

Licenciatura em Engenharia Informática

Métodos Estatísticos

Exercícios

Distribuições Teóricas

Departamento de Matemática



### 3 Distribuições Teóricas

**Exercício 3.1** O número de filhos com menos de 18 anos de idade em famílias num determinado país é uma variável aleatória  $X$ , cuja função de probabilidade é dada pela seguinte tabela:

$x$	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.42	0.24	0.19	$a$	0.05

1. Calcule, justificando, o valor de  $a$ .
2. Calcule a probabilidade de uma família escolhida ao acaso ter:
  - (a) três filhos com menos de 18 anos;
  - (b) no máximo um filho com menos de 18 anos;
  - (c) mais de três filhos com menos de 18 anos;
  - (d) ter mais de dois filhos com menos de 18 anos sabendo que tem filhos com menos de 18 anos.
3. Numa dada família, qual o número esperado de filhos com menos de 18 anos? E a variância?
4. Calcule a função de distribuição e volte a calcular as probabilidades da alínea 2. com essa função.

**Exercício 3.2** O número de carros vendidos semanalmente num stand é uma variável aleatória  $X$  com a seguinte função de probabilidade

$x$	1	2	3	4
$f(x)$	$c$	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{3}$	$\frac{c}{4}$

1. Calcule, justificando, o valor de  $c$ .
2. Determine a função de distribuição de  $X$ .
3. Calcule a probabilidade do número de carros vendidos não chegar a 4, sabendo que este valor é superior a 1.
4. Se os custos fixos semanais são de 30 unidades monetárias (u.m.) quando são vendidos 2 ou menos carros e 15 u.m. quando se vende mais de 2 carros e, além disso, cada carro é vendido a 35 u.m., determine a função de distribuição da receita líquida semanal.

**Exercício 3.3** Uma empresa dedica-se à venda de artigos elétricos. As vendas diárias de gravadores (em unidades) são representadas por uma variável aleatória  $X$  com a seguinte função de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} k(x+1) & , x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

1. Determine o valor de  $k$ . Justifique a sua resposta.
2. Calcule a função de distribuição da variável aleatória  $X$ .

3. Calcule a probabilidade das vendas serem exatamente iguais a 3 gravadores, num dia em que estas foram pelo menos 2.

**Exercício 3.4** Dado o quadro seguinte

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

1. Mostre que  $f$  representa a função de probabilidade de uma variável aleatória  $X$ .
2. Determine a função de distribuição da variável aleatória  $X$ .
3. Calcule  $P(0 \leq X < 2)$ .
4. Calcule  $E[X]$ ,  $E[X + 2]$  e  $E[-X + 2]$ .
5. Calcule  $V[X]$ ,  $V[2X + 1]$  e  $V[-2X + 1]$ .

**Exercício 3.5** Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com a seguinte função de probabilidade:

$x$	$1 - 2k$	$k - 1$	$k$	$2k$
$f(x)$	$p$	$3p$	$p$	$p$

1. Sabendo que  $E[X] = \frac{1}{3}$ , calcule os valores de  $p$  e  $k$ .
2. Calcule  $V[X]$ .
3. Calcule  $E[3X + 5]$ ,  $V[3X + 5]$ ,  $E[1 - 2X]$  e  $V[1 - 2X]$ .

**Exercício 3.6** Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com a função de distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{8} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases} .$$

1. Calcule a função de probabilidade da variável aleatória  $X$ .
2. Calcule usando a função de probabilidade e a função de distribuição:
  - (a)  $P(0 < X \leq 2)$ ;
  - (b)  $P(0 \leq X \leq 2)$ ;
  - (c)  $P(0 \leq X < 2)$ ;
  - (d)  $P(0 < X < 2)$ ;
  - (e)  $P(X < 4)$ ;
  - (f)  $P(X > 1)$ .
3. Calcule  $E[X]$  e  $V[X]$ .

**Exercício 3.7** Considere a variável aleatória discreta com a seguinte função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} a & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{6} & , \quad 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4} & , \quad 2 \leq x < 4 \\ b & , \quad 4 \leq x < 6 \\ c & , \quad x \geq 6 \end{cases}.$$

1. Sabendo que  $P(X = 6) = \frac{1}{2}$ , determine, justificando, os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .
2. Calcule o valor esperado, a variância e o desvio padrão da variável aleatória  $Y = \frac{2-3X}{4}$ .

**Exercício 3.8** Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição uniforme discreta, definida no conjunto dos inteiros consecutivos do intervalo  $[0, 100]$ .

1. Indique a função de probabilidade de  $X$ .
2. Calcule  $P(X \leq 94 | X > 32)$ .
3. Determine a média, a variância e o desvio padrão de  $X$ .

**Exercício 3.9** Considere uma variável aleatória  $X$  que assume a mesma probabilidade em todos os pontos do conjunto  $\{2, 4, 6, 8\}$ .

1. Indique a função de probabilidade e a função de distribuição de  $X$ .
2. Determine a média, a variância e o desvio padrão de  $X$ .
3. Calcule  $P(X \leq E[X])$ .

**Exercício 3.10** Considere  $X$  uma variável aleatória com distribuição uniforme discreta, definida no conjunto dos múltiplos consecutivos de 5 no intervalo  $[0, 35]$ .

1. Indique a função de probabilidade de  $X$ .
2. Determine a média, a variância e o desvio padrão de  $X$ .
3. Calcule  $P(X \leq E[X] | X \geq 5)$ .

**Exercício 3.11** Consideremos os casais que têm no máximo 2 filhos. Admitamos que cada uma das possibilidades, em termos do número de filhos, tem a mesma probabilidade de ocorrer. Seja  $X$  a variável aleatória que representa o número de filhos nesses casais.

1. Qual a distribuição da variável aleatória  $X$ ?
2. Qual o número médio de filhos? E o desvio padrão?

**Exercício 3.12** Numa cidade, observaram-se 8 indivíduos afetados por uma determinada doença que pode ser mortal em 10% dos casos. Seja  $X$  a variável aleatória que representa o número de indivíduos observados que morrem da doença.

1. Qual a distribuição da variável aleatória  $X$ ?
2. Qual a probabilidade de morrerem no máximo 3 indivíduos?
3. Qual a probabilidade de sobreviverem pelo menos 6 indivíduos? E de sobreviverem exatamente 5 indivíduos?
4. Qual o número esperado de sobreviventes?

**Exercício 3.13** Com base em sondagens efetuadas, estima-se que, do total da população duma região, 60% considera que a integração europeia tem reflexos positivos, 25% reflexos negativos e as restantes pessoas não têm opinião definida.

1. Calcule a probabilidade de, em doze pessoas dessa região, cinco considerarem que a integração tem reflexos positivos.
2. Calcule a probabilidade dessas mesmas doze pessoas, menos de três considerarem que a integração europeia teve reflexos negativos.
3. Se forem inquiridas 80 pessoas, quantas se espera que considerem que a integração tem reflexos negativos.

**Exercício 3.14** Admita que em certa disciplina são lecionadas quinze aulas teóricas ao longo do semestre e que a probabilidade de um aluno assistir a uma dessas aulas é de 0.3. Sabe-se ainda que frequentando a totalidade das aulas teóricas lecionadas, o aluno recebe um bônus de um valor a adicionar à classificação obtida no exame.

1. Indique, justificando, a distribuição da variável aleatória que representa o número de aulas teóricas assistidas por um aluno inscrito nessa disciplina.
2. Qual a probabilidade de um aluno inscrito na disciplina em causa vir a receber o bônus?
3. Qual a probabilidade de um aluno inscrito na disciplina considerada ter assistido a, pelo menos, 60% das aulas lecionadas?

**Exercício 3.15** Numa experiência biológica, para a qual a escolha das cobaias é bastante dispendiosa, verifica-se que a experiência é bem sucedida em 40% dos casos. Suponha que cada vez que se repete a experiência uma cobaia diferente é analisada e cada repetição só usa uma cobaia.

1. Se o investigador tiver 10 cobaias à sua disposição, qual a probabilidade de se verificarem pelo menos 2 experiências bem sucedidas?
2. Quantas cobaias são necessárias para que o número esperado de sucessos seja 24? Justifique.
3. Quantas cobaias serão necessárias para garantir que a probabilidade de obter pelo menos uma experiência com sucesso seja inferior a 0.95?

**Exercício 3.16** Estudos realizados num Hospital Pediátrico conduziram à conclusão que o número de acidentes domésticos sofridos, anualmente por uma criança com idade inferior a seis anos, segue uma distribuição Binomial de média 0.25 e variância 0.19.

1. Indique os parâmetros da distribuição considerada.
2. Escolhida uma criança ao acaso, determine a probabilidade de:
  - (a) sofrer, no máximo, um acidente doméstico num ano.
  - (b) sofrer exatamente dois acidentes domésticos num ano.
  - (c) sofrer, pelo menos um acidente doméstico num ano.
  - (d) sofrer, mais de dois acidentes domésticos num ano.

**Exercício 3.17** O número de sementes de *Clethra arbórea* por fruto é uma variável aleatória de Poisson de valor médio igual a 7.

1. Qual a probabilidade de encontrar frutos com 20 sementes?
2. Qual a probabilidade de encontrar frutos com menos de 2 sementes?

**Exercício 3.18** O número de chamadas telefónicas recebidas diariamente por uma telefonista de apoio a um determinado serviço médico é uma variável aleatória  $X$  com distribuição de Poisson de parâmetro 5.

1. Indique o número médio de chamadas telefónicas e a sua variância.
2. Calcule a probabilidade de não se receber nenhuma chamada num dia.
3. Calcule a probabilidade de serem recebidas entre 5 e 8 (inclusive) chamadas num dia.
4. Calcule a probabilidade de serem recebidas entre 10 e 12 (exclusive) chamadas num fim-de-semana.
5. Calcule a probabilidade de serem recebidas 12 chamadas em quatro dias.

**Exercício 3.19** Admita que o número de pessoas que chegam a uma fila para obter senha para o almoço, durante intervalos de 3 minutos, segue uma lei de Poisson de média 2 pessoas. Determine a probabilidade de que:

1. ninguém chegue durante 3 minutos.
2. cheguem, no máximo, 2 pessoas durante 12 minutos.
3. cheguem, pelo menos, 8 pessoas durante meia hora.

**Exercício 3.20** O número de clientes diários de um cabeleireiro é uma variável aleatória com distribuição Poisson de média 15. O horário de funcionamento vai das 10 às 16 horas, não fechando para almoço. Sabe-se ainda que, devido a limitações de pessoal se atendem no máximo 25 clientes por dia.

1. Qual a probabilidade de entre as 10 e as 12 horas chegarem menos de 5 clientes?
2. Qual a probabilidade de num dia ficarem clientes por atender?

**Exercício 3.21** Considere a variável aleatória  $X$  com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & , -1 \leq x < 0 \\ 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}.$$

1. Calcule a função de distribuição da variável aleatória  $X$ .
2. Calcule usando a função densidade de probabilidade e a função de distribuição:
  - (a)  $P(X \leq 0)$ ;
  - (b)  $P(X > -0.5)$ ;
  - (c)  $P(0 \leq X < 2)$ ;
  - (d)  $P(0 \leq X \leq 1)$ .
3. Calcule  $E[X]$  e  $V[X]$ .

**Exercício 3.22** A procura diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória  $X$  com função densidade de probabilidade definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2kx & , 0 \leq x < 1 \\ 1-kx & , 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}.$$

1. Determine, justificando, o valor da constante  $k$ .
2. Calcule a função de distribuição da variável aleatória  $X$ .
3. Calcule a probabilidade da procura de arroz, num dia escolhido ao acaso:
  - (a) exceder 200 kg de arroz;
  - (b) se situar entre 50 e 250 kg de arroz;
  - (c) ser, no máximo, de 120 kg de arroz;
  - (d) ser inferior a 220 kg, sabendo que nesse dia oscilou entre 200 e 280 kg.
4. Calcule o valor esperado da procura diária de arroz, assim como uma medida da variabilidade dessa procura.

**Exercício 3.23** O Sr. João tem um carro que necessita de uma reparação urgente. Considere  $X$  a variável aleatória que representa o número de semanas que o carro se manterá em funcionamento sem reparação. A função densidade de probabilidade é a seguinte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{20} & , 0 < x \leq 4 \\ \frac{x}{40} & , 4 < x \leq b \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}.$$

1. Qual o número máximo de semanas que o carro poderá funcionar sem reparação?
2. Determine a função de distribuição da variável aleatória  $X$ .
3. O Sr. João precisa de ir ao Porto daqui a 6 semanas. Qual a probabilidade de poder utilizar o seu carro sem ter efetuado qualquer reparação?

**Exercício 3.24** Uma estação de gasolina enche os reservatórios uma vez por semana. O volume semanal de vendas, expresso em milhares de litros, é uma variável aleatória com a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & , \quad 0 \leq x < 5 \\ \frac{10-x}{25} & , \quad 5 \leq x < 10 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} .$$

1. Mostre que  $f$  é de facto uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $X$ .
2. Calcule a função de distribuição de  $X$ .
3. Determine a probabilidade de numa semana se venderem mais de 7000 litros de gasolina, sabendo-se que já foram vendidos pelo menos 4000 litros.
4. Calcule a quantidade média de gasolina que é vendida semanalmente.

**Exercício 3.25** Uma cadeia de hipermercados vende, por semana, uma quantidade de carne (expressa em toneladas) que admitimos ser uma variável aleatória  $X$  com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(x + \frac{1}{2}\right) & , \quad 0 \leq x < k \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} .$$

1. Determine, justificando, o valor da constante  $k$ .
2. Determine a variância das vendas semanais de carne da cadeia de hipermercados.
3. Qual a probabilidade das vendas semanais de carne da cadeia de hipermercados ser de pelo menos duas toneladas? E de vender entre duas e quatro toneladas?

**Exercício 3.26** Considere uma variável aleatória contínua com a seguinte função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} & , \quad -1 \leq x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{12} + \frac{3}{4} & , \quad 1 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases} .$$

1. Calcule  $P\left(\frac{1}{2} < X < 2 \mid X \geq \frac{3}{2}\right)$ .



2. Calcule a função densidade de probabilidade.
3. Calcule  $E[X]$  e  $V[X]$ .
4. Calcule  $E[X + 2]$  e  $V\left[1 - \frac{X}{2}\right]$ .

**Exercício 3.27** A procura diária de refrigerantes (em centenas de litros) num supermercado junto à praia é uma variável aleatória contínua,  $X$ , com a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x^2}{3} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{6} + x - \frac{1}{2} & , \quad 1 < x \leq 3 \\ 1 & , \quad x > 3 \end{cases}.$$

1. Qual a quantidade de refrigerante que deve ser diariamente colocada nas prateleiras do supermercado para que a procura seja satisfeita em 95% dos dias?
2. Calcule o desvio padrão da procura diária de refrigerantes neste supermercado.

**Exercício 3.28** Uma componente eletrónica tem uma duração de vida, em centenas de horas, que é uma variável aleatória com distribuição exponencial de valor esperado 0.5.

1. Determine a probabilidade de uma componente eletrónica ter uma duração de vida superior a 50 horas.
2. Determine a probabilidade de uma componente eletrónica ter uma duração de vida superior a 150 horas, sabendo que já funcionou pelo menos durante 100 horas.

**Exercício 3.29** Sabe-se que a distribuição do tempo de vida (duração até falhar) de determinada componente tem distribuição exponencial e a probabilidade dessa componente durar mais de 72 horas é 95%.

1. Qual é o tempo médio de vida dessa componente?
2. Admita que o tempo médio de vida dessa componente é de 1404 horas. Sabendo que a componente não falhou durante as primeiras 72 horas de funcionamento, calcule a probabilidade da mesma componente não falhar nas 24 horas seguintes.

**Exercício 3.30** O tempo, em horas, necessário para reparar uma determinada máquina é uma variável aleatória exponencial com média 90 minutos.

1. Qual a probabilidade de se repararem pelo menos 3 máquinas em 5 horas?
2. Qual a probabilidade do tempo de reparação da máquina ser inferior a 45 minutos?

**Exercício 3.31** O número de livros vendidos numa certa livraria segue uma distribuição de Poisson de média 2 livros por hora. Esta livraria está aberta diariamente das 9h às 19h.

1. Qual a probabilidade de serem vendidos mais de 3 livros por hora?
2. Qual a probabilidade de serem vendidos pelo menos 8 livros num dia?
3. Qual a probabilidade de o tempo entre vendas de 2 livros ser superior a 45 minutos?

**Exercício 3.32** O número de mensagens eletrônicas recebidas ao longo do tempo numa pequena empresa de entregas rápidas segue um processo de Poisson com taxa média igual a 10 mensagens por dia (24 horas).

1. Calcule a probabilidade de num dia a empresa não receber mais do que 7 mensagens.
2. Qual é a probabilidade de o intervalo entre duas mensagens consecutivas exceder 1 hora?

**Exercício 3.33** O peso em Kg dos sacos de um dado herbicida, tem distribuição uniforme no intervalo  $[49.75, 50.25]$ . Determine:

1. O valor médio e a variância do peso dos sacos.
2.  $P(X < 50.1)$ .
3.  $P(X \geq 50/X > 49.8)$ .

**Exercício 3.34** Uma empresa pretende comercializar pacotes com 500g de flocos de cereais, os quais serão cheios por uma máquina que pode ser regulada. O peso (em gramas) de cada pacote enchido por essa máquina é uma variável aleatória  $X$  com distribuição Uniforme contínua, com valor médio igual a 505.4g.

1. Determine o intervalo de variação,  $[a, b]$  da variável aleatória  $X$ , considerando que apenas 5% dos pacotes produzidos têm peso inferior ao desejado.
2. Determine a probabilidade de um pacote de cereais ter peso superior ao indicado na embalagem.
3. Sabendo que o peso de um pacote de cereais está acima da média, determine a probabilidade de este ter menos de 510g.
4. Suponha que a probabilidade de um pacote estar fora de validade é igual a 0.1. Numa amostra de 20 pacotes, qual a probabilidade de haver pelo menos 2 pacotes fora de validade?

**Exercício 3.35** A espessura de fotoresistência, em micrómetros, das “wafers” utilizadas no fabrico de semicondutores é uniformemente distribuída no intervalo  $[0.2050, 0.2150]$ . Determine:

1. A probabilidade de uma “wafers” selecionada ao acaso ter espessura de fotoresistência superior à média.
2. A espessura máxima de 95% das “wafers”.
3. A espessura excedida por 10% das “wafers”.
4. O desvio padrão da espessura de fotoresistência das “wafers”.

**Exercício 3.36** A espessura de chapas produzidas numa fábrica está distribuída uniformemente entre 0.84 *cm* e 1.04 *cm*.

1. De entre um total de 250 chapas inspecionadas, em quantas espera que a espessura exceda 1 *cm*?
2. Qual deve ser a espessura de modo que 40% das chapas não excedam essa medida?

**Exercício 3.37** Os salários pagos em certo sector da vida económica têm uma distribuição normal de média 500 euros e desvio padrão de 50 euros.

1. Qual a probabilidade dos trabalhadores auferirem um salário inferior a 550 euros?
2. Qual a probabilidade dos trabalhadores auferirem um salário entre 380 euros e 470 euros?
3. Qual a probabilidade dos trabalhadores auferirem um salário superior a 600 euros?

**Exercício 3.38** O diâmetro interno de um segmento de um motor de automóvel é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com média 10 *cm* e desvio padrão 0.03 *cm*.

1. Que percentagem de segmentos têm diâmetro interno superior a 10.075 *cm*?
2. Qual a probabilidade de um segmento ter um diâmetro interno entre 9.997 e 10.03 *cm*?
3. Abaixo de que valor do diâmetro interno, se encontram 15% dos segmentos?

**Exercício 3.39** A temperatura diária numa sala de espera de uma clínica médica (expressa em graus centígrados) segue uma distribuição normal, com desvio padrão igual a 2 graus. Sabe-se ainda que em 10% dos dias a temperatura na sala ultrapassa os 23.6 graus.

1. Calcule a temperatura média diária da sala de espera da clínica.
2. Sempre que num dia se verificar uma temperatura na sala de espera inferior a 20 graus, liga-se o aquecimento central. Qual a probabilidade de se ter de ligar o aquecimento central?

3. Considerando uma semana de 7 dias, qual a probabilidade de haver dois dias com temperatura diária inferior a 20 graus centígrados?

**Exercício 3.40** O treinador de um atleta especialista no salto em comprimento fez um estudo estatístico dos saltos dados nos últimos tempos pelo seu atleta e verificou que se distribuíam normalmente com valor médio de 7.23 metros e desvio padrão de 0.33 metros.

1. Qual é a probabilidade de ele dar um salto entre os 7 e os 7.5 metros?
2. O atleta vai dar o último salto a que tem direito e para se classificar para a fase seguinte precisa de ultrapassar os 7.55 metros. Qual a probabilidade de o conseguir?
3. O atleta vai efetuar 5 saltos, qual a probabilidade de dois dos saltos ultrapassarem os 7.5 metros?
4. Entretanto formou-se uma equipa de 3 atletas, e o comprimento dos saltos destes 3 atletas distribui-se da seguinte forma

$$X_1 \sim N(7.2; 0.3) \quad X_2 \sim N(7.1; 0.36) \quad X_3 \sim N(6.9; 0.1)$$

Os atletas vão efetuar um salto. Qual a probabilidade da soma dos três saltos em comprimento ser superior a 21.3 metros?

**Exercício 3.41** Para fabricar um cão de madeira em série são necessárias as máquinas  $A$ ,  $B$  e  $C$ . A máquina  $A$  produz moldes de madeira (com a forma do cão) cujo peso está normalmente distribuído com média 20 e desvio padrão 1.4 gramas. A máquina  $B$  cobre os moldes de madeira com pêlo sintético, estando o peso deste material normalmente distribuído com média 1.8 e desvio padrão 0.12 gramas. Por último o cão vai finalmente à máquina  $C$  onde são colocados os olhos, o nariz e a língua; o peso destes últimos pormenores tem também distribuição normal de média 0.2 e desvio padrão 0.03 gramas. Qual a probabilidade de um cão, na sua forma final, pesar mais de 21 gramas?

**Exercício 3.42** As notas obtidas numa faculdade a estatística são uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal de média 10. Sabe-se que  $P(X < 12) = 0.8413$ .

1. Determine o desvio padrão das notas.
2. Determine  $P(8 < X < 12)$ .
3. Qual a probabilidade de, em 10 alunos, 4 obterem uma nota superior a 8?

**Exercício 3.43** Seja  $X$  uma variável aleatória tal que  $X \sim \chi^2_{(22)}$ .

1. Calcule  $P(14 < X < 21.3)$ .
2. Obtenha os valores de  $a$  e  $b$  tais que  $P(a < X < b) = 0.95$  e  $P(X < a) = 0.025$ .

3. Determine o quantil de probabilidade  $\chi^2_{(22);0.05}$ . Interprete.

**Exercício 3.44** Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição t-Student com 14 graus de liberdade.

1. Calcule  $P(X \geq 3)$ .
2. Qual o valor  $k$  tal que  $P(T < k) = 0.10$ ?
3. Determine os quantis de probabilidade  $t_{(14);0.01}$  e  $t_{(14);0.99}$ . Interprete.

**Exercício 3.45** Considere que a variável aleatória  $X$  tem distribuição  $F_{(10,6)}$ .

1. Calcule  $P(X < 7.87)$ .
2. Calcule o valor  $k$  tal que  $P(X > k) = 0.9$ .
3. Calcule os quantis de probabilidade  $f_{(10,6);0.025}$  e  $f_{(10,6);0.975}$  e interprete.

# Soluções

- 3.1** 1) 0.10 **2a)** 0.10 **2b)** 0.66 **2c)** 0.05 **2d)** 0.2586 **3)**  $E[X] = 1.12$ ;  $V[X] = 1.4456$   
**4)** -
- 3.2** 1)  $\frac{12}{25}$ . **2)** - **3)**  $\frac{10}{13}$  **4)** -
- 3.3** 1)  $\frac{1}{15}$  **2)** - **3)**  $\frac{1}{3}$ .
- 3.4** 1) - **2)** - **3)**  $\frac{3}{8}$  **4)**  $E[X] = \frac{13}{8}$ ,  $E[X + 2] = \frac{29}{8}$ ,  $E[-X + 2] = \frac{3}{8}$  **5)**  $V[X] = \frac{47}{64}$ ,  
 $V[2X + 1] = \frac{47}{16}$ ,  $V[-2X + 1] = \frac{47}{16}$
- 3.5** 1)  $p = \frac{1}{6}$ ;  $k = 1$  **2)**  $V[X] = \frac{8}{9}$  **3)**  $E[3X + 5] = 6$ ;  $V[3X + 5] = 8$ ;  $E[1 - 2X] = \frac{1}{3}$ ;  
 $V[1 - 2X] = \frac{32}{9}$
- 3.6** 1) - **2a)**  $\frac{3}{4}$  **2b)**  $\frac{7}{8}$  **2c)**  $\frac{1}{2}$  **2d)**  $\frac{3}{8}$  **2e)** 1 **2f)**  $\frac{1}{2}$  **3)**  $E[X] = \frac{3}{2}$ ;  $V[X] = \frac{3}{4}$
- 3.7** 1)  $a = 0$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = 1$ . **2)**  $E[Y] = -\frac{21}{8}$ ,  $V[Y] = \frac{179}{64}$ ,  $\sigma_Y = \sqrt{\frac{179}{64}}$
- 3.8** 1) - **2)**  $\frac{31}{34}$  **3)**  $E[X] = 50$ ;  $V[X] = 850$ ;  $\sigma_X = \sqrt{850}$
- 3.9** 1) - **2)**  $E[X] = 5$ ;  $V[X] = 5$ ;  $\sigma_X = \sqrt{5}$  **3)**  $\frac{1}{2}$
- 3.10** 1) - **2)**  $E[X] = 17.5$ ,  $V[X] = 131.25$ ,  $\sigma_X = 11.456$  **3)**  $\frac{3}{7}$
- 3.11** 1) - **2)** 1;  $\sqrt{\frac{2}{3}}$
- 3.12** 1)  $X \sim B(8; 0.10)$  **2)** 0.9950 **3)** 0.9619; 0.0331 **4)** 7.2
- 3.13** 1) 0.1009 **2)** 0.3907 **3)** 20
- 3.14** 1)  $X \sim B(15; 0.30)$  **2)** 0.000000014 **3)** 0.0512
- 3.15** 1) 0.9536 **2)** 60 **3)**  $n \leq 5$
- 3.16** 1)  $X \sim B(5; 0.05)$ , ou seja.  $n = 5$  e  $p = 0.05$  **2a)** 0.9774 **2b)** 0.0214 **2c)** 0.2262 **2d)** 0.0012
- 3.17** 1) 0.00003 **2)** 0.0073
- 3.18** 1)  $E[X] = 5$ ;  $V[X] = 5$  **2)** 0.0067 **3)** 0.4914 **4)** 0.1137 **5)** 0.0176
- 3.19** 1) 0.1353 **2)** 0.0138 **3)** 0.9992
- 3.20** 1) 0.4405 **2)** 0.0062
- 3.21** 1) - **2a)** 0.5 **2b)** 0.875 **2c)** 0.5 **2d)** 0.5 **3)**  $E[X] = 0$ ;  $V[X] = \frac{1}{6}$
- 3.22** 1)  $k = \frac{1}{3}$  **2)** - **3a)**  $\frac{1}{6}$  **3b)** 0.875 **3c)** 0.46 **3d)** 0.375 **4)**  $E[X] = \frac{4}{3}$  e  $V[X] = \frac{7}{18}$
- 3.23** 1) 8 **2)** - **3)** 0.35
- 3.24** 1) - **2)** - **3)** 0.3 **4)** 4.58
- 3.25** 1)  $k = 3$  **2)**  $V[X] = \frac{39}{64}$  **3)** 0.5; 0.5
- 3.26** 1)  $\frac{1}{3}$  **2)** - **3)**  $E[X] = \frac{5}{12}$ ;  $V[X] = 0.99861$  **4)**  $E[X^2 + 2] = 3.1722$ ;  $V[1 - \frac{X}{2}] = 0.24965$
- 3.27** 1) 2.45 centenas de litros **2)** 0.624 centenas de litros
- 3.28** 1) 0.3679 **2)** 0.3679
- 3.29** 1) 1403.7 **2)** 0.9831
- 3.30** 1) 0.6472 **2)** 0.3945
- 3.31** 1) 0.1429 **2)** 0.9992 **3)** 0.2231
- 3.32** 1) 0.2202 **2)** 0.6592
- 3.33** 1) 50; 0.0208 **2)** 0.7 **3)** 0.5556
- 3.34** 1) [499.4; 511.4] **2)** 0.95 **3)** 0.7667 **4)** 0.6083
- 3.35** 1) 0.5 **2)** 0.2145 **3)** 0.2140 **4)** 0.0029
- 3.36** 1: 50 **2)** 0.92 cm
- 3.37** 1) 0.8413 **2)** 0.2661 **3)** 0.0228
- 3.38** 1) 0.62% **2:** 0.3811 **3.38.3:** 9.9688 (usando  $\Phi^{-1}(0.85) \approx 1.04$ )
- 3.39** 1) 21.036 **2)** 0.3015 **3)** 0.3177
- 3.40** 1) 0.5519 (0.5505 com recurso ao R) **2)** 0.166 **3)** 0.2048 com  $p \approx 0.20$  (0.2132 com recurso ao R) **4)** 0.4168 (0.4173 com recurso ao R)
- 3.41)** 0.7611
- 3.42** 1) 2 **2)** 0.6826 **3)** 0.0017
- 3.43** 1) 0.4 **2)**  $a = 9.54$  e  $b = 36.8$  **3)** 12.3
- 3.44** 1) 0.005 **2)** -1.345 **3)**  $t_{(14);0.01} = -2,624$  e  $t_{(14);0.99} = 2.624$

$$\mathbf{3.45} \quad \mathbf{1)} \quad 0.99 \quad \mathbf{2)} \quad 0.4065 \quad \mathbf{3)} \quad f_{(10,6);0.025} = 0.2457 \text{ e } f_{(10,6);0.975} = 5.52$$