

Vitali covering lemma

2021 年 7 月 8 日

1 度量空间

Definition 1. 设 \mathcal{X} 是非空集合, $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 满足, 对任意 $x, y, z \in \mathcal{X}$,

(i) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii)

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

则称 (\mathcal{X}, d) 为度量空间.

Lemma 2. 设 \mathcal{F} 是度量空间 (\mathcal{X}, d) 中的一族球且 $\sup_{B \in \mathcal{F}} r(B) < \infty$. 则存在两两不交的子球族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 使得

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B, \quad (1)$$

且对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 存在 $\tilde{B} \in \mathcal{G}$ 满足 $r(B) \leq 2r(\tilde{B})$ 使得 $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$.

可以利用 Zorn 引理(若非空偏序集的任意全序子集有上界, 则该偏序集存在极大元)来证明这个结论.

证明一. 该证明来自 [J. Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Space, Theorem 1.2].

定义偏序集

$$\Omega := \{\omega \subset \mathcal{F} : \omega \text{ is pairwise disjoint and, for any } B \in \mathcal{F}, \text{ if } B \cap \bigcup_{\tilde{B} \in \omega} \tilde{B} \neq \emptyset, \quad (2)$$

then there exists a $\tilde{B} \in \omega$ with $r(\tilde{B}) \geq r(B)/2$ such that $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset\}$.

易证 Ω 非空且满足 Zorn 引理的条件, 因此存在极大元 $\mathcal{G} \in \Omega$.

下证 \mathcal{G} 满足条件. 由 (2) 知, \mathcal{G} 两两不交. 令

$$\mathcal{P} := \left\{ B \in \mathcal{F} : B \cap \bigcup_{\tilde{B} \in \mathcal{G}} \tilde{B} = \emptyset \right\}.$$

若 \mathcal{P} 非空, 由 $\sup_{B \in \mathcal{F}} r(B) < \infty$ 知, 可取 $B_0 \in \mathcal{P}$ 使得 $r(B_0) \geq \sup_{B \in \mathcal{P}} r(B)/2$, 则 $\mathcal{G} \cup \{B_0\} \in \omega$, 这与 \mathcal{G} 的极大性相矛盾. 故 $\mathcal{P} = \emptyset$, 因此对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 存在 $\tilde{B} \in \mathcal{G}$ 满足 $r(\tilde{B}) \geq r(B)/2$ 使得 $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$, 从而 $B \subset 5\tilde{B}$. 引理证毕. \square

证明二. 也可以构造性的证明此结论. \square

Remark 3. (i) 对于一般的度量空间, 子球族 \mathcal{G} 不一定可数, 例子: 在不可数集 \mathcal{X} 上赋予离散拓扑(不同点之间距离恒为 1), 则球族 $\mathcal{F} := \{B(x, 1) : x \in \mathcal{X}\}$ 没有满足条件的可数子球族.

(ii) 若度量空间是几何双倍度量空间 (存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得, 任意球 B 可被 N 个半径为 $r(B)/2$ 的球包住), 则由于 \mathcal{G} 两两不交, 故至多可数 (see, for instance, [1, Lemma 2.5]);

(iii) 双倍度量空间(赋予双倍测度)是几何双倍度量空间 (see, for instance, [2, p. 67]), 由此及 \mathcal{G} 两两不交知, \mathcal{G} 至多可数;

(iv) 当 \mathcal{F} 是无穷集时, (1) 中的 5 可以改为任意比 3 大的数, 当 \mathcal{F} 是有限集时, 可以取 3.

(v) 条件中的半径有上界是必须的, 反例: \mathbb{R}^n 中的球族 $\{B(\mathbf{0}, k)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

证明. 先证 (i). 取定参考点 $x_0 \in \mathcal{X}$. 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$\mathcal{G}_k := \{B \in \mathcal{G} : B \subset B(x_0, k), r(B) \in (1/k, \infty)\}.$$

对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在有限个圆心属于 $B(x_0, k)$, 半径为 $1/(2k)$ 的球族 \mathcal{C} 把 $B(x_0, k)$ 盖住. 因此对 $\forall B \in \mathcal{G}_k$, 存在 $\tilde{B} \in \mathcal{C}$ 使得 $x_B \in \tilde{B}$. 注意到 \mathcal{G}_k 两两不交且 $\tilde{B} \subset B$, 故 $T: \mathcal{G}_k \rightarrow \mathcal{C}, B \mapsto \tilde{B}$ 的映射是单射, 从而 $\#\mathcal{G}_k \leq \#\mathcal{C}$ 也是有限集. 从因此

$$\mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k$$

至多可数.

再证(ii). 对任意球 $B \subset \mathcal{X}$, 取 B 中半径为 $r(B)/4$ 且两两不交的极大球族 \mathcal{C} , 则对 $\forall \tilde{B} \in \mathcal{C}$,

$$\mu(B) \leq \mu(8\tilde{B}) \leq C_{(\mu)}^3 \mu(\tilde{B}).$$

反设 $\#\mathcal{C} > C_{(\mu)}^3$, 则可取 $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ 满足 $\#\tilde{\mathcal{C}} = \lfloor C_{(\mu)}^3 \rfloor + 1$, 从而

$$\mu(B) \geq \mu\left(\bigcup_{\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{C}}} \tilde{B}\right) = \sum_{\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{C}}} \mu(\tilde{B}) \geq \#\tilde{\mathcal{C}} \mu(B) / [C_{(\mu)}]^3 > \mu(B),$$

矛盾. 因此 $\#\mathcal{C} \leq [C_{(\mu)}]^3$. 由于 \mathcal{C} 是极大的, 故 $\{2\tilde{B}\}_{\tilde{B} \in \mathcal{C}}$ 是半径为 $r(B)/2$ 且能盖住 B 的球族. 从而 (\mathcal{X}, d, μ) 是几何双倍度量空间.

现在证 (iii). \mathcal{F} 是有限集时, 系数能取 3 是显然的. 故只需证 \mathcal{F} 是无穷集时, 系数不能取 3. 反例: 取

$$\mathcal{F} := \left\{ B(x, r) \subset \mathbb{R} : x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), r \in \left(|x|, \frac{|x|+1}{3}\right) \right\},$$

则 \mathcal{F} 两两相交(都包含原点), 又对任意 $B(x, r) \in \mathcal{F}$,

$$3B(x, r) \subsetneq B(x, |x|+1),$$

且

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = (-1, 1) \not\subset B(x, |x|+1),$$

故

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \not\subset 3B(x, r),$$

从而系数不能取 3. □

2 拟度量空间

Definition 4. 设 \mathcal{X} 是非空集合, $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ 满足, 对任意 $x, y, z \in \mathcal{X}$,

- (i) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) 存在与 x, y , 和 z 无关的常数 $A_0 \in [1, \infty)$ 使得

$$d(x, z) \leq A_0[d(x, y) + d(y, z)].$$

则称 (\mathcal{X}, d) 为拟度量空间.

用类似度量空间的证明, 可以得到如下引理.

Lemma 5. 设 \mathcal{F} 是拟度量空间 (\mathcal{X}, d) 中的一族球且 $\sup_{B \in \mathcal{F}} r(B) < \infty$. 则存在两两不交的子球族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 使得

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5A_0^2 B, \quad (3)$$

且对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 存在 $\tilde{B} \in \mathcal{G}$ 满足 $r(B) \leq 2r(\tilde{B})$ 使得 $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$.

Remark 6. 同样的, 当 \mathcal{F} 是无穷集时, (3) 中的 5 可以改为任意比 3 大的数, 当 \mathcal{F} 是有限集时, 可以取 3. 对于齐型空间来说, 由于空间满足几何双倍性质, 故子球族是可数的.

Coifman 和 Weiss 给出了以下的变形 ([2, Theorem 1.2] or [3, Theorem 3.1]), 区别在于加强了条件, 优化了系数.

Lemma 7 (Vitali–Wiener type covering lemma). 设 E 是几何双倍度量空间 (\mathcal{X}, d) 中的有界集. 则对任意球族 $\mathcal{F} := \{B(x, r_x)\}_{x \in E}$, 存在两两不交的子球族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 使得

$$E \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 4A_0 B, \quad (4)$$

且对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 存在 $\tilde{B} \in \mathcal{G}$ 满足 $r(B) \leq 2r(\tilde{B})$ 使得 $B \cap \tilde{B} \neq \emptyset$.

证明. 取 $x_1 \in E$ 使得

$$r_{x_1} > \frac{1}{2} \sup_{x \in E} r_x.$$

令 $E_2 := E \setminus B(x_1, 4A_0 r_{x_1})$, 取 $x_2 \in E_2$ 使得

$$r_{x_2} > \frac{1}{2} \sup_{x \in E_2} r_x.$$

令 $E_3 := E \setminus \bigcup_{i=1}^2 B(x_i, 4A_0r_{x_i})$, 取 $x_3 \in E_3$ 使得

$$r_{x_3} > \frac{1}{2} \sup_{x \in E_3} r_x.$$

...

若上述过程在有限次结束, 引理证毕. 否则, 断言 $\{B(x_i, r_{x_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ 两两不交且

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_{x_i} = 0. \quad (5)$$

下证断言, 先证两两不交. 事实上, 如果存在 $i, j \in \mathbb{N}$, $(i < j)$ 使得 $B(x_i, r_{x_i})$ 和 $B(x_j, r_{x_j})$ 相交, 由于 $2r_{x_i} > r_{x_j}$, 故

$$d(x_i, x_j) < A_0(r_{x_i} + r_{x_j}) < 3A_0r_{x_i}$$

从而 $x_j \in B(x_i, 4A_0r_{x_i})$, 与 $x_j \in E_j$ 矛盾. 因此球族两两不交. 再证 (5). 事实上, 对任意 $\varepsilon \in (0, \infty)$, 由几何双倍性质知, 存在 $N_{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ 使得, 半径大于 $\varepsilon/2$ 的两两不交子球族个数小于 $N_{(\varepsilon)}$. 对任意 $i > N_{(\varepsilon)}$, 若 $r_{x_i} \geq \varepsilon$, 则由球族的构造知, 对任意 $j \in \{1, \dots, N_{(\varepsilon)}\}$, $r_{x_j} > \frac{1}{2}r_{x_i} > \varepsilon/2$, 与个数小于 $N_{(\varepsilon)}$ 矛盾. 故对任意 $i > N_{(\varepsilon)}$, $r_{x_i} < \varepsilon$. (5) 证毕. 综上, 断言证毕.

最后证 $E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, 4A_0r_{x_i})$. 假设存在 $x_0 \in E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, 4A_0r_{x_i})$. 由断言知, 存在 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $r_{x_i} < \frac{1}{2}r_{x_0}$. 这与

$$r_{x_i}$$

相矛盾, 故 $E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, 4A_0r_{x_i}) =$

□

Acknowledgements. 之前的证明有点问题, 感谢 xs 的指正.

参考文献

- [1] T. Hytönen, A framework for non-homogeneous analysis on metric spaces, and the RBMO space of Tolsa, Publ. Mat. 54 (2010), 485–504.
- [2] R. R. Coifman and G. Weiss, Analyse Harmonique Non-commutative sur Certains Espaces Homogènes, (French) Étude de Certaines Intégrales Singulières, Lecture Notes in Mathematics 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [3] R. R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569-645.