Solutions

吴作凡

清华大学交叉信息研究院

2018年1月25日

Problem A

将1个时刻分成2个，每个时刻向两侧移动1/2的概率是1/2，可以立刻得到答案即为

$$\frac{\binom{2t}{t-p}}{2^{2t}}$$

Problem B

将树画在平面上形成平面图，添加一个点连向叶子，每条边的边权变成其子树之和，那么一个割即为一个联通块。平面图的割等同于对偶图的路径，用经典算法求$k-$长路即可。

Problem C

将颜色随机映射到$[1,k]$之中，然后即可$O(3^k n)$dp。每次的正确概率为$\frac{k!}{k^k}$，多随机几次即可。

Problem D

n个叶子即为$n-1$个非叶子。考虑按先序遍历顺序dp，$f_{i,j}$表示先序第i个点到根经过了j个左儿子，可以转移到$f_{i+1,j+1}, f_{i+1,j}, \ldots, f_{i+1,1}$。

Problem E

通过奇偶性分析可以确定其最小值，而

$$x^2-(x+1)^2-(x+2)^2+(x+3)^2-(x+4)^2+(x+5)^2+(x+6)^2-(x+7)^2=0$$

因此确定前几项的构造方法就可以了。

Problem F

分情况讨论就行。

Problem G

如果A能胜B，就练$A- > B$的有向边，如果一个点能访问其余所有点，就是winner。实际上，就是强连通分量缩点以后无入度的联通块。

直接连边看上去不可行，提取出两维然后用数据结构优化连边即可。

Problem H

按照a_i排序，考虑最后一个选a的位置，之前一定选满了，于是可知选了几个b，后面的b一定选最大的，前面一定选$b-a$最大的，那么用两个set扫描一遍就行。

Problem I

即求长度为n的无循环串个数，答案为

$$\frac{\sum_{d|n} 10^{\frac{n}{d}}\mu(d)}{n}$$

Problem J

构造，本质不同的情况只有4种。

Problem K

可证明答案为$\sum_{i=1}^{n}\mu^2(i)$，而$\mu^2(x)=\sum_{d^2|x}\mu(d)$，即求

$$\sum_{d=1}^{\sqrt{n}}\left\lfloor\frac{n}{d^2}\right\rfloor\mu(d)$$

令$M=n^{0.4}$，小于M的直接枚举，否则枚举$\lfloor\frac{n}{d^2}\rfloor$并用经典算法计算$\mu$的前缀和，复杂度$O(n^{0.4})$。

Q&A

Anyone who has questions is welcome to ask questions.