

线段树分治-上

前置知识

讲解059 - 链式前向星

讲解110 - 线段树

讲解165 - 可撤销并查集

本节课讲述

线段树分治的原理和模版题目 题目1、题目2

线段树分治的相关题目 题目3、题目4、题目5、题目6、题目7

下节课讲述

线段树分治结合其他算法和数据结构的内容

线段树分治-上

线段树分治的原理

- 1, 一些问题中, 可以把每条操作分配一个时间点
- 2, 建立时间轴线段树, 每个时间点都是线段树的下标
- 3, 每种修改操作, 拥有若干个有效时间段, 对应着线段树上的若干区间
- 4, 每条查询操作, 其实就是询问, 在某个时间点上, 相关的状态信息

线段树分治的过程

- 1, 先把所有操作记录下来, 然后把操作分类, 每种修改操作, 整理出若干个有效时间段
- 2, 根据每个有效时间段, 把任务分配到线段树的区间上
- 3, 遍历整棵线段树, 来到某个线段树的区间时, 执行相应的任务, 离开区间时, 撤销相应的任务
- 4, 线段树的叶节点, 对应着单个时间点, 如果有查询操作, 记录查询的答案

课上根据题目1, 线段树分治模版题, 来进行讲述

线段树分治-上

题目1

线段树分治模版题

一共有 n 个节点，一共有 m 条操作，每条操作是如下三种类型中的一种

操作 0 $x\ y$: 点 x 和点 y 之间一定没有边，现在增加一条边

操作 1 $x\ y$: 点 x 和点 y 之间一定存在边，现在删除这条边

操作 2 $x\ y$: 查询点 x 和点 y 是否联通

$1 \leq n \leq 5000$

$1 \leq m \leq 500000$

不强制在线，可以离线处理

测试链接：<https://loj.ac/p/121>

线段树分治-上

线段树分治的使用场景

- 1, 在线算法实现困难较大, 可能需要更高级的数据结构, 或者时间复杂度无法达到预期
- 2, 题目没有强制在线的要求, 并且操作的次序可以转化成离线的时序
- 3, 某些问题, 使用在线算法, 也许能得到很好的解决, 但一般难度会偏大
- 4, 线段树分治提供了一种离线解决问题的思路

线段树分治的时间复杂度

- 1, 操作的数量为 m , 每个有效时间段, 会分解成 $\log m$ 个线段树的区间
- 2, 每个线段树区间都留有这个操作的任务, 那么任务总数为 $m * \log m$
- 3, 执行任务和撤销任务, 使用到可撤销并查集, 并查集上点的个数为 n , 单次操作的代价为 $\log n$
- 4, 所以时间复杂度一般为, $O(m * \log m * \log n)$

线段树分治-上

题目2

判断二分图

一共有 n 个节点，时刻的范围 $0 \sim k$ ，一共有 m 条操作，每条操作含义如下

操作 $x\ y\ l\ r$: 点 x 到点 y 之间连一条边，该边在 l 时刻出现，在 r 时刻消失

分别打印1时刻以内、2时刻以内.. k 时刻以内，图是不是二分图

注意 i 时刻以内是 $0 \sim i-1$ 时间段的意思

$1 \leq n, k \leq 10^5$ $1 \leq m \leq 2 * 10^5$

$1 \leq x, y \leq n$ $0 \leq l, r \leq k$

测试链接: <https://www.luogu.com.cn/problem/P5787>

二分图的判断很简单，后续会安排二分图的专题进行讲述

因为每次判断， i 时刻以内是不是二分图，所以点 x 到点 y 的边，让其生效时间为 $[l+1..r]$

线段树分治-上

题目3

最小mex生成树

给定 n 个点， m 条边的无向连通图，边有边权

自然数集合 S 的mex含义为：最小的、没有出现在 S 中的自然数

现在你要求出一个这个图的生成树，使得其边权集合的mex尽可能小

对本题来说，注意0是自然数

$1 \leq n \leq 10^6$

$1 \leq m \leq 2 * 10^6$

$0 \leq \text{边权} \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5631>

答案从0开始考察，依次考察每个数值是否是答案，建立答案轴线段树

点 x 到点 y 的边，假设边权为 w ，该边的生效范围 $[0..w-1]$ 、 $[w+1..最后]$

来到线段树叶节点时，检查图是否全联通，第一个达标的叶节点就是答案

线段树分治-上

题目4

独特事件

一共有 n 个节点， $n-1$ 条无向边，边给定颜色值，所有节点连成一棵树

定义 $f(u, v)$ ：点 u 到点 v 的简单路径上恰好出现一次的颜色数量

打印 $\sum(u=1..n) \sum(v=u+1..n) f(u, v)$ 的结果

$1 \leq \text{颜色值} \leq n \leq 2 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1681F>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/1681/F>

问题转化为，根据颜色分类之后，每条边的贡献累加和

颜色的数值从1开始考察，依次考察到数值 v ，建立颜色轴线段树

点 x 到点 y 的边，假设颜色为 c ，该边的生效范围 $[1..c-1]$ 、 $[c+1..v]$

来到线段树叶节点时，就是来到某个颜色，该颜色每条边的贡献 = 两个端点各自连通区的大小乘积

线段树分治-上

题目5

大融合

一共有 n 个点，一共有 q 条操作，每条操作是如下两种类型中的一种

操作 A $x\ y$: 点 x 和点 y 之间连一条边，保证之前 x 和 y 是不联通的

操作 Q $x\ y$: 打印点 x 和点 y 之间这条边的负载，保证 x 和 y 之间有一条边
边负载定义为，这条边两侧端点各自连通区大小的乘积

$1 \leq n, q \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4219>

查询时认为边是不生效的 + 排序之后得到边的生效时间段

线段树分治-上

题目6

连通图

一共有 n 个点，给定 m 条边，所有点一开始就连通在一起了

一共有 k 条操作，每条操作格式如下

操作 $c \dots$: 操作涉及 c 条边，这些边的编号 \dots 一共 c 个

假设删掉这些边，打印整张图是否联通

每条操作都是独立的，相互之间没有任何关系

$1 \leq n, k \leq 10^5$

$1 \leq m \leq 2 * 10^5$

$1 \leq c \leq 4$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5227>

针对每条边，去整理哪些操作需要将其删除，就是该边的失效时间点，其他操作都是生效时间点
注意如果某条边没有出现在任何操作里，说明该边根本不涉及任何删除，从头到尾一直始终生效

线段树分治-上

题目7

给边涂色

一共有 n 个点，给定 m 条无向边，一开始每条边无颜色，一共有 k 种颜色

合法状态的定义为，仅保留染成 k 种颜色中的任何一种颜色的边，图都是一张二分图

一共有 q 条操作，每条操作格式如下

操作 $e\ c$: 第 e 条边，现在要涂成 c 颜色

如果执行此操作之后，整张图还是合法状态，那么执行并打印"YES"

如果执行此操作之后，整张图不再是合法状态，那么不执行并打印"NO"

$1 \leq n, m, q \leq 5 * 10^5$ $1 \leq k \leq 50$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF576E>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/576/E>

设置多个颜色的可撤销并查集判断多个颜色的二分图

如果涂色没有执行成功，那么后续任务涉及的边的颜色，改成上次成功执行的颜色