随机系统（Random Systems）

——计算物理期末作业

材料物理　汤智源　2015301020092

摘要：本次的作业主要是对第七章的随机系统的几个问题做一个概述。利用 python 软件的 random 函数对一维、二维、三维的随机行走问题（one, two, three dimensions random walking），分形理论（Fractal theory）进行讨论，理论来源是我们的教材《计算物理》。

关键词：随机行走、扩散过程、分形问题

引言：随机过程这门学科最早由柯尔莫戈罗夫和杜步奠定的，经过拉普拉斯的《概率的解析研究》（1812），爱因斯坦的布朗问题的研究（1905），Borel 的强大数定律（1923）等研究后成为了一门成熟的学科。随机过程是广泛使用的理论体系，在诸如天气预报、统计物理、天体物理、运筹决策、经济数学、安全科学、人口理论、可靠性及计算机科学等很多领域都要经常用到随机过程的理论来建立数学模型，在人们的生活中发挥了重要的作用。而随机系统本身是带有不确定性的，即系统缺乏可预测性。一个随机的事件序列，符号或步骤没有秩序，不遵循一个可理解的模式或组合。

一、随机行走过程：

随机行走是布朗运动的数学状态。

1、一维的随机行走是其中最简单的模型。在一维模型中，一个质点在一维轴上运动，其方向是不确定的。现在而且向左边和向右边行走的概率是相等的。现在，我们假设有 1000 个点在直线上随机跳跃，然后研究这些点距离原点的平均距离。

程序的思想是利用 random 这个函数，在（0，1）之间随机取值 p，当 p<0.5 的时候，点就向右边运动；p>0.5 时候，点就向右边运动。利用概率论中的大数定理，可以证明，当 p 的取值次数很大的时候，向左向右的概率各为 0.5。

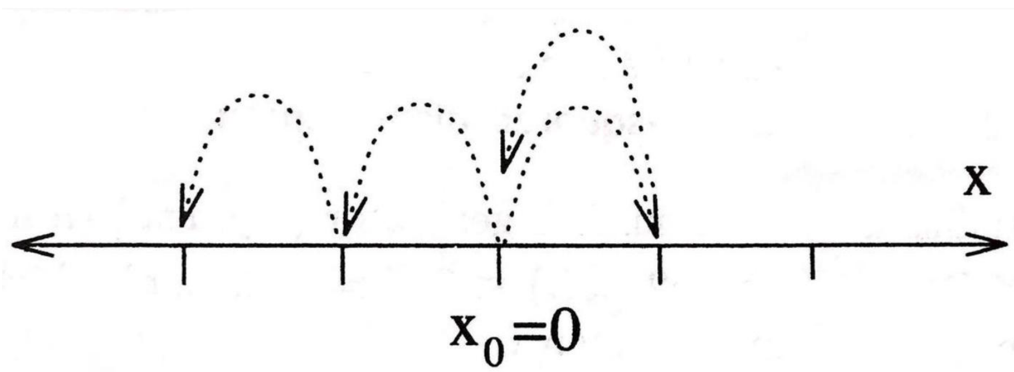

图 1、一维随机分布的图示

统计的方法：

1、是计算每一次跳跃所有点到原点坐标的平均值的期望。

2、统计平均值的 E（$\overline{x^2}$）

理论上：1、$E(\overline{x})=E(E(x))=E(nP)=nE(P)=0$——①

（此处利用了概率上伯努利分布的结论）

2、$E(\overline{x^2})=E(\frac{1}{n}\sum_n E_n(x^2))=\frac{1}{n}\sum_n E(E_n(x^2))$

　　由于各个点是相互独立的，所以变为：

$$E(\overline{x^2})=E(x^2)=\sum_i (P_+ S_{i+}{}^2+P_- S_{i-}{}^2)=n\times(P_+ S_+{}^2+P_- S_-{}^2)=n\times(\frac{1}{2}\times(1)^2+\frac{1}{2}\times(-1)^2)=n$$

——②

根据教材上的公式：$<x^2>=2Dt$——③，t 可以通过经过的跳跃次数反映。

结合②、③式子，可以得到此时的 D=0.5。
以下是 1000 个点一维跳跃的到的 x-t 图：

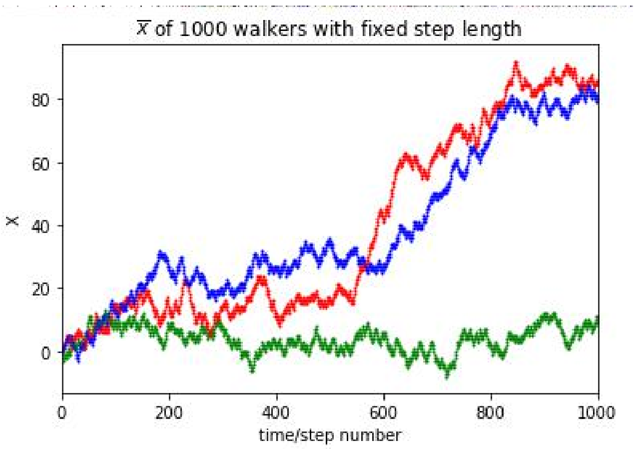

图 2、一维情况下的 x-t 图
这三条线分别对应了重复做三次这个实验得到的图像，可以看出，三根线的轨迹是完全不一样的，这也反映了随机过程的不可预测性。
求出来的 E（x）为：

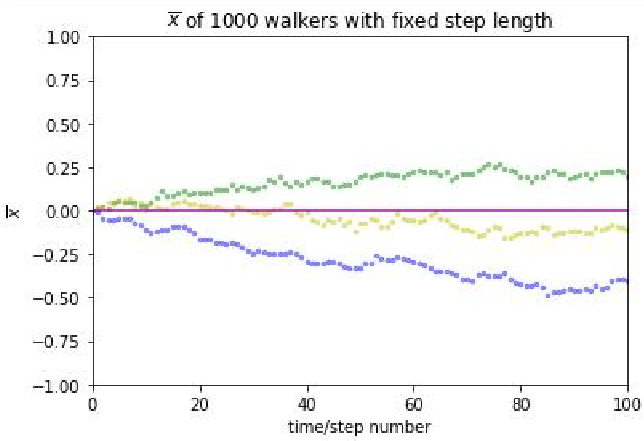

图 3、E（x）-t 图

E（x）在 0 的上下浮动，$E(\overline{x^2})$ 大致为 0，与理论值是相符的。

得到的 $E(\overline{x^2})$ -t 图为：

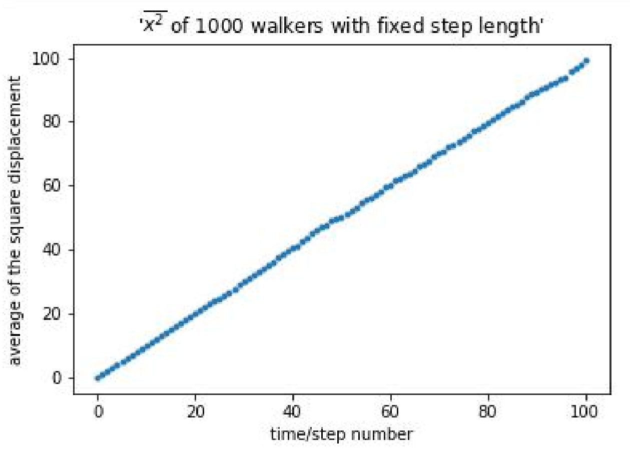

图 4、 $E(\overline{x^2})$ -t

拟合出来的方程为：0.9978 n - 0.4359，斜率大致为 1，算出的 D=0.4989，和理论值相当接近。

现在还是点在一维上跳跃，若每一次跳跃的距离不是定长的，也是在（-1,1）中的随机数，此时做出来的图 $E(\overline{x^2})$ -t 是：

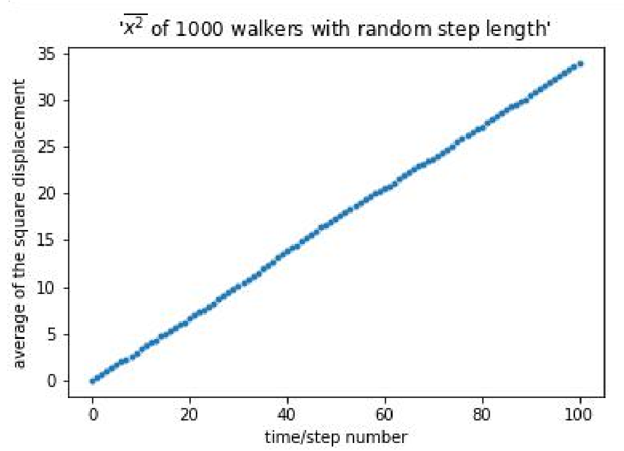

图 5、跳跃距离不定长的 $E(\overline{x^2})$ -t 图

拟合出来的曲线方程为：0.341 n- 0.01479

这在概率论上也有相关的题目。现在可以看作，距离 s 在（-1,1）上是均匀分布的，写作：S~U(-1,1)，此时在概率论中，可以算出 E(x)= $\frac{1+(-1)}{2}$ =0，

$$E(\overline{x^2})=[\frac{1^2+1\times(-1)+(-1)^2}{3}]\times n=\frac{1}{3}n。$$

可以看出计算出来的值与理论值也是相符的。

再讨论左右移动的概率不相同的情况（步长保持一致，为 1）

得到的概率不相等时候 E(x)-t 图为：

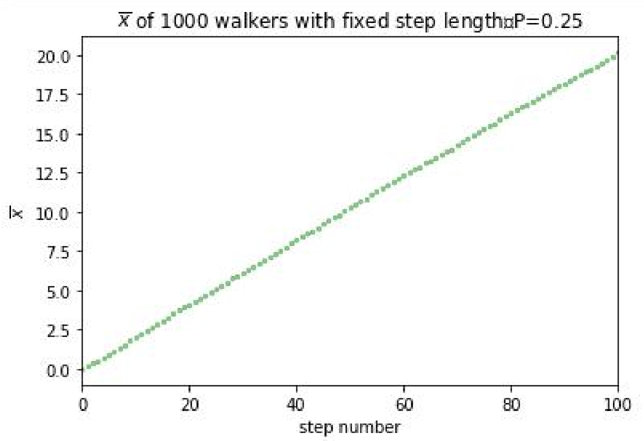

图 6、E（x）-t 图

拟合的曲线方程为：0.2024 x + 0.0505

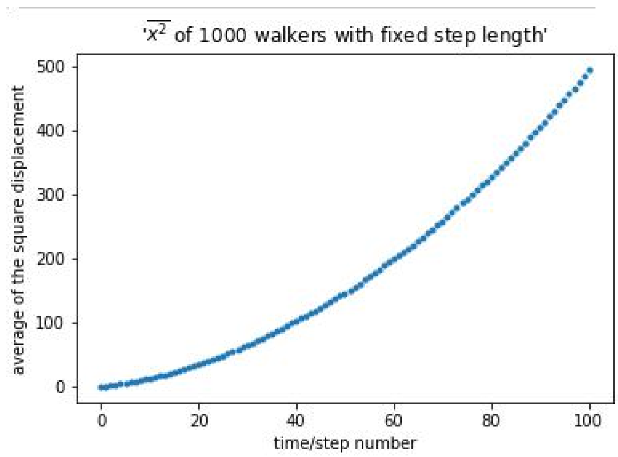

图 7、$E(\overline{x^2})$-t 图

此时做二次项的拟合：0.03973 x ^2+ 0.928 x + 0.3719

理论上：

此时期望，$E(\overline{x})\neq 0$，而是：$E(\overline{x})$=nE(x)=$n\times[0.6\times 1+0.4\times(-1)]=0.2n$

此时的 $E(\overline{x^2})$=$n\times E(x^2)+n(n-1)[E(x)]^2=n\times[1^2\times 0.6+0.4\times(-1)^2]+n(n-1)\times 0.2^2$

$$=0.04n^2+0.96n$$

和拟合出来的方程很符合。

2、二维情形下的点的跳动：

与一维的情况相似，考虑每次跳跃的距离是一样的，方向先固定，只在 x,y 方向进行跳跃，记录下每次点所在的位置。

得到的二维（进行了 100 次跳跃）：

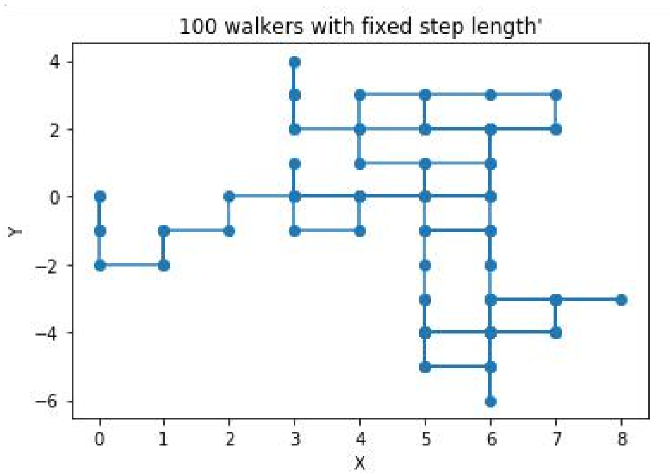

图 8、二维中进行了 100 次跳跃

1000 次：

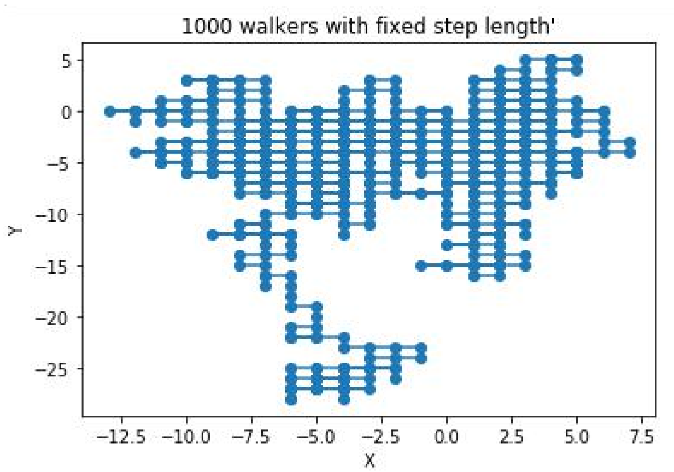

图 9、二维中进行了 1000 次跳跃

同样的，可以得到一个 $E(\overline{\rho^2})$ 和 t 的关系图（$\rho^2 = x^2 + y^2$）

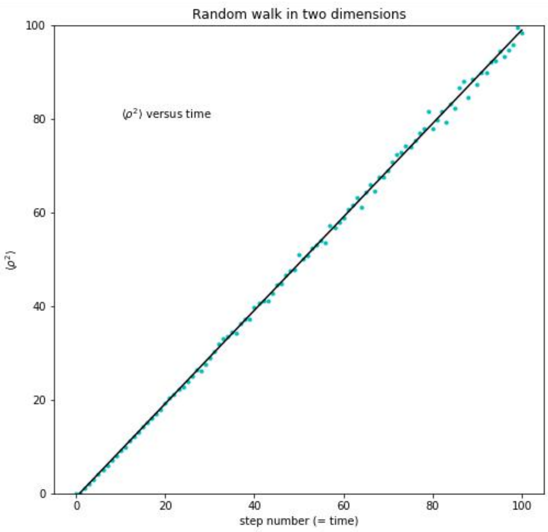

图 10、100 次跳跃时候的 $E(\overline{\rho^2})$ -t

经过拟合得到的关系是：0.9974 n - 0.7985，和一维的情形是一致的。
当方向不做要求时候，每次跳跃，是跳到一个半径为 ρ =1 的圆上的任意一点。
做出来的图为：

图 11、一个点二维中不规定方向进行了 100 次跳跃

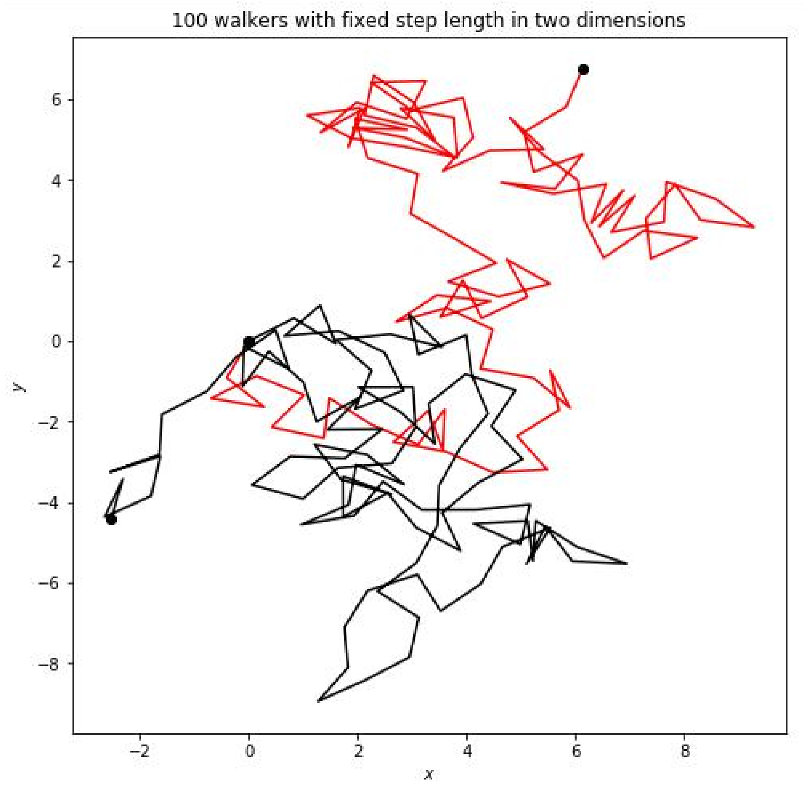

图 12、两个点二维中不规定方向进行了 100 次跳跃

和一维一样地，可以得到结论：随机过程是不可预测的。

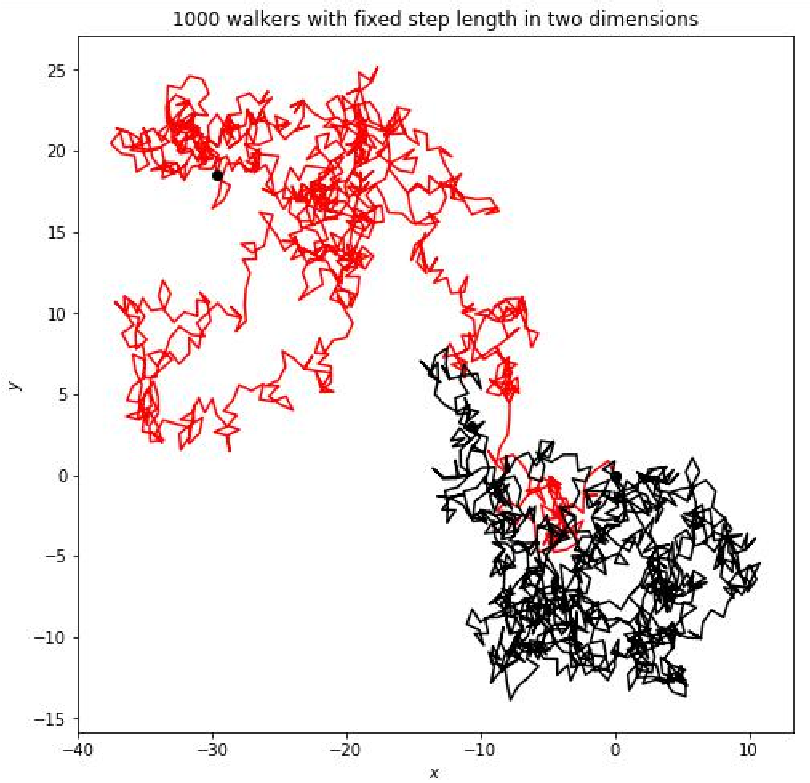

图 13、两个点二维中不规定方向进行了 1000 次跳跃

和之前一样的操作：做一个 $E(\overline{\rho^2})$ -t 的关系图：

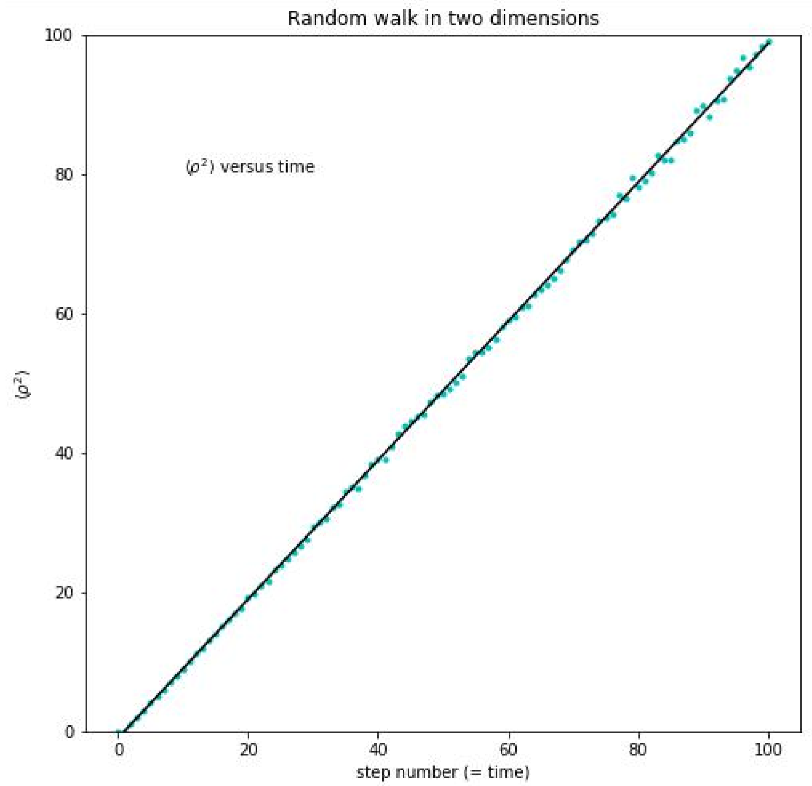

图 14、两个点二维中不规定方向进行了 100 次跳跃的 $E(\overline{\rho^2})$ -t 图

又经过拟合之后，得到的拟合方程为：0.9973 x - 0.9917。

当对每次跳跃的距离不加以限制，s 在（0,1）之间取值，则可以得到图：

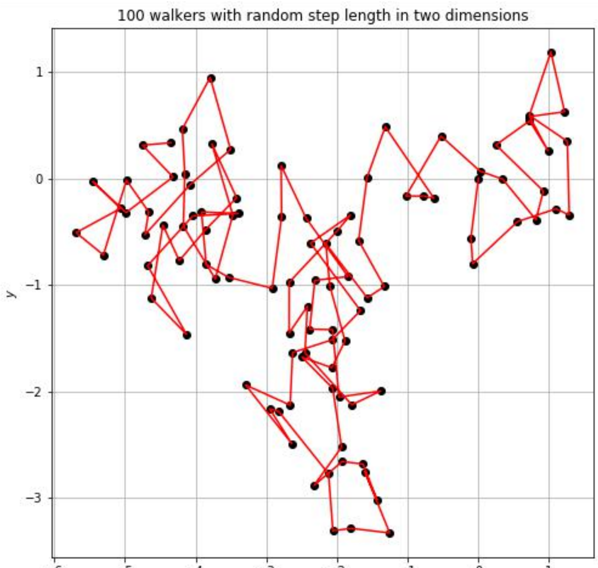

图 15、两个点二维中不规定方向，不规定步长进行了 100 次跳跃

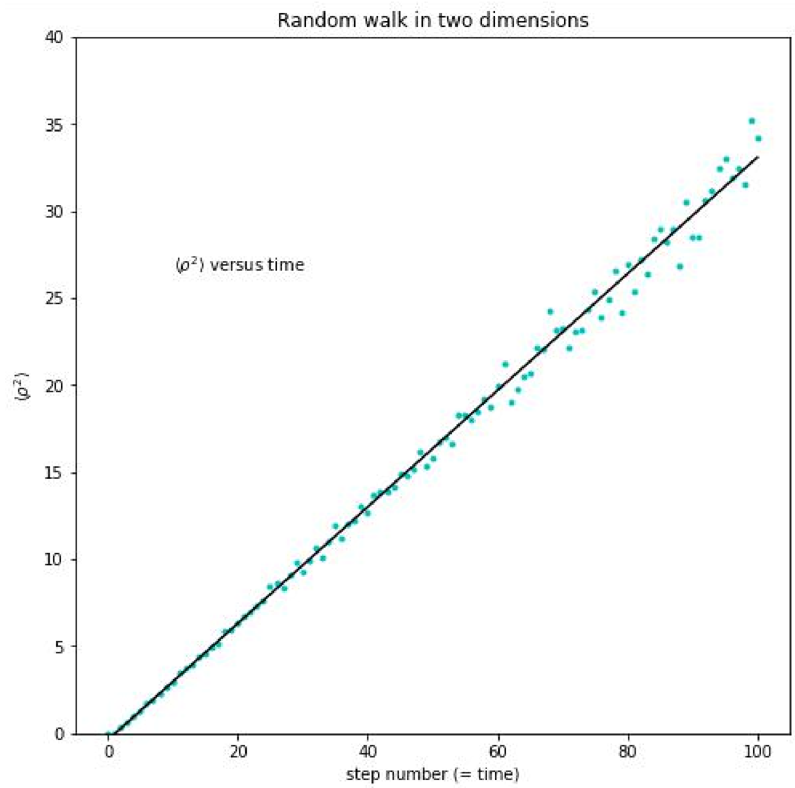

图 16、两个点二维中不规定方向进行了 100 次跳跃的 $E(\overline{\rho^2})$ -t 图

拟合的方程是：0.3348 x - 0.3989。

在概率论上同样可以解释：此时是一个二维的均匀分布，是连续分布的。则可以得到概率密度函数： $f(\rho)=\frac{1}{\mathrm{S}}=\frac{1}{\pi}$,则做积分 $E(\overline{\rho^2})=n\times\iint\rho^2 f(\rho)d\theta d\rho=\frac{n}{3}$，与得到的数据相符。

3、三维的情况

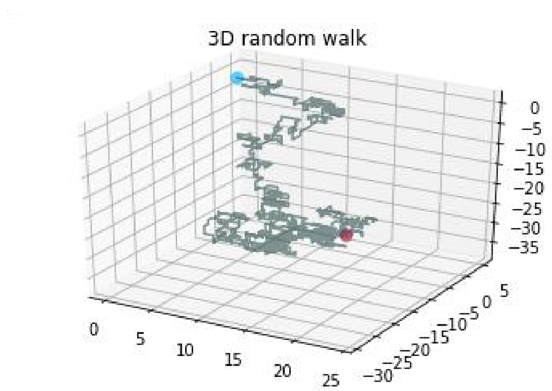

图 17、两个点三维中下，x,y,z 方向进行了 1000 次跳跃

在 z 方向上走的距离比其他距离都要远，而且回到远点的可能性很低。

原因是：根据引言中的 Borel－Cantelli 于 1923 提出的引理，d 维简单随机游走第 n 步落在初始点附近的概率正比于 $n^{-\frac{d}{2}}$，利用引理可以推出在 $\sum n^{-\frac{d}{2}}$ 能小于无穷（收敛）时几乎必然存在 N，任意 n>N，随机游走的第 n 都不能落在初始点的周围。而 $\sum n^{-\frac{d}{2}}$ 在 d=1，2 是发散，在 d>3 时会收敛，所以一旦维数超过三维，则会随着步数的增加，回到原点的概率越来越小。根据著名数学家波利亚（George Pólya）在 1921 年证明的，在三维网格中随机游走，最终能回到出发点的概率只有大约 34%，所以有一个十分有意思的比喻：“喝醉酒的醉汉最终可以回到家，但是喝醉酒的小鸟却不能回到家了”。

二、分形理论（fractal theory）

分形理论在历史上也是十分地出名分形理论的最基本特点是用分数维度的视角和数学方法描述和研究客观事物，也就是用分形分维的数学工具来描述研究客观事物。它跳出了一维的线、二维的面、三维的立体乃至四维时空的传统藩篱，更加趋近复杂系统的真实属性与状态的描述，更加符合客观事物的多样性与复杂性。所以，也说分形几何是真正描述大自然的几何学，对它的研究也极大地拓展了人类的认知疆域。

分形几何的特点是利用递归，生成无限精细的结构。历史上比较有名的迭代方程式是 Mandelbrot 集，集合由 $f(z) = z^2 + c$ 组合而成，其中 z 是复数。

可以做出图像

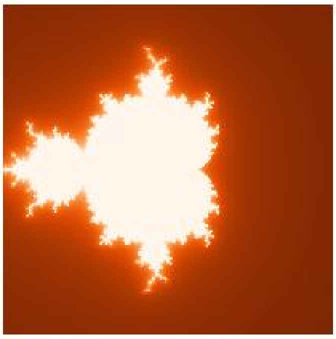

图 18、Mandelbrot 分形集合图

结语：本次的作业中我分别做个随机行走的一维、二维、三维的定步长的问题，以及一维和二维中不定步长的问题，对前人们能够透过表面的偶然性描述出必然的内在规律并以概率的形式来描述这些规律感到倾佩。初步了解了分形问题，感到十分神奇，这个理论可以世界上许多自然现象，甚至可以模拟树木的生长，真是太神奇了。

参考文献：1、《计算物理》 NIicholas J.Giordano, Hisao Nakanishi
2、《分形图的迭代算法》 杨华、蒋峰 武汉工业学院 物理系，湖北 武汉
3 、百度百科（随机过程）
（ https://baike.baidu.com/item/%E9%9A%8F%E6%9C%BA%E8%BF%87%E7%A8%8B/368895?fr=aladdin）
4、《三维随机游走回到始点的概率》

鸣谢：高多奇同学在分形理论上给我的指导。