Kalman Filter 01 Introduction

Chen Gong

16 January 2020

我们知道在概率图模型中，加入了 time 的因素，就得到了 Dynamic Model，实际上也就说我们通常所说的 State Space Model。

如果状态是离散的, 就是我们上一节提到了 Hidden Markov Model (HMM); **如果状态是连续的**, 如果状态之间的关系是线性的, 就是 Linear Dynamic System (Kalman Filter), 或者说是 Linear Gaussian Model；如果状态之间的关系是 Non-Linear 的或者 Non-Gaussian 的，那么也就是 Particle Filter。我们这一章主要描述的就是 Kalman Filter。

1 Dynamic Model Introduction

第一类问题，Learning 问题，即为在已知观测序列 O 的情况下求解 $P(\pi|O)$。其中，模型可以描述为 $\pi\{\lambda, \mathcal{A}, \mathcal{B}\}$。代表性的就是 Hidden Markov Model。

第二类问题就是 Inference 问题，大致可以分为 Decoding，Probability of Evidence，Filtering，Smoothing 和 Prediction 五类问题。这里中 Hidden Markov Model 05 Conclusion 我们有非常详细的描述。详情可以关注 Hidden Markov Model。

2 Kalman Filtering: Linear Gaussian Model

Filtering 问题就是求 $P(z_t|x_1, x_2, \cdots, x_t)$，实际上就是一个 Marginal Posterior 问题。对于 Linear 关系，Linear 主要反映在相邻时刻的两个状态之间的转移关系，当前时刻的隐变量状态和观测状态之间的关系。描述如下所示：

$$\begin{aligned} z_t &= A \cdot z_{t-1} + B + \epsilon \\ x_t &= C \cdot z_t + D + \delta \end{aligned} \tag{1}$$

z_t, z_{t-1} 和 x_t, z_t 之间体现了线性的关系。而 ϵ, δ 是符合 Gaussian Distribution 的, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, Q), \delta \sim \mathcal{N}(0, R)$。所以，大家都明白了 Linear 和 Gaussian 都是从何而来的，所以 Kalman Filtering 被称为 Linear Gaussian Model 更合适。

Filtering 是一类问题的总称，我们之前在 Hidden Markov Model 中有详细的讨论过。那么，我们回顾一下 Hidden Markov Model 的基本信息做一个对比。

HMM：$\lambda = \{\pi, \mathcal{A}, \mathcal{B}\}$。

状态转移矩阵：

$$
\begin{aligned}
& A=[a_{ij}] \quad a_{ij}=P(i_{t+1}=q_j|i_t=q_i) \\
& B=[b_j(k)] \quad b_jk=P(o_t=v_t|i_t=q_j)
\end{aligned} \tag{2}
$$

那么，对于 Kalman Filtering 来说，状态转移矩阵，发射概率，初始矩阵，模型参数我们可以做出类似的表达：

$$
P(z_t|z_{t-1}) \sim \mathcal{N}(A\cdot z_{t-1}+B, Q) \tag{3}
$$

$$
P(x_t|z_t) \sim \mathcal{N}(C\cdot z_t+D, R) \tag{4}
$$

$$
z_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1) \tag{5}
$$

$$
\theta = \{A, B, C, D, Q, R, \mu_1, \Sigma_1\} \tag{6}
$$

在这一小节中，我们已经了解了基础的相关概念，那下一小节中，我们将描述了 Filtering 问题的建模和求解。