

# 同余最短路

前置知识

讲解059 - 链式前向星建图

讲解062 - 01bfs

讲解064 - Dijkstra算法

讲解074 - 完全背包

本节课讲述，总积极大，单个物品体积较小，这一类完全背包问题，用同余最短路解决，具体包括同余分组的概念

dijkstra算法实现同余最短路

01bfs算法实现同余最短路

两次转圈法实现同余最短路

注意如下都是之前讲的题目，都是同余分组解决的，虽然没看过也不会影响本节课的学习，但推荐观看  
讲解075 - 题目4多重背包单调队列优化，题目5混合背包      讲解105 - 题目5串联所有单词的子串

# 同余最短路

同余最短路

给定 $n$ 个正数，每种数的个数无限

求这 $n$ 个正数能拼凑出多少的其他数

或者不能拼凑出的最小数、最大数等问题时

利用同余最短路构造一些同余状态，可以起到优化时间和空间的目的

# 同余最短路

题目1

跳楼机

一座大楼一共有h层，楼层编号1~h，有如下四种移动方式

1，向上移动x层

2，向上移动y层

3，向上移动z层

4，回到1层

假设你正在第1层，请问大楼里有多少楼层你可以到达

$1 \leq h \leq 2^{63} - 1$

$1 \leq x, y, z \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3403>

diijkstra算法实现同余最短路

# 同余最短路

题目2

牛场围栏

给定一个长度为 $n$ 的数组 $arr$ ， $arr[i]$ 代表第 $i$ 种木棍的长度，每种木棍有无穷多个

给定一个正数 $m$ ，表示你可以把任何一根木棍消去最多 $m$ 的长度，同一种木棍可以消去不同的长度

你可以随意拼接木棍形成一个长度，返回不能拼出来的长度中，最大值是多少

如果你可以拼出任何长度，返回-1

如果不能拼出来的长度有无穷多，返回-1

$1 \leq n \leq 100$

$1 \leq arr[i] \leq 3000$

$1 \leq m \leq 3000$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2662>

diijkstra算法实现同余最短路

# 同余最短路

## 题目3

正整数倍的最小数位和

给定一个整数 $k$ ，求一个 $k$ 的正整数倍 $s$ ，使得在十进制下， $s$ 的数位累加和最小  
不返回 $s$ ，而是返回这个最小的数位和

$2 \leq k \leq 10^5$

测试链接： [https://www.luogu.com.cn/problem/AT\\_arc084\\_b](https://www.luogu.com.cn/problem/AT_arc084_b)

测试链接： [https://atcoder.jp/contests/abc077/tasks/arc084\\_b](https://atcoder.jp/contests/abc077/tasks/arc084_b)

巧妙构造 + 01bfs算法实现同余最短路

# 同余最短路

题目4

墨墨的等式

一共有 $n$ 种正数，每种数可以选择任意个，个数不能是负数

那么一定有某些数值可以由这些数字累加得到

请问在 $[l \dots r]$ 范围上，有多少个数能被累加得到

$0 \leq n \leq 12$

$0 \leq \text{数值范围} \leq 5 * 10^5$

$1 \leq l \leq r \leq 10^{12}$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2371>

解法1，dijkstra算法实现同余最短路

解法2，两次转圈法实现同余最短路，课上重点详解两次绕圈法

# 同余最短路

## 两次转圈法实现同余最短路

给定一个基准数 $x$ ，那么可能的余数为 $0 \dots x-1$

假设当前余数是 $cur$ ，当前出现数字为 $y$ ， $(cur + y) \% x$  所出现的新余数，最终会回到 $cur$

当前出现数字为 $y$ ， $0 \dots x-1$ 这些点，会形成 $\gcd(x, y)$ 个子环，所有子环的起点为： $0 \sim \gcd(x, y)-1$

每个子环为单位，进行同余最短路的更新，所有子环的所有点的数量 =  $x$ ，即更新一轮的代价 $O(x)$

因为是最短路，所以每出现一个新的数字 $y$ ，所形成的每个子环，只需要转一圈即可完成更新

特别注意：子环的起点不一定是点权最小的点，所以实现中，往往用转两圈的方式

如果一共有 $n$ 个数字，基准数为 $x$ ，那么同余最短路的更新代价为， $O(n * x)$

spfa算法也可以实现同余最短路的更新，但是比赛中经常设计数据，让其时间复杂度高于 $O(n * x)$

为了顺利通过，所以更推荐两次绕圈法

# 同余最短路

题目5

背包

一共有 $n$ 种物品，第 $i$ 种物品的体积为 $v[i]$ ，价值为 $c[i]$ ，每种物品可以选择任意个，个数不能是负数

一共有 $m$ 条查询，每次查询都会给定 $jobv$ ，代表体积的要求

要求挑选物品的体积和一定要严格是 $jobv$ ，返回能得到的最大价值和

如果没有方案能正好凑满 $jobv$ ，返回-1

$1 \leq n \leq 50$

$1 \leq m \leq 10^5$

$1 \leq v[i] \leq 10^5$

$1 \leq c[i] \leq 10^6$

$10^{11} \leq jobv \leq 10^{12}$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P9140>

贪心决定基准物品 + 数据范围分析 + 两次转圈法实现同余最长路