Vitali covering lemma

2021 年 9 月 11 日

1 度量空间

Definition 1.1. 设 $\mathcal{X}$ 是非空集合, $d\colon\ \mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 满足, 对任意 x, y, $z\in\mathcal{X}$,

(i) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii)
$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z).$$

则称 $(\mathcal{X},d)$ 为度量空间.

Lemma 1.2. 设 $\mathcal{F}$ 是度量空间 $(\mathcal{X},d)$ 中的一族球且 $\sup_{B\in\mathcal{F}} r(B)<\infty$. 则存在两两不交的子球族 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 使得
$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B\subset\bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B, \tag{1}$$
且对 $\forall B\in\mathcal{F}$, 存在 $\widetilde{B}\in\mathcal{G}$ 满足 $r(B)\le 2r(\widetilde{B})$ 使得 $B\cap\widetilde{B}\neq\emptyset$.

可以利用 Zorn 引理(若非空偏序集的任意全序子集有上界, 则该偏序集存在极大元)来证明这个结论.

证明一. 该证明来自 [J. Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Space, Theorem 1.2].

定义偏序集
$$\begin{aligned}\Omega:=&\{\omega\subset\mathcal{F}:\ \omega \text{ is pairwise disjoint and, for any } B\in\mathcal{F},\ \text{if } B\cap\bigcup_{\widetilde{B}\in\omega}\widetilde{B}\neq\emptyset,\\ &\text{then there exits a } \widetilde{B}\in\omega \text{ with } r(\widetilde{B})\ge r(B)/2 \text{ such that } B\cap\widetilde{B}\neq\emptyset\}.\end{aligned} \tag{2}$$

易证 Ω 非空且满足 Zorn 引理的条件, 因此存在极大元 $\mathcal{G}\in\Omega$.

下证 $\mathcal{G}$ 满足条件. 由 (2) 知, $\mathcal{G}$ 两两不交. 令

$$\mathcal{P} := \left\{ B \in \mathcal{F} :\ B \cap \bigcup_{\widetilde{B} \in \mathcal{G}} \widetilde{B} = \emptyset \right\}.$$

若 $\mathcal{P}$ 非空, 由 $\sup_{B\in\mathcal{F}} r(B) < \infty$ 知, 可取 $B_0 \in \mathcal{P}$ 使得 $r(B_0) \ge \sup_{B\in\mathcal{P}} r(B)/2$, 则 $\mathcal{G} \cup \{B_0\} \in \omega$, 这与 $\mathcal{G}$ 的极大性相矛盾. 故 $\mathcal{P} = \emptyset$, 因此对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 存在 $\widetilde{B} \in \mathcal{G}$ 满足 $r(\widetilde{B}) \ge r(B)/2$ 使得 $B \cap \widetilde{B} \ne \emptyset$, 从而 $B \subset 5\widetilde{B}$. 引理证毕. □

证明二. 也可以构造性的证明此结论. □

Remark 1.3. (i) 对于一般的度量空间, 子球族 $\mathcal{G}$ 不一定可数, 例子: 在不可数集 $\mathcal{X}$ 上赋予离散拓扑(不同点之间距离恒为 1), 则球族 $\mathcal{F} := \{B(x,1) :\ x \in \mathcal{X}\}$ 没有满足条件的可数子球族.

(ii) 若度量空间是几何双倍度量空间 (存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得, 任意球 B 可被 N 个半径为 $r(B)/2$ 的球包住), 则由于 $\mathcal{G}$ 两两不交, 故至多可数 (see, for instance, [1, Lemma 2.5]);

(iii) 双倍度量空间(赋予双倍测度)是几何双倍度量空间 (see, for instance, [2, p. 67]), 由此及 $\mathcal{G}$ 两两不交知, $\mathcal{G}$ 至多可数;

(iv) 当 $\mathcal{F}$ 是无穷集时, (1) 中的 5 可以改为任意比 3 大的数 (证明: 只需将 (2) 中的 $r(B)/2$ 改成 $r(B)/c$, $c \in (1,2)$ 即可), 当 $\mathcal{F}$ 是有限集时, 可以取 3.

(v) 条件中的半径有上界是必须的, 反例: $\mathbb{R}^n$ 中的球族 $\{B(\mathbf{0},k)\}_{k\in\mathbb{N}}$.

证明. 先证 (i). 取定参考点 $x_0 \in \mathcal{X}$. 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{G}_k := \{B \in \mathcal{G} :\ B \subset B(x_0,k),\ r(B) \in (1/k, \infty)\}.$$

对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在有限个圆心属于 $B(x_0,k)$, 半径为 $1/(2k)$ 的球族 $\mathcal{C}$ 把 $B(x_0,k)$ 盖住. 因此对 $\forall B \in \mathcal{G}_k$, 存在 $\widetilde{B} \in \mathcal{C}$ 使得 $x_B \in \widetilde{B}$. 注意到 $\mathcal{G}_k$ 两两不交且 $\widetilde{B} \subset B$, 故 $T :\ \mathcal{G}_k \to \mathcal{C}, B \mapsto \widetilde{B}$ 的映射是单射, 从而 $\#\mathcal{G}_k \le \#\mathcal{C}$ 也是有限集. 从因此

$$\mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k$$

至多可数.

再证(ii). 对任意球 $B \subset \mathcal{X}$, 取 B 中半径为 $r(B)/4$ 且两两不交的极大球族 $\mathcal{C}$, 则对 $\forall \widetilde{B} \in \mathcal{C}$,

$$\mu(B) \leq \mu\left(8\widetilde{B}\right) \leq C_{(\mu)}^3 \mu\left(\widetilde{B}\right).$$

反设 $\#\mathcal{C} > C_{(\mu)}^3$, 则可取 $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ 满足 $\#\widetilde{\mathcal{C}} = \lfloor C_{(\mu)}^3 \rfloor + 1 \in (C_{(\mu)}^3, \infty)$, 从而

$$\mu(B) \geq \mu\left(\bigcup_{\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{C}}} \widetilde{B}\right) = \sum_{\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{C}}} \mu\left(\widetilde{B}\right) \geq \#\mathcal{C}\mu(B)/C_{(\mu)}^3 > \mu(B),$$

矛盾. 因此 $\#\mathcal{C} \leq \left[C_{(\mu)}\right]^3$. 由于 $\mathcal{C}$ 是极大的, 故对 $\forall x \in \mathcal{X}$, $B(x, r(B)/4)$ 与 $\mathcal{C}$ 中某个球 $\widetilde{B}$ 相交, 从而 $x \in 2\widetilde{B}$, 因此 $\{2\widetilde{B}\}_{\widetilde{B} \in \mathcal{C}}$ 是半径为 $r(B)/2$ 且能盖住 B 的球族. 综上, $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是几何双倍度量空间.

现在证 (iii). $\mathcal{F}$ 是有限集时, 系数能取 3 是显然的. 故只需证 $\mathcal{F}$ 是无穷集时, 系数不能取 3. 反例: 取

$$\mathcal{F} := \left\{B(x,r) \subset \mathbb{R} : \ x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ r \in \left(|x|, \frac{|x|+1}{3}\right)\right\},$$

则 $\mathcal{F}$ 两两相交(都包含原点), 又对任意 $B(x,r) \in \mathcal{F}$,

$$3B(x,r) \subsetneqq B(x, |x|+1),$$

且

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = (-1, 1) \not\subset B(x, |x|+1),$$

故

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \not\subset 3B(x,r),$$

从而系数不能取 3. $\square$

2 拟度量空间

Definition 2.1. 设 $\mathcal{X}$ 是非空集合, d: $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 满足, 对任意 x, y, $z\in\mathcal{X}$,

(i) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) 存在与 x, y, 和 z 无关的常数 $A_0\in[1,\infty)$ 使得

$$d(x,z)\le A_0[d(x,y)+d(y,z)].$$

则称 $(\mathcal{X},d)$ 为拟度量空间.

用类似度量空间的证明, 可以得到如下引理.

Lemma 2.2. 设 $\mathcal{F}$ 是拟度量空间 $(\mathcal{X},d)$ 中的一族球且 $\sup_{B\in\mathcal{F}}r(B)<\infty$. 则存在两两不交的子球族 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 使得

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}}B\subset\bigcup_{B\in\mathcal{G}}5A_0^2B, \tag{3}$$

且对 $\forall B\in\mathcal{F}$, 存在 $\widetilde{B}\in\mathcal{G}$ 满足 $r(B)\le 2r(\widetilde{B})$ 使得 $B\cap\widetilde{B}\neq\emptyset$.

Remark 2.3. 同样的, 当 $\mathcal{F}$ 是无穷集时, (3) 中的 5 可以改为任意比 3 大的数, 当 $\mathcal{F}$ 是有限集时, 可以取 3. 若 $\mathcal{X}$ 是齐型空间, 由于空间具有几何双倍性质, 故子球族是可数的 (证明见 Remark 1.3(iii)).

Coifman 和 Weiss 给出了以下的变形 ([2, Theorem 1.2] or [3, Theorem 3.1]), 区别在于加强了条件, 优化了系数.

Lemma 2.4 (Vitali–Wiener type covering lemma)**.** 设 E 是几何双倍度量空间 $(\mathcal{X},d)$ 中的非空有界集. 则对任意球族 $\mathcal{F}:=\{B(x,r_x)\}_{x\in E}$, 存在两两不交的子球族 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 使得

$$E\subset\bigcup_{B\in\mathcal{G}}3A_0B. \tag{4}$$

证明. 不妨设 $\sup_{x\in E}r_x<\infty$. 取 $x_1\in E$ 使得

$$r_{x_1}>\frac{1}{2}\sup_{x\in E}r_x.$$

令 $E_2:=E\setminus B(x_1,4A_0r_{x_1})$. 若 $E_2\neq\emptyset$, 取 $x_2\in E_2$ 使得

$$r_{x_2}>\frac{1}{2}\sup_{x\in E_2}r_x.$$

令 $E_3 := E \setminus \bigcup_{i=1}^2 B(x_i, 4A_0 r_{x_i})$. 若 $E_3 \neq \emptyset$, 取 $x_3 \in E_3$ 使得

$$r_{x_3} > \frac{1}{2} \sup_{x \in E_3} r_x.$$

$$\cdots$$

这样构造的球列两两不交. 事实上, 如果存在 i, $j \in \mathbb{N}$, $(i < j)$ 使得 $B(x_i, r_{x_i})$ 和 $B(x_j, r_{x_j})$ 相交, 由于 $2r_{x_i} > r_{x_j}$, 故

$$d(x_i, x_j) < A_0(r_{x_i} + r_{x_j}) < 3A_0 r_{x_i}$$

从而 $x_j \in B(x_i, 3A_0 r_{x_i})$, 与 $x_j \in E_j$ 矛盾. 因此球族两两不交.

若上述过程在有限次结束, 则 (4) 成立, 从而引理证毕. 否则, 断言 $\{B(x_i, r_{x_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{i \to \infty} r_{x_i} = 0. \tag{5}$$

事实上, 对任意 $\varepsilon \in (0, \infty)$, 由几何双倍性质知, 存在 $N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ 使得, 半径大于 $\varepsilon/2$ 的两两不交子球族个数小于 $N_{(\varepsilon)}$. 对任意 $i > N_{(\varepsilon)}$, 若 $r_{x_i} \geq \varepsilon$, 则由球族的构造知, 对任意 $j \in \{1, \ldots, N_{(\varepsilon)}\}$, $r_{x_j} > \frac{1}{2} r_{x_i} > \varepsilon/2$, 与个数小于 $N_{(\varepsilon)}$ 矛盾. 故对任意 $i > N_{(\varepsilon)}$, $r_{x_i} < \varepsilon$. (5) 证毕. 综上, 断言证毕.

最后证 (3). 假设 $E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, 4A_0 r_{x_i})$ 非空. 取 $x_0 \in E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, 4A_0 r_{x_i})$. 由断言知, 存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $r_{x_i} < \frac{1}{2} r_{x_0}$. 这与

$$r_{x_i} > \frac{1}{2} \sup_{x \in E_i} r_x$$

相矛盾, 故 $E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, 4A_0 r_{x_i}) = \emptyset$. □

Acknowledgements. 之前的证明有点问题, 感谢 xs 的指正.

参考文献

[1] T. Hytönen, A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa, Publ. Mat. 54 (2010), 485–504.

[2] R. R. Coifman and G. Weiss, Analyse Harmonique Non-commutative sur Certains Espaces Homogènes, (French) Étude de Certaines Intégrales Singulières, Lecture Notes in Mathematics 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[3] R. R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569-645.