

# 逆元和除法同余、容斥原理

前置知识

讲解041 - 同余原理，同余的意义，加减乘同余

讲解066、讲解067、讲解068、讲解069 - 动态规划基础

讲解080、讲解081 - 状压dp，题目5需要

讲解098 - 乘法快速幂，一个数字的n次方怎么算最快

逆元的意义 & 除法同余

连续数字逆元的线性递推 & 连续阶乘逆元的线性递推

容斥原理

注意：

讲解097、讲解098、讲解099，可以称为"不用多问为什么"专题

有兴趣可以翻帖子看证明，用纸和笔跟着推一遍是最好的方式

因为证明麻烦，并且证明过程没啥扩展性，记住用法和模版即可，当做原子技能使用

# 逆元和除法同余、容斥原理

当计算结果比较大时，考试、比赛时经常要求结果对一个数字取余，比如  $\% 1000000007$

在讲解041中，讲解了加法、减法、乘法如何让中间结果取余

总的来说：

加法和乘法，可以让每个中间结果直接取余，最后结果就是正确的

减法，只需要让每个减完的结果  $+ \text{MOD}$ ，然后  $\% \text{MOD}$ ，最后结果就是正确的

除法呢？不能这么做，比如下面的例子

$10 / 5$ ，结果对3取余。正确结果是 $10 / 5$ 得到2， $2 \% 3$ 得到2

但是如果中间结果直接取余， $10 \% 3$ 得到1， $5 \% 3$ 得到2， $(1 / 2) \% 3$ 得到0

会发现结果对不上，这是因为除法同余有比较特别的处理

也就是除数先转化成逆元，然后让被除数乘以逆元，逆元就是倒数的意思

# 逆元和除法同余、容斥原理

如果你想计算： $a / b$ ，然后  $\% \text{MOD}$  结果

- 1) 必须保证 $a/b$ 可以整除，每次有除法的时候，都需要保证绝对能整除
- 2) 必须保证MOD是质数，求逆元的原理是费马小定理，要求MOD是质数，比如1000000007
- 3) 必须保证b和MOD的最大公约数为1，也就是b和MOD互质

题目给定的数据一定会满足上面三点，那么就有如下的结论，直接记住，证明略，不用多问为什么

先求  $1/b$  的乘法同余数，也就是b的逆元， $b$ 的逆元 =  $b^{(\text{MOD}-2)} \% \text{MOD}$

然后， $(a / b) \% \text{MOD}$ 的结果，等于， $((a \% \text{MOD}) * (b\text{的逆元})) \% \text{MOD}$ 的结果

比如， $(10 / 5) \% 3$ ，先求5的1次方  $\% 3 = 2$ ， $((10 \% 3) * 2) \% 3$ ，结果得到2，这是正确的

你可以假设各种例子， $a$ 、 $b$ 、MOD，但要保证： $a/b$ 能整除、MOD是质数、b和MOD互质

# 逆元和除法同余、容斥原理

题目1

单个除数求逆元

对数器验证

时间复杂度 $O(\log \text{ MOD})$

# 逆元和除法同余、容斥原理

连续数字逆元的线性递推

在  $\% p$  意义下,

1、2、3 . . . n, 求每个数的逆元

用  $\text{inv}[i]$ , 代表  $i$  的逆元

$\text{inv}[1] = 1$

$\text{inv}[i] = (\text{int}) (p - (\text{long}) \text{inv}[p \% i] * (p / i) \% p);$  // 从左往右线性递推

直接记住  
不用多问为什么

连续阶乘逆元的线性递推

在  $\% p$  意义下,

1!、2!、3! . . . n!, 求每个数的逆元,

用  $\text{inv}[i]$ , 代表  $i!$  的逆元

先求  $n!$  乘法同余的结果, 假设为  $a$ , 然后求  $a$  的逆元, 假设为  $b$

$\text{inv}[n] = b$

$\text{inv}[i] = ((\text{long}) (i + 1) * \text{inv}[i + 1]) \% \text{MOD};$  // 从右往左线性递推

道理其实容易理解

# 逆元和除法同余、容斥原理

题目2

连续数字逆元的线性递推

给定 $n$ 、 $p$ ，求 $1 \sim n$ 中所有整数在模 $p$ 意义下的乘法逆元

$1 \leq n \leq 3 * 10^6$

$n < p < 20000528$

输入保证 $p$ 为质数

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3811>

时间复杂度 $O(n)$

# 逆元和除法同余、容斥原理

题目3

连续阶乘逆元的线性递推

实现组合公式 $C(n, m)$ 的计算

最终结果  $\% 1000000007$ 后返回

$0 \leq m \leq n \leq 1000$

对数器验证

时间复杂度 $O(n)$

# 逆元和除法同余、容斥原理

## 容斥原理

道理很简单，课上说明一下

有关题目可不容易，核心是**如何设计出快速查询若干集合交集数量**的问答系统，常见的题型有两类

- 1) 打表查询（题目4、题目5）
- 2) 不用查询直接公式化简（题目6）



# 逆元和除法同余、容斥原理

## 题目4

最大公约数为1的子序列数量

给你一个数组，返回有多少个子序列的最大公约数是1

结果可能很大对1000000007取模

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF803F>

$1 \leq n \leq 10^5$

$1 \leq \text{nums}[i] \leq 10^5$

## 扩展问题

最大公约数为k的子序列数量

给定一个长度为n的正数数组nums，还有正数k

返回有多少子序列的最大公约数为k

# 逆元和除法同余、容斥原理

## 题目5

多次查询购买方法

一共有4种硬币，面值分别为 $v_0$ 、 $v_1$ 、 $v_2$ 、 $v_3$ ，这个永远是确定的

每次去购物的细节由一个数组 $arr$ 来表示，每次购物都是一次查询

$arr[0]$  = 携带 $v_0$ 面值的硬币数量

$arr[1]$  = 携带 $v_1$ 面值的硬币数量

$arr[2]$  = 携带 $v_2$ 面值的硬币数量

$arr[3]$  = 携带 $v_3$ 面值的硬币数量

$arr[4]$  = 本次购物一定要花多少钱

返回每次有多少种花钱的方法

$1 \leq v_0, v_1, v_2, v_3, arr[i] \leq 10^5$

查询数量  $\leq 1000$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P1450>

本题需要理解  
讲解074 - 完全背包  
讲解080 - 状压dp  
不会的同学看一下

# 逆元和除法同余、容斥原理

## 题目6

播放列表的数量

给定三个参数,  $n$ 、 $l$ 、 $k$

你的音乐播放器里有 $n$ 首不同的歌

在旅途中你的旅伴想要听 $l$ 首歌

听得歌曲不一定不同, 即允许歌曲重复

请你为她按如下两条规则创建一个播放列表

1) 每首歌至少播放一次

2) 一首歌只有在其他 $k$ 首歌播放完之后才能再次播放

返回可以满足要求的播放列表的数量

结果可能很大对 $1000000007$ 取模

测试链接 : <https://leetcode.cn/problems/number-of-music-playlists/>