

# 线性基-上

前置知识

讲解030 - 异或运算

讲解134 - 高斯消元解决异或方程组

视频分为上下两期

本题讲述：异或空间线性基原理，普通消元 & 高斯消元生成线性基的过程图解，练习常见题目

下期讲述：向量空间线性基、异或空间线性基的合并、异或空间线性基和其他内容结合的题目

# 线性基-上

线性基原理，只对非负数进行讨论

线性基常指的是异或空间线性基，向量空间线性基是下期的内容

一堆数字能得到的非0异或和的结果，能被元素个数尽量少的集合，不多不少的全部得到

那么就说，这个元素个数尽量少的集合，是这一堆数字的异或空间线性基

注意，只关心去重的非0异或和能否全部得到，并不关心每种异或和的个数

如下几个结论是构建异或空间线性基的基础，课上重点图解

- 1, 一堆数字中，任意的a和b，用 $a \oplus b$ 的结果替代a、b中的一个数字，不会影响非0异或和的组成
- 2, 一堆数字中，任意的a和b，如果有 $a \oplus b = 0$ ，那么舍弃掉a、b其中一个数字，不会影响非0异或和的组成
- 3, 一堆数字能否异或出0，在求出异或空间线性基之后，需要被单独标记

# 线性基-上

一堆数字的异或空间线性基，可能不只一组，求解方式为 普通消元 或者 高斯消元

普通消元：得到某一组线性基，进而知道：线性基大小、异或和个数、异或和是否有0、最大异或和等信息  
课上重点图解

高斯消元：得到标准形式的异或空间线性基，既能知道普通消元得到的信息，还能知道第k小的异或和  
课上重点图解

一般题目只需要普通消元得到的一组线性基，足够解题，除非需要知道第k小的异或和，才会用到高斯消元

两种方法的时间复杂度都为 $O(n * m)$ ，n是数字个数，m是最大数字的位数

异或空间线性基大小为 $O(m)$ ，m是最大数字的位数

# 线性基-上

## 题目1

### 最大异或和

给定一个长度为 $n$ 的数组 $arr$ ， $arr$ 中都是 $long$ 类型的非负数，可能有重复值  
在这些数中选取任意个，使得异或和最大，返回最大的异或和

$1 \leq n \leq 50$

$0 \leq arr[i] \leq 2^{50}$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3812>

# 线性基-上

题目2

第k小的异或和

给定一个长度为n的数组arr，arr中都是long类型的非负数，可能有重复值

在这些数中选取任意个，至少要选一个数字

可以得到很多异或和，假设异或和的结果去重

返回第k小的异或和

$1 \leq n \leq 10^5$

$0 \leq arr[i] \leq 2^{50}$

$1 \leq k \leq 2^{50}$

测试链接：<https://loj.ac/p/114>

# 线性基-上

题目3

元素

给定 $n$ 个魔法矿石，每个矿石有状态和魔力，都是整数

若干矿石组成的组合能否有效，根据状态异或的结果来决定

如果一个矿石组合内部会产生异或和为0的子集，那么这个组合无效

返回有效的矿石组合中，最大的魔力和是多少

$1 \leq n \leq 1000$

$1 \leq \text{状态} \leq 10^{18}$

$1 \leq \text{魔力} \leq 10^4$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4570>

# 线性基-上

题目4

彩灯

一共有 $n$ 个灯泡，开始都是不亮的状态，有 $m$ 个开关

每个开关能改变若干灯泡的状态，改变是指，亮变不亮、不亮变亮

比如 $n=5$ ，某个开关为XX000，表示这个开关只能改变后3个灯泡的状态

可以随意使用开关，返回有多少种亮灯的组合，全不亮也算一种组合

结果可能很大对2008取余

$1 \leq n \leq 50$

$1 \leq m \leq 50$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3857>