

笛卡尔树、Treap树

前置知识

讲解044-前缀树 整个专题的要求

有序表专题安排

专题1: AVL树, 讲解148

专题2: 跳表, 讲解149

专题3: 替罪羊树, 讲解150

专题4: 笛卡尔树、Treap树, 讲解151, 本节

专题5: FHQ Treap树, 讲解152

专题6: Splay树, 讲解153

大厂笔试、算法竞赛掌握以上有序表结构足够, 其他有序表结构不再讲述, 面试遇到只是聊, 可以自行学习
算法竞赛的同学, 有序表必带模版: 替罪羊树、Treap树、FHQ Treap树、Splay树
Splay树是实现Link-Cut-Tree的关键, 这个结构的讲述, 会在【挺难】阶段的课程里安排

笛卡尔树、Treap树

本节课讲述

笛卡尔树，题目1

Treap树，题目2

笛卡尔树相关题目，题目3、题目4、题目5、题目6

注意，本节课讲述Treap树 + 旋转法，**下节课讲述Treap + FHQ，这才是Treap的重点**

笛卡尔树、Treap树需要的前置知识

讲解025 - 堆结构

讲解052 - 单调栈

讲解148 - AVL树，理解什么是搜索二叉树、左旋、右旋

笛卡尔树相关题目需要的前置知识

讲解078、讲解079 - 树型dp，本节课题目4、题目5需要

讲解099 - 逆元和除法同余，其中阶乘余数表、阶乘逆元表、连续数字逆元表，本节课题目5、题目6需要

笛卡尔树、Treap树

笛卡尔树

一般默认key没有相同值，key按照搜索二叉树组织，value按照小根堆或者大根堆组织

不是狭义的小根堆或者大根堆

整棵子树的最小值或最大值，一定是子树的头，但不要求子树一定为完全二叉树，这种广义的堆

笛卡尔树建树过程，时间复杂度 $O(n)$

- 1, 当前插入节点假设为x，依据x的value值，在单调栈中依次弹出节点
- 2, 最晚弹出的节点y及其整棵子树，成为x的左树
- 3, 假设x在单调栈中压着z节点，那么x就成为z的右孩子
- 4, 节点x根据value值加入单调栈

课上重点图解笛卡尔树的建树过程

本节课题目3、题目4、题目5、题目6，都是笛卡尔树相关题目

笛卡尔树、Treap树

题目1

笛卡尔树模版

给定一个长度为 n 的数组 arr ，下标从1开始

构建一棵二叉树，下标按照搜索二叉树组织，值按照小根堆组织

建树的过程要求时间复杂度 $O(n)$

建树之后，为了验证

打印， $i * (left[i] + 1)$ ，所有信息异或起来的值

打印， $i * (right[i] + 1)$ ，所有信息异或起来的值

$1 \leq n \leq 10^7$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5854>

笛卡尔树、Treap树

Treap树

Treap树就是笛卡尔树，key按搜索二叉树组织，priority代表节点的优先级，是随机的，按堆组织

插入(key, priority)这个节点时，先根据key在搜索二叉树上移动，确定插入的位置
然后根据priority的大小，决定节点是否向上移动，向上移动通过左旋、右旋来实现

删除(key, priority)这个节点时，先在搜索二叉树上，找到key的节点所在的位置
1, 无左无右，直接删掉。2, 有左无右，左孩子接替其位置。3, 无左有右，右孩子接替其位置
4, 如果节点有左有右，那么优先级最大的孩子接替其位置，可以利用左旋、右旋实现
此时节点被旋转到了或往左、或往右的子树里，继续在子树上删掉该节点

随机优先级的方式，保证了Treap树的平衡性，增删改查时间复杂度 $O(\log n)$ ，非常类似跳表

课上重点图解Treap树增加、删除、查询的过程，下节课是FHQ-Treap，这才是Treap的重点内容

笛卡尔树、Treap树

题目2

Treap树的实现

实现一种结构，支持如下操作，要求单次调用的时间复杂度 $O(\log n)$

- 1, 增加 x ，重复加入算多个词频
- 2, 删除 x ，如果有多个，只删掉一个
- 3, 查询 x 的排名， x 的排名为，比 x 小的数的个数+1
- 4, 查询数据中排名为 x 的数
- 5, 查询 x 的前驱， x 的前驱为，小于 x 的数中最大的数，不存在返回整数最小值
- 6, 查询 x 的后继， x 的后继为，大于 x 的数中最小的数，不存在返回整数最大值

所有操作的次数 $\leq 10^5$

$-10^7 \leq x \leq +10^7$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3369>

笛卡尔树、Treap树

题目3

树的序

给定一个长度为 n 的数组 arr ，表示依次插入数字，会形成一棵搜索二叉树

也许同样的一个序列，依次插入数字后，也能形成同样形态的搜索二叉树

请返回字典序尽量小的结果

$1 \leq n \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1377>

笛卡尔树、Treap树

题目4

序列计数

有一个概念叫，最左端最大值位置，表示一段范围上

如果最大值有一个，那么最大值所在的位置，就是最左端最大值位置

如果最大值有多个，最左的那个所在的位置，就是最左端最大值位置

给定一个长度为 n 的数组 A ，那么必然存在等长的数组 B ，当选择同样的子范围时

两者在这段范围上，最左端最大值位置是相同的，不仅存在这样的数组 B ，而且数量无限多

现在要求，数组 B 中的每个值都在 $[1, m]$ 范围，返回有多少个这样的数组，答案对 1000000007 取模

$2 \leq n, m \leq 2 * 10^5$ $1 \leq A[i] \leq m$ $n * m \leq 10^6$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1748E>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/1748/E>

1, 数组 A 上求的笛卡尔树，得到的下标组织就是最左端最大值的划分，填入值时，左 \leq 头-1，右 \leq 头

2, 转化为树型dp，先得到头节点严格等于 j 的方法数，再去生成头节点 $\leq j$ 的方法数

笛卡尔树、Treap树

题目5

表格填数

给定一个长度为 n 的数组 arr , $arr[i]$ 表示 i 位置上方的正方形格子数量

那么从1位置到 n 位置, 每个位置就是一个直方图, 所有的直方图紧靠在一起

在这片区域中, 你要放入 k 个相同数字, 不能有任何两个数字在同一行或者同一列

注意在这片区域中, 如果某一行中间断开了, 使得两个数字无法在这一行连通, 则不算违规

返回填入数字的方法数, 答案对 1000000007 取模

$1 \leq n, k \leq 500$ $0 \leq arr[i] \leq 10^6$

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/P6453>

1, $k * k$ 的区域, 填 k 个数字行列不冲突方法数问题, $k!$

2, $n * m$ 的区域, 填 k 个数字行列不冲突方法数问题, $c(n, k) * c(m, k) * k!$

3, 多边形区域利用笛卡尔树做划分的处理, 转化成矩形区域填数的问题

4, 树上dp的转移, 子树填入数字的个数会占用列的名额, 剩余数字在父区域上填入的方法数转化为2的结论

笛卡尔树、Treap树

题目6

砖块消除

给定一个长度为 n 的数组 arr , $arr[i]$ 为 i 号砖块的重量

选择一个没有消除的砖块进行消除, 收益为被消除砖块联通区域的重量之和, 比如 $arr = \{3, 5, 2, 1\}$

如果先消除5, 那么获得 $3+5+2+1$ 的收益, $arr = \{3, X, 2, 1\}$

如果再消除1, 那么获得 $2+1$ 的收益, $arr = \{3, X, 2, X\}$

如果再消除2, 那么获得2的收益, $arr = \{3, X, X, X\}$

如果再消除3, 那么获得3的收益, $arr = \{X, X, X, X\}$

一共有 $n!$ 种消除方案, 返回所有消除方案的收益总和, 答案对 1000000007 取模

$1 \leq n \leq 10^5$ $1 \leq arr[i] \leq 10^9$

测试链接 : https://www.luogu.com.cn/problem/AT_agc028_b

测试链接 : https://atcoder.jp/contests/agc028/tasks/agc028_b

消除方案的收益总和 \rightarrow i 位置有多少祖先节点的期望 \rightarrow 利用笛卡尔树分析, x 位置是 i 位置的祖先的概率