Probabilidades e Estatística

Distribuições Teóricas Contínuas

Prof. Caldeira Duarte e Prof.ª Anabela Pereira

Actualizado pelo Prof. António Sardinha (Fevereiro de 2013)

Departamento de Matemática

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

3 DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS CONTÍNUAS

3.1 Distribuição Exponencial

Definição 3.1. *Uma variável aleatória X tem Distribuição Exponencial, com parâmetro θ, se a sua função densidade de probabilidade é dada pela fórmula*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad \textit{com } \theta > 0.$$

Quando uma variável aleatória X tem distribuição Exponencial, de parâmetro θ, escreve-se simbolicamente $X \sim Exp(\theta)$.

A correspondente função de distribuição tem a seguinte forma

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \end{cases} .$$

Nas Figuras 3.1 e 3.2 estão representados os gráficos das funções de densidade e distribuição de uma distribuição Exponencial para $-1 \leq x \leq 5$ e com parâmetros $\theta = 1$ (tracejado) e $\theta = 3$ (contínuo):

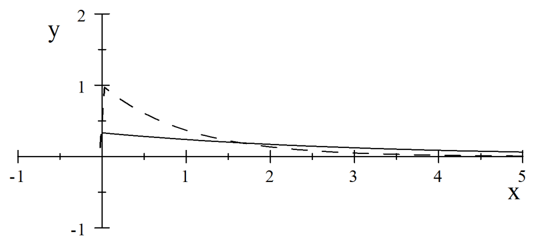

Figura 3.1: Função densidade de probabilidade de $X \sim Exp(3)$.

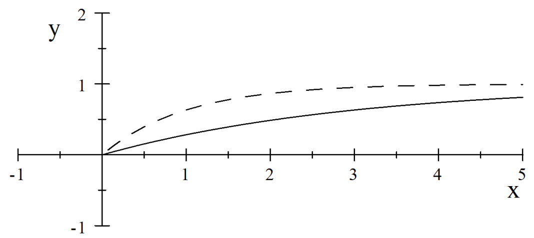

Figura 3.2: Função de distribuição de $X \sim Exp(3)$.

Proposição 3.2. *Se $X \sim Exp(\theta)$, então tem média e variância dadas, respectivamente, por*

$$E[X] = \theta \qquad e \qquad V[X] = \theta^2 \quad .$$

O modelo exponencial aplica-se frequentemente quando se pretende estudar tempos até à ocorrência de falhas, por exemplo em componentes electrónicos, em que se admite que o tempo que a componente vai durar é independente do tempo que esta já durou. Isto significa que um componente com tempo de vida exponencial tem a mesma qualidade ao longo do tempo, ou seja verifica-se a propriedade

$$P(X \geq a + b / X \geq a) = P(X \geq b)$$

Exemplo 3.3. Considere a variável aleatória X que representa o tempo de vida, em dias, de um dado tipo de componentes electrónicas. Esta variável tem a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{365} e^{-\frac{x}{365}} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} .$$

Suponha que um aparelho é constituído por três destas componentes, com comportamentos independentes entre si, e o aparelho só funciona se pelo menos duas das componentes não falham. Qual a probabilidade de que o aparelho funcione, sem falhas, pelo menos durante dois anos?
Definindo F - aparelho funciona e C - componente funciona, temos:

$$P\left(\bar{C}\right) = 1 - e^{-\frac{730}{365}} = 1 - e^{-2} = 0.86466$$

e

$$P(C) = 1 - P\left(\bar{C}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{730}{365}}\right) = e^{-2} = 0.13534$$

logo

$$\begin{aligned} P(F) &= P(C \cap C \cap C) + 3P\left(C \cap C \cap \bar{C}\right) = [P(C)]^3 + 3[P(C)]^2 P\left(\bar{C}\right)) = \\ &= (0.13534)^3 + 3(0.13534)^2 (0.86466) = 0.049993. \end{aligned}$$

■

3.2 Distribuição Uniforme Contínua

A geração de números aleatórios em linguagens de programação, pacotes estatísticos ou folhas de cálculo tem por base uma distribuição uniforme contínua, com valores entre 0 e 1.

Definição 3.4. *Uma variável aleatória X, definida no intervalo real $[a, b]$, tem distribuição Uniforme Contínua, se a sua função densidade de probabilidade é dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , \textit{caso contrário} \end{cases}$$

a que corresponde o gráfico 3.3 [7]

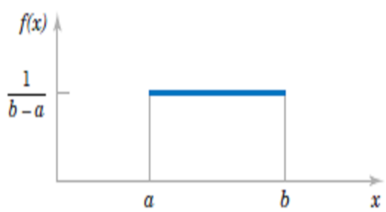

Figura 3.3: Função densidade de probabilidade

A v.a. X definida em $[a,b]$ representa-se por

$$X \sim U(a,b).$$

Proposição 3.5. *Se X é uma v.a. com distribuição Uniforme Contínua, definida no intervalo real $[a,b]$, então tem valor esperado e variância respectivamente iguais a*

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

e

$$V[X] = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Demonstração. O valor esperado da v.a. X é dado por

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

Considerando

$$E\left[X^2\right] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$$

tem-se para a variância

$$V[X] = \frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

□

Exemplo 3.6. Seja X a v.a. que representa a intensidade da corrente medida em miliamperes (mA) num fio de cobre de pequena espessura. Suponha que $X \sim U(0,20)$, com função densidade de probabilidade igual a $f(x) = 0.05$, para $x \in [0,20]$.

Qual a probabilidade de que intensidade da corrente se situe entre 5 e 10 miliamperes?

A função densidade de probabilidade tem o gráfico 3.4 [7]:

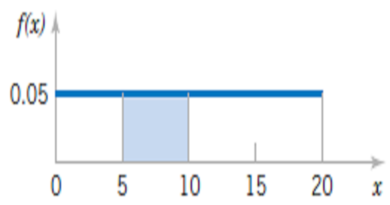

Figura 3.4: Função densidade de probabilidade de $X \sim U(0,20)$

A probabilidade pretendida é dada por

$$P(5 \le X \le 10) = \int_5^{10} 0.05 dx = 0.05\,[x]_5^{10} = 0.25.$$

O valor esperado e a variância de X são respectivamente

$$E[X] = \frac{0+20}{2} = 10mA$$

e

$$V[X] = \frac{(0-20)^2}{12} = 33.33mA^2.$$

■

A função de distribuição de $X \sim U(a,b)$, obtém-se por integração da função densidade de probabilidade, a partir da definição

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Para $x < a$ tem-se $F(x) = 0$.
Para $a \leq x \leq b$ tem-se

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} [t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Para $x > b$ tem-se $F(x) = 1$.
Em resumo

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , x > b \end{cases}.$$

3.3 Distribuição Normal

A distribuição Normal é de grande importância na teoria das probabilidades e na estatística. Na natureza e na tecnologia são inúmeros os fenómenos que apresentam características idênticas às de uma distribuição normal. Exemplos disso são, a medição da altura das pessoas de uma grande população, os erros encontrados quando se fazem muitas medições, etc. Na física, a lei das velocidades de Maxwell implica que a função de distribuição da velocidade numa dada direcção de uma molécula de massa M num gás à temperatura absoluta T, é normal com média 0 e variância $M/(kT)$, onde k é uma constante. Alem disso, sob hipóteses bastantes gerais, a distribuição normal é a distribuição limite para somas de variáveis aleatórias independentes quando o número de termos tende para infinito. Esta distribuição também é conhecida por distribuição de Gauss em homenagem ao matemático alemão Carl Gauss (1777-1855) que deduziu a sua equação.

Definição 3.7. *Uma variável aleatória X tem uma* ***distribuição Normal*** *se a sua função de densidade é dada pela fórmula*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \text{ onde } \sigma > 0 \text{ e } -\infty < \mu < +\infty.$$

A distribuição Normal é definida a partir de dois parâmetros: μ e σ; demonstra-se que μ representa o valor esperado de X, e σ, o seu desvio padrão.

Quando uma variável aleatória X tem uma distribuição Normal escreve-se simbolicamente $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$.

Nas Figuras 3.5 e 3.6 estão representados os gráficos de várias funções de densidade da distribuição Normal.

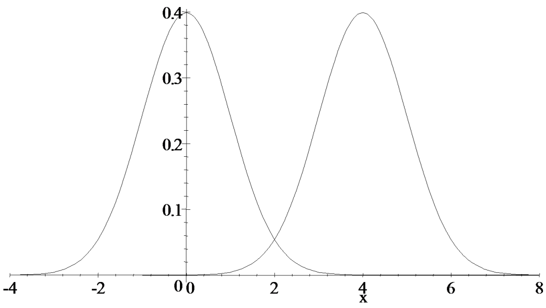

Figura 3.5: Função densidade da Normal $\mathcal{N}(0; 1)$ e $\mathcal{N}(4; 1)$.

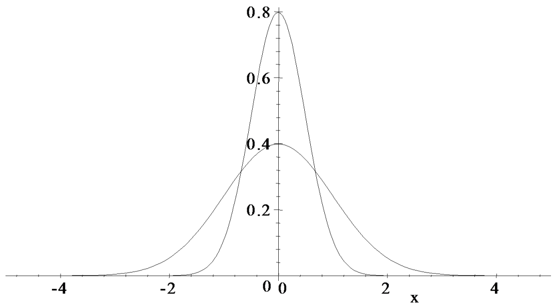

Figura 3.6: Função de densidade da Normal $\mathcal{N}(0; 1)$ e $\mathcal{N}(0; 0.5)$.

O estudo da função $f(x)$ permite concluir que é simétrica relativamente à recta $x = \mu$, atinge um máximo absoluto no ponto $x = \mu$, tem dois pontos de inflexão em $x = \mu \pm \sigma$ e que o eixo OX é uma assímptota horizontal ao seu gráfico.

Pode demonstrar-se que se X é uma variável aleatória com uma distribuição Normal, $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$, a variável transformada

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

tem também uma distribuição Normal de média 0 e desvio padrão 1, $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

Este resultado é particularmente importante pois a função de distribuição Normal no caso especial $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, encontra-se largamente tabelada; é a chamada distribuição Normal estandardizada ou padronizada ou reduzida. Neste caso, a função de distribuição (ver Figura 3.7) é habitualmente representada pela letra Φ.

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

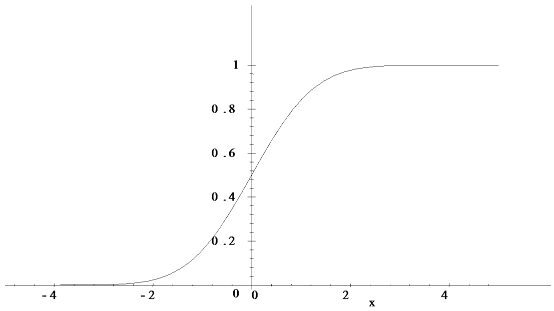

Figura 3.7: Função de distribuição $\mathcal{N}(0;1)$.

A variável Z designa-se por variável normal padronizada ou reduzida.

Para obter $P(a < X < b)$, sendo $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$, basta notar,

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right),$$

e, portanto,

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Exemplo 3.8. A variável aleatória X tem uma distribuição $\mathcal{N}(1;2)$. Determine a probabilidade de X ser maior que 3 em valor absoluto. O que se pretende é calcular $P(|X| > 3)$. Vamos primeiro centrar e reduzir a variável aleatória X, isto é, vamos transformá-la numa outra de média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = 1$. A transformação a utilizar será definida por

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow X = \sigma Z + \mu.$$

Neste caso $X = 2Z + 1$. Tem-se então que

$$\begin{aligned} P(|X| > 3) &= P(|2Z+1| > 3) = \\ &= P(2Z+1 > 3) + P(2Z+1 < -3) = \\ &= P(Z > 1) + P(Z < -2). \end{aligned}$$

Como

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1),$$

tem-se

$$P(|X| > 3) = 1 - P(Z \leq 1) + P(Z < -2).$$

Pela consulta da tabela

$$P(|X| > 3) = 1 - \Phi(1) + \Phi(-2) = 1 - 0.8413 + 0.0228 = 0.1815.$$

■

Vamos agora referir um importante teorema sobre a distribuição Normal.

Teorema 3.9. *Se as variáveis aleatórias* X_i, $i = 1, ..., n$, *são independentes,* $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i; \sigma_i)$, *então a v.a.*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i; \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}\right).$$

Teorema 3.10. ***(Limite Central)*** *Seja* $\bar{X}$ *a média de uma amostra aleatória de dimensão* n, *de uma população de média* μ *e variância* σ^2, *então a distribuição da soma,*

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

ou da média

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n}$$

tende para a distribuição Normal quando $n \to \infty$, *isto é*

$$S_n \sim \mathcal{N}\left(n\mu; \sqrt{n\sigma^2}\right) \to Z = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim \mathcal{N}(0;1) \quad e$$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \to Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0;1).$$

Observação 3.11. Na prática a convergência do Teorema do Limite Central é considerada razoável quando $n \geq 30$; quando $n < 30$ a convergência só é razoável se a distribuição for idêntica à Normal.

Exemplo 3.12. Uma fábrica produz e comercializa rolos de tecido cujo comprimento, em metros, é uma v.a. com valor médio 100 m e variância 156.25 m^2. Sabendo que o fornecimento é feito em contentores de 200 rolos, calcule a probabilidade de um contentor conter mais de 20.35 km de tecido.

Considerando X - comprimento, em metros, de um rolo de tecido, sabe-se que

$$\mu_X = 100 \text{ metros } \sigma_X^2 = 156.25 \text{ metros}^2 \text{ e } n = 200.$$

Considerando que cada contentor tem 200 rolos, o comprimento de tecido, em metros, de um contentor é dado por $S_{200} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{200}$. Aplicando o Teorema 3.10 temos,

$$S_{200} \sim \mathcal{N}\left(200 \times 100; \sqrt{200 \times 156.25}\right) \to Z = \frac{S_{200} - 20000}{\sqrt{31250}} \sim \mathcal{N}(0;1).$$

Logo, a probabilidade pretendida é dada por:

$$P(S_{200} > 20350) = P\left(\frac{S_{200} - 20000}{\sqrt{31250}} > \frac{20350 - 20000}{\sqrt{31250}}\right) = P(Z > 1.98) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 1.98) = 1 - 0.9761 = 0.0339.$$

■

3.4 Aproximação da Binomial à Normal

Teorema 3.13. *Se X é uma v.a. binomial com média $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = npq$, então a distribuição da v.a.* $X \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Exemplo 3.14. Seja X uma v.a. com uma distribuição binomial de parâmetros $n = 15$ e $p = 0.4$, $X \sim b(15, 0.4)$ e $Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} = \frac{X-6}{1.9} \sim \mathcal{N}(0,1)$. A probabilidade de a v.a. X ser igual a 4, $P(X = 4) = 0.1268$. Como a distribuição de X é discreta e se pretende obter um valor aproximado desta probabilidade à custa de uma v.a. contínua, onde as probabilidades pontuais são nulas, há que que utilizar o seguinte procedimento (ver Figura 3.8):

$$P_{binomial}(X = x) \approx P_{normal}(x - 0.5 < X < x + 0.5).$$

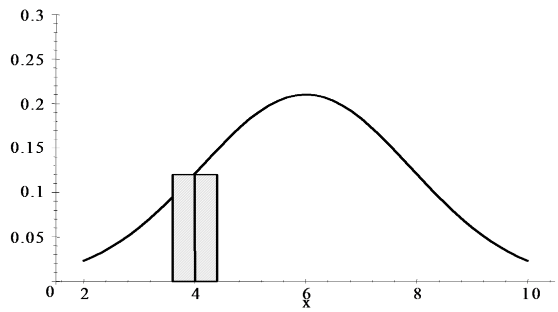

Figura 3.8: Aproximação da Binomial pela Normal.

Neste caso,

$$\begin{aligned} P_{binomial}(X = 4) &\approx P_{normal}(4 - 0.5 < X < 4 + 0.5) = P(3.5 < X < 4.5) = \\ &= P(\frac{3.5-6}{1.9} < Z < \frac{4.5-6}{1.9}) = 0.1210, \end{aligned}$$

o que fornece já uma boa aproximação. ∎

Observação 3.15. Geralmente a distribuição normal fornece uma boa aproximação da distribuição binomial desde que $n \geq 30$ e p um valor perto de 1/2. Como regra prática pode utilizar-se o seguinte critério: se tanto np como nq forem maiores que 5, a aproximação será aceitável.

A distribuição Normal poderá ainda ser utilizada para aproximar as distribuições Hipergeométrica e de Poisson sempre que estas, por sua vez, sejam aproximáveis por distribuições Binomiais.

Exemplo 3.16. Numa empresa multinacional trabalham 5000 pessoas. Seja X a variável aleatória que representa o salário dos funcionários daquela empresa e suponha-se que $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$. Sabendo que metade deles ganham menos de 200 unidades monetárias (u.m.) e 5 ultrapassam as 250 u.m., determine:

1. μ e σ;

2. o melhor salário no grupo dos 2000 empregados pior pagos;

Para determinar μ e σ há que ter em conta que

$$P(X < 200) = 0.50$$

e que

$$P(X > 250) = 0.05.$$

Destas relações conclui-se que

$$P\left(Z < \frac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0.50 \tag{3.1}$$

e

$$P\left(Z > \frac{250-\mu}{\sigma}\right) = 0.05, \tag{3.2}$$

sendo $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. De 3.1 tira-se que

$$\frac{200-\mu}{\sigma} = 0;$$

de 3.2

$$\frac{250-\mu}{\sigma} = 1.645.$$

Resolvendo o sistema tem-se então,

$$\mu = 200 \text{ e } \sigma = 30.395.$$

Seja agora M o melhor salário no grupo dos 2000 empregados pior pagos. Isto significa que

$$P(X < M) = \frac{2000}{5000}, \tag{3.3}$$

isto é, a probabilidade de o salário de um indivíduo escolhido ao acaso ser inferior ao melhor salário do grupo dos 2000 empregados pior pagos é 2000/5000. = 0.4. Então, de 3.3 pode concluir-se que

$$\frac{M-200}{30.395} = -0.7257$$

e, portanto,

$$M = 177.94 \text{ u.m..}$$

■

3.5 Distribuição Qui-Quadrado - χ^2

Definição 3.17. Uma variável aleatória X tem uma **distribuição Qui-Quadrado** com n graus de liberdade, simbolicamente $X \sim \chi^2(n)$, quando a sua função de densidade tem a forma

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, n > 0 \text{ e } x > 0.$$

Definição 3.18. A função Γ é definida pela expressão

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{u-1} dx, \text{ com } u > 0.$$

O gráfico da função de densidade Qui-Quadrado varia, naturalmente, com os valores de n, como podemos ver na Figura 3.9.

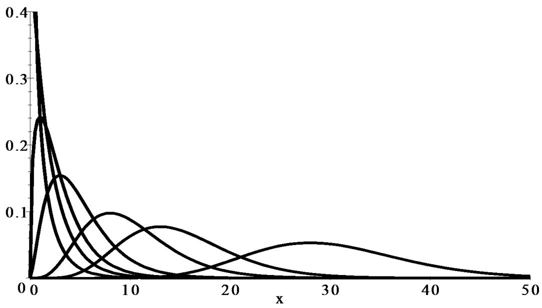

Figura 3.9: Distribuição Qui-Quadrado para diferentes graus de liberdade.

A designação *graus de liberdade* dada ao parâmetro n deve-se ao facto de, em certas condições, a distribuição $\chi^2(n)$ descrever o comportamento probabilístico de uma v.a. que pode ser obtida como a soma de $m+n$ v.a., mas em que a existência de m relações lineares entre estas restringe a liberdade desse comportamento.

As distribuições Qui-Quadrado são caracterizadas por uma assimetria à esquerda.

Proposição 3.19. *Se $X \sim \chi^2(n)$,*

$$E[X] = n$$

e

$$V[X] = 2n.$$

A distribuição Qui-Quadrado encontra-se largamente tabelada para valores de $n \leq 30$, e as tabelas são geralmente apresentadas na seguinte forma:

Se $X \sim \chi^2(n)$, a pares (n,ε), para valores de n e ε em domínios convenientes, fazem corresponder o valor χ^2_ε tal que $P(X \leq \chi^2_\varepsilon)=\varepsilon$.

Por exemplo, para $n = 6$ e $\varepsilon = 0.95$ as tabelas dão $\chi^2_{0.95}(6) = 12.5916$. A probabilidade de um valor observado de χ^2 não exceder 12.5916 é portanto 0.95.

Para valores de n maiores que 30, pode usar-se o resultado,

$$\sqrt{2\chi^2(n)} - \sqrt{2n} \mathrel{\dot\sim} \mathcal{N}(0;1),$$

que significa que a variável aleatória do 1^o membro tem uma distribuição que, quando n tende para infinito, tende para a distribuição $\mathcal{N}(0;1)$.

Um resultado de grande importância na teoria da amostragem é o que apresentamos a seguir

Proposição 3.20. *Sejam X_1,X_2,..., X_n, n variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição; $X_i \sim \mathcal{N}(0;1)$, $i = 1, 2, ..., n$. Então $\sum X_i^2 \sim \chi^2(n)$.*
Por outras palavras, uma variável aleatória que resulta da soma dos quadrados de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $(\mathcal{N}(0;1))$, tem uma distribuição Qui-Quadrado com n graus de liberdade.

3.6 Distribuição t de "Student"

Definição 3.21. *Uma variável aleatória X tem uma distribuição t* **de "Student"** *com n graus de liberdade, simbolicamente $X \sim t(n)$, quando a sua função de densidade tem a forma*

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < x < +\infty.$$

Na Figura 3.10 estão representadas as funções de densidade de três v.a., duas, com a distribuição $t(4)$ e $t(10)$ e a outra, a tracejado, com a distribuição $X \sim \mathcal{N}(0;1)$. Como se vê claramente, quanto maior é o número de graus de liberdade da distribuição t, mais o gráfico da função de densidade de t se aproxima do gráfico da densidade da Normal.

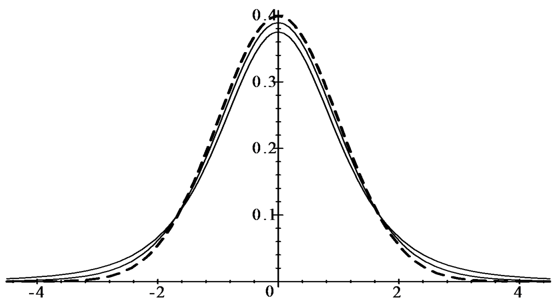

Figura 3.10: Distribuições t e Normal (a tracejado).

De facto, se $X \sim t(n)$ quando $n \to \infty$, pode-se demonstrar que $X \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Proposição 3.22. *Se $X \sim t(n)$,*

$$E[X] = 0$$

e

$$V[X] = \frac{n}{n-2}, n > 2.$$

As principais aplicações da distribuição t de "Student", resultam do teorema seguinte:

Teorema 3.23. *Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ e $Y \sim \chi^2(n)$, então,*

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n).$$

3.7 Distribuição F de "Snedcor"

Definição 3.24. *Uma variável aleatória X tem uma distribuição F* **de "Snedcor"** *com m e n graus de liberdade, simbolicamente $X \sim F(m,n)$, quando a sua função de densidade tem a forma*

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}.\frac{\left(\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}.\frac{m}{n}, m > 0, n > 0, x > 0,$$

sendo a função $B(m,n)$, (a função Beta), definida por

$$B(m,n) = \int_0^{+\infty} \frac{\xi^{m-1}}{(1+\xi)^{m+n}} d\xi.$$

O gráfico da função de densidade varia, naturalmente, com os valores de m e n, tanto como podemos ver na Figura 3.11.

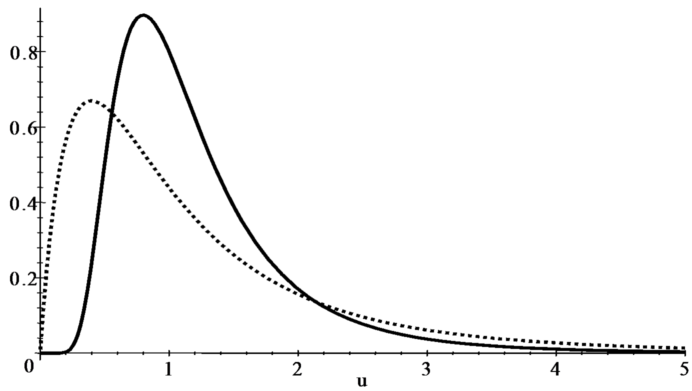

Figura 3.11: Funções de densidade $F(10, 50)$ e $F(8, 4)$ (a tracejado).

Proposição 3.25. *Se a v.a. $X \sim F(m,n)$,*

$$E[X] = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

e

$$V[X] = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n > 4.$$

A terminar este capítulo relativo às distribuições teóricas contínuas três resultados de extrema importância nas aplicações da distribuição F.

Teorema 3.26. *Se a v.a. $X \sim F(m,n)$, então $\frac{1}{X} \sim F(n,m)$.*

Teorema 3.27. *Se as v.a. X e Y são independentes, $X \sim \chi^2(m)$ e $Y \sim \chi^2(n)$, então, se*

$$F = \frac{(X/m)}{(Y/n)},$$

$$F \sim F(m,n).$$

Como consequência imediata deste teorema tem-se o seguinte corolário.

Corolário 3.28. *Se a v.a. $X \sim t(n)$, então $X^2 \sim F(1,n)$.*

As distribuições contínuas a que fizemos referência, as distribuições Exponencial, Normal, Qui-Quadrado, t de "Student" e F de Snedcor, constituem o suporte teórico de mais larga utilização em questões de inferência estatística.

Referências

[1] FISZ, M., *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

[2] GUIMARÃES, R.C. e CABRAL, J.A.S., *Estatística*, McGraw-Hill de Portugal, Lisboa, 1997.

[3] MURTEIRA, B.J.F., *Probabilidades e Estatística*, McGraw-Hill de Portugal, Lisboa, 1979.

[4] SPIEGEL, M.R., *Probabilidade e Estatística*, Colecção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1978

[5] OLIVEIRA, J.T., *Probabilidades e Estatística*, vol. I, Escolar Editora, Lisboa,1967.

[6] MELLO, F., *Introdução aos Métodos Estatísticos*, vol. I e II, Cadernos do Instituto de Orientação Profissional, Lisboa, 1973.

[7] MONTGOMERY, D.; RUNGER, G., *Applied Statistics and Probability for Engineers*, Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, 2003.