

# 树套树的原理、优化、相关题目

## 前置知识

讲解108 - 树状数组

讲解110 - 线段树

讲解111 - 权值线段树、线段树的离散化

讲解114 - 开点线段树

讲解150 - 替罪羊树

讲解047、讲解079、讲解118、讲解122 - 数组差分、dfn序、树上倍增和LCA、树上差分 题目7需要

## 本节课讲述

线段树套线段树 题目1、题目2

线段树套平衡树 题目3

树状数组套权值线段树 题目4、题目5、题目6、题目7

# 树套树的原理、优化、相关题目

题目1

引入题

线段树套线段树

人有三种属性，身高、活泼度、缘分值

身高为int类型，活泼度和缘分值为小数点后最多1位的double类型

实现一种结构，提供如下两种类型的操作

操作 I a b c : 加入一个人，身高为a，活泼度为b，缘分值为c

操作 Q a b c d : 查询身高范围[a,b]，活泼度范围[c,d]，所有人中的缘分最大值

注意操作Q，如果a > b需要交换，如果c > d需要交换

100 <= 身高 <= 200

0.0 <= 活泼度、缘分值 <= 100.0

测试链接：<https://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1823>

# 树套树的原理、优化、相关题目

## 树套树原理

外部结构 嵌套 内部结构，结构可以是：树状数组、线段树、平衡树、分块结构(还没讲，后续会安排讲述)

外部结构组织范围，外部结构组织的每一个范围，其中的信息，都对应着一个内部结构来维护

单次操作的时间复杂度 = 外部结构单次操作复杂度 \* 内部结构单次操作复杂度

树套树的类型很多，具体问题具体分析，去确定外部如何拆分范围，然后确定内部如何维护信息

树套树的思维难度相对不大，但是代码量比较大，使用的空间也比较多

优化空间的常用手段：值域离散化、开点线段树等等

# 树套树的原理、优化、相关题目

题目2

k大数查询

初始时有n个空集合，编号1~n，实现如下两种类型的操作，操作一共发生m次

操作 1 l r v: 数字v放入编号范围[l,r]的每一个集合中

操作 2 l r k: 编号范围[l,r]的所有集合，如果生成不去重的并集，返回第k大的数字

$1 \leq n, m \leq 5 * 10^4$

$-n \leq v \leq +n$

$1 \leq k < 2^{63}$ ，题目保证第k大的数字一定存在

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3332>

值域离散化 + 线段树套开点线段树

# 树套树的原理、优化、相关题目

题目3

线段树套平衡树

给定一个长度为 $n$ 的数组 $arr$ ，下标 $1 \sim n$ ，每条操作都是如下5种类型中的一种，一共进行 $m$ 次操作

操作 1  $x\ y\ z$  : 查询数字 $z$ 在 $arr[x..y]$ 中的排名

操作 2  $x\ y\ z$  : 查询 $arr[x..y]$ 中排第 $z$ 名的数字

操作 3  $x\ y$  :  $arr$ 中 $x$ 位置的数字改成 $y$

操作 4  $x\ y\ z$  : 查询数字 $z$ 在 $arr[x..y]$ 中的前驱，不存在返回-2147483647

操作 5  $x\ y\ z$  : 查询数字 $z$ 在 $arr[x..y]$ 中的后继，不存在返回+2147483647

$1 \leq n, m \leq 5 * 10^4$  数组中的值永远在 $[0, 10^8]$ 范围内

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3380>

线段树套平衡树实现

操作2的时间复杂度为 $O(\log n * \log m * \log v)$ ，其余操作复杂度为两层 $\log$

# 树套树的原理、优化、相关题目

## 题目4

### 树状数组套线段树

给定一个长度为 $n$ 的数组 $arr$ ，下标 $1 \sim n$ ，每条操作都是如下5种类型中的一种，一共进行 $m$ 次操作

操作 1  $x\ y\ z$  : 查询数字 $z$ 在 $arr[x..y]$ 中的排名

操作 2  $x\ y\ z$  : 查询 $arr[x..y]$ 中排第 $z$ 名的数字

操作 3  $x\ y$  :  $arr$ 中 $x$ 位置的数字改成 $y$

操作 4  $x\ y\ z$  : 查询数字 $z$ 在 $arr[x..y]$ 中的前驱，不存在返回 $-2147483647$

操作 5  $x\ y\ z$  : 查询数字 $z$ 在 $arr[x..y]$ 中的后继，不存在返回 $+2147483647$

$1 \leq n, m \leq 5 * 10^4$  数组中的值永远在 $[0, 10^8]$ 范围内

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3380>

就是题目3，树状数组套线段树实现

值域离散化 + 树状数组套开点线段树 + 利用多棵线段树做统计，所有操作复杂度为两层 $\log$

# 树套树的原理、优化、相关题目

题目5

动态排名

给定一个长度为 $n$ 的数组 $arr$ ，下标 $1 \sim n$ ，每条操作都是如下2种类型中的一种，一共进行 $m$ 次操作

操作  $Q\ x\ y\ z$  : 查询 $arr[x..y]$ 中排第 $z$ 名的数字

操作  $C\ x\ y$  :  $arr$ 中 $x$ 位置的数字改成 $y$

$1 \leq n, m \leq 10^5$

数组中的值永远在 $[0, 10^9]$ 范围内

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2617>

题目3 & 题目4的阉割版，数据范围更大了而已，树状数组套线段树实现



# 树套树的原理、优化、相关题目

题目6

排队

给定一个长度为 $n$ 的数组 $arr$ ，下标 $1 \sim n$

如果有 $i < j$ ，并且 $arr[i] > arr[j]$ ，那么 $(i, j)$ 就叫做一个逆序对

首先打印原始 $arr$ 中有多少逆序对，然后进行如下类型的操作，一共发生 $m$ 次

操作  $a\ b$  : 交换 $arr$ 中 $a$ 位置的数和 $b$ 位置的数，打印数组中逆序对的数量

$1 \leq n \leq 2 * 10^4$

$1 \leq m \leq 2 * 10^3$

$1 \leq arr[i] \leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1975>

值域离散化 + 树状数组套开点线段树 + 利用多棵线段树做统计



# 树套树的原理、优化、相关题目

题目7

网络管理

一共有 $n$ 个点，编号 $1 \sim n$ ，每个点给定点权，给定 $n-1$ 条边，所有点连成一棵树

实现如下类型的操作，操作一共发生 $m$ 次

操作  $0 \ x \ y$  :  $x$ 号点的点权变成 $y$

操作  $k \ x \ y$  : 保证 $k > 0$ ，点 $x$ 到点 $y$ 的路径上，打印第 $k$ 大的值

如果路径上不够 $k$ 个点，打印"invalid request!"

$1 \leq n$ 、 $m \leq 8 * 10^4$

点权  $\leq 10^8$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4175>

值域离散化 + dfn序 + 一维差分 + 树上倍增求LCA + 树状数组套开点线段树 + 树上差分