28. 最多等价类的关系是恒等关系 I_A，共 $|A|$ 个等价类

最少等价类的关系是全关系 E_A，只有 1 个等价类

29. Pf. R是自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \to \langle x,x\rangle \in R)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \to \langle x,x\rangle \in R \land \langle x,x\rangle \in R)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \to \langle x,x\rangle \in T)$

$\Leftrightarrow$ T是自反的.

R是传递的，则对任意 $\langle x,y\rangle \langle y,z\rangle$

$\langle x,y\rangle \in T \land \langle y,z\rangle \in T$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \land \langle y,x\rangle \in R \land \langle y,z\rangle \in R \land \langle z,y\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \langle x,z\rangle \in R \land \langle z,x\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \langle x,z\rangle \in T$

故T是传递的.

对于任意 $\langle x,y\rangle$

$\langle x,y\rangle \in T \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \land \langle y,x\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R \land \langle x,y\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in T$

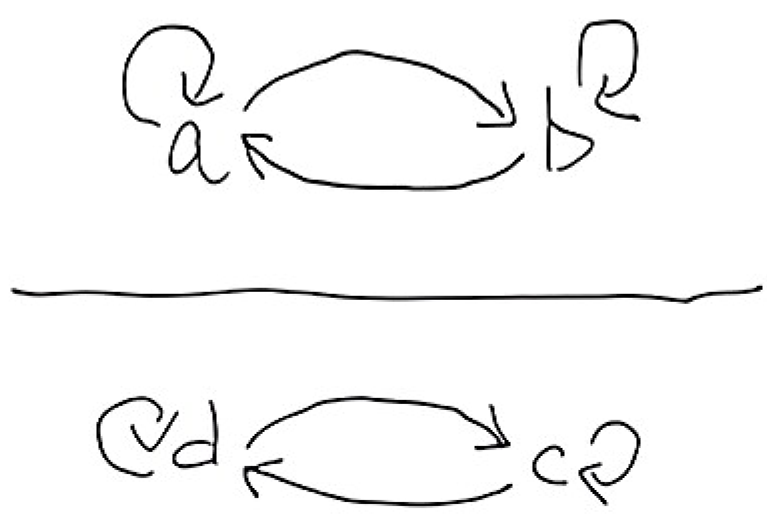
故T是对称的.

综上，T是A上的等价关系.

清华大学 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：计27 姓名：郑东森 编号：2022010959 科目：离散数学(1) 第 2 页

30.



如左图所示.

$[a]_R=[b]_R=\{a,b\}$

$[c]_R=[d]_R=\{c,d\}$

31. (1) 是，π把 Z_+ 划分为素数与非素数.

(2) 是，π即 A/I_A

32. 若 $|A|=1$，则 $P(A)-\{\emptyset\}=\{A\}$，构成A的划分

若 $|A|>1$，则由于 $A,\{a\}$ (a为A中任一元素)都属于 $P(A)-\{\emptyset\}$，他们交集不为空，故 $P(A)-\{\emptyset\}$ 不构成A的划分.

33. (若 $A=\{a,b,c,d\}$，则.)

① $\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$

② 二一一型：$C_4^2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$ 种

③ 三一型：$C_4^3=4$ 种.

④ 二二型：$C_4^2/2=6/2=3$ 种

⑤ $\{\{a,b,c,d\}\}$

综上，共 $1+6+4+3+1=15$ 种划分

34. Pf. 因为R是等价关系，故R是自反，对称且传递

R是自反的 $\Leftrightarrow x\in A\to\langle x,x\rangle\in R$

$\Leftrightarrow x\in A\to\langle x,x\rangle\in R\wedge\langle x,x\rangle\in R$

$\Leftrightarrow x\in A\to\langle x,x\rangle\in S$.

$\Leftrightarrow$ S是自反的.

$$\langle a,b\rangle\in S \Leftrightarrow (\exists c)(\langle a,c\rangle\in R\wedge\langle c,b\rangle\in R)$$

$$\Leftrightarrow (\exists c)(\langle c,a\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R)$$

$$\Leftrightarrow \langle b,a\rangle\in S$$

故S是对称的.

$$\langle x,z\rangle\in S\wedge\langle z,y\rangle\in S$$

$$\Leftrightarrow (\exists c)(xRc\wedge cRz)\wedge(\exists d)(zRd\wedge dRy)$$

$$\Leftrightarrow (\exists c)(\exists d)(xRc\wedge cRz\wedge zRd\wedge dRy)$$

$$\Leftrightarrow (\exists c)(\exists d)(xRc\wedge cRd\wedge dRy)$$

$$\Leftrightarrow (\exists d)(xRd\wedge dRy)$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in S$$

故S是传递的.

综上，S是等价关系

35 Pf: $x\in Z_+\wedge y\in Z_+$

$$\Rightarrow xy=xy$$

$$\Leftrightarrow \langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

故R是自反的

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R$$

$$\Leftrightarrow xv=yu$$

$$\Leftrightarrow uy=vx$$

$$\Leftrightarrow \langle\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

故R是对称的

$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,z\rangle\rangle\in R\wedge\langle\langle u,z\rangle,\langle p,q\rangle\rangle\in R$

$\Leftrightarrow xz=yu\wedge uq=zp\wedge(x,y,u,z,p,q\in Z_+)$

$\Leftrightarrow xzuq=yuzp\wedge(x,y,u,z,p,q\in Z_+)$

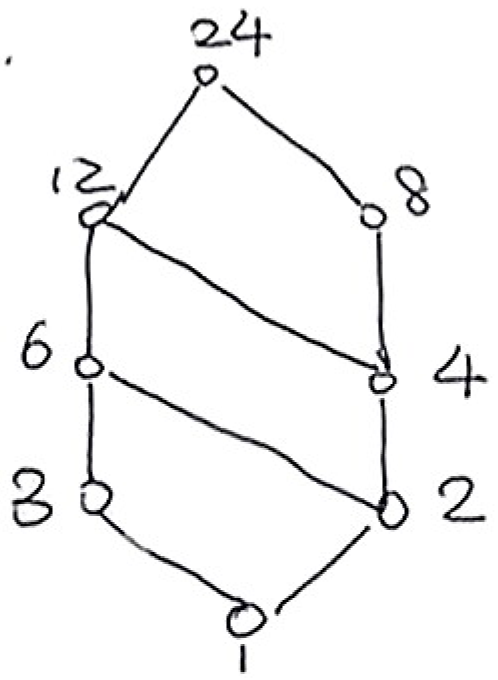
$\Leftrightarrow xq=yp\wedge(x,y,p,q\in Z_+)$

$\Leftrightarrow\langle\langle x,y\rangle,\langle p,q\rangle\rangle\in R$

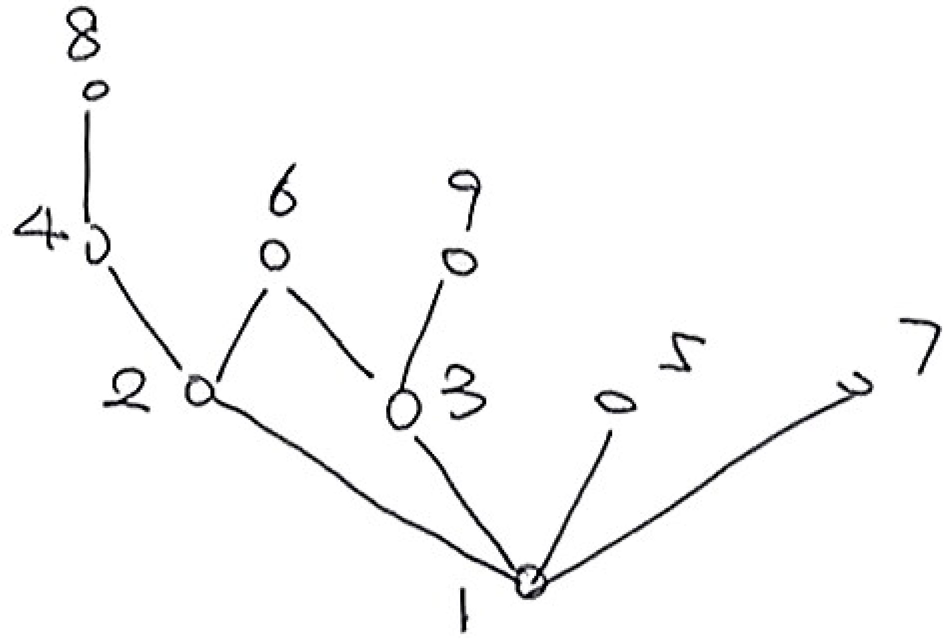
故R是传递的

综上R是等价关系.

39.



(1)



(2)

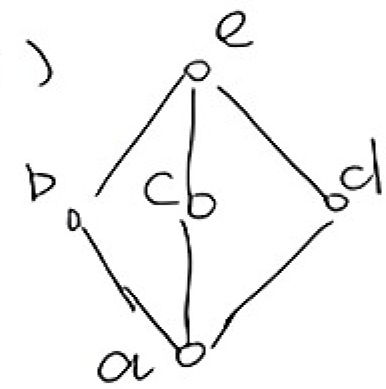
40.(1) $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$B=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,f\rangle,$
$\langle a,g\rangle,\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle c,g\rangle,$
$\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,$
$\langle f,f\rangle,\langle g,g\rangle\}.$

(2) $A=\{a,b,c,d,e,f\}$

$B=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,$
$\langle f,f\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle$
$\langle a,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle\}$

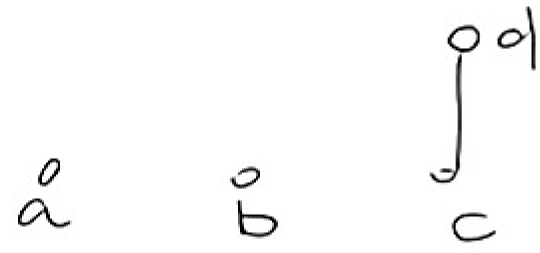
41.(1)



极大元：e 极小元：a

最大元：e 最小元：a

(2)



极大元：a, b, d

极小元：a, b, c

最大元&最小元：无

42. T的下界，下确界均为1

T的上界为：$n\,\mathrm{LCM}\{1,2,\cdots,10\},\ n\in Z_+$

$= n\cdot 2520,\ n\in Z_+$

T的上确界为：2520

43. $B\times B = E_B$ 为B上全关系、

由于R是偏序关系，R是自反、反对称和传递的.

R是自反的 ∧ $B\times B$ 为全关系

$\Leftrightarrow (x\in A \rightarrow \langle x,x\rangle \in R) \wedge (x\in B \rightarrow \langle x,x\rangle \in E_B)$

$\Rightarrow (x\in B \rightarrow \langle x,x\rangle \in R) \wedge (x\in B \rightarrow \langle x,x\rangle \in E_B)$

$\Leftrightarrow x\in B \rightarrow \langle x,x\rangle \in R \wedge \langle x,x\rangle \in E_B$

$\Leftrightarrow x\in B \rightarrow \langle x,x\rangle \in R\cap E_B$

$\Leftrightarrow R\cap E_B$ 是自反的.

在 $a \neq b$ 时

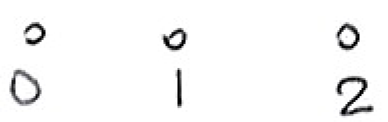
$$\langle a,b\rangle \in R\cap E_B \Leftrightarrow \langle a,b\rangle \in R \wedge \langle a,b\rangle \in E_B$$
$$\Rightarrow \langle b,a\rangle \notin R$$
$$\Rightarrow \langle b,a\rangle \notin R\cap E_B.$$

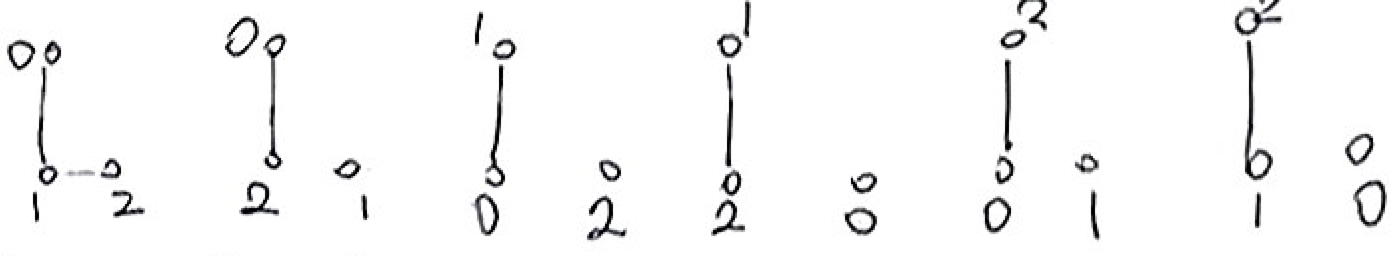
故 $R\cap E_B$ 是反对称的.

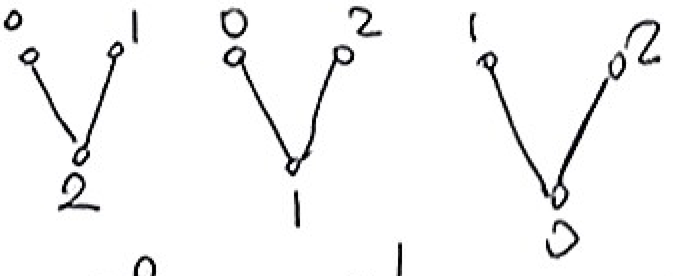
$$\langle a,b\rangle \in R\cap E_B \wedge \langle b,c\rangle \in R\cap E_B$$
$$\Rightarrow \langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in R \wedge (a,b,c\in B)$$
$$\Rightarrow \langle a,c\rangle \in R \wedge a,c\in B$$
$$\Rightarrow \langle a,c\rangle \in R \wedge \langle a,c\rangle \in E_B$$
$$\Leftrightarrow \langle a,c\rangle \in R\cap E_B$$

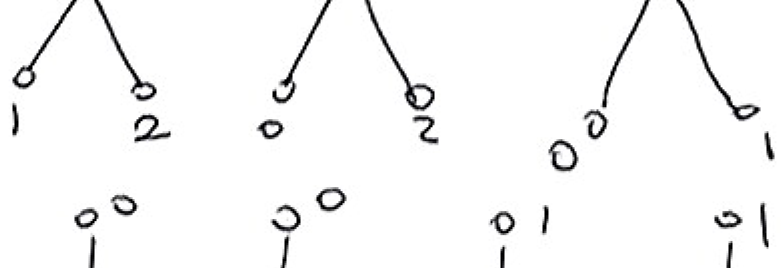
故 $R\cap E_B$ 是传递的.

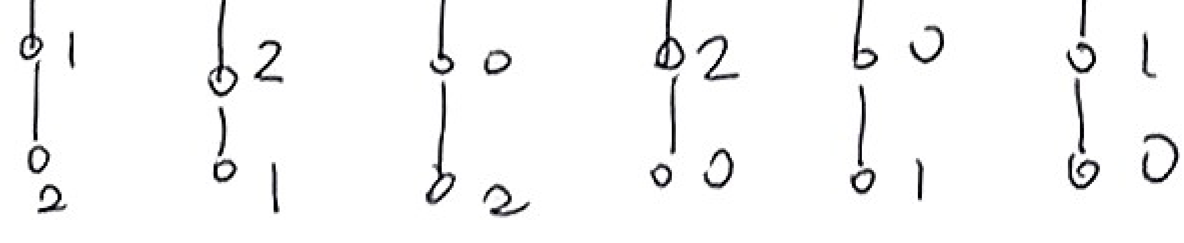
综上，$R\cap (B\times B)$ 是 B 上的偏序关系

45. ①  共1种

②  共6种

③  共3种

④  共3种

⑤  共6种