PART

I

Transformaciones Canónicas

Subsection 0.1

Problemas resueltos

Como se puede ver, esta sección de problemas contiene una cantidad mínima de problemas y esto es debido a lo avanzado que puede ser este tema para un bachillerato. Por supuesto, se espera mejorar la sección y dar algo de luz respecto al tema.

Transformaciones Canónicas

Problema 1.

Determine si la función:

$$F(q,Q) = q^2 + Q^4 = F_1(q,Q)$$

genera una transformación canónica.

- Primera forma:

Para determinar si F es una función generatriz, F debe ser una función con diferencial exacto

$\Rightarrow dF = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial Q} dQ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right) \Rightarrow 0 = 0$ ∴ No es canónica

* $\frac{\partial F}{\partial q} = 2q$

* $\frac{\partial F}{\partial Q} = 4Q^3$

- Segunda forma:

* $p = \frac{\partial F}{\partial q} = 2q$ * $-P = \frac{\partial F}{\partial Q} = 4Q^3$ $\Rightarrow [Q,P]_{q,p} = 1$

Problema 2.

Considere la función generadora:

$$F_2(q, P) = (q + P)^2.$$

a. Determine las ecuaciones de transformación.

b. Encuentre las otras funciones generadoras.

a) Siendo la función generatriz de la forma $F_2 \Longrightarrow p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ y $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$

$* \; p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = 2(q+P) \qquad * \; Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = 2(q+P) \qquad \Longrightarrow P = \frac{p}{2} - q$ y $Q = p$

b) Para hallar otras funciones se realizan transformaciones de Legendre que deben cumplir con: $p\dot{q} - H = \chi\dot{y} - K + \frac{dF}{dt}$

$* \; F_1(q, Q) = F_2(q, P) - QP$

$$\Longrightarrow F_1 = (q+P)^2 - QP = q^2 + 2qP + P^2 - \left(\frac{p}{2} - q\right)Q = q^2 + 2q\left(\frac{p}{2} - q\right) + \left(\frac{p}{2} - q\right)^2 - \left(\frac{p}{2} - q\right)Q$$

$$= q^2 + 2q\left(\frac{Q}{2} - q\right) + \left(\frac{Q}{2} - q\right)^2 - \left(\frac{Q}{2} - q\right)Q = q^2 + \left(\frac{Q}{2} - q\right)\left(q - \frac{Q}{2}\right) = qQ - \frac{Q^2}{4}$$

$$\boxed{p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q \quad \text{y} \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -q + \frac{Q}{2}}$$

$* \; F_3(p, Q) = F_1(q, Q) \pm pq$

$$\Longrightarrow F_3 = qQ - \frac{Q^2}{4} \pm pq = qp - \frac{Q^2}{4} \pm pq = -\frac{Q^2}{4} = -\frac{pQ}{4}$$

Problema 3.

El Hamiltoniano de una partícula que se mueve verticalmente en un campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ está dado por:

$$\mathscr{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

Considere la siguiente Transformación Canónica:

$$\begin{aligned} Q &= -p, \\ P &= q + Ap^2, \end{aligned}$$

donde A es constante.

a. Determine $pdq - PdQ$ y demuestre que es un diferencial exacto.

b. ¿Qué significa este resultado?

c. Encuentre $\mathscr{H}(Q,P)$.

d. Determine el valor de A, que haga Q una variable cíclica.

e. Usando el resultado anterior, encuentre las ecuaciones de Hamilton para $\mathscr{H}(Q,P)$.

f. A partir del resultado anterior, determine $q(t)$ y $p(t)$.

a) $\begin{cases} Q = -p \\ P = q + Ap^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p = -Q \\ q = P - AQ^2 \end{cases}$

$pdq - PdQ = dF_1 \Longrightarrow \dfrac{\partial p}{\partial Q} = -\dfrac{\partial P}{\partial q} \Longrightarrow -1 = -1$

b) Las coordenadas Q y P son canónicas $\longleftarrow [Q,P]_{q,p} = 1$

c) Para pasar de $\mathcal{H}(q,p)$ a $\mathcal{H}(Q,P)$ se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{cases} * \ \mathcal{H}(Q,P) = \mathcal{H}(q,p) + \dfrac{\partial F}{\partial t} \\ * \ Q = Q(q,p) \\ * \ P = P(q,p) \end{cases}$$

Hay que construir la función generatriz

$$dF_1 = pdq - PdQ$$

$* \ p = \dfrac{\partial F_1}{\partial q} = -Q \Longrightarrow F_1 = -Qq + c_1(Q)$

$* \ -P = \dfrac{\partial F_1}{\partial Q} = -q - AQ^2 \Longrightarrow F_1 = -Qq - \dfrac{A}{3}Q^3 + c_2(q)$

$\Longrightarrow F_1 = -\dfrac{A}{3}Q^3 - Qq$

$$\Longrightarrow \begin{cases} * \ \mathcal{H}(Q,P) = \mathcal{H}(q,p) + \cancelto{0}{\dfrac{\partial F}{\partial t}} \Longrightarrow \mathcal{H}(Q,P) = \mathcal{H}(q,p) \\ * \ Q = Q(q,p) \longrightarrow Q = -p \Longrightarrow p = -Q \\ * \ P = P(q,p) \longrightarrow P = q + Ap^2 \Longrightarrow q = P - AQ^2 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ Mismo Hamiltoneano pero sustituyendo a las nuevas coordenadas

• $\mathcal{H}(q,p) = \dfrac{p^2}{2m} + mgq \Longrightarrow \mathcal{H}(Q,P) = \dfrac{Q^2}{2m} + mg(P - AQ^2) \Longrightarrow \mathcal{H}(Q,P) = mgP + \dfrac{Q^2}{2m} - mgAQ^2$

d) Para que Q sea una variable cíclica $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = 0 \longrightarrow$ Que no exista dependencia explícita con Q en $\mathcal{H}$

$\Longrightarrow \dfrac{\cancel{Q^2}}{2m} - mgA\cancel{Q^2} = 0 \Longrightarrow A = \dfrac{1}{2m^2g}$ $\qquad \Longrightarrow \mathcal{H} = mgP$

e) Con el nuevo Hamiltoneano $\mathcal{H} = mgP$

* $\dot{Q} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = mg \implies Q = mgt + Q_0$

* $\dot{P} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = 0 \implies P$: constante $= \dfrac{E}{mg} = c$

d) Ahora hay que regresar la transformación canónica

$$\begin{cases} p = -Q \\ q = P - AQ^2 \end{cases} \implies \begin{cases} p = -mgt - Q_0 \\ q = c - A(-mgt + Q_0)^2 = c - \dfrac{1}{2m^2g}(-mgt - Q_0)^2 = c - \dfrac{Q_0^2}{2m^2g} - \dfrac{Q_0 t}{m} - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$= q_0 + \dot{q}_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Corchetes de Poisson

Problema 1.

Muestre que las Ecuaciones de Hamilton del movimiento pueden escribirse como términos de los corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \{q, \mathscr{H}\}_{q,p},\\ \dot{p} &= \{p, \mathscr{H}\}_{q,p}.\end{aligned}$$

$$[q, \mathscr{H}]_{qp} = \cancelto{1}{\frac{\partial q}{\partial q}} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} - \cancelto{0}{\frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p}} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} = \dot{q}$$

$$[p, \mathscr{H}]_{q,p} = \cancelto{0}{\frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p}} - \cancelto{1}{\frac{\partial p}{\partial p}} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q} = \dot{p}$$

Problema 2.

Un Hamiltoniano tiene la forma:

$$\mathscr{H}(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1p_1 - q_2p_2 + aq_1^2 - bq_2^2,$$

donde a y b son constantes:

a. Usando el método de Corchetes de Poisson, muestre que:

$$F_1 = q_1q_2$$
$$F_2 = \frac{1}{q_1}(p_2 + bq_2)$$

son constantes del movimiento.

b. Muestre que $\{F_1, F_2\}$ es también una constante del movimiento.

c. ¿El Hamiltoniano es constante? Chequeé esto, encontrando q_1, q_2, p_1 y p_2 son funciones explícitas del tiempo.

Si se son constantes del movimiento

$$\frac{dF_0}{dt} = [F_0, \mathscr{H}] + \frac{\partial F_0}{\partial t} = 0 \Rightarrow [\mathscr{H}, F_0] = \frac{\partial F_0}{\partial t}$$ como no hay dependencia explícita con t en F_1 y F_2

$$\Rightarrow [\mathscr{H}, F_0] = 0 \Rightarrow [F_0, \mathscr{H}] = 0$$

* Para $F_1 = q_1q_2$

$$[F_1, \mathscr{H}]_{(q_1,p_1),(q_2,p_2)} = \frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_1} - \cancel{\frac{\partial F_1}{\partial p_1}}^{0}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_1} + \frac{\partial F_1}{\partial q_2}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_2} - \cancel{\frac{\partial F_1}{\partial p_2}}^{0}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_2}$$

$$= q_2(q_1) + q_1(-q_2) = 0$$

* Para $F_2 = \frac{1}{q_1}(p_2 + bq_2) = \frac{\partial F_2}{\partial q_1}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_1} - \cancel{\frac{\partial F_2}{\partial p_1}}^{0}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_1} + \frac{\partial F_2}{\partial q_2}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_2} - \frac{\partial F_2}{\partial p_2}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_2}$

$$= -\frac{(p_2 + bq_2)}{q_1^{\cancel{2}}}\cdot(\cancel{q_1}) + \frac{b}{q_1}\cdot(-q_2) - \frac{1}{q_1}\cdot(-p_2 - 2bq_2)$$

$$= \frac{-p_2 - bq_2}{q_1} - \frac{b}{q_1}q_2 + \frac{1}{q_1}\cdot(p_2 + 2bq_2)$$

$$= \frac{1}{q_1}\left[-\cancel{p_2} - \cancel{bq_2} - \cancel{bq_2} + \cancel{p_2} + \cancel{2bq_2}\right] = 0$$

$[F_1, F_2]$: constante $\quad \frac{d}{dt}[F_1, F_2] = \left[\frac{dF_1}{dt}, F_2\right] + \left[F_1, \frac{dF_2}{dt}\right]$

$$= \left[\left([F_1, \mathscr{H}] + \cancel{\frac{\partial F_1}{\partial t}}^{0}\right), F_2\right] + \left[F_1, \left([F_2, \mathscr{H}] + \cancel{\frac{\partial F_2}{\partial t}}^{0}\right)\right]$$

$$= \left[\underbrace{[F_1, \mathscr{H}]}_{=0}, F_2\right] + \left[F_1, \underbrace{[F_2, \mathscr{H}]}_{=0}\right]$$

$$= [0, F_2] + [F_1, 0] = 0$$

$$\Rightarrow [F_1, F_2] = \text{constante}$$

$$\mathcal{H} = q_1 p_1 - q_2 p_2 + a q_1^2 - b q_2^2$$

$$\dot q_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = q_1 \qquad \dot q_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = -q_2$$

$$\dot p_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = -p_1 - 2a q_1 \qquad \dot p_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = +p_2 + 2b q_2$$

$$\dot q_1 = q_1 \Rightarrow \frac{dq_1}{dt} = q_1 \Rightarrow \int \frac{dq_1}{q_1} = \int dt \Rightarrow q_1 = Ae^{t} \qquad \dot q_2 = -q_2 \Rightarrow q_2 = Be^{-t}$$

$$\dot p_1 = -p_1 - 2a q_1$$
$$\dot p = -p_1 - 2aAe^{t}$$
$$(D+1)p_1 = -2aAe^{t} \qquad y_h = Ce^{-t}$$
$$D(D+1)p_1 = -2aAe^{t}$$
$$D(D+1)p_1 - (D+1)p_1 = 0$$
$$(D+1)(D-1)p_1 = 0$$
$$S = \{1, -1\}$$
$$p_1 = c_1 e^{t}$$
$$\dot p_1 = c_1 e^{t}$$

En la EDO:

$$c_1 e^{t} = -c_1 e^{t} - 2aAe^{t}$$
$$\cancel{2} c_1 \cancel{e^{t}} = -\cancel{2} aA \cancel{e^{t}}$$
$$c_1 = -aA$$
$$\Rightarrow p_1 = Ce^{-t} - aAe^{t}$$

$$\dot p_2 = p_2 + 2b q_2$$
$$\Rightarrow \dot p_2 = p_2 + 2bBe^{-t}$$
$$\Rightarrow (D-1)p_2 = 2bBe^{-t} \qquad y_h = De^{+t}$$
$$\Rightarrow D(D-1)p_2 = -2bBe^{-t}$$
$$D(D-1)p_2 + (D-1)p_2 = 0$$
$$\Rightarrow (D-1)(D+1)p_2 = 0$$
$$p_2 = c_3 e^{-t} + \cancel{c_4 e^{t}}$$
$$\Rightarrow p_2 = c_3 e^{-t}$$
$$\Rightarrow -c_3 e^{-t} = c_3 e^{-t} + 2bBe^{-t}$$
$$\Rightarrow -\cancel{2} c_3 \cancel{e^{-t}} = \cancel{2} bB \cancel{e^{-t}}$$
$$\Rightarrow c_3 = -bB$$
$$\Rightarrow p_2 = De^{+t} - bBe^{-t}$$

$$\begin{cases} q_1 = Ae^{t} \\ q_2 = Be^{-t} \\ p_1 = Ce^{-t} - aAe^{t} \\ p_2 = De^{t} - bBe^{-t} \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = q_1 p_1 - q_2 p_2 + a q_1^2 - b q_2^2$$

$$\mathcal{H} = Ae^{t}(Ce^{-t} - aAe^{t}) - Be^{-t}(De^{t} - bBe^{-t}) + aA^2e^{2t} - bB^2e^{-2t}$$
$$= AC \cancel{- aA^2e^{2t}} - BD + \cancel{bB^2e^{-2t}} \cancel{+ aA^2e^{2t}} \cancel{- bB^2e^{-2t}}$$
$$= AC - BD \rightarrow \mathcal{H} \text{ no depende explícitamente de } t \rightarrow \mathcal{H} \text{ constante}$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\dot q + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\dot p + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \cancel{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Problema 3.

Sea $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, \vec{\boldsymbol{p}})$ cualquier función que tiene simetría esférica alrededor del origen (invariante bajo rotaciones). Demuestre que si es cierto, la dependecia de función φ es con la posición y el momentum lineal es de la forma r^2, p^2 y $\vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}$.

$[\varphi, \vec{L}] = 0$