

首先，根据已经有数据集来构造用户评分矩阵。数据集如下图

用户	项目	项目评分
1	6	4
2	2	2
6	7	3
2	8	2
8	9	1
5	6	5
4	2	4
⋮	⋮	⋮

可以得到对应的矩阵如下图，横轴是项目，纵轴是用户

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1						4				
2		2						2		
3										
4		4								
5						5				
6							3			
7										
8									1	
9										
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

根据矩阵分解公式 $R \approx PQ^T$ ，可知可以用两个矩阵 P 、 Q^T 乘积来近似表示原矩阵 R 。

则要构造 P 、 Q 矩阵，假定用户有 m 个，项目有 n 个

P :

	1	2	...	k
1				
2				
...				
k				

Q:

1 2 ... k

1、随机初始化 P、Q 矩阵

2、根据 $P_u = P_u - \alpha \frac{\partial L}{\partial P_u}$ 、 $Q_i = Q_i - \alpha \frac{\partial L}{\partial Q_i}$ ，梯度下降来求得更拟合数据的 P、

Q 矩阵

推导:

$$L = \sum_{(i, j) \in \Omega} \frac{1}{2} \sum (r_{ij} - r'_{ij})^2 + \frac{\lambda_i}{2} \|P\|_F^2 + \frac{\lambda_i}{2} \|Q\|_F^2$$

$$= \sum_{(i, j) \in \Omega} \frac{1}{2} \sum (r_{ij} - P_i Q_j^T)^2 + \frac{\lambda_i}{2} \|P\|_F^2 + \frac{\lambda_i}{2} \|Q\|_F^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_i} = -(r_{ij} - P_i Q_j^T) * Q_j^T + \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\frac{\lambda_i}{2} \|P\|_F^2 + \frac{\lambda_i}{2} \|Q\|_F^2 \right)$$

对于某一对指定的 (i, j), $\frac{\lambda_i}{2} \|P\|_F^2 + \frac{\lambda_i}{2} \|Q\|_F^2$ 对 P_i 求导得到

$$\frac{\lambda_i}{2} \|P\|_F^2 + \frac{\lambda_i}{2} \|Q\|_F^2 = \lambda \frac{\partial (P_1 P_1^T + P_2 P_2^T + \dots + P_k P_k^T)}{\partial P_i} +$$

$$\lambda \frac{\partial (Q_1 Q_1^T + Q_2 Q_2^T + \dots + Q_k Q_k^T)}{\partial Q_i}$$

$$= -\lambda \mathbf{P}_i + 0$$

$$\text{则, } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{P}_i} = -(\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{P}_i \mathbf{Q}_j^T) * \mathbf{Q}_j^T + \lambda \mathbf{P}_i$$

$$\text{同理 } \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}_j} = -(\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{P}_i \mathbf{Q}_j^T) * \mathbf{P}_i^T + \lambda \mathbf{Q}_j$$

$$\text{计算代价函数 } L = \sum_{(i,j) \in \Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}'_{ij})^2 + \frac{\lambda_i}{2} \|\mathbf{P}\|_F^2 + \frac{\lambda_i}{2} \|\mathbf{Q}\|_F^2$$