

可持久化线段树和标记永久化

前置知识

讲解110 - 线段树的原理

讲解111 - 值域线段树、线段树的离散化

本节课讲述

单点修改的可持久化线段树，题目1、题目2

范围修改的可持久化线段树，题目3、题目5

标记永久化，题目4

下节课讲述

可持久化线段树的相关题目

可持久化线段树和标记永久化

可持久化线段树，又叫主席树

做一次修改操作，就生成一棵新版本线段树，去处理比较复杂的区间查询问题

如果生成 n 个版本的线段树，有 m 个查询操作，那么单次生成、单次查询的时间复杂度 $O(\log n)$

单点修改的可持久化线段树

1, 单点修改操作，不需要懒更新机制

2, 新版本的线段树生成时，沿途节点新建，其他节点复用，新建的空间为 $O(\log n)$

3, 查询单点 x 的信息时，根据版本号，从头节点往下找到 x 位置对应的节点即可，题目1

4, 查询范围 $l \sim r$ 的信息时，利用 r 版本的信息 - $(l-1)$ 版本的信息 完成查询，题目2

5, 总空间 $O(n * 4 + n * \log n)$

可持久化线段树最常考的情况，单点修改 + 范围查询，下节课会继续讲述相关题目

可持久化线段树和标记永久化

题目1

单点修改的可持久化线段树模版题1

给定一个长度为 n 的数组 arr ，下标 $1 \sim n$ ，原始数组认为是0号版本

一共有 m 条操作，每条操作是如下两种类型中的一种

$v \ 1 \ x \ y$: 基于 v 号版本的数组，把 x 位置的值设置成 y ，生成新版本的数组

$v \ 2 \ x$: 基于 v 号版本的数组，打印 x 位置的值，生成新版本的数组和 v 版本一致

每条操作后得到的新版本数组，版本编号为操作的计数

$1 \leq n, m \leq 10^6$

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/P3919>

可持久化线段树，单点修改 + 单点查询，最简单的模版

可持久化线段树和标记永久化

题目2

单点修改的可持久化线段树模版题2

给定一个长度为 n 的数组 arr ，下标 $1 \sim n$ ，一共有 m 条查询

每条查询 $l \ r \ k$: 打印 $arr[l..r]$ 中第 k 小的数字

$1 \leq n, m \leq 2 * 10^5$

$0 \leq arr[i] \leq 10^9$

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/P3834>

值域线段树的离散化

可持久化线段树，单点修改 + 范围查询，最重要的模版

可持久化线段树和标记永久化

范围修改的可持久化线段树

经典的方式

- 1, 范围修改操作, 需要懒更新机制
- 2, 仿照单点修改的可持久化线段树
- 3, 每来到一个节点, 新建节点并且复制老节点的信息
- 4, 当前节点的懒更新下发时(down过程), 左右孩子也新建, 接收懒更新信息, 务必让老节点信息保持不变

生成新版本的线段树, 空间占用 $O(\log n)$

只要有懒更新的下发, 必然新建节点, 所以生成新版本的线段树、执行查询操作, 都会增加空间占用

如果生成 n 个版本的线段树, 有 m 个查询操作, 总空间 $O(n * 4 + n * \log n + m * \log n)$

范围增加 + 查询累加和, 这一类可持久化线段树, 推荐使用标记永久化减少空间占用

可持久化线段树和标记永久化

题目3

范围修改的可持久化线段树，经典的方式

给定一个长度为 n 的数组 arr ，下标 $1 \sim n$ ，时间戳 $t=0$ ， arr 认为是 0 版本的数组

一共有 m 条操作，每条操作为如下四种类型中的一种

C x y z : 当前时间戳 t 版本的数组， $[x..y]$ 范围每个数字增加 z ，得到 $t+1$ 版本数组，并且 $t++$

Q x y : 当前时间戳 t 版本的数组，打印 $[x..y]$ 范围累加和

H x y z : z 版本的数组，打印 $[x..y]$ 范围的累加和

B x : 当前时间戳 t 设置成 x

$1 \leq n, m \leq 10^5$

$-10^9 \leq arr[i] \leq +10^9$

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/SP11470>

测试链接 : <https://www.spoj.com/problems/TTM/>

可持久化线段树，范围修改 + 范围查询，经典的方式支持所有线段树的持久化

可持久化线段树和标记永久化

标记永久化

懒更新不再下发，变成只属于某个范围的标记信息，上下级的标记之间，不再相互影响
查询时，懒更新也不再下发，从上往下的过程中，维护标记的叠加信息，即可完成查询
标记挂在父范围不下发，也能在后续访问时正确合并
标记永久化，并不是标记信息的值不再变化，而是上下级标记之间不再相互影响

可持久化线段树，可以使用标记永久化可以减少空间占用，但是应用范围比较窄
范围增加 + 查询累加和，这一类的线段树，**修改和查询的性质都有可叠加性，可以标记永久化**
这一类的可持久化线段树，出题时会刻意缩减可用空间，目的就是考察标记永久化

范围重置、查询最大值/最小值，这一类的线段树，**修改和查询的性质不具有可叠加性，就用经典的方式**

一旦标记永久化，就没有了懒更新的下发，那么查询时就不再新建节点了
如果生成 n 个版本的线段树，有 m 个查询操作，总空间 $O(n * 4 + n * \log n)$

可持久化线段树和标记永久化

题目4

标记永久化，范围增加 + 查询累加和

给定一个长度为 n 的数组 arr ，下标 $1 \sim n$ ，一共有 m 条操作，操作类型如下

1 x y k : 将区间 $[x, y]$ 每个数加上 k

2 x y : 打印区间 $[x, y]$ 的累加和

这就是普通线段树，请用标记永久化的方式实现

测试链接 : <https://www.luogu.com.cn/problem/P3372>

可持久化线段树和标记永久化

题目5

范围修改的可持久化线段树，标记永久化减少空间占用

给定一个长度为 n 的数组 arr ，下标 $1 \sim n$ ，时间戳 $t=0$ ， arr 认为是0版本的数组

一共有 m 条查询，每条查询为如下四种类型中的一种

C x y z : 当前时间戳 t 版本的数组， $[x..y]$ 范围每个数字增加 z ，得到 $t+1$ 版本数组，并且 $t++$

Q x y : 当前时间戳 t 版本的数组，打印 $[x..y]$ 范围累加和

H x y z : z 版本的数组，打印 $[x..y]$ 范围的累加和

B x : 当前时间戳 t 设置成 x

$1 \leq n, m \leq 10^5$

$-10^9 \leq arr[i] \leq +10^9$

测试链接 : <https://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=4348>

标记永久化减少空间占用，但是仅支持修改和查询的性质都有可叠加性，这一类的可持久化线段树