

Mecánica Newtoniana

SECTION 1

Vectores

Esto ya deberían saberlo y probablemente se actualice de último :)

SECTION 2

Mecánica Newtoniana para una partícula

A continuación se expresará la mecánica de partículas.

SUBSECTION 2.1

Leyes de Newton

Comenzando con algunos conceptos claves para el desarrollo de las leyes de Newton:

Definition 1 (**Fuerza**) Fuerza es el nombre que se le da a la interacción entre un cuerpo y su entorno, la cual es capaz de afectar el estado del cuerpo. Las fuerzas son cantidades vectoriales, por lo que poseen magnitud y dirección; su magnitud es dada en unidades de newton N .

Definition 2 (**Momentum Lineal**) Momentum lineal o cantidad de movimiento, ambos se refieren a una cantidad vectorial dada por la siguiente ecuación:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.1)$$

Las leyes de Newton tal y como se expresarán a continuación son únicamente válidas para sistemas de referencias **inerciales**, es decir, sistemas de referencia que no poseen ningún tipo de aceleración.

Definition 3 (**Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia**) Un cuerpo mantiene su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta lo perturbe. Dicho de otra forma, un cuerpo siempre mantendrá su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta llegue a afectarlo.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (2.2)$$

Definition 4 (**Segunda Ley de Newton**) Un cuerpo que experimenta una fuerza neta diferente de cero, tendrá como resultado un cambio en su momentum lineal.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \quad (2.3)$$

Suponiendo que la masa es constante para el cuerpo de interés, la primera ley de Newton también se puede escribir de la forma:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.4)$$

Definition 5 (**Tercera Ley de Newton o Ley de Acción-Reacción**) Considere dos cuerpos denotados como A y B que presentan algún tipo de interacción entre sí, se dice que: Toda **acción** que realice el cuerpo A sobre el cuerpo B le corresponde una **reacción** que proveniente del cuerpo B. Estas **acciones** y **reacciones** corresponden a fuerzas internas del sistema (cuerpos A y B) debido a su interacción, dichas fuerzas poseen la misma magnitud y su dirección es contraria.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (2.5)$$

Un estado de **equilibrio** se refiere a que el cuerpo o sistema de interés se encuentra moviéndose con velocidad lineal constante (**equilibrio dinámico**) o se encuentra en reposo (**equilibrio estático**).

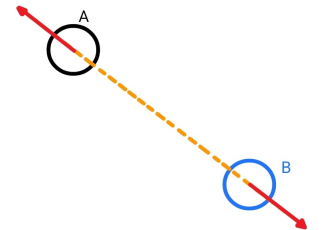
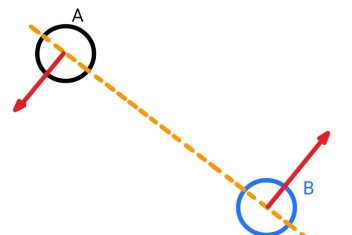


Figura 1. Situación del enunciado fuerte



Para trabajar con esta ley hay que tomar cuenta cierta ambigüedad que nos lleva a los siguientes enunciados de la tercera ley:

- **Enunciado Fuerte:** Los vectores correspondientes a las fuerzas de **acción** y **reacción** se encuentran sobre una misma recta, es decir, si se conocen las direcciones de las fuerzas de **acción** y **reacción** es posible trazar una recta (conocida como línea de acción) que una los vectores de fuerzas y sea paralela a estos.
- **Enunciado Débil:** No ocurre lo anterior. Es imposible unir los vectores de las fuerzas de **acción** y **reacción** por medio de una recta que sea paralela a ambos vectores.

Además de lo anterior, es preciso destacar que la **Tercera Ley de Newton no es una ley general de la naturaleza** y se puede establecer que toda fuerza que dependa de velocidades no obedecerá esta ley.

SUBSECTION 2.2

Trabajo y Energía

Definition 6 (**Trabajo**) Corresponde a la cantidad generada al tomar el producto punto de la fuerza ejercida sobre un cuerpo a lo largo de todo su desplazamiento desde un punto A a un punto B.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.6)$$

Definition 7 (**Fuerza conservativa**) Una fuerza \vec{F} es conservativa si se puede escribir de la forma:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \quad (2.7)$$

A partir de las ecuaciones 2.3 y 2.6:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Ejerciendo el producto punto y trabajando por índices:

$$W = \int_A^B \sum_{i=1}^3 \frac{dp_i}{dt} dr_i$$

Suponiendo que la masa es constante, la derivada temporal del momentum lineal es de la forma: $\frac{dp_i}{dt} = m \frac{dv_i}{dt}$:

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{i=1}^3 m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i = \sum_{i=1}^3 m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i \frac{dt}{dt} \\
 &= \sum_{i=1}^3 m \int_A^B dv_i \underbrace{\frac{dr_i}{dt} \frac{dt}{dr_i}}_{=v_i} \\
 &= \sum_{i=1}^3 m \int_A^B v_i dv_i = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m v_i^2 \Big|_A^B = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m v_{iB}^2 - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m v_{iA}^2
 \end{aligned}$$

Definition 8 (**Energía Cinética Traslacional**) Corresponde al trabajo necesario para comenzar a mover un cuerpo desde el reposo hasta la rapidez \vec{v} .

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 v_i^2 \quad (2.8)$$

Theorem 1 (**Trabajo - Energía Cinética**)

$$W = \Delta T \quad (2.9)$$

Regresando a la definición 2.6 pero ahora tomando la fuerza que es ejercida sobre el cuerpo como una fuerza conservativa, ecuación 2.7.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -V_B + V_A$$

Definition 9 (**Energía Potencial**) Corresponde a la capacidad de un cuerpo de ejercer trabajo se denomina energía potencial. Ahora se presentan algunos ejemplos de energías potenciales.

$$V = \begin{cases} mgh \\ \frac{1}{2} kx^2 \\ \frac{-GMm}{r} \\ \frac{-Kq_1q_2}{r} \\ \vdots \end{cases} \quad (2.10)$$

Theorem 2 (**Trabajo - Energía Potencial**)

$$W = -\Delta V \quad (2.11)$$

SUBSECTION 2.3

Análogo rotacional de las leyes de Newton

Ahora se presentarán algunos conceptos importantes y ecuaciones para una descripción sencilla de la mecánica de partículas en rotación. Nuevamente se comenzará por

los conceptos básicos análogos a los usados en las leyes de Newton y posteriormente se darán las leyes análogas.

Primero deduciendo una relación entre la velocidad lineal \vec{v} y la velocidad angular $\vec{\omega}$:

Deducir la relación velocidad Lineal - Angular

Definition 10 (Relación velocidad Lineal - Angular)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.12)$$

Definition 11 (Torque)

$$\vec{N}_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.13)$$

Definition 12 (Momentum Angular)

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})^1 = m [\vec{r}^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})] \quad (2.14)$$

En la amplia gama de casos en que se trabaja con partículas, se podrá reconocer que el producto $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = 0$ y los vectores \vec{r} y $\vec{\omega}$ apuntan en una única dirección, por lo que el momentum angular tomará la siguiente forma:

$$L_{Oq} = m r^2 \omega_q \quad (2.15)$$

Definition 13 (Momentos de Inercia)

$$I_q^O = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.16)$$

Theorem 3 (Teorema de Ejes paralelos)

$$I_{q'} = I_q^{cm} + M d^2 \quad (2.17)$$

La demostración de este teorema tal y como se encuentra escrito aquí se le dejará al lector y se recomienda verlo como una simplificación del teorema de ejes paralelos real que se desarrollará más adelante.

Definition 14 (Segunda Ley de Newton análoga rotacional)

$$\sum \vec{N} = \frac{dL}{dt} = \dot{L} \quad (2.18)$$

Manteniendo la inercia constante, la ecuación se escribe de la forma:

$$\sum N_q = I_q \alpha_q \quad (2.19)$$

Donde el subíndice denota el eje respecto al cual se está realizando la suma de torques.

$$^1 \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{B}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

La **masa inercial** y los **momentos de inercia** están íntimamente relacionados, ambos son medidas de que tan difícil es mover un cuerpo de cierta forma.

El termino *inercial* es para hacer una distinción entre la **masa inercial** (La masa dada por la aceleración de un cuerpo al estar bajo el efecto de una fuerza) y la **masa gravitacional** (La masa determinada por las fuerzas gravitacionales entre el cuerpo de interés y otros cuerpos), a pesar de que ambas cantidades **son iguales** por el principio de equivalencia.

Definition 15 (Energía Cinética Rotacional)

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_q \omega_q^2 \quad (2.20)$$

SUBSECTION 2.4

Teoremas de Conservación

Theorem 4 (Conservación de Momentum Lineal)

Theorem 5 (Conservación de Momentum de Angular)

Theorem 6 (Conservación de la Energía)

SUBSECTION 2.5

Problemas resueltos

SECTION 3

Sistemas de partículas

SECTION 4

Sistemas no inerciales
