$L^p(\mathbb{R}^n)$ 对偶等式的推广

September 24, 2020

1 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的对偶

讲到$L^p(\mathbb{R}^n)$ 的对偶, 那就会提到如下定理.

Theorem 1.1. 设$p \in [1,\infty)$. 则对$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x), dx.$$

事实上, 该定理可以推广到更一般的情况.

Theorem 1.2. 设$p \in [1,\infty)$. 则对$\forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f\|_p = \sup_{g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\, dx. \tag{1}$$

证明思路: $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 时, 该定理回到了经典情况, 故只需证明$\|f\|_p = \infty$ 时, 右边也等于无穷. 即证右边小于无穷时, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 此时先证

$$\sup_{g \in L^\infty(\mathbb{R}^n), g\text{有紧支集}, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\, dx < \infty.$$

再取一列g_n 使得fg_n 逼近$|f|^p$. 从而证得$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

首先定义卷积核. 对$\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1, \\ 0, & |x| \ge 1, \end{cases}$$

则$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\rho) = \overline{B(0,1)}$ 且$\rho \ge 0$. 对$\forall k \in \mathbb{N}$ 和$\forall x \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\rho_k(x) := \frac{k^n}{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}\rho(kx) = \begin{cases} \dfrac{k^n}{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \exp\left(\dfrac{1}{|kx|^2-1}\right), & |kx|<1, \\ 0, & |kx| \ge 1, \end{cases}$$

则$\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\rho_k) = \overline{B(0,1/k)}$, $\rho_k \ge 0$ 且$\|\rho_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$.

Lemma 1.3. 设$A\subset\mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $A\subset\mathbb{R}^n$ 为闭集, 则$A+B$ 为闭集.

Proof. 设$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset A+B$ 在$\mathbb{R}^n$ 中收敛到x_0. 则存在$\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset A$ 和$\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset B$ 使得, 对$\forall k\in\mathbb{N}$,

$$x_k=y_k+z_k.$$

由于A 为有界闭集, 故可取$\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为$\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的收敛子列. 记$y_0:=\lim_{k\to\infty}y_{n_k}$, 则$y_0\in A$. 又由$B$ 是闭集知

$$\lim_{k\to\infty}z_{n_k}=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}-\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=x_0-y_0\in B.$$

故

$$x_0=y_0+(x_0-y_0)\in A+B.$$

因此$A+B$ 是闭集. $\square$

Remark 1.4. 注意, 两闭集必须有其中之一是有界的, 否则结论不一定成立. 取

$$A:=\left\{k+\frac{1}{k}\right\}_{k\in\mathbb{N}},\quad\text{and}\quad B:=\mathbb{Z},$$

则

$$A+B=\left\{k+\frac{1}{m}:\ k\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}\right\}$$

不是闭集.

有了这些准备工作, 现在可以开始证明Theorem 1.2 了.

Proof of Theorem 1.2. 当$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 时, (1) 是经典的等式, 证明略.

断言, 若

$$\sup_{g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\,dx=:M<\infty.$$

则$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 事实上, 令$g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有紧支集且$\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1$. 对$\forall k\in\mathbb{N}$, 设$g_k:=\rho_k*g$, 则$g_k\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g_k(x)\,dx\le M\|g_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

因为$\lim_{k\to\infty}\|g_k-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}=0$, 由Riesz 定理知, 存在子列$g_{n_k}$ 几乎处处收敛到g. 又由g_k 的定义知, $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 且由引理1.3 知,

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(g_k)&=\operatorname{supp}(\rho_k*g)\subset\overline{\operatorname{supp}(\rho_k)+\operatorname{supp}(g)}\\&=\overline{\overline{B(0,1/k)}+\operatorname{supp}(g)}=\overline{B(0,1/k)}+\operatorname{supp}(g)\subset\overline{B(0,1)}+\operatorname{supp}(g),\end{aligned}$$

由此及$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 知, 对$\forall k\in\mathbb{N}$, 在几乎处处意义下

$$|fg_k|\le\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|f\mathbf{1}_{\operatorname{supp}(g_k)}|\le\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left|f\mathbf{1}_{\overline{B(0,1)}+\operatorname{supp}(g)}\right|\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

故由控制收敛定理

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f(x)g_{n_k}(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_{n_k}(x)\,dx \\ &\le \lim_{k\to\infty} M\|g_{n_k}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = M.\end{aligned}$$

从而

$$\sup_{g\in L^\infty(\mathbb{R}^n),g\text{有紧支集},\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx \le M.$$

若$p=1$. 对$\forall k\in\mathbb{N}$, 令

$$g_k := \mathrm{sign}(f)\mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则$g_k\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, g_k 有紧支集且$\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}=1$, 从而

$$\int_{B(0,k)}|f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x)\,dx \le M.$$

令$k\to\infty$, 由Levi 定理知

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le M.$$

若$p\in(1,\infty)$. 对$\forall k\in\mathbb{N}$, 令

$$g_k := |f|^{p-1}\mathrm{sign}(f)\mathbf{1}_{\{|f|<k\}}\mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则$g_k\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且g_k 有紧支集, 从而

$$\begin{aligned}\int_{B(0,k)\cap\{|f|<k\}}|f(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x)\,dx \le M\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &= M\left[\int_{B(0,k)\cap\{|f|<k\}}|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p'},\end{aligned}$$

故

$$\left[\int_{B(0,k)\cap\{|f|<k\}}|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \le M.$$

令$k\to\infty$, 由Levi 定理知

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le M.$$

综上, 断言成立.

因此, 当$f\notin L^p(\mathbb{R}^n)$ 时,

$$\sup_{g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx = \infty$$

(1) 仍然成立. 至此Theorem 1.2 证毕. □

2 证明思路的来源

Theorem 1.2 的证明思路来源于[H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations] 中Corollary 4.24 的证明. 同样的思路在张恭庆的泛函分析中也有提到.

Theorem 2.1 (Corollary 4.24)**.** 设开集$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 且$f \in L^1_{loc}(\Omega)$ 满足对$\forall g \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,dx = 0.$$

则f 在Ω 上几乎处处为0.

Proof. 为了方便, 只证$\Omega = \mathbb{R}^n$ 时的情况. 令$g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且有紧支集. 对$\forall k \in \mathbb{N}$, 设$g_k := \rho_k * g$, 则$g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x)\,dx = 0.$$

因为$\lim_{k\to\infty} \|g_k - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$, 由Riesz 定理知, 存在子列$g_{n_k}$ 几乎处处收敛到g. 又由g_k 的定义知, $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ 且

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(g_k) =& \operatorname{supp}(\rho_k * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(\rho_k) + \operatorname{supp}(g)}\\ &= \overline{\overline{B(0,1/k)} + \operatorname{supp}(g)} = \overline{B(0,1/k)} + \operatorname{supp}(g) \subset \overline{B(0,1)} + \operatorname{supp}(g),\end{aligned}$$

由此及$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 知, 对$\forall k \in \mathbb{N}$, 在几乎处处意义下

$$|fg_k| \le \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |f\mathbf{1}_{\operatorname{supp}(g_k)}| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left| f\mathbf{1}_{\overline{B(0,1)}+\operatorname{supp}(g)} \right| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

故由控制收敛定理

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f(x)g_{n_k}(x)\,dx\\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_{n_k}(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

对$\forall k \in \mathbb{N}$, 令

$$g_k := \operatorname{sign}(f)\mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则$g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且有紧支集, 从而

$$\int_{B(0,k)} |f(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x)\,dx = 0,$$

故对a.e. $x \in B(0,k)$, $f(x) = 0$. 再由k 的任意性知, 对a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = 0$. □