

树链剖分-上

前置知识

讲解110 - 线段树

讲解118 - 树上倍增和LCA、dfs递归函数改迭代的技巧

讲解123 - 换根dp 本节课题目7需要

本节课讲述

重链剖分的原理讲解和模版代码 题目1、题目2、题目3

重链剖分结合线段树的相关题目 题目4、题目5、题目6、题目7

下节课讲述

树链剖分之边权转点权的处理技巧

树链剖分之长链剖分及其相关题目

树链剖分-上

树链剖分中的重链剖分, Heavy Light Decomposition, 简称HLD

1, 树上每个节点都有如下信息:

fa // 父节点

dep // 深度

siz // 子树大小

son // 重儿子, 子树规模最大的儿子, 如果多个子树都是最大规模, 任选一个儿子成为重儿子

top // 所在重链的头节点

dfn // 递归序的编号, 也就是dfn序号

seg // $seg[i] = j$, 代表dfn序号为i的节点, 原始节点编号为j

2, dfs1的过程, 设置fa、dep、siz、son, 这个过程不分配dfn序号

3, dfs2的过程, 设置top、dfn、seg 先遍历重儿子, 再遍历剩下的轻儿子, 依次分配dfn序号

父节点和重儿子属于同一条重链, 拥有同样的top; 轻儿子新开一条重链, 轻儿子作为新重链的头

树链剖分-上

4, 完成dfs1、dfs2之后, 整棵树会被若干条重链分解掉

同一条重链的节点, dfn序号是连续的

同一个子树的节点, dfn序号是连续的

利用这两个性质, 树链剖分能够与其他结构结合, 最常见的情况是和线段树结合

5, 修改/查询 任意子树上的信息

就是线段树的单次操作

6, 修改/查询 两点间的路径信息

不断向上找到多条重链, 每条重链的信息利用线段树查询, 所有重链信息进行拼接整合

7, 子树操作复杂度 $O(\log n)$, 路径操作复杂度 $O(\log n \text{ 的平方})$, 证明类似启发式合并

注意: 启发式合并的内容, 后续课程会安排讲述

树链剖分-上

题目1

重链剖分模版题

一共有 n 个节点，给定 $n-1$ 条边，节点连成一棵树

给定每个节点的初始权值，给定树的头节点编号 $root$

一共有 m 条操作，每种操作是如下4种类型中的一种

操作 1 $x\ y\ v$: x 到 y 的路径上，每个节点值增加 v

操作 2 $x\ y$: x 到 y 的路径上，打印所有节点值的累加和

操作 3 $x\ v$: x 为头的子树上，每个节点值增加 v

操作 4 x : x 为头的子树上，打印所有节点值的累加和

查询操作时，打印(查询结果 $\% MOD$)，题目会给定 MOD 值

$1 \leq n$ 、 $m \leq 10^5$ $1 \leq MOD \leq 2^{30}$ 输入的值都为 int 类型

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3384>

树链剖分-上

题目2

重链剖分解决LCA查询

一共有n个节点，给定n-1条边，节点连成一棵树，给定头节点编号root

一共有m条查询，每条查询给定a和b，打印a和b的最低公共祖先

请用树链剖分的方式实现

$1 \leq n, m \leq 5 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3379>

树链剖分-上

题目3

路径最大值与累加和

一共有 n 个节点，给定 $n-1$ 条边，节点连成一棵树，每个节点给定权值

一共有 m 条操作，每种操作是如下3种类型中的一种

操作 CHANGE $x\ y$: x 的权值修改为 y

操作 QMAX $x\ y$: x 到 y 的路径上，打印节点值的最大值

操作 QSUM $x\ y$: x 到 y 的路径上，打印节点值的累加和

$1 \leq n \leq 3 * 10^4$

$0 \leq m \leq 2 * 10^5$

$-30000 \leq \text{节点权值} \leq +30000$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2590>

树链剖分-上

题目4

软件包管理器

一共有 n 个软件，编号 $0 \sim n-1$ ， 0 号软件不依赖任何软件，其他每个软件都仅依赖一个软件

依赖关系由数组形式给出，题目保证不会出现循环依赖

一开始所有软件都是没有安装的，如果 a 依赖 b ，那么安装 a 需要安装 b ，同时卸载 b 需要卸载 a

一共有 m 条操作，每种操作是如下2种类型中的一种

操作 `install x` : 安装 x ，如果 x 已经安装打印 0 ，否则打印有多少个软件的状态需要改变

操作 `uninstall x` : 卸载 x ，如果 x 没有安装打印 0 ，否则打印有多少个软件的状态需要改变

$1 \leq n, m \leq 10^6$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2146>

重链剖分结合线段树 + 利用整棵线段树的信息变化来得到答案

树链剖分-上

题目5

染色

一共有 n 个节点，给定 $n-1$ 条边，节点连成一棵树，每个节点给定初始颜色值

连续相同颜色被认为是一段，变化了就认为是另一段

比如，112221，有三个颜色段，分别为 11、222、1

一共有 m 条操作，每种操作是如下2种类型中的一种

操作 $C\ x\ y\ z$: x 到 y 的路径上，每个节点的颜色都改为 z

操作 $Q\ x\ y$: x 到 y 的路径上，打印有几个颜色段

$1 \leq n, m \leq 10^5$

$1 \leq \text{任何时候的颜色值} \leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2486>

重链剖分结合线段树 + 线段树的信息设计 + 多条重链信息的拼接

树链剖分-上

题目6

旅游

一共有 n 个城市，给定 $n-1$ 条边，城市连成一棵树，每个城市给定初始的宝石价格

一共有 m 条操作，操作类型如下

操作 $x\ y\ v$: 城市 x 到城市 y 的最短路途中，你可以选择一城买入宝石

继续行进的过程中，再选一城卖出宝石，以此获得利润

打印你能获得的最大利润，如果为负数，打印0

当你结束旅途后，沿途所有城市的宝石价格增加 v

$1 \leq n, m \leq 5 * 10^4$

$0 \leq \text{任何时候的宝石价格} \leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3976>

重链剖分结合线段树 + 线段树的信息设计 + 更复杂的重链信息拼接逻辑

树链剖分-上

题目7

遥远的国度

一共有 n 个节点，给定 $n-1$ 条边，节点连成一棵树，给定树的初始头节点，给定每个点的点权

一共有 m 条操作，每种操作是如下3种类型中的一种

操作 1 x : 树的头节点变成 x ，整棵树需要重新组织

操作 2 $x\ y\ v$: x 到 y 的路径上，所有节点的值改成 v

操作 3 x : 在当前树的状态下，打印 u 的子树中的最小值

$1 \leq n, m \leq 10^5$

任何时候节点值一定是正数

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3979>

重链剖分结合线段树 + 换根逻辑的设计