等距同构的那些事

January 3, 2021

1 度量空间的等距同构

度量空间的等距同构没啥问题.

Definition 1.1. 设$(\mathscr{X}, d_{\mathscr{X}})$, $(\mathscr{Y}, d_{\mathscr{Y}})$ 是度量空间. 若$T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 满足对$\forall x_1, x_2 \in \mathscr{X}$,

$$d_{\mathscr{Y}}(T(x_1), T(x_2)) = d_{\mathscr{X}}(x_1, x_2),$$

则称T 是等距映射(isometry).

Definition 1.2. 设$(\mathscr{X}, d_{\mathscr{X}})$, $(\mathscr{Y}, d_{\mathscr{Y}})$ 是度量空间. 若存在$\mathscr{X}$ 到$\mathscr{Y}$ 满的等距映射, 则称$\mathscr{X}$ 和$\mathscr{Y}$ 等距同构.

2 线性赋范空间的等距同构

线性赋范空间的等距同构, 问题就来了. 首先, 线性赋范空间一定是度量空间, 那么想要等距同构, 一定要满足度量空间等距同构的要求. 但是, 线性赋范空间有线性结构, 这个也要保持, 所以要求等距映射线性.

Definition 2.1. 设$(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}})$, $(\mathscr{Y}, \|\cdot\|_{\mathscr{Y}})$ 是线性赋范空间. 若存在$\mathscr{X}$ 到$\mathscr{Y}$ 满的线性等距映射, 则称$\mathscr{X}$ 和$\mathscr{Y}$ 等距同构.

实际上, 对于实线性赋范空间, 定义中的条件可以减弱成度量空间的条件. 这个是由Mazur-Ulam Theorem 保证的. 而对于复线性赋范空间, 等距同构映射必须线性.

Lemma 2.2. *设$(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}})$, $(\mathscr{Y}, \|\cdot\|_{\mathscr{Y}})$ 是实线性赋范空间. 若存在$\mathscr{X}$ 到$\mathscr{Y}$ 满的等距映射, 则存在$\mathscr{X}$ 到$\mathscr{Y}$ 满的线性等距映射.*

在证明Lemma 2.2 之前, 首先回顾一下Mazur-Ulam Theorem 及其相关定义.

Definition 2.3. 设$(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}})$, $(\mathscr{Y}, \|\cdot\|_{\mathscr{Y}})$ 是实线性赋范空间. 称$T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是仿射变换(affine), 若对$\forall a, b \in \mathcal{X}$ 和$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$T((1-t)a + tb) = (1-t)T(a) + tT(b).$$

Theorem 2.4 (Mazur-Ulam)**.** *设$(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}})$, $(\mathscr{Y}, \|\cdot\|_{\mathscr{Y}})$ 是实线性赋范空间. 若$T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 满的等距映射, 则T 是仿射变换(affine).*

现在可以开始证明Lemma 2.2 了.

Proof of Lemma 2.2. 若存在$\mathscr{X}$ 到$\mathscr{Y}$ 满的等距映射T, 由Mazur-Ulam Theorem 知, T 是仿射变换. 令$S := T - T(\theta)$, 则对$\forall x_1,\ x_2 \in \mathcal{X}$,

$$\|S(x_1) - S(x_2)\|_{\mathscr{Y}} = \|T(x_1) - T(x_2)\|_{\mathscr{Y}} = \|x_1 - x_2\|_{\mathscr{X}},$$

且对$\forall x \in \mathcal{X}$ 和$t \in \mathbb{R}$,

$$S(tx) = T(tx) - T(\theta) = T(tx + (1-t)\theta) - T(\theta) = t[T(x) - T(\theta)] = tS(x),$$

从而对$\forall x_1,\ x_2 \in \mathcal{X}$ 和$t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S(x_1 + x_2) &= 2S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 2\left[T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - T(\theta)\right] \\ &= [T(x_1) - T(\theta)] - [T(x_2) - T(\theta)] = S(x_1) + S(x_2). \end{aligned}$$

综上, S 是$\mathscr{X}$ 到$\mathscr{Y}$ 满的线性等距映射. Lemma 2.2 证毕. $\square$