Probability Graph 10 Moral Graph & Factor Graph

Chen Gong

11 December 2019

在这一小节中，我们将要介绍两种特殊的概率结构，也就是 Moral Graph 和 Factor Graph。

1 Moral Graph

首先我们需要知道，为什么要有 Moral Graph 的存在？Moral Graph 存在的意义就是将有向图转化为无向图来研究。因为无向图比有向图更加的 Generalize 一些。在概率图中，我们可以分为贝叶斯网络 (有向图) 和马尔可夫网络 (无向图)。

无向图可以表示为：

$$p(x) = \frac{1}{z}\prod_{i=1}^{k}\phi_{c_i}(x_{c_i}) \tag{1}$$

有向图可以表示为：

$$p(x) = \prod_{i=1}^{p} p(x_i|x_{pa(i)}) \tag{2}$$

其中，ϕ_{c_i} 代表的是最大团的意思。通过道德图，我们可以有效的将有向图转换为无向图。

我们看一下如图所示的链式网络：

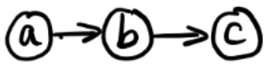

图 1: 链式有向图模型

其中，$p(a,b,c) = p(a)p(b|a)p(c|b)$。如果，把有向图转换成有向图是一件非常简单的事情，首先把所有的线条换成直线。由于在无向图中，我们考虑的是最大团，所以 $p(a)p(b|a) = \varphi(a,b)$，$p(c|b) = \varphi(b,c)$。这个的转换是非常的简单了。

第二种，我们需要讨论的图也就是 Tail to Tail 的图，所下图所示：

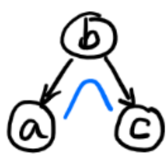

图 2: Tail to Tail 有向图模型

其中，$p(a,b,c)=p(a)p(b|a)p(c|a)$。还是按照一样的套路，首先把所有的有向箭头改成直线。那么我们就可以得到 $p(a)p(b|a)=\phi(a,b)$，$p(c|a)=\phi(a,c)$。其中 $\{a,c\}$ 和 $\{b,c\}$ 是分别属于两个团。这个也比较的简单，但是 Head to Head 的转换就有点不一样了。

第三种，我们需要讨论的图是 Head to Head 的模型，如下图所示：

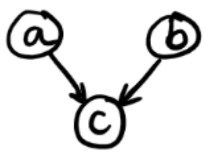

图 3: Head to Head 有向图模型

同样我们使用一样的分析思路来看这个问题，$p(a,b,c)=p(a)p(b)p(c|a,b)$。我们进行拆解的话，只能令 $p(a)p(b)p(c|a,b)=\varphi(a,b,c)$，不然再也找不到其他的拆解方法。但是，如果简单的将模型中所有的有向箭头改成直线得到的并不是一个团。因为 "团" 的概念的要求，团里面的元素都要求是两两相互连接的。所以，我们需要进行改进，将 Head to Head 的无向图形式改进为：

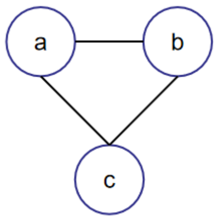

图 4: Head to Head 无向图模型

那么，将 Head to Head 的有向图转换为无向图的过程可以被我们描述为：

对于 $\forall x_i \in G$，将 $parent(x_i)$ 的两个父亲节点连接，然后将 G 中所有的有向边替换成无向边。下面我们举一个例子：

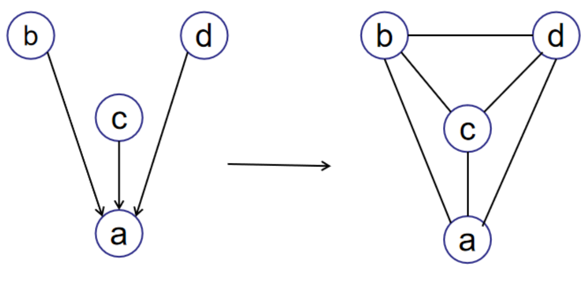

图 5: Head to Head 有向图模型转无向图模型举例

而我们将有向图转换成无向图之后，有什么好处吗？也就是在判断条件独立性的时候，有时图形非常复杂的时候。我们在有向图中很难看出来，而在无向图中却可以很简单的得到我们想要的结果。也就是 $Sep(A,B|C) \Longleftrightarrow D-Sep(A,B|C)$。

2 Factor Graph

在上一小节中，我们介绍了道德图 (Moral Graph)，它的主要作用是将有向图转换为无向图。我们考虑的都是树结构，但是在 Head to Head 结构中，会引入环的结构。但是，在我们的 Belief Propagation (BP) 算法中，只能对树进行分解。所以，这里我们就引入了因子图。因子图主要发挥两个作用：1. 去环，也就是消除无向图中的环结构；2. 使算法变得更加的简洁，简化计算。

如图二表达的那样，他的有向图和无向图的联合概率可以分别表达为：

$$p(a,b,c) = p(a)p(b|a)p(c|a) \qquad p(a,b,c) = \frac{1}{Z}\phi(a,b)\phi(a,c) \tag{3}$$

那什么是因子图分解呢？公式表达可以被我们表示为：

$$p(x) = \prod_{S} p(x_S) \tag{4}$$

其中，S 是图的节点子集，X_S 为对应的 X 的子集，也就是 X 的随机变量的子集。那么对于一个如图 4 所示的有环无向图，我们怎么进行因子图分解呢？

首先进行第一种分解，如下图所示：

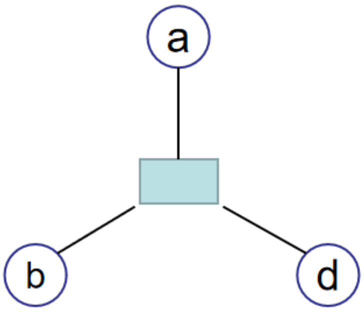

图 6: Head to Head 无向图中心节点因子图分解

这时可以被我们描述为，$f = f(a,b,c)$。或者我们也可以进行更细的分解。如下图所示：

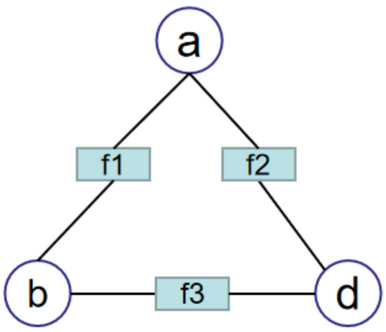

图 7: Head to Head 无向图三节点因子图分解

这个分解的结果可以被我们表示为：

$$p(x) = f_1(a,b)f_2(a,c)f_3(b,c) \tag{5}$$

不仅是可以在两个节点之间插入关系，同时也可以对于单个节点引入函数。

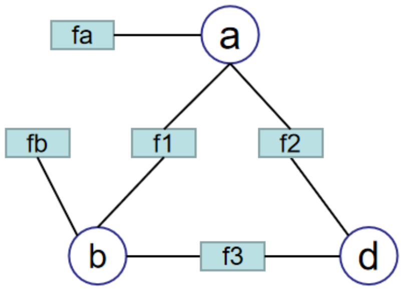

图 8: Head to Head 无向图三节点和独立节点因子图分解

那么这个分解结果可以被我们表示为：

$$p(x) = f_1(a,b)f_2(a,c)f_3(b,c)f_a(a)f_b(b) \tag{6}$$

实际上，就可以看成是对因式分解的进一步分解。这样我们就可以成功的消除环结构。如下图所示：

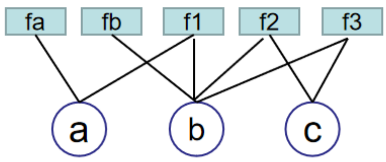

图 9: Head to Head 无向图三节点和独立节点因子图分解

所以，大家仔细一想就知道了因子图存在的意义了，它可以有效的消除环结构，通过一个重构的方式，重建出树的结构。这样可以有效的帮助我们使用 Belief Propagation 中的变量消除法等方法。