

Kruskal重构树的原理和相关题目

前置知识

讲解056 - 并查集

讲解061 - 最小生成树之Kruskal算法

讲解118 - 树上倍增和LCA、dfs函数从递归版改成迭代版

讲解064 - dijkstra算法，本节课题目4需要

讲解117 - 倍增算法和st表，本节课题目5需要

讲解110 - 线段树，本节课题目6需要

讲解157、讲解158 - 可持久化线段树，本节课题目7需要

本节课讲述

Kruskal重构树的过程、原理、模版题 题目1、题目2、题目3

Kruskal重构树和各种内容结合的题目 题目4、题目5、题目6、题目7

Kruskal重构树的原理和相关题目

Kruskal重构树的过程

- 1, 图中的每个点, 都是Kruskal重构树的底层叶节点, 初始时认为互不连通
- 2, 先考虑边权小的边, 后考虑边权大的边, 增加连通性的边就选择, 不增加连通性的边就舍弃
- 3, 一条边一旦被选择, 就变成Kruskal重构树的非叶节点, 并且作为头节点, 连接两个连通的部分
- 4, 考虑完所有的边, 过程停止, 原始图中有几个连通区域, 就有几棵Kruskal重构树
- 5, 每棵Kruskal重构树, 都进行树上dfs, 建立倍增表等信息

课上重点图解, 根据Kruskal重构树的模版题, 题目1, 展示重构的过程

Kruskal重构树的原理

先考虑边权小的边, 后考虑边权大的边, 所建立的最小生成树, 同时也是最小瓶颈树

Kruskal重构树, 节点越往上, 代表边权越大, 获得的联通性也越大

任何 (x, y) , 利用Kruskal重构树, 查询 x 和 y 的最低公共祖先, 代表 x 和 y 连通时, 边权的最小瓶颈

Kruskal重构树的原理和相关题目

Kruskal重构树的用处

- 1, Kruskal重构树建立好之后, 根据不同的树上问题, dfs建立不同的信息
- 2, 查询边权受限的情况下, 树上问题的答案, Kruskal重构树可以快速定位出不受限的连通区
- 3, 根据不受限的连通区, 利用dfs建立的信息, 得到树上问题的答案
- 4, 解决的问题不同, Kruskal重构树可能会和很多算法和数据结构结合

本节课安排的题目, 会清晰的展示这种结合的技巧, 题目4、题目5、题目6、题目7

Kruskal重构树的原理和相关题目

题目1

Kruskal重构树模版题

图里有 n 个点， m 条无向边，每条边给定边权，图里可能有若干个连通的部分

一共有 q 条查询，每条查询都是如下的格式

查询 $x\ y$: 点 x 和点 y 希望连通起来，其中的最大边权希望尽量小，打印这个值

如果怎样都无法联通，打印"impossible"

$1 \leq n \leq 10^5$

$1 \leq m \leq 3 * 10^5$

$1 \leq q \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2245>

Kruskal重构树的原理和相关题目

题目2

youyou的军训

图里有 n 个点， m 条无向边，每条边给定不同的边权，图里可能有若干个连通的部分

一共有 q 条操作，每条操作都是如下的三种类型中的一种

操作 1 x : 限制变量 $limit$ ，把 $limit$ 的值改成 x

操作 2 x : 点 x 不能走过任何边权小于 $limit$ 的边，打印此时 x 所在的连通区域大小

操作 3 x y : 第 x 条边的边权修改为 y ，题目保证修改之后，第 x 条边的边权排名不变

$1 \leq n, m, q \leq 4 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P9638>

Kruskal重构树 + 重构树上每个节点建立叶节点数量的信息

Kruskal重构树的原理和相关题目

题目3

边的最大编号的最小值

图里有 n 个点， m 条无向边，边的编号 $1 \sim m$ ，没有边权，所有点都连通

一共有 q 条查询，查询的格式如下

查询 $x\ y\ z$: 从两个点 x 和 y 出发，希望经过的点数量等于 z

每个点可以重复经过，但是重复经过只计算一次

经过边的最大编号，最小是多少

$3 \leq n, m, q \leq 10^5$

$3 \leq z \leq n$

测试链接：https://www.luogu.com.cn/problem/AT_agc002_d

测试链接：https://atcoder.jp/contests/agc002/tasks/agc002_d

Kruskal重构树 + 重构树上每个节点建立叶节点数量的信息 + 通过 z 个不同的点转化成二分答案

Kruskal重构树的原理和相关题目

题目4

归程

图里有 n 个点， m 条无向边，每条边给定长度 l 和海拔 a ，所有点都连通

一共有 q 条查询，查询格式如下

查询 $x\ y$: 海拔 $> y$ 的边，走过没有代价

海拔 $\leq y$ 的边，走过的代价为边的长度

从点 x 出发到达1号点，打印最小的代价

$1 \leq n \leq 2 * 10^5$

$1 \leq m, q \leq 4 * 10^5$

本题要求强制在线，具体规定请打开测试链接查看

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4768>

Kruskal重构树 + dijkstra算法

Kruskal重构树的原理和相关题目

题目5

加边直到连通

图里有 n 个点， m 条无向边，点的编号 $1 \sim n$ ，边的编号 $1 \sim m$ ，所有点都连通

一共有 q 条查询，每条查询格式如下

查询 $l\ r$: 至少要加完编号前多少的边，才能使得 $[l, r]$ 中的所有点连通

$1 \leq n \leq 10^5$

$1 \leq m, q \leq 2 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1706E>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/1706/E>

Kruskal重构树 + 多个节点的最低公共祖先 + 一维数组的区间最值的倍增表

Kruskal重构树的原理和相关题目

题目6

删边和查询

图里有 n 个点， m 条无向边，初始时点权都不同，图里可能有若干个连通的部分

一共有 q 条操作，每条操作是如下两种类型中的一种

操作 1 x : 点 x 所在的连通区域中，假设点 y 拥有最大的点权

打印 y 的点权，然后把 y 的点权修改为0

操作 2 x : 删掉第 x 条边

$1 \leq n \leq 2 * 10^5$ $1 \leq m \leq 3 * 10^5$ $1 \leq q \leq 5 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1416D>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/1416/D>

逆序处理删除操作，给边分配边权 + Kruskal重构树 + 线段树查询拥有最大值的节点dfn序号

Kruskal重构树的原理和相关题目

题目7

边权上限内第k大点权

图里有n个点，m条无向边，点有点权，边有边权，图里可能有若干个连通的部分

一共有q条查询，查询格式如下

查询 $u \times k$: 从点u开始，只能走过权值 $\leq x$ 的边

所有能到达的点中，打印第k大点权，如果不存在打印-1

$1 \leq n \leq 10^5$

$0 \leq m, q \leq 5 * 10^5$

$1 \leq \text{点权、边权} \leq 10^9$

本题要求强制在线，具体规定请打开测试链接查看

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P7834>

离散化 + Kruskal重构树 + 叶节点dfn序依次建立主席树 + 查询子树中第k大的点权