PART

I

Mecánica Newtoniana

Section 1

Vectores

Esto ya deberían saberlo y probablemente se actualice de último :)

SECTION 2

Mecánica Newtoniana para una partícula

A continuación se expresará la mecánica de partículas.

SUBSECTION 2.1

Leyes de Newton

Comenzando con algunos conceptos claves para el desarrollo de las leyes de Newton:

Definition 1 (**Fuerza**) Fuerza es el nombre que se le da a la interacción entre un cuerpo y su entorno, la cual es capaz de afectar el estado del cuerpo. Las fuerzas son cantidades vectoriales, por lo que poseen magnitud y dirección; su magnitud es dada en unidades de newton N.

Definition 2 (**Momentum Lineal**) Momentum lineal o cantidad de movimiento, ambos se refieren a una cantidad vectorial dada por la siguiente ecuación:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.1}$$

Las leyes de Newton tal y como se expresarán a continuación son unicamente válidas para sistemas de referencias **inerciales**, es decir, sistemas de referencia que no poseen ningun tipo de aceleración.

Un estado de **equilibrio** se refiere a que el cuerpo o sistema de interés se encuentra movientodose con velocidad lineal constante (**equilibrio dinámico**) o se encuentra en reposo (**equilibrio estático**).

Definition 3 (**Primera Ley de Newton o Ley de la Inercia**) Un cuerpo mantiene su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta lo perturbe. Dicho de otra forma, un cuerpo siempre mantendrá su estado de equilibrio a menos de que una fuerza neta llegue a afectarlo.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \tag{2.2}$$

Definition 4 (**Segunda Ley de Newton**) Un cuerpo que experimenta una fuerza neta diferente de cero, tendrá como resultado un cambio en su momentum lineal.

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \tag{2.3}$$

Suponiendo que la masa es constante para el cuerpo de interés, la primera ley de Newton también se puede escribir de la forma:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.4}$$

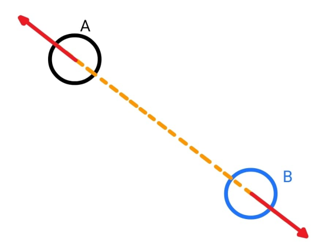
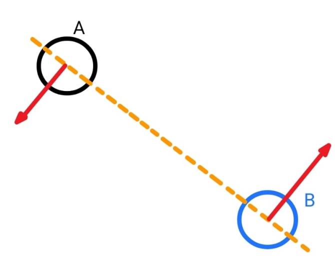


Figura 1. Situación del enunciado fuerte

Definition 5 (**Tercera Ley de Newton o Ley de Acción-Reacción**) Considere dos cuerpos denotados como A y B que presentan algún tipo de interacción entre sí, se dice que: Toda **acción** que realice el cuerpo A sobre el cuerpo B le corresponde una **reacción** que proveniente del cuerpo B. Estas **acciones** y **reacciones** corresponden a fuerzas internas del sistema (cuerpos A y B) debido a su interacción, dichas fuerzas poseen la misma magnitud y su dirección es contraria.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \tag{2.5}$$



Para trabajar con esta ley hay que tomar cuenta cierta ambiguedad que nos lleva a los siguientes enunciados de la tercera ley:

- **Enunciado Fuerte:** Los vectores correspondientes a las fuerzas de **acción** y **reacción** se encuentran sobre una misma recta, es decir, sí se conocen las direcciones de las fuerzas de **acción** y **reacción** es posible trazar una recta (conocida como línea de acción) que una los vectores de fuerzas y sea paralela a estos.
- **Enunciado Débil:** No ocurre lo anterior. Es imposible unir los vectores de las fuerzas de **acción** y **reacción** por medio de una recta que sea paralela a ambos vectores.

Además de lo anterior, es preciso destacar que la **Tercera Ley de Newton** no es una ley general de la naturaleza y se puede establecer que toda fuerza que dependa de velocidades no obedecerá esta ley.

Subsection 2.2

Trabajo y Energía

Definition 6 (**Trabajo**) Corresponde a la cantidad generada al tomar el producto punto de la fuerza ejercida sobre un cuerpo a lo largo de todo su desplazamiento desplazamiento desde una punto A a un punto B.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.6}$$

Definition 7 (**Fuerza conservativa**) Una fuerza $\vec{F}$ es conservativa si se puede escribir de la forma:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{2.7}$$

A partir de las ecuaciones 2.3 y 2.6:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Ejerciendo el producto punto y trabajando por índices:

$$W = \int_A^B \sum_{i=1}^{3} \frac{dp_i}{dt} dr_i$$

Suponiendo que la masa es constante, la derivada temporal del momentum lineal es de la forma: $\frac{dp_i}{dt} = m\frac{dv_i}{dt}$:

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i = \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B \frac{dv_i}{dt} dr_i \frac{dt}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B dv_i \underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{=v_i} \cancelto{1}{\frac{dt}{dt}} \\
&= \sum_{i=1}^{3} m \int_A^B v_i dv_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_i^2 \Big|_A^B = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_{iB}^2 - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m v_{iA}^2
\end{aligned}
$$

Definition 8 (**Energía Cinética Traslacional**) Corresponde al trabajo necesario para comenzar a mover un cuerpo desde el reposo hasta la rapidez $\vec{v}$.

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} v_i^2 \tag{2.8}$$

Theorem 1 (**Trabajo - Energía Cinética**)

$$W = \Delta T \tag{2.9}$$

Regresando a la definición 2.6 pero ahora tomando la fuerza que es ejercida sobre el cuerpo como una fuerza conservativa, ecuación 2.7.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -V_B + V_A$$

Definition 9 (**Energía Potencial**) Corresponde a la capacidad de un cuerpo de ejercer trabajo se denomina energía potencial. Ahora se presentan algunos ejemplos de energías potenciales.

$$V = \begin{cases} mgh \\ \frac{1}{2} k x^2 \\ \frac{-GMm}{r} \\ \frac{-K q_1 q_2}{r} \\ \vdots \end{cases} \tag{2.10}$$

Theorem 2 (**Trabajo - Energía Potencial**)

$$W = -\Delta V \tag{2.11}$$

Subsection 2.3

Análogo rotacional de las leyes de Newton

Ahora se presentarán algunos conceptos importantes y ecuaciones para una descripción sencilla de la mecánica de partículas en rotación. Nuevamente se comenzará por los conceptos básicos análogos a los usados en las leyes de Newton y posteriormente se darán las leyes análogas.

Primerio deduciendo una relación entre la velocidad lineal $\vec{v}$ y la velocidad angular $\vec{\omega}$:

Deducir la relación velocida Lineal - Angular

Definition 10 (**Relación velocida Lineal - Angular**)

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \tag{2.12}$$

Definition 11 (**Torque**)

$$\vec{N}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.13}$$

Definition 12 (**Momentum Angular**)

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{r} \times \vec{p} = m\, \vec{r} \times \vec{v} = m\, \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})^{1} = m \left[\vec{r}^{\,2}\vec{\omega} - \vec{r}\,(\vec{r} \cdot \vec{\omega})\right] \tag{2.14}$$

En la amplia gama de casos en que se trabaja con partículas, se podrá reconocer que el producto $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = 0$ y los vectores $\vec{r}$ y $\vec{\omega}$ apuntan en una única dirección, por lo que el momentum angular tomará la siguiente forma:

$$L_{\mathcal{O}q} = mr^2\omega_q \tag{2.15}$$

[1] $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$

La **masa** *inercial* y los **momentos de inercia** están intimamente relacionados, ambos son medidas de que tan difícil es mover un cuerpo de cierta forma.

El termino *inercial* es para hacer una distinción entre la **masa inercial** (La masa dada por la aceleración de un cuerpo al estar bajo el efecto de una fuerza) y la **masa gravitacional** (La masa determinada por las fuerzas gravitacionales entre el cuerpo de interés y otros cuerpos), a pesar de que ambas cantidades **son iguales** por el principio de equivalencia.

Definition 13 (**Momentos de Inercia**)

$$I_q^{\mathcal{O}} = \sum_i m_i r_i^2 \tag{2.16}$$

Theorem 3 (**Teorema de Ejes paralelos**)

$$I_{q'} = I_q^{cm} + Md^2 \tag{2.17}$$

La demostración de este teorema tal y como se encuentra escrito aquí se le dejará al lector y se recomienda verlo como una simplificación del teorema de ejes paralelos real que se desarrollará más adelante.

Definition 14 (**Segunda Ley de Newton análoga rotacional**)

$$\sum \vec{N} = \frac{dL}{dt} = \dot{L} \tag{2.18}$$

Manteniendo la inercia constante, la ecuación se escribe de la forma:

$$\sum N_q = I_q \alpha_q \tag{2.19}$$

Donde el subíndice denota el eje respecto al cual se está realizando la suma de torques.

Definition 15 (**Energía Cinética Rotacional**)

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_q \omega_q^2 \tag{2.20}$$

Subsection 2.4
Teoremas de Conservación

Theorem 4 (**Conservación de Momentum Lineal**)

Theorem 5 (**Conservación de Momentum de Angular**)

Theorem 6 (**Conservación de la Energía**)

Subsection 2.5
Problemas resueltos

Section 3
Sistemas de partículas

Section 4
Sistemas no inerciales