

Mecánica Lagrangiana

Este capítulo se va a dedicar a establecer un formalismo alternativo a las Leyes de Newton, el formalismo lagrangiano aplicado a la mecánica clásica. Este nuevo formalismo produce resultados equivalentes al de Newton, como es de esperarse, no obstante permite simplificar de gran manera los análisis.

Aquí se expresará la Mecánica Lagrangiana de forma general, de modo que se aplique a sistemas conservativos (o no) y a sistemas de partículas.

SECTION 1

Conceptos Fundamentales

SUBSECTION 1.1

Grados de Libertad y Coordenadas Generalizadas

Definition 1 (**Grados de Libertad**) Para un sistema físico cualquiera, el número de grados de libertad corresponde al número más pequeño de cantidades escalares independientes necesarias para dar la posición (Sin contar el tiempo) de un objeto de interés dentro del sistema.

- **Partícula en una dimensión:** 1 grado de libertad, la partícula se encuentra sobre una recta está puede ir hacia adelante o atrás.
- **Partícula en 2 dimensiones:** 2 grados de libertad, la partícula tiene libertad de moverse en un plano.
- **Partícula en 3 dimensiones:** 3 grados de libertad, la partícula tiene puede moverse en un espacio tridimensional (en un ancho, largo y altura respecto a un origen).
- **n-Partículas en 3 dimensiones:** $3n$ grados de libertad, cada partícula individual tiene sus 3 grados de libertad propios y la suma es el total de grados de libertad del sistema.

Definition 2 (**Coordenadas Generalizadas**) Son el conjunto de cantidades ¹ que especifican **completamente** el estado de un sistema.

Ahora, suponiendo que un sistema de estudio está conformado por n partículas y al estar en un espacio tridimensional, en un principio el sistema posee $3n$ grados de libertad. Si el sistema posee m **ecuaciones de restricción**², tendrá m restricciones en los grados de libertad totales del sistema, entonces los grados de libertad son:

$$s = 3n - m \leftarrow \begin{array}{l} \text{Grados de libertad de un} \\ \text{sistema en forma general} \end{array}$$

Es posible escribir las ecuaciones de transformación entre las coordenadas generalizadas y coordenadas curvilíneas cualesquiera, como se presenta a continuación:

¹No necesariamente tienen que ser distancias, pueden ser cantidades adimensionales o incluso con unidades de energía.

²Asociadas o no a fuerzas de restricción. Estas pueden ser incluso cortes en la dimensionalidad del espacio en que se encuentra el sistema.

Coordenadas Curvilíneas Coordenadas Generalizadas

$$\begin{cases} x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t) \\ \dot{x}_{\alpha,i} = \dot{x}_{\alpha,i}(q_j, \dot{q}_j, t) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} q_j = q_j(x_{\alpha,i}, t) \\ \dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, \dots, s \end{cases}$$

Si se tiene el conjunto más pequeño de coordenadas generalizadas, este es conocido como el **conjunto adecuado** de coordenadas ³. En este caso, el conjunto de cantidades (Coordenadas Generalizadas) corresponde a los grados de libertad del sistema.

³ Va a ser común desarrollar un problema tanto con el conjunto adecuado como con un conjunto de cantidades que superen al adecuado.

SUBSECTION 1.2

Trabajo Virtual, Fuerzas Generalizadas y Principio de D’Alambert

A partir de aquí se considerará un sistema compuesto por n partículas, cada una de ellas expuesta a su vector de fuerza neta correspondiente \vec{F}_α . Siendo \vec{F}_α la suma de cualquier clase de fuerzas que actúen sobre la partícula α (Fuerzas conservativas, no conservativas, de restricción) y posee sus componentes, por ejemplo, en coordenadas cartesianas F_{α_x} , F_{α_y} y F_{α_z} . Además, la fuerza se puede separar de la forma $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^e + \vec{f}_\alpha$, donde \vec{F}_α^e corresponde a todas las fuerzas externas aplicadas en la partícula α y \vec{f}_α corresponde a todas las fuerzas de restricción que afectan a dicha partícula.

Un trabajo infinitesimal provocado por esta fuerza:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^e \cdot \delta \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \vec{f}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \end{aligned}$$

Limitando el análisis a sistemas tales que las fuerzas de restricción no producen este tipo de trabajo infinitesimal:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^e \cdot \delta \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^n \vec{f}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha^e \cdot \delta \vec{r}_\alpha \end{aligned}$$

Redefiniendo el vector \vec{F}_α como la suma de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula α , excepto las de restricción, dado que ya se estableció que para este análisis estas no producen trabajo, se introduce el siguiente concepto:

Definition 3

(Trabajo Virtual) Corresponde al trabajo producido por un **desplazamiento virtual** ⁴. Un desplazamiento virtual es un desplazamiento infinitesimal de un sistema, una alteración en la configuración de este, como resultado de un cambio infinitesimal arbitrario de las coordenadas $\delta \vec{r}_\alpha$, que debe ser consistente con las fuerzas y las restricciones impuestas en el sistema en un cierto instante t .

⁴ Al decir “virtual”, es para diferenciarlo de un desplazamiento o trabajo real del sistema.

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} \quad (1.1)$$

A partir de la definición anterior, buscando colocar el trabajo virtual en el conjunto de coordenadas generalizadas:

Es posible desarrollar $\delta \vec{r}_{\alpha}$ a partir de la regla de la cadena para 3 grados de libertad como:

$$\delta \vec{r}_{\alpha} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j$$

Excluyendo la derivada parcial temporal por la definición del desplazamiento virtual, que solo considera desplazamientos en las coordenadas. Realizando el cambio de $\delta \vec{r}_{\alpha}$ en la Ecuación (1.1):

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_{\alpha} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j=1}^s \vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j}$$

Lo cual al considerar que tanto \vec{F}_{α} y \vec{r}_{α} se encuentran inicialmente en coordenadas curvilíneas:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^n \left(F_{x_{1,\alpha}} \frac{\partial x_{1,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{2,\alpha}} \frac{\partial x_{2,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{3,\alpha}} \frac{\partial x_{3,\alpha}}{\partial q_j} \right)$$

Definition 4

(Fuerzas Generalizadas) Corresponde a un nombre genérico para referirse, en un principio, a fuerzas y torques escritos en las coordenadas generalizadas que describen el sistema. Estas son dadas en los componentes correspondientes a cada coordenada generalizada. Comúnmente las fuerzas o torques son escritas inicialmente en coordenadas curvilíneas en un inicio para luego ser transformadas a fuerzas generalizadas.

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^n \left(F_{x_{1,\alpha}} \frac{\partial x_{1,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{2,\alpha}} \frac{\partial x_{2,\alpha}}{\partial q_j} + F_{x_{3,\alpha}} \frac{\partial x_{3,\alpha}}{\partial q_j} \right) \quad (1.2)$$

Para conocer la naturaleza de la fuerza generalizada (Fuerza, Torque, ...), se debe revisar la dimensionalidad del trabajo virtual ejercido por tal fuerza, es decir:

$$\delta W_j = Q_j \delta q_j ; \text{ Debe poseer unidades de energía}$$

Una vez establecidas las coordenadas generalizadas, es sencillo describir a que corresponden las fuerzas generalizadas a partir de lo anterior.

Ahora, en busca de generar una forma alternativa de mecánica, se va a explotar el concepto anterior. Primero, a partir de la Ecuación (??):

$$\begin{aligned}\vec{F}_\alpha &= \dot{\vec{p}}_\alpha \\ \Rightarrow \vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha &= 0\end{aligned}$$

Esta expresión enuncia que una partícula expuesta a una fuerza \vec{F}_α , se encontrará en equilibrio si se le es ejercida una fuerza efectiva contraria a la original $-\dot{\vec{p}}_\alpha$. Entonces, con esto se puede buscar el trabajo virtual de todas estas fuerzas sobre el sistema, que por lo anterior se sabe que será cero.

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^n \left(\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

Definition 5 (**Principio de D’Alambert**) Este principio esta expresando en coordenadas generalizadas.

$$\sum_{\alpha=1}^n \left(\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0 \quad (1.3)$$

Un resultado de este principio, es el Principio de Trabajo Virtual ⁵:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

⁵Es el caso estático del Principio de D’Alambert, ampliamente usado en ingeniería.

SECTION 2

Principio de Hamilton

Este principio puede ser deducido desde el Principio de D’Alambert, no obstante, la deducción no se realizará por ahora.

Definition 6 (**Principio de Hamilton Extendido**) El movimiento de un sistema desde un tiempo t_1 a un tiempo t_2 es tal que la integral de línea (La llamada Acción o integral de la Acción) de la energía cinética más el trabajo ejercido por las fuerzas del sistema, tenga un valor estacionario para el camino real que sigue el sistema ⁶.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} T + W dt \quad (2.1)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T + W dt = 0 \leftarrow \text{Valor estacionario}$$

⁶El Principio de Hamilton original se define de forma similar, donde la Acción es de la forma:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} T - V dt$$

SECTION 3

Ecuaciones de la Mecánica de Lagrange

A continuación, en esta sección se va deducir la ecuación de Euler - Lagrange a partir del Principio de Hamilton Extendido de modo que sea aplicable a sistemas no conservativos y se introducirán conceptos propios de la Mecánica Lagrangiana.

Comenzando con la deducción de la ecuación Euler - Lagrange, se debe optimizar la Acción (Ecuación (2.1)) para conseguir un valor estacionario: