

虚树的原理和相关题目

前置知识

讲解052 - 单调栈

讲解078 - 树型dp基础

讲解079 - 树的dfn序

讲解118 - 树上倍增和LCA

讲解064 - Dijkstra算法 本节课题目5需要

本节课讲述

虚树的介绍和使用场景

虚树的两种建树方式

虚树的模版题目

题目1、题目2、题目3

虚树的经典题目

题目4、题目5、题目6

虚树的原理和相关题目

虚树的介绍

- 1, 某些问题涉及若干关键节点，关键节点是决定答案的关键
- 2, 整棵树上保留关键节点，保留任意两个关键点之间的最低公共祖先
- 3, 形成的树叫做虚树

虚树的使用场景

- 1, 每个问题都涉及一批关键节点，但是所有问题的关键节点总量并不巨大
- 2, 每个问题根据关键节点建立虚树，在虚树上求解原问题
- 3, 因为虚树的规模小，所以复杂度得到优化

虚树的原理和相关题目

虚树的建树方式

- 1, 二次排序 + LCA连边
- 2, 单调栈

课上重点图解两种建树方式

正确性的说明

推荐第一种建树方式，因为流程很容易记住

虚树大小 $O(k)$ ，建树复杂度 $O(k * \log n)$ ， k 是关键节点数量， $\log n$ 是整树上查询lca的复杂度

虚树的头节点不一定是整棵树的头节点

有时会把整棵树的头节点额外加入虚树，让虚树多一个祖先节点

通过这种处理，方便某些问题的求解，本节课题目3、题目4就使用了这种技巧

一般情况下，虚树只需要上连下，并不需要下连上，除非求解问题需要这么做，比如本节课题目5

虚树的原理和相关题目

题目1

王国和城市

一共有n个节点，给定n-1条无向边，所有节点组成一棵树

一共有q条查询，每条查询格式如下

查询 $k \ a_1 \ a_2 \dots \ a_k$: 给出了k个不同的重要点，其他点是非重要点

你可以攻占非重要点，被攻占的点无法通行

要让重要点两两之间不再连通，打印至少需要攻占几个非重要点

如果攻占非重要点无法达成目标，打印-1

$1 \leq n, q \leq 10^5$

$1 \leq$ 所有查询给出的点的总数 $\leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF613D>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/613/D>

虚树的原理和相关题目

题目2

大工程

一共有 n 个节点，给定 $n-1$ 条无向边，所有节点组成一棵树

如果在节点 a 和节点 b 之间建立新通道，那么代价是两个节点在树上的距离

一共有 q 条查询，每条查询格式如下

查询 k a_1 $a_2 \dots a_k$: 给出了 k 个不同的节点，任意两个节点之间都会建立新通道

打印新通道的代价和、新通道中代价最小的值、新通道中代价最大的值

$1 \leq n \leq 10^6$

$1 \leq q \leq 5 * 10^4$

$1 \leq$ 所有查询给出的点的总数 $\leq 2 * n$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P4103>

虚树的原理和相关题目

题目3

消耗战

一共有n个节点，给定n-1条无向边，每条边有边权，所有节点组成一棵树

一共有q条查询，每条查询格式如下

查询 k a1 a2 ... ak : 给出了k个不同的关键节点，并且一定不包含1号节点

你可以随意选择边进行切断，切断的代价就是边权

目的是让所有关键点都无法到达1号节点，打印最小总代价

$1 \leq n, q \leq 5 * 10^5$

$1 \leq$ 所有查询给出的点的总数 $\leq 5 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P2495>

虚树的头节点不一定是整棵树的头节点，本题特意把整棵树的头节点添加进虚树，因为答案需要

虚树的原理和相关题目

题目4

世界树

一共有n个节点，给定n-1条无向边，所有节点组成一棵树

一共有q条查询，每条查询格式如下

查询 $k \ a_1 \ a_2 \dots a_k$: 给出了k个不同的管理点，树上每个点都找最近的管理点来管理自己

如果某个节点的最近管理点有多个，选择编号最小的管理点

打印每个管理点，管理的节点数量

$1 \leq n, q \leq 3 * 10^5$

$1 \leq$ 所有查询给出的点的总数 $\leq 3 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3233>

整棵树的头节点添加进虚树，方便计算答案

比较难的树型dp问题，下方找最近 + 上方找最近 + 节点数量的修正

虚树的原理和相关题目

题目5

树上病毒传播

一共有n个城市，有n-1条无向边，所有城市组成一棵树，一共有q条查询，每条查询数据如下

首先给定k种病毒，每种病毒有初次感染的城市start[i]，还有传播速度speed[i]

然后给定m个关键城市，打印每个城市被第几号病毒感染，病毒传播的规则如下

病毒的传播按轮次进行，每一轮病毒1先传播，然后是病毒2 .. 直到病毒k，下一轮又从病毒1开始

如果第i种病毒已经感染了城市x，当自己传播时，想要感染城市y的条件如下

城市x到城市y的路径包含的边数 $\leq speed[i]$ ，城市x到城市y的路径上，除了x所有城市都未被感染

一旦城市被某种病毒感染就永久保持，不会再被其他病毒感染，传播一直持续，直到所有城市都被感染

$1 \leq n, q$ 、所有查询病毒总数、所有查询关键城市总数 $\leq 2 * 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/CF1320E>

测试链接：<https://codeforces.com/problemset/problem/1320/E>

建立虚树的过程中连接双向边 + dijkstra算法模拟多源感染的过程

虚树的原理和相关题目

题目6

寻宝游戏

一共有n个节点，节点有两种类型，刷宝的点 和 不刷宝的点

一共有n-1条无向边，每条边有边权，所有节点组成一棵树

开始时所有节点都是不刷宝的点，接下来有m条操作，格式如下

操作 $x : x$ 号点的类型翻转，刷宝的点 变成 不刷宝的点，不刷宝的点 变成 刷宝的点

一次操作后，每个刷宝的点都会产生宝物，你可以瞬移到任何点作为出发点，瞬移是无代价的

你需要走路拿到所有的宝物，最后回到出发点，打印最小的行走总路程，一共有m条打印

$1 \leq n, m \leq 10^5$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3320>

树上k个节点建立的虚树 = 树上k个节点的最小连通子树的压缩树

分析最小连通子树的性质求解本题