奇异积分

Zhulei Pan

2021 年 2 月 7 日

奇异积分起源于偏微分方程的求解问题. 奇异积分的理论是调和分析的一个核心研究领域之一. 奇异积分主要分为两大类: 卷积型和非卷积型, 其中卷积型奇异积分又分为带齐次核的和一般核的(非卷积也可以). 关于奇异积分主要是研究其有界性问题. 下面从最基本的奇异积分——Hilbert变换讲起.

Hilbert变换 首先, 给出$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上Hilbert变换的三个等价定义.

Definition 1. ([1, p. 51])(Hilbert变换) 设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义$f$的Hilbert变换$Hf$如下

$$Hf := \lim_{t\to 0} Q_t * f,$$

$$Hf := \frac{1}{\pi}\mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{x} * f,$$

$$Hf(\cdot) := \mathcal{F}^{-1}\left(-i\operatorname{sgn}(\cdot)f(\cdot)\right),$$

其中Q_t是共轭Poisson核, $\mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{x}$是$\frac{1}{x}$的主值分布, $\mathcal{F}^{-1}$是Fourier逆变换.

下面给出Hilbert变换关于Schwartz函数的有界性定理.

Theorem 2. ([1, pp. 51–54])(Hilbert变换的有界性) 设H是$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上的Hilbert变换, 则

(i) (Kolmogorov) H是弱$(1,1)$的, 即存在正常数C_1使得对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$及任意$\lambda \in (0,\infty)$有

$$|\{x \in \mathbb{R} : |Hf(x)| > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

(ii) (M. Riesz) 对任意$p \in (1,\infty)$, H是强(p,p)的, 即存在正常数C_p使得对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$有

$$\|Hf\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Remark 3. (i) 该定理证明的关键在于Calderón–Zygmund分解, Marcinkiewicz插值定理, 其证明步骤是标准的, 在证明Calderón–Zygmund算子有界性时也沿用了这一证明思路. 下面具体说明这一证明步骤.

$(\mathrm{i})_1$ 首先证明H是强$(2,2)$的, 该过程用到Plancherel原理.

$(\mathrm{i})_2$ 其次证明H是弱$(1,1)$的, 该过程用到Calderón–Zygmund分解.

$(\mathrm{i})_3$ 最后利用Marcinkiewicz插值定理证明H是强(p,p)的, 其中$p\in(1,2)$. 再利用对偶的方法证明H是强(p,p)的, 其中$p\in(2,\infty)$.

(ii) 对任意$p\in[1,\infty)$, 由定理2及$\mathcal{S}(\mathbb{R})$在$L^p(\mathbb{R})$中稠, 可将Hilbert变换延拓到$L^p(\mathbb{R})$.

$(\mathrm{i})_1$ 当$p=1$时, 对任意$f\in L^1(\mathbb{R})$, 定义f的Hilbert变换Hf为

$$Hf:=\lim_{n\to\infty}Hf_n \quad \text{in} \quad L^{1,\infty}(\mathbb{R}),$$

其中$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$且$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{L^1(\mathbb{R})}=0$.

$(\mathrm{i})_2$ 当$p\in(1,\infty)$时, 对任意$f\in L^p(\mathbb{R})$, 定义f的Hilbert变换Hf为

$$Hf:=\lim_{n\to\infty}Hf_n \quad \text{in} \quad L^p(\mathbb{R}),$$

其中$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$且$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_{L^p(\mathbb{R})}=0$.

(iii) Hilbert变换H不是强$(1,1)$和强(∞,∞)的. 例如, 取$f:=\mathbf{1}_{[0,1]}\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$, 此时

$$Hf(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|>\epsilon\}}\frac{\mathbf{1}_{[0,1]}(x-y)}{y}\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{[0,1]}\frac{1}{x-y}\,dy=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|,$$

这个函数既不可积, 也不有界.

(iv) 设$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 则

$$Hf\in L^1(\mathbb{R})\Longleftrightarrow\int_{\mathbb{R}}f(x)\,dx=0$$

(见[1, p. 55]).

带齐次核的卷积型奇异积分 Riesz变换是Hilbert变换的高维推广, 带齐次核的卷积型奇异积分则是Riesz变换的进一步推广. 下文中, $\epsilon\to0^+$意谓着$\epsilon\in(0,\infty)$且$\epsilon\to0$.

Definition 4. ([1, p. 69])(带齐次核的卷积型奇异积分) 设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, Ω是定义在$\mathbb{R}^n$中单位球面S^{n-1}上的可积函数, 且满足Ω在S^{n-1}上的积分为零, 定义f的奇异积分Tf为

$$Tf(x) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n:\ |y| > \epsilon\}} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)\, dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

其中$y' := y/|y|$.

可以验证, Ω具有零积分是(1)中极限存在的必要条件(见[1, p. 69]).

为考察T的有界性, 由定理2的注记(1), 要求T是强$(2,2)$的. 为此, 由Plancherel定理及T为卷积型奇异积分, 有

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\widehat{Tf}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\|\mathcal{F}(\mathrm{p.\,v.}\,\Omega(x')/|x|^n)\widehat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\mathcal{F}(\mathrm{p.\,v.}\,\Omega(x')/|x|^n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中$\mathcal{F}(\mathrm{p.\,v.}\,\Omega(x')/|x|^n)$是分布$\mathrm{p.\,v.}\,\Omega(x')/|x|^n$的Fourier变换, 故只需证其有界. 由此及$\mathrm{p.\,v.}\,\Omega(x')/|x|^n$的齐次性, 有以下定理.

Theorem 5. ([1, p. 72])(带齐次核卷积型奇异积分算子核的Fourier变换) 设Ω是S^{n-1}上的可积函数, 且满足Ω在S^{n-1}上的积分为零, 则$\mathrm{p.\,v.}\,\Omega(x')/|x|^n$的Fourier变换是零阶齐次函数, 且有表达式

$$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \left[\log\left(\frac{1}{|u\xi'|}\right) - i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(u\xi')\right] du, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

其中$m := \mathcal{F}(\mathrm{p.\,v.}\,\Omega(x')/|x|^n)$且$\xi' := \xi/|\xi|$.

Remark 6. 在(3)式中, 与Ω相乘的因子有两项: $\log(\frac{1}{|u\xi'|})$和$-i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(u\xi')$.

- 第一项是偶函数, 若Ω为奇函数, 第一项因子不起作用; 类似的, 第二项是奇函数, 若Ω为偶函数, 第二项因子不起作用.
- 第一项本身并不有界, 但它的任意次幂都是可积函数; 第二项本身就是一个可积函数.

基于以上分析将Ω分解成奇偶两项, 对$\forall\, u \in S^{n-1}$,

$$\Omega_{\mathrm{o}}(u) := \frac{1}{2}[\Omega(u) - \Omega(-u)], \quad \Omega_{\mathrm{e}}(u) := \frac{1}{2}[\Omega(u) + \Omega(-u)].$$

Theorem 7. ([1, p. 73])(齐次核的Fourier变换有界) 设Ω是S^{n-1}上可积函数且积分为0. 若$\Omega_{\mathrm{o}} \in L^1(S^{n-1})$且存在$q \in (1,\infty)$使得$\Omega_{\mathrm{e}} \in L^q(S^{n-1})$, 则$\mathcal{F}(\mathrm{p.\,v.}\,\Omega(x')/|x|^n) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

从而由(2)及定理7说明T是强$(2,2)$的. 最后分别处理奇核和偶核得到以下定理.

Theorem 8. ([1, p. 79])(带齐次核的卷积型奇异积分的有界性) 设Ω是S^{n-1}上可积函数且积分为0. 若$\Omega_{\mathrm{o}} \in L^1(S^{n-1})$且存在$q \in (1,\infty)$使得$\Omega_{\mathrm{e}} \in L^q(S^{n-1})$, 则对任意$p \in (1,\infty)$, 定义4中的带齐次核的卷积型奇异积分算子$T$是强$(p,p)$有界的.

一般核的卷积型奇异积分 记$\mathbf{0}$为$\mathbb{R}^n$中的零点. 对于一般的卷积型奇异积分算子, 有如下定理.

Theorem 9. ([1, p. 91])(Calderón–Zygmund定理) 设K是$\mathbb{R}^n$上的缓增分布, 在分布意义下与一个$\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$上局部可积函数一致且满足

$$\left|\widehat{K}(\xi)\right| \leq A, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|>2|y|\}} |K(x-y)-K(x)|\, dx \leq B, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

则

(i) 对任意$p \in (1,\infty)$, 存在正常数C_p使得对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$有

$$\|K * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

(ii) 存在正常数C_1使得对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$及任意$\lambda \in (0,\infty)$有

$$|\{x \in \mathbb{R}^n:\ |(K*f)(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C_1}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Remark 10. (i) 该定理的证明类似于定理2.

- $(\mathrm{i})_1$ 条件(4)保证了卷积型奇异积分算子是强$(2,2)$有界的.
- $(\mathrm{i})_2$ 条件(5)称为Hörmander条件, 它保证了卷积型奇异积分算子是弱$(1,1)$有界的.
- $(\mathrm{i})_3$ 最后利用内插和对偶的方法, 得到卷积型奇异积分算子的强(p,p)有界性, 其中$p \in (1,\infty)$.

(ii) 类似注记3的(ii), 对任意$p \in [1,\infty)$, 可将卷积型奇异积分算子延拓到$L^p(\mathbb{R}^n)$.

容易验证Hilbert变换的核$1/x$和Riesz变换的核$x_j/|x|^{n+1}$满足定理9的条件. 关于带齐次核的卷积型奇异积分算子的核$K(x) = \Omega(x')/|x|^n$何时满足Hörmander条件, 有以下结论.

Proposition 11. ([1, p. 93])(Dini条件) 设Ω是S^{n-1}上可积函数, 积分为0, 且满足

$$\int_0^1 \frac{\omega_\infty(t)}{t}\,dt < \infty, \tag{6}$$

其中$\omega_\infty(t) := \sup\{|\Omega(u_1)-\Omega(u_2)| :\ |u_1-u_2| \le t,\ u_1,\ u_2 \in S^{n-1}\}$, 则齐次核$K(x) := \Omega(x')/|x|^n$满足Hörmander条件, 其中条件(6)称为Dini条件.

Corollary 12. ([1, p. 93])(满足Dini条件的齐次核卷积型奇异积分算子的有界性) 设Ω是S^{n-1}上可积函数, 积分为0, 且满足Dini条件(6), 则对任意$p \in (1,\infty)$, 奇异积分算子

$$Tf(x) := \mathrm{p.\,v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)\,dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

是强(p,p)且弱$(1,1)$的.

非卷积型奇异积分

最后讨论非卷积型奇异积分算子.

Definition 13. ([1, p. 99])(标准核) 记$\Delta := \{(x,x) :\ x \in \mathbb{R}^n\}$, 称$K :\ (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \setminus \Delta \to \mathbb{C}$是一个标准核, 若存在正常数$C$和$\delta$使得

$$|K(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^n}, \quad \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n,\ x \ne y, \tag{7}$$

$$|K(x,y)-K(x,z)| \le C\frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \quad \forall\, x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n,\ |x-y| > 2|y-z|, \tag{8}$$

$$|K(x,y)-K(w,y)| \le C\frac{|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}, \quad \forall\, x,\ y,\ w \in \mathbb{R}^n,\ |x-y| > 2|x-w|. \tag{9}$$

Definition 14. ([1, p. 100])(Calderón–Zygmund算子) 算子T称为Calderón–Zygmund算子, 若

(i) 算子T是强$(2,2)$的.

(ii) 存在一个标准核K使得对任意$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$且具有紧支集, 有表达式

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy, \quad \forall\, x \notin \mathrm{supp}(f),$$

此处及以下记$\mathrm{supp}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \ne 0\}$.

Theorem 15. ([2, p. 212])(Schwartz引理) 设$T :\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$为连续线性算子, 则存在核$K :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathbb{C}$使得对$\forall\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$及$\forall\, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$有

$$\langle Tf, g\rangle = \langle K, f \otimes g\rangle,$$

其中$(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y),\ \forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

Schwartz引理解释了Calderón–Zygmund算子定义中的条件(ii). 关于Calderón–Zygmund算子, 我们还有以下定理.

Theorem 16. ([2, p. 216]) (Calderón–Zygmund算子积分表示定理) 设T是带标准核K的Calderón–Zygmund算子, 则对任意具有紧支集的有界函数f, g且$\mathrm{supp}(f)\cap\mathrm{supp}(g)=\varnothing$有

$$\langle Tf,g\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)g(x)\,dy\,dx.$$

进一步, 对任意具有紧支集的有界函数f, 存在一个零测集$E(f)$使得对任意$x\notin E(f)\cap\mathrm{supp}(f)$有

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\,dy.$$

Theorem 17. ([1, p. 99]) (非卷积型奇异积分算子有界性定理) 设T是强$(2,2)$的, $K:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta\to\mathbb{C}$使得对任意$f\in L^2(\mathbb{R}^n)$且具有紧支集, 有表达式

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\,dy,\quad \forall\, x\notin\mathrm{supp}(f),$$

进一步, 若K还满足: 存在正常数C使得

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x-y|>2|y-z|\}}|K(x,y)-K(x,z)|\,dx\le C,\quad \forall\, y,\ z\in\mathbb{R}^n, \tag{10}$$

$$\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:\ |x-y|>2|x-w|\}}|K(x,y)-K(w,y)|\,dy\le C,\quad \forall\, x,\ w\in\mathbb{R}^n, \tag{11}$$

则T是强(p,p)且弱$(1,1)$的, 其中$p\in(1,\infty)$.

Remark 18. (i) 该定理的证明类似于定理2 .

- $(\mathrm{i})_1$ 由定理条件保证了T是强$(2,2)$的.
- $(\mathrm{i})_2$ 条件(10)是用来证明T是弱$(1,1)$的, 条件(11)是用来证明T^*是弱$(1,1)$的.
- $(\mathrm{i})_3$ 利用Marcinkiewicz插值定理, 进一步得T和T^*是强(p,p)的, 其中$p\in(1,2)$. 再利用对偶的方法进一步知T是强(p,p)的, 其中$p\in(2,\infty)$.

(ii) 类似注记3的(ii), 对任意$p\in[1,\infty)$, 可将非卷积型奇异积分算子延拓到$L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) 条件(10)和条件(11)称为Hörmander条件, 标准核显然满足Hörmander条件. 这说明Calderón–Zygmund算子是强(p,p)且弱$(1,1)$的, 其中$p\in(1,\infty)$. 因此给定一个具有标准核的算子, 问题就简化为验证它是否是强$(2,2)$的.

$T1$定理 $T1$定理回答了, 给定一个带标准核K的Calderón–Zygmund算子T, T何时是强$(2,2)$的.

Definition 19. ([1, p. 202])(WBP) 算子$T:\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$称为是具有弱有界性的(记作$T$具有WBP), 若对$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$的任意有界子集$B$, 存在正常数$C_B$使得对$\forall\,\phi_1,\ \phi_2\in B$, $\forall\,x\in\mathbb{R}^n$及$\forall\,R\in(0,\infty)$有

$$\left|\left\langle T\phi_1^{x,R},\phi_2^{x,R}\right\rangle\right|\le C_B R,$$

其中

$$\phi_i^{x,R}(y):=\phi_i\left(\frac{y-x}{R}\right),\quad \forall\,y\in\mathbb{R}^n,\ \forall\,i\in\{1,2\}.$$

Theorem 20. ([1, p. 203])($T1$定理) 设算子$T:\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$具有标准核$K$, 则$T$可以延拓为一个$L^2(\mathbb{R}^n)$有界算子, 当且仅当以下条件成立

(i) $T1\in\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $T^*1\in\mathrm{BMO}\,(\mathbb{R}^n)$,

(iii) T具有WBP.

References

[1] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[2] L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, Graduate Texts in Mathematics, 250. Springer, New York, 2014.