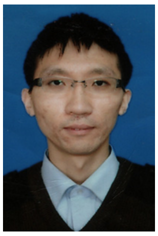
DOI:10.16182/j.cnki.joss.2009.20.059

一类多旅行商问题的计算及仿真分析

王大志，汪定伟，闫　杨
（东北大学系统工程研究所，沈阳 110004）



摘　要：旅行售货商问题(TSP)是组合优化领域的经典问题之一，**而考虑多个旅行商的多旅行商问题**(MTSP)是经典的旅行商问题的扩展。多旅行商问题的特点使其符合许多实际问题，并且通过对多旅行商问题加入约束条件可以使其转化为车辆选择问题(VRPs)。针对一类特殊的 MTSP 问题**采用 Lin-Kernighan 算法**进行求解分析，并在此基础之上**针对访问城市数目均衡**的多旅行商问题**采用两阶段方法**进行求解，计算仿真结果是令人满意的。

关键词：旅行商问题；多旅行商问题；Lin-Kernighan 算法；两阶段方法
中图分类号：TP18　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1004-731X (2009) 20-6378-04

Computation and Simulation Analysis of a Kind of Multiple Traveling Salesman problem

WANG Da-zhi, *WANG Ding-wei*, *YAN Yang*
(Institute of Systems Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: Traveling salesman problem is one of the classical problems in Combinatorial Optimization, and the *multiple traveling salesman problem* (MTSP) is a generalization of the well-known traveling salesman problem (TSP), where more than *one salesman is allowed* to be used in the solution. Moreover, the characteristics of the MTSP seem more appropriate for real-life applications, and it is also possible to extend the problem to a wide variety of vehicle routing problems (VRPs) by incorporating some additional side constraints. Although there exists a wide body of the literature for the TSP and the VRP, the MTSP has not received the same amount of attention. A special case of multiple traveling salesman problem was calculated by *adopting Lin-Kernighan algorithm*, then *a two stage procedure was applied* in order to make sure that *the number of cities each traveling salesman visited are the same* and the total tour length is minimized. The calculation and simulation results are satisfactory.

Key words: TSP; multiple traveling salesman problem; Lin-Kernighan algorithm; two stage procedure

引　言

旅行商问题(TSP)是组合优化领域的经典 NP 难问题之一，由于其描述简单但求解困难，一直以来被众多学者广为研究。经过几十年的发展，TSP 问题已经取得了相当的进展，一些高效算法，包括分支定界算法、局域搜索算法、模拟退火、禁忌搜索以及进化计算等被引入用来解决 TSP 问题[1,2]。通常可以将 TSP 问题分为对称模型[3](Symmetric-MTSP)和非对称模型[4](Asymmetric-MTSP)。

多旅行商问题(MTSP)是对旅行商问题的推广，是一类具有较强的实际背景的组合最优化问题，许多实际问题都可以用 MTSP 进行描述。例如，印刷过程中的调度问题[5]；人员调度问题[6]；校车行驶路径问题[7]；访谈调度问题[8]；航路规划[9,10]；钢铁企业的板坯轧制计划问题[11]。Betkas[12]对MTSP 问题的表述以及求解方法进行了详细综述。

本文将探讨了 MTSP 问题中一类具有特殊性的问题，即出发城市不确定，并且每个旅行商不需要回到各自出发城市的 MTSP 问题。此类问题不仅有理论意义，而且有着广泛应用背景（如钢铁企业的板坯轧制计划问题）。对此类 MTSP 问题进行求解时，由于其涉及到了分组与排序问题，因而相比 TSP 问题具有更大的难度。

1　问题描述

本文研究的 MTSP 问题可描述为：给定 N 个城市、M 个旅行商以及城市间的距离矩阵 $D_{ij}=(d_{ij})_{n\times n}$，每个旅行商访问一定数量的城市，求使 M 条路径的总和最短的访问次序，并且要求所有的城市被访问到，每个城市仅能被一个旅行商访问，每个旅行商至少访问两个城市、且不需要回到各自出发城市。

在 MTSP 问题中，若 $d_{ij}=d_{ji}$，$\forall i,j(i\neq j)$ 成立，则称为对称 MTSP 问题(Symmetric-MTSP);否则称为非对称 MTSP 问题(Asymmetric-MTSP)。

对称 MTSP 问题的数学模型可以描述如下：

$$\text{Min}\ \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_j-1} d_{\pi_j(i),\pi_j(i+1)} \tag{1}$$

收稿日期：2008-03-12　　**修回日期：**2008-07-16
基金项目：国家自然科学基金重点项目(7043100)；国家自然科学基金创新群体项目(60521003)；国家科技支撑计划项目(2006BAH02A09)
作者简介：王大志(1978-)，男，辽宁省沈阳人，博士生，研究方向为进化计算及其应用，建模与仿真，启发式算法设计等；汪定伟(1948-)，男，江西彭泽人，博士，教授，博导，研究方向为电子商务中的建模与优化，智能优化算法等；闫杨(1982-)，女，辽宁抚顺人，博士生，研究方向为动态进化计算，动态进化调度，调度理论等。

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{M} n_i = N \tag{2}$$

$$n_i \geq 2 \tag{3}$$

$$s_i = \{j \mid X_{ij} = 1\} \tag{4}$$

$$\pi_j(i) \in S_i \qquad \forall i, j \tag{5}$$

$$X_{ij} = \{0,1\} \tag{6}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第}i\text{个旅行商选择城市}j \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{M} X_{ij} = 1, \ \forall j \tag{8}$$

N 为城市数目；M 为旅行商数目；n_i 代表每个旅行商访问的城市数目；S_i 表示第 i 个旅行商访问城市的集合；$\pi_j(i)$ 表示第 j 个旅行商第 i 步访问的城市。类似，对于非对称 MTSP 问题的数学描述只需要把目标函数变为

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_i} d_{\pi_j(i),\pi_j(i+1)} \text{，且 } \pi_j(1) = \pi_j(n_i) \text{。}$$

2 求解策略及优化算法

2.1 求解策略

此类问题的求解可通过添加虚拟节点的方法进行求解[11]。例如以城市数为 13，旅行商数为 3 的 MTSP 问题，一个可行解为：第一个旅行商访问次序为（1,13,7,5,8）；第二个旅行商访问次序为（2,12,9）；第三个旅行商访问次序为（11,6,3,10,4）。添加三个虚拟节点城市 14、15、16，使得虚拟节点到各城市节点间的距离为零，虚拟节点城市间距离为无穷大，这样原 MTSP 问题就转化为具有 16 个城市的 TSP 问题。相对应的解为（1,13,7,5,8,14,2,12,9,15,11,6,3,10,4,16）。

2.2 优化算法

解决 TSP 问题的优化算法可分为精确算法和近似算法。对于规模较大的问题宜采用近似算法求解，包括近邻法、最近插入法、最远插入法等。近似算法中还包括 2-opt、3-opt、k-opt 以及 Lin-Kernighan[13]法，旨在进行局部优化的局部搜索算法。目前最好的局部搜索过程是 Lin-Kernighan 算法[14]。该算法细化了 k-opt 策略，并且容许 k 从一次迭代到另一次迭代是变化的。大量的计算结果表明 Lin-Kernighan 算法具有非常高的执行效率，可以在较短的时间内求得满意的优化解。比如 Lin-Kernighan 算法能在不到 1 小时计算时间内，求得 100 万个城市 TSP 问题的近似最优解（与最优解仅差 2%）[14]。

3 计算仿真分析

本文选取了 TSPLIB 上 Symmetric-TSP（bier12 7、ts225、rat783）和 Asymmetric-TSP（kro124p、ftv170、rbg443）的 6 个实例进行计算分析，并设定旅行商数目 M 分别为 3、5、7。计算结果如表 1 所示。

表 1　旅行商数目分别为 3、5、7 的计算结果

问题名称	规模	M=3	M=5	M=7
bier127(对称 MTSP)	127	95592	87562	80283
ts225(对称 MTSP)	225	117960	113562	110656
rat783(对称 MTSP)	783	8708	8650	8597
kro124p(非对称 MTSP)	100	33655	32247	30915
Ftv170(非对称 MTSP)	171	2498	2368	2272
rbg443(非对称 MTSP)	443	2621	2555	2489

以 rat783 为例，当旅行商数目 M 为 7 时，经过计算得出的 MTSP 问题的优化路径长度为 8597，每个旅行商的行走路线如图 1 所示。而各旅行商所经过的城市数目分别为 2、27、32、59、147、198、318。

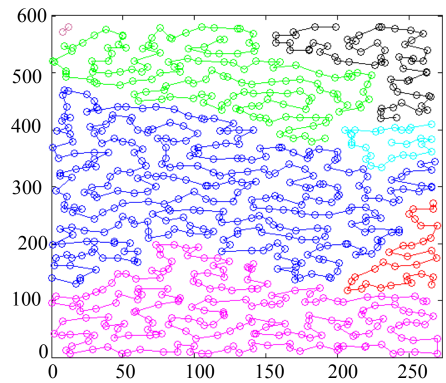


图 1　rat783,M=7 非均衡时的优化路径

以上是在不考虑各旅行商所经过的城市数目均衡的条件下求得的优化结果，而在一些实际问题中往往要求各旅行商所经过的城市数目满足均衡。此类问题可归结为多目标优化问题[15]，即在满足各旅行商所经过的路径总和最短的情况下，尽量要求各旅行商所经过的城市数目均衡，即新加入了优化目标— $Min\{\max(n_i) - \min(n_i)\}$，这给已经十分复杂的问题带来了更大的求解难度，尤其是针对大规模问题而言。由于要优化的目标超过一个且需要同时处理，并且二者之间常常会出现冲突，在此情况之下如何快速、高效地求得问题的一个“折中解”就显得为重要。针对此类问题本文采取如下两阶段解决办法：

(1) 在不考虑均衡的条件下，通过 Lin-Kernighan 算法求得 MTSP 问题的优化解。 然后在求得的 MTSP 巡游路径中去掉虚拟城市且同时保留原来的访问次序，这样就得到了 TSP 问题的一个解（巡游路径）。在此路径中删去 M 条边，且尽量满足任何被删去的相邻的边之间的城市数目相等以及被删除的 M 条边的和为最大。其目的是在尽量保留 MTSP 问题路径最优的情况下，同时寻找满足均衡这一目标的解。经过此阶段计算后各实例的计算结果如表 2 所示。

(2) 经过上一阶段计算后，每一个旅行商所经过的城市就被确定下来。然后再根据每个旅行商所要访问的城市再次使用 Lin-Kernighan 算法进行 TSP 路径优化，以获得各旅行商的最终优化路径。

表 2 旅行商数目分别为 3、5、7 的计算结果（考虑任务均衡）

名称	规模	M=3	M=5	M=7
bier127(对称 MTSP)	127	109272	135931	119947
ts225(对称 MTSP)	225	132637	138981	150792
rat783(对称 MTSP)	783	9206	9982	9727
kro124p(非对称 MTSP)	100	37398	39222	37773
Ftv170(非对称 MTSP)	171	3008	2875	2813
rbg443(非对称 MTSP)	443	2637	2645	2602

下面以城市数目 N=13，旅行商 M=3 为例说明两阶段方法。假设已经找到的 MTSP 的优化路径为（1,13,7,5,8,14,2,12,9,15,11,6,3,10,4,16），这是一个带有虚拟城市节点的 MTSP 路径，如图 2 所示。然后删除虚拟节点 14,15,16，转变为一条 TSP 路径，如图 3 所示。接着进行删边操作，以满足各旅行商经过城市数目均衡。例如删除边（1,13）、（8,2）、（11,6）以后，三个旅行商所经过城市数目分别为 4、4、5，如图 4 所示。为了找到和最大的 M 条边，此步骤需要重复进行[N/M]次。以上得到的结果能够很好地满足均衡目标，但是随着删边操作的进行，原来各旅行商的访问路径被打破，这样就又导致了路径优化这一目标难以得到保证，实际计算也证明了这一现象，见表 2 数据。所以接着还需要对各自旅行商的巡游路径进行第二次的 TSP 路径优化，以最终确定各旅行商的行走路径。

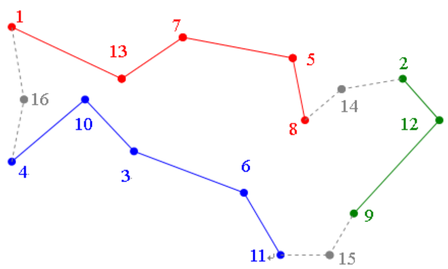


图 2 MTSP 优化路径（N=13、M=3）

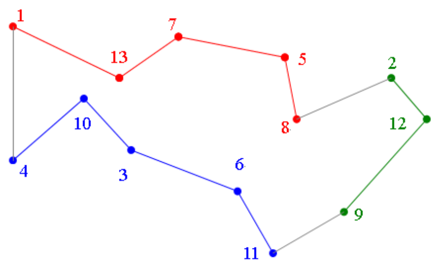


图 3 rat7 删除虚拟节点后变为一条 TSP 路径

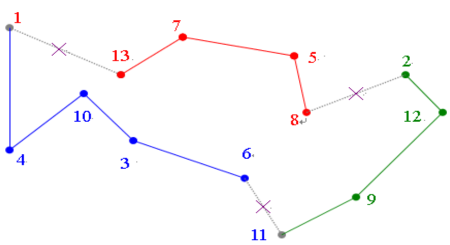


图 4 删边操作后的 MTSP 路径

为了验证两阶段方法，分别针对 TSPLIB 中 rat783 和 rbg443 进行了计算。对于 rat783，当 M=7 时，通过第一阶段方法得出的路径长度为 9727。优化后的解中有 1 个旅行商经过城市数目为 111，其余 6 个经过城市数目均为 112，这样就达到了均衡的目的。每个旅行商的行走路线如图 5 所示。通过图形可以发现，个别旅行商的路径还可以进一步优化，以消除长边的存在。在进行第二阶段优化之后，一部分旅行商的巡游路径被更新，取而代之的是更加优化的巡游路径，此时总的路径长度为 8947，与不要求均衡时的优化路径(8597)偏差 δ%=4.07%。但相比第一阶段之后的路径长度(9727)优化效果明显提高，各旅行商的巡游路径如图 6 所示。

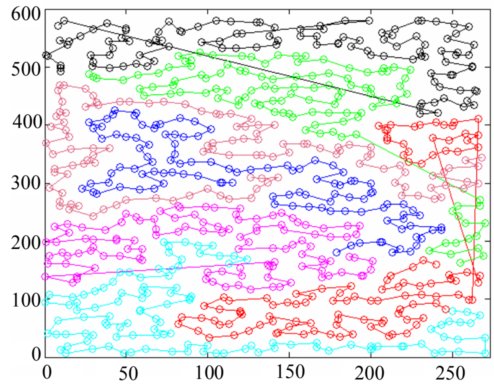


图 5 rat783,M=7 经过第一阶段处理后的优化路径

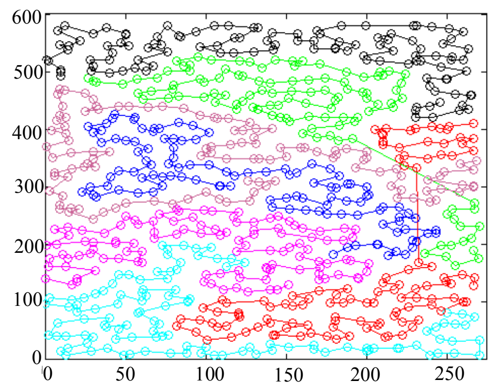


图 6 rat783 经过第二阶段处理后的优化路径

对于 rbg443 问题，采用两阶段方法优化后的最终路径长度为 2507。这与非均衡的优化路径 2498 非常接近，路径偏差 δ%=0.36%同时又满足了均衡目标。各旅行商行走路径如下：

旅行商 1 行走路径：286、203、177、423、158、24、275、374、138、410、191、105、47、161、85、56、13、42、205、223、310、258、99、306、265、256、221、91、368、355、334、341、276、50、313、307、152、86、305、201、111、297、227、434、429、382、151、77、30、199、141、211、119、350、333、364、407、390、427、308、226、332、433、79。

旅行商 2 行走路径：417、383、262、362、279、272、130、142、300、155、110、219、93、75、254、208、269、235、348、249、17、185、147、18、88、153、218、90、346、63、 406、252、123、395、16、202、370、114、148、82、179、44、80、298、193、287、162、139、38、435、415、316、168、62、237、283、241、375、369、413、388、400、321。

旅行商 3 行走路径：342、260、46、389、325、207、387、295、215、41、361、169、289、274、52、22、186、403、340、266、257、64、426、233、121、 21、351、253、143、98、89、171、113、5、2、200、81、372、302、243、232、165、4、353、285、248、166、420、273、14、3、376、440、115、418、391、278、397、443、393、70、430、36。

旅行商 4 行走路径：54、28、164、280、416、129、140、189、187、172、327、294、180、127、59、404、366、128、55、354、398、356、296、220、442、438、437、197、213、411、384、301、25、290、270、133、 58、137、247、194、122、281、15、367、277、102、231、107、60、436、409、170、176、385、267、264、263、441、394、245、425、71、32。

旅行商 5 行走路径：67、45、326、358、259、192、9、84、271、345、318、94、97、72、323、216、412、31、34、1、11、132、6、405、312、239、174、108、431、419、359、167、125、240、408、336、357、101、222、120、339、210、117、402、381、379、288、255、27、217、96、329、73、19、103、159、106、303、432、414、33、344、392、23。

旅行商 6 行走路径：37、371、293、250、238、39、373、190、87、396、136、204、100、401、145、377、314、182、173、184、69、51、386、212、49、104、160、10、150、149、304、154、157、335、244、292、242、40、163、95、229、209、230、234、352、134、43、360、422、439、421、112、330、74、331、315、309、291、261、343、284、48、144。

旅行商 7 行走路径：198、35、181、65、76、428、424、29、195、92、225、228、337、61、68、268、131、378、320、214、78、135、363、380、224、118、83、246、175、399、365、299、251、324、322、124、7、66、26、8、236、20、178、349、347、319、317、328、311、146、282、206、126、53、12、338、116、196、183、57、188、156、109。

对于 rat783，$M=7$，在第二种情况下总路径长度为 9792，各旅行商的巡游路径如图 7 所示，各旅行商的 TSP 路径长度分别为：1269、1285、1376、1599、1588、1340、1335。

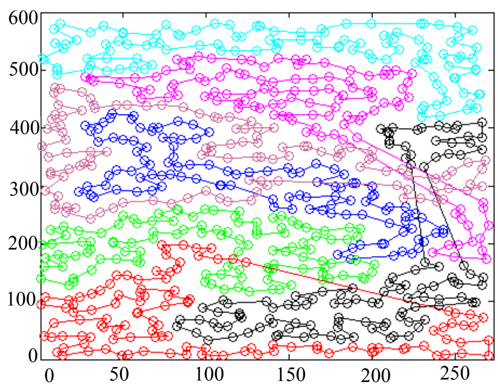


图 7 rat783 第二种情况优化路径

4 结论

由于多虑行商问题具有较强的理论研究价值和实际背景，因而受到了广泛的关注。本文对一类特殊的 MTSP 问题采用 Lin-Kernighan 算法求解。针对要求各旅行商访问城市数目均衡的问题，采用两阶段方法进行求解。计算中的实例全部来自 TSPLIB，包括了其中的对称与非对称问题。对于不考虑均衡的 MTSP 问题，Lin-Kernighan 算法能有效地求得一个优化解，而对于要求均衡的问题，只要在原问题的基础之上采取两阶段方法，同样也能高效地求得一个满意优化解。

参考文献:

[1] 马良. 旅行推销员问题的算法综述[J]. 数学的实践与认识, 2000, 30(2): 156-165.

[2] 严晨, 王直杰. 基于改进型能量函数和瞬态混沌神经网络的 TSP 问题研究[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(5): 1402-1405. (Yan Chen, Wang Zhijie. Study on the TSP Based on an Improved Energy Function and Transiently Chaotic Neural Network Model [J]. Journal of System Simulation (S1004-731X), 2006, 18(5): 1402-1405.)

[3] Balachandar S R, Kannan K. Randomized gravitational emulation search algorithm for symmetric traveling salesman problem [J]. Applied Mathematics and Computation (S0096-3003), 2007, 192(2): 413-421.

[4] Righini G, Trubian M. A note on the approximation of the asymmetric traveling salesman problem [J]. European Journal of Operational Research (S0377-22177), 2004, 153(1): 255-265.

[5] Gorenstein S. Printing press scheduling for multi-edition periodicals [J]. Management Science (S1526-5501), 1970, 16(6): 373-383.

[6] Zhang T, Gruver W A, Smith M H. Team scheduling by genetic search [C]// Proceedings of the second international conference on intelligent processing and manufacturing of materials, 1999. Hawaii, USA: IEEE, 1999, (2): 839-844.

[7] Angel R D, Caudle W L, Noonan R, Whinston A. Computer assisted school bus scheduling [J]. Management Science (S1526-5501), 1972, 18(6): 279-288.

[8] Gilbert K C, Hofstra R B. A new multiperiod multiple traveling salesman problem with heuristic and application to a scheduling problem [J]. Decision Sciences (S0011-7315), 1992, 23(1): 250-259.

[9] Brummit B, Stentz A. Dynamic mission planning for multiple mobile robots [C]// IEEE international conference on robotics and automation, 1996. USA: IEEE, 1996, (3): 2396-2401.

[10] Yu Z, Jinhai L, Guochang G, Rubo Z, Haiyan Y. An implementation of evolutionary computation for path planning of cooperative mobile robots [C]// Proceedings of the fourth world congress on intelligent control and automation, Shanghai, China, 2002. USA: IEEE, 2002, (3): 1798-1802.

[11] Tang L X, Liu J Y, Rong A Y, Yang Z H. A multiple traveling salesman problem model for hot rolling scheduling in Shanghai Baoshan Iron and Steel Complex [J]. European Journal of Operational Research (S0377-22177), 2000, 124(2): 267-282.

[12] Bektas T. The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures [J]. Omega (S0030-2228), 2006, 34(3): 209-219.

[13] Lin S, Kernighan B W. Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem [J]. Operation Research (S1526-5463), 1973, 21(2): 498-516.

[14] Michalewicz Z, Fogel D B. How to Solve It: Modern Heuristics [M]. Beijing, China: China Waterpower Press, 2003.