

# 线性基-下

## 前置知识

讲解110 - 线段树原理和代码详解, 本节课题目2需要

讲解118 - 树上倍增和LCA-上 + dfs递归版改成迭代版, 本节课题目3、题目4需要

讲解136 - 异或空间线性基-上

视频分为上下两期

上期讲述: 异或空间线性基原理, 普通消元 & 高斯消元生成线性基的过程图解, 练习常见题目

本期讲述: 向量空间线性基、异或空间线性基的合并、异或空间线性基和其他内容结合的题目

# 线性基-下

## 题目1

### 装备购买

一共有 $n$ 个物品，每个物品都有 $m$ 个属性值

下面定义什么是不必要的物品：如果已经选择了 $k$ 个物品，此时又有一件当前物品  
如果给已经选择的物品分配一组相乘的系数，并把属性值相加，就能得到当前物品  
那么就说当前物品是不必要的，比如下面的例子

$a = \{ 4, 6, 2 \}$ ,  $b = \{ 2, 8, 4 \}$ ,  $c = \{ 6, 19, 9 \}$

$a * 0.5 + b * 2 = c$ ，那么 $c$ 物品是不必要的

每个物品都有价格，现在希望尽量多的购买物品，但不能出现不必要的物品

返回最多能买几件物品和最少的花费

$1 \leq n, m \leq 500$        $0 \leq \text{属性值} \leq 1000$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3265>

向量空间线性基也可以用高斯消元找到标准形式，过程和异或空间线性基类似，不再赘述

# 线性基-下

## 题目2

### P哥的桶

一共有 $n$ 个桶，排成一排，编号 $1 \sim n$ ，每个桶可以装下任意个数字

高效的实现如下两个操作

操作 1  $k \ v$  : 把数字 $v$ 放入 $k$ 号桶中

操作 2  $l \ r$  : 可以从 $l \dots r$ 号桶中随意拿数字，返回异或和最大的结果

$1 \leq n, m \leq 5 * 10^4$

$0 \leq v \leq 2^{31} - 1$

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/P4839>

异或空间线性基 + 线段树

# 线性基-下

题目3

幸运数字

一共有 $n$ 个点，编号 $1 \sim n$ ，由 $n-1$ 条边连成一棵树，每个点上有数字

一共有 $q$ 条查询，每次返回 $a$ 到 $b$ 的路径上，可以随意选择数字，能得到的最大异或和

$1 \leq n \leq 2 * 10^4$

$1 \leq q \leq 2 * 10^5$

$0 \leq \text{点上的数字} \leq 2^{60}$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3292>

异或空间线性基的替换 + 树上倍增 + 递归改迭代

# 线性基-下

## 题目4

### 路径最大异或和

一共有 $n$ 个点，编号 $1 \sim n$ ，由 $m$ 条无向边连接

每条边有权值，输入保证图是连通的，可能有环

找到1到 $n$ 的一条路径，路径可以重复经过某些点或边

当一条边在路径中出现了多次时，异或的时候也要算多次

希望找到一条从1到 $n$ 的路径，所有边权异或和尽量大，返回这个最大异或和

$1 \leq n \leq 50000$        $1 \leq m \leq 100000$        $0 \leq \text{边权} \leq 10^{18}$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4151>

异或空间线性基 + 图的分析 + 递归改迭代

本题严格来说属于基环树dp的范畴，但哪怕没有系统学过基环树dp，本题的解法也能理解

基环树dp会在【挺难】阶段的课程讲述