



13. $R(0) = \{1, 2, 3, 4\}$

$R(1) = \{2, 3, 4\}$

$S(0) = \{0, 1\}$

$S(-1) = \{-1, 0\}$

$T(0) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$T(-1) = \{1, 2, 3, 4\}$

14. 对于一个元素 $x \in A$, R 中可能不存在 $\langle x, y \rangle$ 且 $x \neq y$.e.g. 在 $\{1, 2, 3\}$ 上存在关系 R :

$\{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

它是传递且对称的, 但不是自反的.

| 关系 | 自反性 | 反自反性 | 对称性 | 传递性 |
|-------|-----|------|-----|-----|
| R_1 | X | X | X | X |
| R_2 | X | X | X | ✓ |
| R_3 | ✓ | X | ✓ | ✓ |
| R_4 | ✓ | X | X | ✓ |
| R_5 | X | X | X | X |
| R_6 | X | ✓ | ✓ | X |
| R_7 | X | ✓ | X | X |
| R_8 | ✓ | X | ✓ | X |



班级: 计23 姓名: 郑东森 编号: 2022010799 科目: 离散数学(1) 第 2 页

16.

| | 自反性 ^① | 反自反性 ^② | 对称性 ^③ | 传递性 ^④ |
|---|------------------|-------------------|------------------|------------------|
| R | × | × | ✓ | × |
| S | ✓ | × | ✓ | ✓ |

R: ① $4 \in A, \langle 4, 4 \rangle \notin R$ ② $5 \in A, \langle 5, 5 \rangle \in R$.

③ $x+y=10 \rightarrow y+x=10$.

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R$.

④ $\langle 2, 8 \rangle \in R \wedge \langle 8, 2 \rangle \in R, \langle 2, 2 \rangle \notin R$.

S: ① $2x$ 必为偶数 $\Rightarrow (\forall x \in A)(\langle x, x \rangle \in R)$.

② 由于 S 具自反性, S 不具反自反性.

③ $x+y=y+x \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R$.

④ $x+z=2k \wedge z+y=2k'$

$\Rightarrow x+y=2k''$

$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in R \rightarrow \langle x, y \rangle \in R$.

17. (1)

充分性: 若 R 是自反的,

则 $(\forall x)(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$

$\langle x, y \rangle \in I_A$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x = y$.

$\Rightarrow \langle x, x \rangle \in R \wedge x = y$.

$\Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$

故 $I_A \subseteq R$.

必要性: $I_A \subseteq R$

$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$.

故 R 是自反的.



班级: 计23 姓名: 郑东蔚 编号: 2022010799 科目: 离散数学(1) 第 3 页

18. (1) 若 R_1, R_2 都是自反的

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R_1 \wedge \langle x, x \rangle \in R_2 \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R_1 \circ R_2$$

故 $R_1 \circ R_2$ 也是自反的.

(3) 令 $A = \{1, 2, 3\}$.

$$R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}, R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle\}$$

R_1, R_2 都是对称的.

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle\}$$

$R_1 \circ R_2$ 不是对称的.

故原命题是错误的.

- 0.5

19. (1) $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

(2) $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$

反对称

20.

$$\langle 4, 3 \rangle \in R \wedge \langle 3, 1 \rangle \in R \text{ 但 } \langle 4, 1 \rangle \notin R$$

故 R 不是传递的.

$$\text{令 } R_1 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

$$22. R_1 \circ R_2 = \{\langle c, d \rangle\}$$

$$R_2 \circ R_1 = \{\langle a, d \rangle, \langle a, c \rangle\}$$

$$R_1^2 = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle\}$$

$$R_2^2 = \{\langle b, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle b, b \rangle\}$$



清华大学
TSINGHUA UNIVERSITY

数学作业纸

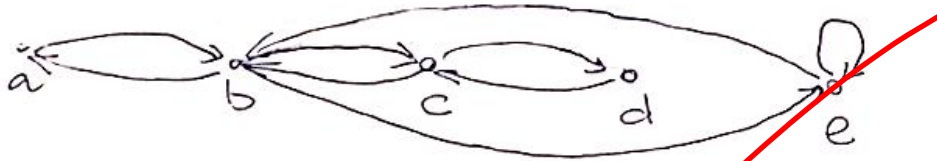
班级: 计23 姓名: 郑东杰 编号: 2022010759 科目: 离散数学(1) 第4页

24.

$r(R)$:



$s(R)$:



$t(R)$:

