

Probability Graph 02 Bayesian Network

Chen Gong

24 November 2019

概率图模型中，图是用来表达的，将概率嵌入到了图之后，使得表达变得非常的清晰明了。在我们的联合概率计算中，出现了一些问题：

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N) = p(x_1) \prod_{i=2}^N p(x_i | x_{1:i-1}) \quad (1)$$

这样的计算维度太高了，所以我们引入了条件独立性，表达为 $X_A \perp X_B | X_C$ 。那么采用因子分解的方法我们可以将联合概率的计算进行分解为：

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N) = p\left(\prod_{i=1}^N p(x_i | x_{pa\{i\}})\right) \quad (2)$$

其中， $pa\{i\}$ 表示为 x_i 的父亲节点。而概率图可以有效的表达条件独立性，直观性非常的强，我们接下来看看概率图中经典的三种结构。

1 概率图的三种基本结构

对于一个概率图，我们可以使用拓扑排序来直接获得，条件独立性的关系。如果存在一个关系由一个节点 x_i 指向另一个节点 x_j ，我们可以记为 $p(x_j | x_i)$ 。我们现在需要定义一些规则来便于说明，对于一个概率图如下所示：

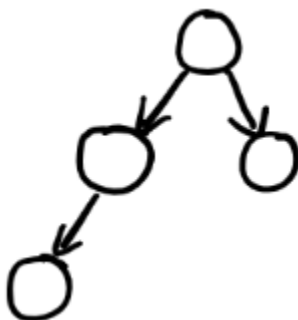


图 1: 基本概率图模型

对于一个箭头 \rightarrow 来说，箭头所在的方向称为 Head，另一端被称为 Tail。

1.1 Tail to Tail 结构

Tail to Tail 的模型结构图，如下图所示，由于 b 节点在 a 节点和 c 节点的 Tail 部分，所以被我们称为 Tail to Tail 结构。

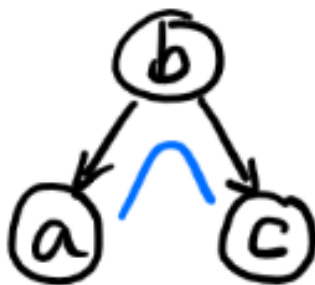


图 2: Tail to Tail 结构示意图

我们使用因子分析来计算联合概率可以得到：

$$p(a, b, c) = p(b)p(a|b)p(c|b) \quad (3)$$

使用链式法则，同样我们也可以得到：

$$p(a, b, c) = p(b)p(a|b)p(c|b, a) \quad (4)$$

对比一下公式 (3) 和公式 (4)，我们可以对比得到：

$$p(c|b) = p(c|b, a) \quad (5)$$

实际上，这里就已经就可以看出 $a \perp c$ 了，因为 a 的条件增不增加都不会改变 c 的概率，所以 a 和 c 之间是相互独立的。可能的同学还是觉得不好理解，那么我们做进一步的分析：

$$p(c|b)p(a|b) = p(c|b, a)p(a|b) = p(a, c|b) \quad (6)$$

$$\Rightarrow p(c|b)p(a|b) = p(a, c|b) \quad (7)$$

这样，我们就可以看得很明白了。这就是条件独立性，在 a 的条件下，b 和 c 是独立的。实际在概率图中就已经蕴含这个分解了，只看图我们就可以看到这个性质了，这就是图的直观性，条件独立性和图是一样的。那么 $a \perp c$ 可以被我们看为：给定 b 的情况下，如果 b 被观测到，那么 a 和 c 之间是阻塞的，也就是相互独立。

1.2 Head to Tail 结构



图 3: Head to Tail 结构示意图

其实，和 Head to Head 结构的分析基本是上一模一样的，我们可以得到 $a \perp c|b$ 。也就是给定 b 的条件下，a 和 c 之间是条件独立的。也就是 b 被观测的条件下，路径被阻塞。

1.3 Head to Head 结构

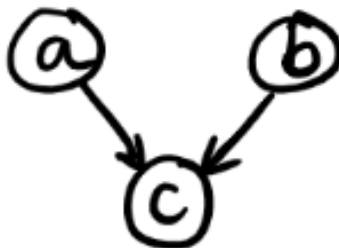


图 4: Head to Head 结构示意图

在默认情况下 $a \perp b$ ，也就是若 c 被观测， a 和 b 之间是有关系的。我们可以推导一下默认情况。

$$\begin{aligned} p(a, b, c) &= p(a)p(b)p(c|a, b) \\ &= p(a)p(b|a)p(c|a, b) \end{aligned} \tag{8}$$

我们可以得出 $p(b) = p(b|a)$ ，也就是 $a \perp b$ 。

2 三种结构对比

三种结构我们在上面都已经进行分析过了，其实大家发现 Tail to Tail, Head to Tail 都比较正常，但是 Head to Head 有点不对劲。因为不太符合条件独立性，因为当 c 被观察到的时候， a 和 b 之间反而有关系了。这实际上让人有点费解。

我们来举个例子：在图 4 中的三个事件，我们引入一个故事。

c: 小明喝醉了。

a: 小明酒量小。

b: 小明心情不好。

我们想要知道 $p(a|c) = p(a|b, c)$ 是否会成立？如果等号成立的话 a 和 b 之间一定是相互独立的。这个我们在 Tail to Tail 那一节就已经说过了。

我们假设小明喝醉了是因为小明心情不好的概率是 0.8，那么当我们知道小明喝醉了并且小明今天的兴趣不好的情况下，知道他酒量小的概率一定是小于 0.8 的。大家想想就知道了，其实很简单的。

那么给定了 c ， a 和 b 之间反而无法分离了。这有点反常，反而使得 Inference 变得困难了，恰好反过来了。那么我们怎么解决这种情况呢？我们下一小节会解决这个问题。