共轭空间

January 15, 2021

1 共轭算子(Adjoint operator)

共轭算子是个非常有用的工具.

Definition 1.1. 设$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ 是线性赋范空间, $T \in \mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. 若$T^* \in \mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$ 满足: 对$\forall x \in \mathcal{X}$ 和$\forall f \in \mathcal{Y}^*$,

$$\langle f, Tx\rangle = \langle T^* f, x\rangle,$$

则称T^* 是T 的共轭算子.

Remark 1.2. 注意, 共轭算子是一定存在的, 且$\|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} = \|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$.

Proof. 先证存在性. 对$\forall f \in \mathcal{Y}^*$, 定义

$$g_f:\ \mathcal{X} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \langle f, Tx\rangle,$$

则易证$g_f \in \mathcal{X}^*$. 令

$$T^*:\ \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*,\ f \to g_f,$$

则易证$T^* \in \mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$且对$\forall x \in \mathcal{X}$ 和$\forall f \in \mathcal{Y}^*$,

$$\langle f, Tx\rangle = \langle T^* f, x\rangle.$$

再证$\|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} = \|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. 一方面,

$$\begin{aligned}\|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} &= \sup_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} \|T^* f\|_{\mathcal{X}^*} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} |\langle T^* f, x\rangle| \\ &= \sup_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} |\langle f, Tx\rangle| \le \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Tx\|_{\mathcal{Y}} \le \|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}.\end{aligned}$$

另一方面, 由Hahn-Banach 定理推论(Corollary 2.4)知

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Tx\|_{\mathcal{Y}} \overset{Corollary\, 2.4}{=} \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \max_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} f(Tx) \\ &= \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \max_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} \langle T^* f, x\rangle \le \max_{\|f\|_{\mathcal{Y}^*}=1} \|T^* f\|_{\mathcal{X}^*} \le \|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)}.\end{aligned}$$

因此$\|T^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} = \|T\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$. ∎

共轭算子会保持原来算子的性质.

Proposition 1.3. 设$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ 是*Banach* 空间, $T \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. 若$T$ 是双射, 则T^* 也是双射.

Proof. 由开映射定理知, $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, 因此$(T^{-1})^*$ 存在. 对$\forall x^* \in \mathcal{X}^*$, 令$y^* := (T^{-1})^*(x^*)$, 则$y^* \in \mathcal{Y}^*$ 且对$\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = \langle (T^{-1})^*(x^*), Tx\rangle = \langle x^*, x\rangle,$$

即$T^*(y^*) = x^*$. 故T^* 是满射. 对$\forall y_1^*$, $y_2^* \in \mathcal{Y}^*$, 若$T^*(y_1^*) = T^*(y_2^*)$, 则对$\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\langle y_1^*, Tx\rangle = \langle T^*(y_1^*), x\rangle = \langle T^*(y_2^*), x\rangle = \langle y_2^*, Tx\rangle$$

由此及T 是满射知, $y_1^* = y_2^*$. 故T^* 是单射. □

Remark 1.4. 反过来, 若T^* 是双射, 能否推出T 是双射? 似乎是对的, Rudin 的书中有零散的结论.

Proposition 1.5. 设$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ 是*Banach* 空间, $T \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. 若$T$ 是线性等距同构映射*(*满的等距映射*)*, 则T^* 也是线性等距同构映射.

Proof. T 是线性等距同构映射, 故T 是双射, 由此及Proposition 1.3 知, T^* 是双射. 又对$\forall y^* \in \mathcal{Y}^*$,

$$\|T^* y^*\|_{\mathcal{X}^*} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} |\langle T^* y^*, x\rangle| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} |\langle y^*, Tx\rangle| = \sup_{\|y\|_{\mathcal{Y}}=1} |\langle y^*, y\rangle| = \|y^*\|_{\mathcal{Y}^*}.$$

故T^* 也是线性等距同构映射. □

2 自反空间(Reflexive Spaces)

Definition 2.1. 设$\mathcal{X}$ 是线性赋范空间. 称$\mathcal{X}^* := \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ 为$\mathcal{X}$ 的共轭空间, 称$\mathcal{X}^{**} := (\mathcal{X}^*)^*$ 为$\mathcal{X}$ 的第二共轭空间,

Definition 2.2. 设$\mathcal{X}$ 是线性赋范空间. 对$\forall x \in \mathcal{X}$,

$$X: \ \mathcal{X}^* \to \mathbb{K}, \ f \mapsto \langle f, x\rangle$$

是$\mathcal{X}^{**}$ 中的元素, 称

$$J_{\mathcal{X}}: \ \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{**}, \ x \mapsto X$$

为$\mathcal{X}$ 的自然映射.

Definition 2.3. 设$\mathcal{X}$ 是线性赋范空间. 称$\mathcal{X}$ 是自反空间, 若自然映射$J_{\mathcal{X}}$ 是满射.

Corollary 2.4 (H. Brezis, Functional Analysis, Corollary 1.4)**.** 设$\mathcal{X}$ 是线性赋范空间. 则对$\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}^*}=1} |f(x)| = \max_{\|f\|_{\mathcal{X}^*}=1} |f(x)|.$$

Proposition 2.5. $J_{\mathcal{X}}$ 是线性等距映射.

Proof. $J_{\mathcal{X}}$ 线性显然. 又由Hahn-Banach 定理推论(Corollary 2.4)知

$$\|J_{\mathcal{X}}x\|_{\mathcal{X}^{**}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}^*}=1} |\langle J_{\mathcal{X}}x, f\rangle| = \sup_{\|f\|_{\mathcal{X}^*}=1} |f(x)| \overset{Corollary\,2.4}{=} \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

故$J_{\mathcal{X}}$ 是线性等距映射. □

Remark 2.6. 若线性赋范空间$\mathcal{X}$ 是自反空间, 则$J_{\mathcal{X}}$ 是满的线性等距映射, 故$\mathcal{X}$ 和$\mathcal{X}^{**}$ 等距同构. 注意到, $\mathcal{X}^{**}$ 是完备的, 因此自反空间必定完备.

一个很自然的问题是, 如果$\mathcal{X}$ 和$\mathcal{X}^{**}$ 等距同构, 能否推出$\mathcal{X}$ 自反呢? 答案是否定的, James 在[1] 中给出了反例.

下面引入另外两种拓扑, 弱收敛和*-弱收敛.

Definition 2.7. 设$\mathcal{X}$ 是线性赋范空间, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{X}$. 若对$\forall f \in \mathcal{X}^*$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

则称x_n 弱收敛到x_0, 记为$x_n \rightharpoonup x_0$.

Definition 2.8. 设$\mathcal{X}$ 是线性赋范空间, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{X}^*$. 若对$\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x),$$

则称f_n *-弱收敛到f_0, 记为$w^* - \lim_{n\to\infty} f_n = f_0$.

自反空间有些有意思的性质, 比如:

Theorem 2.9. *设$\mathcal{X}$ 是自反空间, $E \subset \mathcal{X}$. 则E 弱列紧当且仅当E 有界.*

Remark 2.10. "E 弱列紧$\Longrightarrow E$ 有界" 只需要E 是线性赋范空间即可.

Theorem 2.11 (H. Brezis, Functional Analysis, Proposition 3.20)**.** *自反空间的闭线性子空间也自反.*

Lemma 2.12. *等距同构的两线性赋范空间, 自反性相同.*

Proof. 设$\mathcal{X}$ 和$\mathcal{Y}$ 是等距同构的线性赋范空间, 则存在$\mathcal{X}$ 到$\mathcal{Y}$ 的线性等距同构映射φ. 由Proposition 1.5 知, φ^{**} 也是线性等距同构映射.

设$\mathcal{X}$ 自反, 则$J_{\mathcal{X}}$ 是满射, 从而$J_{\mathcal{X}}$ 是双射. 下证$\mathcal{Y}$ 自反. 事实上, 对$\forall y^{**} \in \mathcal{Y}^{**}$, 令$y := \varphi((J_{\mathcal{X}})^{-1}((\varphi^{**})^{-1}(y^{**})))$, 则$y \in \mathcal{Y}$ 且对$\forall y^* \in \mathcal{Y}^*$,

$$\begin{aligned}\langle J_{\mathcal{Y}}y, y^*\rangle &= \langle y^*, y\rangle = \langle y^*, \varphi((J_{\mathcal{X}})^{-1}((\varphi^{**})^{-1}(y^{**})))\rangle \\ &= \langle \varphi^*(y^*), (J_{\mathcal{X}})^{-1}((\varphi^{**})^{-1}(y^{**}))\rangle = \langle (\varphi^{**})^{-1}(y^{**}), \varphi^*(y^*)\rangle = \langle y^{**}, y^*\rangle,\end{aligned}$$

即$J_{\mathcal{Y}}y = y^{**}$. 故$J_{\mathcal{Y}}$ 是满射, 从而$\mathcal{Y}$ 自反. □

下面给出自反的等价特征.

Theorem 2.13. 设$\mathcal{X}$ 是*Banach* 空间. 则以下叙述等价*:*

(i) $\mathcal{X}$ 自反*;*

(ii) $\mathcal{X}^*$ 自反*;*

(iii) 单位球弱列紧*.*

Proof. 先证"(i) $\Longrightarrow$ (ii)". 对$\forall x^{***} \in \mathcal{X}^{***}$, 令$x^* := (J_{\mathcal{X}})^*(x^{***})$, 则$x^* \in \mathcal{X}^*$ 且对$\forall x^{**} \in \mathcal{X}^{**}$,

$$\begin{aligned}\langle J_{\mathcal{X}^*}x^*, x^{**}\rangle &= \langle x^{**}, x^*\rangle = \langle x^{**}, x^*\rangle = \langle J_{\mathcal{X}}((J_{\mathcal{X}})^{-1}x^{**}), x^*\rangle \\ &= \langle x^*, (J_{\mathcal{X}})^{-1}x^{**}\rangle = \langle (J_{\mathcal{X}})^*(x^{***}), (J_{\mathcal{X}})^{-1}x^{**}\rangle = \langle x^{***}, x^{**}\rangle,\end{aligned}$$

即$J_{\mathcal{X}^*}x^* = x^{***}$. 故$J_{\mathcal{X}^*}$ 是满射, 从而$\mathcal{X}^*$ 自反.

再证"(ii) $\Longrightarrow$ (i)". 因$\mathcal{X}$ 完备, 故$J_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ 是$\mathcal{X}^{**}$ 的闭线性子空间. 又因为$\mathcal{X}^*$ 自反和"(i) $\Longrightarrow$ (ii)" 知, $\mathcal{X}^{**}$ 自反. 进一步由Theorem 2.11 知, $J_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ 自反. 而$J_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ 与$\mathcal{X}$ 等距同构, 故由Lemma 2.12 知, $\mathcal{X}$ 自反.

"(i) $\Longrightarrow$ (iii)" 是经典结论. 下证"(iii) $\Longrightarrow$ (i)". 证明非常复杂, 需要弄清楚拓扑的构造. 思路是证$J_{\mathcal{X}}(B_{\mathcal{X}}) = B_{\mathcal{X}^{**}}$, 从而有$J_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^{**}$. □

References

[1] R. C. James, A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 37 (1951), 174–177.