Kalkulus Sesi 12

Aldi Maulana Iqbal – 20210801222

Selesaikan Persamaan Diferensial Berikut:

$(x^2 - 1)y' + 2xy = 1$

Tulis ulang persamaan diferensial.

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$$

Diferensiasikan menggunakan **Product Rule** yang menyatakan bahwa $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$ adalah $f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$ dimana $f(x) = x^2 - 1$ and $g(x) = y$.

$$(x^2 - 1)\frac{d}{dx}[y] + y\frac{d}{dx}[x^2 - 1]$$

Tulis ulang $\frac{d}{dx}[y]$ sebagai y'.

$$(x^2 - 1)y' + y\frac{d}{dx}[x^2 - 1]$$

Dengan **Sum Rule**, turunan dari $x^2 - 1$ terhadap x adalah $\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[-1]$.

$$(x^2 - 1)y' + y\left(\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[-1]\right)$$

Diferensialkan menggunakan **Power Rule**.

$$(x^2 - 1)y' + y\left(2x + \frac{d}{dx}[-1]\right)$$

Karena -1 konstan terhadap x, turunan dari -1 terhadap x adalah 0.

$$(x^2 - 1)y' + y(2x + 0)$$

Tambahkan $2x$ dan 0.

$$(x^2 - 1)y' + y(2x)$$

Gantikan $\frac{dy}{dx}$ dengan y'.

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + y(2x)$$

Hapus tanda kurung.

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + y \cdot 2x$$

Pindahkan y.

$$(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2xy$$

Tulis ulang sisi kiri sebagai hasil dari membedakan suatu produk.

$$\frac{d}{dx}[(x^2-1)y]=1$$

Siapkan integral di setiap sisi.

$$\int \frac{d}{dx}[(x^2-1)y]\,dx=\int dx$$

Integrasikan sisi kiri.

$$(x^2-1)y=\int dx$$

Terapkan **Constant Rule**.

$$(x^2-1)y=x+C$$

Bagikan setiap ruas dengan x^2-1.

$$\frac{(x^2-1)y}{x^2-1}=\frac{x}{x^2-1}+\frac{C}{x^2-1}$$

Sederhanakan ruas kiri.

$$y=\frac{x}{x^2-1}+\frac{C}{x^2-1}$$

Sederhanakan ruas kanan.

$$y=\frac{x}{(x+1)(x-1)}+\frac{C}{(x+1)(x-1)}$$

$y''-y'=x^2-2x+3$

Tulis ulang persamaan diferensial.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=x^2-2x+3$$

Misalkan $v=\frac{dy}{dx}$. Maka $\frac{dv}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$

Gantikan v untuk $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{dv}{dx}$ untuk $\frac{d^2y}{dx^2}$ untuk mendapatkan persamaan diferensial dengan variabel dependen v dan variabel independen x.

$$\frac{dv}{dx}-v=x^2-2x+3$$

Faktor integral didefinisikan dengan rumus $e^{\int P(x)dx}$, dengan $P(x)=-1$.

Siapkan integrasi.

$$e^{\int -1dx}$$

Terapkan **Constant Rule**.

$$e^{-x+C_1}$$

Hapus konstanta integrasi.

$$e^{-x}$$

Kalikan setiap suku dengan faktor integral e^{-x}.

$$e^{-x}\frac{dv}{dx} - ve^{-x} = x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 3e^{-x}$$

Tulis ulang sisi kiri sebagai hasil dari membedakan suatu produk.

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}v] = x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 3e^{-x}$$

Siapkan integral di setiap sisi.

$$\int \frac{d}{dx}[e^{-x}v] = \int x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 3e^{-x}$$

Integrasikan sisi kiri.

$$e^{-x}v = \int x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 3e^{-x}$$

Integrasikan sisi kanan.

$$e^{-x}v = x^2(-e^{-x}) - 3e^{-x} + C_5$$

Bagi setiap ruas dengan e^{-x} dan sederhanakan.

$$\frac{e^{-x}v}{e^{-x}} = \frac{x^2(-e^{-x})}{e^{-x}} + \frac{-3e^{-x}}{e^{-x}} + \frac{C_5}{e^{-x}}$$

Sederhanakan.

$$v = -x^2 - 3 + \frac{C_5}{e^{-x}}$$

Ganti semua v dengan $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 - 3 + \frac{C_5}{e^{-x}}$$

Tulis ulang persamaan.

$$dy = \left(-x^2 - 3 + \frac{C_5}{e^{-x}}\right)dx$$

Integrasikan kedua sisi.

Siapkan integral di setiap sisi.

$$\int dy = \int \left(-x^2 - 3 + \frac{C_5}{e^{-x}}\right)dx$$

Terapkan **Constant Rule**.

$$y + C_6 = \int -x^2 - 3 + \frac{C_5}{e^{-x}}\,dx$$

Integrasikan sisi kanan.

$$y + C_6 = -\frac{1}{3}x^3 + e^x C_5 - 3x + C_{10}$$

Kelompokkan konstanta integrasi di ruas kanan sebagai D.

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + e^x C - 3x + D$$

$$y'' + y - 2 = 5e^{-2x}$$