笔记-J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis

April 28, 2020

Lemma 0.1. 设$N \in \mathbb{N}$, 开区间$\{I_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}$ 且

$$\bigcap_{k=1}^N I_k \neq \emptyset.$$

则存在$k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^N I_k = I_{k_0},$$

或存在$k_1, k_2 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^N I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}.$$

Proof. 若存在$k_0 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^N I_k = I_{k_0},$$

Lemma 0.1 证毕. 否则由$\bigcap_{k=1}^N I_k \neq \emptyset$ 知, 存在$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ 使得

$$\bigcup_{\alpha \in A} I_k = (a, b).$$

存在$k_1, k_2 \in \{1, \ldots, N\}$ 使得

$$\inf I_{k_1} = a, \quad \text{and} \quad \sup I_{k_2} = b.$$

由此及$I_{k_1} \cap I_{k_2} \neq \emptyset$ 知

$$\bigcup_{k=1}^N I_k = I_{k_1} \cup I_{k_2}.$$

$\square$

Lemma 0.2 (Lemma 2.6)**.** *Let* $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *be a collection of open intervals in* $\mathbb{R}^n$ *and let* K *be a compact set contained in their union. Then there exists a finite subcollection* $\{I_j\}$ *such that*

$$K \subset \bigcup_j I_j, \quad \textit{and} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_j 1_{I_j}(x) \le 2.$$

Proof. 由K 是紧集知, 存在$\{I_k^{(0)}\}_{k=1}^{N_0} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k^{(0)}.$$

若存在$x_0 \in \mathbb{R}$ 使得$\sum_{k=1}^{N_0} 1_{I_j^{(0)}}(x_0) \ge 3$, 则由Lemma 0.1 知, 存在$\{I_k^{(1)}\}_{k=1}^{N_1} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得$N_1 \le N_0 - 1$ 且

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N_1} I_k^{(1)}.$$

若存在$x_1 \in \mathbb{R}$ 使得$\sum_{k=1}^{N_1} 1_{I_j^{(1)}}(x_1) \ge 3$, 重复之前的过程. 由于$\{N_k\}$ 严格减且大于0, 故此过程经过有限次后会停止, 此时存在$\{I_k^{(s)}\}_{k=1}^{N_s} \subset \{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N_s} I_k^{(s)} \quad \text{and} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=1}^{N_s} 1_{I_k^{(s)}}(x) \le 2.$$

□

Lemma 2.12 的证明中会用到如下事实.

Theorem 0.3. 设方体Q_1, Q_2 满足$Q_1 \subset Q_2$, 则对$\forall \alpha \in [\frac{\ell(Q_2)}{\ell(Q_2)-\ell(Q_1)}, \infty)$, $\alpha Q_1 \subset \alpha Q_2$. 其中$\alpha Q_1$ 表示与Q_1 中心相同, 长度为$\alpha \ell(Q_1)$ 的方体.

Proof. 若$Q_1 = Q_2$, 结论显然成立. 若$Q_1 \ne Q_2$, 则$\ell(Q_1) < \ell(Q_2)$. 由$Q_1 \subset Q_2$ 知, 对$\forall x := (x_1, \ldots, x_n) \in \alpha Q_1$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} |x_k - (x_{Q_2})_k| &\le |x_k - (x_{Q_1})_k| + |(x_{Q_1})_k - (x_{Q_2})_k| < \frac{\alpha \ell(Q_1)}{2} + \frac{\ell(Q_2)}{2} \\ &= \frac{\alpha \ell(Q_2)}{2} \left[\frac{\ell(Q_1)}{\ell(Q_2)} + \frac{1}{\alpha} \right] \le \frac{\alpha \ell(Q_2)}{2}. \end{aligned}$$

因此$x \in \alpha Q_2$. □