

Exponential Family Distribution 02

Chen Gong

23 October 2019

本节的主要内容是演示 Gaussian Distribution 的指数族表达形式，将高斯函数的形式转换为指数族分布的通用表达形式。

指数族分布的基本形式可以表示为：

$$p(x|y) = h(x) \exp \{ \eta^T \varphi(x) - A(\eta) \} \quad (1)$$

η : 参数向量 parameter, $\eta \in \mathbb{R}^p$ 。

$A(\eta)$: log partition function (配分函数)。

$\varphi(x)$: 充分统计量 sufficient statistics magnitude。

1 思路分析

高斯分布的概率密度函数可表示为：

$$p(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\} \quad (2)$$

观察指数族分布的表达形式，高斯分布的参数向量是有关于 $\theta = (\mu, \sigma)$ 的。首先观察指数部分的第一部分 $\eta^T \varphi(x)$ ，只有这个部分和 x 相关。那么把这个部分搞定，系数就是参数矩阵，剩下的就是配分函数了，而且配分函数是一个关于 η 的函数。

2 将 Gaussian Distribution 改写为指数族分布的形式

具体推导过程如下所示：

$$p(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) \right\} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu x}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\sigma^2} \\ -\frac{1}{2\sigma^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x^2 \end{pmatrix} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (6)$$

$$= \exp \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\sigma^2} \\ -\frac{1}{2\sigma^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x^2 \end{pmatrix} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (7)$$

$$= \exp \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{\mu}{\sigma^2} \\ -\frac{1}{2\sigma^2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x & x^2 \end{pmatrix} - \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \log 2\pi\sigma \right) \right\} \quad (8)$$

令:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\sigma^2} \\ -\frac{1}{2\sigma^2} \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \eta_1 = \frac{\mu}{\sigma^2} \\ \eta_2 = -\frac{1}{2\sigma^2} \end{cases} \implies \begin{cases} \mu = -\frac{\eta_1}{2\eta_2} \\ \sigma^2 = -\frac{1}{2\eta_2} \end{cases} \quad (9)$$

到了现在，我们离最终的胜利只差一步了，

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A(\eta) = -\frac{\eta_1^2}{4\eta_2} + \frac{1}{2} \log(2\pi \cdot -\frac{1}{2\eta_2}) = -\frac{\eta_1^2}{4\eta_2} + \frac{1}{2} \log(-\frac{\pi}{\eta_2}) \quad (11)$$

于是，Guassian Distribution 成功的被我们化成了指数族分布的形式 $\exp \{ \eta^T \varphi(x) - A(\eta) \}$ 。