Probabilidades e Estatística

Elementos da Teoria da Estimação

Prof. Caldeira Duarte e Prof.ª Anabela Pereira

Actualizado pelo Prof. António Sardinha (Fevereiro de 2013)
Actualizado pela Prof.ª Paula Pereira (Fevereiro de 2017)

Departamento de Matemática

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

5 ELEMENTOS DA TEORIA DA ESTIMAÇÃO

O objectivo de um problema estatístico de estimação consiste na avaliação do valor (desconhecido) de um parâmetro.

5.1 Estimadores

Passamos agora a definir alguns conceitos: **estimador** é qualquer estatística usada para estimar o valor de um parâmetro; **estimativa** de um parâmetro de uma população é qualquer valor específico de uma estatística desse parâmetro; **estimação** é todo o processo que se baseia em utilizar um estimador para produzir uma estimativa do parâmetro.

Exemplo 5.1. Considere-se a amostra de uma população constante na tabela seguinte

1	1.5	3.2	4	5.1	6	7.3	8.4	9.5	10

Um estimador da média de qualquer amostra de dimensão 10 é dado por

$$\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i.$$

Concretizando para a amostra dada obtemos a estimativa $\bar{x} = 5.6$. ∎

A estatística ou estimador representa-se, geralmente, por uma letra maiúscula e a estimativa pela correspondente minúscula.

Para encontrarmos estimativas dum parâmetro θ desconhecido de uma população, a partir de uma amostra, podemos utilizar dois tipos de estimação:

- **Estimação Pontual**, que consiste em encontrar um valor simples ou ponto θ^* (estimador) para θ;

- **Estimação por Intervalos**, que consiste em construir um intervalo de estimação (ou intervalo de confiança) a que θ pertence com uma certa probabilidade conhecida.

O primeiro tipo de estimação fornece-nos um valor simples que, para além de ser muito falível, também não permite uma avaliação da precisão do estimador, isto é, não permite o cálculo da diferença provável entre a estatística e o parâmetro.

No segundo tipo de estimação a *qualidade* de uma estimativa é definida associando-lhe um intervalo (de confiança) tendo uma probabilidade conhecida de conter o verdadeiro valor de θ. Como é óbvio um intervalo de confiança pode não conter o verdadeiro valor de θ, assim como qualquer outra estimativa, porém em contraste com a estimação pontual, a probabilidade de erro para o intervalo de confiança pode ser objectivamente determinada.

Em geral um estimador (ponto) ou região de estimação (intervalo de confiança) devem possuir qualidades óptimas assintóticas, isto é, válidas quando se trabalha com grandes amostras. Vamos passar a enunciar algumas dessas propriedades.

Considerando θ^* um estimador do parâmetro desconhecido θ, é desejável que o valor θ^*, observado a partir de uma amostra seja, com grande probabilidade, um valor vizinho de θ, e como tal, uma boa *estimativa* do mesmo. Conclui-se então que θ^* é um bom estimador de

θ se a sua dispersão em torno deste valor for pequena. Assim sendo, pode considerar-se um estimador de um parâmetro como uma sucessão de estatísticas θ_1^*, θ_2^*,...,θ_n^* que convergem em probabilidade para θ à medida que a dimensão da amostra aumenta. A esta propriedade de uma estatística, que permite encará-la como estimador de um parâmetro, dá-se o nome de **convergência** (ou **consistência**). Formalmente:

Definição 5.2. *Um estimador θ^* diz-se* ***convergente*** *ou* ***consistente*** *se e só se*

$$\lim_{n\to\infty} E[\theta^*] = \theta \text{ e } \lim_{n\to\infty} V[\theta^*] = 0.$$

Exemplo 5.3. Podemos observar no gráfico da Figura 5.1 o comportamento de um estimador θ^* de θ, convergente ou consistente, o qual, à medida que a dimensão da amostra aumenta tende, em valor médio, para o parâmetro θ, simultaneamente a sua dispersão tende para zero. ■

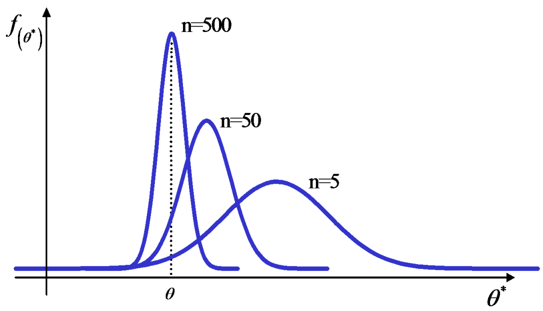

Figura 5.1: Estimador consistente ou convergente de θ.

Definição 5.4. *O* ***desvio*** *de um estimador é a quantidade $(E[\theta^*] - \theta)$.*

Definição 5.5. *Um estimador θ^* diz-se* ***centrado*** *ou* ***não enviesado*** *quando o seu desvio é nulo, isto é, quando $(E[\theta^*] - \theta) = 0 \Leftrightarrow E[\theta^*] = \theta$.*

Exemplo 5.6. Podemos observar através da Figura 5.2 que o estimador θ_1^* é não enviesado ou centrado e que o estimador θ_2^* é enviesado ou não centrado, sendo a diferença $(E[\theta_2^*] - \theta)$ correspondente ao enviesamento ou desvio. ■

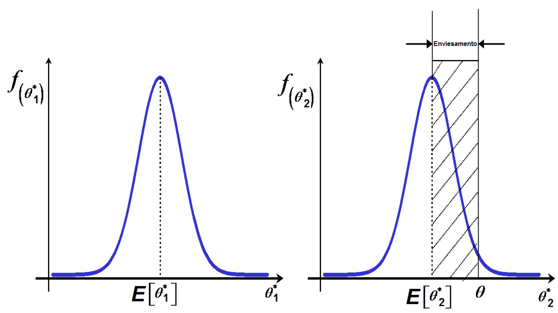

Figura 5.2: θ_1^* é não enviesado e θ_2^* é enviesado.

Definição 5.7. *Um estimador diz-se* ***assintoticamente centrado*** *quando o desvio* $(E[\theta^*] - \theta)$ *tende para zero à medida que a dimensão da amostra tende para o da população (ou quando* $n \to +\infty$*).*

É necessário ter em atenção que o facto de um estimador estar concentrado em torno do valor real de um parâmetro pode ser mais importante do que ser centrado, desde que o desvio seja pequeno (para valores grandes de n). Através da Figura 5.3 seguinte, verificamos empiricamente que é preferível um estimador com pequena dispersão embora não centrado (θ_1^*) a um estimador centrado com grande dispersão (θ_2^*).

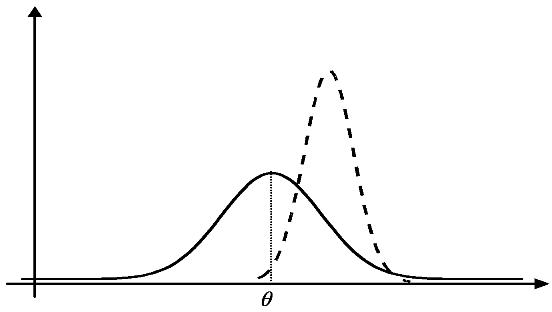

Figura 5.3: $f(\theta_1^*)$ a tracejado e $f(\theta_2^*)$ a contínuo.

Torna-se então necessário encontrar uma forma de medir a dispersão de um estimador face a um ponto dado (geralmente o valor real do parâmetro a estimar). Uma forma possível de medir a dispersão de θ^* em torno de θ é dada por $E[(\theta^* - \theta)^2]$, logo,

Definição 5.8. *Um estimador* θ^* *diz-se* ***eficiente*** *se tem* $E[(\theta^* - \theta)^2]$ *mínimo.*

Proposição 5.9. *Seja* θ^**um estimador de um parâmetro* θ*, então*

$$E\left[(\theta^* - \theta)^2\right] = V[\theta^*] + (E[\theta^*] - \theta)^2.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} E\left[(\theta^* - \theta)^2\right] &= E\left[(\theta^*)^2 - 2\theta^*\theta + \theta^2\right] = E\left[(\theta^*)^2\right] - 2\theta E[\theta^*] + \theta^2 = \\ &= E\left[(\theta^*)^2\right] - (E[\theta^*])^2 + (E[\theta^*])^2 - 2\theta E[\theta^*] + \theta^2 = \\ &= \left(E\left[(\theta^*)^2\right] - (E[\theta^*])^2\right) + \left((E[\theta^*])^2 - 2\theta E[\theta^*] + \theta^2\right) = \\ &= V[\theta^*] + (E[\theta^*] - \theta)^2. \end{aligned}$$

□

Para o caso dos estimadores centrados, o melhor estimador obtém-se muitas vezes pela condição da variância mínima, pois, se θ^* é centrado,

$$E\left[(\theta^* - \theta)^2\right] = V[\theta^*]$$

isto é, procura-se um estimador θ^* cuja variância seja inferior à de qualquer outro estimador centrado.

Considerando agora dois estimadores em que o primeiro é centrado mas tem uma dispersão considerável e um segundo que embora ligeiramente enviesado tem uma dispersão pequena, é necessário utilizar uma ferramenta que indique qual dos dois é melhor estimador. Para comparar e decidir qual dos dois se deve utilizar é necessário analisar a sua eficiência relativa. Formalmente:

Definição 5.10. *Dados dois estimadores de θ, θ_1^* e θ_2^*, define-se eficiência relativa de θ_1^* em relação a θ_2^*, pelo quociente*

$$\frac{E\left[(\theta_2^*-\theta)^2\right]}{E\left[(\theta_1^*-\theta)^2\right]}=\frac{V\left[\theta_2^*\right]+\left(E\left[\theta_2^*\right]-\theta\right)^2}{V\left[\theta_1^*\right]+\left(E\left[\theta_1^*\right]-\theta\right)^2}$$

Se este quociente for maior do que a unidade então θ_1^* é mais eficiente do que θ_2^*.

Exemplo 5.11. Considere uma população de média μ desconhecida e variância igual a σ^2 (conhecida). Suponha que o estimador da média é dado por

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

Vamos estudar as qualidades deste estimador e em seguida comparar a sua eficiência com um outro estimador da média.

- **Enviesamento**:

  $\bar{X}$ é um estimador centrado ou não enviesado de μ se $E\left[\bar{X}\right]=\mu$.

  $E\left[\bar{X}\right]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i\right]=\frac{1}{n}n\mu=\mu.$

  Conclui-se que $\bar{X}$ é um estimador centrado ou não enviesado[1].

- **Convergência**:

  $\bar{X}$ é um estimador convergente se se verificar,

  $$\lim_{n\to\infty}E\left[\bar{X}\right]=\mu \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty}V\left[\bar{X}\right]=0.$$

  O primeiro limite, como $E\left[\bar{X}\right]=\mu$, verifica-se imediatamente, pois:

  $$\lim_{n\to\infty}E\left[\bar{X}\right]=\lim_{n\to\infty}\mu=\mu.$$

  Relativamente ao segundo limite, começamos por calcular a variância de $\bar{X}$:

  $V\left[\bar{X}\right]=V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n^2}V\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]\underset{X_i\text{ v.a. independentes}}{=}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V\left[X_i\right]=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n},$

---

[1]

- $E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=E\left[X_1\right]+E\left[X_2\right]+\ldots+E\left[X_n\right]=\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i\right]$
- Note-se que para X_i variáveis aleatórias independentes temos

$$V\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=V\left[X_1\right]+V\left[X_2\right]+\ldots+V\left[X_n\right]=\sum_{i=1}^{n}V\left[X_i\right].$$

sendo,

$$\lim_{n\to\infty} V\left[\bar{X}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

Conclui-se que o estimador $\bar{X}$ é convergente.

- **Eficiência relativa**:

Se considerarmos uma amostra de dimensão n dessa população e

$$\mu^* = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_n}{6}$$

for considerado um estimador da média, podemos comparar a eficiência entre os dois estimadores. Para o efeito vejamos se μ^* é um estimador centrado ou não enviesado, isto é, se $E[\mu^*] = \mu$:

$$E[\mu^*] = E\left[\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_n}{6}\right] = \frac{1}{6}\left(E[X_1] + 2E[X_2] + 3E[X_n]\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(\mu + 2\mu + 3\mu\right) = \mu.$$

Conclui-se que μ^* é um estimador centrado ou não enviesado. Como tal, a eficiência relativa de $\bar{X}$ relativamente a μ^* é dada por:

$$\frac{E\left[(\mu^* - \mu)^2\right]}{E\left[(\bar{X} - \mu)^2\right]} = \frac{V[\mu^*] + \left(E[\mu^*] - \mu\right)^2}{V\left[\bar{X}\right] + \left(E\left[\bar{X}\right] - \mu\right)^2} = \frac{V[\mu^*]}{V\left[\bar{X}\right]}$$

$$V[\mu^*] = V\left[\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_n}{6}\right] \underset{X_1, X_2, X_n \text{ v.a.independentes}}{=} \frac{1}{36}\left(V[X_1] + 4V[X_2] + 9V[X_n]\right) =$$
$$= \frac{1}{36}\left(\sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2\right) = \frac{14\sigma^2}{36}.$$

Logo,

$$\frac{E\left[(\mu^* - \mu)^2\right]}{E\left[(\bar{X} - \mu)^2\right]} = \frac{V[\mu^*]}{V\left[\bar{X}\right]} = \frac{\frac{14\sigma^2}{36}}{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{14n}{36}.$$

Como se verifica, a eficiência relativa depende da dimensão da amostra. Se pretendermos ser mais específicos procedemos do seguinte modo:

. se $\dfrac{E\left[(\mu^* - \mu)^2\right]}{E\left[(\bar{X} - \mu)^2\right]} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{14n}{36} < 1 \Rightarrow n \leq 2$, μ^* é mais eficiente;

. se $\dfrac{E\left[(\mu^* - \mu)^2\right]}{E\left[(\bar{X} - \mu)^2\right]} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{14n}{36} > 1 \Rightarrow n \geq 3$, $\bar{X}$ é mais eficiente.

$\blacksquare$

Exemplo 5.12. São propostos os seguintes estimadores para a variância de uma população normal de média μ,

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \quad \text{e} \quad S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Vamos proceder ao estudo das seguintes propriedades: enviesamento e convergência. Começando por analisar S^2 :

- ***Enviesamento* de S^2:**
$E[S^2] = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{n}{n-1}E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] =$
$= \frac{n}{n-1}E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \bar{X}^2\right] = \frac{n}{n-1}\left(E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2\right] - E\left[\bar{X}^2\right]\right) =$
$= \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[(X_i)^2\right] - E\left[\bar{X}^2\right]\right) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n}{n}E\left[X^2\right] - E\left[\bar{X}^2\right]\right)$
Dado que:
$V[X] = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 \Leftrightarrow \sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 \Leftrightarrow E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$
$V[\bar{X}] = V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \frac{1}{n^2}V\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V[X_i] = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$
$V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} = E[\bar{X}^2] - E[\bar{X}]^2 \Leftrightarrow \frac{\sigma^2}{n} = E[\bar{X}^2] - \mu^2 \Leftrightarrow E[\bar{X}^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$
então,
$\frac{n}{n-1}\left(\frac{n}{n}E\left[X^2\right] - E\left[\bar{X}^2\right]\right) = \frac{n}{n-1}\left(\sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2\right) = \frac{n}{n-1}\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) =$
$= \frac{n}{n-1}\left(\frac{n\sigma^2 - \sigma^2}{n}\right) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{(n-1)\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2$
Como $E[S^2] = \sigma^2$ conclui-se que S^2 é um estimador centrado ou não enviesado.

- ***Convergência* de S^2:**
$\lim\limits_{n\to\infty} E\left[S^2\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma^2 = \sigma^2$. $\lim\limits_{n\to\infty} V\left[S^2\right] = ?$
Como já vimos, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \Rightarrow V\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$. Então
$V\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1) \Leftrightarrow \frac{(n-1)}{\sigma^4}V\left[S^2\right] = 2(n-1) \Leftrightarrow V\left[S^2\right] = \frac{2\sigma^4(n-1)}{(n-1)^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1}$.
Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} V\left[S^2\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sigma^4}{n-1} = 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[S^2\right] = \sigma^2$, e $\lim\limits_{n\to\infty} V\left[S^2\right] = 0$, conclui-se que S^2 é um estimador convergente.

Analisando agora S'^2 :

- ***Enviesamento* de S'^2:**
$E[S'^2] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \bar{X}^2\right] =$
$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[(X_i)^2\right] - E\left[\bar{X}^2\right] = \frac{n}{n}E\left[X^2\right] - E\left[\bar{X}^2\right] = \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$ Como $E[S'^2] \neq \sigma^2$ conclui-se que S'^2 é um estimador não centrado ou enviesado.

- ***Convergência* de S'^2:**
$\lim\limits_{n\to\infty} E\left[S'^2\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2$. $\lim\limits_{n\to\infty} V\left[S'^2\right] = ?$ Como,
$V\left[S'^2\right] = V\left[\frac{(n-1)S^2}{n}\right] = \frac{(n-1)^2}{n^2}V\left[S^2\right] = \frac{(n-1)^2}{n^2} \times \frac{2\sigma^4}{(n-1)} = \frac{(n-1)2\sigma^4}{n^2}$.
Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} V\left[S'^2\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)2\sigma^4}{n^2} = 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[S'^2\right] = \sigma^2$ e $\lim\limits_{n\to\infty} V\left[S'^2\right] = 0$, conclui-se que S'^2 é um estimador convergente ■

5.2 Intervalos de Confiança

Nos intervalos de confiança que mais adiante apresentaremos parte-se do princípio de que todas as populações em análise têm comportamento normal (ou aproximadamente normal), sendo as estatísticas e respectivas distribuições amostrais a utilizar as apresentadas no capítulo anterior.

Na teoria da estimação pontual temos uma avaliação (θ^*) do verdadeiro valor de um parâmetro (θ), no entanto não dispomos de informação acerca da confiança a atribuir a essa estimativa. Na estimação por intervalos o estimador θ^* de um parâmetro θ é apresentado sob a forma de um intervalo genérico $]\theta^* - d, \theta^* + d[$ (em que d representa o erro associado ao intervalo), existindo uma probabilidade conhecida desse intervalo conter o parâmetro θ.

Em resumo, se considerarmos X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f\left(X_1, X_2, ..., X_n/\theta\right)$ em que θ é o parâmetro desconhecido a estimar, $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória e

$$L_1\left(X_1, X_2, ..., X_n\right) \quad \text{e} \quad L_2\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$$

duas estatísticas tais que

$$L_1 < L_2 \ \wedge \ P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha.$$

Nestas condições, para uma realização da amostra $x_1, x_2, ..., x_n$, calculamos l_1 e l_2 e:

- ao intervalo $]l_1, l_2[$ denominamos **intervalo de confiança** a $(1-\alpha)100\%$ para o parâmetro θ;
- à probabilidade $(1-\alpha)$ dá-se o nome de **grau de confiança** do intervalo;
- à probabilidade complementar, α, dá-se o nome de **nível de significância**;
- aos extremos do intervalo, l_1 e l_2, chamamos **limites de confiança inferior e superior**, respectivamente;
- a **amplitude** do intervalo de confiança é $l_2 - l_1$;
- a **margem de erro** do intervalo de confiança é $\frac{l_2 - l_1}{2}$, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança.

Como é óbvio pretende-se que uma estimativa possua o máximo de confiança possível, no entanto, se uma maior confiança é pretendida na estimação, esta conduz a possibilidades de erros menores (dado que um baixo nível de significância produz um intervalo de estimação maior) e, como tal, a precisão da estimação diminui.

Exemplo 5.13. Consideremos as seguintes afirmações proferidas por três alunos de uma escola que esperam ansiosamente a saída de uma pauta de exame de Estatística onde constam as respectivas notas:
1^o Estudante: "Tenho a sensação de que o professor de Estatística afixa a pauta na parte da manhã, como usualmente faz."
2^o Estudante: "Tenho quase a certeza de que o professor de Estatística afixa a pauta entre as 10 e as 11 horas."

3^o Estudante: "Tenho a certeza absoluta de que o professor de Estatística ou afixa a pauta às 10.30 ou já não a afixa hoje."

Estas três afirmações permitem constatar facilmente que se se pretende uma maior confiança na estimativa, se tem que permitir que a possibilidade de erro aumente. Por outro lado, se se permitir que o erro diminua, a amplitude do intervalo aumenta, perdendo a estimativa alguma precisão. No entanto há que ter em atenção que, se um intervalo de confiança tem uma amplitude demasiado grande, a estimativa não tem utilidade. ■

Resumindo, um intervalo de confiança tem uma amplitude inversamente proporcional à dimensão da amostra pois, no limite, para n a tender para a dimensão da população, o intervalo reduz-se a um único ponto, isto é, o valor do parâmetro é conhecido com exactidão. Da mesma forma, se considerarmos n fixo, a amplitude do intervalo também é inversamente proporcional ao risco ou erro a ele associado, isto é, à probabilidade do intervalo não conter o verdadeiro valor do parâmetro.

A interpretação de um intervalo de confiança é geralmente realizada de uma forma relativamente banal, mas incorrecta do ponto de vista teórico. Se for recolhido um grande número de amostras de n observações independentes da variável aleatória X, a proporção de amostras às quais correspondem particulares intervalos $]l_1, l_2[$, compreendendo o verdadeiro valor do parâmetro θ, tende a aproximar-se de $(1-\alpha)$. Assim, $(1-\alpha)$, traduz o grau de de confiança que se tem em que uma particular amostra de dimensão n de X dê origem a um intervalo que compreenda o verdadeiro valor do parâmetro θ. Isto é, a partir da igualdade

$$P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha$$

conclui-se que a probabilidade do intervalo aleatório genérico

$$]L_1, L_2[$$

conter o verdadeiro valor do parâmetro θ é $(1-\alpha)$. Tem-se pois considerável confiança que, para uma amostra concreta de dimensão n, o particular intervalo correspondente $]l_1, l_2[$, contenha o valor de θ. Repare-se que cada intervalo particular $]l_1, l_2[$ ou contem ou não contem θ, e $(1-\alpha)$ não traduz a primeira dessa alternativas; com efeito, como l_1 e l_2 são números, a dupla desigualdade $l_1 < \theta < l_2$ ou é válida ou não é e portanto

$$P(l_1 < \theta < l_2) = 1 \quad \text{ou} \quad P(l_1 < \theta < l_2) = 0,$$

embora por desconhecimento de θ, não se saiba o que se passa. A cada particularização do intervalo $]L_1, L_2[$, associa-se pois, como grau de confiança quanto a conter θ, o número $(1-\alpha)$; de um modo sintético, qualquer particularização do referido intervalo aleatório diz-se que constitui um intervalo de confiança a $(1-\alpha)$ para θ.

5.2.1 Intervalos de Confiança para a Média

Com σ conhecido Estatística e distribuição amostral a utilizar:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Para determinar um intervalo de confiança para μ, vamos utilizar a estatística Z. Fixando o valor α começamos por calcular um intervalo

$$\left]-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[$$

onde Z se situa. Para o cálculo dos extremos deste intervalo consulta-se o valor de $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ na tabela da Normal, correspondente à probabilidade

$$P\left(Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

(note-se que $-z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ e $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ são simétricos dado que as respectivas probabilidades são complementares tal com se visualiza na Figura 5.4).

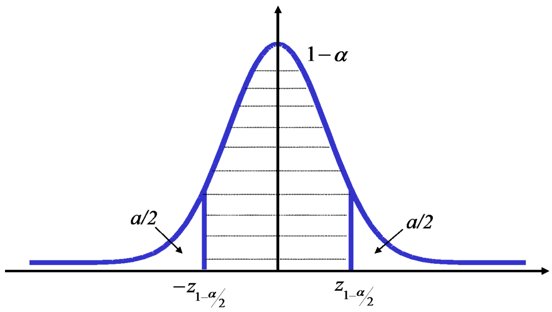

Figura 5.4: Intervalo de Confiança para a v.a. Z.

Então, o Intervalo de Confiança para a média a $(1-\alpha)100\%$ deduz-se do seguinte modo,

$$\begin{aligned}
P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > \mu-\bar{X} > -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} > \mu > -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.
\end{aligned}$$

Sendo $\bar{x}$ calculado a partir dos valores da amostra, da anterior igualdade resulta o intervalo de confiança para μ a $(1-\alpha)100\%$:

$$\left]\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[.$$

Exemplo 5.14. A característica X em certo artigo produzido em série segue uma distribuição com variância igual a 9. Com base numa amostra de dimensão 100, que forneceu um valor médio igual a 5, determine um intervalo de confiança a 95% para o valor médio da distribuição.

Como não conhecemos a distribuição da população em causa, através do Teorema do Limite Central (teorema 3.10 do capítulo 3) vamos obter

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{3}{\sqrt{100}}} \dot{\sim} \mathcal{N}(0,1).$$

Deduzindo o IC:

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$
$$\vdots$$
$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Como

$$1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975,$$

retiramos da tabela da normal,

$$P(Z < z_{0.975}) = 0.975 \Leftrightarrow z_{0.975} = 1.96.$$

Como $\bar{x} = 5$, obtemos o intervalo para μ a 95% de confiança (ou com 5% de risco de erro):

$$\left]5 - 1.96 \times \frac{3}{10}, 5 + 1.96 \times \frac{3}{10}\right[=]4.412, 5.588[\,.$$

Em termos de interpretação do intervalo de confiança anterior, e se quisermos ser precisos, concluímos que, se observarmos um grande número de amostras de dimensão 100, a proporção das amostras onde podemos encontrar a média da v.a. X situada no intervalo de confiança acima definido é igual a 0.95; de uma forma mais sintética podemos afirmar que, o anterior intervalo aleatório $]4.412, 5.588[$, é um intervalo de confiança a 95% para a média de X; por último, de uma forma mais corrente, embora menos correcta em termos teóricos, é usual afirmar que, com 95% de confiança a média de X se situa entre os valores 4.412 e 5.588. ■

Exemplo 5.15. Se para o exemplo 5.14 pretendessemos saber a dimensão da amostra para obtermos um intervalo de confiança para μ, nas condições anteriormente apresentadas, mas cuja amplitude (A) não fosse superior a 0.5, o procedimento a seguir seria:

$$A = \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2 \times z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Logo,

$$A = 2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0.5 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 23.52 \Leftrightarrow n \geq 553.1904 \Rightarrow n \geq 554,$$

isto é, a dimensão da amostra deveria ser igual ou superior a 554. ■

Com σ desconhecido Neste tipo de intervalos de confiança, em que ambos os parâmetros são desconhecidos, podemos encontrar-nos perante duas situações distintas:

1. se a dimensão da amostra é grande (na prática, $n \geq 30$), utiliza-se a estatística e a distribuição amostral:
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right).$$
Obtendo-se, de forma análoga ao caso anterior, o intervalos de confiança para μ a $(1-\alpha)100\%$:
$$\left]\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right[;$$

2. se a dimensão da amostra é pequena (na prática, $n < 30$) utiliza-se a estatística e a distribuição amostral:
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}.$$

Fixando o valor de α começamos por calcular um intervalo
$$\left]-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}, t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right[$$
onde T se situa como observamos na Figura 5.5. Para o cálculo dos extremos deste intervalo consulta-se o valor de $t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}$ na tabela da t-Student (note-se que, à semelhança do que acontecia na distribuição Normal, $-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}$ e $t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}$ são simétricos), correspondente à probabilidade
$$P\left(T < t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

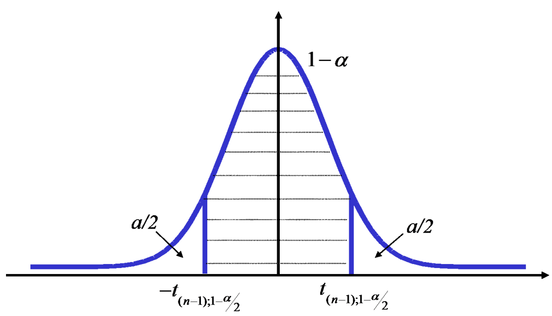

Figura 5.5: Intervalo de Confiança para a v.a. T.

Então o Intervalo de Confiança para a média a $(1-\alpha)100\%$ deduz-se do seguinte modo,

$$
\begin{aligned}
& P\left(-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} < T < t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & P\left(-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & P\left(-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & P\left(t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} > \mu-\bar{X} > -t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & P\left(\bar{X}+t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{X}-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & P\left(\bar{X}-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.
\end{aligned}
$$

Sendo $\bar{x}$ e s calculados a partir dos valores da amostra, resulta da anterior igualdade o intervalo de confiança para μ a $(1-\alpha)100\%$:

$$\left]\bar{x}-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right[.$$

Exemplo 5.16. O tempo que uma máquina leva a executar determinada operação numa peça está sujeito a variações, tendo no entanto um comportamento normal. Para verificar se as condições de funcionamento da máquina estão dentro das normas, registou-se 12 vezes o referido tempo. Os resultados (em segundos) foram os seguintes:

$$29,\quad 33,\quad 36,\quad 35,\quad 36,\quad 40,\quad 32,\quad 37,\quad 31,\quad 35,\quad 30,\quad 36.$$

Construa um intervalo de confiança a 95% para o tempo médio de execução da tarefa pela máquina em análise, sabendo que esta segue uma distribuição normal.

Para este exemplo podemos definir a nossa variável X como o "tempo, em segundos, que uma máquina leva a executar uma tarefa". Sabemos que

$$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma), n=12 \ \text{ e } \ (1-\alpha)=0.95.$$

Como desconhecemos os parâmetros da distribuição e $n<30$, vamos utilizar:

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}.$$

Deduzindo o Intervalo de Confiança:

$$
\begin{aligned}
& P\left(-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}} < T < t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
& \vdots \\
\Leftrightarrow\ & P\left(\bar{X}-t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+t_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.
\end{aligned}
$$

Impõe-se então calcular $\bar{x}$ e s :

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 34.17$$

$$s^2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i - 34.17)^2 = 10.08 \Rightarrow s = 3.18$$

Como

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{12}}} \sim t_{(11)} \text{ e } 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975,$$

tem-se

$$P\left(T < t_{(11);0.975}\right) = 0.975 \Rightarrow t_{(11);0.975} = 2.201.$$

Para $\bar{x} = 34.17$ e $s = 3.18$, obtém-se o intervalo de confiança para μ a 95% de confiança (ou com 5% de risco de erro):

$$\left]34.17 - 2.201 \times \frac{3.18}{\sqrt{12}}, 34.17 + 2.201 \times \frac{3.18}{\sqrt{12}}\right[=]32.15, 36.19[\,.$$

■

5.2.2 Intervalos de Confiança para a Diferença de Duas Médias

Com σ_1 e σ_2 conhecidos Considerem-se duas variáveis aleatórias independentes X_1 e X_2 normais com médias μ_1 e μ_2 e desvios padrões σ_1 e σ_2 (conhecidos) respectivamente. Seleccionando duas amostras aleatórias independentes de dimensões n_1 e n_2, para determinar um intervalo de confiança para $(\mu_1 - \mu_2)$, vamos utilizar a estatística e a distribuição amostral:

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Se as populações não forem normais ou não se conhecer a sua distribuição, mas n_1 e n_2 forem grandes, Z é assintoticamente uma $\mathcal{N}(0,1)$, pelo Teorema do Limite Central (teorema 3.10 do capítulo 3) .

Então o Intervalo de Confiança para a diferença de duas médias a $(1-\alpha)100\%$ deduz-se do seguinte modo,

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2) < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

Logo, o intervalo de confiança para $(\mu_1 - \mu_2)$ a $(1-\alpha)100\%$ vai ser:

$$\left]\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right[.$$

Exemplo 5.17. Duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 seguem distribuições normais com variâncias $\sigma_1^2 = 3.64$ e $\sigma_2^2 = 4.03$ respectivamente. Construa um intervalo de confiança a 95% para a diferença entre as suas médias, sabendo que em duas amostras recolhidas se obtiveram os seguintes resultados:

Amostra 1:	$n_1 = 32$	$\bar{x}_1 = 16.20$
Amostra 2:	$n_2 = 40$	$\bar{x}_2 = 14.85$

Vamos utilizar

$$1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

e

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{3.64}{32} + \frac{4.03}{40}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Deduzindo o Intervalo de Confiança:

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\vdots$$

$$P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

Como $z_{0.975} = 1.96$, $\bar{x}_1 = 16.20$ e $\bar{x}_2 = 14.85$ o intervalo de confiança para $(\mu_1 - \mu_2)$ a 95% de confiança (ou com 5% de risco de erro) vai ser:

$$\left](16.20 - 14.85) - 1.96\sqrt{0.2145}, (16.20 - 14.85) + 1.96\sqrt{0.2145}\right[=$$
$$=]0.44, 2.26[.$$

■

Com σ_1 e σ_2 desconhecidos Neste tipo de intervalos de confiança, em que ambos os parâmetros são desconhecidos, podemos, mais uma vez, encontrar-nos perante duas situações distintas:

1. se as dimensões das amostras são grandes (na prática, $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$), a estatística e a correspondente distribuição amostral a utilizar é:

   $$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

   O intervalo de confiança para $(\mu_1 - \mu_2)$ a $(1-\alpha)100\%$, deduzido de forma idêntica ao anterior, é:

   $$\left]\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right[;$$

2. se as dimensões das amostras são pequenas (na prática, $n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$ e considerando ainda que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), a estatística e a correspondente distribuição amostral a utilizar é:

$$T = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}.$$

Então o Intervalo de Confiança para a diferença das duas médias a $(1-\alpha)100\%$ deduz-se do seguinte modo $\left(\text{fazendo } a = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\right)$,

$$P\left(-t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}} < T < t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{a} < t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{a} < t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(-t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}a < \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2) < t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}a\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}a < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}a\right) = 1-\alpha$$

Logo, o intervalo de confiança para $(\mu_1 - \mu_2)$ a $(1-\alpha)100\%$ vai ser:

$$\left](\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}a, (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}a\right[=$$

$$= \left](\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\right[.$$

Exemplo 5.18. Foi realizado um estudo para determinar se um certo tratamento tinha efeito corrosivo sobre um metal. Uma amostra de 100 peças foi imersa num banho durante 24 horas com o tratamento, tendo sido removido uma média de 12.2 mm de metal com um desvio padrão de 1.1 mm. Uma segunda amostra de 200 peças foi também imersa durante 24 horas mas sem tratamento, sendo a média de metal removido de 9.1 mm, com um desvio padrão de 0.9 mm. Determine um intervalo de confiança a 98% para a diferença entre as médias das populações, retirando conclusões quanto ao efeito do tratamento.

Como $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$, σ_1^2 e σ_2^2 são desconhecidos vamos utilizar:

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{100} + \frac{S_2^2}{200}}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Deduzindo o Intervalo de Confiança:

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\vdots$$

$$P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{100} + \frac{S_2^2}{200}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{100} + \frac{S_2^2}{200}}\right) = 1-\alpha$$

Como $(1-\alpha)=0.98 \Leftrightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.99$, $z_{0.99}=2.33$, $\bar{x}_1=12.2$, $\bar{x}_2=9.1$, $s_1^2=1.1^2$ e $s_1^2=0.9^2$ o intervalo de confiança para $(\mu_1-\mu_2)$ a 98% de confiança (ou com 2% de risco de erro) vai ser:

$$\left](12.2-9.1)-2.33\sqrt{\frac{1.1^2}{100}+\frac{0.9^2}{200}},(12.2-9.1)+2.33\sqrt{\frac{1.1^2}{100}+\frac{0.9^2}{200}}\right[=$$

$$=]2.804, 3.396[\,.$$

Como

$$(\mu_1-\mu_2)>0 \Leftrightarrow \mu_1>\mu_2,$$

a média do metal removido com o tratamento é superior à média do metal removido sem este, conclui-se que o tratamento tem efeito corrosivo no metal. ■

Exemplo 5.19. Duas marcas de comprimidos, um deles contendo ácido acetilsalicílico (a.a.s.), são anunciados como fazendo desaparecer a dor de cabeça em tempo record. Foram feitas experiências com cada um deles, tendo os resultados (em minutos) sido os seguintes:

Comprimido 1:	9.6	9.4	9.3	11.2	11.4	12.1
(com a.a.s.)	10.4	9.6	10.2	8.8	13.0	10.2

Comprimido 2:	10.6	13.2	11.7	9.6	8.5	9.7
(sem a.a.s.)	12.3	12.4	10.8	10.8		

Assume-se por hipótese que os tempos acima referidos seguem distribuições normais (com variâncias iguais). Pretende-se saber se um dos comprimidos pode ser considerado mais eficaz do que o outro através de uma estimativa pontual e de uma estimativa por intervalos (a 95% de confiança).

Primeiro vamos obter a estimativa pontual para a diferença entre os tempos médios que cada comprimido leva a tirar a dor de cabeça. Considerando que,

X_1 representa o tempo em minutos que o comprimido com a.a.s. leva a tirar a dor de cabeça (com $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$)

X_2 representa o tempo em minutos que o comprimido sem a.a.s. leva a tirar a dor de cabeça (com $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2)$)

então,

$\bar{x}_1=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}x_i=10.4(3)$ minutos e $\bar{x}_2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=10.96$ minutos.

A estimativa pontual de $(\mu_1-\mu_2)$ é igual a

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=-0.53 \text{ minutos},$$

concluindo-se que, em média, o comprimido sem a.a.s. leva mais meio minuto que o com a.a.s. para fazer desaparecer a dor de cabeça.

Pretende-se agora obter um intervalo de confiança para a diferença de tempos médios e retirar conclusões para o modelo. Primeiro temos de calcular:

$$s_1^2=\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i-10.43)^2=1.58 \;\text{ e }\; s_2^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i-10.96)^2=2.12.$$

Como $n_1 < 30$, $n_2 < 30$, σ_1 e σ_2 desconhecidos e iguais, vamos utilizar,

$$T = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{10}\right) \frac{11S_1^2 + 9S_2^2}{20}}} \sim t_{(20)}.$$

Deduzindo o Intervalo de Confiança:

$$P\left(-t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}} < T < t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\vdots$$

$$P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}} a < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{(n_1+n_2-2);1-\frac{\alpha}{2}} a\right) = 1 - \alpha.$$

Considerando

$$(1-\alpha) = 0.95 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \text{ e } t_{(20);0.975} = 2.086,$$

então o intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$ a 95% de confiança é:

$$\left]-0.53 \mp 2.086\sqrt{\frac{11}{60} \times \frac{11 \times 1.58 + 9 \times 2.12}{20}}\right[=]-1.74, 0.68[\,.$$

Como o intervalo a 95% de confiança contém o valor zero (isto é, a diferença entre os dois tempos é nula) não é muito seguro afirmar que um dos comprimidos seja superior ao outro, embora exista uma ligeira tendência para o comprimido com a.a.s. ser, em média, mais rápido (pois a parte negativa do intervalo é maior do que a parte positiva). ∎

5.2.3 Intervalo de Confiança para uma Proporção

Para o cálculo do intervalo de confiança para uma proporção p, vamos utilizar a estatística e a distribuição amostral:

$$Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{p^* q^*}{n}}} \dot{\sim} \mathcal{N}(0,1).$$

O Intervalo de Confiança correspondente, a $(1-\alpha)100\%$ de confiança, é dado por:

$$\left]p^* - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^* q^*}{n}}; p^* + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^* q^*}{n}}\right[.$$

Exemplo 5.20. Um banco pretende estimar a percentagem de clientes que passam cheques sem cobertura. Numa amostra de 150 clientes conclui-se que 15 deles já tinham passado cheques sem cobertura. Estime, a 95% de confiança, a verdadeira percentagem (ou proporção) de clientes do banco que passam cheques sem cobertura.

Como estamos perante uma proporção (com $n \geq 30$) vamos utilizar

$$Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{p^* q^*}{150}}} \dot{\sim} \mathcal{N}(0,1).$$

Deduzindo o IC,

$$P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$
$$\vdots$$
$$\Leftrightarrow P\left(p^* - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^*q^*}{n}} < p < p^* + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p^*q^*}{n}}\right) = 1-\alpha.$$

Como

$$p^* = \frac{15}{150} = 0.1 \Rightarrow q^* = 1 - p^* = 0.9,$$
$$\text{e } (1-\alpha) = 0.95 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \text{ e } z_{0.975} = 1.96, \text{ então,}$$

o intervalo de confiança para p a 95% de confiança é:

$$\left]0.1 - 1.96\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{150}}, 0.1 + 1.96\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{150}}\right[=]5.20\,14.80\,[\,.$$

Conclui-se que, com 95% de confiança, a percentagem de clientes de um banco que passam cheques sem cobertura situa-se entre 5.2 e 14.8. ∎

5.2.4 Intervalo de Confiança para a Diferença de Duas Proporções

Para o cálculo do intervalo de confiança para a diferença de duas proporções $(p_1 - p_2)$ utiliza-se a estatística e a distribuição amostral:

$$Z = \frac{(p_1^* - p_2^*) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1^*q_1^*}{n_1} + \frac{p_2^*q_2^*}{n_2}}} \dot{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

obtendo-se o seguinte intervalo de confiança,

$$\left](p_1^* - p_2^*) - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1^*q_1^*}{n_1} + \frac{p_2^*q_2^*}{n_2}}, (p_1^* - p_2^*) + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1^*q_1^*}{n_1} + \frac{p_2^*q_2^*}{n_2}}\right[.$$

Exemplo 5.21. Um comerciante de brinquedos verificou que 38 de 100 bonecos fabricados pela empresa A não satisfaziam determinada norma de segurança, enquanto que 52 dos 500 fabricados pela empresa B não obedeciam à mesma norma. Verifique, através de um intervalo de confiança a 95%, se é razoável supor que as percentagens observadas traduzem comportamentos idênticos para os dois fabricantes, no que toca ao não cumprimento da norma de segurança.

Sejam,

p_1 - proporção de bonecos da empresa A que não cumpre a norma de segurança $(p_1^* = 0.38)$ e

p_2 - proporção de bonecos da empresa A que não cumpre a norma de segurança $(p_2^* = 0.104)$.

As empresas terão comportamentos idênticos se $p_1 = p_2$, isto é, se $p_1 - p_2 = 0$. Como $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$ vamos construir um intervalo de confiança para a diferença de proporções, utilizando

$$Z = \frac{(p_1^* - p_2^*) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1^* q_1^*}{100} + \frac{p_2^* q_2^*}{500}}} \dot{\sim} \mathcal{N}(0, 1).$$

Deduzindo o IC,

$$P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow P\left(p_1^* - p_2^* - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1^* q_1^*}{n_1} + \frac{p_2^* q_2^*}{n_2}} < p_1 - p_2 < p_1^* - p_2^* + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1^* q_1^*}{n_1} + \frac{p_2^* q_2^*}{n_2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Como $(1 - \alpha) = 0.95 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ e $z_{0.975} = 1.96$, então, o intervalo de confiança para $(p_1 - p_2)$ a 95% de confiança é:

$$\left](0.276) - 1.96\sqrt{\frac{0.2356}{100} + \frac{0.093}{500}}, (0.276) + 1.96\sqrt{\frac{0.2356}{100} + \frac{0.093}{500}}\right[=$$

$$=]17.7\, 37.5\, [$$

Como o intervalo de confiança apenas tem valores positivos conclui-se que a verdadeira proporção (a 95% de confiança) de bonecos que não cumprem a norma de segurança é maior na empresa A do que na empresa B. Como tal, estas duas empresas não têm comportamentos idênticos quanto ao incumprimento da norma de segurança. ∎

5.2.5 Intervalos de Confiança para a Variância

Com μ conhecido Para o cálculo do intervalo de confiança para σ^2 utiliza-se a estatística e a distribuição amostral:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}.$$

Fixando o valor de α começamos por calcular um intervalo

$$\left]\chi^2_{(n);\frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{(n);1-\frac{\alpha}{2}}\right[$$

onde X^2 se situa, como ilustra a Figura 5.6:

Para o cálculo dos extremos deste intervalo consultam-se os valores $\chi^2_{(n);\frac{\alpha}{2}}$ e $\chi^2_{(n);1-\frac{\alpha}{2}}$ na tabela do Qui-Quadrado, correspondentes às probabilidades

$$P\left(X^2 < \chi^2_{(n);\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \text{ e } P\left(X^2 < \chi^2_{(n);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

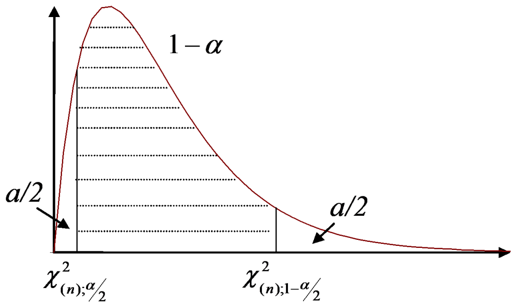

Figura 5.6: Intervalo de Confiança para X^2.

Então o Intervalo de Confiança para a variância a $(1-\alpha)100\%$ deduz-se do seguinte modo:

$$P\left(\chi^2_{(n);\frac{\alpha}{2}} < X^2 < \chi^2_{(n);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\chi^2_{(n);\frac{\alpha}{2}} < \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(n);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{\chi^2_{(n);\frac{\alpha}{2}}} > \frac{\sigma^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2} > \frac{1}{\chi^2_{(n);1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{(n);1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{(n);\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha.$$

Então, o intervalo de confiança para σ^2 a $(1-\alpha)100\%$ é:

$$\left]\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{(n);1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{(n);\frac{\alpha}{2}}}\right[.$$

Com μ desconhecido No caso de pretendermos estudar a variância de populações normais, em que μ é desconhecido usa-se a estatística e a distribuição amostral:

$$X^2 = (n-1)\,\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

Para deduzir o intervalo de confiança, fazemos,

$$P\left(\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}} < X^2 < \chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}} < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} > \frac{1}{\chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha.$$

Então, o intervalo de confiança para σ^2 a $(1-\alpha)100\%$ é:

$$\left]\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}}\right[.$$

Exemplo 5.22. Os dados seguintes são relativos aos pesos de 10 embalagens de adubo (em kg) distribuídos por uma empresa,

$$46.4, \quad 46.1, \quad 45.8, \quad 47, \quad 46.1, \quad 45.9, \quad 45.8, \quad 46.9, \quad 45.2, \quad 46.$$

Determine um intervalo de confiança a 95% para a variância dos pesos, cuja distribuição se considera normal. Nas mesmas condições, determine um intervalo de confiança para o desvio padrão dos pesos e comente-o.

Como a população é Normal e μ é desconhecido vamos utilizar a distribuição

$$X^2 = 9\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(9)}.$$

Deduzindo o IC,

$$P\left(\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}} < X^2 < \chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$
$$\vdots$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{(n-1);1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{(n-1);\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha.$$

Temos de calcular,

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 46.12 \text{ kgs}$$

e

$$s^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 46.12)^2 = 0.286(2).$$

Sabendo que $(1-\alpha) = 0.95 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Leftrightarrow (1-\frac{\alpha}{2}) = 0.975$, então,

$$\chi^2_{0.025}(9) = 2.7 \ \text{ e } \chi^2_{0.975}(9) = 19.$$

O intervalo de confiança para σ^2 a 95% de confiança é:

$$\left]\frac{9 \times 0.2862}{19}, \frac{9 \times 0.2862}{2.7}\right[=]0.1355, 0.9541[\,.$$

Para calcular o intervalo de confiança para σ a 95% de confiança basta fazer:

$$\left]\sqrt{\frac{9 \times 0.2862}{19}}, \sqrt{\frac{9 \times 0.2862}{2.7}}\right[=]0.3682, 0.9767[\,.$$

O intervalo para o desvio padrão indica que as embalagens têm uma variabilidade média no peso que pode ir de 368.2 a 976.7 gramas, com 95% de confiança. ■

5.2.6 Intervalo de Confiança para a Razão de Duas Variâncias

Neste caso vai utilizar-se a estatística e a distribuição amostral:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}.$$

Fixando o valor de α começamos por calcular um intervalo

$$\left] f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}}, f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}} \right[$$

onde F se situa como é ilustrado na Figura 5.7:

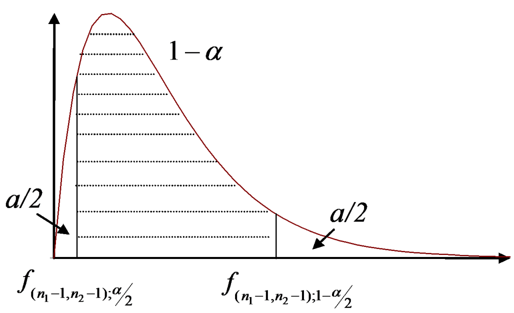

Figura 5.7: Intervalo de Confiança para a v.a. F.

Para o cálculo dos extremos deste intervalo consultam-se os valores $f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}}$ e $f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}}$ na tabela da F-Snedcor; o primeiro quantil não é imediato, como tal aplicamos o Teorema 3.26 (do capítulo 3) obtendo-o do seguinte modo:

$$f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{f_{(n_2-1,n_1-1);1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

O intervalo de confiança para a razão entre duas variâncias a $(1-\alpha)100\%$ deduz-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
&P\left(f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}} < F < f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &P\left(f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &P\left(f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}}\times\frac{S_2^2}{S_1^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}}\times\frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ &P\left(\frac{1}{f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}}}\times\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}}}\times\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) = 1-\alpha.
\end{aligned}$$

Então, o intervalo de confiança para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ a $(1-\alpha)100\%$ é:

$$\left]\frac{1}{f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}}}\times\frac{s_1^2}{s_2^2}, \frac{1}{f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}}}\times\frac{s_1^2}{s_2^2}\right[.$$

Exemplo 5.23. Pretende-se comparar o tempo que duas máquinas, A e B, gastam no fabrico de uma peça. A partir de 13 peças fabricadas na máquina A e de 16 peças fabricadas na máquina B, obtiveram-se os seguintes resultados para as variâncias dos tempos

$$s_1^2 = 6.32 \qquad s_2^2 = 4.80.$$

Admitindo que o tempo de fabrico das peças tem um comportamento normal, vamos determinar, a 95%, um intervalo de confiança para a razão das variâncias $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Aplica-se

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(12,15)}.$$

Deduzindo o IC,

$$\begin{aligned}
&P\left(f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}} < F < f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow \\
&\vdots \\
\Leftrightarrow\ &P\left(\frac{1}{f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}}}\times\frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1}{f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}}}\times\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) = 1-\alpha.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\alpha}{2} = 0.025 \Leftrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$, obtemos directamente da tabela

$$f_{(12,15);0.975} = 2.96$$

e para o outro quantil fazemos

$$f_{(12,15);0.025} = \frac{1}{f_{(15,12);0.975}} = \frac{1}{3.18} = 0.3145.$$

O intervalo de confiança para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ a 95% é:

$$\left]\frac{1}{2.96}\times\frac{6.32}{4.80}, \frac{1}{0.3145}\times\frac{6.32}{4.80}\right[=]0.4448, 4.1865[\,.$$

Conclui-se que, com 95% de confiança, a razão das variâncias se situa entre 0.4448 e 4.1865, o que significa que não deve existir grande diferença entre as variâncias dos tempos das duas máquinas (pois o valor 1, correspondente a $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, encontra-se no intervalo). ■

5.3 Notas sobre Distribuições Amostrais e Intervalos de Confiança

Em toda a exposição atrás realizada, considerou-se sempre o caso de amostras independentes, em que a probabilidade de escolha é a mesma para qualquer elemento da população ao longo de sucessivas tiragens. Isto implica que quando trabalhamos com populações finitas a amostragem é feita com reposição. No entanto, na prática geralmente sucede o contrário, isto é, a amostra é feita sem reposição, o que implica alterações nos parâmetros de amostragem de algumas estatísticas. Nestas condições os intervalos de confiança atrás apresentados são válidos para populações infinitas (ou populações finitas em que é utilizada a amostragem com reposição), porém, para o caso de populações finitas em que é utilizada amostragem sem reposição, é necessário corrigir os limites de confiança indicados.

Em resumo, para amostras extraídas com reposição de uma população X finita ou infinita tem-se que:

$$E\left[\bar{X}\right] = \mu \text{ e } V\left[\bar{X}\right] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Para populações finitas e amostras extraídas sem reposição (com N elementos de entre os quais n têm determinada característica) tem-se:

$$E\left[\bar{X}\right] = \mu \text{ e } V\left[\bar{X}\right] = \frac{\sigma^2}{n}\times\frac{N-n}{N-1}.$$

Exemplo 5.24. Uma companhia que transporta barris de petróleo recebe um carregamento de 100 barris, pretendendo estudar o diâmetro médio dos barris devido a problemas de carregamento dos mesmos. Uma amostra, sem reposição, de 50 barris fornece o diâmetro médio de 2.55. No passado o desvio padrão do diâmetro da população foi de 0.07. Construa um intervalo de confiança a 99% para a média.

Como estamos perante uma população finita em que σ é conhecido e a amostra é realizada sem reposição, vamos utilizar a estatística com a distribuição amostral,

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \sim \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Como $\sigma = 0.07, N = 100, n = 50$ e $(1-\alpha) = 0.99$, temos,

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{0.07}{\sqrt{50}}\times\sqrt{\frac{50}{99}}} \sim \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Deduzindo o IC,

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} < \mu < \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha.$$

Dado que $1-\frac{\alpha}{2} = 0.995$ e $z_{0.995} = 2.58$, então, o intervalo de confiança para μ a 99% de confiança é:

$$]2.55 - 2.58 \times 0.007, 2.55 + 2.58 \times 0.007[=]2.532, 2.568[\,.$$

Conclui-se que o diâmetro médio dos barris se situa entre 2.532 e 2.568, com 99% de confiança.

■

Referências

[1] FISZ, M., *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

[2] GUIMARÃES, R.C. e CABRAL, J.A.S., *Estatística*, McGraw-Hill de Portugal, Lisboa, 1997.

[3] MURTEIRA, B.J.F., *Probabilidades e Estatística*, McGraw-Hill de Portugal, Lisboa, 1979.

[4] SPIEGEL, M.R., *Probabilidade e Estatística*, Colecção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1978

[5] OLIVEIRA, J.T., *Probabilidades e Estatística*, vol. I, Escolar Editora, Lisboa,1967.

[6] MELLO, F., *Introdução aos Métodos Estatísticos*, vol. I e II, Cadernos do Instituto de Orientação Profissional, Lisboa, 1973.

[7] MONTGOMERY, D.; RUNGER, G., *Applied Statistics and Probability for Engineers*, Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, 2003.