IPS Instituto Politécnico de Setúbal

Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

Programação Avançada 2021-22

[2b] Árvores Binárias de Pesquisa | Algoritmos

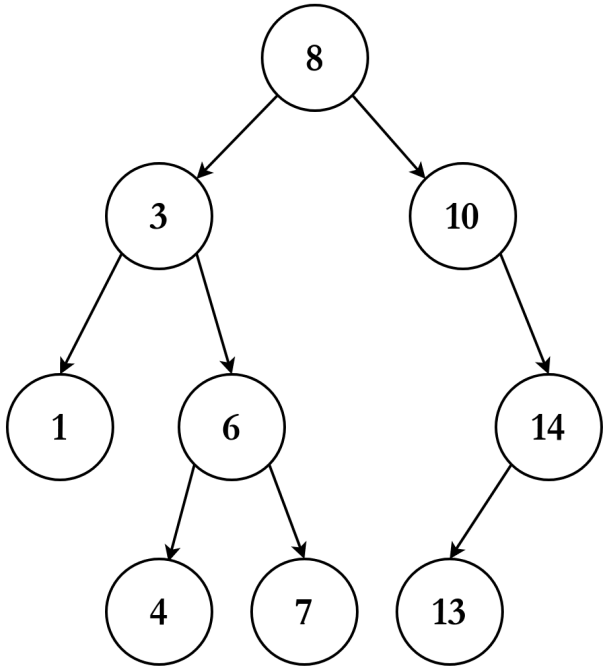
Bruno Silva, Patrícia Macedo

Sumário 📝

- Caracterização
- Motivação de uso
- Algoritmos
  - Pesquisa
  - Inserção
  - Remoção
- Exercícios

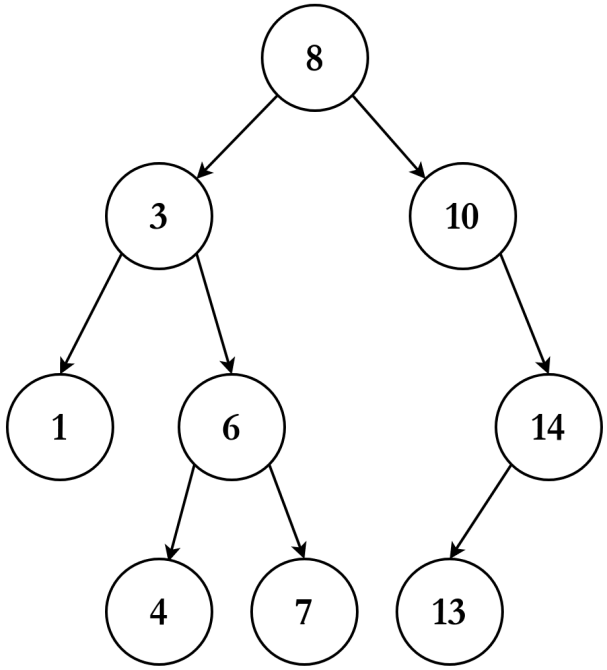
Características

- Uma árvore binária de pesquisa (em inglês, *binary search tree*) é uma estrutura de dados hierárquica especializada;
  - Consiste numa árvore binária "ordenada".
- É **caracterizada** pelo seguinte:
  - um **nó** contém um elemento/chave maior que os da **subárvore esquerda**;
  - um **nó** contém um elemento/chave menor que os da **subárvore direita**;



Características

- Deverá ser óbvio que é necessário um **critério de comparação** para os elementos/chaves numa árvore binária de pesquisa;
- **Não são permitidos** elementos/chaves **repetidos**;
- Vamos ilustrar com números (comparação natural), mas são válidas para quaisquer outros dados "comparáveis".



Motivação

Como o nome sugere, permitem acelerar a pesquisa de elementos.

- Pesquisa sequencial num array - complexidade $O(n)$
  - 10.000 elementos ➡️ 10.000 comparações no pior caso 😒
- Pesquisa numa árvore binária de pesquisa - complexidade $O(log\ n)$
  - 10.000 elementos ➡️ $\approx$ 13 comparações no pior caso 😄

Algoritmos

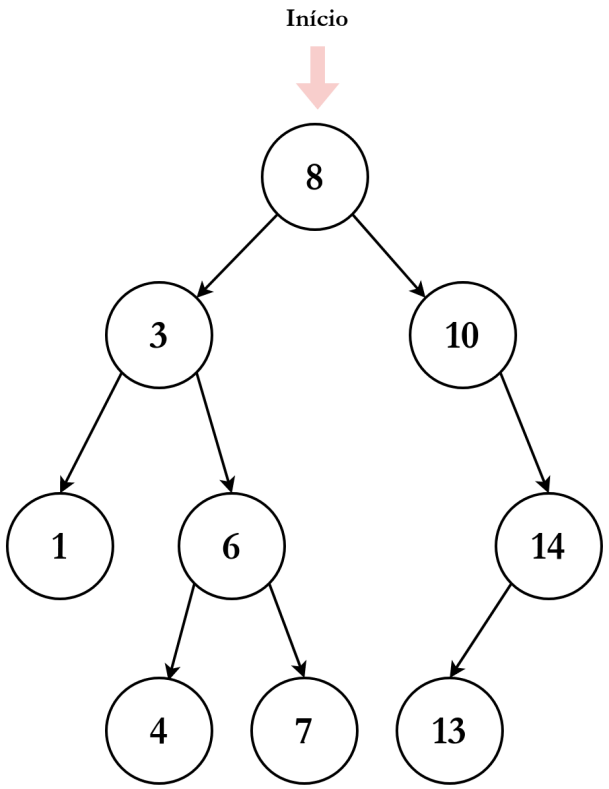
- Os principais algoritmos são:
  - 🔍 Pesquisa (elemento/chave, mínimo e máximo);
  - ➕ Inserção de um novo nó (⚠️)
  - ➖ Remoção de um nó (⚠️)
- Os algoritmos que alteram uma árvore binária de pesquisa (⚠️) têm de garantir/manter as suas características.
- Os algoritmos serão apresentados em *linguagem natural*.

🔍 Pesquisa

Para pesquisar um elemento/chave *target*:

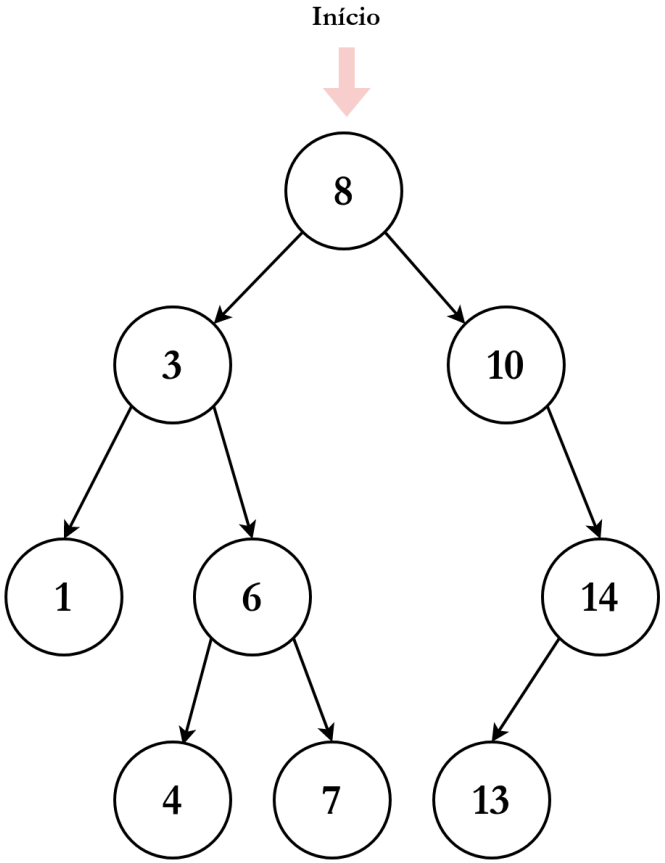
1. Se a árvore estiver vazia, não existe;
2. Se *target* é igual ao elemento na raiz da árvore, sucesso!;
3. Senão:

- Se target é menor que o elemento na raiz, retornar o resultado da pesquisa na subárvore esquerda;
- Se target é maior que o elemento na raiz, retornar o resultado da pesquisa na subárvore direita;



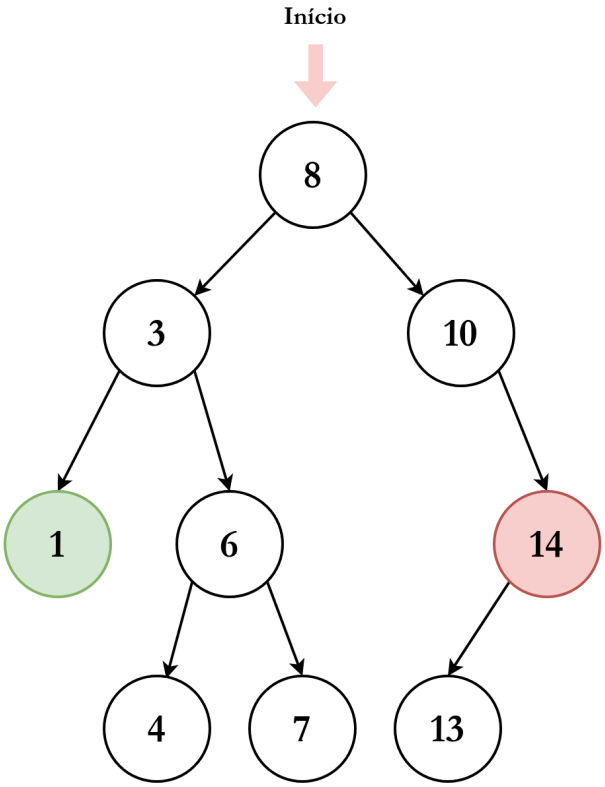
🔍 Pesquisa

- Quais os passos para *target* =
  - 5?
  - 8?
  - 13?
  - 15?



🔍 Mínimo & Máximo

- Elemento/chave mínimo esta contido no nó mais à esquerda da árvore;
- Elemento/chave máximo esta contido no nó mais à direita da árvore;



🔍 Mínimo & Máximo (Exercício)

❓ **Exemplifique elaborando em pseudo código, o algoritmo do valor mínimo de uma árvore binária** [completa]

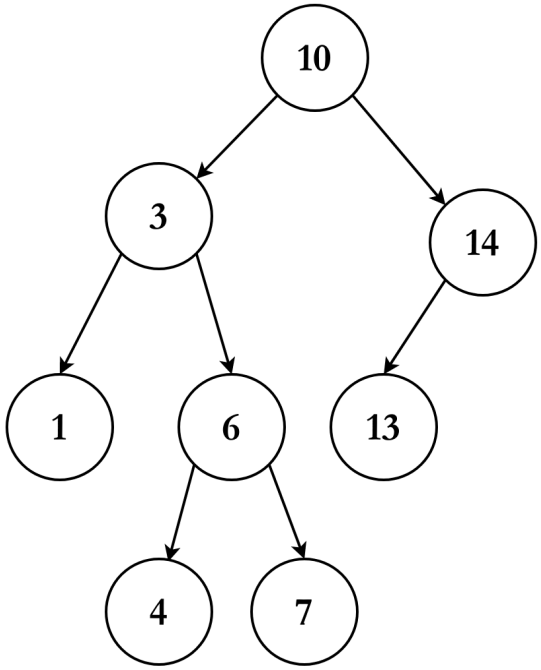
```
Algorithm: minimum
        input: binaryTree
        output :minimum element, error if the tree is empty
BEGIN
        IF (isEmpty(binaryTree)) THEN
                RETURN ERROR
        ELSE




    END IF
END
```

Inserção/ Atividade 1

Aceda ao seguinte link que permite visualizar a manipulação de uma árvore binária de pesquisa:

```
https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html
```

e tente uma ordem de inserção de elementos por forma a obter a árvore ilustrada na figura.



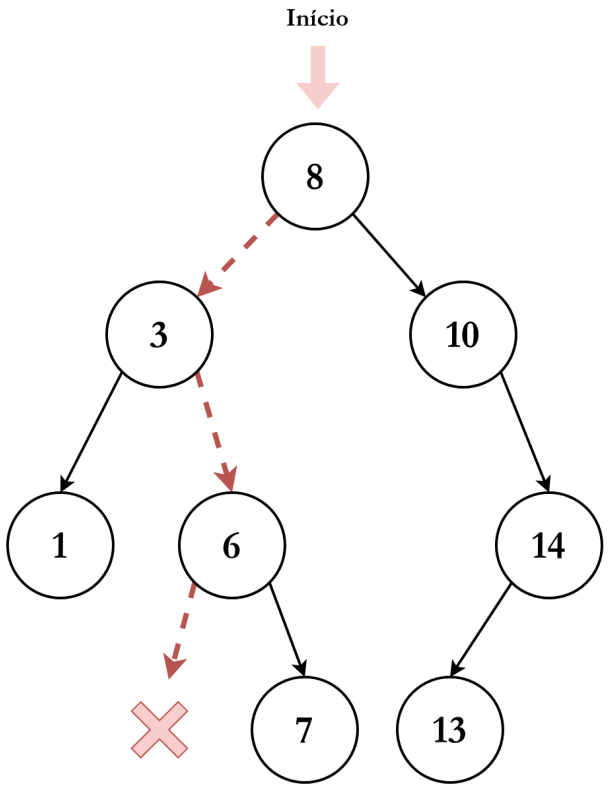
- O que conclui, sobre o algoritmo de inserção de elementos numa árvore de pesquisa?

➕ Inserção (⚠️)

- A inserção de um elemento deverá garantir que são mantidas as características de uma árvore binária de pesquisa:
  - Sem repetição de elementos/chaves;
  - subárvores esquerdas contêm elementos menores que a raiz;
  - subárvores direitas contêm elementos maiores que a raiz;

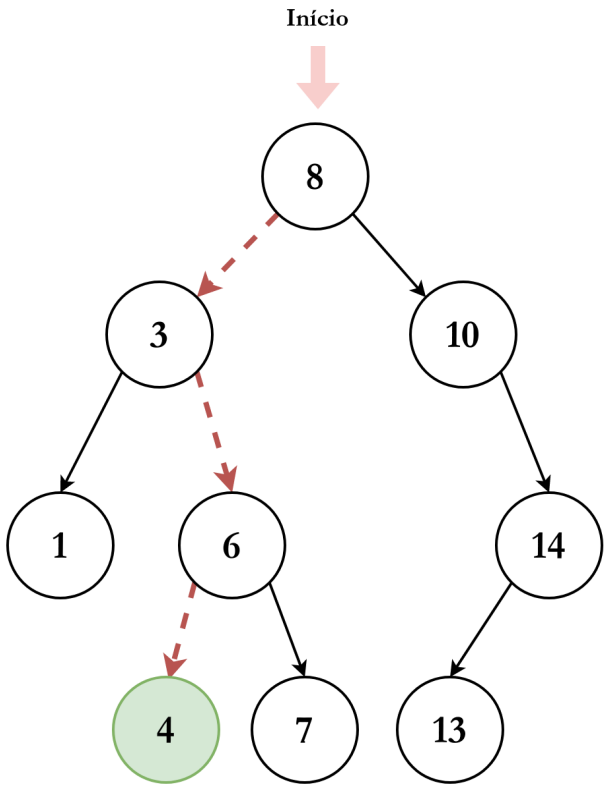
+ Inserção

- O algoritmo de inserção procede de forma análoga ao de pesquisa até que a subárvore que teria de conter o elemento esteja vazia.
- A figura ➡️ ilustra esta situação para o elemento 4.



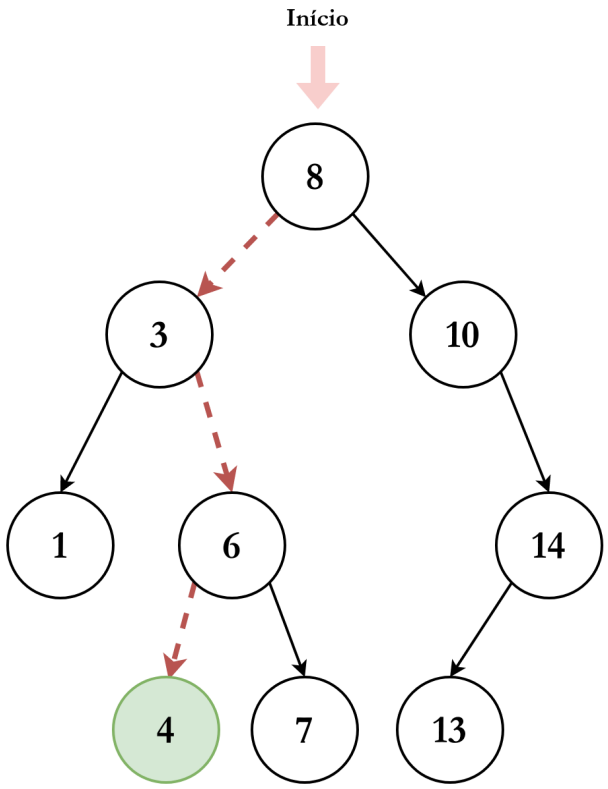
+ Inserção

- Nesta situação é adicionado um novo nó contendo o elemento (correspondendo a uma nova subárvore com o elemento como raiz).



+ Inserção

- Se o elemento a inserir (e.g., o elemento 4) já existir então o algoritmo nada faz.



Remoção/ Atividade 2

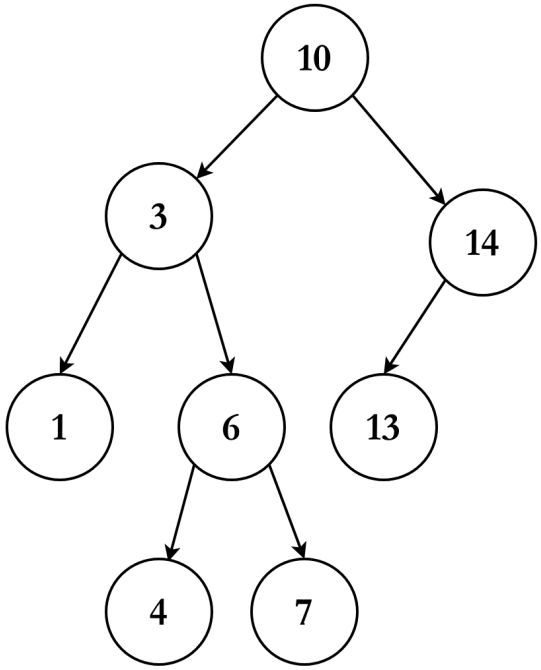
Partindo da árvore que construi na atividade1, em:

```
https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html
```

execute as seguintes ações:

- Remover o elemento 1
- Remover o elemento 3.
- Remover o elemento 10.

O que conclui, sobre o algoritmo de **Remoção** de elementos ?
Quais as particularidades em cada um dos tipos de remoções ?

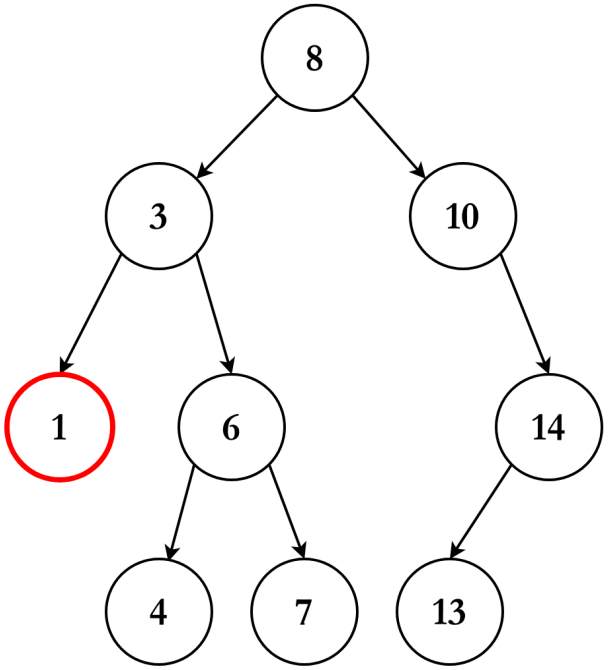


— Remoção (⚠️)

- Existem três situações possíveis a contemplar para o nó que contém o elemento a remover:
  - $[1]$ Não possui subárvores 😄
  - $[2]$ Apenas possui uma subárvore 😕
  - $[3]$ Possui duas subárvores 😖
- Os algoritmos de remoção dos elementos também têm de manter as características de uma árvore binária de pesquisa.

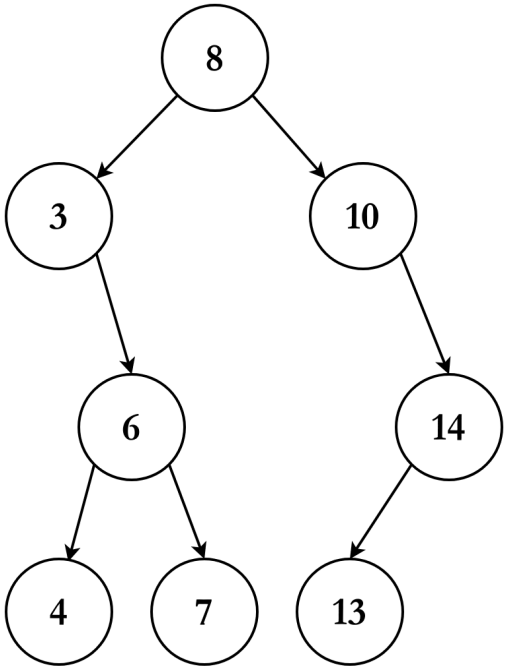
— Remoção

- [1] Não possui subárvores:
  - Figura ➡️ com exemplo para o elemento 1.



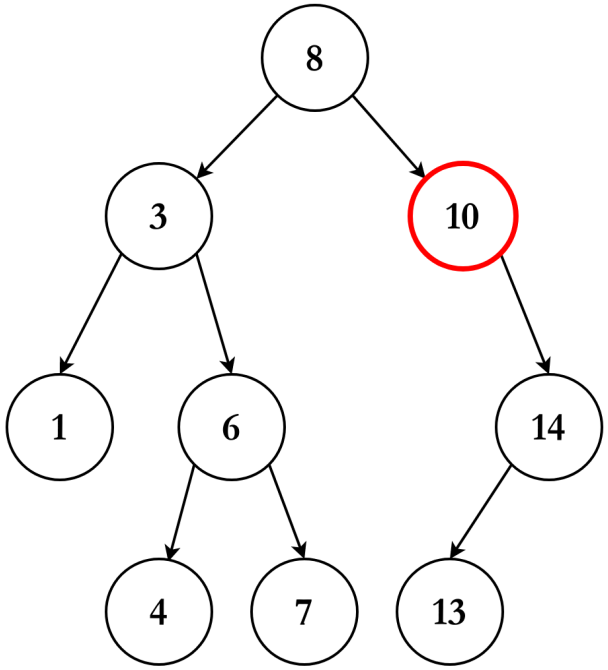
— Remoção

- [1] Não possui subárvores:
  - Figura ➡️ com exemplo para o elemento 1.
  - **Remove-se simplesmente o nó**.



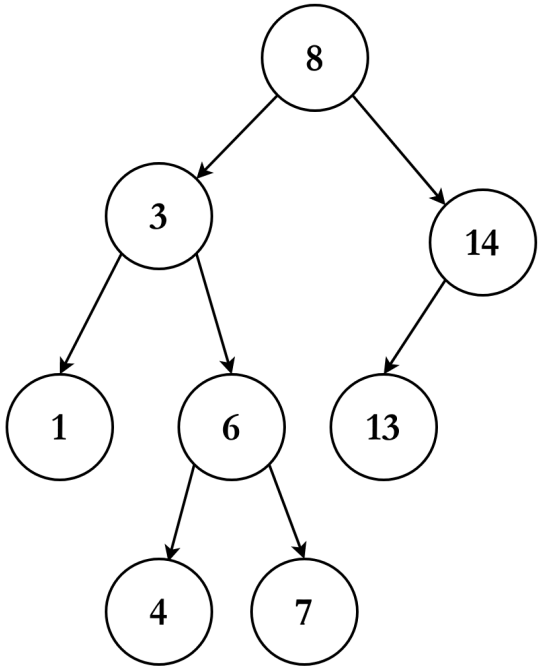
— Remoção

- [2] Apenas possui uma subárvore:
  - Figura ➡️ com exemplo para o elemento 10.



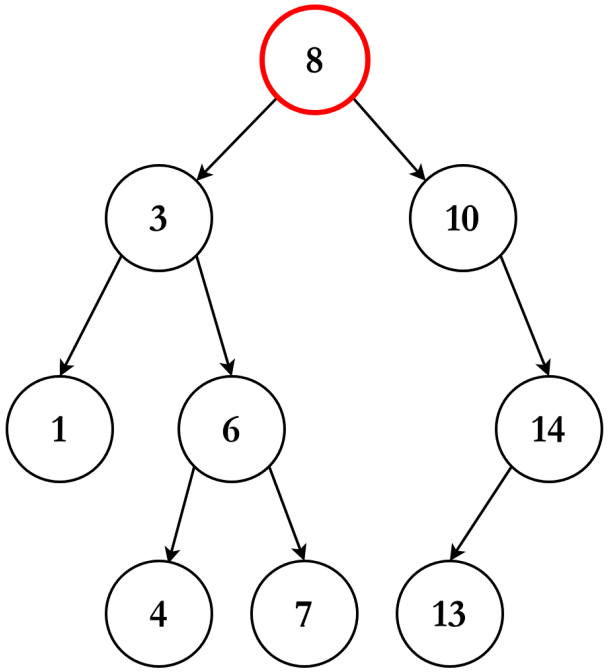
— Remoção

- [2] Apenas possui uma subárvore:
  - Figura ➡️ com exemplo para o elemento 10.
  - **Substitui-se o nó pela sua subárvore**.



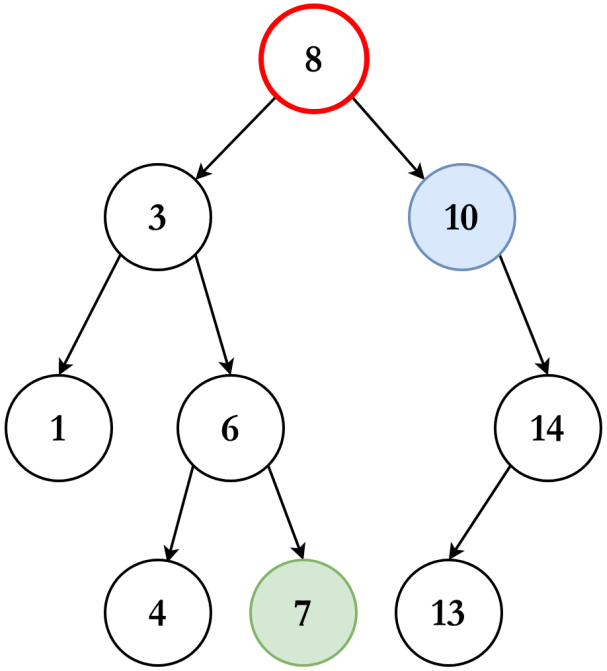
— Remoção

- [3] Possui duas subárvores:
  - Figura ➡️ com exemplo para o elemento 8.



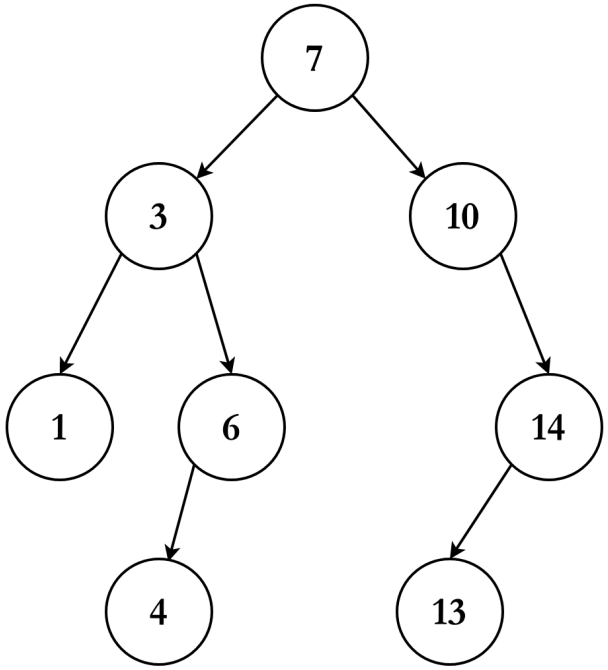
— Remoção

- [3] Possui duas subárvores:
  - Figura ➡️ com exemplo para o elemento 8.
  - Duas hipóteses (subsituição e algoritmo de remoção):
    - Elemento máximo da **subárvore esquerda**.
    - Elemento mínimo da **subárvore direita**.



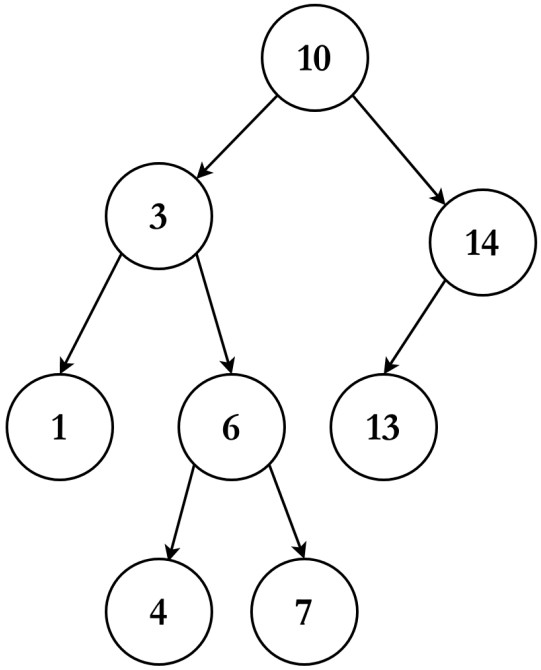
— Remoção

- [3] Possui duas subárvores:
  - Figura ➡️ com exemplo para o elemento 8.
  - 1ª Hipótese (subsituição e algoritmo de remoção):
    - Elemento máximo da **subárvore esquerda**.



— Remoção

- [3] Possui duas subárvores:
  - Figura ➡️ com exemplo para o elemento 8.
  - Hipótese (subsituição e algoritmo de remoção):
    - Elemento mínimo da **subárvore direita**.



Exercícios 🖋️

1 . Elabore a ficha de atividades disponível no Moodle:

`2b_FichaAtividades.pdf`

Exercícios

2. Complete em pseudocódigo o algoritmo que verifique se um elemento existe numa árvore bináriade pesquisa.

```
Algorithm: exist
   input: binaryTree, element
   output :boolean (true if the element exist, false if does not exist)
BEGIN
        IF isEmpty(binaryTree) THEN
                RETURN FALSE
   ELSE
       IF element = root(binaryTree)
           RETURN TRUE









   END IF
END
```

Exercícios ✏️

3. Qual a árvore resultante da inserção sequencial de `{1,4,7,9,10,18}`?
    - Vê algum problema na árvore resultante?
    - https://en.wikipedia.org/wiki/AVL_tree