

Licenciatura em Engenharia Informática

Métodos Estatísticos

Exercícios

Elementos da Teoria da Estimação

Departamento de Matemática



5 Elementos da Teoria da Estimação

Exercício 5.1 Seja X uma população com distribuição normal de média μ e desvio padrão igual a 2. Uma amostra aleatória de dimensão $n = 25$ foi extraída desta população e revelou uma média $\bar{x} = 78.3$.

1. Calcule o intervalo de confiança para μ a 99%.
2. Qual a amplitude do intervalo de confiança a 99% para μ ?
3. Qual a margem de erro do intervalo de confiança a 99% para μ ?
4. Qual deverá ser a dimensão da amostra para que a amplitude, do intervalo de confiança a 99% para μ , não exceda os 0.1?
5. Calcule o intervalo de confiança a 95% para μ .
6. Qual o efeito de variar o grau de confiança?
7. Qual deverá ser a dimensão da amostra para a amplitude, do intervalo de confiança 95% para μ , não exceda os 0.1? E a 99.9% de confiança? Interprete os resultados.

Exercício 5.2 Certo equipamento de empacotamento automático, encontra-se regulado para encher embalagens de um quilo de certo produto. O seu deficiente funcionamento origina prejuízo para a empresa: se a maioria das embalagens tem peso inferior ao estabelecido, haverá reclamações por parte dos clientes e perda de prestígio; peso excessivo será por outro lado anti-económico. Aceita-se da experiência passada que o peso das embalagens se comporta normalmente com desvio padrão de 12 gramas. Para verificar a afinação do equipamento, selecionaram-se em determinada altura, nove embalagens cujos pesos exatos (em gramas) foram anotados:

(983, 992, 1011, 976, 997, 1000, 1004, 983, 998).

1. Calcule uma estimativa pontual para a média da população.
2. Construa um intervalo de confiança para μ com os seguintes graus de confiança: 90%, 95% e 99%. Como varia a precisão do intervalo (a sua amplitude) com o grau de confiança escolhido?
3. Com base nos intervalos de confiança calculados na alínea anterior, acha que a máquina está regulada?
4. Num intervalo de confiança a 95% para a média da população, qual deverá ser o tamanho da amostra a recolher para que a margem de erro não seja superior a 1?

Exercício 5.3 A distância percorrida por um avião, desde o contacto com o solo até à imobilização total, é uma variável aleatória X com distribuição normal. Os valores para X , numa série de 31 aterragens, foram compilados e são apresentados de seguida (valores em milhares de metros):

$$\sum_{i=1}^{31} x_i = 54.3 \qquad \sum_{i=1}^{31} x_i^2 = 95.57$$

1. Calcule estimativas pontuais para a média e variância da população.
2. Determine um intervalo de confiança a 99% para a média. Acha que é possível efetuar uma aterragem segura numa pista com menos de 1500 metros? Justifique.

Exercício 5.4 Com a finalidade de estimar o peso médio (em quilos) das crianças de 15 anos de idade em determinada região geográfica, selecionaram-se aleatoriamente 10 crianças que forneceram uma média de 38.4 quilos e um desvio padrão de 5.5 quilos. Admitindo a normalidade.

1. Determine um intervalo de confiança a 99% para o peso médio de todas as crianças.
2. Considerando que a estimativa para o peso médio não é suficientemente precisa (dado que o intervalo de confiança é demasiado grande), qual deve ser o grau de confiança a considerar de modo a obter uma amplitude de 3 quilos?

Exercício 5.5 Considere uma população normal com parâmetros desconhecidos, de onde se obteve uma amostra aleatória com 16 observações, que permitiu construir o seguinte intervalo de confiança para a média da população:

$$]7.05, 12.95[$$

1. Determine a média amostral.
2. Sabendo que, com a informação da amostra, se obteve $s = 4$, qual o grau de confiança que pode atribuir ao intervalo referido?
3. Suponha que a variância da população é 44. Se pretender construir um intervalo de confiança a 95% para a média da população, cuja amplitude não exceda 3.5, qual deverá ser a dimensão da amostra a considerar?

Exercício 5.6 A concentração ativa de um ingrediente num detergente líquido é supostamente afetada pelo catalizador usado no processo. O desvio padrão da concentração ativa é 3 gramas/litro independentemente do catalizador utilizado, sendo o comportamento do processo normal. Foram recolhidas 10 observações cada uma com o seu catalizador:

catalizador 1	57.9	66.2	65.4	65.2	62.6	67.6	63.7	67.2	71.0	65.4
catalizador 2	66.4	71.7	70.3	69.3	64.8	69.6	68.6	69.4	65.3	68.8

1. As amostra são independentes ou emparelhadas?
2. Determine um intervalo de confiança a 95% para a diferença de médias dos dados obtidos pelos dois catalisadores. Em média, os dados obtidos pelos dois catalisadores podem ser considerados iguais?

Exercício 5.7 Pretende-se investigar o nível de remuneração salarial dos homens e mulheres de certa categoria profissional. De duas amostras obtidas entre dois grupos, destacam-se os seguintes resultados (em unidades monetárias):

$$\begin{array}{lll} \text{Amostra de 250 homens:} & \bar{x}_1 = 33.8 & s_1^2 = 5.7 \\ \text{Amostra de 150 mulheres:} & \bar{x}_2 = 31 & s_2^2 = 10.3 \end{array}$$

Construa um intervalo de confiança a 99% para as diferenças salariais médias entre os dois géneros e conclua sobre a possível existência de discriminação de género na atribuição de remunerações.

Exercício 5.8 Deseja-se saber se um programa de reabilitação após enfarte de miocárdio diminui a frequência cardíaca de esforço. Para tal, 10 doentes com enfarte do miocárdio foram submetidos a uma prova de esforço antes e depois do programa. Os resultados, expressos em batimentos por minuto, estão na tabela seguinte:

Doente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes	147	122	127	141	150	132	157	147	157	155
Depois	132	117	142	124	116	130	122	118	135	117

Suponha que a variável em estudo segue uma distribuição normal.

1. As amostras são independentes ou emparelhadas?
2. Recorrendo a um intervalo de confiança a 95% para a diferença média, indique se acha que o programa de reabilitação foi eficaz.

Exercício 5.9 Foi estudado o grau de satisfação (medido por questionário) de vários utentes de uma clínica dentária antes e depois de lhes ser aplicada uma nova prótese total removível. Os resultados, expressos em grau de satisfação, foram os apresentados na tabela seguinte:

Utente	1	2	3	4	5	6	7	8
Antes	4	10	8	13	7	3	15	7
Depois	4	16	11	17	17	4	18	11

Suponha que o grau de satisfação segue uma distribuição normal.

1. Estas amostras podem ser consideradas independentes?
2. Recorrendo a um intervalo de confiança a 99% para a diferença média, indique se a aplicação da nova prótese influenciou o grau de satisfação dos utentes.

Exercício 5.10 Para comparar a eficiência de dois métodos de ensino, uma turma de 24 alunos foi dividida aleatoriamente em dois grupos. Cada grupo é ensinado de acordo com um método diferente. Os resultados no fim do semestre são os seguintes (numa escala de 0 a 100):

$$1.^{\circ} \text{ Grupo: } \quad n_1 = 13 \quad \bar{x}_1 = 74.5 \quad s_1^2 = 82.6$$

$$2.^{\circ} \text{ Grupo: } \quad n_2 = 11 \quad \bar{x}_2 = 71.8 \quad \sum_{i=1}^{11} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 1126$$

Supondo que as populações são normais (com variâncias iguais), obteve-se o seguinte intervalo de confiança para a diferença entre os valores esperados das duas populações:

$$] - 5.635, 11.035[.$$

1. Indique qual o grau de confiança utilizado no cálculo deste intervalo.
2. Com base num intervalo de confiança a 90% acha que, em média, os métodos de ensino podem ser considerados iguais?
3. Com base num intervalo de confiança a 90% verifique se a suposição das variâncias serem iguais é válida.

Exercício 5.11 Duas marcas de comprimidos, um deles contendo aspirina, são anunciados como fazendo desaparecer a dor de cabeça em tempo recorde. Foram feitas experiências com cada um deles, tendo-se obtido duas amostras aleatórias independentes, cujos resultados (tempo em minutos) foram os seguintes:

Comprimido 1 (com aspirina):

9.6; 9.4; 9.3; 11.2; 11.4; 12.1; 10.4; 9.6; 10.2; 8.8; 13.0

Comprimido 2 (sem aspirina):

11.4; 12.1; 10.4; 9.6; 8.5; 9.7; 12.3; 12.4; 10.8; 10.8

Admita que as populações são normais e que os desvios padrão são iguais.

1. Construa um intervalo de confiança a 95% para a verdadeira diferença das médias das respostas aos dois medicamentos. Acha que, em média, as respostas dos dois medicamentos podem ser consideradas iguais?
2. Com base num intervalo de confiança a 95% verifique se a suposição dos desvios padrão serem iguais é válida.

Exercício 5.12 Obtém-se uma amostra de 15 crânios de homens egípcios que viveram por volta de 1850 a.c.. Mede-se a largura máxima de cada crânio, e obtiveram-se da amostra uma média de 134.5 mm e um desvio padrão de 3.5 mm (com base em dados de *Ancient Races of Thebaid*, por Thomson e Randall-Maciver). Suponha que a largura máxima dos crânios tem um comportamento normal. Com esses dados amostrais, construa um intervalo de 95% de confiança para o desvio padrão populacional.

Exercício 5.13 Pretende-se estudar a variabilidade do tempo de espera (em minutos) de clientes num dado banco, onde os clientes entram numa fila única. Suponha que o tempo de espera segue uma distribuição normal. Construa um

intervalo de 95% de confiança para o desvio padrão populacional sabendo que se recolheu a seguinte amostra:

$$(6.5; 6.6; 6.7; 6.8; 7.1; 7.3; 7.4; 7.7; 7.7; 7.7).$$

Exercício 5.14 Considere-se a seguinte amostra de uma população cuja distribuição é Normal de média 10:

$$(9; 14; 10; 12; 7; 3; 11; 12).$$

Nestas condições, construa o intervalo de confiança a 99% mais adequado para a variância dessa população.

Exercício 5.15 Durante uma avaliação de desempenhos das escolas A e B, sugeriu-se que a escola A tinha uma maior variabilidade que a escola B em termos das notas finais dos alunos. Fizeram-se 16 registos de classificações para a escola A e 21 registos de classificações para a escola B conduzindo às variâncias de 6.62 e 3.80, respetivamente. Suponha que as populações em estudo têm um comportamento normal. Construa um intervalo de confiança a 90% para a razão das verdadeiras variâncias e diga se a variabilidade das escolas pode ser considerada diferente.

Exercício 5.16 Numa região afetada por um surto epidémico, observou-se uma amostra de 2500 indivíduos, tendo-se encontrado 850 contaminados. Determine intervalos de confiança a 95% e 98% de confiança para a proporção de contaminados na população.

Exercício 5.17 Num estudo de mercado efetuado sobre uma amostra aleatória de 400 consumidores, foi encontrado o seguinte intervalo de confiança para a proporção de pessoas recetivas a um novo tipo de espuma de banho a lançar em breve no mercado:

$$]0.5114, 0.6086[$$

1. Em relação à amostra recolhida, qual foi a percentagem de pessoas recetivas a um novo tipo de espuma de banho?
2. Mostre que o grau de confiança considerado no intervalo calculado é de 95%.
3. Comente as seguintes afirmações, indicando se estas lhe parecem corretas ou incorretas:
 - (a) 95% das pessoas vão passar a usar a nova espuma de banho.
 - (b) A quota de mercado poderá ser, com 95% de confiança, de 56%.

Exercício 5.18 Recolheu-se uma amostra de 40 alunos do 1.º ano da EST-Setúbal tendo-se verificado que 10 destes alunos frequentam os cursos que escolheram em primeira opção.

1. Calcule um intervalo de confiança a 95%, para a verdadeira proporção de estudantes que está no curso que escolheu em primeira opção.

2. Se pretendesse reduzir a metade a amplitude do intervalo anterior:

- (a) e manter a dimensão da amostra, qual o grau de confiança que deveria utilizar?
- (b) e manter o grau de confiança, qual a dimensão da amostra que deveria utilizar? Suponha que não há alteração na estimativa da proporção.
- (c) e manter o grau de confiança, qual a dimensão da amostra que deveria utilizar? Suponha que não conhece estimativas da proporção.

Exercício 5.19 Uma repórter da revista Byte deseja fazer uma pesquisa para estimar a verdadeira proporção de todos os universitários que têm computador pessoal. Nos seus resultados a repórter quer ter 95% de confiança e uma margem de erro de 0.04. Quantos universitários devem ser pesquisados?

Exercício 5.20 Pretende-se estimar o número total de médicos que trabalham numa certa cidade e estão associados a planos de saúde. Para isso recolheu-se uma amostra aleatória com 300 médicos dessa cidade e apurou-se que entre eles 216 se enquadram nessa condição. Obtenha um intervalo de confiança a 98% para a sua estimativa, sabendo que o número total de médicos na cidade é 28000.

Exercício 5.21 Dois inquéritos realizados (em 2009 e 2019), relativamente ao consumo de bebidas alcoólicas, em idades entre os 15 e os 35 anos, forneceram os seguintes dados:

Ano	Número de inquiridos	Consumidores	Não consumidores
2009	4000	1750	2250
2019	5000	2250	2750

Através de um intervalo de confiança, a 98%, indique a veracidade da afirmação: "A percentagem de consumidores de bebidas alcoólicas, em indivíduos com idades compreendidas entre os 15 e os 35 anos, registou um grande aumento na década analisada."

Exercício 5.22 Com o objetivo de verificar o efeito de um novo medicamento no tratamento de uma dada doença, dois grupos, A e B , foram formados, cada um composto por 100 indivíduos que apresentavam a tal doença, estando todos eles no mesmo estágio da mesma. O grupo A recebeu o novo medicamento e o grupo B recebeu um placebo. Curaram-se da doença 75 pessoas no grupo A e 65 no grupo B . É possível afirmar que o novo medicamento é eficaz no tratamento da doença? Justifique a sua resposta recorrendo a um intervalo de confiança a 95%.

Soluções

- 5.1** 1) $]77.2696, 79.3304[$ 2) 2.0608 3) 1.0304 4) $n \geq 10618$ 5) $]77.516, 79.084[$
6) – 7) $n \geq 6147$ e $n \geq 17330$
- 5.2** 1) 993.78 gramas 2) $]987.2, 1000.4[$; $]985.94, 1001.6[$; $]983.48, 1004.1[$. Quanto maior o grau de confiança, maior a amplitude do intervalo de confiança (ou seja, menor a precisão). 3) Sim 4) $n \geq 554$
- 5.3** 1) $\bar{x} = 1.7516$ milhares de metros e $s^2 = 0.0153$ milhares de metros² 2) $]1.6944, 1.8088[$. Com 99% de confiança, não parece ser possível efetuar uma aterragem segura.
- 5.4** 1) $]32.7474, 44.0526[$ 2) 60%
- 5.5** 1) 10 2) 99% 2) $n \geq 56$
- 5.6** 1) As amostras são independentes. 2) $] -5.8296, -0.5704[$. Com 95% de confiança, em média, os dados obtidos pelos dois catalizadores não podem ser considerados iguais.
- 5.7** $]2.021, 3.579[$. Com 99% de confiança, parece existir discriminação de género na atribuição de remunerações.
- 5.8** 1) As amostras são emparelhadas. 2) $] -30.36, -6.04[$. Com 95% de confiança, o programa de reabilitação parece ser eficaz.
- 5.9** 1) As amostras são emparelhadas. 2) $]1.799, 5.951[$. Com 90% de confiança, a aplicação da nova prótese influenciou o grau de satisfação dos utentes.
- 5.10** 1) 95% 2) $] -4.397, 9.797[$. Com 90% de confiança, em média, os métodos de ensino podem ser considerados iguais. 3) $]0.252, 2.017[$. Com 90% de confiança, a suposição das variâncias serem iguais é válida.
- 5.11** 1) $] -1.547, 0.675[$. Com 95% de confiança, em média, as respostas dos dois medicamentos podem ser consideradas iguais. 2) $]0.447, 1.731[$. Com 95% de confiança, a suposição dos desvios padrão serem iguais é válida.
- 5.12** $]2.563, 5.519[$
- 5.13** $]0.328, 0.870[$
- 5.14** $]3.818, 62.687[$
- 5.15** $]0.792, 4.059[$. Com 90% de confiança, a variabilidade das escolas não pode ser considerada diferente.
- 5.16** $]0.3214, 0.3586[$ e $]0.318, 0.362[$
- 5.17** 1) 56% 2) – 3a) Afirmação incorreta. 3b) Afirmação incorreta.
- 5.18** 1) $]0.1158, 0.3842[$ 2a) 67.3% 2b) 160 2c) 214
- 5.19** 2401
- 5.20** $]18472, 21848[$
- 5.21** $] -0.037, 0.012[$. Com 98% de confiança, a afirmação não é verdadeira.
- 5.22** $] -0.026, 0.226[$. Com 95% de confiança, não é possível afirmar que o novo medicamento é eficaz no tratamento da doença.