IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Testes de Hipóteses Não Paramétricos - Parte 3
Testes à igualdade de duas distribuições

Licenciatura em Engenharia Informática

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal
Instituto Politécnico de Setúbal
2021-2022

Testes de Hipóteses Não Paramétricos:

Teste à igualdade de duas distribuições

- Vamos estudar os testes não paramétricos que habitualmente são usados como alternativa aos testes paramétricos da diferença de médias.

- A vantagem destes testes não paramétricos deve-se ao facto de não ser necessário impor qual a forma da distribuição de cada população (nos testes paramétricos foi sempre imposto que a distribuição era Normal ou pelo menos aproximadamente Normal). Aqui apenas interessa testar se a distribuição pode ser considerada a mesma.

Teste à igualdade de duas distribuições

- Suponha que tem duas amostras e pretende verificar se podem ser consideradas provenientes da mesma população, ou seja, pretende testar:

$$H_0 - \text{ As duas amostras são provenientes de populações com a mesma distribuição}$$
$$vs$$
$$H_1 - \text{ As duas amostras são provenientes de populações com distribuição distinta}$$

- Os testes não paramétricos que habitualmente são usados como alternativa aos testes paramétricos da diferença de médias são:
  - **Teste de Wilcoxon** - para amostras emparelhadas
  - **Teste de Mann-Whitney** - para amostras independentes

Teste de Wilcoxon

Objetivo

Testar se duas amostras aleatórias emparelhadas podem ser consideradas provenientes de populações com a mesma distribuição, para tal vamos testar se as duas amostras aleatórias emparelhadas são originárias de populações com igual **mediana**.

- A importância do teste de Wilcoxon advém do facto de ser geralmente considerado como alternativa não paramétrica ao teste t para a diferença de médias (teste de hipóteses paramétrico) quando são consideradas **amostras emparelhadas**.
- Este é um teste à igualdade de distribuições para duas amostras emparelhadas e baseia-se na posição dos valores observados da variável em estudo, incorporando a amplitude das diferenças existentes entre as duas variáveis.
- Tal como no caso dos testes paramétricos, para construir a estatística de teste é necessário passar para a amostra das diferenças:

$$D_i = Y_i - X_i, \qquad i = 1, \cdots, N$$

onde X_i e Y_i representam os elementos das amostras emparelhadas.

Teste de Wilcoxon

Objetivo

Testar se duas amostras aleatórias emparelhadas podem ser consideradas provenientes de populações com a mesma distribuição, para tal vamos testar se as duas amostras aleatórias emparelhadas são originárias de populações com igual **mediana**.

Formulação das Hipóteses a Testar:

H_0- As duas amostras emparelhadas são provenientes de populações com a mesma distribuição

vs

H_1- As duas amostras emparelhadas são provenientes de populações com distribuição distinta

Seja M_D a mediana de $D = Y - X$ onde X e Y representam as populações onde foram recolhidas as amostras emparelhadas, então é possível testar:

Teste bilateral	Teste unilateral direito	Teste unilateral esquerdo
$H_0 : M_D = 0$	$H_0 : M_D = 0$	$H_0 : M_D = 0$
vs	vs	vs
$H_1 : M_D \neq 0$	$H_1 : M_D > 0$	$H_1 : M_D < 0$

Observação: Um dos pressupostos do teste é que as diferenças constituem uma variável contínua de distribuição simétrica em torno da mediana.

Teste de Wilcoxon

Estatística de Teste

Como a hipótese que está a ser testada refere-se à mediana, a estatística de teste tem por base as posições ou ordem dos dados. Sejam T^- e T^+ soma das posições com o sinal "-" e "+", respetivamente. Então

- se o teste é **bilateral**, a estatística de teste é dada por:

$$T = min\left\{T^-, T^+\right\}$$

- se o teste é **unilateral direito**, a estatística de teste é dada por:

$$T = T^-$$

- se o teste é **unilateral esquerdo**, a estatística de teste é dada por:

$$T = T^+$$

<u>Observação</u>: Existem formas alternativas de construção deste teste.

Teste de Wilcoxon

Estatística de Teste

- A estatística T do teste de Wilcoxon encontra-se tabelada.
- Na tabela encontra-se o quantil $T_{n;\alpha}$ onde n é a dimensão da amostra depois de retirados os empates e α é a probabilidade pretendida.
- Na tabela é dada a função de distribuição, ou seja, $T_{n;\alpha}$ é o quantil de probabilidade α tal que $P\left(T \leq T_{n;\alpha}\right) = \alpha$.

Observação: Para valores de $n > 10$ pode-se usar a aproximação à distribuição Normal:

$$Z = \frac{T^+ - T^-}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} R_i^2}} \sim N(0,1)$$

com R_i a ordem atribuída a $|D_i|$ com o sinal de D_i.

Teste de Wilcoxon

Cálculo do Valor Observado da Estatística de Teste sob a Hipótese H_0

- Considere duas amostras aleatórias emparelhadas de dimensão N:

$$(X_i, Y_i)\,, \qquad i = 1, \cdots, N$$

- Construir a amostra das diferenças desprezando as diferenças de valor 0:

$$D_i = Y_i - X_i, \qquad i = 1, \cdots, n \qquad \text{com } n \leq N$$

- Ordenar os valores absolutos das diferenças, $|D_i|$ e atribuir o valor da posição que ocupa:
  - o menor valor assume a posição 1 e o maior valor a posição n;
  - caso existem empates atribui-se a posição média das posições que lhes correspondiam caso tais empates não existissem.

Teste de Wilcoxon

Cálculo do Valor Observado da Estatística de Teste sob a Hipótese H_0

- Associar a cada posição o sinal "-" ou "+", de acordo com o valor da diferença que representa:
  - se a diferença for positiva, então colocar "+";
  - se a diferença for negativa, então colocar "-".
- Calcular:
  - T^-_{obs} = soma das posições com o sinal "-";
  - T^+_{obs} = soma das posições com o sinal "+".

Observação:

- A soma das n posições $= T^- + T^+$
- O software R com a função $wilcox.test()$ apenas calcula T^+.

Teste de Wilcoxon

Definição da Região Crítica

Um dos pressupostos deste teste é que a distribuição é simétrica, então, independentemente do tipo de teste (bilateral ou unilateral), pode-se considerar a região crítica como

$$RC = [0, T_{n;\alpha}]$$

- Se o teste é bilateral, o quantil $T_{n;\alpha}$ é obtido na tabela "Two-Tailed Test".
- Se o teste é unilateral, o quantil $T_{n;\alpha}$ é obtido na tabela "One-Tailed Test".

Regra de Decisão com base na Região Crítica

- Se $T_{obs} \notin RC$, então, ao nível de significância α, **a hipótese H_0 não é rejeitada**, isto é, com base na amostra há evidências estatísticas que os dados são provenientes de populações com a mesma distribuição.
- Se $T_{obs} \in RC$, então, ao nível de significância α, **a hipótese H_0 é rejeitada**, isto é, com base na amostra há evidências estatísticas que os dados são provenientes de populações com a mesma distribuição.

Teste de Wilcoxon

Cálculo do valor-p

Considerando que H_0 é verdadeira, o valor-p indica a probabilidade do valor observado da estatística de teste ocorrer:

- Se o teste é bilateral, o valor-p= $P\left(T \leq T_{obs}\right)$ é obtido na tabela "Two-Tailed Test".
- Se o teste é unilateral, o valor-p= $P\left(T \leq T_{obs}\right)$ é obtido na tabela "One-Tailed Test".

Regra de Decisão com base no valor-p

- Se valor-p $> \alpha$, então, ao nível de significância α, **a hipótese H_0 não é rejeitada**, isto é, com base na amostra há evidências estatísticas que os dados são provenientes de populações com a mesma distribuição.
- Se valor-p $\leq \alpha$, então, ao nível de significância α, **a hipótese H_0 é rejeitada**, isto é, com base na amostra há evidências estatísticas que os dados são provenientes de populações com a mesma distribuição.

O valor-p pode ser visto como o menor valor de α (nível de significância) para o qual os dados observados indicam que H_0 deve ser rejeitada.

Teste de Wilcoxon

Exemplo 1

Mediu-se a capacidade torácica de 8 indivíduos selecionados aleatoriamente. Esse grupo de indivíduos submeteu-se voluntariamente, durante um mês, a um treino especial que tinha por objetivo o aumento da capacidade torácica. No final do mês de treino, foi medida, de novo, a capacidade torácica. Os resultados de ambas as medições encontram-se na tabela seguinte:

Individuo	1	2	3	4	5	6	7	8
Antes do treino	3.5	3.6	4.1	2.9	3.4	4.2	3.9	4.1
Depois do treino	3.4	3.9	4.5	3.1	3.9	4.4	3.8	4.1

Com base nos dados apresentados, poder-se-á concluir, com um nível de significância de 5% que o treino é eficaz?

Hipótese a ser testada

- $X-$ medida da capacidade torácica antes do treino
- $Y-$ medida da capacidade torácica depois do treino
- amostras aleatórias emparelhadas
- $D = Y - X$

$$H_0 : M_D = 0 \qquad vs \qquad H_1 : M_D > 0$$

Dados

- teste unilateral direito
- nível de significância $= \alpha = 0.05$
- Construir uma tabela com a diferença dos valores das amostras:

X = Antes do treino	Y = Depois do treino	$D = Y - X$	Sinal	$\|D\|$	Ordem
3.5	3.4	-0.1	$-$	0.1	$\frac{1+2}{2} = 1.5$
3.6	3.9	0.3	$+$	0.3	5
4.1	4.5	0.4	$+$	0.4	6
2.9	3.1	0.2	$+$	0.2	$\frac{3+4}{2} = 3.5$
3.4	3.9	0.5	$+$	0.5	7
4.2	4.4	0.2	$+$	0.2	$\frac{3+4}{2} = 3.5$
3.9	3.8	-0.1	$-$	0.1	$\frac{1+2}{2} = 1.5$
4.1	4.1	0	0	0	0

- soma das posições com o sinal "-"$= T^-_{obs} = 1.5 + 1.5 = 3$
- soma das posições com o sinal "+"$= T^+_{obs} = 5 + 6 + 3.5 + 3.5 = 25$
- $n = 8 - 1 = 7$ (retirar as diferenças nulas)

Como o teste é unilateral considerar a tabela "one-Tailed Test".

Regra de Decisão através da Região Crítica

Como o teste é unilateral direito:

$$T_{obs} = T^{-}_{obs} = 3$$

$$RC = [0, T_{n;\alpha}] = [0, T_{7;0.05}] = [0, 3]$$

Como $T_{obs} = 3 \in RC$ então rejeita-se a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que o treino é eficaz, na medida em que contribui para o aumento da capacidade torácica.

Observação: Como a tabela (em papel) é muito limitada, não vamos calcular o valor-p.

R

usar a função $wilcox.test()$

e obtém-se

- $T^+_{obs} = V = 25$
- valor-$p = 0.03744$

Como valor-$p = 0.03744 \leq 0.05 = \alpha$ então rejeita-se a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que o treino é eficaz, na medida em que contribui para o aumento da capacidade torácica.

Observação: O software R com esta função apenas calcula o valor de observado de T^+, mas como a soma das n posições é igual a $T^- + T^+$ tem-se

$$T^-_{obs} = \text{ soma das } n \text{ posições } - T^+_{obs}$$

Teste de Wilcoxon

Exemplo 2

Num estudo sobre nutrição pretende-se avaliar uma determinada dieta com base na perda de peso. Num grupo de 10 pessoas analisou-se o peso antes e depois do plano de dieta. Os pesos (em kg) foram os seguintes:

Individuo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes da dieta	82.7	73.2	84.1	84.1	81.6	78.9	85.6	80.2	84.5	73.8
Depois da dieta	74.5	73.2	79.1	85.6	81.6	79.6	81.5	80.2	86.9	73.8

Com base nos dados apresentados, poder-se-á concluir, com um nível de significância de 5% que dieta é eficaz?

Hipótese a ser testada

- $X-$ peso, em kg, antes da dieta
- $Y-$ peso, em kg, depois da dieta
- amostras aleatórias emparelhadas
- $D = Y - X$

$$H_0 : M_D = 0 \qquad vs \qquad H_1 : M_D < 0$$

Dados

- teste unilateral esquerdo
- nível de significância $= \alpha = 0.05$
- Construir uma tabela com a diferença dos valores das amostras:

X = Antes da dieta	Y = Depois da dieta	$D = Y - X$	Sinal	$\|D\|$	Ordem
82.7	74.5	-8.2	$-$	8.2	6
73.2	73.2	0	0	0	0
84.1	79.1	-5	$-$	5	5
84.1	85.6	1.5	$+$	1.5	2
81.6	81.6	0	0	0	0
78.9	79.6	0.7	$+$	0.7	1
85.6	81.5	-4.1	$-$	4.1	4
80.2	80.2	0	0	0	0
84.5	86.9	2.4	$+$	2.4	3
73.8	73.8	0	0	0	0

- soma das posições com o sinal "-" $= T^{-}_{obs} = 6 + 5 + 4 = 15$
- soma das posições com o sinal "+" $= T^{+}_{obs} = 2 + 1 + 3 = 6$
- $n = 10 - 4 = 6$ (retirar as diferenças nulas)

Como o teste é unilateral considerar a tabela "one-Tailed Test".

Regra de Decisão através da Região Crítica

Como o teste é unilateral esquerdo:

$$T_{obs} = T^{+}_{obs} = 6$$

$$RC = [0, T_{n;\alpha}] = [0, T_{6;0.05}] = [0, 2]$$

Como $T_{obs} = 6 \notin RC$ então não se rejeita a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que a dieta não parece ser eficaz, na medida em que não parece contribuir para a perda de peso.

Observação: Como a tabela (em papel) é muito limitada, não vamos calcular o valor-p.

R

usar a função $wilcox.test()$

e obtém-se

- $T^+_{obs} = V = 6$
- valor-$p = 0.20084$

Como valor-$p = 0.20084 > 0.05 = \alpha$ então não se rejeita a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que a dieta não parece ser eficaz, na medida em que não parece contribuir para a perda de peso.

Observação: O software R com esta função apenas calcula o valor de observado de T^+, mas como a soma das n posições é igual a $T^- + T^+$ tem-se

$$T^-_{obs} = \text{ soma das } n \text{ posições } - T^+_{obs}$$

Teste de Wilcoxon

Exemplo 3

Com o objetivo de avaliar uma dada disciplina que está dividida em teórica e prática, um professor pediu a um grupo de alunos que realizassem dois testes, um dos testes apenas com a componente teórica e outro teste só com a componente prática. Os resultados encontram-se na tabela seguinte:

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
teste teórico	10	12	13	14	11	12.4	15	9.8	12.9	12.9
teste prático	9.8	11.6	12	14	11	13	16	12	13	13.4

Será possível concluir, para um nível de significância de 5%, que não há diferenças nos resultados dos testes?

Hipótese a ser testada

- $X-$ nota no teste teórico
- $Y-$ nota no teste prático
- amostras aleatórias emparelhadas
- $D = Y - X$

$$H_0 : M_D = 0 \qquad vs \qquad H_1 : M_D \neq 0$$

Dados

- teste bilateral
- nível de significância $= \alpha = 0.05$
- Construir uma tabela com a diferença dos valores das amostras:

$X =$ teste teórico	$Y =$ teste prático	$D = Y - X$	Sinal	$\lvert D\rvert$	Ordem
10	9.8	-0.2	$-$	0.2	2
12	11.6	-0.4	$-$	0.4	3
13	12	-1	$-$	1	$\frac{6+7}{2} = 6.5$
14	14	0	0	0	0
11	11	0	0	0	0
12.4	13	0.6	$+$	0.6	5
15	16	1	$+$	1	$\frac{6+7}{2} = 6.5$
9.8	12	2.2	$+$	2.2	8
12.9	13	0.1	$+$	0.1	1
12.9	13.4	0.5	$+$	0.5	4

- soma das posições com o sinal "-"$= T^-_{obs} = 2 + 3 + 6.5 = 11.5$
- soma das posições com o sinal "$+$"$= T^+_{obs} = 5 + 6.5 + 8 + 1 + 4 = 24.5$
- $n = 10 - 2 = 8$ (retirar as diferenças nulas)

Como o teste é bilateral considerar a tabela “Two-Tailed Test”.

Regra de Decisão através do quantil

Como o teste é bilateral:

$$T_{obs} = min\left\{T_{obs}^{-}, T_{obs}^{+}\right\} = min\left\{11.5, 24.5\right\} = 11.5$$

$$RC = [0, T_{n;\alpha}] = [0, T_{8;0.05}] = [0, 3]$$

Como $T_{obs} = 11.5 \notin RC$ então não se rejeita a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que não há diferenças nos resultados dos testes.

Observação: Como a tabela (em papel) é muito limitada, não vamos calcular o valor-p.

R

usar a função $wilcox.test()$

e obtém-se

- $T^+_{obs} = V = 24.5$
- valor-$p = 0.40024$

Como valor-$p = 0.40024 > 0.05 = \alpha$ então não se rejeita a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que não há diferenças nos resultados dos testes.

Observação: O software R com esta função apenas calcula o valor de observado de T^+, mas como a soma das n posições é igual a $T^- + T^+$ tem-se

$$T^-_{obs} = \text{ soma das } n \text{ posições } - T^+_{obs}$$

Teste de Mann-Whitney

- O Teste de Mann-Whitney (também chamado Teste de Mann-Whitney-Wilcoxon ou Teste de Wilcoxon-Mann-Whitney), é um teste não paramétrico aplicado para duas **amostras independentes**.

- A importância do teste de Mann-Whitney advém do facto de ser geralmente considerado como alternativa não paramétrica ao teste t para a diferença de médias (teste de hipóteses paramétrico para $\mu_1 - \mu_2$) quando são consideradas **amostras independentes**.

- Este é um teste à igualdade de distribuições para duas amostras independentes e baseia-se na posição dos valores observados da variável em estudo.

- A posição de uma observação é o número de ordem que lhe corresponde considerando a ordenação indistinta das duas amostras independentes envolvidas.

Teste de Mann-Whitney

Objetivo

Testar se duas amostras aleatórias independentes podem ser consideradas provenientes de populações com a mesma distribuição, para tal vamos testar se as duas amostras aleatórias independentes são originárias de populações com igual mediana.

Pressupostos do Teste

- As duas amostras de dimensões n e m foram retiradas de forma independente e aleatória das respetivas populações.
- A variável em análise é uma variável aleatória contínua.
- Se do teste resultar que as populações diferem, isso acontece somente em relação às respetivas medianas.

Observação: Para populações simétricas as conclusões que se tiram para as medianas são igualmente válidas para as médias.

Teste de Mann-Whitney

Objetivo

Testar se duas amostras aleatórias independentes podem ser consideradas provenientes de populações com a mesma distribuição, para tal vamos testar se as duas amostras aleatórias independentes são originárias de populações com igual mediana.

Formulação das Hipóteses a Testar:

H_0- As duas amostras independentes são provenientes de populações com a mesma distribuição

$$vs$$

H_1- As duas amostras independentes são provenientes de populações com distribuição distinta

Seja M_X a mediana da população X e M_Y a mediana da população Y, então é possível testar as seguintes hipóteses:

Teste bilateral	Teste unilateral direito	Teste unilateral esquerdo
$H_0 : M_X = M_Y$	$H_0 : M_X = M_Y$	$H_0 : M_X = M_Y$
vs	vs	vs
$H_1 : M_X \neq M_Y$	$H_1 : M_X > M_Y$	$H_1 : M_X < M_Y$

Teste de Mann-Whitney

Estatística de Teste

Como a hipótese que está a ser testada refere-se à mediana, a estatística de teste tem por base as posições ou ordem dos dados e é dada por

$$U = S_1 - \frac{n \times (n+1)}{2}$$

com

- n a dimensão da amostra referente à população X.
- S_1 a soma das ordens das observações da amostra da população X na amostra conjunta de dimensão $n+m$

Observações:

- Nesta definição a escolha da amostra designada por X é arbitrária.
- Existem formas alternativas de construção deste teste. Uma possibilidade é impor que a amostra X seja a de menor dimensão e a estatística de teste $U = min\{U_1, U_2\}$ com $U_1 = n \times m + \frac{n \times (n+1)}{2} - S_1$ e $U_2 = n \times m - U_1$.

Teste de Mann-Whitney

Estatística de Teste

- A estatística U do teste de Mann-Whitney encontra-se tabelada.
- Na tabela encontra-se o quantil $U_{n;m;\alpha}$ onde n é a dimensão da amostra referente à população X, m é a dimensão da amostra referente à população Y e α é a probabilidade pretendida.
- Na tabela é dada a função de distribuição, ou seja, $U_{n;m;\alpha}$ é o quantil de probabilidade α tal que $P\left(U \leq U_{n;m;\alpha}\right) = \alpha$
- **Propriedade**: $U_{n;m;1-\alpha} = n \times m - U_{n;m;\alpha}$

  Interpretação: $P\left(U \geq u\right) = P\left(U \leq n \times m - u\right)$

Observação: Se $n > 20$ e $m > 20$ a estatística de teste U pode ser aproximada à distribuição Normal:

$$Z = \frac{U - \frac{n \times m}{2}}{\sqrt{\frac{n \times m \times (n+m+1)}{12}}} \sim N(0,1)$$

Esta aproximação para grandes amostras ignora a existência de empates, existe uma adaptação a esta aproximação que tem em consideração os empates.

Teste de Mann-Whitney

Cálculo do Valor Observado da Estatística de Teste sob a Hipótese H_0

- Considere as duas amostras aleatórias independentes: X_i com $i = 1, ..., n$ e Y_j com $j = 1, ..., m$.
- Tome-se a amostra conjunta de dimensão $n+m$, sem fazer diferenciação entre X e Y, e ordenem-se os valores mas sem perder a informação sobre qual das amostras vem cada observação.
- Caso não existam empates, a observação de valor mais baixo recebe a posição 1, a segunda recebe a posição 2 e assim sucessivamente.
- Caso existem empates, ou seja, observações com o mesmo valor, atribui-se às observações empatadas a posição média das posições que lhes correspondiam caso tais empates não existissem.
- Calcular $S_{1_{obs}}$ a soma das ordens das observações da amostra X na amostra conjunta de dimensão $n + m$.

Teste de Mann-Whitney

Definição da Região de Aceitação e de Região Crítica

O cálculo das regiões de aceitação e crítica depende do tipo de teste considerado:

- Teste bilateral:
  - a Região de Aceitação é $RA = \left]U_{n;m;\frac{\alpha}{2}}, U_{n;m;1-\frac{\alpha}{2}}\right[$
  - a Região Crítica é $RC = \left]-\infty, U_{n;m;\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[U_{n;m;1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[$
- Teste unilateral direito:
  - a Região de Aceitação é $RA = \left]-\infty, U_{n;m;1-\alpha}\right[$
  - a Região Crítica é $RC = \left[U_{n;m;1-\alpha}, +\infty\right[$
- Teste unilateral esquerdo:
  - a Região de Aceitação é $RA = \left]U_{n;m;\alpha}, +\infty\right[$
  - a Região Crítica é $RC = \left]-\infty, U_{n;m;\alpha}\right]$

Teste de Mann-Whitney

Regra de Decisão com base na Região Crítica

- Se $U_{obs} \notin RC$, então, ao nível de significância α, **a hipótese** H_0 **não é rejeitada**, isto é, com base na amostra há evidências estatísticas que os dados são provenientes de populações com a mesma distribuição.

- Se $U_{obs} \in RC$, então, ao nível de significância α, **a hipótese** H_0 **é rejeitada**, isto é, com base na amostra há evidências estatísticas que os dados são provenientes de populações com a mesma distribuição.

Teste de Mann-Whitney

Cálculo do valor-p

O cálculo do valor-p depende do tipo de teste considerado:

- Teste bilateral: valor-p $= 2 \times$ mínimo $\{P\left(U \leq U_{obs}\right), P\left(U \geq U_{obs}\right)\}$
- Teste unilateral direito: valor-p $= P\left(U \geq U_{obs}\right)$
- Teste unilateral esquerdo: valor-p $= P\left(U \leq U_{obs}\right)$

Regra de Decisão com base no valor-p

- Se valor-p $> \alpha$, então, ao nível de significância α, **a hipótese H_0 não é rejeitada**, isto é, com base na amostra há evidências estatísticas que os dados são provenientes de populações com a mesma distribuição.
- Se valor-p $\leq \alpha$, então, ao nível de significância α, **a hipótese H_0 é rejeitada**, isto é, com base na amostra há evidências estatísticas que os dados são provenientes de populações com a mesma distribuição.

O valor-p pode ser visto como o menor valor de α (nível de significância) para o qual os dados observados indicam que H_0 deve ser rejeitada.

Teste de Mann-Whitney

Exemplo 4

Um investigador pretende conhecer o efeito da inalação prolongada de óxido de cádmio. Para o efeito sujeita um grupo de 15 animais de laboratório às inalações e confronta os resultados dos níveis de hemoglobina com os do grupo de controlo (que não foram sujeitos às inalações) constituído por 10 animais. Os resultados apresentam-se na tabela seguinte:

X	14.4	14.2	13.8	16.5	14.1	16.6	15.9	15.6	14.1	15.3
	15.7	16.7	13.7	15.3	14.0					
Y	17.4	16.2	17.1	17.5	15.0	16.0	16.9	15.0	16.3	16.8

Será possível concluir, para um nível de significância de 5%, que a inalação prolongada de óxido de cádmio reduz os níveis de hemoglobina?

Hipótese a ser testada

$$H_0 : M_X = M_Y \qquad vs \qquad H_1 : M_X < M_Y$$

- $M_X -$ mediana dos valores da hemoglobina dos animais sujeitos à inalação de óxido de cádmio
- $M_Y -$ mediana dos valores da hemoglobina dos animais do grupo de controlo

Dados

- amostras aleatórias independentes
- da população X foi retirada uma amostra de dimensão $n = 15$
- da população Y foi retirada uma amostra de dimensão $m = 10$
- Teste unilateral esquerdo
- nível de significância $= \alpha = 0.05$
- Construir uma tabela com os valores das amostras por ordem crescente:

X	Ordem	Y	Ordem
13.7	1		
13.8	2		
14.0	3		
14.1	$\frac{4+5}{2} = 4.5$		
14.1	$\frac{4+5}{2} = 4.5$		
14.2	6		
14.4	7		
		15.0	$\frac{8+9}{2} = 8.5$
		15.0	$\frac{8+9}{2} = 8.5$
15.3	$\frac{10+11}{2} = 10.5$		
15.3	$\frac{10+11}{2} = 10.5$		
15.6	12		
15.7	13		
15.9	14		
		16.0	15
		16.2	16
		16.3	17
16.5	18		
16.6	19		
16.7	20		
		16.8	21
		16.9	22
		17.1	23
		17.4	24
		17.5	25
Total	$S_{1_{obs}} = 145$		

Regra de Decisão através da Região Crítica

$$U_{obs} = S_{1_{obs}} - \frac{n \times (n+1)}{2} = 145 - \frac{15 \times (15+1)}{2} = 25$$

$$RC =]-\infty, U_{n;m;\alpha}] =]-\infty, U_{15;10;0.05}] =]-\infty, 45]$$

Como $U_{obs} = 25 \in RC$ então rejeita-se a hipótese H_0

Regra de Decisão através do valor-p

$$\text{valor-}p = P(U \leq U_{obs}) = P(U \leq 25) \approx 0.001$$

Como valor-$p \leq 0.05 = \alpha$ então rejeita-se a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que a inalação prolongada de óxido de cádmio reduz os níveis de hemoglobina.

R

usar a função $wilcox.test()$

e obtém-se

- $U_{obs} = W = 25$
- valor-$p = 0.0030039$

Como valor-$p = 0.0030039 \leq 0.05 = \alpha$ então rejeita-se a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que a inalação prolongada de óxido de cádmio reduz os níveis de hemoglobina.

Teste de Mann-Whitney

Exemplo 5

Na tabela seguinte indicam-se os valores dos Triglicéridos, em g/L, em 10 doentes com enfarte do miocárdio e em 8 indivíduos escolhidos para controlo (que não sofreram enfarte do miocárdio):

Doentes	1.62	0.51	1.29	0.71	0.52	2.10	0.88	0.99	0.51	1.59
Controlo	0.92	1.29	2.81	0.82	4.48	0.71	1.10	0.41		

Será possível concluir, para um nível de significância de 5%, que os indivíduos que sofreram enfarte do miocárdio possuem valores dos Triglicéridos superiores?

Hipótese a ser testada

$$H_0 : M_X = M_Y \qquad vs \qquad H_1 : M_X > M_Y$$

- $M_X -$ mediana dos valores dos Triglicéridos dos doentes com enfarte do miocárdio
- $M_Y -$ mediana dos valores dos indivíduos do grupo de controlo

Dados

- amostras aleatórias independentes
- da população X foi retirada uma amostra de dimensão $n = 10$
- da população Y foi retirada uma amostra de dimensão $m = 8$
- Teste unilateral direito
- nível de significância $= \alpha = 0.05$
- Construir uma tabela com os valores das amostras por ordem crescente:

X	Ordem	Y	Ordem
		0.41	1
0.51	$\frac{2+3}{2} = 2.5$		
0.51	$\frac{2+3}{2} = 2.5$		
0.52	4		
0.71	$\frac{5+6}{2} = 5.5$	0.71	$\frac{5+6}{2} = 5.5$
		0.82	7
0.88	8		
		0.92	9
0.99	10		
		1.10	11
1.29	$\frac{12+13}{2} = 12.5$	1.29	$\frac{12+13}{2} = 12.5$
1.59	14		
1.62	15		
2.10	16		
		2.81	17
		4.48	18
Total	$S_{1_{obs}} = 90$		

Regra de Decisão através da Região Crítica

$$U_{obs} = S_{1_{obs}} - \frac{n \times (n+1)}{2} = 90 - \frac{10 \times (10+1)}{2} = 35$$

$$RC = [U_{n;m;1-\alpha}, +\infty[= [U_{10;8;1-0.05}, +\infty[= [U_{10;8;0.95}, +\infty[= [59, +\infty[$$

pois

$$U_{n;m;1-\alpha} = n \times m - U_{n;m;\alpha}$$

logo

$$U_{10;8;0.95} = 10 \times 8 - U_{10;8;0.05} = 10 \times 8 - 21 = 59$$

Como $U_{obs} = 35 \notin RC$ então não se rejeita a hipótese H_0

Regra de Decisão através do valor-p

valor-$p = P(U \geq U_{obs}) = P(U \geq 35) = 1 - P(U < 35) \approx 1 - 0.10 = 0.90$

Como valor-$p > 0.05 = \alpha$ então não se rejeita a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que os indivíduos que sofreram enfarte do miocárdio não possuem valores dos Triglicéridos superiores.

R

usar a função $wilcox.test()$

e obtém-se

- $U_{obs} = W = 35$
- valor-$p = 0.68774$

Como valor-$p = 0.68774 > 0.05 = \alpha$ então não se rejeita a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que os indivíduos que sofreram enfarte do miocárdio não possuem valores dos Triglicéridos superiores.

Teste de Mann-Whitney

Exemplo 6

Considere as seguintes amostras relativas à precipitação anual nos distritos de Beja e Évora:

Beja	607.4	809.1	488.8	481.1	592.8	345.4	620.0	407.7	513.3	527.4
Évora	694.5	629.6	676.9	430.3	727.2					

Será possível concluir, para um nível de significância de 5%, que não há diferenças na precipitação anual nestes dois distritos?

Hipótese a ser testada

$$H_0 : M_X = M_Y \qquad vs \qquad H_1 : M_X \neq M_Y$$

- $M_X -$ mediana da precipitação anual em Beja
- $M_Y -$ mediana da precipitação anual em Évora

Dados

- amostras aleatórias independentes
- da população X foi retirada uma amostra de dimensão $n = 10$
- da população Y foi retirada uma amostra de dimensão $m = 5$
- Teste bilateral
- nível de significância $= \alpha = 0.05$
- Construir uma tabela com os valores das amostras por ordem crescente:

X =Beja	Ordem	Y =Évora	Ordem
345.4	1		
407.7	2		
		430.3	3
481.1	4		
488.8	5		
513.3	6		
527.4	7		
592.8	8		
607.4	9		
620.0	10		
		629.6	11
		676.9	12
		694.5	13
		727.2	14
809.1	15		
Total	$S_{1_{obs}} = 67$		

Regra de Decisão através da Região Crítica

$$U_{obs} = S_{1_{obs}} - \frac{n \times (n+1)}{2} = 67 - \frac{10 \times (10+1)}{2} = 12$$

$$RC = \left]-\infty, U_{n;m;\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[U_{n;m;1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[= \left]-\infty, U_{10;5;0.025}\right] \cup \left[U_{10;5;0.975}, +\infty\right[=$$
$$= \left]-\infty, 9\right] \cup \left[41, +\infty\right[$$

pois como

$$U_{n;m;1-\alpha} = n \times m - U_{n;m;\alpha}$$

então

$$U_{10;5;0.975} = 10 \times 5 - U_{10;5;0.025} = 10 \times 5 - 9 = 41$$

Como $U_{obs} = 12 \notin RC$ então não se rejeita a hipótese H_0

Regra de Decisão através do valor-p

$$\text{valor-}p = 2 \times \text{mínimo}\left\{P\left(U \leq U_{obs}\right), P\left(U \geq U_{obs}\right)\right\} =$$

$$= 2 \times \text{mínimo}\left\{0.05, 0.95\right\} = 2 \times 0.05 = 0.10$$

- $P\left(U \leq U_{obs}\right) = P\left(U \leq 12\right) = 0.05$
- $P\left(U \geq U_{obs}\right) = P\left(U \geq 12\right) \approx 1 - 0.05 = 0.95$

Como valor-$p > 0.05 = \alpha$ então não se rejeita a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que não há diferenças na precipitação anual nestes dois distritos.

R

usar a função $wilcox.test()$

e obtém-se

- $U_{obs} = W = 12$
- valor-$p = 0.1292$

Como valor-$p = 0.1292 > 0.05 = \alpha$ então não se rejeita a hipótese H_0

Conclusão: Com base nas amostras e ao nível de significância de 5%, conclui-se que não há diferenças na precipitação anual nestes dois distritos.