Probabilidades e Estatística

Distribuições Teóricas Discretas

Prof. Caldeira Duarte e Prof.ª Anabela Pereira

Actualizado pelo Prof. António Sardinha (Fevereiro de 2013)

Departamento de Matemática

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

2 DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DISCRETAS

2.1 Distribuição Uniforme Discreta

A mais simples das distribuições teóricas discretas assume igual probabilidade em todos os pontos (em número finito) do domínio da variável aleatória que lhe está associada.

Definição 2.1. *A variável aleatória X definida em $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tem distribuição Uniforme Discreta, se assume em todos os n pontos do seu domínio a mesma probabilidade. Ou seja, tem função de probabilidade igual a*

$$f(x_i) = \frac{1}{n}, \text{ com } i = 1, 2, ..., n.$$

A v.a. X definida em n pontos representa-se por

$$X \sim U(n).$$

Proposição 2.2. *Se X é uma v. a. com uma distribuição Uniforme, $X \sim U(n)$, então*

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

e

$$V[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

com $\mu = E[X]$.

CASO PARTICULAR:

Considerando que a v.a. uniforme discreta X está definida no **conjunto dos inteiros consecutivos** do intervalo $[a, b] = \{a, a+1, a+2, ..., b\}$, o domínio da v.a. é constituído por $(b - a + 1)$ valores, todos com probabilidade igual a $1/(b - a + 1)$. Nestas circunstâncias para o valor esperado de X tem-se

$$E[X] = \sum_{k=a}^{b} k\left(\frac{1}{b-a+1}\right) = \frac{1}{b-a+1}\sum_{k=a}^{b} k.$$

Como $\sum_{k=a}^{b} k$ representa a soma de uma progressão aritmética de razão igual a 1, tem-se

$$\sum_{k=a}^{b} k = \frac{(b-a+1)(a+b)}{2},$$

pelo que o valor médio da v.a. X é dado por

$$E[X] = \frac{a+b}{2}.$$

Consideremos agora uma v.a. X definida no conjunto dos inteiros consecutivos do intervalo $[1, n]$, com

$$E[X] = \frac{1+n}{2}.$$

A variância de X, obtém-se de

$$V[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2.$$

Então

$$V[X] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1+n}{2}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{(1+n)^2}{4}.$$

Atendendo à identidade que representa o somatório

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tem-se

$$V[X] = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(1+n)^2}{12},$$

ou seja

$$V[X] = \frac{n^2-1}{12}.$$

Generalizando para uma v.a. X definida no conjunto dos inteiros consecutivos do intervalo $[a, b]$ com $n = b - a + 1$ tem-se

$$V[X] = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}.$$

Proposição 2.3. *Se X é uma v.a. com distribuição Uniforme Discreta, definida no conjunto dos $(b-a+1)$* ***inteiros consecutivos*** *do intervalo $[a, b]$, então*

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

e

$$V[X] = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}.$$

Exemplo 2.4. O primeiro dígito do número de série de um dado software tem a mesma probabilidade de ser um dos dígitos de 0 a 9. Se X for a v.a. que representa o primeiro dígito do número de série, então ela tem distribuição Uniforme Discreta definida em 10 pontos,

$$X \sim U(10)$$

com função de probabilidade igual a

$$f(x) = \frac{1}{10}, \text{ com } x = 0, 1, ..., 9,$$

sendo o gráfico 2.1 associado à função de probabilidade [7] :

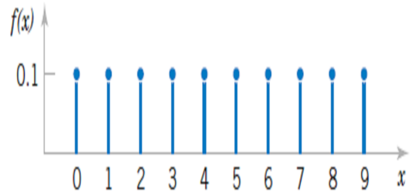

Figura 2.1: Função de probabilidade de $X \sim U\,(10)$

O valor esperado e a variância de X são respectivamente:

$$E\,[X] = \frac{0+9}{2} = 4.5$$

e

$$V\,[X] = \frac{10^2 - 1}{12} = 8.25.$$

2.2 Distribuição Binomial

É frequente uma experiência aleatória consistir na repetição de uma série de provas, cada uma das quais apenas com dois resultados possíveis, que geralmente são designados por sucesso e insucesso; é o que acontece, por exemplo, quando se testam peças que saem de uma linha de montagem, onde cada verificação indica se a peça é defeituosa ou não; quando se lança várias vezes uma moeda regular, etc.

Exemplo 2.5. Considere-se a experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda regular ao acaso e em que $\Omega = \{F, C\}$. A realização de 3 lançamentos é uma experiência aleatória que se pode identificar com a combinação de 3 experiências aleatórias idênticas. O espaço de resultados desta outra experiência é portanto o conjunto

$$\Pi = \{FFF, FFC, FCF, CFF, FCC, CFC, CCF, CCC\}.$$

Atendendo a que o resultado de cada lançamento é independente dos restantes, é imediato que
$P(\text{saída de 3 caras}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $P(\text{saída de 2 caras e 1 coroa}) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$, etc. ■

Este exemplo é um caso particular de uma sucessão de **provas de Bernoulli**, isto é, de uma sucessão de experiências aleatórias independentes, em cada uma das quais se obtém o acontecimento A, que designamos por sucesso, com probabilidade p, (constante de experiência para experiência), ou o seu complementar, A^C, que designamos por insucesso, com probabilidade $q = 1 - p$.

A uma sucessão de provas de Bernoulli também se chama uma **experiência Binomial**.

Exemplo 2.6. A probabilidade de que um certo tipo de componente sobreviva a um teste é $3/4$. Qual a probabilidade de exactamente duas dessas componentes sobrevivam ao teste, de entre as próximas 5 a serem testadas. Designemos por sucesso o acontecimento "a componente sobrevive ao teste" (simbolicamente S) e por insucesso o acontecimento "a componente não sobrevive ao teste". É imediato que neste caso estamos perante uma experiência binomial. Consideremos primeiramente a probabilidade de obter os 2 sucessos e os 5-2 insucessos por uma determinada ordem, por exemplo, 2 sucessos seguidos de 3 insucessos. Trata-se de calcular a probabilidade da sequência,

$$\underbrace{SS}\underbrace{S^C S^C S^C}$$

que é $\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(1-\frac{3}{4}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3$. Se a ordem for outra, a probabilidade mantém-se, desde que o número de sucessos e de insucessos se mantenha. Ora, existem $\binom{5}{2}$ sequências diferentes em que podem ocorrer os 2 sucessos e os 3 insucessos, pelo que a probabilidade pretendida será

$$\binom{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3=0.0879.$$

■

Definição 2.7. *Se uma prova de Bernoulli pode resultar num sucesso, com probabilidade p, ou num insucesso, com probabilidade $1-p$, então a função de probabilidade da v. a. X, que representa o número de sucessos em n provas independentes, e se designa por* ***variável aleatória binomial****, é dada pela expressão*

$$P(X=x)=b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,...,n.$$

Proposição 2.8. *Se X é uma v. a. com uma distribuição binomial, $X\sim b(n,p)$,*

$$E[X]=np$$

e

$$V[X]=np(1-p).$$

A terminar, uma referência a um importante resultado relativo à soma de v.a. com distribuição binomial.

Proposição 2.9. *Se as v.a. X_i, $i=1,2,...,k$ são independentes*[1] *e além disso, $X_i\sim b(n_i,p)$, então a v.a. $Y_k=(X_1+X_2+...+X_k)\sim b\left(\sum n_i,p\right)$.*

2.3 Distribuição de Poisson

Definição 2.10. *Uma variável aleatória que assume valores da sucessão infinita $0,1,2,3,...$, com probabilidades,*

$$f(x)=P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x=0,1,2,3,...,\lambda>0,$$

diz-se que tem ***distribuição de Poisson*** *com parâmetro λ, escrevendo-se simbolicamente $X\sim p(\lambda)$.*

---

[1] *Sem preocupações de grande rigor, introduzimos aqui o conceito de variáveis aleatórias independentes. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas; X e Y dizem-se independentes se e só se, para quaisquer valores x e y, os acontecimentos $\left\{\begin{array}{l} X=x \\ Y=y \end{array}\right.$ forem independentes. Isto significa que*

$$\begin{array}{l} P(X=x\,|Y=y)=P(X=x) \\ P(Y=y\,|X=x)=P(Y=y) \end{array}.$$

Tendo em conta que a soma da série $\sum\limits_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$ é a função e^{λ}, é imediato que

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Proposição 2.11. *O valor esperado e a variância de uma variável aleatória com distribuição de Poisson são iguais ao valor do parâmetro* λ.

Demonstração.

i) $E[X] = \sum\limits_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum\limits_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum\limits_{x=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda.$

ii) O segundo momento em relação à origem,

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

permite-nos concluir que

$$V[X] = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

O teorema que se apresenta a seguir estabelece que a função de probabilidade da distribuição de Poisson também pode ser obtida como o limite de uma série de funções de probabilidade da distribuição Binomial

Teorema 2.12. *Seja X_n uma variável aleatória com distribuição Binomial dada pela fórmula $P(X_n = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$, onde r toma os valores $0, 1, 2, ..., n$. Se para $n = 1, 2, 3, ...$ a relação $p = \frac{\lambda}{n}$ se mantém, onde $\lambda > 0$ é uma constante, então*

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}.$$

Demonstração. Fazendo $p = \frac{\lambda}{n}$, vem,

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-r} = \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{n^r} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-r} \frac{\lambda^r}{r!} = \\ &= \frac{\lambda^r}{r!} . \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n . \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{r+1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^r}. \end{aligned}$$

Como
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$
e
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{r+1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^r} = 1,$$
obtém-se o resultado pretendido. □

Este resultado tem grandes aplicações práticas pois, como as figuras seguintes sugerem, a distribuição de Poisson pode ser considerada em certas circunstâncias, uma boa aproximação da distribuição Binomial.

Na Figura 2.2 são apresentados dois gráficos, um da distribuição Binomial com $n = 5$ e $p = 0.3$, donde $\lambda = np = 1.5$, e um da distribuição de Poisson com o mesmo valor esperado $\lambda = 1.5$.

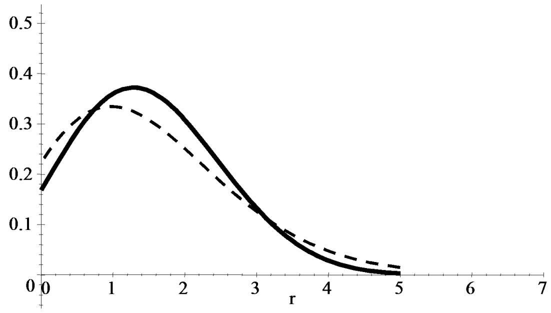

Figura 2.2: Distribuição Binomial e Poisson ($n = 5$).

A Figura 2.3 apresenta dois gráficos idênticos mas com $n = 10$ e $p = 0.15$, donde se mantém $\lambda = np = 1.5$.

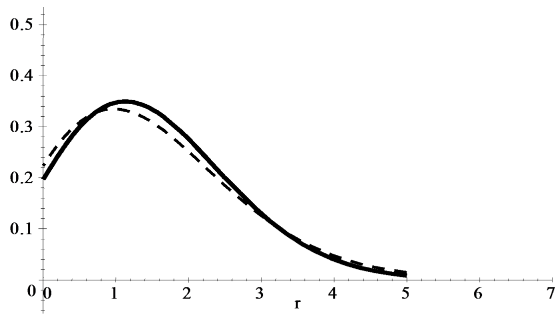

Figura 2.3: Distribuição Binomial e Poisson ($n = 10$).

Para maiores valores de n, por exemplo $n = 100$, os gráficos das distribuições Binomial e Poisson quase coincidem.

Exemplo 2.13. Numa comunidade com 10000 pessoas, a probabilidade de uma pessoa, num determinado dia, procurar uma cama no hospital, supõe-se igual a 1/2000. Havendo independência na procura de camas em cada dia (inexistência de epidemias, de doenças contagiosas, etc) a v.a. X que representa o número de camas procuradas em cada dia tem uma distribuição binomial com $n = 10000$ e $p = 1/2000$. Neste caso, o cálculo de qualquer probabilidade, $P(X = x)$, deixa de ser imediato. Como n é grande e p muito pequeno podemos calcular valores aproximados dessas probabilidades utilizando a distribuição de Poisson; $b(x; n, p) \approx p(x; np)$. Como exercício o aluno pode calcular alguns valores e comparar os resultados. ∎

Observação 2.14. Na prática, se na distribuição binomial $n \geq 30$ e $np \leq 5$, pode fazer-se a aproximação pela distribuição de Poisson com parâmetro np.

Referências

[1] FISZ, M., *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

[2] GUIMARÃES, R.C. e CABRAL, J.A.S., *Estatística*, McGraw-Hill de Portugal, Lisboa, 1997.

[3] MURTEIRA, B.J.F., *Probabilidades e Estatística*, McGraw-Hill de Portugal, Lisboa, 1979.

[4] SPIEGEL, M.R., *Probabilidade e Estatística*, Colecção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1978

[5] OLIVEIRA, J.T., *Probabilidades e Estatística*, vol. I, Escolar Editora, Lisboa,1967.

[6] MELLO, F., *Introdução aos Métodos Estatísticos*, vol. I e II, Cadernos do Instituto de Orientação Profissional, Lisboa, 1973.

[7] MONTGOMERY, D.; RUNGER, G., *Applied Statistics and Probability for Engineers*, Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, 2003.