范数和拟范数的连续性

September 7, 2020

范数大家都懂的, 拟范数跟范数差了个三角不等式, 拟范数对应的是拟三角不等式, 即存在正常数$K \in (1, \infty)$ 使得

$$d(x, y) \leq K[d(x, z) + d(z, y)].$$

所谓范数和拟范数的连续性, 其实就是想证明范数和拟范数作为算子的连续性.

Theorem 0.1. 设$\|\cdot\|$ 是范数, 则

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|.$$

Proof. 由

$$|\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\|$$

可以看出, 这个结论很显然. □

拟范数跟范数有一定差别, 那么有没有类似的结论呢. 设$\|\cdot\|$ 是拟范数, 则是否也有

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|.$$

答案是否定的.

反例: 设$K \in (1, \infty)$ 是常数, 且

$$\|\cdot\| : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \begin{cases} K|x|, & y = 0, \\ |x| + |y|, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

取$x_n := (1, 1/n)$, $x_0 := (1, 0)$, 则

$$\|x_n - x_0\| = \frac{1}{n} \to 0, \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

但是

$$\|x_n\| = 1 + \frac{1}{n} \to 1, \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

而$\|x_0\| = K$.

不过对于部分特殊的拟范数, 还是有连续性的, 比如弱L^1 空间. 类似的, 弱L^p 应该也是连续的.

Lemma 0.2. 设f, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset L^{1,\infty}(\mathbb{R})$. 若

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}=0,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}=\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}.$$

Proof. 先证

$$\liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\geq\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}.$$

对$\forall\lambda\in(0,\infty)$, $\forall\delta\in(0,1)$, $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\lambda|\{x\in\mathbb{R}:\ |f(x)|>\lambda\}|&\leq\lambda|\{x\in\mathbb{R}:\ |f(x)-f_k(x)|>\delta\lambda\}|\\&\quad+\lambda|\{x\in\mathbb{R}:\ |f_k(x)|>(1-\delta)\lambda\}|\\&\leq\frac{1}{\delta}\|f-f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}+\frac{1}{1-\delta}\|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

由$\lambda\in(0,\infty)$ 的任意性有,

$$\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\leq\frac{1}{\delta}\|f-f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}+\frac{1}{1-\delta}\|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})},$$

令$k\to\infty$ 得,

$$\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\leq\frac{1}{1-\delta}\liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})},$$

再令$\delta\to0^+$ 知,

$$\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\leq\liminf_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}.$$

再证

$$\limsup_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\leq\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}.$$

对$\forall\lambda\in(0,\infty)$, $\forall\delta\in(0,1)$, $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\lambda|\{x\in\mathbb{R}:\ |f_k(x)|>\lambda\}|&\leq\lambda|\{x\in\mathbb{R}:\ |f_k(x)-f(x)|>\delta\lambda\}|\\&\quad+\lambda|\{x\in\mathbb{R}:\ |f(x)|>(1-\delta)\lambda\}|\\&\leq\frac{1}{\delta}\|f_k-f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}+\frac{1}{1-\delta}\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

由$\lambda\in(0,\infty)$ 的任意性有,

$$\|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\leq\frac{1}{\delta}\|f_k-f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}+\frac{1}{1-\delta}\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})},$$

令$k\to\infty$ 得,

$$\limsup_{k\to\infty}\|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}\leq\frac{1}{1-\delta}\|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})},$$

再令$\delta \to 0^+$ 知,

$$\limsup_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \le \|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}.$$

综上,

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})}.$$

□