Mecánica Clásica

Notas a un nivel intermedio

Elmer Hernán Barquero Chaves

Estudiante de bachillerato en física por la Universidad de Costa Rica
GitHub
Estas notas son un documento en proceso por lo que es posible que contengan errores, los cuales agradecería informaran al correo, de preferencia con un asunto: " Notas de mecánica" o algún similar. Para realizar la corrección lo más pronto posible.

elmer.barquero@ucr.ac.cr

Índice

PART
I

Introducción al texto

Section 1

Amplitud de la Mecánica Clásica

Condiciones para la aplicabilidad de la teoría de la Mecánica Clásica:

- Las masas de los cuerpos de interés **deben ser mayores** a las masas de átomos y de partículas subatómicas.
- Las masas de los cuerpos de interés **deben ser pequeñas** en comparación a las masas de cuerpos celestes. Por ejemplo la masa del planeta Mercurio, dado que el estudio de su órbita presenta discrepancias con los datos observacionales si se realiza directamente desde la mecánica clásica $\left(3{,}285 \times 10^{23} kg\right)$.
- Las rapideces de los cuerpos de interés **deben ser pequeñas** comparadas a la rapidez de la luz $(299{,}792, 458 km/s)$.
- La escala de tiempo en que se realiza el estudio **debe ser pequeña** en comparación a escalas de tiempo que tiendan a las astronómicas.

De lo anterior se puede concluir que la Mecánica Clásica está limitada, en el desarrollo que se le dará aquí, al estudio de fenómenos en escalas humanas. Grosso modo, **la Mecánica Clásica se emplea para estudiar cosas que los seres humanos pueden "ver", tanto en tamaño como en escala temporal.** Las comillas al "ver" es porqué es posible calcular con suficiente presición algunos fenómenos que ocurren por debajo de las escalas de visión humana con bastante presición.

PART
II

Mecánica Newtoniana

Section 2

Vectores

Esto ya deberían saberlo y probablemente se actualice de último :)

Section 3

Mecánica Newtoniana para una partícula

A continuación se expresará la mecánica de partículas.

Subsection 3.1

Leyes de Newton

Comenzando con algunos conceptos claves para el desarrollo de las leyes de Newton:

Definition 1 (**Fuerza**) Fuerza es el nombre que se le da a la interacción entre un cuerpo y su entorno, la cual es capaz de afectar el estado del cuerpo. Las fuerzas son cantidades vectoriales, por lo que poseen magnitud y dirección; su magnitud es dada en unidades de newton N.

Definition 2 (**Momentum Lineal**) Momentum lineal o cantidad de movimiento, ambos se refieren a una cantidad vectorial dada por la siguiente ecuación:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{3.1}$$

Las leyes de Newton tal y como se expresarán a continuación son unicamente válidas para sistemas de referencias **inerciales**, es decir, sistemas de referencia que no poseen ningun tipo de aceleración.

Un estado de **equilibrio** se refiere a que el cuerpo o sistema de interés se encuentra movientodose con velocidad lineal constante (**equilibrio dinámico**) o se encuentra en reposo (**equilibrio estático**).

Definition 3 (**Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia**) Un cuerpo mantiene su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta lo perturbe. Dicho de otra forma, un cuerpo siempre mantendrá su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta llegue a afectarlo.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \tag{3.2}$$

Definition 4 (**Segunda Ley de Newton**) Un cuerpo que experimenta una fuerza neta diferente de cero, tendrá como resultado un cambio en su momentum lineal.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \tag{3.3}$$

Suponiendo que la masa es constante para el cuerpo de interés, la primera ley de Newton también se puede escribir de la forma:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{3.4}$$

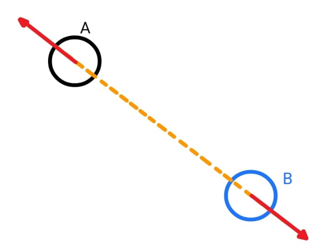
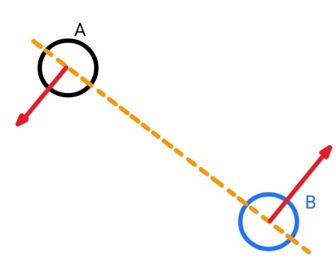


Figura 1. Situación del enunciado fuerte

Definition 5 (**Tercera Ley de Newton o Ley de Acción-Reacción**) Considere dos cuerpos denotados como A y B que presentan algún tipo de interacción entre sí, se dice que: Toda **acción** que realice el cuerpo A sobre el cuerpo B le corresponde una **reacción** que proveniente del cuerpo B. Estas **acciones** y **reacciones** corresponden a fuerzas internas del sistema (cuerpos A y B) debido a su interacción, dichas fuerzas poseen la misma magnitud y su dirección es contraria.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \tag{3.5}$$



Para trabajar con esta ley hay que tomar cuenta cierta ambiguedad que nos lleva a los siguientes enunciados de la tercera ley:

- **Enunciado Fuerte:** Los vectores correspondientes a las fuerzas de **acción** y **reacción** se encuentran sobre una misma recta, es decir, sí se conocen las direcciones de las fuerzas de **acción** y **reacción** es posible trazar una recta (conocida como línea de acción) que una los vectores de fuerzas y sea paralela a estos.
- **Enunciado Débil:** No ocurre lo anterior. Es imposible unir los vectores de las fuerzas de **acción** y **reacción** por medio de una recta que sea paralela a ambos vectores.

Además de lo anterior, es preciso destacar que la **Tercera Ley de Newton** no es una ley general de la naturaleza y se puede establecer que toda fuerza que dependa de velocidades no obedecerá esta ley.

Subsection 3.2

Trabajo y Energía

Definition 6 (**Trabajo**) Corresponde a la cantidad generada al tomar el producto punto de la fuerza ejercida sobre un cuerpo a lo largo de todo su desplazamiento desplazamiento desde una punto A a un punto B.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{3.6}$$

Definition 7 (**Fuerza conservativa**) Una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si se puede escribir de la forma:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{3.7}$$

A partir de las ecuaciones 3.3 y 3.6:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Ejerciendo el producto punto y trabajando por índices:

$$W = \int_A^B \sum_{i=1}^{3} \frac{dp_i}{dt} dr_i$$

Suponiendo que la masa es constante, la derivada temporal del momentum lineal es de la forma: $\frac{dp_i}{dt} = m\frac{dv_i}{dt}$:

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i = \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i \frac{dt}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B dv_i \underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{= v_i} \cancelto{1}{\frac{dt}{dt}} \\
&= \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B v_i dv_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_i^2 \Big|_A^B = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_{iB}^2 - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_{iA}^2
\end{aligned}
$$

Definition 8 (**Energía Cinética Traslacional**) Corresponde al trabajo necesario para comenzar a mover un cuerpo desde el reposo hasta la rapidez $\vec{v}$.

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} v_i^2 \tag{3.8}$$

Theorem 1 (**Trabajo - Energía Cinética**)

$$W = \Delta T \tag{3.9}$$

Regresando a la definición 3.6 pero ahora tomando la fuerza que es ejercida sobre el cuerpo como una fuerza conservativa, ecuación 3.7.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -V_B + V_A$$

Definition 9 (**Energía Potencial**) Corresponde a la capacidad de un cuerpo de ejercer trabajo se denomina energía potencial. Ahora se presentan algunos ejemplos de energías potenciales.

$$V = \begin{cases} mgh \\ \frac{1}{2} k x^2 \\ \frac{-GMm}{r} \\ \frac{-K q_1 q_2}{r} \\ \vdots \end{cases} \tag{3.10}$$

Theorem 2 (**Trabajo - Energía Potencial**)

$$W = -\Delta V \tag{3.11}$$

Subsection 3.3

Análogo rotacional de las leyes de Newton

Ahora se presentarán algunos conceptos importantes y ecuaciones para una descripción sencilla de la mecánica de partículas en rotación. Nuevamente se comenzará por los conceptos básicos análogos a los usados en las leyes de Newton y posteriormente se darán las leyes análogas.

Primerio deduciendo una relación entre la velocidad lineal $\vec{v}$ y la velocidad angular $\vec{\omega}$:

Deducir la relación velocida Lineal - Angular

Definition 10 (**Relación velocida Lineal - Angular**)

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \tag{3.12}$$

Definition 11 (**Torque**)

$$\vec{N}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{3.13}$$

Definition 12 (**Momentum Angular**)

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\,\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})^{1} = m\left[\vec{r}^{\,2}\vec{\omega} - \vec{r}\,(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\right] \tag{3.14}$$

[1] $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$

En la amplia gama de casos en que se trabaja con partículas, se podrá reconocer que el producto $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = 0$ y los vectores $\vec{r}$ y $\vec{\omega}$ apuntan en una única dirección, por lo que el momentum angular tomará la siguiente forma:

$$L_{\mathcal{O}q} = mr^2\omega_q \tag{3.15}$$

Definition 13 (**Momentos de Inercia**)

$$I_q^{\mathcal{O}} = \sum_i m_i r_i^2 \tag{3.16}$$

La **masa** *inercial* y los **momentos de inercia** están intimamente relacionados, ambos son medidas de que tan difícil es mover un cuerpo de cierta forma.

El termino *inercial* es para hacer una distinción entre la **masa inercial** (La masa dada por la aceleración de un cuerpo al estar bajo el efecto de una fuerza) y la **masa gravitacional** (La masa determinada por las fuerzas gravitacionales entre el cuerpo de interés y otros cuerpos), a pesar de que ambas cantidades **son iguales** por el principio de equivalencia.

Theorem 3 (**Teorema de Ejes paralelos**)

$$I_{q'} = I_q^{cm} + Md^2 \tag{3.17}$$

La demostración de este teorema tal y como se encuentra escrito aquí se le dejará al lector y se recomienda verlo como una simplificación del teorema de ejes paralelos real que se desarrollará más adelante.

Definition 14 (**Segunda Ley de Newton análoga rotacional**)

$$\sum \vec{N} = \frac{dL}{dt} = \dot{L} \tag{3.18}$$

Manteniendo la inercia constante, la ecuación se escribe de la forma:

$$\sum N_q = I_q\alpha_q \tag{3.19}$$

Donde el subíndice denota el eje respecto al cual se está realizando la suma de torques.

Definition 15 **(Energía Cinética Rotacional)**

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_q \omega_q^2 \tag{3.20}$$

Subsection 3.4

Teoremas de Conservación

Theorem 4 **(Conservación de Momentum Lineal)**

Theorem 5 **(Conservación de Momentum de Angular)**

Theorem 6 **(Conservación de la Energía)**

Subsection 3.5

Problemas resueltos

Section 4

Sistemas de partículas

Section 5

Sistemas no inerciales

Referencias

[1] John R. Taylor. *Mecánica Clásica*. Reverté, 2013.

[2] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Brooks/Cole, 2008.

[3] Dare A. Wells. *Schaum's outline of theory and Problems of Lagrangian dynamics: With a treatment of Euler's equations of motion, Hamilton's equations and Hamilton's principles*. McGraw-Hill, 1967.

[4] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical mechanics*. Pearson, 3 edition, 2002.

[5] Robert Resnick, David Halliday, and Kenneth S Krane. *Física Volumen 1*. Continental, 2001.

[6] Robert Resnick, David Halliday, and Kenneth S Krane. *Física, Volumen II*. Editorial Continental, 2002.

[7] Hugh Young and Roger Freedman. *Sears y Zemansky - Física Universitaria con Física Moderna 1*. Pearson Educación, Ciudad de México, 14th edition, 2018. ISBN 9786073244398.

[8] Hugh Young and Roger Freedman. *Sears y Zemansky - Física Universitaria con Física Moderna 2*. Pearson Educación, Ciudad de México, 13th edition, 2013. ISBN 9786073221900.

[0]