

# しっかり学ぶ数理最適化 4.5.4 - 4.5.6 節

DA 須藤隼

2021/12/23

## 1 巡回セールスマン問題

本節では一般の巡回セールスマン問題に対して近似比率が有限の値を取る多項式時間アルゴリズムが（おそらく）存在しないことを示し，メトリック巡回セールスマン問題に対する近似解法を紹介する。

**定理 1.1.**  $P \neq NP$  ならば一般の巡回セールスマン問題に対して定数  $1 \leq r < \infty$  となる近似比率を持つ多項式時間アルゴリズムは存在しない

**証明.** 背理法を用いる．無向グラフ  $G = (V, E)$  の頂点の各組  $u, v \in V$  に対して，これらの距離を

$$d_{uv} = \begin{cases} 1 & \{u, v\} \in E \\ r|V| & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

とする．このとき，グラフ  $G$  にハミルトン閉路（グラフの同じ辺を 2 度は通らず，すべての頂点を巡ることのできる路）が存在すればその距離は  $|V|$  となる．一方で，グラフ  $G$  にハミルトン閉路が存在しなければ，任意の巡回路の距離は  $r|V| + 1$  以上となる．

もし，巡回セールスマン問題に対する  $r$ -近似解法が存在すれば，それを用いてグラフ  $G$  がハミルトン閉路を持つかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムを作れる．すなわち，上記の手続きによりハミルトン閉路問題を巡回セールスマン問題に変換したあとに，巡回セールスマン問題に対する  $r$ -近似解法を適用する．得られた巡回路の距離が  $r|V|$  以下ならばグラフ  $G$  にハミルトン閉路が存在し，そうでなければグラフ  $G$  にハミルトン閉路が存在しない．一方でハミルトン閉路問題は NP 完全問題であり，これは  $P \neq NP$  に反する．□

上記の巡回セールスマン問題は極端な例であり，現実問題では任意の 3 都市  $u, v, w \in V$  が以下の三角不等式を満たすことが多い：

$$d_{uv} \leq d_{uw} + d_{vw} \quad (2)$$

これが満たされるのであれば，都市  $u$  から都市  $v$  に直行する経路がつねに 2 都市間の最短路となる．例えば，巡回セールスマン問題の 2 都市間の距離を

- 2 都市間のユークリッド距離
- 無向グラフ  $G = (V, E)$  における頂点の各組  $u, v \in V$  の最短路の長さ  $f_{uv}$

等とすれば三角不等式は満たされる．以下では， $n$  個の都市と任意の 2 都市  $u, v$  間の距離  $d_{uv}$  が与えられ，この距離が三角不等式を満たすような巡回セールスマン問題を考える．また，問題例  $I$  の最適値を  $OPT(I)$  とする．

## 1.1 木二重化法

木二重化法は近似比率 2 を持つ近似解法である。4.3.1 節で示したプリム法を用いて、与えられた  $n$  個の都市を繋ぐ最小全域木  $T$  を求める。与えられた問題  $I$  における最適な巡回路を  $H^*$  とする。巡回路から辺を一本取り除くと、ある全域木が得られることから、

- $MST(I)$ : 与えられた  $n$  個の都市を繋ぐ最小全域木  $T$  の辺の長さの合計
- $OPT(I)$ : 最適な巡回路  $H^*$  の長さの合計（与問題の最適値）

とすると、 $MST(I) \leq (H^* \text{ から辺を一本取り除いた全域木}) \leq OPT(I)$  であることから、 $MST(I)$  は最適値  $OPT(I)$  の下界となることがわかる。

ここで、 $T$  の各辺  $e \in T$  を 2 本の辺に置き換え二重化した木を  $T'$  とする。この二重木  $T'$  においては各都市の次数が偶数となるため、すべての辺をちょうど 1 回ずつ通る閉路（一筆書き）が求められる。その閉路を適当な都市から出発し、既に通った都市を飛ばして一筆書きの訪問順に都市を 1 回ずつ通るような巡回路  $H$  を求めることができる。このとき、三角不等式より巡回路  $H$  の距離  $A(I)$  に対して  $A(I) < 2MST(I)$  が成り立ち、 $A(I) \leq 2MST(I) \leq 2OPT(I)$  が得られる。深さ優先探索を用いれば  $O(|V|)$  の計算時間で二重木から巡回路  $H$  を構成できるため、木二重化法の計算手間はプリム法と同じ  $O(|E| + |V| \log 2|V|)$  となる。

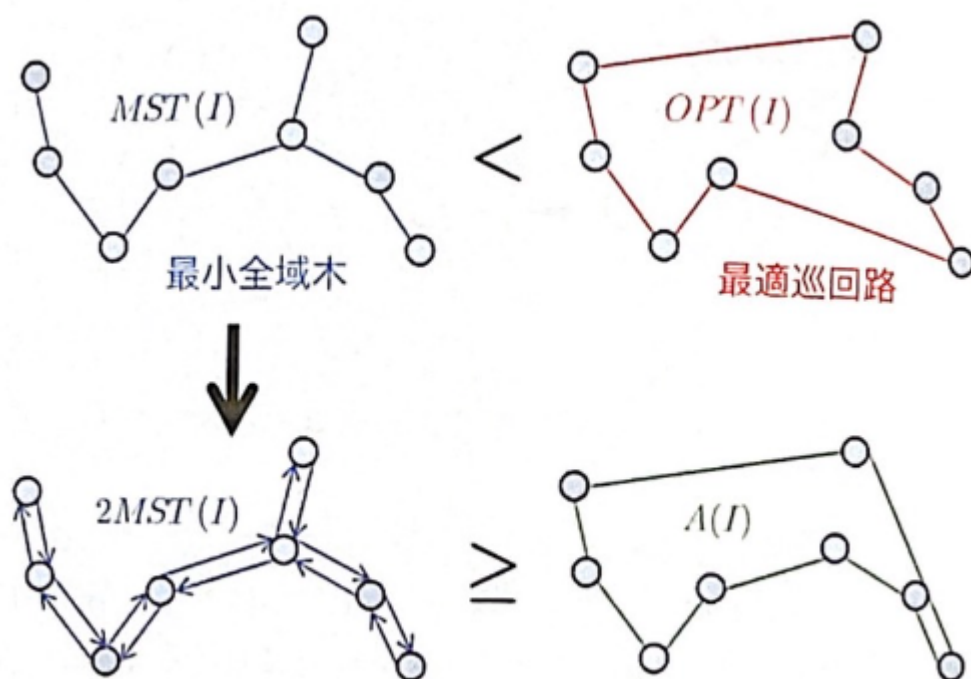


図 4.83 巡回セールスマン問題に対する木二重化法

図 1 木二重化法

木二重化法では、すべての都市の次数を偶数にすることで一筆書きの閉路を求めた。しかし次数を偶数にするためには最小全域木を二重化する必要はなく、最小全域木を求めたあとに、次数が奇数となる頂点集合に対

する最小長さの完全マッチング（集合内のすべての頂点がマッチング）を追加するだけで良い．この性質を利用し，クリストフィード（Christofides）は  $3/2$  近似解法を提案した．

## 1.2 最近追加法

最近追加法は，最小全域木問題に対する解法であるプリム法（4.3.1 節，p205）を修正したアルゴリズムで，巡回セールスマン問題の 2-近似解法である．プリム法ではある 1 頂点から木を成長させて最小全域木を求めた．最近追加法では，ある 1 つの都市から部分巡回路を成長させてすべての都市を訪問する巡回路を求める（図 2）．

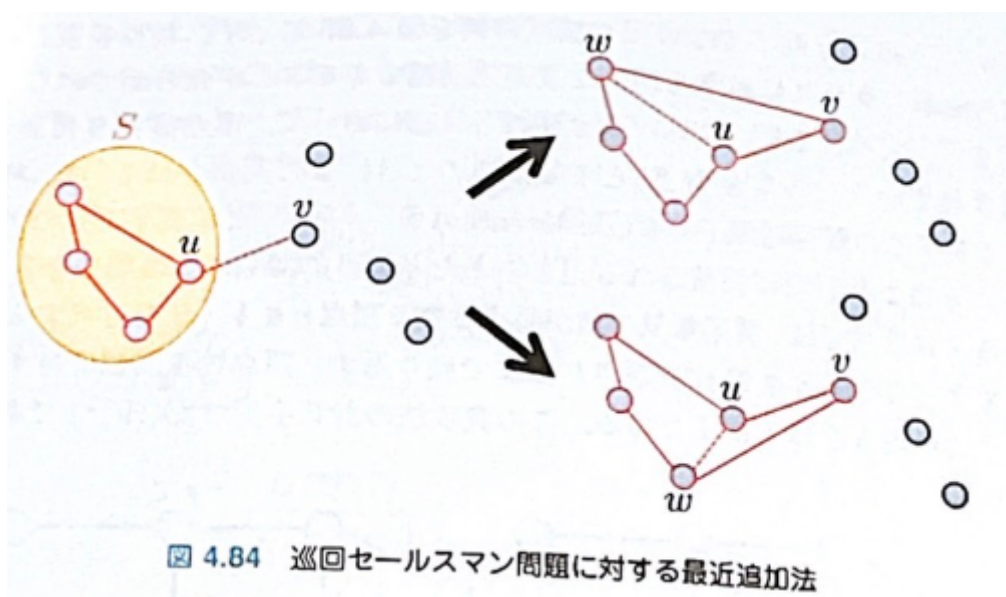


図 2 最近追加法

最近追加法の各反復では，現状の巡回路と残りの点とを分けるカット  $\delta(S)$  の中で距離が最小となる辺  $\{u, v\}$  を選んだあとに，部分巡回路において都市と隣接する都市  $w$  をつなぐ辺  $\{u, w\}$  を 2 本の辺  $\{u, v\}$  と  $\{v, w\}$  につなぎ替えて新たな部分巡回路を作る．このとき，部分巡回路の距離は  $d_{uv} + d_{uw} - d_{vw}$  だけ増加する．三角不等式  $d_{vw} \leq d_{uw} + d_{uv}$  より  $d_{uv} + d_{uw} - d_{vw} \leq 2d_{uv}$  が成り立つ．プリム法の各反復では辺  $\{u, v\}$  が追加されるため，最近追加法により求められる巡回路  $H$  の距離  $A(I)$  に対して  $A(I) \leq 2MST(I)$  が成り立ち， $A(I) \leq 2MST(I) \leq 2OPT(I)$  が得られる．

以上の最近追加法の手順は以下の通り．

1. 任意の都市を 1 つ選び  $v_0$  とする．  $\min\{d_{v_0v} | v \in V \setminus \{v_0\}\}$  を達成する都市  $v_1 \in V \setminus \{v_0\}$  を求める．  $S = \{v_0, v_1\}, H = \{\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_1\}\}$  とする．
2.  $S = V$  ならば終了
3.  $\min\{d_{uv} | \{u, v\} \in \delta(S)\}$  を達成する都市  $u^* \in S$  と  $v^* \in V \setminus S$  を求める．  $H$  において都市  $u^*$  と隣接する都市を 1 つ選び，  $S = S \cup \{v^*\}, H = H \setminus \{\{u^*, w\}\} \cup \{\{u^*, v^*\}, \{v^*, w\}\}$  として 2 に戻る．
3. では，  $d_{uv^*} + d_{v^*w} - d_{uw}$  が最小となる部分巡回路上の隣り合う都市の組  $u, w$  を選んで，辺  $\{u, w\}$  を

2本の辺  $\{u, v^*\}$  と  $\{v^*, w\}$  につなぎ替える方法も提案されており, これを最近挿入法 (nearest insertion algorithm) と呼ぶ. また,  $d_{uv} + d_{vw} - d_{uw}$  が最小となる部分巡回路の辺  $\{u, w\}$  と都市  $v \in V \setminus S$  の組合せを選ぶ方法も提案されており, これを最安挿入法 (cheapest insertion algorithm) と呼ぶ.

## 2 頂点被覆問題

**定義 2.1.** 頂点被覆 (vertex cover)

無向グラフ  $G = (V, E)$  と各頂点  $v \in V$  の重み  $c_v$  が与えられているとする. 任意の辺  $e \in E$  が頂点集合  $S \subseteq V$  に含まれる少なくとも 1 つの頂点  $v \in S$  を端点に持つとき, 頂点集合  $S$  を頂点被覆 (vertex cover) と呼ぶ.

頂点の重みの合計  $\sum_{v \in S} c_v$  が最小となる頂点被覆  $S$  を求める問題を頂点被覆問題 (vertex cover problem) と呼ぶ. 各頂点の重みが 1 のグラフに対する最小の頂点被覆と最小でない頂点被覆の例を図 3 に示す. 頂点被覆問題は NP 困難のクラスに属する組合せ最適化問題であることが知られている.

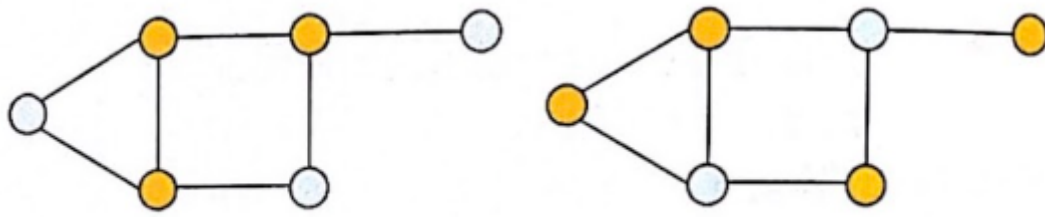


図 4.85 最小の頂点被覆 (左) と最小でない頂点被覆 (右) の例

図 3 頂点被覆問題

### 2.1 頂点被覆問題に対する貪欲法

まず, 頂点被覆問題に対する貪欲法を紹介する. 貪欲法の各反復において, 頂点集合  $S$  により被覆されている辺の集合を  $E'$  とする. このとき, まだ選択されていない頂点  $v \in V \setminus S$  の費用効果 (cost effectiveness) を  $\frac{c_v}{|\delta(v) \setminus E'|}$  と定義する. これは 頂点  $v$  により新たに被覆される辺 1 本あたりの目的関数の値の増分を表している. 貪欲法では, 費用効果の値が最小となる頂点  $v \in V \setminus S$  を選択する手続きをすべての辺  $e \in E$  が被覆されるまで繰り返す. 頂点被覆問題に対する貪欲法の手続きを以下にまとめる. この貪欲法の計算手間は  $O(|V|^2)$  である.

○頂点被覆問題に対する貪欲法

1.  $S = \emptyset, E' = \emptyset$  とする.
2.  $E' = E$  ならば終了
3.  $\min \left\{ \frac{c_v}{|\delta(v) \setminus E'|} \mid v \in V \setminus S \right\}$  を達成する頂点  $v^*$  を求める.  $S = S \cup \{v^*\}, E' = E' \cup \delta(v^*)$  として 2. に戻る.

貪欲法が頂点被覆問題に対する  $H_{|E|}$ -近似解法となることを以下に示す. ここで,  $H_k = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/k$  を調和級数 (harmonic series) と呼ぶ.

**定理 2.1.** 頂点被覆問題に対する貪欲法は  $H_{|E|}$ -近似解法である。

**証明.** 頂点被覆問題の問題例  $I$  の最適値  $OPT(I)$ , 貪欲法により求められる実行可能解の目的関数の値を  $A(I)$  とする。グラフの辺  $e \in E$  を貪欲法で被覆された順に整列し,  $e_1, e_2, \dots, e_{|E|}$  とする。各反復において, 頂点  $v \in V \setminus S$  により新たに被覆された辺  $e \in \delta(v) \setminus E'$  の価格を  $p_e = \frac{c_v}{|\delta(v) \setminus E'|}$  と定義すると,  $A(I) = \sum_{k=1}^{|E|} p_{e_k}$  と表せる。

最適解を  $S^*$  とする。ある反復において辺  $e_k$  が新たに被覆される直前では, 最適解から貪欲法に選ばれたものを除いた頂点集合  $S^* \setminus S$  により, 辺  $e_k$  を含む被覆されていない  $|E| - k + 1$  本の辺を高々  $OPT(I)$  の重みで被覆できるため, まだ選択されていない頂点  $v \in V \setminus S$  の中に  $\frac{OPT(I)}{|E| - k + 1}$  以下の費用効果を持つ頂点が存在する。各反復では費用効果の値が最小となる頂点を選ぶため, 辺  $e_k$  の価格  $p_{e_k}$  は  $\frac{OPT(I)}{|E| - k + 1}$  以下となる。したがって,

$$\begin{aligned} A(I) &= \sum_{k=1}^{|E|} p_{e_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{|E|} \frac{OPT(I)}{|E| - k + 1} \\ &= OPT(I) \left( \frac{1}{|E|} + \frac{1}{|E| - 1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= H_{|E|} OPT(I) \end{aligned}$$

より  $A(I) \leq H_{|E|} OPT(I)$  となる。 □

この貪欲法の近似比率は調和平均となっているため, どのような定数でも抑えられないことが知られている。

## 2.2 主双対法

次に, 2-近似解法である主双対法 (primal-dual method) を紹介する。主双対法は, 線形計画緩和問題の双対問題を用いて元の問題に対する実行可能解を求める方法である。  $x_v$  は変数で, 頂点  $v \in V$  を選べば  $x_v = 1$ , そうでなければ  $x_v = 0$  の値をとる。このとき, 頂点被覆問題は以下の整数計画問題に定式化できる。

$$\begin{aligned} \underset{x}{\text{minimize}} \quad & \sum_{v \in V} c_v x_v \end{aligned} \tag{3a}$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & x_u + x_v \geq 1, \{u, v\} \in E, \\ & x_v \in \{0, 1\}, v \in V \end{aligned} \tag{3b}$$

制約条件は, 各辺  $\{u, v\} \in E$  の少なくとも1つの端点を選ばれることを表す。

各変数の整数条件を0に緩和すると線形計画緩和問題が得られる。線形計画緩和問題の双対問題は, 以下の線形計画問題に定式化できる。

$$\underset{\mathbf{y}}{\text{minimize}} \quad \sum_{e \in E} y_e \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} y_e \leq c_v, v \in V, \\ & y_e \geq 0, e \in E \end{aligned} \quad (4b)$$

ここで, 線形計画緩和問題とその双対問題の実行可能解の組  $(x, y)$  が最適解 であるための必要十分条件は, 以下の相補性条件

$$x_v \left( c_v - \sum_{e \in \delta(v)} y_e \right), v \in V \quad (5)$$

$$y_e (x_u + x_v - 1) = 0, e = \{u, v\} \in E \quad (6)$$

が成り立つことである.

この相補性条件から以下の性質が得られる. ここで, 変数  $x_v (v \in V)$  に対応する被約費用を  $\bar{c}_v(\mathbf{y}) = c_v - \sum_{e \in \delta(v)} y_e$  と定義する.

**定理 2.2.**  $\bar{\mathbf{y}}$  を双対問題 4a の最適解とする. 頂点集合  $S = \{v \in V | \bar{c}_v(\bar{\mathbf{y}}) = 0\}$  は頂点被覆問題の実行可能解である.

**証明.** 背理法を用いる. 頂点集合  $S$  が実行可能解でないと仮定し, 被覆されてない辺を  $e' = \{u, v\} \in E$  とする.

$$\epsilon = \min\{\bar{c}_u(\bar{\mathbf{y}}), \bar{c}_v(\bar{\mathbf{y}})\} \quad (7)$$

とすると,  $\bar{c}_u(\bar{\mathbf{y}}) > 0, \bar{c}_v(\bar{\mathbf{y}}) > 0$  より  $\epsilon > 0$  である. 辺  $e'$  について  $y'_{e'} = \bar{y}_{e'} + \epsilon$ , それ以外の辺  $e \in E \setminus \{e'\}$  について  $y'_e = \bar{y}_e$  として, 双対問題の新たな解  $\mathbf{y}'$  を作る. すると, 辺  $e'$  の端点  $u$  では,

$$\begin{aligned} \bar{c}_u(\mathbf{y}') &= c_u - \sum_{e \in \delta(u)} y'_e \\ &= c_u - \sum_{e \in \delta(u)} \bar{y}_e - \epsilon \\ &= \bar{c}_u(\bar{\mathbf{y}}) - \min\{\bar{c}_u(\bar{\mathbf{y}}), \bar{c}_v(\bar{\mathbf{y}})\} \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. もう一方の端点  $v$  でも同様に  $\bar{c}_v(\mathbf{y}') \geq 0$  が成り立つため  $\mathbf{y}'$  は双対問題の実行可能解である. さらに,

$$\sum_{e \in E} y'_e > \sum_{e \in E} \bar{y}_e$$

が成り立つが, これは  $\bar{\mathbf{y}}$  が双対問題の最適解であることに反する □

頂点被覆問題の問題例 I の最適値を  $OPT(I)$ , 主双対法により求められる実行可能解の目的関数の値を  $A(I)$  とする. 頂点集合  $S = \{v \in V | \bar{c}_v(\bar{\mathbf{y}}) = 0\}$  に対応する実行可能解を  $\mathbf{x}$  とする. すなわち,  $v \in S$  ならば  $x_v = 1$ , そうでなければ  $x_v = 0$  の値をとる. 線形計画緩和問題の最適値を  $LP(I)$  とすると

$$\begin{aligned}
A(I) &= \sum_{v \in V} c_v x_v \\
&= \sum_{v \in V} x_v \left( \sum_{e \in \delta(v)} \bar{y}_e \right) \\
&= \sum_{e=u,v \in E} \bar{y}_e (x_u + x_v) \\
&\leq 2 \sum_{e \in E} \bar{y}_e = 2LP(I)
\end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、 $A(I) \leq 2LP(I) \leq 2OPT(I)$  が成り立つ。双対問題の実行可能解を  $\mathbf{y}$  とすると  $\sum_{e \in E} y_e \leq LP(I)$  が成り立つため、頂点集合  $S = \{v \in V | \bar{c}(\mathbf{y}) = 0\}$  が頂点被覆問題の実行可能解であれば、やはり、 $A(I) \leq 2LP(I) \leq 2OPT(I)$  は成り立つ。主双対法は、元の問題の実行不能解と線形計画緩和問題の双対問題の実行可能解  $\mathbf{y}$  から始める。 $\mathbf{x}$  は整数解を保ちつつ実行可能解に近づけるように、 $\mathbf{y}$  は実行可能解を保ちつつ下界が改善するように更新を繰り返し、 $\mathbf{x}$  が実行可能解となった時点で終了する。主双対法では、主相補性条件 5 はつねに満たすが双対相補性条件 6 は必ずしも満たさない  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を出力する。頂点被覆問題に対する主双対法の手続きを以下にまとめる。この主双対法の計算手間は  $O(|E|)$  である。

○頂点被覆問題に対する主双対法

1.  $S = \emptyset, E' = \emptyset, \bar{c}_v = c_v (v \in V), y_e = 0 (e \in E)$  とする。
2.  $E' = E$  ならば終了
3. 辺  $e = \{u, v\} \in E \setminus E'$  を選ぶ。ここで、 $\bar{c}_u \geq \bar{c}_v$  とする。 $y_e = y_e + \bar{c}_v, \bar{c}_u = \bar{c}_u - \bar{c}_v, \bar{c}_v = 0, S = S \cup \{v\}, E' = E' \cup \delta(v)$  として 2. に戻る。

主双対法の実行例を図 4 に示す。

## 2.3 丸め法

最後に、近似比率 2 の丸め法を紹介する。丸め法では線形計画緩和問題の最適解から元の頂点被覆問題の実行可能解を求める。線形計画緩和問題の最適解を  $\bar{\mathbf{x}}$  とする。このとき、整数解  $\mathbf{x}$  を

$$x_v = \begin{cases} 1 & \bar{x}_v \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases} \quad v \in V \quad (8)$$

とする。また、整数解  $\mathbf{x}$  に対応する頂点集合を  $S = \{v \in V | x_v = 1\}$  とする。線形計画緩和問題の最適解  $\bar{\mathbf{x}}$  は  $\bar{x}_u + \bar{x}_v \geq 1 (\{u, v\} \in E)$  を満たすため、どの辺  $\{u, v\} \in E$  においても端点  $u, v$  の少なくとも一方は頂点集合  $S$  に含まれる。すなわち、上記の方法で求めた整数解  $\mathbf{x}$  は頂点被覆問題の実行可能解である。頂点被覆問題の問題例  $I$  の最適値を  $OPT(I)$ 、丸め法により求められる実行可能解の目的関数の値を  $A(I)$ 、線形計画緩和問題の最適値を  $LP(I)$  とすると、

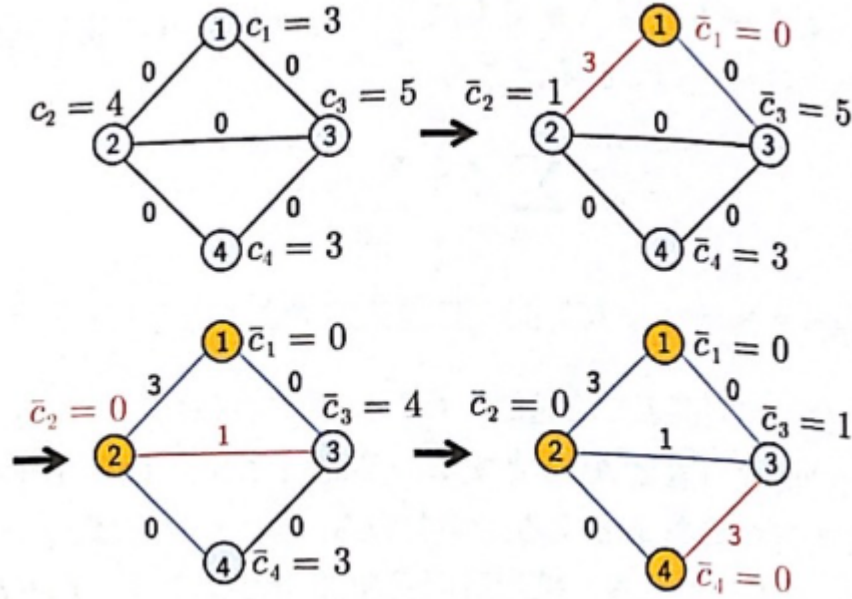


図 4 頂点被覆問題に対する主双対法の実行例

$$\begin{aligned}
 LP(I) &= \sum_{v \in V} c_v \bar{x}_v \\
 &\geq \sum_{v \in S} c_v \bar{x}_v \\
 &\geq \frac{1}{2} \sum_{v \in S} c_v = \frac{1}{2} A(I)
 \end{aligned} \tag{9}$$

が成り立つ．すなわち， $A(I) \leq 2LP(I) \leq 2OPT(I)$  が成り立つ．

### 3 ナップザック問題

4.1.2 節では，整数計画問題の例としてナップザック問題を紹介した．また，4.3.2 節と 4.4.1 節ではナップザック問題に対する動的計画法と分枝限定法をそれぞれ紹介した．本節では，ナップザック問題に対して貪欲法と動的計画法にもとづく近似解法を紹介する．

#### 3.1 ナップザック問題に対する貪欲法

まず， $\frac{1}{2}$  近似解法である貪欲法を紹介する．貪欲法は荷物を単位重さあたりの価値  $\frac{p_i}{w_j}$  の降順に，袋に詰め込める荷物の重さの合計の上限  $C$  を超えない限り詰め込む方法である．より正確には荷物を単位重さあたりの価値  $\frac{p_i}{w_j}$  の降順に整列したあとに，実行可能解  $x$  を

$$x_j = \begin{cases} 1 & w_j \leq C - \sum_{k=1}^{j-1} w_k \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n, \tag{10}$$



とする。

ナップザック問題の問題例  $I$  の最適値を  $OPT(I)$ 、貪欲法により求められる実行可能解の目的関数の値を  $A'(I)$  とする。ここで、 $A'(I)$  と、もっとも 価値  $p_j$  の高い荷物を 1 つだけを詰め込んで得られる実行可能解の目的関数の値  $p_{\max} = \max_{j=1, \dots, n} p_j$  の大きい方を考えて  $A(I) = \max\{A'(I), p_{\max}\}$  とする。以下では、 $\frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{p_n}{w_n}$  を満たすと仮定する。定理 4.8 (4.4.1 節) より、ナップザック問題の各変数  $x_j$  の整数制約  $x_j \in \{0, 1\}$  を  $0 \leq x_j \leq 1$  に緩和した線形計画緩和問題の最適解  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^t$  は、 $\sum_{j=1}^k w_j \leq C$  かつ  $\sum_{j=1}^{k+1} w_j > C$  を満たす  $k$  を用いて、

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1 & j = 1, \dots, k \\ \frac{C - \sum_{j=1}^k w_j}{w_{k+1}} & j = k+1, \\ 0 & j = k+2, \dots, n \end{cases} \quad (11)$$

となる。線形計画緩和問題の最適値を  $LP(I)$  とすると、 $p_{k+1} \leq p_{\max}$ ,  $\bar{x}_{k+1} = \frac{C - \sum_{j=1}^k w_j}{w_{k+1}} < 1$  より、

$$\begin{aligned} LP(I) &= \sum_{j=1}^k p_j + \frac{C - \sum_{j=1}^k w_j}{w_{k+1}} p_{k+1} \\ &\leq A'(I) + p_{\max} \\ &\leq 2A(I) \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立つ。すなわち、 $A(I) \geq \frac{1}{2}LP(I) \geq \frac{1}{2}OPT(I)$  が成り立つ。

### 3.2 ナップザック問題に対する動的計画法

次に、定数  $\epsilon (\epsilon > 0)$  に対して近似比率  $1 - \epsilon$  を持つ動的計画法を紹介する。袋の容量  $C$  とナップザック問題の最適値の上界  $P = \sum_{j=1}^n p_j$  がいずれも極端に大きい場合は、動的計画法の計算手間が増大して実用的ではなくなる。そこで、各荷物  $j$  の価値  $p_j$  を定数  $M$  で割り整数値に切り下げた価値  $\tilde{p}_j = \lfloor \frac{p_j}{M} \rfloor$  に変更した問題例を生成し、この問題例に対して 4.3.2 節で紹介した 2 番目の動的計画法を適用して実行可能解を求める。ここで、 $M = \frac{\epsilon p_{\max}}{n}$  とする。このとき、ナップザック問題の最適値の上界を  $np_{\max}$  と見積もると動的計画法の計算手間は  $O(n^2 p_{\max}) = O(n^3)$  となり、多項式時間アルゴリズムである。

ナップザック問題の問題例  $I$  の最適解を  $x^*$ 、最適値を  $OPT(I)$  とする。また、動的計画法により求められる実行可能解を  $x'$ 、その目的関数の値を  $A(I)$  とする。 $\tilde{p}_j = \lfloor \frac{p_j}{M} \rfloor$  より  $p_j - M\tilde{p}_j \leq M$  が成り立つ。したがって、任意の実行可能解  $x$  に対して

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j - M \sum_{j=1}^n \tilde{p}_j x_j \leq nM \quad (13)$$

が成り立つ。また、 $\tilde{p}_j \leq \frac{p_j}{M}$  と、動的計画法で求めた実行可能解  $x'$  が各荷物  $j$  の価値  $p_j$  を価値  $\tilde{p}_j$  に変更した問題例における最適解であることから

$$\begin{aligned} A(I) &= \sum_{j=1}^n p_j x'_j \geq M \sum_{j=1}^n \tilde{p}_j x'_j \geq M \sum_{j=1}^n \tilde{p}_j x_j^* \\ &\geq \sum_{j=1}^n p_j x_j^* - nM = OPT(I) - \epsilon p_{\max} \geq (1 - \epsilon)OPT(I) \end{aligned} \quad (14)$$

が成り立つ.

このように, パラメータ  $\epsilon > 0$  に対して近似比率  $1 - \epsilon$  を持つ近似解法を与える枠組みを近似スキームと呼ぶ. パラメータ  $\epsilon$  が定数に固定されている場合に, 近似スキームにより与えられる近似解法が問題例の入力データの長さに対する多項式時間アルゴリズムならば, これを多項式時間近似スキームと呼ぶ. さらに, 近似スキームにより与えられる近似解法が問題例の入力データの長さ  $\frac{1}{\epsilon}$  に対する多項式時間アルゴリズムならば, これを完全多項式時間近似スキームと呼ぶ. 本節で紹介したナップサック問題に対する近似スキームは完全多項式時間近似スキームである.