投影算子

December 4, 2020

1 投影算子

Definition 1.1. 设$\mathcal{X}$ 是Banach 空间. 线性映射$P:\ \mathcal{X}\to\mathcal{X}$ 若满足

$$P^2=P,$$

则称P 是$\mathcal{X}$ 上的投影算子. 记

$$\mathcal{R}(P):=\{Px:\ x\in\mathcal{X}\}\quad 且\quad \mathcal{N}(P):=\{x\in\mathcal{X}:\ Px=\theta\}.$$

Definition 1.2. 设$V_1,\ V_2$ 是线性空间V 的两个线性子空间, 若对$\forall x\in V_1+V_2$, 分解

$$x=x_1+x_2,\quad 其中 x_1\in V_1,\ x_2\in V_2$$

是唯一的, 则称V_1+V_2 是V_1 和V_2 的直和, 记为$V_1\oplus V_2$.

Proposition 1.3. *设$\mathcal{X}$ 是Banach 空间且P 是$\mathcal{X}$ 上的投影算子. 则*

(i) *P 的不动点全体就是$\mathcal{R}(P)$, 即对$\forall x\in\mathcal{R}(P)$, $Px=x$;*

(ii) *$\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(I-P)$;*

(iii) *$\mathcal{R}(P)$ 和$\mathcal{N}(P)$ 是$\mathcal{X}$ 的两个线性子空间;*

(iv) *$\mathcal{X}=\mathcal{R}(P)\oplus\mathcal{N}(P)$.*

Theorem 1.4. *设$\mathcal{X}$ 是Banach 空间且P 是$\mathcal{X}$ 上的投影算子. P 有界当且仅当$\mathcal{R}(P)$ 和$\mathcal{N}(P)$ 闭.*

Proof. 先证" $\Rightarrow$ ". P 有界, 则$\mathcal{N}(P)$ 闭. 而$\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(I-P)$ 也闭, 因为$I-P$ 有界.

再证" $\Leftarrow$ ". 断言P 是闭算子. 事实上, 设$\{x_n\}\subset\mathcal{X}$ 满足$x_n\to x_0$ in $\mathcal{X}$ 且$Px_n\to y_0$ in $\mathcal{X}$. 则$(I-P)x_n\to x_0-y_0$ in $\mathcal{X}$. 注意到$\{(I-P)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{N}(P)$ 且$\mathcal{N}(P)$ 闭, 因此$x_0-y_0\in\mathcal{N}(P)$. 又因为$\{Px_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{R}(P)$ 且$\mathcal{R}(P)$ 闭, 从而$y_0\in\mathcal{R}(P)$. 综上有

$$y_0\overset{y\in\mathcal{R}(P)}{=}Py_0\overset{x_0-y_0\in\mathcal{N}(P)}{=}Py_0+P(x_0-y_0)=Px_0.$$

故P 是闭算子. 由此及闭图像定理知, $P\in\mathscr{L}(\mathcal{X})$. Theorem 1.4 证毕. $\square$

Remark 1.5. Proposition 1.4 中$\mathcal{X}$ 的完备性是必须的.

Proof. 设$\ell^1_{finite} := \{\ell^1$中有限项非0 的数列$\}$, 范数与$\ell^1$ 一致, 令

$$P:\ \ell^1_{finite} \to \ell^1_{finite},\ x := \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \to \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k, 0, 0, \ldots\right).$$

则P 是投影算子且$\mathcal{R}(P)$ 和$\mathcal{N}(P)$ 闭, 但P 无界.

下证$\mathcal{N}(P)$ 闭, 其余显然. 设$\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}(P)$ 在ℓ^1_{finite} 中收敛到$x^{(0)}$. 存在$N \in \mathbb{N}$ 使得对$\forall k > N$, $x^{(0)}_k = 0$. 对$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x^{(0)}_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x^{(0)}_k - \sum_{k=1}^{\infty} x^{(n)}_k\right| \le \left\|x^{(n)} - x^{(0)}\right\|_{\ell^1_{finite}} \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

故$\sum_{k=1}^{\infty} x^{(0)}_k = 0$, 即$x^{(0)} \in \mathcal{N}(P)$. 从而$\mathcal{N}(P)$ 闭. $\square$

2 Hilbert 空间上的正交补

Definition 2.1. 设$\mathcal{H}$ 是Hilbert 空间且$M \subset \mathcal{H}$. 称

$$M^{\perp} := \{x \in \mathcal{H}:\ \forall y \in M,\ (x, y) = 0\}$$

为M 的正交补.

Theorem 2.2 (正交分解)**.** 设$\mathcal{H}$ 是*Hilbert* 空间且M 是$\mathcal{H}$ 的闭线性子空间. 则

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}.$$

Proposition 2.3. 设$\mathcal{H}$ 是*Hilbert* 空间且$M \subset \mathcal{H}$. 则$M^{\perp}$ 是闭线性子空间且$M^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$.

Proposition 2.4. 设$\mathcal{H}$ 是*Hilbert* 空间且M 是$\mathcal{H}$ 的子集. 则

(i) $M \subset M^{\perp\perp}$;

(ii) 若M 是$\mathcal{H}$ 的线性子空间, 则$\overline{M} = M^{\perp\perp}$.

Proof. 先证(i). 对任意$x \in M$, 有$x \perp M^{\perp}$, 从而$x \in \overline{M}^{\perp\perp}$, 故$M \subset \overline{M}^{\perp\perp}$. (i) 证毕.

再证(ii). 直观上来看, 由正交分解有

$$\overline{M} \oplus M^{\perp} = \mathcal{H} = M^{\perp} \oplus M^{\perp\perp},$$

又有$\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$(这个不能少), 故$\overline{M} = M^{\perp\perp}$.

另一个证明: 由(i) 及$M^{\perp\perp}$ 闭知, $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$, 故只需证$M^{\perp\perp} \subset \overline{M}$. 对任意固定$x \in M^{\perp\perp}$, 由Proposition 2.3 知, $x \perp M^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$. 由正交分解定理, 存在$x_{\overline{M}} \in \overline{M}$ 和$x_{\overline{M}^{\perp}} \in \overline{M}^{\perp}$ 使得

$$x = x_{\overline{M}} + x_{\overline{M}^{\perp}}.$$

进一步由$x\perp\overline{M}^{\perp}$ 得

$$0=\left(x,x_{\overline{M}^{\perp}}\right)=\left\|x_{\overline{M}^{\perp}}\right\|^{2}$$

因此

$$x=x_{\overline{M}}\in\overline{M}.$$

由$x\in M^{\perp\perp}$ 的任意性知, $M^{\perp\perp}\subset\overline{M}$. (ii) 证毕. 至此, Proposition 2.4 证毕. $\square$

Remark 2.5. $A\oplus B=A\oplus C$ 不一定能推出$B=C$, 必须加上条件$B\subset C$. 反例: 设$\mathcal{H}:=\mathbb{R}^2$, $A:=\{(t,0):\ t\in\mathbb{R}\}$, $B:=\{(0,t):\ t\in\mathbb{R}\}$, $C:=\{(t,t):\ t\in\mathbb{R}\}$. 则$A\oplus B=A\oplus C$ 但$B\neq C$.

3 Hilbert 空间上的投影算子

Proposition 3.1. 设$\mathcal{H}$ 是*Hilbert* 空间, P 是$\mathcal{H}$ 上的有界投影算子. 则$\mathcal{R}(P)=[\mathcal{N}(P)]^{\perp}$ 当且仅当P 是对称算子.

Proof. 先证" $\Rightarrow$ ". 设$\mathcal{R}(P)=[\mathcal{N}(P)]^{\perp}$, 则

$$\begin{aligned}(Px,y)&=(Px,Py+(I-P)y)=(Px,Py)\\&=(Px+(I-P)x,Py)=(x,Py).\end{aligned}$$

再证" $\Leftarrow$ ". 设P 是对称算子, 则对$\forall x\in\mathcal{R}(P)$, $\forall y\in\mathcal{N}(P)$, 存在$z\in\mathcal{H}$ 使得$x=Pz$, 因此

$$(x,y)=(Pz,y)=(z,Py)=0.$$

故$\mathcal{R}(P)\subset[\mathcal{N}(P)]^{\perp}$. 又因为由正交分解有

$$\mathcal{N}(P)\oplus[\mathcal{N}(P)]^{\perp}=\mathcal{H}=\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{R}(P),$$

因此$\mathcal{R}(P)=[\mathcal{N}(P)]^{\perp}$. $\square$

Remark 3.2. Proposition 3.1 中条件$P\in\mathscr{L}(\mathcal{H})$ 应该不能去掉, 反例没想到.

Definition 3.3. 有界对称投影算子被称为正交投影算子(orthogonal projection), 有界非对称投影算子被称为斜投影算子(oblique projection).

Remark 3.4. 由正交分解来定义正交投影算子更为直观.

对$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, 定义$P_\alpha:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(0,\alpha x+y)$. 则$P_0$ 是正交投影算子, 对$\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, P_α 是斜投影算子.