

整体二分-上

前置知识

讲解051 - 二分答案法 本节课能听懂的基础

讲解108 - 树状数组，一维(单修范查)、一维(范修单查)、二维(单修范查)

本节课讲述

整体二分的原理

整体二分的两种常见写法

整体二分的三道模版题

下节课讲述

整体二分和更多内容结合的题目

整体二分-上

题目1

区间内第k小

给定一个长度为n的数组，接下来有m条查询，格式如下

查询 l r k : 打印[l..r]范围内第k小的值

$1 \leq n, m \leq 2 * 10^5$

$1 \leq \text{数组中的数字} \leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3834>

本题是讲解157，可持久化线段树模版题，现在作为整体二分的模版题

整体二分 + 单点修改、范围查询的一维树状数组

课上讲解两种常见写法，并且进行比较

整体二分-上

整体二分的应用场景

- 1, 单个问题的答案具有单调性, 当答案固定时, 问题的要求可能得到满足或者无法满足
- 2, 如果要求得到满足, 那么答案变差, 要求依然能满足, 此时去寻找更好的答案
- 3, 如果要求无法满足, 那么答案变好, 要求也无法满足, 此时去寻找更差的答案
- 4, 问题数量较多, 无法对每个问题都执行一次二分答案, 但是所有查询允许离线处理

整体二分的基本思想

- 1, 让修改操作适配当前的答案范围, 调整好数据状况, 然后查看每个问题的要求是否达标
- 2, 多个问题共享这一轮的修改操作后的数据状况, 避免重复劳动
- 3, 达标的问题去往左组, 不达标的问题去往右组, 然后左右分别递归, 直到解决所有的问题

整体二分的时间复杂度

假设, 答案范围为 n , 问题数量为 q , 单次修改或查询为 $\log n$

那么, 总的时间复杂度为 $O((n + q) * \log n * \log n)$

整体二分-上

整体二分的标准过程

`void compute(int ql, int qr, int vl, int vr)`

- 1, 当前这批问题, 用 $[ql..qr]$ 范围来表示, 每个问题有查询的参数, 重点是有问题的要求
- 2, 这批问题的答案, 落在 $[vl..vr]$ 范围上, 答案范围上的每个位置, 背后都对应着修改局面的操作
- 3, 如果 $vl == vr$, 说明这批问题, 答案只剩唯一的可能性, 记录答案即可
- 4, 否则, 令 $mid = (vl + vr) / 2$, 执行 $[vl..mid]$ 范围上的操作, 修改当前局面
- 5, 针对每个问题, 检查当前的局面是否满足问题的要求, 满足的问题, 进入左组
- 6, 针对不满足的问题, 看看当前局面已经能满足多少, 问题的要求减掉这部分贡献, 进入右组
- 7, 撤销第4步中执行的操作, 让局面变成之前的状况
- 8, 左组问题, 答案范围 $[vl..mid]$, 继续递归求解
- 9, 右组问题, 答案范围 $[mid + 1..vr]$, 继续递归求解

注意4、5、6、7是核心步骤, 不同写法会有不同细节, 原理是一样的, 下面讲解题目1的第二种写法

整体二分-上

题目2

矩阵内第k小

给定一个 $n * n$ 的矩阵，接下来有 q 条查询，格式如下

查询 $a\ b\ c\ d\ k$: 左上角 (a, b) ，右下角 (c, d) ，打印该区域中第 k 小的数

$1 \leq n \leq 500$

$1 \leq q \leq 6 * 10^4$

$0 \leq \text{矩阵中的数字} \leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1527>

整体二分 + 单点修改、范围查询的二维树状数组

实现两种常见写法

整体二分-上

题目3

陨石雨

一共有n个国家，给定n个数字，表示每个国家希望收集到的陨石数量

一共有m个区域，1号区顺时针到2号区...m号区顺时针到1号区，即环形相连

每个区域只属于某一个国家，给定m个数字，表示每个区域归属给哪个国家

接下来会依次发生k场陨石雨，陨石雨格式 l r num，含义如下

从l号区顺时针到r号区发生了陨石雨，每个区域都增加num个陨石

打印每个国家经历前几场陨石雨，可以达到收集要求，如果无法满足，打印"NIE"

$1 \leq n, m, k \leq 3 * 10^5$ $1 \leq \text{陨石数量} \leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3527>

破坏成链 + 建立国家拥有区域的列表 + 整体二分 + 范围修改、单点查询的一维树状数组

实现两种常见写法