

# 分块的几道好题、树上分块

分块专题的安排

专题1：块状数组、块状链表，讲解172

专题2：分块的几道好题、树上分块，讲解173，本节

专题3：双层分块、分块结合并查集，讲解174

专题4：根号分治，讲解175

分块专题结束后，开始讲述莫队专题

# 分块的几道好题、树上分块

## 前置知识

## 讲解108 - 树状数组

## 本节课题目4需要

讲解118 - 树上倍增和LCA、树上dfs改成迭代版 本节课讲述树上分块需要

## 讲解161 - 树链剖分中的重链剖分

## 本节课讲述树上分块需要

## 讲解172 - 序列分块

## 本节课讲述

## 调整块长优化常数时间的技巧

## 解法有代表性的分块经典题 题目1、题目2、题目3、题目4

树上分块和相关题目      题目5、题目6、题目7、题目8

# 分块的几道好题、树上分块

调整块长优化常数时间的技巧，也叫分块卡常技巧

执行时间 $y = a * (n / x) + b * x$

x为块长变量，a为块间操作的常数时间，b为块内操作的常数时间，n为序列长度

变化曲线开口向上，当x导数为0时，取得时间的最小值

$x_{\text{最优}} = \sqrt{n * a / b}$

当块间操作的常数时间较大时，适当增加块长，当块内操作的常数时间较大时，适当减少块长

因为正式比赛如今很少卡常了，这种技巧了解即可

# 分块的几道好题、树上分块

题目1

由乃打扑克

给定一个长度为 $n$ 的数组 $arr$ ，接下来有 $m$ 条操作，操作类型如下

操作 1  $l\ r\ v$  : 查询 $arr[l..r]$ 范围上，第 $v$ 小的数

操作 2  $l\ r\ v$  :  $arr[l..r]$ 范围上每个数加 $v$ ， $v$ 可能是负数

$1 \leq n, m \leq 10^5$     $-2 * 10^4 \leq \text{数组中的值} \leq +2 * 10^4$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5356>

序列分块 + 二分答案

调整块长优化常数时间的效果展示，可以推测出，本题修改操作数量 > 本题查询操作数量

# 分块的几道好题、树上分块

题目2

序列

给定一个长度为 $n$ 的数组 $arr$ ，初始时刻认为是第0秒

接下来发生 $m$ 条操作，第 $i$ 条操作发生在第 $i$ 秒，操作类型如下

操作 1  $l\ r\ v$  :  $arr[l..r]$ 范围上每个数加 $v$ ， $v$ 可能是负数

操作 2  $x\ v$  : 不包括当前这一秒，查询过去多少秒内， $arr[x] \geq v$

$2 \leq n$ 、 $m \leq 10^5$

$-10^9 \leq \text{数组中的值} \leq +10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3863>

时间分块，比较常见的分块题型

维护每个时间点，对于所有数字的加成值，利用时间分块进行维护

修改事件、查询事件，随着位置从左到右依次推进，利用时间分块快速修改、查询

# 分块的几道好题、树上分块

题目3

磁力块

磁块有五个属性值,  $x$ 、 $y$ 、 $m$ 、 $p$ 、 $range$ , 表示在 $(x, y)$ 位置、质量为 $m$ 、磁力为 $p$ 、吸引半径 $range$

磁块A可以把磁块B吸到磁块A的位置, 需要满足如下的条件

A与B的距离不大于A的吸引半径, 并且B的质量不大于A的磁力

你有一个初始磁块, 给定初始磁块的4个属性值(不给质量, 因为没用), 你永远在初始磁块的位置

接下来给定 $n$ 个磁块各自的5个属性值, 你可以用初始磁块, 吸过来其中的磁块

吸过来的磁块可以被你随意使用, 返回你最多能吸过来多少磁块

$1 \leq n \leq 3 * 10^5$   $-10^9 \leq x, y \leq +10^9$   $1 \leq m, p, range \leq 10^9$

测试链接: <https://www.luogu.com.cn/problem/P10590>

测试链接: <https://codeforces.com/problemset/problem/198/E>

计算真实距离需要开根号, 为了防止出现精度问题, 距离用平方和, 吸引半径用平方

分块结合多种排序 + bfs利用块内有序和块的边界进行剪枝

# 分块的几道好题、树上分块

题目4

区间逆序对

给定一个长度为 $n$ 的排列，接下来有 $m$ 条操作，每条操作格式如下

操作  $l\ r$  : 打印 $arr[l..r]$ 范围上的逆序对数量

$1 \leq n, m \leq 10^5$

题目要求强制在线，具体规则可以打开测试链接查看

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5046>

散对散、散对整、整对整的讨论，比较常见的分块题型，难度较高

本题需要优化读入 + 调整块长

正式比赛不卡常

# 分块的几道好题、树上分块

## 树上分块的几种方式

### 1, 重链序列分块

重链剖分之后, 对节点dfn序号进行分块, 适用于子树和路径的修改/查询等问题

通过题目5进行讲述

### 2, 随机撒点

树上随机选 $O(\sqrt{n})$ 个关键点, 非关键点和其最近的关键点、两个相邻的关键点, 期望距离都为 $O(\sqrt{n})$

非关键点和其最近的关键点之间, 视为散块, 散块信息的获得/维护, 可以暴力

两个相邻的关键点之间, 视为整块, 整块信息的获得/维护, 需要高效, 常用预处理结构、高级数据结构

任何操作又被分解成, 类似 散块 + 整块 的经典套路, 适用于多类树上问题

通过题目6进行讲述



# 分块的几道好题、树上分块

题目5

树上分块模版题，重链序列分块

一共有 $n$ 个节点，每个节点有点权，给定 $n-1$ 条边，所有节点连成一棵树

接下来有 $m$ 条操作，每条操作都要打印两个答案，描述如下

操作  $k\ x1\ y1\ x2\ y2\ ..$  (一共 $k$ 个点对)

每个点对 $(x, y)$ ，在树上都有从 $x$ 到 $y$ 的路径，那么 $k$ 个点对就有 $k$ 条路径

先打印 $k$ 条路径上不同点权的数量，再打印点权集合中没有出现的最小非负数(mex)

$1 \leq n$ 、点对总数  $\leq 10^5$  点权  $\leq 30000$

题目要求强制在线，具体规则可以打开测试链接查看

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3603>

位图统计点权的出现状况

重链剖分之后，子树内、一条重链内，节点dfn序号是连续的，根据这个序号进行分块

单次查询时间复杂度 $O(\log n * \sqrt{n})$

# 分块的几道好题、树上分块

## 题目6

树上分块模版题，随机撒点

一共有 $n$ 个节点，每个节点有点权，给定 $n-1$ 条边，所有节点连成一棵树

接下来有 $m$ 条操作，每条操作都要打印两个答案，描述如下

操作  $k\ x1\ y1\ x2\ y2\ ..$  (一共 $k$ 个点对)

每个点对 $(x, y)$ ，在树上都有从 $x$ 到 $y$ 的路径，那么 $k$ 个点对就有 $k$ 条路径

先打印 $k$ 条路径上不同点权的数量，再打印点权集合中没有出现的最小非负数(mex)

$1 \leq n$ 、点对总数  $\leq 10^5$  点权  $\leq 30000$

题目要求强制在线，具体规则可以打开测试链接查看

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3603>

## 位图统计点权的出现状况

随机撒点之后，利用非关键点和其最近的关键点、两个相邻的关键点，期望距离都为 $O(\sqrt{n})$

单次查询的时间复杂度 $O(\sqrt{n})$ ，实际常数时间较大

# 分块的几道好题、树上分块

## 树上分块的学习提醒

- 1, 树分块的方式还有, 节点个数分块、节点深度分块、顶簇分块(Top Cluster)
- 2, 有兴趣的同学可以自行了解, 但是不建议投入过多精力
- 3, 分块的优势就是相对好学、好想、好写, 所以相对轻量的投入, 才是分块的价值所在
- 4, 如果分块的解法容易理解, 学了也就学了, 如果不容易理解, 投入精力时, 请慎重考虑
- 5, 树上分块能解的题目, 往往都有复杂度更优的解法, 比如树链剖分、虚树、线段树合并、LCT等
- 6, 正解为树上分块的题非常少, 同等付出的情况下, 直接研究最优解收益更大, 解决问题的域也更宽

投入小还行, 投入多了常听人抱怨, 树上分块, 没什么卵用

## 注意

虚树、线段树合并、LCT, 目前都还没讲, 后续课程都会安排

# 分块的几道好题、树上分块

题目7

王室联邦

一共有 $n$ 个城市，编号 $1 \sim n$ ，给定 $n-1$ 条边，所有城市连成一棵树

给定数值 $b$ ，请把树划分成若干个省，划分要求如下

每个省至少要有 $b$ 个城市，最多有 $3 * b$ 个城市，每个省必须有一个省会

省会可在省内也可在省外，一个城市可以是多个省的省会

一个省里，任何城市到达省会的路径上，除了省会之外的其他城市，必须都在省内

根据要求完成一种有效划分即可，先打印划分了多少个省，假设数量为 $k$

然后打印 $n$ 个数字，范围 $[1, k]$ ，表示每个城市被划分给了哪个省

最后打印 $k$ 个数字，表示每个省会的城市编号

$1 \leq n$ 、 $b \leq 10^3$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2325>

节点个数分块

# 分块的几道好题、树上分块

题目8

区间父变小

一棵大小为 $n$ 树，节点1是树头，给定 $fa[2..n]$ 表示父亲节点编号

对于每个 $i > 1$ ，都有 $fa[i] < i$ ，下来有 $m$ 条操作，操作类型如下

操作 1  $x\ y\ z$  :  $[x..y]$ 范围上任何一点 $i$ ， $fa[i] = \max(1, fa[i] - z)$

操作 2  $x\ y$  : 查询点 $x$ 和点 $y$ 的最低公共祖先

$2 \leq n$ 、 $m \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1491H>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/1491/H>

序列分块 结合 树上分块

根据 $fa$ 向上 + 根据 $out$ 快速向上 + 整块消减次数  $>$  块长，剪枝的设计