收敛和弱收敛的一个等价刻画

March 19, 2020

1 收敛的等价刻画

Theorem 1.1. 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的有界数列. $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到x_0 当且仅当$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意收敛子列均收敛到x_0.

Proof. " $\Rightarrow$ " 显然成立, 下证" $\Leftarrow$ ". 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意收敛子列均收敛到x_0. 反设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 不收敛到x_0, 则存在$\varepsilon_0 \in (0,\infty)$ 使得对$\forall N \in \mathbb{N}$, 存在$k > N$ 使得

$$|x_k - x_0| > \varepsilon_0.$$

故可取子列$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得对$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon_0.$$

$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是有界数列, 故存在收敛子列, 不妨记为其本身. 由" $\Leftarrow$ " 的假设知$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到x_0, 矛盾. 故$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到x_0, Theorem 1.1 证毕. □

Remark 1.2. 若数列不收敛, 则存在两个子列收敛到不同的极限.

2 弱收敛的等价刻画

Definition 2.1. 设$\mathcal{H}$ 是Hilbert 空间. 称$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到$x \in \mathcal{H}$, 若对$\forall y \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{k\to\infty}(x_k, y) = (x, y).$$

Lemma 2.2. *Hilbert* 空间中的有界数列必有弱收敛子列.

Theorem 2.3. 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是*Hilbert* 空间$\mathcal{H}$ 中的有界数列. $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到x_0 当且仅当$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意弱收敛子列均弱收敛到x_0.

Proof. " $\Rightarrow$ " 显然成立, 下证" $\Leftarrow$ ". 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的任意弱收敛子列均弱收敛到x_0. 反设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 不弱收敛到x_0, 则存在$y_0 \in \mathcal{H}$ 使得

$$(x_k, y_0) \nrightarrow (x, y_0), \quad \text{as } k \to \infty.$$

由此及Theorem 1.1 知, 存在子列$\{(x_{n_k}, y_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和$\{(x_{p_k}, y_0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}, y_0) \neq \lim_{k\to\infty}(x_{p_k}, y_0). \tag{1}$$

由Lemma 2.2 知, $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和$\{x_{p_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 均有弱收敛子列, 不妨记为其本身, 并记

$$x_{n_k} \rightharpoonup x_1, \quad x_{p_k} \rightharpoonup x_2, \quad \text{as } k \to \infty.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}, y_0) = (x_1, y_0), \quad \lim_{k\to\infty}(x_{p_k}, y_0) = (x_2, y_0).$$

进一步由(1) 知

$$(x_1, y_0) \neq (x_2, y_0),$$

故$x_1 \neq x_2$, 这与" $\Leftarrow$ " 的假设矛盾. 从而$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 弱收敛到x_0, Theorem 2.3 证毕. □

Remark 2.4. 若数列不弱收敛, 则存在两个子列弱收敛到不同的极限.