

Data: 2 de julho de 2021

Duração: 2 horas e 30 minutos

Instruções:

- Não se aceitam provas ou questões escritas a lápis.
 - Não pode responder a diferentes questões numa mesma folha de resposta.
 - É permitida a utilização individual de máquina de calcular, a consulta de tabelas e a consulta de uma folha A4 manuscrita pelo aluno (não são permitidas fotocópias de folhas manuscritas nem a consulta de outros documentos através da máquina de calcular).
 - Não é permitido o manuseamento ou exibição de telemóveis durante a prova.
 - O abandono da sala só poderá efetuar-se decorrida uma hora a partir do início da prova e implica a entrega da mesma.
 - **Justifique convenientemente todas as respostas.**
-

Questões:

1. Em corridas de cavalos é ponto de vista comum entre os apostadores que, num circuito circular, os cavalos em determinadas pistas têm mais hipóteses de vencer as corridas. Para comprovar esta teoria, definiu-se a variável número da pista vencedora num circuito circular com 8 pistas, recolheram-se os resultados das corridas do primeiro mês da temporada de 2019 em circuitos circulares com 8 pistas e resumiram-se os resultados na tabela seguinte:

Pista	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de vitórias	29	19	18	25	17	10	15	11

Nos cálculos, considere 4 casas decimais e apresente todos os cálculos que efetuar.

- [1.5] (a) Construa a tabela de frequências completa.
- [1.5] (b) Construa o diagrama de extremos e quartis.
- [2.0] (c) Recorrendo ao teste de ajustamento do Qui-Quadrado e ao valor-p, para um nível de significância de 5%, acha que os apostadores têm razão?
- [2.0] 2. Com o objetivo de estudar a relação entre a quilometragem de um carro usado (X , em milhares de quilómetros) e o seu preço de venda (Y , em centenas de euros) foram recolhidos os seguintes dados:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 339, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 14931, \quad x_i \in [9, 65],$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 1530, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 290700, \quad y_i \in [80, 300], \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 39100$$

Pretende-se prever o preço de venda de um carro usado com 45000 km. Defina a variável independente e variável dependente, justifique se o modelo de regressão linear é adequado, calcule a reta de regressão, efetue a previsão pretendida e comente o resultado. Apresente todos os cálculos.

3. Considere que o consumo semanal de um certo bem alimentar, em dezenas de unidades, em famílias com filhos de idade inferior a 5 anos, é uma variável aleatória contínua X com a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{x^3}{27} & , 0 < x < 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases}$$

- [1.5] (a) Determine a probabilidade de uma família numa semana consumir menos de 25 unidades deste bem alimentar, sabendo que a família consome pelo menos 10 unidades desse bem alimentar.
- [1.0] (b) Mostre que o consumo médio semanal desse bem alimentar é de 22.5 unidades.
- [1.0] (c) Sabendo que $Y = -1 - 2X$ e que $E[X^2] = 5.4$ dezenas de unidades², determine a variância de Y .

4. Uma determinada estrada regional apresenta o piso em mau estado, tendo vários buracos na via. Considere que o número de buracos por quilómetro é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de média 6.

- [1.0] (a) Uma viatura vai percorrer 250 metros dessa estrada regional. Qual a probabilidade de encontrar 3 buracos no percurso?
- [1.0] (b) Qual a probabilidade da distância percorrida por uma dada viatura até ao primeiro buraco ser mais de 750 metros, sabendo que já foram percorridos pelo menos 200 metros e ainda não encontrou qualquer buraco?
- (c) Devido a obras num percurso de 10 quilómetros dessa estrada regional, sabe-se que o tempo (em minutos) que se leva a percorrer esse percurso é uma variável aleatória com distribuição normal de média 9.5 minutos e variância 2.1 minutos².
- [1.5] i. Um individuo com a sua viatura vai percorrer esses 10 quilómetros 7 vezes, qual a probabilidade de pelo menos 4 vezes demorar no mínimo 11 minutos a fazer o percurso?
- [1.0] ii. Considere um grupo de 15 veículos que percorrem esses 10 quilómetros e suponha que os tempos que levam a efetuar esse percurso são independentes de veículo para veículo. Determine a probabilidade do tempo médio de percurso dos 15 veículos não ultrapassar os 9 minutos.

5. O fabricante de uma bebida instalou balcões de "teste de sabor" em 40 grandes superfícies de Portugal, para testar a preferência do público por duas variantes da bebida: com e sem sabor a limão. Em 26 desses locais a bebida com sabor a limão foi a preferida.

- [1.5] (a) Calcule um intervalo de confiança a 90% para a proporção de público que tem preferência pelo sabor a limão. Indique, justificando, se pode concluir que o público tem preferência pelo sabor a limão.
- [1.0] (b) Qual a o grau de confiança a considerar se pretender que o erro de estimação da proporção de público que tem preferência pelo sabor a limão seja no máximo de 0.1?
- (c) As bebidas são engarrafadas numa máquina industrial cuja a duração, em anos, tem um comportamento normal. Os valores que se seguem representam a duração observada em 5 máquinas desse tipo:

4.6; 4.3; 6.6; 4.7; 6.2.

- [1.0] i. Calcule uma estimativa pontual para a variabilidade do tempo de vida da referida máquina industrial.
- [1.5] ii. Recorrendo à região crítica e para um nível de significância de 1%, interprete e teste as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \sigma \geq 1.5 \quad \text{contra} \quad H_1 : \sigma < 1.5.$$

Fim do Exame