1 关于Fourier变换与Hilbert变换定义的几点补充

1.1 $L^2(\mathbb{R}^n)$上Fourier变换两种定义的等价性

下述定理1见, 例如[1, 定理2.1.13].

定理 1. 设$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 若$\widehat{f} \geq 0$且f在0处连续, 则$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由此得

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x \cdot \xi}\, dx \quad \text{a.e.} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

特别地,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\, dx = f(0).$$

下述定理2见, 例如[1, 定理2.2.1].

定理 2. 若$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 则$\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$且$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Proof. 对$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$及$x \in \mathbb{R}^n$, 令$g(x) := \overline{f(-x)}$. 则$g \in L^1(\mathbb{R}^n) \bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$且, 对任意$\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-x)} e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{2\pi i x \cdot \xi}\, dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}\, dx} = \overline{\widehat{f}(\xi)}.
\end{aligned}$$

令$h := f * g$, 则由Young不等式(书中17页Corollary 1.21)知$h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由此及上式知

$$\widehat{h} = \widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g} = \widehat{f}\overline{\widehat{f}} = |\widehat{f}|^2 \geq 0. \tag{1}$$

下证h在$\mathbb{R}^n$上一致连续. 事实上, 对任意$x \in \mathbb{R}^n$及$\delta \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
|h(x+\delta) - h(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x+\delta-t) g(t)\, dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) g(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+\delta-t) - f(x-t)| |g(t)|\, dt \\
&\leq \|f(\cdot+\delta) - f(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{2}$$

由$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$在$L^2(\mathbb{R}^n)$中稠知, 对任意$\epsilon \in (0, \infty)$, 存在$u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$使得

$$\|u - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{3(\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 1)}.$$

且由$u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$知,

$$\lim_{\delta \to 0} \|u(\cdot+\delta) - u(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{3}$$

从而对上述给定的$\epsilon \in (0,\infty)$, 存在$\delta_1 \in (0,\infty)$使得, 对任意$\delta \in (0,\delta_1)$,

$$\|u(\cdot+\delta)-u(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \frac{\epsilon}{3(\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+1)}.$$

由此及Lebesgue积分的平移不变性进一步知, 当$\delta \in (0,\delta_1)$时,

$$\begin{aligned}
&\|f(\cdot+\delta)-f(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad \le \|f(\cdot+\delta)-u(\cdot+\delta)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u(\cdot+\delta)-u(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u(\cdot)-f(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad = 2\|u-f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u(\cdot+\delta)-u(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad < \frac{\epsilon}{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+1}.
\end{aligned}$$

由此及(2)知, 当$\delta \in (0,\delta_1)$时, 对任意$x \in \mathbb{R}^n$,

$$|h(x+\delta)-h(x)| < \frac{\epsilon}{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+1} \cdot \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \epsilon.$$

因此h在$\mathbb{R}^n$上一致连续. 由此, (1)及定理1知,

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(x)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(x)\,dx = h(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2\,dt = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

定理证毕. □

下面定义$L^2(\mathbb{R}^n)$上的Fourier变换.

定义 3. 设$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$及$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

定义f的Fourier变换为

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{k\to\infty} \widehat{f_k} \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

下说明上述定义是合理的. 即$\mathcal{F}(f)$在几乎处处意义下是唯一的且与$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 取法无关. 事实上, 若$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 = \lim_{k\to\infty} \|g_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

由此及定理2知, $\{\widehat{f_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$与$\{\widehat{g_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$也为$L^2(\mathbb{R}^n)$中柯西列. 进而由$L^2(\mathbb{R}^n)$的完备性知$\{\widehat{f_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$与$\{\widehat{g_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$收敛, 分别记其收敛于$\widetilde{f}$与$\widetilde{g}$. 且由定理2知, 对任意$k \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\widehat{f_k} - \widehat{g_k}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\widehat{f_k - g_k}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_k - g_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\le \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f - g_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty.$$

因此

$$\left\|\widetilde{f} - \widetilde{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \left\|\widetilde{f} - \widehat{f_k}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\|\widehat{f_k} - \widehat{g}_k\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\widehat{g}_k - \widetilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{as} \quad k \to 0.$$

故$\widetilde{f} = \widetilde{g}$几乎处处成立. 这就说明了定义3中的$\mathcal{F}(f)$在几乎处处意义下唯一且与$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的选取无关, 因此定义3是合理的.

通常取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$为

$$f_k(x) := \begin{cases} f(x), & |x| \le k, \\ 0, & |x| > k. \end{cases}$$

下说明$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$满足定义3中要求. 事实上, 对任意$k \in \mathbb{N}$, 有

$$\|f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

且

$$\|f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|\le k\}}(x)\,dx \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|\le k\}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

故$f_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. 且由控制收敛定理知

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)\mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|>k\}}(x)\right|^2\,dx = 0.$$

进而$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$满足定义3中要求.

定义 4. (i) 对任意$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 定义其Fourier变换为, 对任意$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{T}(\phi) := T(\widehat{\phi}).$$

(ii) 设$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$且$L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 故可将$f$看作$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$中元素$T_f$, 其定义为, 对任意$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx$. 则$f$作为Schwartz分布, 其Fourier变换定义为, 对任意$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{T_f}(\phi) := T_f(\widehat{\phi}).$$

注 5. 设$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 对任意$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 记

$$\check{T}(\phi) := T(\check{\phi}).$$

则

$$(\check{T})^\wedge(\phi) = T(\phi) = (\widehat{T})^\vee(\phi)$$

从而$\check{T}$[也记为$\mathcal{F}^{-1}(T)$]为T的Fourier逆变换.

注 6. 由书中15页Theorem 1.18知$\widehat{f} := \widehat{T}_f$在分布意义下为函数.

定理 7. 设$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 则由定义3与定义4所定义的f的Fourier变换是一致的, 即

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f} \quad \text{a.e..}$$

Proof. 事实上, 由Theorem 1.18知, 对任意$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$及$\xi \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \lim_{k\to\infty} \int_{|x|<k} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|<k\}} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \\
&= \mathcal{F}(f)(\xi) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

进而$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ a.e.. □

注 8. (i) 设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 对任意$k \in \mathbb{N}$, 令$f_k \equiv f$. 注意到$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 则,

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{k\to\infty} \widehat{f}(x) = \widehat{f} \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

由此及f连续知, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 中函数分别看成$L^1(\mathbb{R}^n)$及$L^2(\mathbb{R}^n)$中函数所定义的Fourier变换是一致的.

(ii) 对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$及$x \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi = \widehat{f}(-x).$$

下证$\mathcal{F}^{-1}$为Fourier变换$\mathcal{F}$的逆算子. 事实上, 由书中13页Theorem 1.13知, 对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$及$x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(-\xi) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi = f(x);$$

且由书中14页Corollary 1.15知

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \widehat{\mathcal{F}(f)}(-x) = \widehat{\widehat{f}}(-x) = f(x).$$

故

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = I = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F},$$

即$\mathcal{F}^{-1}$为Fourier变换$\mathcal{F}$的逆算子. 又对$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$及$x \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) := \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi = \widehat{f}(-x) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^n).$$

下证$\mathcal{F}^{-1}$为Fourier变换$\mathcal{F}$的逆算子. 事实上, 由书中15页Theorem1.18 知,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) &= \lim_{R\to\infty}\int_{|x|<R}\widehat{f}(-\xi)e^{-2\pi ix\cdot\xi}\,d\xi\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{|x|<R}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\,d\xi = f(x) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^n);\end{aligned}$$

且

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \lim_{R\to\infty}\int_{|x|<R}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\,d\xi = f(x) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^n);$$

故

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = I = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F},$$

即$\mathcal{F}^{-1}$为Fourier变换$\mathcal{F}$的逆算子. 进而由(i)知Fourier逆变换在$L^2(\mathbb{R}^n)$与$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上一致.

1.2 $L^2(\mathbb{R})$上Hilbert变换的几种定义的等价性

对任意$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 我们已经证明如下三种点态定义等价:

$$H_1 f := \lim_{t\to 0} Q_t * f; \tag{4}$$

$$H_2 f := \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon}\frac{f(\cdot-y)}{y}\,dy; \tag{5}$$

$$H_3 f := \mathcal{F}^{-1}\left(-i\operatorname{sgn}(\cdot)\widehat{f}\right). \tag{6}$$

其中$\mathcal{F}^{-1}$为Fourier逆变换. 我们记$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上的Hilbert变换为

$$H := H_1 = H_2 = H_3.$$

由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$在$L^2(\mathbb{R})$中稠知, 我们定义$L^2(\mathbb{R})$上的Hilbert变换如下:

定义 9. 对任意$f\in L^2(\mathbb{R})$, 定义其Hilbert变换为

$$Hf := \lim_{k\to\infty} Hf_k \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}), \tag{7}$$

其中$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$且$\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{L^2(\mathbb{R})}=0$.

下说明上述定义是合理的. 即证明Hf几乎处处意义下唯一且与$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$选取无关. 设$f\in L^2(\mathbb{R})$, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$且

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^2(\mathbb{R})}=0=\lim_{k\to\infty}\|g_k-f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{8}$$

由定义知H在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上也具有线性性. 断言H在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上是依$L^2(\mathbb{R})$范数等距的. 事实上, 由Planchereal定理(见书中15页Theorem 1.18)知

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|H_3f\|_{L^2(\mathbb{R})}&=\left\|\widehat{H_3f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\\&=\left\|-i\operatorname{sgn}(\cdot)\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}=\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\\&=\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

故断言成立. 从而, 对任意$k,\ l\in\mathbb{N}$,

$$\|Hf_k-Hf_l\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|H(f_k-f_l)\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|f_k-f_l\|_{L^2(\mathbb{R})}\to 0\quad\text{as}\quad k,\ l\to\infty.$$

故$\{Hf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$为$L^2(\mathbb{R}^n)$中柯西列. 同理知$\{Hg_k\}_{k\in\mathbb{N}}$也为$L^2(\mathbb{R}^n)$中柯西列. 由$L^2(\mathbb{R}^n)$的完备性知其均为收敛列, 记其分别收敛于$\widetilde{f}$与$\widetilde{g}$. 再次利用$H$在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上依$L^2(\mathbb{R})$范数等距知

$$\begin{aligned}&\left\|\widetilde{f}-\widetilde{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\\&\quad\le\left\|\widetilde{f}-Hf_k\right\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|Hf_k-Hg_k\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|Hg_k-\widetilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}\\&\quad\le\left\|\widetilde{f}-Hf_k\right\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|H(f_k-g_k)\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|Hg_k-\widetilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}\\&\quad\le\left\|\widetilde{f}-Hf_k\right\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|f_k-g_k\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|Hg_k-\widetilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}\\&\quad\le\left\|\widetilde{f}-Hf_k\right\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|f_k-f\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|f-g_k\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|Hg_k-\widetilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}\\&\quad\to 0\quad\text{as}\quad k\to 0.\end{aligned}$$

故$\widetilde{f}=\widetilde{g}$几乎处处成立. 这就说明了由(7)式定义的$Hf$ 在几乎处处意义下唯一且与$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的选取无关, 因此定义是合理的.

定义 10. 对任意$f\in L^2(\mathbb{R})$, 令:

$$\widetilde{H}_1f(x):=\lim_{t\to 0}Q_t*f(x)\quad\text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}; \tag{9}$$

$$\widetilde{H}_2f(x):=\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}\,dy\quad\text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}; \tag{10}$$

$$\widetilde{H}_3f(x):=\mathcal{F}^{-1}\left(-i\operatorname{sgn}(\cdot)\widehat{f}\right)(x)\quad\text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

下述命题见, 例如, [1, 命题5.1.1].

命题 11. 对任意$p \in [1,\infty)$及$f \in L^p(\mathbb{R})$, f的共轭Poisson积分[即$v(x,t)$, 也即$Q_t * f(x)$]在$\mathbb{R}$上几乎处处存在有限的非切向极限.

注 12. 上述定理说明了, 对任意$p \in [1,\infty)$及$f \in L^p(\mathbb{R})$, $\lim_{t\to 0} Q_t * f$, 即$\widetilde{H}_1 f$, 几乎处处存在.

下述引理见, 例如, [1, 引理5.1.2].

引理 13. 设$p \in [1,\infty)$及$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则在f的Lebesgue点处有

$$\lim_{t\to 0} Q_t * f = \lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon f,$$

其中, 对任意$\epsilon \in (0,\infty)$及$x \in \mathbb{R}^n$,

$$H_\epsilon f(x) := \frac{1}{\pi}\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |y|>\epsilon\}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy. \tag{12}$$

命题 14. Hilbert变换H在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上满足以下性质:

(i) 与平移$\tau_h(h \in \mathbb{R})$可交换, 即$\tau_h H = H\tau_h$, 其中, 对任意可测函数g, $\tau_h g := g(\cdot - h)$;

(ii) 与伸缩$\eta_a[a \in (0,\infty)]$可交换, 即$\eta_a H = H\eta_a$, 其中, 对任意可测函数g, $\eta_a g := \frac{1}{a} g(\frac{\cdot}{a})$;

(iii) 与反射可反交换, 即$H\widetilde{f} = -\widetilde{Hf}$, 其中, 对任意可测函数$g$, $\widetilde{g} := g(-\cdot)$.

Proof. 注意到, 对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$及$x \in \mathbb{R}$,

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,dy.$$

则对任意$h \in \mathbb{R}$及$x \in \mathbb{R}$,

$$(\tau_h Hf)(x) = Hf(x-h) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-h-y)}{y}\,dy = H(\tau_h f)(x);$$

对任意$a \in (0,\infty)$及$x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\eta_a Hf)(x) &= \frac{1}{a} Hf(\frac{x}{a}) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{1}{a}\cdot\frac{f(\frac{x}{a}-y)}{y}\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>a\epsilon} \frac{1}{a}\cdot\frac{f(\frac{x-y}{a})}{\frac{y}{a}}\,d(\frac{y}{a}) = H(\eta_a f)(x);\end{aligned}$$

且

$$H\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(-x+y)}{y}\,dy = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(-x-y)}{-y}\,dy = -\widetilde{Hf}(x).$$

命题证毕. $\square$

如下引理参见, 例如, 书中56页Lemma 3.5.

引理 15. 存在正常数C使得, 对任意$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$及$x\in\mathbb{R}$,

$$H^*f(x)\le M(Hf)(x)+CMf(x),$$

其中M为Hardy–Littlewood极大算子且

$$H^*f(x):=\sup_{\epsilon\in(0,\infty)}|H_\epsilon f(x)|\,.$$

Proof. 只需证明存在正常数C使得, 对任意$\epsilon\in(0,\infty)$, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$及$x\in\mathbb{R}$,

$$|H_\epsilon f(x)|\le M(Hf)(x)+CMf(x).$$

取定非负偶函数$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$且满足$\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\,dx=1$, 在$(0,\infty)$递减及

$$\operatorname{supp}(\phi):=\{x\in\mathbb{R}:\ \phi(x)\neq 0\}\subset\left\{x\in\mathbb{R}:\ |x|\le\frac{1}{2}\right\}. \tag{13}$$

对任意$\epsilon\in(0,\infty)$及$x\in\mathbb{R}$, 令$\phi_\epsilon(x):=\frac{1}{\epsilon}\phi(\frac{x}{\epsilon})$; 且, 对任意$y\in\mathbb{R}$, 有

$$\left(\phi_\epsilon*\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right)(y)=\pi H\phi_\epsilon(y)=\lim_{\delta\to0^+}\int_{|x|>\delta}\frac{\phi_\epsilon(y-x)}{x}\,dx=\lim_{\delta\to0^+}\int_{|y-x|>\delta}\frac{\phi_\epsilon(x)}{y-x}\,dx. \tag{14}$$

且, 对任意$\epsilon\in(0,\infty)$,

$$\begin{aligned}|H_\epsilon f|&=\left|\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\epsilon\}}*f\right|\\&\le\left|\left(\phi_\epsilon*\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right)*f\right|+\left|\left(\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\epsilon\}}-\phi_\epsilon*\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right)*f\right|\\&=:\mathrm{I}_\epsilon+\mathrm{II}_\epsilon.\end{aligned}$$

首先估计I_ϵ. 事实上, 对任意$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$及$x\in\mathbb{R}$, 由命题14及书中51页(3.6)知

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_\epsilon&=\left|\left(\phi_\epsilon*\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right)*f(x)\right|=|H\phi_\epsilon*f(x)|\\&=\left|\int_{\mathbb{R}}H\phi_\epsilon(y)f(x-y)\,dy\right|=\left|-\int_{\mathbb{R}}\phi_\epsilon(y)H(\tau_x\widetilde{f})(y)\,dy\right|\\&=\left|-\int_{\mathbb{R}}\phi_\epsilon(y)H\widetilde{f}(y-x)\,dy\right|=\left|\int_{\mathbb{R}}\phi_\epsilon(y)Hf(x-y)\,dy\right|\\&=|\phi_\epsilon*(Hf)(x)|\,.\end{aligned}$$

由此及书中31页Proposition 2.7知, 对任意$\epsilon\in(0,\infty)$,

$$\mathrm{I}_\epsilon\le\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})}M(Hf)=M(Hf). \tag{15}$$

下面估计II_ϵ. 为此, 先估计$|\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\epsilon\}}-\phi_\epsilon * \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}|$. 事实上, 当$|y|>\epsilon$时, 由(13), (14)及$\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\,dx=1$知

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\epsilon\}}(y)-\phi_\epsilon * \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}(y)\right| &= \left|\frac{1}{y}-\lim_{\delta\to 0^+}\int_{|y-x|>\delta}\frac{\phi_\epsilon(x)}{y-x}\,dx\right| \\ &= \left|\frac{1}{y}-\int_{|x|<\frac{\epsilon}{2}}\frac{\phi_\epsilon(x)}{y-x}\,dx\right| \\ &= \left|\int_{|x|<\frac{\epsilon}{2}}\phi_\epsilon(x)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y-x}\right)\,dx\right| \\ &\le \int_{|x|<\frac{\epsilon}{2}}\frac{\phi_\epsilon(x)|x|}{|y||y-x|}\,dx \\ &\le \frac{2}{y^2}\int_{|x|<\frac{\epsilon}{2}}\phi_\epsilon(x)|x|\,dx \\ &= \frac{2\epsilon}{y^2}\int_{|x|<\frac{1}{2}}\phi(x)|x|\,dx \\ &\le \frac{\epsilon}{y^2}.\end{aligned}\tag{16}$$

当$|y|\le\epsilon$时, 由(13), (14)及Lagrange中值定理知

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\epsilon\}}(y)-\phi_\epsilon * \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}(y)\right| &= \left|\lim_{\delta\to 0^+}\int_{|x|>\delta}\frac{\phi_\epsilon(y-x)}{x}\,dx\right| \\ &= \left|\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\delta<|x|<\frac{3\epsilon}{2}}\frac{\phi_\epsilon(y-x)}{x}\,dx\right| \\ &\le \left|\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\delta<|x|<\frac{3\epsilon}{2}}\frac{\phi_\epsilon(y-x)-\phi_\epsilon(y)}{x}\,dx\right| \\ &\le \frac{3\|\phi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\epsilon}.\end{aligned}\tag{17}$$

由(16)与(17)知, 对任意$x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\pi\mathrm{II}_\epsilon &= \left|\left(\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\epsilon\}}-\phi_\epsilon * \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right)*f(x)\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}}\left|\left(\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\epsilon\}}-\phi_\epsilon * \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right)(y)f(x-y)\right|\,dy \\ &\le \int_{|y|<\epsilon}\left|\left(\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\epsilon\}}-\phi_\epsilon * \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right)(y)f(x-y)\right|\,dy \\ &\quad+\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k-1}\epsilon\le|y|<2^k\epsilon}\left|\left(\frac{1}{y}\mathbf{1}_{\{|y|>\epsilon\}}-\phi_\epsilon * \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}\right)(y)f(x-y)\right|\,dy \\ &\lesssim \int_{|y|<\epsilon}|f(x-y)|\,dy+\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k-1}\epsilon\le|y|<2^k\epsilon}\frac{\epsilon}{y^2}|f(x-y)|\,dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim Mf(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k \epsilon} \int_{2^{k-1}\epsilon \le |y| < 2^k \epsilon} |f(x-y)| \, dy \\
&\lesssim Mf(x).
\end{aligned}
$$

综上, 存在正常数C使得, 对任意$\epsilon \in (0,\infty)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$及$x \in \mathbb{R}$,

$$|H_\epsilon f(x)| \le M(Hf)(x) + CMf(x).$$

进而

$$H^* f(x) \le M(Hf)(x) + CMf(x),$$

引理证毕. □

引理 16. $\widetilde{H}_2$在$L^2(\mathbb{R})$上有界, 即存在正常数C使得, 对任意$f \in L^2(\mathbb{R})$, 有

$$\left\| \widetilde{H}_2 f \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Proof. 对任意$\epsilon \in (0,\infty)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$及$x \in \mathbb{R}$, 令

$$H^* f(x) := \sup_{\epsilon > 0} |H_\epsilon f(x)|,$$

其中$H_\epsilon f(x)$如(12). 由书中56页Lemma 3.5知, 存在常数$C \in (0,\infty)$使得, 对任意$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$及$x \in \mathbb{R}$, 有

$$H^* \phi(x) \le M(H\phi)(x) + CM\phi(x), \tag{18}$$

其中M为Hardy–Littlewood极大算子. 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$在$L^2(\mathbb{R})$中稠知, 对任意$f \in L^2(\mathbb{R})$, 存在$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$使得,

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

从而, 对任意$\epsilon \in (0,\infty)$及$x \in \mathbb{R}$, 由Lebesgue积分平移不变性及Hölder不等式知

$$
\begin{aligned}
0 \le |H_\epsilon f(x) - H_\epsilon f_k(x)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y) - f_k(x-y)}{y} \, dy \right| \\
&\le \frac{1}{\pi} \|f(x-\cdot) - f_k(x-\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})} \left\| \frac{1}{\cdot} \mathbf{1}_{\{|\cdot|>\epsilon\}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{\pi} \|f - f_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \left(\frac{2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty.
\end{aligned}
$$

由此及(18)知, 对任意$\epsilon \in (0,\infty)$及$x \in \mathbb{R}$

$$|H_\epsilon f(x)| = \left| \lim_{k\to\infty} H_\epsilon f_k(x) \right| = \lim_{k\to\infty} |H_\epsilon f_k(x)|$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \left[M(Hf_k)(x) + CMf_k(x)\right].$$

进而, 对任意$x \in \mathbb{R}$,

$$H^*f(x) := \sup_{\epsilon\in(0,\infty)} |H_\epsilon f(x)| \leq \liminf_{k\to\infty} \left[M(Hf_k)(x) + CMf_k(x)\right].$$

由M与H在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上依$L^2(\mathbb{R})$范数有界及Fatou引理知,

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{H}_2 f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|H^*f\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \left\|\liminf_{k\to\infty} \left[M(Hf_k)(x) + CMf_k(x)\right]\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \|M(Hf_k)(x) + CMf_k(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \sim \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

引理证毕. □

下面给出我们的主要定理.

定理 17. 对任意$f \in L^2(\mathbb{R})$, 在几乎处处意义下有

$$\widetilde{H}_1 f = \widetilde{H}_2 f = \widetilde{H}_3 f = Hf.$$

Proof. 首先证明, 对任意$f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widetilde{H}_1 f$与$\widetilde{H}_2 f$几乎处处相等. 事实上, 由[1, 命题5.1.1]知, $\widetilde{H}_1 f := \lim_{t\to 0} Q_t * f$几乎处处存在. 由此及[1, 引理5.1.2]知,

$$\lim_{t\to 0} Q_t * f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}.$$

因此$\widetilde{H}_1 f$与$\widetilde{H}_2 f$几乎处处相等.

下证, 对任意$f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widetilde{H}_2 f$与Hf在几乎处处意义下相等. 事实上, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$在$L^2(\mathbb{R})$中稠, 取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

由引理16 知$\widetilde{H}_2$在$L^2(\mathbb{R})$上有界. 从而, 对任意$f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\widetilde{H}_2 f = \lim_{k\to\infty} \widetilde{H}_2 f_k = \lim_{k\to\infty} H_2 f_k = Hf \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

故在几乎处处意义下有$\widetilde{H}_2 f = Hf$. 进而

$$\widetilde{H}_1 f = \widetilde{H}_2 f = Hf \quad \text{a.e.}. \tag{19}$$

下证, 对任意$f \in L^2(\mathbb{R})$, Hf与$\widetilde{H}_3 f$几乎处处相等. 事实上, 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$在$L^2(\mathbb{R})$中稠, 取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$使得

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

注意到$\widetilde{H}_3$在$L^2(\mathbb{R})$上是等距的. 事实上, 由Planchereal定理(见书中15页Theorem 1.18)知

$$\left\|\widetilde{H}_3 f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|-i\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

由此及$\widetilde{H}_3$与H在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上等价知, 对任意$k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left\|Hf - \widetilde{H}_3 f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\le \|Hf - Hf_k\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|Hf_k - \widetilde{H}_3 f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|Hf - Hf_k\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|\widetilde{H}_3 f_k - \widetilde{H}_3 f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|Hf - Hf_k\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f_k - f\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

令$k \to \infty$, 有

$$\left\|Hf - \widetilde{H}_3 f\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

即在$L^2(\mathbb{R})$意义下$Hf = \widetilde{H}_3 f$, 进而在几乎处处意义下有$Hf = \widetilde{H}_3 f$. 命题证毕. □

注 18. (i) 由上述定理知, 对于$L^2(\mathbb{R})$中的函数f, 其Hilbert变换有四种等价的定义方式:

$$H = \widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_2 = \widetilde{H}_3.$$

(ii) 由(i)及书中51页(3.4)知Hilbert变换在$L^2(\mathbb{R})$上是等距的线性算子.

1.3 $L^p(\mathbb{R})$上Hilbert变换的几种定义的等价性

定理17在如下定理(参见, 例如, 书中51页Theorem 3.2)的证明中是必须的.

定理 19. 设H是$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上的Hilbert变换. 则

(i) (Kolmogorov) H是弱$(1,1)$的, 即存在正常数C_1使得, 对任意$\lambda \in (0,\infty)$及$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$|\{x \in \mathbb{R}:\ |Hf(x)| > \lambda\}| \le \frac{C_1\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\lambda}.$$

(ii) (M. Riesz) 对任意$p \in (1,\infty)$, H是强(p,p)的, 即存在正常数C_p 使得, 对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|Hf\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

由定理19及$\mathcal{S}(\mathbb{R})$在$L^p(\mathbb{R})$中稠, 我们定义$L^p(\mathbb{R})$上的Hilbert变换如下:

定义 20. 设$p \in [1,\infty)$及$f \in L^p(\mathbb{R})$.

(i) 当$p = 1$时, 令

$$Hf := \lim_{k\to\infty} Hf_k \quad \text{in} \quad L^{1,\infty}(\mathbb{R}),$$

其中$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$且$\lim_{k\to\infty}\|f - f_k\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$.

(ii) 当$p \in (1,\infty)$时, 令

$$Hf := \lim_{k\to\infty} Hf_k \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}),$$

其中$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$且$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$.

下说明上述定义是合理的. 即对任意$p \in [1,\infty)$及$f \in L^p(\mathbb{R})$, Hf在几乎处处意义下存在且与$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$选取无关.

首先考虑$p = 1$时的情况. 对任意$f \in L^1(\mathbb{R})$, 任取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$满足

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

由上式可知$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$为$L^1(\mathbb{R})$中的Cauchy列. 因此由定理19有, 对于任意的$\epsilon \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned}\|f - f_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} &= \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left|\{x \in \mathbb{R} :\ |Hf_k(x) - Hf_l(x)| > \lambda\}\right| \\ &\le C_1 \|f_k - f_l\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{as} \quad k,\ l \to \infty.\end{aligned}$$

即$\{Hf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$为$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$中Cauchy基本列. 由此及$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$完备(见, 例如, [2, Theorem 1.4.11])知$\{Hf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$为$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$中收敛列, 记其收敛于$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$中函数$G$. 进一步, 由[2, Proposition 1.1.9]及[2, Theorem 1.1.11]知

$$Hf(x) = G(x) \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}.$$

即Hf在几乎处处意义下存在. 以下说明Hf不依赖于$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的选取. 事实上, 另取序列$\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$满足

$$\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

下证$\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$依$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$范数收敛于G. 事实上, 对于任意的$\lambda \in (0,\infty)$,

$$\begin{aligned}\|G - Hg_k\|_{L^{1,\infty}} &= \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left|\{x \in \mathbb{R} :\ |G(x) - Hg_k(x)| > \lambda\}\right| \\ &\le \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R} :\ |G(x) - Hf_k(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\quad + \sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \left|\left\{x \in \mathbb{R} :\ |Hf_k(x) - Hg_k(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\le 2\|G - Hf_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} + 2C_1 \|f_k - g_k\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\le 2\|G - Hf_k\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} + 2C_1 \|f_k - f\|_{L^1(\mathbb{R})} + 2C_1 \|g_k - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\to 0 \quad \text{as} \quad k,\ l \to \infty.\end{aligned}$$

从而$\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$依$L^{1,\infty}(\mathbb{R})$范数收敛于G. 故Hf不依赖于$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的选取.

下考虑$p\in(1,\infty)$的情况. 设$f\in L^p(\mathbb{R})$并取$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$满足

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}=0=\lim_{k\to\infty}\|f-g_k\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

当$p\in(1,\infty)$时, 由定理19(ii)知H在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上依$L^p(\mathbb{R})$范数是有界的. 由此及H在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上具有线性性知存在正常数C_p使得, 对任意k, $l\in\mathbb{N}$,

$$\|Hf_k-Hf_l\|_{L^p(\mathbb{R})}=\|H(f_k-f_l)\|_{L^p(\mathbb{R})}\le C_p\|f_k-f_l\|_{L^p(\mathbb{R})}\to 0\quad \text{as}\quad k,\ l\to\infty.$$

故$\{Hf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$为$L^p(\mathbb{R}^n)$中柯西列. 同理知$\{Hg_k\}_{k\in\mathbb{N}}$也为$L^p(\mathbb{R}^n)$中柯西列. 由$L^p(\mathbb{R}^n)$的完备性知其均为收敛列, 记其分别收敛于$\widetilde{f}$与$\widetilde{g}$. 再次利用定理19(ii)知

$$\begin{aligned}
&\left\|\widetilde{f}-\widetilde{g}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\\
&\quad\le\left\|\widetilde{f}-Hf_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|Hf_k-Hg_k\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|Hg_k-\widetilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R})}\\
&\quad\le\left\|\widetilde{f}-Hf_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|H(f_k-g_k)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|Hg_k-\widetilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R})}\\
&\quad\le\left\|\widetilde{f}-Hf_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})}+C_p\|f_k-g_k\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|Hg_k-\widetilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R})}\\
&\quad\le\left\|\widetilde{f}-Hf_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})}+C_p\|f_k-f\|_{L^p(\mathbb{R})}+C_p\|f-g_k\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|Hg_k-\widetilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R})}\\
&\quad\to 0\quad\text{as}\quad k\to 0.
\end{aligned}$$

故在$L^p(\mathbb{R})$意义下有$\widetilde{f}=\widetilde{g}$. 进而$\widetilde{f}=\widetilde{g}$几乎处处成立. 这就说明了, 对任意$f\in L^p(\mathbb{R})$, Hf在几乎处处意义下存在且与$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$的选取无关, 因此定义是合理的.

对任意$p\in[1,\infty)$, 类似于定义10, 我们有如下定义.

定义 21. 对任意$p\in[1,\infty)$及$f\in L^p(\mathbb{R})$, 令:

$$\widetilde{H}_1f(x):=\lim_{t\to 0}Q_t*f(x)\quad\text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R};\tag{20}$$

$$\widetilde{H}_2f(x):=\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}\,dy\quad\text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R};\tag{21}$$

且当$p\in[1,2]$时, 在分布意义下令

$$\widetilde{H}_3f:=\mathcal{F}^{-1}\left(-i\operatorname{sgn}(\cdot)\widehat{f}\right).\tag{22}$$

注 22. 设$p\in[1,2]$且$f\in L^p(\mathbb{R})$. 由书中16页Theorem 2.20知, $\widehat{f}\in L^{p'}(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. 从而$\widetilde{H}_3f=\mathcal{F}^{-1}\left(-i\operatorname{sgn}(\cdot)\widehat{f}\right)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

对任意$p\in(1,\infty)$, 利用H在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上强(p,p)有界, 类似于引理16有如下引理.

引理 23. 设$p \in (1,\infty)$. 则$\widetilde{H}_2$在$L^p(\mathbb{R})$上有界, 即存在正常数C_p使得, 对任意$f \in L^p(\mathbb{R})$, 有

$$\left\|\widetilde{H}_2 f\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Proof. 对任意$\epsilon \in (0,\infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$及$x \in \mathbb{R}$, 令

$$H^* f(x) := \sup_{\epsilon \in (0,\infty)} |H_\epsilon f(x)|,$$

其中$H_\epsilon f(x)$如(12). 由引理15(即书中56页Lemma 3.5)知, 存在常数$C \in (0,\infty)$使得, 对任意$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$及$x \in \mathbb{R}$, 有

$$H^*\phi(x) \leq M(H\phi)(x) + CM\phi(x), \tag{23}$$

其中M为Hardy–Littlewood极大算子. 由$\mathcal{S}(\mathbb{R})$在$L^p(\mathbb{R})$中稠知, 对任意$f \in L^p(\mathbb{R})$, 存在$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$使得,

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

从而, 对任意$\epsilon \in (0,\infty)$及$x \in \mathbb{R}$, 由Lebesgue积分平移不变性及Hölder不等式知

$$\begin{aligned}
0 \leq |H_\epsilon f(x) - H_\epsilon f_k(x)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y) - f_k(x-y)}{y}\,dy\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\|f(x-\cdot) - f_k(x-\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})} \left\|\frac{1}{\cdot}\mathbf{1}_{\{|\cdot|>\epsilon\}}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{\pi}\|f - f_k\|_{L^p(\mathbb{R})} \cdot \left(\frac{\epsilon^{-p'+1}}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p'}} \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty.
\end{aligned}$$

由此及(23)知, 对任意$\epsilon \in (0,\infty)$及$x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|H_\epsilon f(x)| = \left|\lim_{k\to\infty} H_\epsilon f_k(x)\right| &= \lim_{k\to\infty} |H_\epsilon f_k(x)| \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left[M(Hf_k)(x) + CMf_k(x)\right].
\end{aligned}$$

进而, 对任意$x \in \mathbb{R}$,

$$H^* f(x) := \sup_{\epsilon \in (0,\infty)} |H_\epsilon f(x)| \leq \liminf_{k\to\infty} \left[M(Hf_k)(x) + CMf_k(x)\right].$$

由书中51页Theorem 3.2(2)知H在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上依$L^p(\mathbb{R})$范数有界. 由此, M在$L^p(\mathbb{R})$上有界及Fatou引理知,

$$\left\|\widetilde{H}_2 f\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|H^* f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left\|\liminf_{k\to\infty} \left[M(Hf_k) + CMf_k\right]\right\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \liminf_{k\to\infty} \|M(Hf_k) + CMf_k\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R})} \sim \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

引理证毕. □

下面的定理见书中56页Theorem 3.3.

定理 24. 设$p \in [1,\infty)$. 则对任意$f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} H_\epsilon f(x) \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R},$$

其中, 对任意$\epsilon \in (0,\infty)$及$x \in \mathbb{R}$,

$$H_\epsilon f(x) := \frac{1}{\pi}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,dy.$$

定理 25. 对任意$p \in [1,\infty)$及$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 在几乎处处意义下有

$$\widetilde{H}_1 f = \widetilde{H}_2 f = Hf$$

且, 当$p \in (1,2]$时, 在分布意义下有

$$\widetilde{H}_1 f = \widetilde{H}_2 f = \widetilde{H}_3 f = Hf.$$

Proof. 首先证明, 对任意$f \in L^p(\mathbb{R})$, $\widetilde{H}_1 f$与$\widetilde{H}_2 f$几乎处处相等. 事实上, 由[1, 命题5.1.1]知, $\widetilde{H}_1 f := \lim_{t\to 0} Q_t * f$几乎处处存在. 由此及[1, 引理5.1.2]知,

$$\lim_{t\to 0} Q_t * f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\,dy \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}.$$

因此$\widetilde{H}_1 f$与$\widetilde{H}_2 f$几乎处处相等. 又由定理24(即书中56页Theorem 3.3)知, 在几乎处处意义下有$\widetilde{H}_2 f = Hf$. 进而

$$\widetilde{H}_1 f = \widetilde{H}_2 f = Hf \quad \text{a.e.}. \tag{24}$$

下证, 对任意$p \in (1,2]$及$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 在分布意义下有

$$\widetilde{H}_1 f = \widetilde{H}_2 f = \widetilde{H}_3 f = Hf.$$

由(24)知只需证明, 对任意$p \in (1,2]$及$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 在分布意义下有

$$Hf = \widetilde{H}_3 f.$$

为此, 首先证明, 对任意$f \in L^p(\mathbb{R})$及$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$使得$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$, 有

$$\lim_{k\to\infty} Hf_k = Hf \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

及

$$\lim_{k\to\infty}\left[-i\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f_k}\right]=-i\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f}\quad\text{in}\quad\mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

事实上, 对上述f及$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 由Hölder不等式及H的定义知, 对任意$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$及$k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}Hf(x)\phi(x)\,dx-\int_{\mathbb{R}}Hf_k(x)\phi(x)\,dx\right|&\le\int_{\mathbb{R}}|Hf(x)-Hf_k(x)|\,|\phi(x)|\,dx\\&\le\|Hf-Hf_k\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\\&\to 0\quad\text{as}\quad k\to\infty.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}Hf_k=Hf\quad\text{in}\quad\mathcal{S}'(\mathbb{R}).\tag{25}$$

且对上述f及$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 由Hölder不等式, Fourier变换线性性及书中16页Corollary 1.20知, 对任意$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}}\left[-i\mathrm{sgn}(x)\widehat{f}(x)\phi(x)\right]\,dx-\int_{\mathbb{R}}\left[-i\mathrm{sgn}(x)\widehat{f_k}(x)\phi(x)\right]\,dx\right|\\&\le\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(x)-\widehat{f_k}(x)\right||\phi(x)|\,dx\le\left\|\widehat{f-f_k}\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R})}\\&\le\|f-f_k\|_{L^p(\mathbb{R})}\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R})}\to 0\quad\text{as}\quad k\to\infty.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\left[-i\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f_k}\right]=-i\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f}\quad\text{in}\quad\mathcal{S}'(\mathbb{R}).\tag{26}$$

从而由(25)及(26)及在$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上$H=H_3$知, 对任意$f\in L^p(\mathbb{R})$及$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}Hf(\phi)&=\lim_{k\to\infty}Hf_k(\phi)=\lim_{k\to\infty}H_3f_k(\phi)=\lim_{k\to\infty}\mathcal{F}^{-1}\left(-i\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f_k}\right)(\phi)\\&=\lim_{k\to\infty}\left[-i\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f_k}(\check{\phi})\right]=-i\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f}(\check{\phi})\\&=\mathcal{F}^{-1}\left(-i\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f}\right)(\phi)=\widetilde{H}_3f(\phi).\end{aligned}$$

故再分布意义下有$Hf=\widetilde{H}_3f$. 由此及(24)知, 对任意$f\in L^p(\mathbb{R})$,

$$\widetilde{H}_1f=\widetilde{H}_2f=\widetilde{H}_3f=Hf\quad\text{in}\quad\mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

故命题证毕. □

1.4 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的乘法公式

命题 26. 对任意f, $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx.$$

Proof. 由$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$在$L^2(\mathbb{R}^n)$中稠知，对任意$f$, $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 存在函数列$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$及$\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \quad 且 \quad \lim_{k\to\infty} \|g - g_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

由此, Hölder不等式, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上的乘法公式, Fourier变换线性性, Hölder不等式及书中15页Plancherel定理(Theorem 1.18)知,

$$\begin{aligned}
0 &\le \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx\right| \\
&\le \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_k}(x)g(x)\,dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_k}(x)g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_k}(x)g_k(x)\,dx\right| \\
&\quad + \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\widehat{g_k}(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\widehat{g}(x)\,dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\widehat{g}(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx\right| \\
&\le \left\|\widehat{f} - \widehat{f_k}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|g - g_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \left\|\widehat{f_k}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \|\widehat{g} - \widehat{g_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f - f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= 2\|f - f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|g - g_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

注意到$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, 故$\{\|f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$为有界数列. 由此对上式取$k \to \infty$有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx\right| = 0.$$

命题证毕. □

References

[1] 丁勇, 现代分析基础, 北京师范大学出版社, 2008.

[2] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, third edition, Grad. Texts in Math., vol. 249, Springer, New York, 2014.