UAS Kalkulus

Aldi Maulana Iqbal – 2021080122

Dengan menggunakan Deret Maclaurin, buatlah deret dari persamaan di bawah ini: $y = e^{-x}$, dan carilah besaran dari deret tersebut untuk $x = 2$.

Deret Maclaurin dari e^{-x} adalah:

$$e^{-x} = 1 - x + \left(\frac{x^2}{2!}\right) - \left(\frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!}\right) - \left(\frac{x^5}{5!}\right) + \cdots$$

Jika x = 2, maka besaran dari deret tersebut adalah:

$$e^{-2} = 1 - 2 + \left(\frac{2^2}{2!}\right) - \left(\frac{2^3}{3!}\right) + \left(\frac{2^4}{4!}\right) - \left(\frac{2^5}{5!}\right) + \cdots \approx 0.135335$$

Buktikan Limit di bawah ini: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(e^x - e^{-x})}{\sin x} = 2$.

Gunakan *L'Hospital Rule*.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{\frac{d}{dx}(\sin x)}$$

Cari turunannya

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{(e^{2x} + 1)}{e^x}}{\cos x}$$

Sederhanakan

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} + 1}{e^x \times \cos x}$$

Hitung limitnya

$$\frac{e^{2 \times 0} + 1}{e^0 \times \cos 0}$$

Sederhanakan

$$2$$

Selesaikan Persamaan Diferensial Bernoulli di bawah ini: $\frac{dy}{dx} + y = xy^2$ dan carilah jawab khususnya bila $x = 0$ dan $y = 3$.

Untuk persamaan $y = xy^2$, kita dapat mengubah y menjadi $z = y^{-1}$.

$$z' = -y^{(-2)y'} = -y^{-1}$$

$$-z' + y^2 = x$$

Integral dari $-z' + y^2 dx$ sama dengan Integral dari $x\ dx$.

$$-z + \frac{1}{3}y^3 = x + C$$

$$z = \frac{1}{3}y^3 - x + C$$

Dengan memasukkan $z = y^{-1}$.

$$y = (3(x - C) + 1)^{\frac{1}{3}}$$

Jawaban bila $x = 0$ dan $y = 3$.

$$3 = (3(0 - C) + 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$3 = (1 - 3C)^{\frac{1}{3}}$$

$$9 = 1 - 3C$$

$$C = -\frac{2}{3}$$

Jawaban adalah: $y = \left(3\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + 1\right)^{\frac{1}{3}}$

Selesaikan Persamaan Diferensial dengan Variabel terpisah dari : $y\,y' = 3\cos 2x$

Tulis ulang turunan y' menggunakan Notasi Leibniz.

$$y \times \frac{dy}{dx} = 3\cos 2x$$

Pisahkan diferensial.

$$y\,dy = 3\cos 2x\ \ dx$$

Integralkan ruas kiri persamaan terhadap y dan ruas kanan persamaan terhadap x.

$$\int y\,dy = \int 3\cos 2x\,dx$$

Evaluasi integralnya.

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = \frac{3\sin 2x}{2} + C_2, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$$

Karena kedua konstanta integrasi C_1 dan C_2 adalah konstanta arbitrer, gantilah keduanya dengan konstanta C.

$$\frac{y^2}{2} = \frac{3\sin 2x}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

Kalikan kedua ruas persamaan dengan 2.

$$y^2 = 3\sin 2x + 2C\,, C \in \mathbb{R}$$

Karena ekspresi $2C$ adalah sebuah konstanta, mungkin untuk menyatakan seluruh ekspresi tersebut sebagai konstanta C.

$$y^2 = 3\sin 2x + C\,, C \in \mathbb{R}$$

Selesaikan Persamaan Diferensial Eksak di bawah ini: $(e^x \sin y - 2\,y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$

Cari $\frac{\partial M}{\partial y}$ dimana $M(x, y) = e^x \sin y - 2y \sin x$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y - 2\sin x$$

Cari $\frac{\partial N}{\partial y}$ dimana $N(x, y) = e^x \cos y + 2\cos x$.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y - 2\sin x$$

Periksa apakah $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$$e^x \cos y - 2\sin x = e^x \cos y - 2\sin x$$

Tetapkan $f(x, y)$ sama dengan integral dari $N(x, y)$.

$$f(x, y) = \int e^x \cos y + 2\cos x\, dy$$

Integralkan $N(x, y) = e^x \cos y + 2\cos x$ untuk mencari $f(x, y)$.

$$f(x, y) = e^x \sin y + 2\cos x\, y + C$$

Karena integral dari $g(x)$ akan berisi konstanta integrasi, kita dapat mengganti C dengan $g(x)$.

$$f(x, y) = e^x \sin y + 2\cos x\, y + g(x)$$

Tetapkan $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$.

$$\frac{dg}{dx} + e^x \sin y - 2y \sin x = e^x \sin y - 2y \sin x$$

Cari $\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\frac{dg}{dx} + e^x \sin y - 2y \sin x = e^x \sin y - 2y \sin x$$

Pecahkan $\frac{dg}{dx}$.

$$\frac{dg}{dx} = 0$$

Temukan antiturunan dari 0 untuk menemukan $g(x)$.

$$g(x) = C$$

Ganti $g(x)$.

$$f(x, y) = e^x \sin y + 2 \cos x \, y + C$$

Susun ulang faktor.

$$f(x, y) = e^x \sin y + 2y \cos x + C$$

Selesaikan Persamaan Diferensial Homogen di bawah ini:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(4x+3y)}{2x+y}$$

Tentukan fungsi $p(x)$ yang memenuhi kondisi $\frac{dp}{dx} = -\frac{4x+3y}{(2x+y)p}$.

Dari sini, kita akan mendapatkan $p(x) = -2x - y$.

Tentukan solusi umum yang dapat dituliskan sebagai $y = c \times e^{int(p(x))dx}$.

Integral dari $p(x)dx = -\frac{2x^2}{2} - xy = -x^2 - \frac{xy}{2} + C$,

Sehingga solusi umum dari persamaan diferensial homogen ini adalah $y = c \times e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{xy}{2}}$