

01分数规划

前置知识

- 讲解051 - 二分答案法，理解01分数规划需要
- 讲解059 - 链式前向星建图、图的遍历，本节课题目3、题目4、题目5需要
- 讲解061 - 最小生成树prim算法，本节课题目3需要
- 讲解073 - 01背包，本节课题目2需要
- 讲解079 - 树型dp-下，其中的题目5选课问题，重点讲的最优解，本节课题目5需要

01分数规划本身是一个比较简单的数学模型，理解二分答案法就能理解

01分数规划可以和非常多的内容结合，所以推荐的前置知识比较多，本节课会讲5道题

01分数规划还可以和网络流、费用流结合，这两部分内容会在【挺难】阶段讲述，本节课不涉及相关题目

01分数规划与更多内容结合的题目，有兴趣的同学可以自行练习

01分数规划

01分数规划最简化的问题

给定 n 个数据，每个数据有 (a, b) 两个值，并且没有负数

(a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 (a_3, b_3) 、... (a_n, b_n)

其中选出 k 个数据，希望让： k 个 a 的和 / k 个 b 的和，这个比值尽量大，返回最大的比值

错误的贪心：选择 a/b 最大的前 k 个数据，反例： $(5, 5)$ $(0, 1)$ $(2, 6)$

暴力方法： 2^n 的复杂度，每个数据都枚举要和不要两种选择

计算机里关于小数的精度是有限的 或者 具体题目要求返回的比值精度也是规定好的

那么此时没有必要精确求解，可以用二分答案法来逼近求解，保证规定精度内正确即可

01分数规划的核心：

数据转化成结余表达式的形式，当确定一个比值 x ，就在最优决策下，计算结余和

最终希望获得在最优决策下，当结余和最接近0时， x 的值

手段：利用单调性进行二分

01分数规划

二分答案法找到最大比值的过程

数据这么来看：

$$a1 - x * b1 = \text{结余1}$$

$$a2 - x * b2 = \text{结余2}$$

$$a3 - x * b3 = \text{结余3}$$

..

规定精度的最小单位sm1，找到x的可能范围[l, r]，然后二分逻辑如下：

首先令 $x = (l + r) / 2$ ，计算每一个结余，然后选出结余最大的前k名，然后加起来看看累加和

1) 如果 结余累加和 ≥ 0 ，答案更新成此时的x，然后去右侧二分，范围变成 $[x + \text{sm1}, r]$

2) 如果 结余累加和 < 0 ，答案不更新，然后去左侧二分，范围变成 $[l, x - \text{sm1}]$

3) 如果发现范围[l, r]的大小 $\leq \text{sm1}$ ，过程停止，返回答案即可

课上重点图解，时间复杂度 $O(n * \log n * \log v)$

01分数规划

题目1

01分数规划模版题

给定 n 个数据，每个数据有 (a, b) 两个值，都为整数，并且都是非负的

请舍弃掉 k 个数据，希望让剩下数据做到，所有 a 的和 / 所有 b 的和，这个比值尽量大

如果剩下数据所有 b 的和为0，认为无意义

最后，将该比值 * 100，小数部分四舍五入的整数结果返回

$1 \leq n \leq 100$

$0 \leq a, b \leq 10^9$

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/P10505>

测试链接 : <http://poj.org/problem?id=2976>

01分数规划

题目2

牛群的才艺展示

一共有 n 只牛，每只牛有重量和才艺两个属性值

要求一定要选若干只牛，使得总重量不少于 w ，并且选出的牛，希望让才艺的和 / 重量的和，这个比值尽量大

返回该比值 * 1000的整数结果，小数部分舍弃

$1 \leq n \leq 250$

$1 \leq w \leq 1000$

$1 \leq \text{牛的重量} \leq 10^6$

$1 \leq \text{牛的才艺} \leq 10^3$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4377>

01分数规划 + 01背包

01分数规划

题目3

最优比率生成树

一共有 n 个村庄，每个村庄由 (x, y, z) 表示

其中 (x, y) 代表村庄在二维地图中的位置， z 代表其海拔高度

任意两个村庄之间的距离就是二维地图中的欧式距离

任意两个村庄之间的修路花费就是海拔差值的绝对值

现在想把所有村庄连通起来，希望修路的条数尽量少，同时希望让

总花费 / 总距离，这个比值尽量小，返回最小的比值是多少，结果保留小数点后3位其余部分舍弃

$2 \leq n \leq 10^3$

$0 \leq x, y \leq 10^4$

$0 \leq z \leq 10^7$

测试链接：<http://poj.org/problem?id=2728>

01分数规划 + 最小生成树

01分数规划

题目4

最小圈

一共有 n 个节点， m 条有向边，每条边有权值

这个有向带权图中，可能有若干环，规定环的平均值为

环中边的权值和 / 环中边的数量

返回所有环的平均值中最小的平均值，结果保留小数点后8位，其余部分舍弃

$1 \leq n \leq 3000$

$1 \leq m \leq 10000$

$-10^7 \leq \text{边权} \leq 10^7$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3199>

01分数规划 + 图上dfs判断负环

01分数规划

题目5

最佳团体

给定一棵树，节点编号 $0 \sim n$ ， 0 号节点是整棵树的头

编号 $1 \sim n$ 的节点，每个节点都有招募花费和战斗值， 0 号节点这两个值都是 0

给定每条边 (a, b) ，表示节点 a 的父节点是 b ，有些节点的父节点是 0 节点

当招募了某个节点，那么该节点及其上方的所有祖先节点都需要招募

除了 0 号节点之外，一共可以招募 k 个节点，希望让

战斗值之和 / 招募花费之和，这个比值尽量大，答案只需保留三位小数，更大的精度舍弃

$1 \leq k \leq n \leq 2500$

$0 \leq \text{招募花费、战斗值} \leq 10^4$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4322>

01分数规划 + 树型dp + dfn序 + 状态设计优化

讲解079，题目5，选课问题，重点介绍的最优解，看了必会