

等距同构的那些事

November 18, 2020

1 度量空间的等距同构

度量空间的等距同构没啥问题.

Definition 1.1. 设 $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$ 是度量空间. 若 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 满足对 $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}$,

$$d_{\mathcal{Y}}(T(x_1), T(x_2)) = d_{\mathcal{X}}(x_1, x_2),$$

则称 T 是等距映射(isometry).

Definition 1.2. 设 $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, d_{\mathcal{Y}})$ 是度量空间. 若存在 \mathcal{X} 到 \mathcal{Y} 满的等距映射, 则称 \mathcal{X} 和 \mathcal{Y} 等距同构.

2 线性赋范空间的等距同构

线性赋范空间的等距同构, 问题就来了. 首先, 线性赋范空间一定是度量空间, 那么想要等距同构, 一定要满足度量空间等距同构的要求. 但是, 线性赋范空间有线性结构, 这个也要保持, 所以要求等距映射线性.

Definition 2.1. 设 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ 是线性赋范空间. 若存在 \mathcal{X} 到 \mathcal{Y} 满的线性等距映射, 则称 \mathcal{X} 和 \mathcal{Y} 等距同构.

实际上, 对于实线性赋范空间, 定义中的条件可以减弱成度量空间的条件. 这个是由Mazur-Ulam Theorem 保证的.

Lemma 2.2. 设 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ 是线性赋范空间. 若存在 \mathcal{X} 到 \mathcal{Y} 满的等距映射, 则存在 \mathcal{X} 到 \mathcal{Y} 满的线性等距映射.

在证明Lemma 2.2 之前, 首先回顾一下Mazur-Ulam Theorem 及其相关定义.

Definition 2.3. 设 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ 是线性赋范空间. 称 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 是仿射变换(affine), 若对 $\forall a, b \in \mathcal{X}$ 和 $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$T((1-t)a + tb) = (1-t)T(a) + tT(b).$$

Theorem 2.4 (Mazur-Ulam). 设 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ 是线性赋范空间. 若 $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 满的等距映射, 则 T 是仿射变换(affine).

现在可以开始证明Lemma 2.2 了.

Proof of Lemma 2.2. 若存在 \mathcal{X} 到 \mathcal{Y} 满的等距映射 T , 由Mazur-Ulam Theorem 知, T 是仿射变换. 令 $S := T - T(\theta)$, 则对 $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}$,

$$\|S(x_1) - S(x_2)\|_{\mathcal{Y}} = \|T(x_1) - T(x_2)\|_{\mathcal{Y}} = \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{X}},$$

且对 $\forall x \in \mathcal{X}$ 和 $t \in \mathbb{R}$,

$$S(tx) = T(tx) - T(\theta) = T(tx + (1-t)\theta) - T(\theta) = t[T(x) - T(\theta)] = tS(x),$$

从而对 $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ 和 $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S(x_1 + x_2) &= 2S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 2\left[T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - T(\theta)\right] \\ &= [T(x_1) - T(\theta)] - [T(x_2) - T(\theta)] = S(x_1) + S(x_2). \end{aligned}$$

综上, S 是 \mathcal{X} 到 \mathcal{Y} 满的线性等距映射. Lemma 2.2 证毕. □