Kalkulus Sesi 11

Aldi Maulana Iqbal – 20210801222

Selesaikan Persamaan Diferensial Berikut:

$(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut, pertama-tama kita perlu mengurutkan persamaan tersebut dalam bentuk yang lebih sederhana. Untuk melakukan ini, pertama-tama kita dapat mengurangi kedua bagian persamaan tersebut dengan $2xy^2 + 2x^2y$ untuk mendapatkan:

$$(2y) + (2xy') = 0$$

Kemudian, kita dapat memindahkan $2y$ ke sisi kiri persamaan tersebut dan memindahkan $2xy'$ ke sisi kanan persamaan tersebut untuk mendapatkan:

$$2y - 2xy' = 0$$

Kemudian, kita dapat membagi seluruh persamaan tersebut dengan $2y$ untuk mendapatkan:

$$1 - \left(\frac{x}{y}\right) y' = 0$$

Lalu, kita dapat memindahkan y' ke sisi kiri persamaan tersebut dan memindahkan 1 ke sisi kanan persamaan tersebut untuk mendapatkan:

$$y' - \left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Ini merupakan bentuk dari persamaan diferensial separabel. Untuk menyelesaikannya, kita dapat mengintegrasikan masing-masing bagian persamaan tersebut untuk mendapatkan:

$$\int y' dy = \int \left(\frac{x}{y}\right) dx$$

Setelah mengintegrasikan, kita akan mendapatkan:

$$\frac{y^2}{2} + C = x\, ln|y| + D$$

Di mana C dan D merupakan konstanta yang akan ditentukan oleh kondisi awal yang diberikan. Setelah menentukan nilai C dan D, kita dapat menyederhanakan persamaan tersebut untuk mendapatkan solusi yang lengkap dari persamaan diferensial tersebut.

Solusi yang lengkap dari persamaan diferensial tersebut adalah:

$$\frac{y^2}{2} + C = x\, ln|y| + D$$

$xy' + y + 4 = 0$

Tulis ulang persamaan diferensial tersebut.

$$x\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$

Pisahkan variabel-variabelnya.

Selesaikan untuk $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} - \frac{4}{x}$$

Faktor.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+4}{x}$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{y+4}$.

$$\frac{1}{y+4}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y+4}\left(-\frac{y+4}{x}\right)$$

Sederhanakan.

$$\frac{1}{y+4}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$

Tulis ulang persamaan.

$$\frac{1}{y+4}dy = -\frac{1}{x}dx$$

Integrasikan kedua sisi.

Siapkan integral di kedua sisi.

$$\int \frac{1}{y+4}dy = \int -\frac{1}{x}dx$$

Integrasikan sisi kiri.

$$\ln(|y+4|) + C_1 = \int -\frac{1}{x}dx$$

Integrasikan sisi kanan.

$$ln(|y+4|) + C_1 = -ln(|x|) + C_2$$

Kelompokkan konstanta integrasi di ruas kanan sebagai C.

$$ln(|y+4|) = -ln(|x|) + C$$

Selesaikan untuk y.

$$y = \pm\frac{e^C}{x} - 4$$

Sederhanakan konstanta integrasi.

$$y = \frac{C}{x} - 4$$

$\cos y\, dx + (2y - x \sin y)dy = 0$

Cari $\frac{\partial M}{\partial y}$ dimana $M(x, y) = \cos(y)$.

Diferensialkan M terhadap y.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d}{dy}[\cos(y)]$$

Turunan $\cos(y)$ terhadap y adalah $-\sin(y)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin(y)$$

Cari $\frac{\partial N}{\partial x}$ dimana $N(x, y) = 2y - x\sin(y)$.

Diferensialkan N terhadap x.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{d}{dx}[2y - x\sin(y)]$$

Diferensialkan.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 + \frac{d}{dx}[-x\sin(y)]$$

Evaluasi $\frac{d}{dx}[-x\sin(y)]$.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 - \sin(y)$$

Kurangi $\sin(y)$ dari 0.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\sin(y)$$

Periksa apakah $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$$-\sin(y) = -\sin(y)$$

Tetapkan $f(x, y)$ sama dengan integral dari $M(x, y)$.

$$f(x, y) = \int \cos(y)\, dx$$

Integrasikan $M(x, y) = \cos(y)$ untuk mencari $f(x, y)$.

$$f(x, y) = \cos(y)\, x + C$$

Karena integral dari $g(y)$ akan berisi konstanta integral, kita dapat mengganti C dengan $g(y)$.

$$f(x, y) = \cos(y)\, x + g(y)$$

Tetapkan $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x\sin(y)$$

Cari $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{dg}{dy} - x\sin(y) = 2y - x\sin(y)$$

Selesaikan untuk $\frac{dg}{dy}$.

$$\frac{dg}{dy} = 2y$$

Carilah anti turunan dari $2y$ untuk mencari $g(y)$.

$$g(y) = y^2 + C$$

Gantikan $g(y)$ dalam $f(x, y) = \cos(y)x + g(y)$.

$$f(x, y) = \cos(y)x + y^2 + C$$

Susun ulang faktor dalam $f(x, y) = \cos(y)x + y^2 + C$.

$$f(x, y) = x\cos(y) + y^2 + C$$