

# $L^p(\mathbb{R}^n)$ 对偶等式的推广

2021 年 5 月 28 日

## 1 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的对偶

讲到  $L^p(\mathbb{R}^n)$  的对偶, 那就会提到如下等式.

**Lemma 1.1** (Benedek and Panzone, The space  $L^p$ , with mixed norm, Theorem 2). 设  $p \in [1, \infty)$ ,  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数. 则

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \max_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx.$$

**Remark 1.2.** 当  $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \infty$  时, 存在  $g$  使得  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx = \infty$  是由 Brezis 书中结论保证的.

[H. Brezis, Functional Analysis, Exercise 4.7]: 设  $p \in [1, \infty)$ ,  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数. 若  $\forall g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ , 有  $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , 则  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

该定理可减弱  $g$  的范围.

感谢 xs 的建议, Stein 的这个结论跟 Theorem 1.4 是有所不同的, 有记录的必要.

**Lemma 1.3** (E. M. Stein, Functional Analysis, Theorem 4.1 of Chapter 1). 设  $p \in [1, \infty)$ ,  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数. 则

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g \text{ is simple}, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx. \quad (1)$$

**Theorem 1.4.** 设  $p \in [1, \infty)$ ,  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数. 则

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx. \quad (2)$$

### 1.1 实分析角度的证明

证明思路:  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  时, 该定理回到了经典情况, 故只需证明  $\|f\|_p = \infty$  时, 右边也等于无穷. 即证右边小于无穷时,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . 此时先证

$$\sup_{g \in L^\infty(\mathbb{R}^n), g \text{ 有紧支集}, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx < \infty.$$

再取一系列  $g_n$  使得  $f g_n$  逼近  $|f|^p$ . 从而证得  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

首先定义卷积核. 对  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\rho(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

则  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{supp}(\rho) = \overline{B(0, 1)}$  且  $\rho \geq 0$ . 对  $\forall k \in \mathbb{N}$  和  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , 令

$$\rho_k(x) := \frac{k^n}{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \rho(kx) = \begin{cases} \frac{k^n}{\|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \exp\left(\frac{1}{|kx|^2 - 1}\right), & |kx| < 1, \\ 0, & |kx| \geq 1, \end{cases}$$

则  $\rho_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{supp}(\rho_k) = \overline{B(0, 1/k)}$ ,  $\rho_k \geq 0$  且  $\|\rho_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$ .

**Lemma 1.5.** 设  $A \subset \mathbb{R}^n$  为有界闭集,  $A \subset \mathbb{R}^n$  为闭集, 则  $A + B$  为闭集.

证明. 设  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A + B$  在  $\mathbb{R}^n$  中收敛到  $x_0$ . 则存在  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A$  和  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset B$  使得, 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$x_k = y_k + z_k.$$

由于  $A$  为有界闭集, 故可取  $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  为  $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  的收敛子列. 记  $y_0 := \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}$ , 则  $y_0 \in A$ . 又由  $B$  是闭集知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} - \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x_0 - y_0 \in B.$$

故

$$x_0 = y_0 + (x_0 - y_0) \in A + B.$$

因此  $A + B$  是闭集. □

**Remark 1.6.** 注意, 两闭集必须有其中之一是有界的, 否则结论不一定成立. 取

$$A := \left\{ k + \frac{1}{k} \right\}_{k \in \mathbb{N}}, \quad \text{and} \quad B := \mathbb{Z},$$

则

$$A + B = \left\{ k + \frac{1}{m} : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

不是闭集.

有了这些准备工作, 现在可以开始证明 Theorem 1.4 了.

*Proof of Theorem 1.4.* 当  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  时, (2) 是经典的等式, 证明略.

断言, 若

$$\sup_{g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx =: M < \infty.$$

则  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . 事实上, 当  $M < \infty$  时,  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  是自动的. 令  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , 有紧支集且  $\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = 1$ . 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 设  $g_k := \rho_k * g$ , 则  $g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x) dx \leq M \|g_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

因为  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$ , 由 Riesz 定理知, 存在子列  $g_{n_k}$  几乎处处收敛到  $g$ . 又由  $g_k$  的定义知,  $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  且由引理 1.5 知,

$$\begin{aligned} \text{supp}(g_k) &= \text{supp}(\rho_k * g) \subset \overline{\text{supp}(\rho_k) + \text{supp}(g)} \\ &= \overline{B(0, 1/k) + \text{supp}(g)} = \overline{B(0, 1/k)} + \text{supp}(g) \subset \overline{B(0, 1)} + \text{supp}(g), \end{aligned}$$

由此及  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  知, 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 在几乎处处意义下

$$|fg_k| \leq \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |f \mathbf{1}_{\text{supp}(g_k)}| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left| f \mathbf{1}_{\overline{B(0, 1)} + \text{supp}(g)} \right| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

故由控制收敛定理

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x)g_{n_k}(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_{n_k}(x) dx \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} M \|g_{n_k}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} = M. \end{aligned}$$

从而

$$\sup_{g \in L^\infty(\mathbb{R}^n), g \text{ 有紧支集}, \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx \leq M.$$

若  $p = 1$ . 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 令

$$g_k := \text{sign}(f) \mathbf{1}_{B(0, k)},$$

则  $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $g_k$  有紧支集且  $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1$ , 从而

$$\int_{B(0,k)} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x) dx \leq M.$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 由 Levi 定理知

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

若  $p \in (1, \infty)$ . 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 令

$$g_k := |f|^{p-1} \text{sign}(f) \mathbf{1}_{\{|f| < k\}} \mathbf{1}_{B(0,k)},$$

则  $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  且  $g_k$  有紧支集, 从而

$$\begin{aligned} \int_{B(0,k) \cap \{|f| < k\}} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x) dx \leq M \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\ &= M \left[ \int_{B(0,k) \cap \{|f| < k\}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p'}, \end{aligned}$$

故

$$\left[ \int_{B(0,k) \cap \{|f| < k\}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq M.$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 由 Levi 定理知

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

综上, 断言成立.

因此, 当  $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$  时,

$$\sup_{g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx = \infty$$

(2) 仍然成立. 至此 Theorem 1.4 证毕. □

## 2 泛函角度的证明

Theorem 1.4 的第一种证明思路来源于 Brezis 书中 Corollary 4.24 的证明. 同样的思路在张恭庆的泛函分析中也有提到. 实际上直接利用此结论, 从泛函角度能快速证明 Theorem 1.4.

**Theorem 2.1** (H. Brezis, Functional Analysis, Corollary 4.24). 设开集  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  且  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  满足对  $\forall g \in C_c^\infty(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} f(x)g(x) dx = 0.$$

则  $f$  在  $\Omega$  上几乎处处为 0.

证明. 为了方便, 只证  $\Omega = \mathbb{R}^n$  时的情况. 令  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  且有紧支集. 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 设  $g_k := \rho_k * g$ , 则  $g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x) dx = 0.$$

因为  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$ , 由 Riesz 定理知, 存在子列  $g_{n_k}$  几乎处处收敛到  $g$ . 又由  $g_k$  的定义知,  $\|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  且

$$\begin{aligned} \text{supp}(g_k) &= \text{supp}(\rho_k * g) \subset \overline{\text{supp}(\rho_k) + \text{supp}(g)} \\ &= \overline{B(0, 1/k) + \text{supp}(g)} = \overline{B(0, 1/k)} + \text{supp}(g) \subset \overline{B(0, 1)} + \text{supp}(g), \end{aligned}$$

由此及  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  知, 对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 在几乎处处意义下

$$|fg_k| \leq \|g_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |f \mathbf{1}_{\text{supp}(g_k)}| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left| f \mathbf{1}_{\overline{B(0, 1)} + \text{supp}(g)} \right| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

故由控制收敛定理

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x)g_{n_k}(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_{n_k}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

对  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 令

$$g_k := \text{sign}(f) \mathbf{1}_{B(0, k)},$$

则  $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  且有紧支集, 从而

$$\int_{B(0, k)} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g_k(x) dx = 0,$$

故对 a.e.  $x \in B(0, k)$ ,  $f(x) = 0$ . 再由  $k$  的任意性知, 对 a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = 0$ .  $\square$

下面给出 Theorem 1.4 的另一种证明.

*Proof of Theorem 1.4.* 当  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  时, (2) 是经典的等式, 证明略.

若

$$\sup_{g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx =: M < \infty.$$

则可定义算子

$$T : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx.$$

该算子是连续线性泛函, 从而可以沿拓为  $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$  上的连续泛函  $\tilde{T}$ . 对于  $\tilde{T}$ , 存在  $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$  使得

$$\tilde{T}(g) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)g(x) dx, \quad \forall g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n).$$

对  $\forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx = T(g) = \tilde{T}(g) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)g(x) dx,$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - \tilde{f}(x)] g(x) dx = 0.$$

由此及 Theorem 2.1 知,  $f$  和  $\tilde{f}$  几乎处处相等, 故  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . □