数 学 作 业 纸

班级：计22　姓名：郑东森　编号：2022010799　科目：Linear Algebra　

Problem 2.5.6.

(a) Sol. Since $AB=AC$, $A^{-1}AB = A^{-1}AC$

$\Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$

$\Rightarrow B = C$ QED.

(b) Sol. $B=\begin{bmatrix}1&3\\3&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$

then $AB=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4\\4&4\end{bmatrix}$

$AC=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4\\4&4\end{bmatrix}$

$AB=AC$.

Problem 2.5.11.

(a) Sol. Let $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&4\\1&0\end{bmatrix}$, $A+B=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}$

then A, B is invertible and $A+B$ is not invertible.

(b) Sol. Let $A=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&-4\\-1&2\end{bmatrix}$, $A+B=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$

then A, B is not invertible and $A+B$ is invertible.

Problem 2.5.21.

Sol. $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$

are the 6 matrices that are invertible.

Problem 2.5.25.

Sol.

$$[A\ \ I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-\frac{1}{2}r_1]{r_2-\frac{1}{2}r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&1\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{2}{3}r_2,\ \frac{3}{4}r_3]{\frac{1}{2}r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-\frac{1}{3}r_3]{r_1-\frac{1}{2}r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&0&\frac{5}{8}&\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{array}\right]=[I\ \ A^{-1}]$$

In $B=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$, $r_1 = -(r_2+r_3)$

so B is singular which means B is not invertible.

清華大学 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：计23 姓名：郑东森 编号：2022010799 科目：Linear Algebra 第 2 页

Problem 2.5.31

Sol. $[A\ I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&-1&1&-1&1&0&0&0\\ 0&1&-1&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2-r_4,\ r_1+r_4]{r_3+r_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&-1&1&0&1&0&0&1\\ 0&1&-1&0&0&1&0&-1\\ 0&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}$

$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&-1&0&0&1&0&-1&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+r_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] = [I\ A^{-1}]$

$Ax = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\2\\1\end{bmatrix}$

Problem 2.5.39

Sol. $[A\ I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&-a&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&-b&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&-c&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+cr_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&-a&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&-b&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&c\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2+br_3}$

$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&-a&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&b&bc\\ 0&0&1&0&0&0&1&c\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1+ar_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&a&ab&abc\\ 0&1&0&0&0&1&b&bc\\ 0&0&1&0&0&0&1&c\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right] = [I\ A^{-1}]$

so $A^{-1} = \begin{bmatrix}1&a&ab&abc\\0&1&b&bc\\0&0&1&c\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Problem 2.6.6

Sol. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\0&0&-6\end{bmatrix} = U$

so $E_{32} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$; $E_{21} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$, $E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$L = E_{21}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$

so $A = LU = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\0&0&-6\end{bmatrix}$

Problem 2.6.8

Sol.

(a) $E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-c&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-b&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\ac-b&-c&1\end{bmatrix} = E$

(b) $E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\b&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{bmatrix}$

Problem 2.6.13.

Sol. $[A\ I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & b & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & c-a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & d-a & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}$

$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & d-b & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4-r_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] = [U\ L^{-1}]$

$[L^{-1}\ I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2+r_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+r_2}$

$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4+r_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I\ L]$

$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$

When $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, it guaranteed that system $Ax=b$ will have unique solutions.

Problem 2.6.16.

Sol. $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, ~~since~~ $Lc = b \Rightarrow c = L^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Ux = c \Rightarrow x = U^{-1}c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Graded Problem

Problem 1.

Sol. $[A\ I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&2&2&2&0&1&0&0\\1&2&3&3&0&0&1&0\\1&2&3&4&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&-1&1&0&0\\0&1&2&2&-1&0&1&0\\0&1&2&3&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}$

$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&-1&1&0&0\\0&0&1&1&0&-1&1&0\\0&0&1&2&0&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_4-r_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&-1&1&0&0\\0&0&1&1&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}$

$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&1&1&-1&1&0&0\\0&0&1&1&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-r_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&2&-1&0\\0&0&1&1&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_4}$

$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&2&-1&0\\0&0&1&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right]=[I\ A^{-1}]$

so $Ax=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow x=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

Problem 2.

Sol.

$[A\ I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&-1&-1&1&0&1&0&0\\1&-1&1&-1&0&0&1&0\\1&1&-1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&-2&0&-1&1&0&0\\0&-2&0&-2&-1&0&1&0\\0&0&-2&-2&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-r_2}$

$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&-2&0&-1&1&0&0\\0&0&2&-2&0&-1&1&0\\0&0&-2&-2&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_4+r_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&-2&0&-1&1&0&0\\0&0&2&-2&0&-1&1&0\\0&0&0&-4&-1&-1&1&1\end{array}\right]=[U\ L^{-1}]$

Since $E_{43}E_{32}E_{41}E_{31}E_{21}A=U$.

$L=E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{41}^{-1}E_{32}^{-1}E_{43}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}^{-1}$

$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&0&-1&1\end{bmatrix}$ so $A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-2&0\\0&0&2&-2\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$

$Ly=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\Rightarrow y=L^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\4\end{bmatrix}$

$$[U\ \ I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&-2&0&0&1&0&0\\0&0&2&-2&0&0&1&0\\0&0&0&-4&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[-\frac{1}{4}r_4]{-\frac{1}{2}r_2,\ \frac{1}{2}r_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&-1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1&0&0&0&-\frac{1}{4}\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+r_4]{r_1-r_4}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&1&1&0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&0&0&0&-\frac{1}{4}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&0&0&0&-\frac{1}{4}\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\\0&1&0&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&0&0&0&-\frac{1}{4}\end{array}\right]=[I\ \ U^{-1}]$$

$$Ux=y\Rightarrow x=U^{-1}y=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix}$$

so $x=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix}$