$x\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x).$$

从而对几乎处处$x\in\mathbb{R}$,

$$g(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = f(x),$$

引理1.6 证毕. □

Corollary 1.7. 设$p\in[1,\infty)$.

(i) 若$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset L^p(\mathbb{R})$ 依范数收敛到f 且几乎处处收敛到g. 则对几乎处处$x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)$;

(ii) 若$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset L^{p,\infty}(\mathbb{R})$ 依拟范数收敛到f 且几乎处处收敛到g. 则对几乎处处$x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)$.

Lemma 1.8. 对$\forall x\in[0,\infty)$, $F(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$, 则$F\in C([0,\infty))$ 且

$$\|F\|_{C([0,\infty))} := \sup_{x\in[0,\infty)} |F(x)| < \infty.$$

Proof. 先证$F\in C([0,\infty))$. 任取$x_0\in[0,\infty)$, 对$\forall x\in[0,\infty)$,

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leq |x-x_0| \to 0, \quad \text{as} \quad x\to x_0.$$

因此F 在点x_0 处连续. 由$x_0\in[0,\infty)$ 的任意性知, $F\in C([0,\infty))$.

再证$\|F\|_{C([0,\infty))} < \infty$. 由Dirichlet 判别法([伍胜健, 定理8.2.5])知, 极限

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

存在. 事实上,

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

从而存在$N \in \mathbb{N}$ 使得对$\forall x > N$, $|F(x) - \pi/2| < 1$. 又因为$F \in C([0,\infty))$, 故可记$M := \max_{x\in[0,N]} |F(x)|$, 从而

$$\|F\|_{C([0,\infty))} = \sup_{x\in[0,\infty)} |F(x)| \le \max\left\{M, \frac{\pi}{2}+1\right\} < \infty.$$

引理1.8 证毕. □

Remark 1.9. 对几乎处处$\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(-\xi) = -\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi),$$

且存在正常数C 使得对$\forall \varepsilon \in (0,\infty)$, $\|\widehat{\psi_\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C$.

Proof. 由注1.4(i) 知$\psi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$. 由此及书上Thm 1.18 知, 在$L^2(\mathbb{R})$ 意义下,

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) &= \lim_{N\to\infty} \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|<N\}} \psi_\varepsilon(y) \mathrm{e}^{-2\pi i y\xi}\,dy && \text{(Thm 1.18)}\\
&= \lim_{N\to\infty} \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon<|y|<N\}} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi i y\xi}}{y}\,dy\\
&= \lim_{N\to\infty} \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon<|y|<N\}} \left[\frac{\cos(2\pi y\xi)}{y} - i\frac{\sin(2\pi y\xi)}{y}\right] dy\\
&= -i \lim_{N\to\infty} \int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon<|y|<N\}} \frac{\sin(2\pi y\xi)}{y}\,dy && \left(\frac{\cos(2\pi y\xi)}{y}\ \text{是奇函数}\right)\\
&= -2i \lim_{N\to\infty} \int_\varepsilon^N \frac{\sin(2\pi y\xi)}{y}\,dy\\
&= -2i \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon\xi}^{2\pi N\xi} \frac{\sin t}{t}\,dt && (t := 2\pi y\xi)\\
&= -2i\,\mathrm{sgn}\,(\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\,dt.
\end{aligned}$$

又由Dirichlet 判别法知, 对$\forall \xi \in \mathbb{R}$, 极限

$$-2i\,\mathrm{sgn}\,(\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

存在, 从而由推论1.7 知, 对几乎处处$\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) = -2i\,\mathrm{sgn}\,(\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

因此对几乎处处$\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\widehat{\psi_\varepsilon}(-\xi) &= -2i\,\mathrm{sgn}\,(-\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\,dt \\ &= 2i\,\mathrm{sgn}\,(\xi) \lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi),\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)\right| &= 2\left|\lim_{N\to\infty} \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \\ &= 2\left|\lim_{N\to\infty} \int_{0}^{2\pi N|\xi|} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^{2\pi\varepsilon|\xi|} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \\ &\le 4 \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right|.\end{aligned}$$

故由引理1.8 知,

$$\left\|\widehat{\psi_\varepsilon}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \operatorname*{esssup}_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)\right| \le 4 \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \overset{\text{引理1.8}}{<} \infty.$$

注1.9 证毕. $\square$

Lemma 1.10. 设$\varepsilon \in (0,\infty)$. 则存在与$\varepsilon$ 无关的正常数C 使得, 对$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Proof. 先证$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 时的结论. 对$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, 有$f \in L^1(\mathbb{R})$. 由注1.4(ii) 知, $H_\varepsilon(f) \in L^2(\mathbb{R})$. 由此, Thm 1.18, 卷积定理([丁勇, 定理2.2.6])和注1.9 知,

$$\begin{aligned}\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} &\overset{\text{Thm 1.18}}{=} \|[H_\varepsilon(f)]^\wedge\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\frac{1}{\pi}(f*\psi_\varepsilon)^\wedge\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\overset{\text{卷积定理}}{=} \frac{1}{\pi}\left\|\widehat{f}\,\widehat{\psi_\varepsilon}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \frac{1}{\pi}\left\|\widehat{f}\,\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\left\|\widehat{\psi_\varepsilon}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\overset{\text{Thm 1.18}}{=} \frac{1}{\pi}\left\|\widehat{\psi_\varepsilon}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \overset{\text{注1.9}}{\le} C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned} \tag{1}$$

其中C 是与ε 无关的正常数.

再将结论推广到$L^2(\mathbb{R})$. 对任意固定的$f \in L^2(\mathbb{R})$, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在$L^2(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

由(1) 知, 对$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\|H_\varepsilon(f_k)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C\|f_k\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

进一步由$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是$L^2(\mathbb{R})$ 中柯西列知, $\{H_\varepsilon(f_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 也是$L^2(\mathbb{R})$ 中柯西列. 由此及$L^2(\mathbb{R})$ 的完备性知, 存在函数$g \in L^2(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|H_\varepsilon(f_k) - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0. \tag{3}$$

对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(f_k)(x) - H_\varepsilon(f)(x)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{f_k(x-y) - f(x-y)}{y}\,dy\right| \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \left|\frac{f_k(x-y) - f(x-y)}{y}\right| dy \\
&\le \frac{1}{\pi}\|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R})}\,\|\psi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\to 0, \quad \text{as } k \to \infty.
\end{aligned}$$

由此, (3) 及推论1.7 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$, $g(x) = H_\varepsilon(f)(x)$. 因此由(2) 和(3) 知,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \overset{(3)}{=} \lim_{k\to\infty} \|H_\varepsilon(f_k)\|_{L^2(\mathbb{R})} \overset{(2)}{\le} \lim_{k\to\infty} C\|f_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

由f 的任意性, Lemma 1.10 证毕. □

> We can now prove the weak $(1,1)$ inequality exactly as in Theorem 3.4(原文是Theorem 3.2, 但计算时发现要改成Theorem 3.4), and the strong (p,p) inequalities follow by interpolation and duality.

在zyy 师兄的帮助下, 对Theorem 1.11(i) 的证明进行了改进,

Theorem 1.11. 设$\varepsilon \in (0,\infty)$.

(i) 存在与ε 无关的正常数$C_{(1)}$ 使得, 对$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in (0,\infty)$,

$$|\{x \in \mathbb{R} :\ |H_\varepsilon(f)(x)| > \lambda\}| \le \frac{C_{(1)}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})};$$

(ii) 对$\forall p \in (1,\infty)$, 存在与ε 无关的正常数$C_{(p)}$ 使得, 对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_{(p)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Proof. 先证(i). 对任意固定的$f \in L^1(\mathbb{R})$, 不妨设f 是非负实值函数. 由书上Theorem 2.11(Calderón-Zygmund 分解) 知, 对任意给定的正常数λ, 存在两两不交的二进方体序列$\{I_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}$ 使得

- 对几乎处处$x \notin \Omega := \bigcup_{j\in J} I_j$, $f(x) \le \lambda$;
- $|\Omega| \le \dfrac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$;
- 对$\forall j \in J$,
$$\lambda < \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt \le 2\lambda.$$

对$\forall x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \notin \Omega, \\ \dfrac{1}{|I_j|}\displaystyle\int_{I_j} f(t)\,dt, & x \in I_j, \end{cases}$$
且
$$b(x) := \sum_{j\in J} b_j(x),$$
其中对$\forall j \in J$,
$$b_j(x) := \left[f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt\right]\mathbf{1}_{I_j}(x).$$
则对$\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = g(x) + b(x).$$
首先注意到, 对$\forall x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) \le 2\lambda,$$

因此对$\forall p\in[1,\infty)$,

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}}[g(x)]^p\,dx \qquad (4)\\
&\le (2\lambda)^{p-1}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx\\
&= (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^\complement} g(x)\,dx+\sum_{j\in J}\int_{I_j} g(x)\,dx\right] && (g\ge 0 \text{ and Levi})\\
&= (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^\complement} f(x)\,dx+\sum_{j\in J}\int_{I_j}\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt\,dx\right]\\
&\le (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^\complement} f(x)\,dx+\sum_{j\in J}\int_{I_j} f(t)\,dt\right]\\
&= (2\lambda)^{p-1}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, && (f\ge 0 \text{ and Levi})
\end{aligned}
$$

从而$g\in L^p(\mathbb{R})$. 进一步由$f\in L^1(\mathbb{R})$ 知,

$$b=f-g\in L^1(\mathbb{R}),$$

又由(4) 有

$$\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}+\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{5}$$

注意到, 对$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
H_\varepsilon(f)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{f(x-y)}{y}\,dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{g(x-y)+b(x-y)}{y}\,dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{g(x-y)}{y}\,dy+\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{b(x-y)}{y}\,dy\\
&= H_\varepsilon(g)(x)+H_\varepsilon(b)(x).
\end{aligned}
$$

因此对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(f)(x)>\lambda\}|\le|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(g)(x)>\lambda/2\}|+|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(b)(x)>\lambda/2\}|. \tag{6}$$

关于$H_\varepsilon(g)$ 的估计. 由引理1.10 知, 存在与ε, g 无关的正常数$C_{(2)}$ 使得

$$\|H_\varepsilon(g)\|_{L^2(\mathbb{R})}\le C_{(2)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{7}$$

由此及(4) 知, 对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}
&|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(g)(x)>\lambda/2\}| \qquad (8)\\
&\quad=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(g)(x)>\lambda/2\}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2dx\\
&\quad\le\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(g)(x)>\lambda/2\}}[H_\varepsilon(g)(x)]^2\,dx\\
&\quad\le\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\mathbb{R}}[H_\varepsilon(g)(x)]^2\,dx\\
&\quad\overset{(7)}{\le}\left[\frac{2}{\lambda}C_{(2)}\right]^2\int_{\mathbb{R}}[g(x)]^2\,dx\\
&\quad=\left[\frac{2}{\lambda}C_{(2)}\right]^2\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\\
&\quad\overset{(4)}{\le}\frac{8[C_{(2)}]^2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

对于$H_\varepsilon(b)$ 的估计, 记$\Omega^*:=\bigcup_{j\in J}2I_j$. 注意到$|\Omega|\le\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ 且$\Omega=\bigcup_{j\in J}I_j$, I_j 两两不交, 故

$$|\Omega^*|\le\sum_{j\in J}|2I_j|=2\sum_{j\in J}|I_j|=2|\Omega|\le\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

因此

$$\begin{aligned}
|\{x\in\mathbb{R}:\ |H_\varepsilon(b)(x)|>\lambda/2\}|&\le|\Omega^*|+|\{x\notin\Omega^*:\ |H_\varepsilon(b)(x)|>\lambda/2\}|\\
&\le\frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}+|\{x\notin\Omega^*:\ |H_\varepsilon(b)(x)|>\lambda/2\}|.
\end{aligned}\tag{9}$$

如果已经证明存在与ε, b 无关的正常数C使得, 对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\notin\Omega^*:\ H_\varepsilon(b)(x)>\lambda/2\}|\le\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.\tag{10}$$

由此, (6), (8) 和(9) 知, 存在与ε, f 无关的正常数$\widetilde{C}$使得, 对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(f)(x)>\lambda\}|\le\frac{\widetilde{C}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

下证(10) 成立. 首先注意到, 对$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{j\in J}\left|\frac{b_j(x-\cdot)}{\cdot}\right|=\left|\frac{b(x-\cdot)}{\cdot}\right|\in L^1(\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}),$$

由此及逐项积分([周民强, 推论4.16])知,

$$\sum_{j\in J}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{b_j(x-y)}{y}\,dy=\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{b(x-y)}{y}\,dy.\tag{11}$$

从而对$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|H_\varepsilon(b)(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{b(x-y)}{y}\,dy\right| \overset{(11)}{=} \left|\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{b_j(x-y)}{y}\,dy\right| \tag{12}$$
$$\le \sum_{j\in J}\left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{b_j(x-y)}{y}\,dy\right| = \sum_{j\in J}|H_\varepsilon(b_j)(x)|.$$

下面估算$H_\varepsilon(b_j)$. 对任意固定$x\notin\Omega^*$ 和$j\in J$, 断言以下三种情况有且只有其中一种成立:

(a) $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I_j=I_j$;

(b) $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I_j=\emptyset$;

(c) $x-\varepsilon\in I_j$ 或$x+\varepsilon\in \mathring{I}_j$.

事实上, 设$I_j:=[a_j,b_j)$, 其中$a_j,\ b_j\in\mathbb{R}$ 且$a_j<b_j$. 若$x+\varepsilon\in(-\infty,a_j]$, 则

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I_j=\emptyset,$$

属于情况(b)且不属于(a)(c). 若$x+\varepsilon\in(a_j,b_j)=\mathring{I}_j$, 则属于情况(c)且不属于(a)(b). 若$x+\varepsilon\in[b_j,\infty)$ 且$x-\varepsilon\in(-\infty,a_j)$, 则

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I_j=I_j,$$

属于情况(a)且不属于(b)(c). 若$x+\varepsilon\in[b_j,\infty)$ 且$x-\varepsilon\in[a_j,b_j)=I_j$, 属于情况(c)且不属于(a)(b). 若$x+\varepsilon\in[b_j,\infty)$ 且$x-\varepsilon\in[b_j,\infty)$, 则

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I_j=\emptyset,$$

属于情况(b)且不属于(a)(c). 综上, 断言成立.

对于情况(a). $I_j\subset(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$, 因此

$$H_\varepsilon(b_j)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|>\varepsilon\}}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|>\varepsilon\}\cap I_j}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy=0.$$

对于情况(b). $I_j\subset\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|\ge\varepsilon\}$, 因此

$$\begin{aligned}H_\varepsilon(b_j)(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|>\varepsilon\}}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\\&=\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|\ge\varepsilon\}}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{I_j}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy.\end{aligned}$$

令c_j 是I_j 的中心, 因为

$$\int_{I_j}b_j(y)\,dy=\int_{I_j}\left[f(y)-\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}f(t)\,dt\right]dy=0,$$

故

$$|H_\varepsilon(b_j)(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{I_j}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{I_j}\left[\frac{b_j(y)}{x-y}-\frac{b_j(y)}{x-c_j}\right]\,dy\right|$$
$$\le \frac{1}{\pi}\int_{I_j}\left|\frac{b_j(y)}{x-y}-\frac{b_j(y)}{x-c_j}\right|\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{I_j}\frac{|b_j(y)||y-c_j|}{|(x-y)(x-c_j)|}\,dy.$$

注意到对$\forall y \in I_j$, 有$|y-c_j| \le |I_j|/2$, 又因为由$x \notin \Omega^*$ 知$|x-c_j| \ge |I_j|$, 从而

$$|x-y| \ge |x-c_j| - |y-c_j| \ge |x-c_j| - \frac{1}{2}|I_j| \ge \frac{1}{2}|x-c_j|,$$

因此

$$|H_\varepsilon(b_j)(x)| \le \frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\,\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\,.$$

对于情况(c).

$$|H_\varepsilon(b_j)(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |x-y|>\varepsilon\}}\frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{I_j}\left|\frac{b_j(y)}{x-y}\right|\,dy.$$

若$x+\varepsilon \in \mathring{I}_j$, 则$|x+\varepsilon-c_j| < |I_j|/2$. 又由$x \notin \Omega^*$ 知, $|x-c_j| \ge |I_j|$, 从而

$$\varepsilon \ge |x-c_j| - |x+\varepsilon-c_j| > \frac{1}{2}|I_j|.$$

由此及$x+\varepsilon \in \mathring{I}_j$ 知,

$$I_j \subset B(x+\varepsilon, |I_j|) \subset B(x+\varepsilon, 2\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+3\varepsilon).$$

若$x-\varepsilon \in I_j$, 则$|x-\varepsilon-c_j| \le |I_j|/2$, 从而

$$\varepsilon \ge |x-c_j| - |x-\varepsilon-c_j| \ge \frac{1}{2}|I_j|.$$

由此及$x-\varepsilon \in \mathring{I}_j$ 知,

$$I_j \subset B(x-\varepsilon, |I_j|) \subset B(x-\varepsilon, 2\varepsilon) = (x-3\varepsilon, x+\varepsilon).$$

因此$I_j \subset (x-3\varepsilon, x+3\varepsilon)$. 若$x+\varepsilon \in \mathring{I}_j$, 则对$\forall y \in I_j$,

$$\varepsilon \le |x-y| + |(x+\varepsilon)-y| < |x-y| + |I_j|$$

且

$$|x-y| \ge |x-c_j| - |y-c_j| \ge |x-c_j| - \frac{1}{2}|I_j| \ge \frac{1}{2}|I_j|,$$

故$|x-y| \ge \varepsilon/3$. 若$x-\varepsilon \in I_j$, 则对$\forall y \in I_j$,

$$\varepsilon \le |x-y| + |(x-\varepsilon)-y| < |x-y| + |I_j|$$

且

$$|x-y| \geq |x-c_j| - |y-c_j| \geq |x-c_j| - \frac{1}{2}|I_j| \geq \frac{1}{2}|I_j|,$$

故$|x-y| \geq \varepsilon/3$. 因此

$$|H_\varepsilon(b_j)(x)| \leq \frac{3}{\pi\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon} |b_j(y)|\,dy.$$

综上, 对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(b)(x)| &\overset{(12)}{\leq} \sum_{j\in J} |H_\varepsilon(b_j)(x)| \qquad (13)\\
&\leq \sum_{j\in J}\left[\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{3}{\pi\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon}|b_j(y)|\,dy\right]\\
&= \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{3}{\pi\varepsilon}\sum_{j\in J}\int_{B(x,3\varepsilon)\cap I_j}|b(y)|\,dy\\
&= \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{3}{\pi\varepsilon}\int_{B(x,3\varepsilon)\cap\Omega}|b(y)|\,dy \qquad \text{(Levi 定理)}\\
&\leq \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{3}{\pi\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon}|b(y)|\,dy\\
&\leq \left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right] + \frac{18}{\pi}M(b)(x).
\end{aligned}$$

因此对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$
\begin{aligned}
&|\{x\notin\Omega^*:\ H_\varepsilon(b)(x)>\lambda\}| \qquad (14)\\
&\le \left|\left\{x\notin\Omega^*:\ \sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}>\lambda/2\right\}\right|\\
&\quad+\left|\left\{x\notin\Omega^*:\ \frac{18}{\pi}M(b)(x)>\lambda/2\right\}\right|\\
&\lesssim\frac{1}{\lambda}\int_{\{x\notin\Omega^*:\ \sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}>\lambda/2\}}\lambda\,dx+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\lesssim\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}\sum_{j\in J}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\,dx+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\sim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\left[\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\,dx\right]+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \text{(Levi 定理)}\\
&\lesssim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\left[\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}\setminus(2I_j)}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\,dx\right]+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\lesssim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\left[\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}\setminus[-|I_j|,|I_j|)}\frac{|I_j|}{|x|^2}\,dx\right]+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\sim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\left[\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{|I_j|}^{\infty}\frac{|I_j|}{x^2}\,dx\right]+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\sim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\sim\frac{1}{\lambda}\sum_{j\in J}\int_{\mathbb{R}}|b_j(x)|\,dx+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\\
&\sim\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}\left[\sum_{j\in J}|b_j(x)|\right]\,dx+\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \text{(Levi 定理)}\\
&\sim\frac{1}{\lambda}\|b\|_{L^1(\mathbb{R})}\overset{(5)}{\lesssim}\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},
\end{aligned}
$$

即(10) 成立. 从而存在与ε 无关的正常数$C_{(1)}$ 使得, 对$\forall f\in L^1(\mathbb{R})$, $\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H_\varepsilon(f)(x)>\lambda\}|\le\frac{C_{(1)}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{15}$$

(i) 成立.

下证(ii). 由Lemma 1.10 知, 存在与ε 无关的正常数$C_{(2)}$ 使得, 对$\forall f\in L^p(\mathbb{R})$,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}\le C_{(2)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

从而由Marcinkiewicz 插值定理(书上Theorem 2.4)知, 对$\forall p\in(1,2)$, $\forall f\in L^p(\mathbb{R})$,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}\le 2p^{1/p}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2-p}\right)^{1/p}\left[C_{(1)}\right]^{1-2(1-1/p)}\left[C_{(2)}\right]^{2(1-1/p)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

在证明$p\in(2,\infty)$, H_ε 是强(p,p) 算子之前, 先证明H_ε 的反自伴性.

Lemma 1.12. 设$\varepsilon\in(0,\infty)$, $p\in(1,\infty)$. 则对$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $g\in L^{p'}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx=-\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx.$$

Proof. 对任意固定$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 和$g\in L^{p'}(\mathbb{R})$, 有$f\in L^1(\mathbb{R})$, 从而由注1.4(ii) 知, $H_\varepsilon(f)\in L^p(\mathbb{R})$. 由此及$g\in L^{p'}(\mathbb{R})$ 和Hölder 不等式知, $H_\varepsilon(f)g\in L^1(\mathbb{R})$. 进一步由Tonelli 定理和Fubini 定理有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)}{y}\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\,dy\right]g(x)\,dx\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-y)}{y}g(x)\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\,dxdy && \text{(Tonelli and Fubini)}\\
&=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x+y)}{y}g(x)\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\,dxdy && (y:=-y)\\
&=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x)}{y}g(x-y)\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\,dxdy && (x:=x+y)\\
&=-\int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{g(x-y)}{y}\mathbf{1}_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}}\,dy\right]dx\\
&=-\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx
\end{aligned}$$

由f, g 的任意性知, 引理1.12 证毕. □

下面继续证明对$\forall p\in(2,\infty)$, H_ε 是强(p,p) 算子. 对于$p\in(2,\infty)$, 先证$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 时的情况. 对$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 有$f\in L^1(\mathbb{R})$, 由注1.4(ii) 知, $H_\varepsilon(f)\in L^p(\mathbb{R})$, 从而由引理1.12 有,

$$\begin{aligned}
\|H_\varepsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}=1}\left|\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx\right| && (H_\varepsilon(f)\in L^p(\mathbb{R})) \qquad (16)\\
&= \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}=1}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx\right| && (\text{引理1.12})\\
&\le \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}=1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|H_\varepsilon(g)\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} && (\text{Hölder 不等式})\\
&\le C_{(p')}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, && (H_\varepsilon\ \text{是强}(p',p')\ \text{算子})
\end{aligned}$$

其中$C_{(p')}$ 是与ε 无关的正常数.

下面将结论推广到$L^p(\mathbb{R})$ 上. 对任意固定的$f \in L^p(\mathbb{R})$, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

由(16) 知, 对$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\|H_\varepsilon(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_{(p')}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{17}$$

进一步由$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是$L^p(\mathbb{R})$ 中柯西列知, $\{H_\varepsilon(f_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 也是$L^p(\mathbb{R})$ 中柯西列. 由此及$L^p(\mathbb{R})$ 的完备性知, 存在函数$g \in L^p(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|H_\varepsilon(f_k) - g\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0. \tag{18}$$

又因为对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon(f_k)(x) - H_\varepsilon(f)(x)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}} \frac{f_k(x-y) - f(x-y)}{y}\,dy\right| \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\varepsilon\}} \left|\frac{f_k(x-y) - f(x-y)}{y}\right|\,dy \\
&\le \frac{1}{\pi}\|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\psi_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \\
&\to 0, \quad \text{as } k\to\infty.
\end{aligned}$$

由此, (18) 及推论1.7 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$, $g(x) = H_\varepsilon(f)(x)$. 因此由(17) 和(18) 知,

$$\|H_\varepsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \overset{(18)}{=} \lim_{k\to\infty}\|H_\varepsilon(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})} \overset{(17)}{\le} \lim_{k\to\infty} C_{(p')}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R})} = C_{(p')}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

由f 的任意性, H_ε 是强(p,p) 算子, 且对应的常数与ε 无关. 定理1.11 证毕. □

Lemma 1.13. 设$p \in (1,\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ 且f_k 在$L^p(\mathbb{R})$ 中收敛到f. 则

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k(x)g(x)\,dx.$$

Proof. 事实上, 由Hölder 不等式有,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} f_k(x)g(x)\,dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} [f(x)g(x) - f_k(x)g(x)]\,dx\right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_k(x)||g(x)|\,dx \\
&\le \|f - f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \to 0, \quad \text{as } k\to\infty.
\end{aligned}$$

引理1.13 证毕. □

Remark 1.14. 设$p \in (1,\infty)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ 且对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$T_g(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,d\mu(x).$$

则由引理1.13 可看出, T_g 是$L^p(\mathbb{R})$ 上的有界线性泛函.

Theorem 1.15. 设$\varepsilon \in (0,\infty)$, $p \in (1,\infty)$. 则对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx.$$

Proof. 对任意固定的$f \in L^p(\mathbb{R})$ 和$g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

进一步由H_ε 是强(p,p) 算子知, $H_\varepsilon(f_k)$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中收敛到$H_\varepsilon(f)$. 又由H_ε 是强(p',p') 算子和$g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ 知, $H_\varepsilon(g) \in L^{p'}(\mathbb{R})$. 综上, 引理1.12 和引理1.13 知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f_k)(x)g(x)\,dx && (\text{引理1.13})\\ &= -\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx && (\text{引理1.12})\\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx. && (\text{引理1.13})\end{aligned}$$

由f, g 的任意性知, 定理1.15 证毕. □

If we fix $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, then the sequence $\{H_\varepsilon f\}$ converges to Hf as defined above in $L^p(\mathbb{R})$ norm if $p \in (1,\infty)$ and in measure if $p = 1$. To see this, fix a sequence $\{f_k\}$ converging to f in $L^p(\mathbb{R})$. Then

$$Hf = \lim_{k\to\infty} Hf_k = \lim_{k\to\infty}\lim_{\varepsilon\to0^+} H_\varepsilon f_k = \lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{k\to\infty} H_\varepsilon f_k = \lim_{\varepsilon\to0^+} H_\varepsilon f;$$

the second and third equalities hold because of the corresponding (uniform) (p,p) inequality.

Theorem 1.16. 设$\varepsilon \in (0,\infty)$.

(i) 若$p \in (1,\infty)$, 对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0;$$

(ii) 对$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} = 0;$$

Proof. 下面证明(i). 先证$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 时的情况. 对任意固定$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in (0,1)$ 且$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. 存在$N \in \mathbb{N}$, 使得$\mathrm{supp}\,(f) \subset [-N, N]$. 对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
|H_{\varepsilon_1}(f)(x) - H_{\varepsilon_2}(f)(x)| &= \left|\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2\}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy\right| &(19)\\
&= \left|\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2\}} \frac{f(x-y)-f(x)}{y}\,dy\right|\\
&= \left|\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2\}} f'(\xi_y)\,dy\right| &(\text{Lagrange 中值定理})\\
&\le 2\left[\sup_{y\in\mathbb{R}}|f'(y)|\right](\varepsilon_2-\varepsilon_1). &(f\in C_c^\infty(\mathbb{R}))
\end{aligned}
$$

同时, 对任意$x \in \mathbb{R}$ 且$|x| \ge N+1$ 和任意$y \in \mathbb{R}$ 且$\varepsilon_1 < |y| \le \varepsilon_2$, 有

$$|x-y| \ge |x| - |y| > N,$$

故$x - y \notin [-N, N]$, 又因为$\mathrm{supp}\,(f) \subset [-N, N]$, 从而

$$|H_{\varepsilon_1}(f)(x) - H_{\varepsilon_2}(f)(x)| = \left|\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ \varepsilon_1<|y|\le\varepsilon_2\}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy\right| = 0. \tag{20}$$

由此及(19) 知,

$$
\begin{aligned}
\|H_{\varepsilon_1}(f) - H_{\varepsilon_2}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \left[\int_{\mathbb{R}} |H_{\varepsilon_1}(f)(x) - H_{\varepsilon_2}(f)(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\\
&= \left[\int_{\{x\in\mathbb{R}:\ |x|<N+1\}} |H_{\varepsilon_1}(f)(x) - H_{\varepsilon_2}(f)(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\\
&\overset{(19)}{\le} [2(N+1)]^{1/p} 2\left[\sup_{y\in\mathbb{R}}|f'(y)|\right](\varepsilon_2-\varepsilon_1)\\
&\to 0, \quad \text{as } \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \to 0^+.
\end{aligned}
$$

故$\{H_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 是$L^p(\mathbb{R})$ 中Cauchy 列. 进一步由$L^p(\mathbb{R})$ 的完备性知, 存在$g \in L^p(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \|H_\varepsilon(f) - g\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

由此, $H_\varepsilon(f)$ 点点收敛到$H(f)$ (因为$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$), 和推论1.7(i) 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = H(f)(x),$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0. \tag{21}$$

再将结论推广到$L^p(\mathbb{R})$, $p\in(1,\infty)$ 上. 对任意固定的$f\in L^p(\mathbb{R})$, 由$C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密([周民强, 定理6.23])知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^p(\mathbb{R})}=0.$$

由定理1.11(ii) 和H 是强(p,p) 算子知, 对$\forall\varepsilon\in(0,1)$, $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|H_\varepsilon(f)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}&\le\|H_\varepsilon(f)-H_\varepsilon(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|H_\varepsilon(f_k)-H(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|H(f_k)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\\&\lesssim\|f-f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|H_\varepsilon(f_k)-H(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

其中常数与ε 无关. 令$\varepsilon\to0^+$, 由(21) 知, 对$\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}\|H_\varepsilon(f)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\lesssim\|f-f_k\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

再令$k\to\infty$ 有

$$\limsup_{\varepsilon\to0^+}\|H_\varepsilon(f)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}\le0.$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\|H_\varepsilon(f)-H(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}=0.$$

下面证明(ii). 先证$f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 时的情况. 对任意固定$f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ε_1, $\varepsilon_2\in(0,1)$ 且$\varepsilon_1<\varepsilon_2$. 存在$N\in\mathbb{N}$, 使得$\operatorname{supp}(f)\subset[-N,N]$. 由(19) 知, 对$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|H_{\varepsilon_1}(f)(x)-H_{\varepsilon_2}(f)(x)|\le2\left[\sup_{y\in\mathbb{R}}|f'(y)|\right](\varepsilon_2-\varepsilon_1).$$

由(20) 知, 对$\forall x\in\mathbb{R}$ 且$|x|\ge N+1$,

$$|H_{\varepsilon_1}(f)(x)-H_{\varepsilon_2}(f)(x)|=0.$$

从而

$$\begin{aligned}&\|H_{\varepsilon_1}(f)-H_{\varepsilon_2}(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\\&\quad=\sup_{\lambda\in(0,\infty)}\lambda|\{x\in\mathbb{R}:\ |H_{\varepsilon_1}(f)(x)-H_{\varepsilon_2}(f)(x)|>\lambda\}|\\&\quad=\sup_{\lambda\in(0,2[\sup_{y\in\mathbb{R}}|f'(y)|](\varepsilon_2-\varepsilon_1))}\lambda|\{x\in(-N-1,N+1):\ |H_{\varepsilon_1}(f)(x)-H_{\varepsilon_2}(f)(x)|>\lambda\}|\\&\quad\le2\left[\sup_{y\in\mathbb{R}}|f'(y)|\right](\varepsilon_2-\varepsilon_1)[2(N+1)]\\&\quad\to0,\quad\text{as }\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\to0^+.\end{aligned}$$

故$\{H_\varepsilon(f)\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ 是$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 中Cauchy 列. 进一步由$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 的完备性知, 存在$g\in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\|H_\varepsilon(f)-g\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}=0.$$

由此, $H_\varepsilon(f)$ 点点收敛到$H(f)$(因为$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$), 和推论1.7(ii) 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = H(f)(x),$$

从而

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} = 0. \tag{22}$$

再将结论推广到$L^1(\mathbb{R})$ 上. 对任意固定的$f \in L^1(\mathbb{R})$, 由$C_c^\infty(\mathbb{R})$ 在$L^1(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

由定理1.11(i) 和H 是弱$(1,1)$ 算子知, 对$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} &\lesssim \|H_\varepsilon(f) - H_\varepsilon(f_k)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} + \|H_\varepsilon(f_k) - H(f_k)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} + \|H(f_k) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \|f - f_k\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|H_\varepsilon f_k - H f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

令$\varepsilon \to 0^+$, 由(22) 知,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \lesssim \|f - f_k\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

再令$k \to \infty$ 有

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \le 0.$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H_\varepsilon(f) - H(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} = 0.$$

定理1.16 证毕. $\square$

由定理1.16(i) 和H_ε 的反自伴性可以推出H 的反自伴性.

Corollary 1.17. 设$\varepsilon \in (0,\infty)$, $p \in (1,\infty)$. 则对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall g \in L^{p'}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} H(f)(x)g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)H(g)(x)\,dx.$$

Proof. 对任意固定$f \in L^p(\mathbb{R})$ 和$g \in L^{p'}(\mathbb{R})$, 由定理1.16(i) 知,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H(f) - H_\varepsilon(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0, \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|H(g) - H_\varepsilon(g)\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} = 0.$$

由此, 引理1.12 和引理1.13 知

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} H(f)(x)g(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} H_\varepsilon(f)(x)g(x)\,dx && \text{(引理1.13)} \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(x)H_\varepsilon(g)(x)\,dx && \text{(定理1.15)} \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)H(g)(x)\,dx. && \text{(引理1.13)}\end{aligned}$$

推论1.17 证毕. $\square$

不用H_ε 的反自伴性也能得到H 的反自伴性. 注意到, 之前已经证明了对$\forall f$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} H(f)(x)g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)H(g)(x)\,dx.$$

由此及H 是强(p,p), $p \in (1,\infty)$ 算子, 不难得到H 的反自伴性.

> We now want to show that the same equality holds pointwise almost everywhere.
>
> **Theorem 3.3.** Given $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, then
>
> $$H(f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f)(x) \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$
>
> Since we know that (3.7) holds for some subsequence $\{H_{\varepsilon_k} f\}$, we only need to show that $\lim\ H_\varepsilon(f)(x)$ exists for almost every x. By Theorem 2.2 (and the remarks following it) it will suffice to show that the maximal operator
>
> $$H^*(f)(x) := \sup_{\varepsilon>0} |H_\varepsilon(f)(x)|$$
>
> is weak (p,p).

Definition 1.18. 设$p \in [1,\infty)$. 对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$H^*(f)(x) := \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(f)(x)|.$$

Proof of Theorem 3.3. 由书上Theorem 3.4 知, 对$\forall p \in [1,\infty)$, H^* 是弱(p,p) 的, 进一步由书上Theorem 2.2 知,

$$\left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f) \text{ exists a.e.} \right\}$$

在$L^p(\mathbb{R})$ 中是闭集. 又因为

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f) \text{ exists a.e.} \right\}$$

故

$$L^p(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \subset \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f) \text{ exists a.e.} \right\} \subset L^p(\mathbb{R}),$$

从而

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f) \text{ exists a.e.} \right\},$$

即对$\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f)(x)$ 存在. 由此, 定理1.16 和推论1.7 知, 对几乎处处$x \in \mathbb{R}$,

$$H(f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon(f)(x).$$

Theorem 3.3 证毕. □

Theorem 3.4. H^* is strong (p,p), $1<p<\infty$, and weak $(1,1)$.

To prove this we need a lemma which is referred to as Cotlar's inequality.

Lemma 3.5. If $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ then $H^*(f)(x)\le M(Hf)(x)+CM(f)(x)$.

Lemma 3.5 的证明, 贾洪潮师兄已经讲过了.
在zyy 师兄的帮助下, 对Theorem 3.4 弱$(1,1)$ 的证明进行了改进.

Proof of Theorem 3.4. 先证$p\in(1,\infty)$ 时, H^* 是强(p,p) 算子. 对任意固定的$f\in L^p(\mathbb{R})$, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密知, 可取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^p(\mathbb{R})}=0.$$

从而, 对$\forall\varepsilon\in(0,\infty)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, 由Hölder 不等式知

$$\begin{aligned}|H_\varepsilon(f)(x)-H_\varepsilon(f_k)(x)|&=\left|\frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\varepsilon\}}\frac{f(x-y)-f_k(x-y)}{y}\,dy\right|\\&\le\frac{1}{\pi}\|f-f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\psi_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\to 0,\qquad\text{as }k\to\infty,\end{aligned}$$

由此及Lemma 3.5 知,

$$|H_\varepsilon(f)(x)|=\lim_{k\to\infty}|H_\varepsilon(f_k)(x)|\overset{\text{Lemma 3.5}}{\le}\liminf_{k\to\infty}[M(Hf_k)(x)+CM(f_k)(x)].$$

从而对$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|H^*(f)(x)|=\sup_{\varepsilon\in(0,\infty)}|H_\varepsilon(f)(x)|\le\liminf_{k\to\infty}[M(Hf_k)(x)+CM(f_k)(x)].$$

进一步由Fatou 引理和M, H 是强(p,p) 算子知,

$$\begin{aligned}\|H^*(f)\|_{L^p(\mathbb{R})}&\le\left\|\liminf_{k\to\infty}[M(Hf_k)+CM(f_k)]\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\\&\le\liminf_{k\to\infty}\|M(Hf_k)+CM(f_k)\|_{L^p(\mathbb{R})}\qquad\text{(Fatou Lemma)}\\&\lesssim\liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}\sim\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

即H^* 是强(p,p) 算子.

再证H^* 是弱$(1,1)$ 算子. 对任意固定的$f\in L^1(\mathbb{R})$, 不妨设f 是非负实值函数. 由书上Theorem 2.11(Calderón-Zygmund 分解) 知, 对任意给定的正常数λ, 存在两两不交的二进方体序列$\{I_j\}_{j\in J}\subset\mathbb{R}$ 使得

- 对几乎处处$x\notin\Omega:=\bigcup_{j\in J}I_j$, $f(x)\le\lambda$;

- $|\Omega| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$;
- 对$\forall j \in J$,

$$\lambda < \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt \le 2\lambda.$$

对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \notin \Omega, \\ \dfrac{1}{|I_j|}\displaystyle\int_{I_j} f(t)\,dt, & x \in I_j, \end{cases}$$

且

$$b(x) := \sum_{j\in J} b_j(x),$$

其中对$\forall j \in J$,

$$b_j(x) := \left[f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt\right]\mathbf{1}_{I_j}(x).$$

则对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = g(x) + b(x).$$

首先注意到, 对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \le 2\lambda,$$

因此对$\forall p \in [1, \infty)$,

$$\begin{aligned}
\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} [g(x)]^p\,dx && (23)\\
&\le (2\lambda)^{p-1}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx \\
&= (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^\complement} g(x)\,dx + \sum_{j\in J}\int_{I_j} g(x)\,dx\right] && (g \ge 0 \text{ and Levi})\\
&= (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^\complement} f(x)\,dx + \sum_{j\in J}\int_{I_j} \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\,dt\,dx\right] \\
&\le (2\lambda)^{p-1}\left[\int_{\Omega^\complement} f(x)\,dx + \sum_{j\in J}\int_{I_j} f(t)\,dt\right] \\
&= (2\lambda)^{p-1}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, && (f \ge 0 \text{ and Levi})
\end{aligned}$$

从而$g \in L^p(\mathbb{R})$. 进一步由$f \in L^1(\mathbb{R})$ 知,

$$b = f - g \in L^1(\mathbb{R}),$$

又由(23) 有

$$\|b\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{24}$$

注意到, 对$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H^*(f)(x) &= \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(f)(x)| \\ &= \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(g)(x) + H_\varepsilon(b)(x)| \\ &\le \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(g)(x)| + \sup_{\varepsilon\in(0,\infty)} |H_\varepsilon(b)(x)| \\ &= H^*(g)(x) + H^*(b)(x). \end{aligned}$$

因此对$\forall \lambda \in (0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(f)(x) > \lambda\}| \le |\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(g)(x) > \lambda/2\}| + |\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(b)(x) > \lambda/2\}|. \tag{25}$$

关于$H^*(g)$ 的估计. 由H^* 是强$(2,2)$ 算子知, 存在与g 无关的正常数$C_{(2)}$ 使得

$$\|H^*(g)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C_{(2)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{26}$$

由此及(23) 知, 对$\forall \lambda \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned} &|\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(g)(x) > \lambda/2\}| \qquad (27)\\ &\quad= \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(g)(x)>\lambda/2\}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 dx \\ &\quad\le \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(g)(x)>\lambda/2\}} [H^*(g)(x)]^2\, dx \\ &\quad\le \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} [H^*(g)(x)]^2\, dx \\ &\quad\overset{(26)}{\le} \left[\frac{2}{\lambda}C_{(2)}\right]^2 \int_{\mathbb{R}} [g(x)]^2\, dx \\ &\quad= \left[\frac{2}{\lambda}C_{(2)}\right]^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\quad\overset{(23)}{\le} \frac{8[C_{(2)}]^2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

对于$H^*(b)$ 的估计, 记$\Omega^* := \bigcup_{j\in J} 2I_j$. 注意到$|\Omega| \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ 且$\Omega = \bigcup_{j\in J} I_j$, I_j 两两不交, 故

$$|\Omega^*| \le \sum_{j\in J} |2I_j| = 2\sum_{j\in J} |I_j| = 2|\Omega| \le \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

因此

$$\begin{aligned} |\{x\in\mathbb{R}:\ |H^*(b)(x)| > \lambda/2\}| &\le |\Omega^*| + |\{x\notin\Omega^*:\ |H^*(b)(x)| > \lambda/2\}| \qquad (28)\\ &\le \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + |\{x\notin\Omega^*:\ |H^*(b)(x)| > \lambda/2\}|. \end{aligned}$$

如果已经证明存在正常数C 使得, 对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\notin\Omega^*:\ H^*(b)(x)>\lambda/2\}|\leq\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{29}$$

由此, (25), (27) 和(28) 知, 存在与f 无关的正常数$\widetilde{C}$使得, 对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(f)(x)>\lambda\}|\leq\frac{\widetilde{C}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

下证(29) 成立. 由(13) 知, 对$\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall\varepsilon\in(0,\infty)$,

$$|H_\varepsilon(b)(x)|\leq\left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right]+\frac{18}{\pi}M(b)(x),$$

故

$$|H^*(b)(x)|=\sup_{\varepsilon\in(0,\infty)}|H_\varepsilon(b)(x)|\leq\left[\sum_{j\in J}\frac{1}{\pi}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}\right]+\frac{18}{\pi}M(b)(x).$$

因此对$\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}&|\{x\notin\Omega^*:\ H^*(b)(x)>\lambda\}|\\&\quad\leq\left|\left\{x\notin\Omega^*:\ \sum_{j\in J}\frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\|b_j\|_{L^1(\mathbb{R})}>\lambda/2\right\}\right|\\&\qquad+|\{x\notin\Omega^*:\ 18M(b)(x)>\lambda/2\}|\\&\quad\overset{(14)}{\lesssim}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

即(29) 成立. 从而存在正常数$C_{(1)}$ 使得, 对$\forall f\in L^1(\mathbb{R})$, $\forall\lambda\in(0,\infty)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ H^*(f)(x)>\lambda\}|\leq\frac{C_{(1)}}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{30}$$

Theorem 3.4 证毕. □

用到的一些定理

[丁勇, 现代分析基础, p.1]

定理 1.1.2 (Young 不等式) 设 $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$. 若 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 及 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则 $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.1.1}$$

[周民强, 实变函数论(第2版), p.186]

推论 4.16(逐项积分) 设 $f_k \in L(E)$ $(k=1,2,\cdots)$. 若有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)| \mathrm{d}x < \infty,$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛；若记其和函数为 $f(x)$，则 $f \in L(E)$ 且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

[周民强, 实变函数论(第2版), p.139]

定理 3.17(Riesz) 若 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$，使得

$$\lim_{i \to \infty} f_{k_i}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E.$$

[伍胜健, 数学分析(第2册), p.107]

定理 8.2.5 (狄利克雷判别法) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有定义, 且满足下面两个条件:

(1) 对于 $\forall X > a$, $f(x)$ 在区间 $[a, X]$ 上可积, 并且 $\exists M > 0$, 使得对于 $\forall X > a$, 有

$$\left| \int_a^X f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant M;$$

(2) $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 单调, 并且 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$,

则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

[丁勇, 现代分析基础, p.50]

定理 2.2.6 如 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么 $\widehat{(f * g)}(x) = \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)$ a.e..

[周民强, 实变函数论(第2版), p.326]

定理 6.23 具有紧支集且无限次可微的函数类 $C_c^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 中稠密.

周民强定理中的$p \in [1, \infty)$. 事实上, 孙镜淞证明了当$p \in (0, 1)$ 时, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 同样在$L^p(\mathbb{R})$ 中稠密.

[G. B. Folland, Real Analysis, p.188]

6.13 Proposition. *Suppose that p and q are conjugate exponents and $1 \leq q < \infty$. If $g \in L^q$, then*

$$\|g\|_q = \|\phi_g\| = \sup\left\{ \left| \int fg \right| : \|f\|_p = 1 \right\}.$$