

左偏树的原理、代码、相关题目

前置知识

讲解025 - 堆结构

讲解052 - 单调栈, 本节课题目5需要

讲解056、讲解057 - 并查集原理 & 给集合打标签的技巧

本节课讲述

左偏树原理、合并、删除堆顶, 题目1

左偏树删除任意编号的节点, 题目2

左偏树的相关题目, 题目3、题目4、题目5

下节课讲述

左偏树结合懒更新操作、可持久化左偏树、k短路问题

左偏树的原理、代码、相关题目

左偏树是一种可并堆结构，支持堆的合并，两个堆的合并过程，时间复杂度 $O(\log n)$

可并堆结构还有，配对堆、斜堆、二项堆、斐波那契堆等等

左偏树因为方便进行可持久化，所以只学习左偏树即可，下节课会讲述可持久化左偏树

左偏树表示的堆结构，不是完全二叉树，而是广义的堆结构，平衡性由dist值来维护

节点的dist值表示，离开该节点后，至少经过几个节点能到达空， $dist[0] = -1$

合并后如果发现，左儿子dist值 $<$ 右儿子dist值，就交换左右树

左偏树的每个节点满足，左儿子dist值 \geq 右儿子dist值，节点dist值 = 右儿子dist值 + 1

课上重点图解，左偏树合并的过程，重点是理解合并总发生在右树上，以及交换左右树的过程

左偏树的平衡性，只是方便了合并的过程，树上依然可能出现很长的链，所以查询快需要结合并查集

左偏树的原理、代码、相关题目

左偏树结构，合并操作非常方便，但是树上依然可能出现很长的链
任何节点找堆顶的过程，不能依赖左偏树的结构，所以建立并查集

利用并查集压缩路径的特点，任何节点找堆顶的过程就得到了加速
需要保证，并查集最上方的代表节点 = 左偏树的头也就是堆顶

左偏树删除堆顶节点

1, 堆顶节点的左右树合并，形成新树

2, 堆顶节点的left、right、dist信息清空

3, 堆顶节点的father指向新树的头，很重要！课上会重点解释

课上重点图解，左偏树删除堆顶节点的过程

左偏树的原理、代码、相关题目

题目1

左偏树模版

依次给定 n 个非负数字，表示有 n 个小根堆，每个堆只有一个数

实现如下两种操作，操作一共调用 m 次

- 1 $x\ y$: 第 x 个数字所在的堆和第 y 个数字所在的堆合并
如果两个数字已经在同一个堆或者某个数字已经删除，不进行合并
- 2 x : 打印第 x 个数字所在堆的最小值，并且在堆里删掉这个最小值
如果第 x 个数字已经被删除，也就是找不到所在的堆，打印-1
若有多多个最小值，优先删除编号小的

$1 \leq n, m \leq 10^5$

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/P3377>

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/P2713>

左偏树的原理、代码、相关题目

左偏树删除任意编号的节点

- 1, 建立树上父节点信息up数组, 树上真实父节点信息up != 并查集的路径信息father
- 2, 假设删除节点为i, 整棵树的头假设为h, 节点i的左右树合并, 形成的树假设为s
- 3, 假设节点i的树上父节点为f, 去掉节点i, 节点f和节点s直接连在一起
- 4, 从s节点往上, 更新节点的dist值, 如果发现, 左儿子dist < 右儿子dist, 就交换左右树
- 5, 需要保证每个节点的up、left、right、dist、father信息更新正确

核心在于第4点, 保证左偏树的性质, 修改节点总数为 $O(\log n)$

课上重点图解, 删除任意节点的过程, 重点解释第4点

左偏树的原理、代码、相关题目

题目2

断罪者，删除任意编号节点

给定 t, w, k ，表示一共有 t 个人，死亡方式都为 w ，地狱阈值都为 k ， w 和 k 含义稍后解释

每个人都给定 n 和 m ，表示这人一生有 n 件错事，有 m 次领悟

这个人的 n 件错事，给定对应的 n 个罪恶值，然后给定 m 次领悟，领悟类型如下

2 a : 第 a 件错事的罪恶值变成0

3 $a\ b$: 第 a 件错事所在的集合中，最大罪恶值的错事，罪恶值减少 b

如果减少后罪恶值变成负数，认为这件错事的罪恶值变为0

如果集合中，两件错事都是最大的罪恶值，取编号较小的错事

4 $a\ b$: 第 a 件错事所在的集合与第 b 件错事所在的集合合并

一个错事集合的罪恶值 = 这个集合中的最大罪恶值，只取一个

一个人的罪恶值 = 这个人所有错事集合的罪恶值累加起来

(接下页)

左偏树的原理、代码、相关题目

题目2

(接上页)

最后根据死亡方式 w ，对每个人的罪恶值做最后调整，然后打印这个人的下场

如果 $w==1$ ，不调整

如果 $w==2$ ，人的罪恶值 $-=$ 错事集合的罪恶值中的最大值

如果 $w==3$ ，人的罪恶值 $+=$ 错事集合的罪恶值中的最大值

如果一个人的罪恶值 $== 0$ ，打印"Gensokyo 0"

如果一个人的罪恶值 $> k$ ，打印"He'll "，然后打印罪恶值

如果一个人的罪恶值 $\leq k$ ，打印"Heaven "，然后打印罪恶值

一共有 t 个人，所以最终会有 t 次打印

$1 \leq t \leq 30$

$1 \leq n \leq 2 * 10^6$

错事罪恶值可能很大，输入保证每个人的罪恶值用long类型不溢出

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4971>

左偏树的原理、代码、相关题目

题目3

猴王

给定n只猴子的战斗力，一开始每个猴子都是独立的阵营

一共有m次冲突，每次冲突给定两只猴子的编号x、y

如果x和y在同一阵营，这次冲突停止，打印-1

如果x和y在不同阵营，x所在阵营的最强猴子会和y所在阵营的最强猴子进行打斗

打斗的结果是，两个各自阵营的最强猴子，战斗力都减半，向下取整，其他猴子战力不变

然后两个阵营合并，打印合并后的阵营最大战斗力

题目可能有多组数据，需要监控输入流直到结束

$1 \leq n, m \leq 10^5$

$0 \leq \text{猴子战斗力} \leq 32768$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1456>

左偏树的原理、代码、相关题目

题目4

派遣

一共有 n 个忍者，每个忍者有上级编号、工资、能力，三个属性

输入保证，任何忍者的上级编号 $<$ 这名忍者的编号，1号忍者是整棵忍者树的头

你一共有 m 的预算，可以在忍者树上随意选一棵子树，然后在这棵子树上挑选忍者

你选择某棵子树之后，不一定要选子树头的忍者，只要不超过 m 的预算，可以随意选择子树上的忍者

最终收益 = 雇佣人数 * 子树头忍者的能力，返回能取得的最大收益是多少

$1 \leq n \leq 10^5$

$1 \leq m \leq 10^9$

$1 \leq \text{每个忍者工资} \leq m$

$1 \leq \text{每个忍者领导力} \leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1552>

左偏树 + 并查集的集合增加信息 + 贪心

左偏树的原理、代码、相关题目

题目5

数字序列

给定一个长度为 n 的数组 A ，要求构造出一个长度为 n 的递增数组 B

希望 $|A[1] - B[1]| + |A[2] - B[2]| + \dots + |A[n] - B[n]|$ 最小

打印这个最小值，然后打印数组 B ，如果有多个方案，只打印其中的一个

$1 \leq n \leq 10^6$

$0 \leq A[i] \leq 2^{32} - 1$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4331>

递增构造转化为不降序构造 + 贪心 + 上中位数单调栈 + 左偏树维护上中位数