

# 树上启发式合并的原理和相关题目

## 前置知识

讲解161 - 树链剖分之重链剖分

讲解118 - 树上倍增和LCA，本节课题目5需要

讲解118 - dfs递归函数改迭代的技巧，本节课题目2需要，C++的同学不需要

讲解158 - 可持久化线段树的相关题目，其中的题目4，本节课题目7需要

## 本节课讲述

树上启发式合并的原理和过程 题目1

树上启发式合并经典题目讲解 题目2、题目3、题目4、题目5、题目6、题目7

# 树上启发式合并的原理和相关题目

树上启发式合并(dsu on tree)的原理

从一个简单的问题开始

假设一共有 $n$ 个人，初始时每个人各自成一个集合，期间不断有合并集合的行为发生  
任意两个集合进行合并时，小集合里的每个人都会喊一次“呼哈”  
所有人都在一个集合时，过程停止  
请问最多能听到多少次“呼哈”？最多 $(n * \log n)$ 次

小集合里的每个人都会喊一次“呼哈”，看似暴力  
其实操作的总次数并不多，就是 $O(n * \log n)$ 的规模，这就是启发式合并的原理

# 树上启发式合并的原理和相关题目

树上启发式合并的特征：

- 1, 没有修改操作
- 2, 可以通过遍历子树，建立信息统计，得到所有查询的答案

树上启发式合并的过程

`void dfs(u, keep)`, `u`表示当前节点, `keep`表示是否保留子树`u`对信息的贡献

- 1, 先遍历所有轻儿子的子树, 遍历结束时, 消除对信息的贡献, `dfs(轻儿子, 0)`
- 2, 再遍历唯一重儿子的子树, 遍历结束时, 保留对信息的贡献, `dfs(重儿子, 1)`
- 3, 考察单个节点`u`, 对信息进行贡献
- 4, 再遍历所有轻儿子的子树, 上面的每个节点, 都重新对信息进行贡献
- 5, 得到子树`u`的答案
- 6, 如果`keep == 0`, 消除子树`u`的贡献, 如果`keep == 1`, 保留子树`u`的贡献

课上重点图解, 题目1, 树上启发式合并的模版题

# 树上启发式合并的原理和相关题目

## 树上启发式合并的理解核心

1, 为什么每个轻儿子遍历完都要取消对信息的贡献?

因为不希望干扰到其他子树的信息统计

2, 得到子树u的答案, 需要再遍历所有轻儿子的子树, 重新对信息进行贡献, 复杂度会不会过高?

如果keep == 0, 需要遍历子树u的所有节点, 来取消对信息的贡献, 复杂度会不会过高?

不会! 一个节点只有在某个轻儿子中, 重新贡献和取消贡献的行为才会发生, 然后集合的大小就增倍了  
等同于小集合遇到大集合时, 小集合里的节点才会操作一次, 整个过程的复杂度 $O(n * \log n)$

3, 每个轻儿子的子树对信息贡献多少, 消除时就只负责消除自己的贡献吗?

是, 但是要注意, 其实就会清空全部信息!

如果节点u是某个节点的轻儿子, 当子树u遍历完, 消除子树u对信息统计的影响

其实全局的信息统计一定会变成空, 因为所有节点都是轻儿子先遍历!

# 树上启发式合并的原理和相关题目

## 题目1

### 树上启发式合并模版题

一共有 $n$ 个节点，编号 $1 \sim n$ ，给定 $n-1$ 条边，所有节点连成一棵树，1号节点为树头

每个节点给定一种颜色值，一共有 $m$ 条查询，每条查询给定参数 $x$

每条查询打印 $x$ 为头的子树上，一共有多少种不同的颜色

$1 \leq n, m, \text{颜色值} \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/U41492>

# 树上启发式合并的原理和相关题目

题目2

颜色平衡的子树

一共有 $n$ 个节点，编号 $1 \sim n$ ，给定每个节点的颜色值和父亲节点编号

输入保证所有节点一定组成一棵树，并且1号节点是树头

如果一棵子树中，存在的每种颜色的节点个数都相同，这棵子树叫颜色平衡树

打印整棵树中有多少个子树是颜色平衡树

$1 \leq n$ 、颜色值  $\leq 2 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P9233>

# 树上启发式合并的原理和相关题目

题目3

主导颜色累加和

一共有 $n$ 个节点，编号 $1 \sim n$ ，给定 $n-1$ 条边，所有节点连成一棵树，1号节点为树头

每个节点给定一种颜色值，主导颜色累加和定义如下

以 $x$ 为头的子树上，哪种颜色出现最多，那种颜色就是主导颜色，主导颜色可能不止一种

所有主导颜色的值累加起来，每个主导颜色只累加一次，就是该子树的主导颜色累加和

打印 $1 \sim n$ 每个节点为头的子树的主导颜色累加和

$1 \leq n$ 、颜色值  $\leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF600E>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/600/E>

# 树上启发式合并的原理和相关题目

## 题目4

### 不同名字数量

一共有 $n$ 个节点，编号 $1 \sim n$ ，给定每个节点的名字和父亲节点编号

名字是string类型，如果父亲节点编号为0，说明当前节点是某棵树的头节点

注意， $n$ 个节点组成的是森林结构，可能有若干棵树

一共有 $m$ 条查询，每条查询  $x \ k$ ，含义如下

以 $x$ 为头的子树上，到 $x$ 距离为 $k$ 的所有节点中，打印不同名字的数量

$1 \leq n$ 、 $m \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF246E>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/246/E>



# 树上启发式合并的原理和相关题目

题目5

表亲数量

一共有 $n$ 个节点，编号 $1 \sim n$ ，给定每个节点的父亲节点编号，父亲节点为0，说明当前节点是某棵树的头  
注意， $n$ 个节点组成的是森林结构，可能有若干棵树

一共有 $m$ 条查询，每条查询  $x \ k$ ，含义如下

如果 $x$ 往上走 $k$ 的距离，没有祖先节点，打印0

如果 $x$ 往上走 $k$ 的距离，能找到祖先节点 $a$ ，那么从 $a$ 往下走 $k$ 的距离，除了 $x$ 之外，可能还有其他节点  
这些节点叫做 $x$ 的 $k$ 级表亲，打印这个表亲的数量

$1 \leq n, m \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF208E>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/208/E>

节点 $u$ 的 $k$ 级表亲数量 = 节点 $u$ 的 $k$ 级祖先的 $k$ 级后代数量 - 1

# 树上启发式合并的原理和相关题目

## 题目6

### 最长重排回文路径

一共有 $n$ 个节点，编号 $1 \sim n$ ，给定 $n-1$ 条边，所有节点连成一棵树，1号节点为树头

每条边上都有一个字符，字符范围 $[a \sim v]$ ，字符一共22种，重排回文路径的定义如下

节点 $a$ 到节点 $b$ 的路径，如果所有边的字符收集起来，能重新排列成回文串，该路径是重排回文路径

打印 $1 \sim n$ 每个节点为头的子树中，最长重排回文路径的长度

$1 \leq n \leq 5 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF741D>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/741/D>

1, 重排回文路径的判断，转化成异或的问题

2, 每一个儿子的子树里，得到的答案

3, 当前节点 + 重儿子的树上任意一点，得到的答案

4, 当前轻儿子的树上任意一点 + 遍历过的部分里任意一点，得到的答案，先更新答案，然后重新贡献！

# 树上启发式合并的原理和相关题目

题目7

森林

一共有 $n$ 个节点，编号 $1 \sim n$ ，初始时给定 $m$ 条边，所有节点可能组成森林结构

每个节点都给定非负的点权，一共有 $t$ 条操作，每条操作是如下两种类型中的一种

操作  $Q\ x\ y\ k$  : 点 $x$ 到点 $y$ 路径上所有的权值中，打印第 $k$ 小的权值是多少

题目保证 $x$ 和 $y$ 联通，并且路径上至少有 $k$ 个点

操作  $L\ x\ y$  : 点 $x$ 和点 $y$ 之间连接一条边

题目保证操作后，所有节点仍然是森林

题目要求强制在线，请不要使用离线算法

$1 \leq n, m, t \leq 8 * 10^4$  点权  $\leq 10^9$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3302>

路径上第 $k$ 小的值，可持久化线段树解决，讲解158，其中的题目4

没有用到树上启发式合并的过程，用到了合并的思想，合并时让小树去修改信息， $O(n * \log n * \log n)$