基于 Miller-Rabin 算法的大素数生成器

-BY PB25071407 安鑫丞

一、作品宣传

这是一个完全自主实现的 1024 位大素数生成工具。项目采用严格的 C99 标准，仅使用标准库函数，实现了从大数存储、运算到素数测试的完整解决方案。代码写作符合标准。

应用价值：

（1）密码学基础工具：为 RSA 等加密算法提供核心的素数生成功能。

（2）算法学习平台：完整展示大数运算、素性测试的实现原理。

（3）性能优化范例：展示了算法优化的多种技术手段

二、亮点展示

（1）核心亮点

① 大数运算库

1．实现了 256 进制的大数的表示和运算，包括加减乘模四个运算和快速幂算法。（除法内置于 Barrett 预处理中，未单独列出。）

2．实现了 256 进制和 2 进制的相互转换。

② Miller-Rabin 算法

1．10 轮检验，保证算法准确性。

2．设计了详尽的测试过程输出，便于验证和调试。

③ Barrett 约减算法

1．将耗时的模运算转换为乘法和移位操作。

2．适用于多次模数不变的模运算，在快速幂中特别适合。

④ 性能优化

1．预计算 256*256 乘法表，避免乘法重复运算。

2．小质数筛选合数，筛去大部分需要检验的数。

3．除法使用 2 进制运算，大幅减小了时间复杂度和写作难度。

（2）算法性能

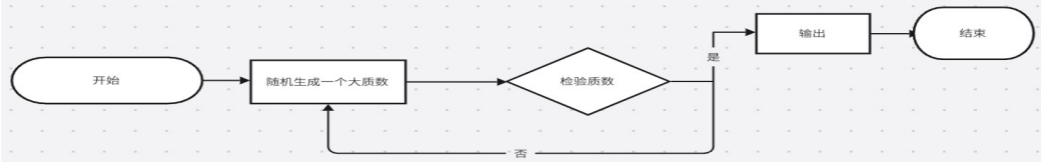
① 速度：平均 8 秒左右生成一个大质数，极端情况下（尝试 800 次）的时间约为 14s。以下是本作品中主要算法的时间复杂度（n 表示 256 进制大数位数，m 为 2 进制位数）：

时间复杂度	O(n)	O(n^2)	O（n^2m）	O（m^2）
算法	加法，减法，大小比较，进制转换	乘法，Barrett 约减	快速幂,单次 Miller-Rabin 检验	Barrett 预处理

② 准确性：错误概率小于10^{-6}，满足密码学应用要求。

三、程序说明

(1) 核心框架



(2) 模块

（注：部分函数分为 2 进制版本和 256 进制版本，这里只列出其中一个函数名）

1．高精度运算：add(),cmp(),sub(),mul(),mol(),mulmod(),div_small(),quickpow()。

2．质数检验函数：cprime(),check(),try_small(),make()。

3．随机数函数：randx(),random(),makeit()。

4．辅助函数：clean(),ctrlcv(),outprint(),st();

5．进制转换：ftn(),fnt()。

6．大数存储：bignum（256 进制），big_binary（二进制）。

(3) 质数检验

1. 40 次小质数尝试

2. 使用 Miller-Rabin 检验算法

1) 计算奇数 q 和整数 k，使得 $n-1=2^k \times q$

2) 随机生成整数 a，1<a<n-1

3) if a^q mod n = 1 or n-1 then return 可能是;

4) for j = 0 to k-1 do

if (a^{2^j} mod n = n-1) then return 可能是;

if (a^{2^j} mod n = 1) then return 合数；

5) return 合数;

(4) 核心函数说明

1．mul()乘法

1) 朴素竖式乘法

2) 使用预处理乘法表和统一进位方式优化常数

2．mol()及 Barrett_preset()模运算

伪代码(m: 模数,b: 基数 (256),k: m 的位数)

```
function Barrett_preset(m,b):
    μ = ⌊ b^(2k) / m⌋
    return (k, μ)
function mol(x, m, b, k, μ):
    q = ⌊ (⌊ x / b^(k-1)⌋ × μ) / b^(k+1)⌋
    r = x - q × m
    if r >= m:
        r = r - m
    if r < 0:
        r = r + m
    return r
```

其中，计算除法的时候，先将 256 进制转化为 2 进制，进行 2 进制的除法运算。运算时，只需每一位依次比较，可减处减去并在答案的那一位上记为 1，最后转化为 256 进制。相较于 256 进制的除法，时间复杂度和写作难度大大下降。

3．quickpow()快速幂

不同于常规递归方法，使用循环来进行运算，使用现有的二进制转换来判断需要多乘一个原数的位置。

备注：

（1）输出在 answer.txt 呈现，使用 16 进制输出。

（2）拓展性较好，可以通过微调来生成其他位数的大素数；也可封装为库。

（3）github 地址：https://github.com/2019AnXinCheng/Miller-Rabin.