IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Testes de Hipóteses Paramétricos

Licenciatura em Engenharia Informática

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal
Instituto Politécnico de Setúbal
2021-2022

Testes de Hipóteses Paramétricos

São métodos que possibilitam validar ou não determinadas afirmações sobre os parâmetros de uma população.

Objetivo

Confirmar ou rejeitar um valor hipotético de um parâmetro θ de uma população, confrontado com a informação recolhida de uma amostra.

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

1. São definidas duas **hipóteses**:
   - **Hipótese Nula** $= H_0$ - é a hipótese que reflete a situação em que não há mudança, diz-se que traduz a situação estacionária, sendo usual colocar nesta hipótese a igualdade.
   - **Hipótese Alternativa** $= H_1$ - é a hipótese que se contrapõe à hipótese nula, a mudança que se pensa que ocorreu.
2. É definida uma **Estatística Teste**, que é a base da realização do teste e é construída a partir de uma amostra.

Observação: As estatísticas utilizadas nos testes de hipóteses são as estatísticas definidas anteriormente (indicadas no **formulário**).

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

3. A **regra de decisão** define as condições de rejeição ou não rejeição da hipótese testada. São construídas duas regiões:
   - **Região de Aceitação** $= RA$ - conjunto de valores observados para os quais H_0 é admissível.
   - **Região de Rejeição ou Região Crítica** $= RC$ - conjunto de valores observados para os quais H_0 não é admissível.

   O resultado do teste de hipóteses consiste na rejeição ou não rejeição de H_0, sendo esta decisão tomada com base na amostra.

   Seja θ o parâmetro da população sobre o qual se construiu as hipóteses e seja $\widehat{\theta}$ um estimador de θ. Com base na amostra recolhida calcula-se $\widehat{\theta}$ e, supondo H_0 verdadeira, calcula-se o valor observado da estatística de teste, $Estatística\_de\_Teste_{obs}$, e toma-se uma decisão:

$$\begin{cases} \text{se } Estatística\_de\_Teste_{obs} \in RC \Rightarrow \text{rejeitar } H_0 \\ \text{se } Estatística\_de\_Teste_{obs} \in RA \Rightarrow \text{não rejeitar } H_0. \end{cases}$$

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

4. **Erros de decisão** - um teste de hipóteses nem sempre conduz a decisões corretas, a análise de uma amostra pode falsear as conclusões quanto à população.

		Situação Verdadeira	
		H_0 verdadeira	**H_0 falsa**
Decisão Tomada	**Não rejeitar H_0**	decisão correta	decisão errada
	Rejeitar H_0	decisão errada	decisão correta

Erro de 1^a espécie - nível de significância do teste

$$\alpha = P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}\right]$$

Erro de 2^a espécie

$$\beta = P\left[\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\right] = P\left[\text{não rejeitar } H_0 \mid H_1 \text{ verdadeira}\right]$$

Na área da medicina,

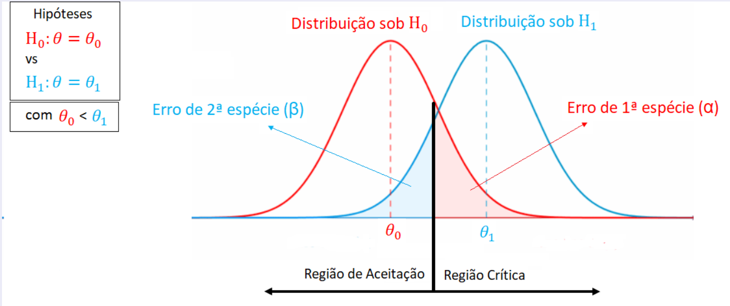
- o erro de 1ª espécie, α, corresponde aos "falsos positivos",
- o erro de 2ª espécie, β, corresponde aos "falsos negativos".

Na área criminal,

- o erro de 1ª espécie, α, corresponde a condenar um inocente,
- o erro de 2ª espécie, β, corresponde a considerar inocente quem é culpado.

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

O objetivo é minimizar ambos os erros, no entanto como α e β variam em sentidos contrários, tal não é possível.



O que se faz é controlar o erro de 1ª espécie, isto é, fixa-se o α e tenta-se minimizar o β.

Outra possibilidade seria fixar o α e o β e deixar variar o n, no entanto, leva a n's muito elevados, o que não é conveniente.

Cálculo das **probabilidades das decisões corretas**:

- $1 - \alpha = P\left[\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}\right]$

- Potência do Teste - **Função Potência**

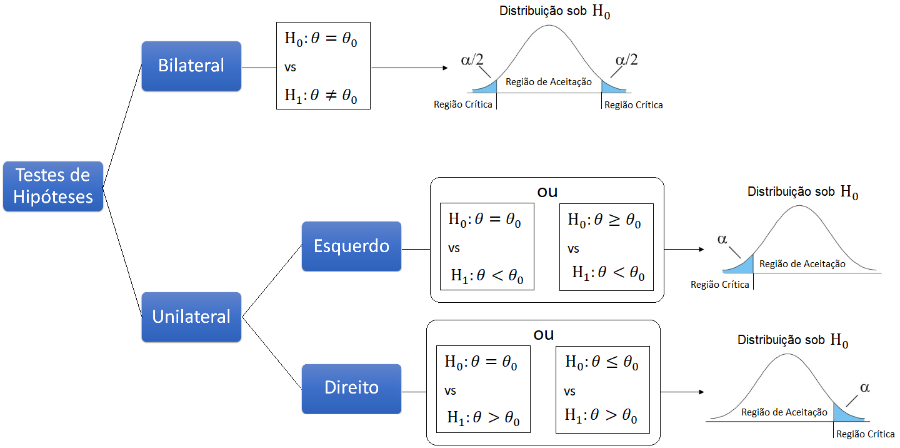
$$\pi = 1 - \beta = \\ = P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\right] = P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_1 \text{ verdadeia}\right]$$

  - Esta probabilidade é função do grau de falsidade de H_0, quanto mais falso for H_0 maior é esta probabilidade.
  - Quanto maior o valor da função potência menor o erro de 2^a espécie, maior a qualidade do teste.

Princípios Básicos na Realização dos Testes de Hipóteses

5. **Tipos de Testes de Hipóteses** - de acordo com o número de elementos do parâmetro em análise, pode-se distinguir três formas de especificar H_0 e H_1:
   - hipótese simples contra hipótese simples:
     $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta = \theta_1$
     - se $\theta_0 < \theta_1$ - Teste unilateral direito;
     - se $\theta_0 > \theta_1$ - Teste unilateral esquerdo.
   - hipótese simples contra hipótese composta:
     - $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$ - Teste unilateral direito;
     - $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$ - Teste unilateral esquerdo;
     - $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$ - Teste bilateral;
   - hipótese composta contra hipótese composta:
     - $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$ - Teste unilateral direito;
     - $H_0 : \theta \geq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta < \theta_0$ - Teste unilateral esquerdo;

Nota: A hipótese composta contra hipótese simples: $H_0 : \theta \neq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta = \theta_0$ não costuma ser usada pois, habitualmente, coloca-se em H_0 a hipótese que inclui a igualdade.


Testes de Hipóteses
Bilateral
$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$
Distribuição sob H_0
$\alpha/2$
$\alpha/2$
Região de Aceitação
Região Crítica
Região Crítica
Unilateral
Esquerdo
ou
$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$
$H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$
Distribuição sob H_0
α
Região de Aceitação
Região Crítica
Direito
ou
$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$
$H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$
Distribuição sob H_0
α
Região de Aceitação
Região Crítica

Metodologia a utilizar num Teste de Hipóteses

1. Formular as hipóteses;

2. Fixar o erro de 1ª espécie ou nível de significância do teste

$$\alpha = P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}\right];$$

3. Escolher o estimador pontual $\widehat{\theta}$ e a respetiva Estatística de Teste (ou variável fulcral) - determinar a distribuição amostral;

4. Calcular a região crítica (RC) e a região de aceitação (RA) a partir do nível de significância do teste (α);

5. Com base na amostra recolhida e supondo H_0 verdadeira, calcula-se o valor observado da estatística de teste, $Estatística\_de\_Teste_{obs}$, e toma-se uma decisão:

$$\begin{cases} \text{se } Estatística\_de\_Teste_{obs} \in RC \Rightarrow \text{rejeitar } H_0 \\ \text{se } Estatística\_de\_Teste_{obs} \in RA \Rightarrow \text{não rejeitar } H_0. \end{cases}$$

Na prática, em vez de calcular a região crítica (RC) e a região de aceitação (RA), é usual calcular-se o **Valor-p** (ou **p-value**).

Valor-p (ou p-value)

É a probabilidade associada ao valor da estatística de teste, considerando H_0 verdadeira.

- Se o valor-p for pequeno significa que, no caso de H_0 ser verdadeira, estamos perante um evento muito raro, pouco provável de ocorrer, então deve optar-se por rejeitar H_0.

  Portanto, o valor-p também permite tomar decisões:

  - se valor-p $\leq \alpha$, então rejeita-se H_0
  - se valor-p $> \alpha$, então não se rejeita H_0

Valor-p (ou p-value)

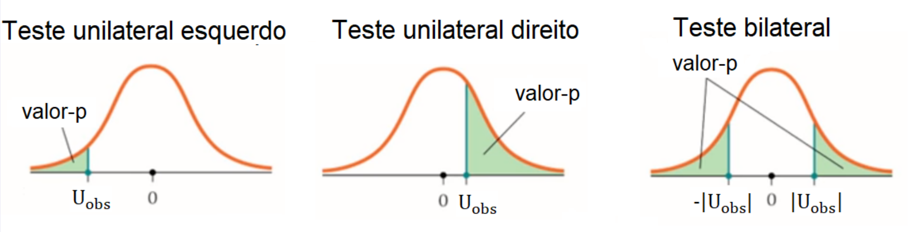
É a probabilidade associada ao valor da estatística de teste, considerando H_0 verdadeira.

- Considerando que H_0 é verdadeira, o valor-p indica a probabilidade da estimativa da estatística de teste ocorrer.
- O valor-p **não** é a probabilidade de H_0 ser verdadeira.
- O valor-p pode ser visto como o menor valor de α (nível de significância) para o qual os dados observados indicam que H_0 deve ser rejeitada.

Valor-p (ou p-value) - Distribuições Simétricas

Considere uma estatística U cuja distribuição amostral é Normal Reduzida ou t de Student (**distribuições simétricas**) e seja U_{obs} uma sua estimativa calculada com base na amostra recolhida e sob a hipótese H_0:

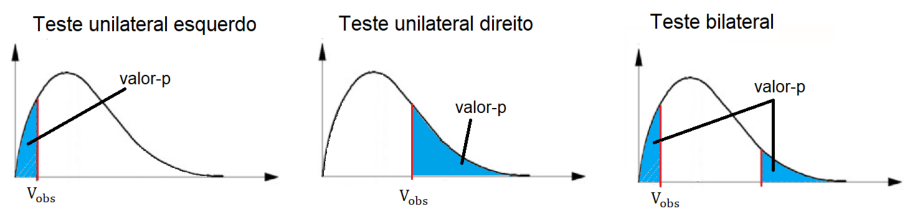
- Teste unilateral esquerdo: **valor-p** $= P(U \leq U_{obs})$;
- Teste unilateral direito: **valor-p** $= P(U \geq U_{obs})$;
- Teste bilateral: **valor-p** $= 2 \times P(U \geq |U_{obs}|)$.



Valor-p (ou p-value) - Distribuições Assimétricas

Considere uma estatística V cuja distribuição amostral é Qui-Quadrado ou F de Snedecor (**distribuições assimétricas**) e seja V_{obs} uma sua estimativa calculada com base na amostra recolhida e sob a hipótese H_0:

- Teste unilateral esquerdo: **valor-p** $= P\left(V \leq V_{\text{obs}}\right)$;
- Teste unilateral direito: **valor-p** $= P\left(V \geq V_{\text{obs}}\right)$;
- Teste bilateral: **valor-p** $= 2 \times min\left\{P\left(V \leq V_{\text{obs}}\right), P\left(V \geq V_{\text{obs}}\right)\right\}$.



Testes de Hipóteses Paramétricos

De acordo com as distribuições amostrais estudadas, podem-se definir os seguintes testes de hipóteses (**formulário**):

- **Teste de Hipóteses para a média μ:**
  - Variável fulcral ou Distribuição Amostral:
    - se σ conhecido,
    $$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$
    - se σ desconhecido e $n \geq 30$,
    $$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$
    - se σ desconhecido e $n < 30$,
    $$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

Testes de Hipóteses Paramétricos

- **Teste de Hipóteses para a diferença de médias $\mu_1 - \mu_2$:**
  - Variável fulcral ou Distribuição Amostral:
    - se σ_1 e σ_2 conhecidos,

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

    - se σ_1 e σ_2 desconhecidos e $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$,

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

    - se σ_1 e σ_2 desconhecidos e $\sigma_1 = \sigma_2$ e $n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$,

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

Observação: Estamos a supor amostras aleatórias independentes.

Testes de Hipóteses Paramétricos

- **Teste de Hipóteses para a proporção p:**
  - Variável fulcral ou Distribuição Amostral:
    - se $n \geq 30$,

$$Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

- **Teste de Hipóteses para a diferença de proporções $p_1 - p_2$:**
  - Variável fulcral ou Distribuição Amostral:
    - se $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$,

$$Z = \frac{(p_1^* - p_2^*) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \cong \frac{(p_1^* - p_2^*) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1^* q_1^*}{n_1} + \frac{p_2^* q_2^*}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Testes de Hipóteses Paramétricos

- **Teste de Hipóteses para a variância σ^2:**
  - Variável fulcral ou Distribuição Amostral:
    - ⋆ se μ conhecido,

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$$

    - ⋆ se μ desconhecido,

$$X^2 = \frac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

- **Teste de Hipóteses para o quociente de variâncias $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:**
  - Variável fulcral ou Distribuição Amostral:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$$

Exemplo 1

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

1. Teste, a um nível de significância de 5%, se a empresa deve adquirir o novo processo de fabrico de embalagens, sabendo que a empresa não está interessada em mudar o processo de fabrico se a percentagem de defeitos for superior ao anunciado.

Exemplo 1

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

1. Teste, a um nível de significância de 5%, se a empresa deve adquirir o novo processo de fabrico de embalagens, sabendo que a empresa não está interessada em mudar o processo de fabrico se a percentagem de defeitos for superior ao anunciado.

- **População**

$$X \sim \textit{Binomial}$$

proporção populacional $= p = 0.01$

- **Amostra Aleatória**

dimensão $= n = 1000$

<u>estimativa:</u>

proporção amostral $= p^* = 0.014$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.01 \rightarrow & \text{a empresa } \textbf{deve} \text{ adquirir o novo processo de fabrico} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p > 0.01 \rightarrow & \text{a empresa } \textbf{não deve} \text{ adquirir o novo processo de fabrico} \end{cases}$$

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$

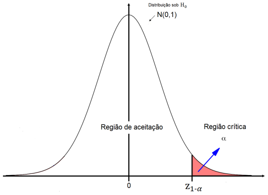
- **Estatística de Teste:**

  Como a População é Binomial, então é obrigatório recolher uma amostra de dimensão $n \geq 30$ para se poder recorrer ao Teorema do Limite Central. Como $n = 1000 \geq 30$, então basta ver qual é a variável fulcral:

	Variável Fulcral
$n \geq 30$	$Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0, 1)$

Possibilidade de Resolução 1:

- Calcular a **Região Crítica**:



Teste unilateral direito e $Z \sim N(0,1)$:

$$RC = [z_{1-\alpha}, +\infty[= [z_{1-0.05}, +\infty[=$$

$$= [z_{0.95}, +\infty[= [1.645, +\infty[$$

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$Z_{\text{obs}} = \frac{0.014 - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01\times(1-0.01)}{1000}}} = 1.27$$

- **Tomar a decisão:**

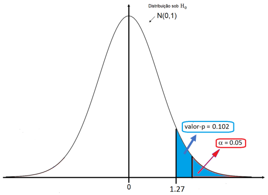
  Como $1.27 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0. Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 0.05, a empresa deve adquirir o novo processo de fabrico.

Possibilidade de Resolução 2:

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$Z_{\text{obs}} = \frac{0.014 - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01\times(1-0.01)}{1000}}} = 1.27$$

- Calcular o **valor-p**:



Teste unilateral direito e $Z \sim N(0,1)$:

$$\begin{aligned}\text{valor-p} &= P(Z \geq 1.27) = \\ &= 1 - P(Z < 1.27) \underset{\text{v.a. contínua}}{=} \\ &= 1 - \Phi(1.27) = \\ &= 1 - 0.8980 = 0.102\end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:**

Como $0.102 > 0.05$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0. Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 0.05, a empresa deve adquirir o novo processo de fabrico.

Exemplo 1

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

2. Caso o novo processo de fabrico anunciasse uma proporção de embalagens com defeito inferior a 0.01, que teste utilizaria para testar a veracidade desta afirmação? Qual a decisão para um nível de significância de 10%?

Exemplo 1

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

2. Caso o novo processo de fabrico anunciasse uma proporção de embalagens com defeito inferior a 0.01, que teste utilizaria para testar a veracidade desta afirmação? Qual a decisão para um nível de significância de 10%?

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{não é} \text{ verdadeira} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p < 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{é} \text{ verdadeira} \end{cases}$$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{não é} \text{ verdadeira} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p < 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{é} \text{ verdadeira} \end{cases}$$

- **nível de significância** $= \alpha = 0.10$

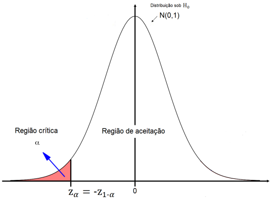
- **Estatística de Teste:**

  Como a População é Binomial, então é obrigatório recolher uma amostra de dimensão $n \geq 30$ para se poder recorrer ao Teorema do Limite Central. Como $n = 1000 \geq 30$, então basta ver qual é a variável fulcral:

	Variável Fulcral
$n \geq 30$	$Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0, 1)$

Possibilidade de Resolução 1:

- Calcular a **Região Crítica**:



$Z \sim N(0,1)$:

$$RC =]-\infty, -z_{1-\alpha}] =]-\infty, -z_{1-0.10}] =$$

$$=]-\infty, -z_{0.90}] =]-\infty, -1.282]$$

Teste unilateral esquerdo e

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$Z_{\text{obs}} \underset{p=0.01}{=} \frac{0.014 - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times (1-0.01)}{1000}}} = 1.27$$

- **Tomar a decisão:**

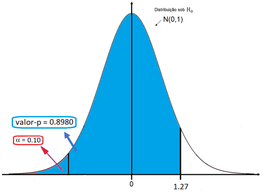
  Como $1.27 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0. Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 0.10, a afirmação não é verdadeira.

Possibilidade de Resolução 2:

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$Z_{\text{obs}} \underset{p=0.01}{=} \frac{0.014 - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times (1-0.01)}{1000}}} = 1.27$$

- Calcular o **valor-p**:



Teste unilateral esquerdo e $Z \sim N(0,1)$:

$$\text{valor-p} = P(Z \leq 1.27) = \Phi(1.27) = \\ = 0.8980$$

- **Tomar a decisão:**

Como $0.8980 > 0.10$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0. Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 0.10, a afirmação não é verdadeira.

Exemplo 1

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

3. Teste, a um nível de significância de 5%, a hipótese da proporção de embalagens com defeito publicitada ser verdadeira ou falsa.

Exemplo 1

Uma empresa que produz embalagens para comprimidos recebeu uma proposta de um novo processo de fabrico que anuncia que apenas 1% das embalagens têm defeitos. Para saber se deve adquirir ou não o novo processo de fabrico, a empresa decidiu recolher uma amostra de 1000 embalagens (fabricadas pelo novo processo) que forneceu uma proporção de embalagens com defeito igual a 0.014.

3. Teste, a um nível de significância de 5%, a hipótese da proporção de embalagens com defeito publicitada ser verdadeira ou falsa.

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{é} \text{ verdadeira} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p \neq 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{não é} \text{ verdadeira} \end{cases}$$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{é} \text{ verdadeira} \\ \text{vs} & \\ H_1 : p \neq 0.01 \rightarrow & \text{a afirmação } \textbf{não é} \text{ verdadeira} \end{cases}$$

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$

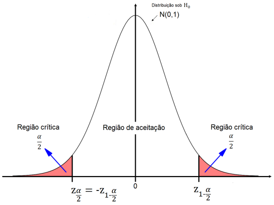
- **Estatística de Teste:**

Como a População é Binomial, então é obrigatório recolher uma amostra de dimensão $n \geq 30$ para se poder recorrer ao Teorema do Limite Central. Como $n = 1000 \geq 30$, então basta ver qual é a variável fulcral:

	Variável Fulcral
$n \geq 30$	$Z = \frac{p^* - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$

Possibilidade de Resolução 1:

- Calcular a **Região Crítica**:



Teste bilateral e $Z \sim N(0,1)$:

$$RC = \left]-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[=$$
$$= \left]-\infty, -z_{1-\frac{0.05}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{0.05}{2}}, +\infty\right[=$$
$$= \left]-\infty, -z_{0.975}\right] \cup \left[z_{0.975}, +\infty\right[=$$
$$= \left]-\infty, -1.960\right] \cup \left[1.960, +\infty\right[$$

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$Z_{\text{obs}} = \frac{0.014 - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times (1-0.01)}{1000}}} = 1.27$$

- **Tomar a decisão:**

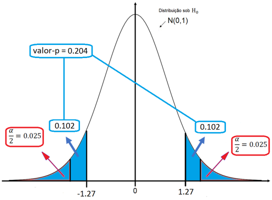
  Como $1.27 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0. Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 0.05, a afirmação é verdadeira.

Possibilidade de Resolução 2:

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$Z_{\text{obs}} = \frac{0.014 - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times (1-0.01)}{1000}}} = 1.27$$

- Calcular o **valor-p**:



Teste bilateral e $Z \sim N(0,1)$:

$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= 2 \times P(Z \geq |1.27|) = \\ &= 2 \times P(Z \geq 1.27) = \\ &= 2 \times (1 - P(Z < 1.27)) = \\ &\underset{\text{v.a. contínua}}{=} 2 \times (1 - \Phi(1.27)) = \\ &= 2 \times (1 - 0.8980) = \\ &= 2 \times 0.102 = 0.204 \end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:**

Como $0.204 > 0.05$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0. Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 0.05, a afirmação é verdadeira.

Observação:

No caso dos **testes de hipóteses bilaterais** há a possibilidade de se recorrer aos **intervalos de confiança** para a tomada de decisão. A região de aceitação de um teste de hipóteses bilateral corresponde ao intervalo de confiança, a única diferença está na escala utilizada. Nos testes de hipóteses bilaterais estamos a usar a escala da estatística de teste e nos intervalos de confiança utiliza-se a escala dos dados.

Se na alínea (3) não dissesse para fazer um teste, podíamos ter construído um Intervalo de confiança a 95% para a proporção:

$$\left]0.014 - 1.960 \times \sqrt{\frac{0.014 \times (1-0.014)}{1000}}, 0.014 + 1.960 \times \sqrt{\frac{0.014 \times (1-0.014)}{1000}}\right[=$$

$$=]0.0067, 0.0213[$$

Com 95% de confiança, a afirmação deve ser verdadeira pois 0.01 pertence ao intervalo de confiança.

Exemplo 2

Num exame de leitura numa escola do 1º ciclo, a nota média dos 32 meninos foi 72, com um desvio padrão de 8, e a nota média de 36 meninas foi 75, com um desvio padrão de 6. Teste, ao nível de significância de 0.01, a hipótese de que, em média, não há diferença ao nível de leitura entre as meninas e os meninos do 1º ciclo.

Exemplo 2

Num exame de leitura numa escola do 1º ciclo, a nota média dos 32 meninos foi 72, com um desvio padrão de 8, e a nota média de 36 meninas foi 75, com um desvio padrão de 6. Teste, ao nível de significância de 0.01, a hipótese de que, em média, não há diferença ao nível de leitura entre as meninas e os meninos do 1º ciclo.

Atenção:

- Como as amostras são amostras aleatórias **independentes**, então o teste de hipóteses a efetuar deve ser para $\mu_1 - \mu_2$ usando como estimador pontual $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \rightarrow$ estamos interessados na diferença das médias.

Exemplo 2

Num exame de leitura numa escola do 1º ciclo, a nota média dos 32 meninos foi 72, com um desvio padrão de 8, e a nota média de 36 meninas foi 75, com um desvio padrão de 6. Teste, ao nível de significância de 0.01, a hipótese de que, em média, não há diferença ao nível de leitura entre as meninas e os meninos do 1º ciclo.

- **População 1**

X_1 = nota no exame de leitura dos meninos

média populacional $= \mu_1$
desvio padrão populacional $= \sigma_1$

- **População 2**

X_2 = nota no exame de leitura das meninas

média populacional $= \mu_2$

desvio padrão populacional $= \sigma_2$

- **Amostra Aleatória da População 1**

dimensão $= n_1 = 32$

estimativas:

média amostral $= \overline{x}_1 = 72$

desvio padrão amostral $= s_1 = 8$

- **Amostra Aleatória da População 2**

dimensão $= n_2 = 36$

estimativas:

média amostral $= \overline{x}_2 = 75$

desvio padrão amostral $= s_2 = 6$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \rightarrow & \textbf{não há} \text{ diferenças ao nível da leitura} \\ \text{vs} & \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \rightarrow & \textbf{há} \text{ diferenças ao nível da leitura} \end{cases}$$

- **nível de significância** $= \alpha = 0.01$

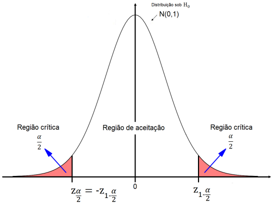
- **Estatística de Teste:**

  Como as Populações não têm distribuição conhecida, então é necessário que as amostras tenham dimensão $n \geq 30$ para se poder recorrer ao Teorema do Limite Central. Como $n_1 = 32 \geq 30$ e $n_2 = 36 \geq 30$ então pode-se considerar que as Populações são aproximadamente Normais (Teorema do Limite Central), então basta ver qual é a variável fulcral:

	Variável Fulcral
σ_1 e σ_2 desconhecidos $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$	$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Possibilidade de Resolução 1:

- Calcular a **Região Crítica**:



Teste bilateral e $Z \sim N(0,1)$:

$$RC = \left]-\infty, -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[=$$
$$= \left]-\infty, -z_{1-\frac{0.01}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{0.01}{2}}, +\infty\right[=$$
$$= \left]-\infty, -z_{0.995}\right] \cup \left[z_{0.995}, +\infty\right[=$$
$$= \left]-\infty, -2.576\right] \cup \left[2.576, +\infty\right[$$

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$Z_{\text{obs}} = \frac{(72-75)-0}{\sqrt{\frac{8^2}{32}+\frac{6^2}{36}}} = -1.73$$

- **Tomar a decisão:**

Como $-1.73 \notin RC$, a decisão é não rejeitar H_0. Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 0.01, conclui-se que, em média, não parece haver diferenças ao nível da leitura entre as meninas e os meninos.

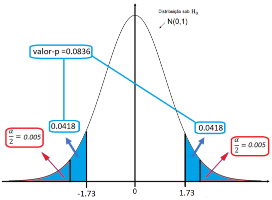
Possibilidade de Resolução 2:

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$Z_{\text{obs}} = \frac{(72-75)-0}{\sqrt{\frac{8^2}{32}+\frac{6^2}{36}}} = -1.73$$

- Calcular o **valor-p**:

Teste bilateral e $Z \sim N(0,1)$:



$$\begin{aligned}
\text{valor-p} &= 2 \times P(Z \geq |-1.73|) = \\
&= 2 \times P(Z \geq 1.73) = \\
&= 2 \times (1 - P(Z < 1.73)) = \\
&\underset{\text{v.a. contínua}}{=} 2 \times (1 - \Phi(1.73)) = \\
&= 2 \times (1 - 0.9582) = \\
&= 2 \times 0.0418 = 0.0836
\end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:**

Como $0.0836 > 0.01$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0. Com base na amostra recolhida e para um nível de significância de 0.01, conclui-se que, em média, não parece haver diferenças ao nível da leitura entre as meninas e os meninos.

Exemplo 3

Para verificar a importância de uma determinada campanha de publicidade nas vendas de certo produto de uma marca de laticínios foram registadas as vendas semanais antes e depois da referida campanha:

Loja	1	2	3	4	5	6	7
antes	13	18	14	16	19	12	22
depois	16	24	18	14	26	17	29

Suponha que as vendas têm distribuição normal. Considerando um nível de significância de 5%, qual seria a conclusão sobre a eficiência da campanha?

Exemplo 3

Para verificar a importância de uma determinada campanha de publicidade nas vendas de certo produto de uma marca de laticínios foram registadas as vendas semanais antes e depois da referida campanha:

Loja	1	2	3	4	5	6	7
antes	13	18	14	16	19	12	22
depois	16	24	18	14	26	17	29

Suponha que as vendas têm distribuição normal. Considerando um nível de significância de 5%, qual seria a conclusão sobre a eficiência da campanha?

Atenção:

- Como as amostras são amostras aleatórias **emparelhadas**, então é necessário construir a amostra das diferenças, $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ e o teste de hipóteses a efetuar deve ser para μ usando como estimador pontual $\overline{X}_D$ (média das diferenças) $\rightarrow$ estamos interessados na diferença média.

Neste caso temos uma única população em que as amostras foram obtidas nas mesmas lojas em períodos diferentes, ou seja, temos amostras aleatórias emparelhadas. Como as amostras aleatórias são emparelhadas, não é possível realizar testes de hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ pois uma das hipóteses das distribuições amostrais consideradas na construção dos testes impõe que as amostras aleatórias sejam independentes.

Como as amostras aleatórias são emparelhadas, vamos construir uma única amostra, a amostra das diferenças:

Loja	1	2	3	4	5	6	7
depois - antes	3	6	4	-2	7	5	7

Pretende-se recorrer a um teste de hipóteses com um nível de significância de 5% para verificar se a campanha foi eficaz, então vamos realizar um teste de hipóteses com um nível de significância de 5% para a média das diferenças (μ_D) e tomar uma decisão sobre a campanha.

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D \leq 0 \rightarrow & \text{a campanha não foi eficaz} \\ \text{vs} & \\ H_1 : \mu_D > 0 \rightarrow & \text{a campanha foi eficaz} \end{cases}$$

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$
- **Estatística de Teste:**

  Como a População é Normal com σ desconhecido e a dimensão da amostra é $n = 7$, então a variável fulcral é:

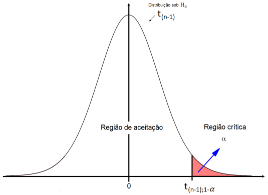
	Variável Fulcral
σ desconhecido e $n < 30$	$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$

- média amostral: $\overline{x}_D = \frac{3+6+4+(-2)+7+5+7}{7} = \frac{30}{7} = 4.286$

- desvio padrão amostral: $s_D = \sqrt{\frac{\left(3-\frac{30}{7}\right)^2+\left(6-\frac{30}{7}\right)^2+\left(4-\frac{30}{7}\right)^2+\left(-2-\frac{30}{7}\right)^2+\left(7-\frac{30}{7}\right)^2+\left(5-\frac{30}{7}\right)^2+\left(7-\frac{30}{7}\right)^2}{7-1}} = 3.147$

Possibilidade de Resolução 1:

- Calcular a **Região Crítica**:



Teste unilateral direito e $T \sim t_{(n-1)}$:

$$\begin{aligned} RC &= \left[t_{(n-1);1-\alpha}, +\infty\right[= \\ &= \left[t_{(7-1);1-0.05}, +\infty\right[= \\ &= \left[t_{(6);0.95}, +\infty\right[= [1.94, +\infty[\end{aligned}$$

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$T_{obs} \underset{\mu_D=0}{=} \frac{\frac{30}{7} - 0}{\frac{3.147}{\sqrt{7}}} = 3.60$$

- **Tomar a decisão:**

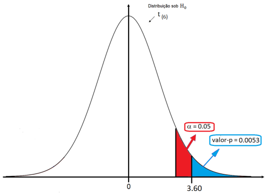
Como $3.60 \in RC$, a decisão é rejeitar H_0. Com base na amostra e ao nível de significância de 5%, conclui-se que, em média, parece que a campanha foi eficaz.

Possibilidade de Resolução 2:

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$T_{obs} \underset{\mu_D=0}{=} \frac{\frac{30}{7} - 0}{\frac{3.147}{\sqrt{7}}} = 3.60$$

- Calcular o **valor-p**:



Teste unilateral direito e $T \sim t_{(6)}$:

$$
\begin{aligned}
\text{valor-p} &= P\,(T \geq 3.60) = \\
&= 1 - P\,(T < 3.60) \underset{\text{v.a. contínua}}{=} \\
&= 1 - F\,(3.60) = \\
&= 1 - 0.9943 = 0.0057 \text{ (R)}
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\text{valor-p} &\approx 1 - F(3.71) = \\
&= 1 - 0.995 = 0.005 \text{ (papel)}
\end{aligned}
$$

- **Tomar a decisão:**

  Como $0.0057 \leq 0.05$, ou seja, valor-p $\leq \alpha$, então a decisão é rejeitar H_0. Com base na amostra e ao nível de significância de 5%, conclui-se que, em média, parece que a campanha foi eficaz.

Exemplo 4

Suponha que tem duas populações normais e que foram recolhidas amostras aleatórias, dessas populações, de dimensão $n_1 = 61$ e $n_2 = 121$ e obteve-se $\overline{x}_1 = 23.3$, $s_1^2 = 0.336$, $\overline{x}_2 = 20.2$ e $s_2^2 = 0.064$. Teste as seguintes hipóteses considerando $\alpha = 0.05$.

1. $H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 > 3\sigma_2^2$.

Exemplo 4

Suponha que tem duas populações normais e que foram recolhidas amostras aleatórias, dessas populações, de dimensão $n_1 = 61$ e $n_2 = 121$ e obteve-se $\overline{x}_1 = 23.3$, $s_1^2 = 0.336$, $\overline{x}_2 = 20.2$ e $s_2^2 = 0.064$. Teste as seguintes hipóteses considerando $\alpha = 0.05$.

1. $H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 > 3\sigma_2^2.$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \\ \text{vs} \\ H_1 : \sigma_1^2 > 3\sigma_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 3 \\ \text{vs} \\ H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 3 \end{cases}$$

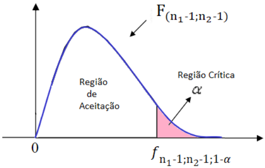
- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$
- **Estatística de Teste:**

  As Populações têm de ter obrigatoriamente distribuição Normal, como é o caso, então:

Variável Fulcral
$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$

Possibilidade de Resolução 1:

- Calcular a **Região Crítica**: Teste unilateral direito e $F \sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$:



$$
\begin{aligned}
RC &= \left[f_{(n_1-1,n_2-1);1-\alpha}, +\infty\right[= \\
&= \left[f_{(61-1,121-1);1-0.05}, +\infty\right[= \\
&= \left[f_{(60,120);0.95}, +\infty\right[= [1.43, +\infty[
\end{aligned}
$$

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$\mathrm{F_{obs}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \frac{0.336}{0.064} \times \frac{1}{3} = 1.75$$

- **Tomar a decisão:**

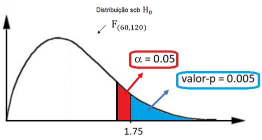
Como $1.75 \in RC$, então a decisão é rejeitar H_0.

Possibilidade de Resolução 2:

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$\mathrm{F}_{\text{obs}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \frac{0.336}{0.064} \times \frac{1}{3} = 1.75$$

- Calcular o **valor-p**:



Teste unilateral direito e $\mathrm{F} \sim F_{(60,120)}$:

$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= P\left(\mathrm{F} \geq 1.75\right) = \\ &= 1 - P\left(\mathrm{F} < 1.75\right) \underset{\text{v.a. contínua}}{=} \\ &= 1 - F\left(1.75\right) \underset{\mathrm{F}\sim F_{(60,120)}}{=} \\ &= 1 - 0.995 = 0.005 \end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:**

Como $0.005 \leq 0.05$, ou seja, valor-p $\leq \alpha$, então a decisão é rejeitar H_0.

Exemplo 4

Suponha que tem duas populações normais e que foram recolhidas amostras aleatórias, dessas populações, de dimensão $n_1 = 61$ e $n_2 = 121$ e obteve-se $\overline{x}_1 = 23.3$, $s_1^2 = 0.336$, $\overline{x}_2 = 20.2$ e $s_2^2 = 0.064$. Teste as seguintes hipóteses considerando $\alpha = 0.05$.

2. $H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 < 3\sigma_2^2.$

Exemplo 4

Suponha que tem duas populações normais e que foram recolhidas amostras aleatórias, dessas populações, de dimensão $n_1 = 61$ e $n_2 = 121$ e obteve-se $\overline{x}_1 = 23.3$, $s_1^2 = 0.336$, $\overline{x}_2 = 20.2$ e $s_2^2 = 0.064$. Teste as seguintes hipóteses considerando $\alpha = 0.05$.

2. $H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 < 3\sigma_2^2$.

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \\ \text{vs} \\ H_1 : \sigma_1^2 < 3\sigma_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 3 \\ \text{vs} \\ H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3 \end{cases}$$

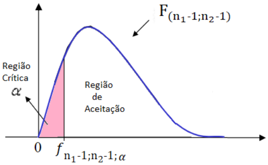
- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$
- **Estatística de Teste:**

  As Populações têm de ter obrigatoriamente distribuição Normal, como é o caso, então:

Variável Fulcral
$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$

Possibilidade de Resolução 1:

- Calcular a **Região Crítica**:



Teste unilateral esquerdo e $F \sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$:

$$\begin{aligned} RC &= \left[0, f_{(n_1-1,n_2-1);\alpha}\right] = \\ &= \left[0, f_{(60,120);0.05}\right] = \\ &= \left[0, \frac{1}{f_{(120,60);0.95}}\right] = \\ &= \left[0, \frac{1}{1.39}\right] = [0, 0.7194] \end{aligned}$$

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$\mathrm{F_{obs}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \frac{0.336}{0.064} \times \frac{1}{3} = 1.75$$

- **Tomar a decisão:**

Como $1.75 \notin RC$, então a decisão é não rejeitar H_0.

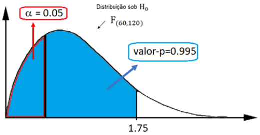
Possibilidade de Resolução 2:

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$\mathrm{F_{obs}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \frac{0.336}{0.064} \times \frac{1}{3} = 1.75$$

- Calcular o **valor-p**:

Teste unilateral esquerdo e $\mathrm{F} \sim F_{(60,120)}$:



$$\begin{aligned} \text{valor-p} &= P\left(\mathrm{F} \leq 1.75\right) = \\ &= F\left(1.75\right) \underset{\mathrm{F}\sim F_{(60,120)}}{=} \\ &= 0.995 \end{aligned}$$

- **Tomar a decisão:**

Como $0.995 > 0.05$, ou seja, valor-p $> \alpha$, então a decisão é não rejeitar H_0.

Exemplo 4

Suponha que tem duas populações normais e que foram recolhidas amostras aleatórias, dessas populações, de dimensão $n_1 = 61$ e $n_2 = 121$ e obteve-se $\overline{x}_1 = 23.3$, $s_1^2 = 0.336$, $\overline{x}_2 = 20.2$ e $s_2^2 = 0.064$. Teste as seguintes hipóteses considerando $\alpha = 0.05$.

3. $H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq 3\sigma_2^2$.

Exemplo 4

Suponha que tem duas populações normais e que foram recolhidas amostras aleatórias, dessas populações, de dimensão $n_1 = 61$ e $n_2 = 121$ e obteve-se $\overline{x}_1 = 23.3$, $s_1^2 = 0.336$, $\overline{x}_2 = 20.2$ e $s_2^2 = 0.064$. Teste as seguintes hipóteses considerando $\alpha = 0.05$.

3. $H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq 3\sigma_2^2.$

- **Hipóteses:**

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = 3\sigma_2^2 \\ \text{vs} \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq 3\sigma_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 3 \\ \text{vs} \\ H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 3 \end{cases}$$

- **nível de significância** $= \alpha = 0.05$
- **Estatística de Teste:**

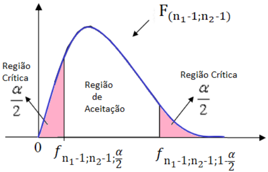
  As Populações têm de ter obrigatoriamente distribuição Normal, como é o caso, então:

Variável Fulcral
$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1, n_2-1)}$

Possibilidade de Resolução 1:

- Calcular a **Região Crítica**:

Teste bilateral e $F \sim F_{(n_1-1,n_2-1)}$:



$$
\begin{aligned}
RC &= \left[0, f_{(n_1-1,n_2-1);\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[f_{(n_1-1,n_2-1);1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right[= \\
&= \left[0, f_{(61-1,121-1);\frac{0.05}{2}}\right] \cup \left[f_{(61-1,121-1);1-\frac{0.05}{2}}, +\infty\right[= \\
&= \left[0, f_{(60,120);0.025}\right] \cup \left[f_{(60,120);0.975}, +\infty\right[= \\
&= \left[0, \frac{1}{f_{(120,60);0.975}}\right] \cup \left[f_{(60,120);0.975}, +\infty\right[= \\
&= \left[0, \frac{1}{1.58}\right] \cup [1.53, +\infty[= [0, 0.63] \cup [1.53, +\infty[
\end{aligned}
$$

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$
\mathrm{F_{obs}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \frac{0.336}{0.064} \times \frac{1}{3} = 1.75
$$

- **Tomar a decisão:**

Como $1.75 \in RC$, então a decisão é rejeitar H_0.

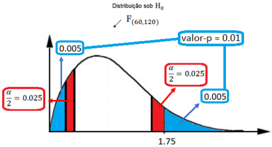
Possibilidade de Resolução 2:

- **Estimativa da Estatística de Teste sob a hipótese H_0:**

$$\mathrm{F_{obs}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \times \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \frac{0.336}{0.064} \times \frac{1}{3} = 1.75$$

- Calcular o **valor-p**:

Teste bilateral e $\mathrm{F} \sim F_{(60,120)}$:



$$\text{valor-p} =$$
$$= 2 \times min\left\{P\left(\mathrm{F} \geq 1.75\right), P\left(\mathrm{F} \leq 1.75\right)\right\} =$$
$$= 2 \times min\left\{0.005, 0.995\right\} =$$
$$= 2 \times 0.005 = 0.01$$

- **Tomar a decisão:**

Como $0.01 \leq 0.05$, ou seja, valor-p $\leq \alpha$, então a decisão é rejeitar H_0.