分块算法及简单扩展

1600012905 黄哲威 1600012775 庄博尔

Peking University

2017 年 5 月 1 日

可能涉及的几个词语解释

1. 区间：数列中连续一段的元素
2. 区间操作：将某个区间 $[a, b]$ 的所有元素进行某种改动的操作
3. 块：我们将数列划分成若干个不相交的区间，每个区间称为一个块
4. **整块**：在一个区间操作时，完整包含于区间的块
5. **不完整的块**：在一个区间操作时，只有部分包含于区间的块，即区间左右端点所在的两个块

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，单点查值。**

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，单点查值。**
- 以下默认 n 是 10^5 级别的数。
- 这是一道能用许多数据结构优化的经典题，可以用于不同数据结构训练。比如线段树：只要操作与询问满足区间信息能够快速合并，直接用线段树就能达到比分块更优的复杂度。
- 让我们来熟悉一下：数列分块就是把数列中每 m 个元素打包起来，达到优化算法的目的。

- 以此题为例，如果我们把每 m 个元素分为一块，共有 $\frac{n}{m}$ 块，每次**区间加的操作会涉及 $O(\frac{n}{m})$ 个整块，以及区间两侧两个不完整的块中至多 $2m$ 个元素。**
- 我们给每个块设置一个加法标记（就是记录这个块中元素一起加了多少），每次操作对每个整块直接 $O(1)$ 标记，而不完整的块由于元素比较少，暴力修改元素的值。
- 每次询问时返回元素的值加上其所在块的加法标记。

- 以此题为例，如果我们把每 m 个元素分为一块，共有 $\frac{n}{m}$ 块，每次**区间加的操作会涉及 $O(\frac{n}{m})$ 个整块，以及区间两侧两个不完整的块中至多 $2m$ 个元素。**
- 我们给每个块设置一个加法标记（就是记录这个块中元素一起加了多少），每次操作对每个整块直接 $O(1)$ 标记，而不完整的块由于元素比较少，暴力修改元素的值。
- 每次询问时返回元素的值加上其所在块的加法标记。
- 这样的总复杂度是 $O(n\frac{n}{m}+nm)$，根据均值不等式，$n\frac{n}{m}+nm \geq 2n\sqrt{n}$，当 m 取 $\sqrt{n}$ 时取等，总复杂度最低。

1 例题

- 给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，询问区间内小于某个值 x 的元素个数。

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，询问区间内小于某个值 x 的元素个数。**
- 有了上一题的经验，我们可以发现，数列简单分块问题实际上有三项东西要我们思考，对于每次区间操作：
  1. **不完整的块**的 $O(\sqrt{n})$ 个元素怎么处理？

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，询问区间内小于某个值 x 的元素个数。**
- 有了上一题的经验，我们可以发现，数列简单分块问题实际上有三项东西要我们思考，对于每次区间操作：
  1. **不完整的块**的 $O(\sqrt{n})$ 个元素怎么处理?
  2. $O(\sqrt{n})$ 个**整块**怎么处理?

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，询问区间内小于某个值 x 的元素个数。**
- 有了上一题的经验，我们可以发现，数列简单分块问题实际上有三项东西要我们思考，对于每次区间操作：
  1. **不完整的块**的 $O(\sqrt{n})$ 个元素怎么处理?
  2. $O(\sqrt{n})$ 个**整块**怎么处理?
  3. 要预处理什么信息（复杂度不能超过后面的操作)?

- 我们先来思考只有询问操作的情况
    1. 不完整的块枚举统计即可
    2. 要在每个整块内寻找小于 x 的元素数量：**不得不**要求块内元素是有序的，这样就能使用二分法对块内查询，需要预处理时每块做一遍排序，复杂度 $O(n\log\frac{n}{m})$，每次查询在 $\frac{n}{m}$ 个块内二分，以及暴力 $2m$ 个元素。
- 复杂度是 $O(n\frac{n}{m}\log\frac{n}{m}+nm)$
- 如果 $m=\sqrt{n}$ 的话，总复杂度是 $O(n\sqrt{n}\log n)$，实际测试时 $m=2\sqrt{n}$ 的效果要好一点。

分块的调试检测技巧

- 一般来说，m 的取值有这么几种：$C \cdot \sqrt{n}$，$C \cdot \sqrt{n}/logn$，其中 $C = \{0.5, 1, 2, 3\}$。
- 可以生成一些大数据，然后用两份分块大小不同的代码来对拍，还可以根据运行时间尝试调整分块大小，减小常数。

- 那么区间加怎么办呢?

- 那么区间加怎么办呢?
- 套用第一题的方法，维护一个加法标记 tag，略有区别的地方在于，不完整的块修改后可能会使得该块内数字乱序，所以头尾两个不完整块需要重新排序，复杂度分析略。
- 在加法标记下的询问操作，块外还是暴力，查询小于 $x-tag$ 的元素个数，块内用 $x-tag$ 作为二分的值即可。
- 总复杂度依旧是 $O(n\sqrt{n}\log n)$

- 给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，询问区间内小于某个值 x 的前驱（比其小的最大元素）。

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，询问区间内小于某个值 x 的前驱（比其小的最大元素）。**
- 接着第二题的解法，其实只要把块内查询的二分稍作修改即可。
- 这题其实有一个启发意义：可以在块内维护其它结构使其更具有拓展性，比如放一个 *set*，这样如果还有插入、删除元素的操作，会更加的方便。
- 时间复杂度不变。代码复杂度降低不少。

1 例题

- 给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，区间求和。

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间加法，区间求和。**
- 这题的询问变成了区间上的询问：不完整的块还是暴力；而要想快速统计完整块的答案，需要维护每个块的元素和，要预处理一下。
- 考虑区间修改操作，不完整的块直接改，顺便更新块的元素和；完整的块类似之前标记的做法，直接根据块的元素和所加的值计算元素和的增量。
- 当然线段树可以直接做。

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间开方，区间求和。**

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间开方，区间求和。**
- 稍作思考可以发现，开方操作比较棘手，主要是对于整块开方时，必须要知道每一个元素，才能知道他们开方后的和，也就是说，难以快速对一个块信息进行更新。
- 看来我们要另辟蹊径。不难发现，这题的修改就只有下取整开方，而一个数经过几次开方之后，它的值就会变成 0 或者 1。

- 如果每次区间开方只不涉及完整的块，意味着不超过 $2\sqrt{n}$ 个元素，直接暴力即可。
- 如果涉及了一些完整的块，这些块经过几次操作以后就会都变成 0/1，于是我们采取一种分块优化的暴力做法，只要每个整块暴力开方后，记录一下元素是否都变成了 0/1，区间修改时跳过那些全为 0/1 的块即可。
- 这样每个元素至多被开方不超过 4 次，显然复杂度没有问题。
- 当然线段树可以直接做。

1 例题

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及单点插入，单点询问，数据随机生成。**

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及单点插入，单点询问，数据随机生成。**
- 先说随机数据的情况
- 之前提到过，如果我们块内用数组以外的数据结构，能够支持其它不一样的操作，比如此题每块内可以放一个动态的数组，每次插入时先找到位置所在的块，再暴力插入，把块内的其它元素直接向后移动一位，当然用链表也是可以的。
- 查询的时候类似，复杂度分析略。

- 但是这样做有个问题，如果数据不随机怎么办?

- **但是这样做有个问题，如果数据不随机怎么办?**
- 如果先在一个块有大量单点插入，这个块的大小会大大超过 $\sqrt{n}$，那块内的暴力就没有复杂度保证了。
- 还需要引入一个操作：重新分块（重构）
- 每根号 n 次插入后，重新把数列平均分一下块，重构需要的复杂度为 $O(n)$，重构的次数为 $\sqrt{n}$，所以重构的复杂度没有问题，而且保证了每个块的大小相对均衡。
- 当然，也可以当某个块过大时重构，或者只把这个块分成两半。
- 当然 Splay 可以直接做。

1 例题

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间乘法，区间加法，单点询问。**

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间乘法，区间加法，单点询问。**
- 很显然，如果只有区间乘法，和分块入门 1 的做法没有本质区别，但要思考如何同时维护两种标记。
- 我们让乘法标记的优先级高于加法（如果反过来的话，新的加法标记无法处理）
- 若当前的一个块乘以 m_1 后加上 a_1，这时进行一个乘 m_2 的操作，则原来的标记变成 (m_1m_2, a_1m_2)
- 若当前的一个块乘以 m_1 后加上 a_1，这时进行一个加 a_2 的操作，则原来的标记变成 $(m_1, a_1 + a_2)$
- 当然线段树可以直接做。

1 例题

- 给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间询问等于一个数 c 的元素，并将这个区间的所有元素改为 c。

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及区间询问等于一个数 c 的元素，并将这个区间的所有元素改为 c。**
- 区间修改没有什么难度，这题难在区间查询比较奇怪，因为权值种类比较多，似乎没有什么好的维护方法。
- 模拟一些数据可以发现，询问后一整段都会被修改，几次询问后数列可能只剩下几段不同的区间了。类似刚才开根号那题。
- 我们思考这样一个暴力，还是分块，维护每个块是否只有一种权值，区间操作的时候，对于同权值的一个块就 $O(1)$ 统计答案，否则暴力统计答案，并修改标记，不完整的块也暴力。

- 这样看似最差情况每次都会耗费 $O(n)$ 的时间，但其实可以这样分析：
- 假设初始序列都是同一个值，那么查询是 $O(\sqrt{n})$
- 如果这时进行一个区间操作，它最多破坏首尾 2 个块的标记，所以只能使后面的询问至多多 2 个块的暴力时间，所以均摊每次操作复杂度还是 $O(\sqrt{n})$。
- 换句话说，要想让一个操作耗费 $O(n)$ 的时间，要先花费 $\sqrt{n}$ 个操作对数列进行修改。
- 初始序列不同值，经过类似分析后，就可以放心的暴力啦。

1 例题

- 给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及询问区间内多少个数出现正偶数次。

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及询问区间内多少个数出现正偶数次。**
- 这是一道类似区间众数的经典题，区间众数可参考 WJMZBMR(膜) 的《区间众数解题报告》。

- **给出一个长为 n 的数列，以及 n 个操作，操作涉及询问区间内多少个数出现正偶数次。**
- 这是一道类似区间众数的经典题，区间众数可参考 WJMZBMR(膜) 的《区间众数解题报告》。

- 所以我们可以预处理 f(i,j) 表示第 i 块到第 j 块的答案（枚举 i 开个桶扫一遍）

- 所以我们可以预处理 f(i,j) 表示第 i 块到第 j 块的答案（枚举 i 开个桶扫一遍）
- 对于一个询问 [l,r]，中间包含在完整块内的数 [x,y] 答案已经得到，考虑不完整的块中每个数对答案的影响

- 所以我们可以预处理 f(i,j) 表示第 i 块到第 j 块的答案（枚举 i 开个桶扫一遍）
- 对于一个询问 [l,r]，中间包含在完整块内的数 [x,y] 答案已经得到，考虑不完整的块中每个数对答案的影响
- 若能快速得出一个数在某个区间内出现次数，每次只要再求 $2\sqrt{n}+1$ 个元素在 [l,r] 和 [x,y] 的出现次数，这题就解决了。

- 所以我们可以预处理 f(i,j) 表示第 i 块到第 j 块的答案（枚举 i 开个桶扫一遍）
- 对于一个询问 [l,r]，中间包含在完整块内的数 [x,y] 答案已经得到，考虑不完整的块中每个数对答案的影响
- 若能快速得出一个数在某个区间内出现次数，每次只要再求 $2\sqrt{n}+1$ 个元素在 [l,r] 和 [x,y] 的出现次数，这题就解决了。
- 由于没有修改，只要离散化以后，给每个数 x 开个 vector，按顺序存下 x 出现的位置，每次询问 x 时把区间的左右端点放进对应 vector 二分一下即可。
- 根据均值不等式，可以算出分块大小大概是 $\sqrt{n/logn}$

1 例题

- 一些信息维护的问题，允许使用离线算法，维护的信息不支持区间的快速合并，比如询问区间内不同数字的个数。

- 一些信息维护的问题，允许使用离线算法，维护的信息不支持区间的快速合并，比如询问区间内不同数字的个数。
- 这类问题是线段树等数据结构难以胜任的，因为区间内不同数字的个数和这些数字具体是什么有关，所以区间合并的复杂度是 $O(n)$ 的（数组维护出现次数，记录不同数字的个数）。

- 一些信息维护的问题，允许使用离线算法，维护的信息不支持区间的快速合并，比如询问区间内不同数字的个数。
- 这类问题是线段树等数据结构难以胜任的，因为区间内不同数字的个数和这些数字具体是什么有关，所以区间合并的复杂度是 $O(n)$ 的（数组维护出现次数，记录不同数字的个数）。
- 但这种问题数据支持单点增量——如果已经有一个包含 $num[l, r-1]$ 的所有数字的出现次数的数组 cnt，不同数字的个数 ans，则只需要令 $cnt[num[r]]+1$，并判断其是否为 1 即可。

- 一些信息维护的问题，允许使用离线算法，维护的信息不支持区间的快速合并，比如询问区间内不同数字的个数。
- 这类问题是线段树等数据结构难以胜任的，因为区间内不同数字的个数和这些数字具体是什么有关，所以区间合并的复杂度是 $O(n)$ 的（数组维护出现次数，记录不同数字的个数）。
- 但这种问题数据支持单点增量——如果已经有一个包含 $num[l, r-1]$ 的所有数字的出现次数的数组 cnt，不同数字的个数 ans，则只需要令 $cnt[num[r]]+1$，并判断其是否为 1 即可。
- 同理，单点减量也可行。这样的问题适用于莫队算法。

- 莫队算法的核心就是，对于两个询问 [a,b][c,d]

- 莫队算法的核心就是，对于两个询问 [a,b][c,d]
- 设 x 次合并的时间为 $f(x)$，可以以 $f(|a-c|+|b-d|)$ 的时间从 [a,b] 的数据转移到 [c,d]

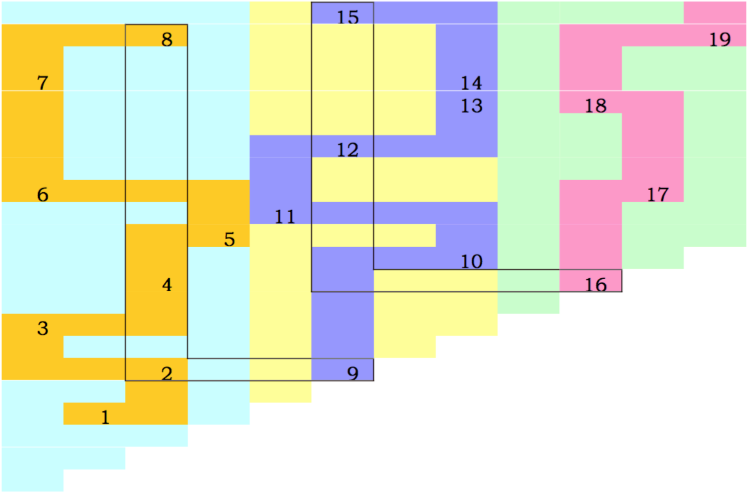
- 莫队算法的核心就是，对于两个询问 [a,b][c,d]
- 设 x 次合并的时间为 $f(x)$，可以以 $f(|a-c|+|b-d|)$ 的时间从 [a,b] 的数据转移到 [c,d]
- 如果把询问看成二维平面上的点，转移的时间与曼哈顿距离有关，按照一定顺序访问这些点，就能回答所有询问

- 莫队算法的核心就是，对于两个询问 [a,b][c,d]
- 设 x 次合并的时间为 $f(x)$，可以以 $f(|a-c|+|b-d|)$ 的时间从 [a,b] 的数据转移到 [c,d]
- 如果把询问看成二维平面上的点，转移的时间与曼哈顿距离有关，按照一定顺序访问这些点，就能回答所有询问
- 先离线所有询问，问题就转为求平面上所有点的最短曼哈顿距离的哈密顿路径

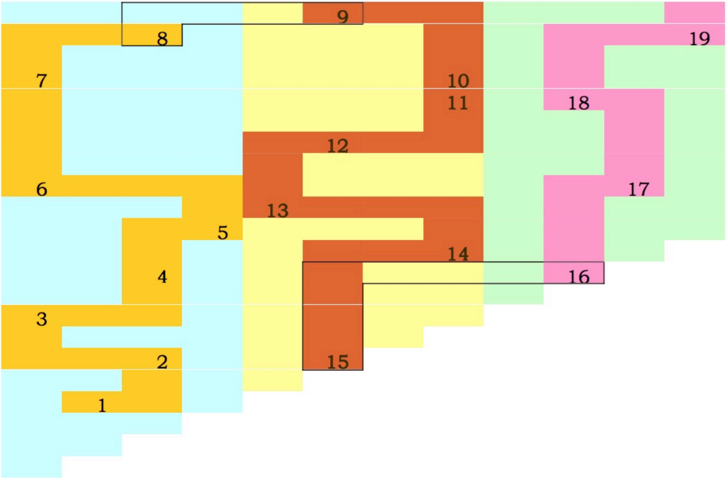
- 莫队算法的核心就是，对于两个询问 [a,b][c,d]
- 设 x 次合并的时间为 $f(x)$，可以以 $f(|a-c|+|b-d|)$ 的时间从 [a,b] 的数据转移到 [c,d]
- 如果把询问看成二维平面上的点，转移的时间与曼哈顿距离有关，按照一定顺序访问这些点，就能回答所有询问
- 先离线所有询问，问题就转为求平面上所有点的最短曼哈顿距离的哈密顿路径
- 这个问题难以解决，但我们可以选择一个替代品：对询问某个端点分块

- 莫队算法的核心就是，对于两个询问 [a,b][c,d]
- 设 x 次合并的时间为 $f(x)$，可以以 $f(|a-c|+|b-d|)$ 的时间从 [a,b] 的数据转移到 [c,d]
- 如果把询问看成二维平面上的点，转移的时间与曼哈顿距离有关，按照一定顺序访问这些点，就能回答所有询问
- 先离线所有询问，问题就转为求平面上所有点的最短曼哈顿距离的哈密顿路径
- 这个问题难以解决，但我们可以选择一个替代品：对询问某个端点分块
- 设块的大小为 H，对每个询问 [a,b] 以 block[a] 为第一关键字，b 为第二关键字

- 莫队算法的核心就是，对于两个询问 [a,b][c,d]
- 设 x 次合并的时间为 $f(x)$，可以以 $f(|a-c|+|b-d|)$ 的时间从 [a,b] 的数据转移到 [c,d]
- 如果把询问看成二维平面上的点，转移的时间与曼哈顿距离有关，按照一定顺序访问这些点，就能回答所有询问
- 先离线所有询问，问题就转为求平面上所有点的最短曼哈顿距离的哈密顿路径
- 这个问题难以解决，但我们可以选择一个替代品：对询问某个端点分块
- 设块的大小为 H，对每个询问 [a,b] 以 block[a] 为第一关键字，b 为第二关键字



- 用另一种颜色表示块内处理路径，框框表示块切换时的路径



- 交替对块的纵坐标升序降序排列，可以优化常数，复杂度分析略

1 例题

- 离线的话有很多做法，这里顺便介绍一种奇怪的分块

- 离线的话有很多做法，这里顺便介绍一种奇怪的分块
- 按询问左端点排序处理，维护右端点在 1-x 的答案

- 离线的话有很多做法，这里顺便介绍一种奇怪的分块
- 按询问左端点排序处理，维护右端点在 1-x 的答案
- 每次考虑删除左端点的元素，若把数列分段，每出现一个和左端点相同的值就划分一段，右端点的答案是一段 +1，一段-1 的...

- 离线的话有很多做法，这里顺便介绍一种奇怪的分块
- 按询问左端点排序处理，维护右端点在 1-x 的答案
- 每次考虑删除左端点的元素，若把数列分段，每出现一个和左端点相同的值就划分一段，右端点的答案是一段 +1，一段-1 的...
- 考虑用树状数组暴力维护，每次复杂度是左端点权值出现次数 * logn

- 离线的话有很多做法，这里顺便介绍一种奇怪的分块
- 按询问左端点排序处理，维护右端点在 1-x 的答案
- 每次考虑删除左端点的元素，若把数列分段，每出现一个和左端点相同的值就划分一段，右端点的答案是一段 +1，一段-1 的...
- 考虑用树状数组暴力维护，每次复杂度是左端点权值出现次数 * logn

- 再考虑优化这个暴力

- 再考虑优化这个暴力
- 以 $M = \sqrt{n}$ 为界，出现次数大于 M 的权值不超过 M 种

- 再考虑优化这个暴力
- 以 $M=\sqrt{n}$ 为界，出现次数大于 M 的权值不超过 M 种
- 出现次数小于 M 的依然用暴力统计答案，由于出现次数少，不会退化

- 再考虑优化这个暴力
- 以 $M = \sqrt{n}$ 为界，出现次数大于 M 的权值不超过 M 种
- 出现次数小于 M 的依然用暴力统计答案，由于出现次数少，不会退化
- 出现次数大于 M 的数，每个数维护一个树状数组，每次询问用这些树状数组得出每个数在区间内的出现次数

- 再考虑优化这个暴力
- 以 $M = \sqrt{n}$ 为界，出现次数大于 M 的权值不超过 M 种
- 出现次数小于 M 的依然用暴力统计答案，由于出现次数少，不会退化
- 出现次数大于 M 的数，每个数维护一个树状数组，每次询问用这些树状数组得出每个数在区间内的出现次数
- 复杂度类似分块

- 再考虑优化这个暴力
- 以 $M = \sqrt{n}$ 为界，出现次数大于 M 的权值不超过 M 种
- 出现次数小于 M 的依然用暴力统计答案，由于出现次数少，不会退化
- 出现次数大于 M 的数，每个数维护一个树状数组，每次询问用这些树状数组得出每个数在区间内的出现次数
- 复杂度类似分块
- 显然用莫队算法可以轻松解决且常数很小

- 序列上的询问可以容易的转为平面上的点，所以比较容易运用莫队算法

- 序列上的询问可以容易的转为平面上的点，所以比较容易运用莫队算法
- 那树上的询问怎么办呢。?

- 序列上的询问可以容易的转为平面上的点，所以比较容易运用莫队算法
- 那树上的询问怎么办呢。?
- 树上的分块，可以用 dfs，并维护一个栈，大致分一下

- 序列上的询问可以容易的转为平面上的点，所以比较容易运用莫队算法
- 那树上的询问怎么办呢。?
- 树上的分块，可以用 dfs，并维护一个栈，大致分一下
- 或者按 dfs 的时间戳来划分，复杂度也是有保证的

- 序列上的询问可以容易的转为平面上的点，所以比较容易运用莫队算法
- 那树上的询问怎么办呢。?
- 树上的分块，可以用 dfs，并维护一个栈，大致分一下
- 或者按 dfs 的时间戳来划分，复杂度也是有保证的
- 然后可以再脑补一下把树上的一条路径一步一步转为另一条路径