

树链剖分-下

前置知识

讲解110 - 线段树

讲解118 - 树上倍增和LCA、dfs递归函数改迭代的技巧

讲解161 - 树链剖分之重链剖分

上节课讲述

重链剖分的原理和相关题目

本节课讲述

边权转化成点权的处理技巧	题目1、 题目2、 题目3
--------------	---------------

长链剖分的原理和经典题目	题目4、 题目5
--------------	----------

长链剖分优化树上动态规划	题目6、 题目7
--------------	----------

树链剖分-下

边权转化为点权的处理技巧

- 1, 解决的问题：给定树上每条边的边权，修改/查询子树或者路径上，所有边的边权
- 2, 可以把每条边的边权下放给下方节点，变成下方节点的点权
- 3, 整棵树进行重链剖分
- 4, 修改/查询某条边的边权时，找到这条边更下方的节点，修改/查询该点的点权
- 5, 修改/查询子树上的所有边权时，忽略子树头节点的点权
- 6, 修改/查询路径上的所有边权时，忽略LCA的点权

课上重点图解

题目1、题目2、题目3，都是这一技巧的应用

边权转化为点权的技巧，理解难度并不大，核心还是重链剖分结合具体功能的线段树

树链剖分-下

题目1

边权转化为点权的模版题

一共有 n 个节点，给定 $n-1$ 条边，节点连成一棵树，初始时所有边的权值为0

一共有 m 条操作，每条操作是如下2种类型中的一种

操作 $P\ x\ y$: x 到 y 的路径上，每条边的权值增加1

操作 $Q\ x\ y$: x 和 y 保证是直接连接的，查询他们之间的边权

$1 \leq n, m \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3038>

树链剖分-下

题目2

国家集训队旅游

一共有 n 个节点，节点编号从0到 $n-1$ ，所有节点连成一棵树

给定 $n-1$ 条边，边的编号从1到 $n-1$ ，每条边给定初始边权

一共有 m 条操作，每条操作的类型是如下5种类型中的一种

操作 $C\ x\ y$: 第 x 条边的边权改成 y

操作 $N\ x\ y$: x 号点到 y 号点的路径上，所有边权变成相反数

操作 $SUM\ x\ y$: x 号点到 y 号点的路径上，查询所有边权的累加和

操作 $MAX\ x\ y$: x 号点到 y 号点的路径上，查询所有边权的最大值

操作 $MIN\ x\ y$: x 号点到 y 号点的路径上，查询所有边权的最小值

$1 \leq n$ 、 $m \leq 2 * 10^5$

$-1000 \leq$ 任何时候的边权 $\leq +1000$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1505>

树链剖分-下

题目3

月下毛景树

一共有 n 个节点，节点编号从1到 n ，所有节点连成一棵树

给定 $n-1$ 条边，边的编号从1到 $n-1$ ，每条边给定初始边权

会进行若干次操作，每条操作的类型是如下4种类型中的一种

操作 Change $x\ v$: 第 x 条边的边权改成 v

操作 Cover $x\ y\ v$: x 号点到 y 号点的路径上，所有边权改成 v

操作 Add $x\ y\ v$: x 号点到 y 号点的路径上，所有边权增加 v

操作 Max $x\ y$: x 号点到 y 号点的路径上，打印最大的边权

$1 \leq n \leq 10^5$ 任何时候的边权 $\leq 10^9$

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/P4315>

重链剖分 + 边权转化为点权 + 同时支持范围增加、范围重置操作的线段树

树链剖分-下

长链剖分的原理

- 1, 重链剖分是根据各个儿子的子树大小, 来确定重儿子, 进而完成树的重链剖分, 这是上节课内容
- 2, 长链剖分是根据各个儿子的子树高度, 来确定长儿子, 进而完成树的长链剖分
- 3, 重链剖分该有的信息, 长链剖分依然都有, 只不过剖分的方式不同
- 4, 长链剖分后, 任何节点到达树的头节点, 时间复杂度为 $O(\sqrt{n})$
- 5, 长链剖分后, 对每条长链的头节点, 都建立和子树高度相关的信息, 时间复杂度整体 $O(n)$

课上重点图解

题目4、题目5, 长链剖分原理的简单应用

树链剖分-下

题目4

树上k级祖先

一共有n个节点，编号1~n，给定一个长度为n的数组arr，表示依赖关系

如果arr[i] = j，表示i号节点的父节点是j，如果arr[i] == 0，表示i号节点是树头

一共有m条查询，每条查询 x k：打印x节点往上走k步的祖先节点编号

题目要求预处理的时间复杂度 $O(n * \log n)$ ，处理每条查询的时间复杂度 $O(1)$

题目要求强制在线，必须按顺序处理每条查询，如何得到每条查询的入参，请打开测试链接查看

$1 \leq n \leq 5 * 10^5$

$1 \leq m \leq 5 * 10^6$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5903>

查询时向上跳跃的逻辑设计 + 长链剖分的性质

树链剖分-下

题目5

攻略

一共有 n 个节点，给定 $n-1$ 条边，所有节点连成一棵树，每个点给定点权

规定1号点是头，任何路径都必须从头开始，然后走到某个叶节点停止

路径上的点，点权的累加和，叫做这个路径的收益

给定数字 k ，你可以随意选出 k 条路径，所有路径经过的点，需要取并集，也就是去重

并集中的点，点权的累加和，叫做 k 条路径的收益

打印 k 条路径的收益最大值

$1 \leq n, k \leq 2 * 10^5$

所有点权都是int类型的正数

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P10641>

根据收益最大的标准，确定 最值钱儿子，然后进行树链剖分，这是长链剖分的泛化
 k 条路径的收益，按照取并集算收益，就是树中选择最值钱的 k 个长链的头

树链剖分-下

长链剖分优化树上动态规划

- 1, 一个树上动态规划问题, 假设 $dp[u][..]$ 为节点 u 的动态规划表
- 2, u 的动态规划表和转移方程, 和子树 u 的高度相关, 可以用长链剖分进行优化
- 3, 长链剖分可以优化时间, 也可以优化空间, 用空间压缩让 dp 表的空间尽量小
- 4, 核心在于, 如何确定每个点的 dp 信息, 从 dp 表的什么位置开始
- 5, 长儿子的 dp 信息, 父节点可以直接继承, 其他儿子的 dp 信息, 进行暴力合并
- 6, 因为任何长链只会遍历一次, 所以动态规划整体的时间复杂度为 $O(n)$

这个内容比较抽象, 结合模版题目进行讲述

题目6、题目7, 长链剖分优化树上动态规划的题目

树链剖分-下

题目6

长链剖分优化动态规划模版题

一共有 n 个节点，给定 $n-1$ 条边，所有节点连成一棵树，规定1号节点是头

规定任何点到自己的距离为0

定义 $d(u, x)$ ，以 u 为头的子树中，到 u 的距离为 x 的节点数

对于每个点 u ，想知道哪个尽量小的 x ，能取得最大的 $d(u, x)$ 值

打印每个点的答案 x

$1 \leq n \leq 10^6$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1009F>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/1009/F>

点 u 的dp信息，从 $dp[dfn[u]]$ 处开始

长儿子的dp信息，父节点可以直接继承，其他儿子的dp信息，进行暴力合并，整体的时间复杂度 $O(n)$

树链剖分-下

题目7

火热旅馆

一共有 n 个节点，给定 $n-1$ 条边，所有节点连成一棵树

三个点构成一个点组 (a, b, c) ，打乱顺序认为是同一个点组

求树上有多少点组，内部任意两个节点之间的距离是一样的

$1 \leq n \leq 10^5$

答案一定在long类型范围内

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5904>

$f[\text{父}][i]$ 依赖 $f[\text{子}][i-1]$ ，开始位置直接用dfn序号

$g[\text{父}][i]$ 依赖 $g[\text{子}][i+1]$ ，开始位置怎么设计？课上重点图解

奇特的动态规划表定义 + 可能性划分的讨论