湛江一中卓越班　 2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点（1）

1. 函数零点问题的常见题型：判断函数是否存在零点或者求零点的个数；根据含参函数零点情况，求参数的值或取值范围.

求解步骤：

第一步：将问题转化为函数的零点问题，进而转化为函数的图像与 x 轴(或直线 $y=k$)在某区间上的交点问题；

第二步：利用导数研究该函数在此区间上的单调性、极值、端点值等性质，进而画出其图像；

第三步：结合图像判断零点或根据零点分析参数.

利用导数确定函数零点或方程根个数的方法.

(1)构建函数 $g(x)$(要求 $g'(x)$易求，$g'(x)=0$ 可解)，转化为确定 $g(x)$的零点个数问题，利用导数研究该函数的单调性、极值，并确定定义区间端点值的符号(或变化趋势)等，画出 $g(x)$的图象草图，数形结合求解.

(2)利用零点存在性定理：先用该定理判断函数在某区间上有零点，然后利用导数研究函数的单调性、极值(最值)及区间端点值符号，进而判断函数在该区间上零点的个数.

探究提高　判断(证明)函数零点的常用方法

(1)构造函数 $g(x)$，利用导数研究 $g(x)$的性质，结合 $g(x)$的图象，判断函数零点的个数.

(2)利用零点存在性定理，先判断函数在某区间有零点，再结合图象与性质确定函数有多少个零点.

规律方法　(1)三步求解函数零点(方程根)的个数问题

第一步：将问题转化为函数的零点问题，进而转化为函数的图象与 x 轴(或直线 $y=k$)在该区间上的交点问题；

第二步：利用导数研究该函数在该区间上的单调性、极值(最值)、端点值等性质；

第三步：结合图象求解.

(2)已知零点求参数的取值范围：①结合图象与单调性，分析函数的极值点；②依据零点确定极值的范围；③对于参

数选择恰当的分类标准进行讨论.

探究提升　(1)零点的个数与函数的单调性、极值有关，故应注意对导函数中的参数分类讨论.

(2)利用零点存在定理计算函数端点时，注意放缩法的应用.

探究提高　1. 与函数零点有关的参数范围问题，往往利用导数研究函数的单调区间和极值点，并结合特殊点判断函数的大致图象，进而求出参数的取值范围. 也可分离出参数，转化为两函数图象的交点情况.

2. 根据函数零点个数确定参数取值范围的核心思想是“数形结合”，即通过函数图象与 x 轴的交点个数，或者两个相关函数图象的交点个数确定参数满足的条件，进而求得参数的取值范围，解决问题的步骤是“先形后数”.

题型一　判断、证明或讨论函数零点的个数

1.已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数，证明：

(1)$f'(x)$在区间$\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点；

(2)$f(x)$有且仅有 2 个零点.

2.已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b$，其中 $a>0$，$b\in\mathbf{R}$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)若$\dfrac{1}{2}<a\leqslant\dfrac{e^2}{2}$，且 $b>2a$，证明：函数 $f(x)$有一个零点.

(3)若 $0<a<\frac{1}{2}$，且 $b\leqslant 2a$，证明：函数 $f(x)$只有一个零点.

3.已知函数 $f(x)=a^x-ax(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

(1)当 $a=\mathrm{e}$ 时，求函数 $f(x)$的最值；

(2)设 $g(x)$是 $f(x)$的导函数，讨论函数 $g(x)$在区间(0，1)零点的个数.

4.已知函数 $f(x)=x^3-x$.设函数 $t(x)=\frac{f(x)}{x\sin x}-2$，$x\in(0，\pi)$，试判断 $t(x)$的零点个数，并证明你的结论.

5.已知函数 $f(x)=\ln x-a\mathrm{e}^x+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$极值点的个数；

(2)讨论函数 $f(x)$的零点个数.

6．已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)\mathrm{e}^x$，$a\in\mathbf{R}$，若 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$，证明：$f(x)$有两个零点.

7.已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x(a\in\mathbf{R})$.

(1)证明：曲线 $y=f(x)$在点(1，$f(1)$)处的切线 l 恒过定点；

(2)若 $f(x)$有两个零点 x_1，x_2，且 $x_2>2x_1$，证明：$\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\frac{4}{\mathrm{e}}$.

8. 已知函数 $f\left(x\right)=x^3+ax+\frac{1}{4}$， $g\left(x\right)=-\ln x$.

（Ⅰ）当 a 为何值时， x 轴为曲线 $y=f\left(x\right)$ 的切线；

（Ⅱ）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h\left(x\right)=\min\left\{f\left(x\right),g\left(x\right)\right\}\left(x>0\right)$，讨论 $h\left(x\right)$ 零点的个数.

题型二　根据零点个数求参数范围

9.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+2)$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $f(x)$有两个零点，求 a 的取值范围.

10.已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$.

(1)当 $a=2$ 时，　求 $f(x)$的单调区间；

(2)若曲线 $y=f(x)$与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，求 a 的取值范围.

11.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$.

(1)若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$；

(2)若 $f(x)$在$(0，+\infty)$只有一个零点，求 a.

12.已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

(1)若 $f(x)$在 $x=x_1$，$x_2(x_1\neq x_2)$处导数相等，证明：$f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$；

(2)若 $a\leqslant 3-4\ln 2$，证明：对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$有唯一公共点.

13.已知函数 $f(x)=\ln x$.若关于 x 的方程 $f(x^2)-x+\frac{m}{x}-\ln m=0$ 有四个不同的实数根，求实数 m 的取值范围.

14．已知函数 $f(x)=a(lnx+\frac{1}{x})$， $a\in R$．

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）若方程 $2f(x)-lnx+x+2=0$ 有三个解，求实数 a 的取值范围．

15．已知函数 $f(x)=e^x-a(x-2)^2$， $a>0$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性，设 $f'(x)$ 的最小值为 m，并求证：$m\leqslant e^2$；

（2）若 $f(x)$ 有三个零点，求 a 的取值范围．

16.已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$．

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $f(x)$有两个零点，求 a 的取值范围．

17 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$，若曲线 $y=f(x)$与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，求 a 的取值范围．

18.已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$．

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $f(x)$有两个零点，求 a 的取值范围．

类型三　求零点及零点代数式的最值与范围

19.设函数 $f(x)=a\ln x-2x+3$，x_1，$x_2(x_1<x_2)$为函数 $f(x)$的两个零点．

(1)求 a 的取值范围；

(2)当$\frac{x_2}{x_1}$取得最小值时，求 a 的值．

20.已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x+\frac{1}{x}$．

（1）求 $f\left(x\right)$的单调区间；

（2）若曲线 $y=f\left(x\right)$与直线 $y=kx-k\left(k>0\right)$有且只有一个公共点 $P\left(x_0,y_0\right)$，求证：$2<x_0<3$．（参考数据：$\ln2\approx0.69,\ln3\approx1.10,\ln5\approx1.61$）

21. 设函数 $f\left(x\right)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f\left(x\right)$在点$\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$处的切线与 y 轴垂直．

（1）求 b．

（2）若 $f\left(x\right)$有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f\left(x\right)$所有零点的绝对值都不大于 1．

22. 函数 $p(x)=\ln x+x-4$，$q(x)=axe^x$（$a\in R$）．

（Ⅰ）若 $a=e$，设 $f(x)=p(x)-q(x)$，试证明 $f'(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in(0,\frac{1}{e})$，并求 $f(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式$|p(x)|>q(x)$ 的解集中有且只有两个整数，求实数 a 的取值范围．

23.已知函数 $f\left(x\right)=x+ke^x$，$k\in\mathrm{R}$．

(1)求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $M\left(2,f\left(2\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(3)若函数 $f(x)=x+ke^{x}$ 有两个不同的零点，记较大的零点为x_0，证明：当 $x_0\in(1,2)$ 时，$\left(1+ke^{2}\right)x_0-ke^{2}>0$.

24.已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-x$.

(1)若 $a=-1$，求函数 $f(x)$的极值；

(2)设 $f'(x)$为 $f(x)$的导函数，若 x_1，x_2 是函数 $f'(x)$的两个不相等的零点，求证：$f(x_1)+f(x_2)<x_1+x_2-5$.

题型四　函数零点的综合问题

25.设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$零点的个数；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln \dfrac{2}{a}$.

26. 设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$在点$\left(\dfrac{1}{2}，f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$处的切线与 y 轴垂直.

(1)求 b；

(2)若 $f(x)$有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$所有零点的绝对值都不大于 1.

题型一　判断、证明或讨论函数零点的个数

1.已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数，证明：

(1)$f'(x)$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点；

(2)$f(x)$有且仅有 2 个零点.

证明　(1)设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$，

$g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)$单调递减，

而 $g'(0)>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，可得 $g'(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$有唯一零点，设为 α.

则当 $x\in(-1,\alpha)$时，$g'(x)>0$；

当 $x\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$在$(-1,\alpha)$上单调递增，在$\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，

故 $g(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点，

即 $f'(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点.

(2)$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

①当 $x\in(-1,0]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(-1,0)$上单调递增，而 $f'(0)=0$，

所以当 $x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减.

又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$在$(-1,0]$上的唯一零点；

②当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(0,\alpha)$上单调递增，在$\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，

而 $f'(0)=0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，

所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\beta)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$在$(0,\beta)$上单调递增，在$\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减.

又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$，

所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)>0$.

从而，$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上没有零点；

③当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}<0$，

所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减.而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$，

所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$上有唯一零点；

④当 $x\in(\pi，+\infty)$时，$\ln(x+1)>1$，

所以 $f(x)<0$，从而 $f(x)$在$(\pi，+\infty)$上没有零点.

综上，$f(x)$有且仅有 2 个零点.

2.已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax^2+b$，其中 $a>0$，$b\in\mathbf{R}$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)若$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，且 $b>2a$，证明：函数 $f(x)$有一个零点.

(3)若 $0<a<\frac{1}{2}$，且 $b\leqslant 2a$，证明：函数 $f(x)$只有一个零点.

(1)解　由函数的解析式，得 $f'(x)=x(e^x-2a)$，$x\in\mathbf{R}$.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\ln(2a)$，

当 $0<a<\frac{1}{2}$时，令 $f'(x)>0$，得 $x>0$ 或 $x<\ln(2a)$；

令 $f'(x)<0$，得 $\ln(2a)<x<0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，\ln(2a))$，$(0，+\infty)$上单调递增，在$(\ln(2a)，0)$上单调递减.

当 $a=\frac{1}{2}$时，$f'(x)=x(e^x-1)\geqslant 0$ 且等号不恒成立，所以 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增.

当 $a>\frac{1}{2}$时，令 $f'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>\ln(2a)$；令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\ln(2a)$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，0)$，$(\ln(2a)，+\infty)$上单调递增，在$(0，\ln(2a))$上单调递减.

(2)证明　由于$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，故 $1<2a\leqslant e^2$，

则 $b>2a>1$，$f(0)=b-1>0$，$f(-b)=(-1-b)e^{-b}-ab^2+b<0$.

又由(1)知函数 $f(x)$在区间$(-\infty，0)$上单调递增，故函数 $f(x)$在区间$(-\infty，0)$上有一个零点.

$f(\ln(2a))=2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+b$

$>2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+2a$

$=2a\ln(2a)-a[\ln(2a)]^2$

$=a\ln(2a)[2-\ln(2a)]$，

由于$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，$1<2a\leqslant e^2$，故 $a\ln(2a)[2-\ln(2a)]\geqslant 0$，

结合函数 $f(x)$的单调性可知函数 $f(x)$在区间$(0，+\infty)$上没有零点.

综上可得，函数 $f(x)$只有一个零点.

（3）

证明 由例题(1)知，$f(x)$在$(-\infty，\ln(2a))$，$(0，+\infty)$上单调递增，在$(\ln(2a)，0)$上单调递减.

$f(\ln(2a))=2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+b\leqslant 2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+2a$

$=2a\ln(2a)-a[\ln(2a)]^2=a\ln(2a)[2-\ln(2a)]$，

由于$0<a<\frac{1}{2}$，$0<2a<1$，则$\ln(2a)<0$，

故$a\ln(2a)[2-\ln(2a)]<0$，

所以$x\leqslant 0$时，$f(x)\leqslant f(\ln(2a))<0$，此时$f(x)$无零点；

当$x>0$时，$f(x)$单调递增，注意到$f(0)=b-1\leqslant 2a-1<0$，

取$c=\sqrt{2(1-b)+2}$，因为$b\leqslant 2a<1$，所以$c>\sqrt{2}>1$，

又易证$e^c>c+1$，

所以$f(c)=(c-1)e^c-ac^2+b>(c-1)(c+1)-ac^2+b$

$=(1-a)c^2+b-1>\frac{1}{2}c^2+b-1=1-b+1+b-1=1>0$，

所以$f(x)$在$(0，c)$上有唯一零点，即$f(x)$在$(0，+\infty)$上有唯一零点.

综上，$f(x)$只有一个零点.

3.已知函数$f(x)=a^x-ax(a>0$且$a\neq 1)$.

(1)当$a=e$时，求函数$f(x)$的最值；

(2)设$g(x)$是$f(x)$的导函数，讨论函数$g(x)$在区间$(0，1)$零点的个数.

解 (1)当$a=e$时，$f(x)=e^x-ex$，$f'(x)=e^x-e$，

令$f'(x)=0$，得$x=1$，

当$x<1$时，$f'(x)<0$；当$x>1$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(-\infty，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，

则$f(x)$的最小值为$f(1)=0$，无最大值.

(2)$g(x)=f'(x)=a^x\ln a-a$，

①若$0<a<1$，$g(x)<0$在$(0，1)$恒成立，此时$g(x)$在$(0，1)$没有零点.

②若$a>1$，$g'(x)=(\ln a)^2\cdot a^x>0$，所以$g(x)$在$(0，1)$单调递增.

易得$g(0)=\ln a-a$，令$h(a)=\ln a-a(a>1)$，

因为$h'(a)=\frac{1}{a}-1<0$，所以$h(a)$在$(1，+\infty)$单调递减，

故$h(a)<h(1)=-1<0$，所以$g(0)=\ln a-a<0$；

又$g(1)=a\ln a-a=a(\ln a-1)$，

①当$1<a\leqslant e$时，$g(1)\leqslant 0$，$g(x)$在$(0，1)$没有零点.

②当$a>e$时，$g(1)>0$，$g(x)$在$(0，1)$有且只有1个零点.

综上所述，若$0<a<1$或$1<a\leqslant e$，$g(x)$在$(0，1)$没有零点；若$a>e$，$g(x)$在$(0，1)$有且只有1个零点.

4.已知函数 $f(x)=x^3-x$.设函数 $t(x)=\dfrac{f(x)}{x\sin x}-2$，$x\in(0，\pi)$，试判断 $t(x)$的零点个数，并证明你的结论.

解　$t(x)=0$，$x\in(0，\pi)$，即$\dfrac{x^2-1}{\sin x}-2=0$，

等价于 $x^2-1-2\sin x=0$.

设 $g(x)=x^2-1-2\sin x$，$x\in(0，\pi)$，

则 $g'(x)=2x-2\cos x$.

①当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2}，\pi\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{2}，\pi\right)$上单调递增．

又 $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}-3<0$，$g(\pi)=\pi^2-1>0$，

所以 $g(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{2}，\pi\right)$上有一个零点．

②当 $x\in\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right)$时，设 $h(x)=g'(x)=2x-2\cos x$.

$h'(x)=2+2\sin x>0$，

所以 $g'(x)$在区间$\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

又 $g'(0)=-2<0$，$g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi>0$，

所以存在 $x_0\in\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $g'(x_0)=0$.

所以当 $x\in(0，x_0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当 $x\in\left(x_0，\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

又 $g(0)=-1<0$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}-3<0$，

所以 $g(x)$在区间$\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right)$上无零点．

综上所述，函数 $t(x)$在定义域内只有一个零点．

5.已知函数 $f(x)=\ln x-ae^x+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$极值点的个数;

(2)讨论函数 $f(x)$的零点个数.

解　(1)由 $f(x)=\ln x-ae^x+1$，知 $x\in(0，+\infty)$．

当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-e^x+1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-e^x$，

显然 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减．

又 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$，$f'(1)=1-e<0$，

所以 $f'(x)$在$\left(\frac{1}{2}，1\right)$上存在零点 x_0，且是唯一零点，

当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$f'(x)<0$，

所以 x_0 是 $f(x)=\ln x-e^x+1$ 的极大值点，且是唯一极值点．

(2)令 $f(x)=\ln x-ae^x+1=0$，则 $a=\frac{\ln x+1}{e^x}$.

令 $y=a$，$g(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$，

$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}(x>0)$．

令 $h(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$，

所以 $h(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，而 $h(1)=0$，

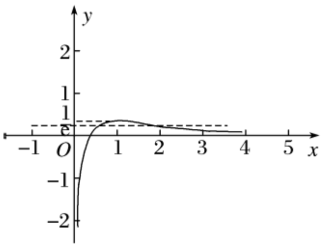
故当 $x\in(0,1)$时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

当 $x\in(1，+\infty)$时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$g(x)$单调递减．

故 $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$.

又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=0$，当 $x>1$ 且 $x\to+\infty$时，$g(x)>0$ 且 $g(x)\to0$，

作出函数 $g(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$的图象如图所示．



结合图象知，当 $a>\frac{1}{e}$时，$f(x)$无零点，

当 $a\leqslant0$ 或 $a=\frac{1}{e}$时，$f(x)$有 1 个零点，

当 $0<a<\frac{1}{e}$时，$f(x)$有两个零点．

6．已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)e^x$，$a\in\mathbf{R}$，若 $0<a<\frac{1}{e}$，证明：$f(x)$有两个零点.

证明　$f'(x)=\frac{1}{x}-axe^x=\frac{1-ax^2e^x}{x}$，

令 $g(x)=1-ax^2e^x(x>0)$，

$\therefore g'(x)=-ax(x+2)e^x<0$，

$\therefore g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

又 $g(1)=1-ae>0$，

$g\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2\frac{1}{a}=1-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2<0$，

$\therefore \exists x_0\in\left(1，\ln\frac{1}{a}\right)$，使 $g(x_0)=0$，即 $1-ax_0^2e^{x_0}=0$，

$\therefore$当 $x\in(0，x_0)$时，$g(x)>0$，$\therefore f'(x)>0$，

当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$g(x)<0$，$\therefore f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$在$(0，x_0)$上单调递增，在$(x_0，+\infty)$上单调递减，

$\therefore f(x)_{max}=f(x_0)>f(1)=0$，

$\because f(1)=0$，$\therefore f(x)$在$(0，x_0)$上有唯一零点 1，

又 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-\ln\frac{1}{a}+1$，

易证 $\ln x<x-1(x>1)$，

$\therefore \ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)<\ln\frac{1}{a}-1$，

$\therefore f\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$，

$\therefore f(x)$在$(x_0，+\infty)$上有唯一零点，

综上，$f(x)$有两个零点．

7.已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x(a\in\mathbf{R})$.

(1)证明：曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线 l 恒过定点；

(2)若 $f(x)$有两个零点 x_1，x_2，且 $x_2>2x_1$，证明：$\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\frac{4}{e}$.

证明　(1)$f'(x)=\ln x-2ax+2$，则 $f'(1)=2-2a$，

即切线斜率为 $2-2a$，

又 $f(1)=1-a$，

则切线 l 的方程为 $y-(1-a)=(2-2a)(x-1)$，

即 $y=(2-2a)\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

可得当 $x=\frac{1}{2}$时，$y=0$，故切线 l 恒过定点$\left(\frac{1}{2}，0\right)$.

(2)$\because x_1$，x_2是 $f(x)$的零点，$x_2>2x_1$，且 $x_1>0$，$x_2>0$，

则$\begin{cases}x_1\ln x_1-ax_1^2+x_1=0,\\x_2\ln x_2-ax_2^2+x_2=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}\ln x_1+1=ax_1,\\\ln x_2+1=ax_2,\end{cases}$

$\therefore a=\dfrac{\ln x_1+\ln x_2+2}{x_1+x_2}=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

即 $\ln(x_1x_2)+2=\dfrac{(x_1+x_2)\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$，

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，则 $t>2$，则 $\ln(x_1x_2)+2=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$，

令 $g(t)=\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}$，则 $g'(t)=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$.

令 $h(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$，则 $h'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}>0$，则 $h(t)$单调递增，

$\therefore h(t)>h(2)=\dfrac{3}{2}-2\ln 2>0$，即 $g'(t)>0$，则 $g(t)$单调递增，

$\therefore g(t)>g(2)=3\ln 2$，

$\therefore \ln(x_1x_2)+2>3\ln 2$，即 $\ln(x_1x_2)>3\ln 2-2=\ln\dfrac{8}{e^2}$，即 $x_1x_2>\dfrac{8}{e^2}$，

则$\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\sqrt{2x_1x_2}>\dfrac{4}{e}$(由于 $x_1\neq x_2$，故不取等号)，

8. 已知函数 $f(x)=x^3+ax+\dfrac{1}{4}$， $g(x)=-\ln x$.

（Ⅰ）当 a 为何值时， x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（Ⅱ）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m,n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}(x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

【答案】:（Ⅰ） $a=-\dfrac{3}{4}$；（Ⅱ）当 $a>-\dfrac{3}{4}$ 或 $a<-\dfrac{5}{4}$ 时， $h(x)$ 由一个零点；当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 或 $a=-\dfrac{5}{4}$ 时， $h(x)$ 有两个零点；当 $-\dfrac{5}{4}<a<-\dfrac{3}{4}$ 时， $h(x)$ 有三个零点.

【解析】:（Ⅰ）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $(x_0,0)$，

则 $f(x_0)=0$， $f'(x_0)=0$，即$\begin{cases}x_0^3+ax_0+\dfrac{1}{4}=0\\3x_0^2+a=0\end{cases}$，解得 $x_0=\dfrac{1}{2},a=-\dfrac{3}{4}$.

因此，当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 时， x 轴是曲线 $y=f(x)$ 的切线.

（Ⅱ）当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $g(x)=-\ln x<0$， 从而 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\le g(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 在（1，$+\infty$）无零点.

当 $x=1$ 时，若 $a\geq-\frac{5}{4}$，则 $f\left(1\right)=a+\frac{5}{4}\geq0$，$h\left(1\right)=\min\left\{f\left(1\right),g\left(1\right)\right\}=g\left(1\right)=0$, 故 $x=1$ 是 $h\left(x\right)$ 的零点；若 $a<-\frac{5}{4}$，则 $f\left(1\right)=a+\frac{5}{4}<0$，$h\left(1\right)=\min\left\{f\left(1\right),g\left(1\right)\right\}=f\left(1\right)<0$, 故 $x=1$ 不是 $h\left(x\right)$ 的零点.

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$g\left(x\right)=-\ln x>0$，所以只需考虑 $f\left(x\right)$ 在（0, 1）的零点个数.

（ⅰ）若 $a\leq-3$ 或 $a\geq0$，则 $f'(x)=3x^2+a$ 在（0, 1）无零点，故 $f\left(x\right)$ 在（0, 1）单调，而 $f\left(0\right)=\frac{1}{4}$，$f\left(1\right)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $a\leq-3$ 时，$f\left(x\right)$ 在（0，1）有一个零点；当 $a\geq0$ 时，$f\left(x\right)$ 在（0，1）无零点.

（ⅱ）若 $-3<a<0$，则 $f\left(x\right)$ 在（0，$\sqrt{-\frac{a}{3}}$）单调递减，在（$\sqrt{-\frac{a}{3}}$，1）单调递增，故当 $x=\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时，$f\left(x\right)$ 取的最小值，最小值为 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}$.

①若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)>0$，即 $-\frac{3}{4}<a<0$，$f\left(x\right)$ 在（0, 1）无零点.

②若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=0$，即 $a=-\frac{3}{4}$，则 $f\left(x\right)$ 在（0, 1）有唯一零点；

③若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)<0$，即 $-3<a<-\frac{3}{4}$，由于 $f\left(0\right)=\frac{1}{4}$，$f\left(1\right)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$f\left(x\right)$ 在（0, 1）有两个零点；当 $-3<a\leq-\frac{5}{4}$ 时，$f\left(x\right)$ 在（0, 1）有一个零点. …10 分

综上，当 $a>-\frac{3}{4}$ 或 $a<-\frac{5}{4}$ 时，$h\left(x\right)$ 由一个零点；当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{5}{4}$ 时，$h\left(x\right)$ 有两个零点；当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$h\left(x\right)$ 有三个零点.

题型二　根据零点个数求参数范围

9.已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解　(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-2$，$x\in\mathbf{R}$，

则 $f'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty，0)$ 单调递减，在 $(0，+\infty)$ 单调递增.

(2)$f'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$单调递增.

故 $f(x)$至多存在一个零点，不合题意.

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=\ln a$.

当 $x\in(-\infty，\ln a)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\ln a，+\infty)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(-\infty，\ln a)$单调递减，在$(\ln a，+\infty)$单调递增.

故当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$.

(ⅰ)若 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)\geqslant 0$，$f(x)$在$(-\infty，+\infty)$至多存在一个零点，不合题意.

(ⅱ)若 $a>\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)<0$.

因为 $f(-2)=e^{-2}>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty，\ln a)$存在唯一零点.

由(1)知，当 $x>2$ 时，$e^x-x-2>0$.

所以当 $x>4$ 且 $x>2\ln(2a)$时，$f(x)=e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\ln(2a)}\left(\frac{x}{2}+2\right)-a(x+2)=2a>0$.

故 $f(x)$在$(\ln a，+\infty)$存在唯一零点.

从而 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$有两个零点.

综上，a 的取值范围是$\left(\frac{1}{e}，+\infty\right)$.

10.已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$.

(1)当 $a=2$ 时， 求 $f(x)$的单调区间;

(2)若曲线 $y=f(x)$与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，求 a 的取值范围.

解 (1)当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{2^x}(x>0)$，

$f'(x)=\frac{x(2-x\ln 2)}{2^x}(x>0)$，

令 $f'(x)>0$，则 $0<x<\frac{2}{\ln 2}$，此时函数 $f(x)$单调递增，

令 $f'(x)<0$，则 $x>\frac{2}{\ln 2}$，此时函数 $f(x)$单调递减，

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{2}{\ln 2}\right)$，单调递减区间为$\left(\dfrac{2}{\ln 2},+\infty\right)$.

(2)曲线 $y=f(x)$与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，

可转化为方程$\dfrac{x^a}{a^x}=1(x>0)$有两个不同的解，即方程$\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln a}{a}$有两个不同的解.

设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，

令 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，得 $x=\mathrm{e}$，

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$单调递增，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$单调递减，

故 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

且当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g(x)\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，又 $g(1)=0$，

所以 $0<\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $a>1$ 且 $a\neq\mathrm{e}$，

即 a 的取值范围为$(1,\mathrm{e})\cup(\mathrm{e},+\infty)$.

2.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$.

(1)若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$；

(2)若 $f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点，求 a.

(1)证明　当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant 1$ 等价于$(x^2+1)\mathrm{e}^{-x}-1\leqslant 0$.

设函数 $g(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{-x}-1$，则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)\mathrm{e}^{-x}=-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}$，

当 $x\neq 1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

而 $g(0)=0$，故当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\geqslant 1$.

(2)解　设函数 $h(x)=1-ax^2\mathrm{e}^{-x}$.

$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点当且仅当 $h(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$h(x)>0$，$h(x)$没有零点；

②当 $a>0$ 时，$h'(x)=ax(x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

当 $x\in(0,2)$时，$h'(x)<0$；

当 $x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$在$(0，2)$单调递减，在$(2，+\infty)$单调递增.

故 $h(2)=1-\frac{4a}{e^2}$是 $h(x)$在$[0，+\infty)$的最小值.

1 若 $h(2)>0$，即 $a<\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在$(0，+\infty)$没有零点；

2 若 $h(2)=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在$(0，+\infty)$只有一个零点；

3 若 $h(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$，由于 $h(0)=1$，所以 $h(x)$在$(0，2)$有一个零点.

由(1)知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，所以

$$h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0.$$

故 $h(x)$在$(2，4a)$有一个零点.

因此 $h(x)$在$(0，+\infty)$有两个零点.

综上 $f(x)$在$(0，+\infty)$只有一个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$.

3.已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

(1)若 $f(x)$在 $x=x_1$，$x_2(x_1\neq x_2)$处导数相等，证明：$f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$；

(2)若 $a\leqslant 3-4\ln 2$，证明：对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$有唯一公共点.

证明　(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，导函数 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$，

由 $f'(x_1)=f'(x_2)$得$\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_2}}-\frac{1}{x_2}$，

因为 $x_1\neq x_2$，所以$\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{1}{2}$.

由基本不等式得$\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geqslant 2\sqrt[4]{x_1x_2}$，

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1x_2>256$.

由题意得 $f(x_1)+f(x_2)=\sqrt{x_1}-\ln x_1+\sqrt{x_2}-\ln x_2=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln(x_1x_2)$.

设 $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}-\ln x$，

则 $g'(x)=\frac{1}{4x}(\sqrt{x}-4)$，

所以 $x>0$ 时，$g'(x)$，$g(x)$的变化情况如下表：

x	$(0，16)$	16	$(16，+\infty)$
$g'(x)$	-	0	+

$g(x)$		$2-4\ln 2$	

所以 $g(x)$在$(256，+\infty)$上单调递增，故

$g(x_1x_2)>g(256)=8-8\ln 2$，

即 $f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$.

(2)令 $m=e^{-(|a|+k)}$，$n=\left(\frac{|a|+1}{k}\right)^2+1$，则

$f(m)-km-a>|a|+k-k-a\geqslant 0$，

$f(n)-kn-a<n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{n}-k\right)\leqslant n\left(\frac{|a|+1}{\sqrt{n}}-k\right)<0$，

所以，存在 $x_0\in(m，n)$使 $f(x_0)=kx_0+a$，

所以，对于任意的 $a\in\mathbf{R}$ 及 $k\in(0，+\infty)$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$有公共点.

由 $f(x)=kx+a$ 得 $k=\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$.

设 $h(x)=\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$，

则 $h'(x)=\frac{\ln x-\frac{\sqrt{x}}{2}-1+a}{x^2}=\frac{-g(x)-1+a}{x^2}$，

其中 $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}-\ln x$.

由(1)可知 $g(x)\geqslant g(16)$，又 $a\leqslant 3-4\ln 2$，

故 $-g(x)-1+a\leqslant -g(16)-1+a=-3+4\ln 2+a\leqslant 0$，

所以 $h'(x)\leqslant 0$，即函数 $h(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，因此方程 $f(x)-kx-a=0$ 至多 1 个实根.

综上，当 $a\leqslant 3-4\ln 2$ 时，对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$有唯一公共点.

4.(2021 **浙江百校联考**)已知函数 $f(x)=\ln x$.若关于 x 的方程 $f(x^2)-x+\frac{m}{x}-\ln m=0$ 有四个不同的实数根，求实数 m 的取值范围.

解　当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$在区间$(-\infty，0)$单调递减，又 $h(-\sqrt{m})=0$，

故 $h(x)$在区间$(-\infty，0)$有唯一实根，

当 $x>0$ 时，$h(x)=\ln x^2-x+\frac{m}{x}-\ln m$，$h'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{m}{x^2}=\frac{-x^2+2x-m}{x^2}$，

①若 $m\geqslant 1$，$-x^2+2x-m=-(x-1)^2+1-m\leqslant 0$，

当 $x>0$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，$h(x)$在区间$(0，+\infty)$单调递减，

故 $h(x)$在区间$(0，+\infty)$至多有一个实根，不符合题意.

②若 $0<m<1$，令 x_1，$x_2(x_1<x_2)$是方程 $-x^2+2x-m=0$ 的两不同实根，

则 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=m$，则 $0<x_1<x_2$，

故 $h(x)$在区间$(0，x_1)$，$(x_2，+\infty)$上单调递减，在区间$(x_1，x_2)$上单调递增.

$h(x_1)=\ln x_1^2-x_1+\dfrac{m}{x_1}-\ln m=\ln x_1^2-x_1+\dfrac{-x_1^2+2x_1}{x_1}-\ln(-x_1^2+2x_1)=-2x_1+2+\ln x_1-\ln(2-x_1)$，

$\varphi(x)=-2x+2+\ln x-\ln(2-x)(0<x<1)$，

$\varphi'(x)=-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{2(x-1)^2}{x(2-x)}>0$，

$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，$h(x_1)<0$，同理可证 $h(x_2)>0$.

取 $x_3=\left(1+\sqrt{2+\dfrac{1}{m}}\right)^2>x_2=1+\sqrt{1-m}$，

$h(x_3)<2\sqrt{x_3}-x_3+1+\dfrac{1}{m}=0$.

取 $x_4=\min\left\{\ln\dfrac{1}{m}，\dfrac{m^2}{4}\right\}$，

$x_4\leqslant\dfrac{m^2}{4}<\dfrac{m}{2}<x_1=1-\sqrt{1-m}$，

$h(x_4)>2\sqrt{x_4}-\dfrac{2}{\sqrt{x_4}}+\dfrac{m}{x_4}+\left(\ln\dfrac{1}{m}-x_4\right)=2\sqrt{x_4}+\dfrac{m-2\sqrt{x_4}}{x_4}+\left(\ln\dfrac{1}{m}-x_4\right)>0$.

故 $h(x)$在$(x_4，x_1)$，$(x_1，x_2)$，$(x_2，x_3)$各存在一个零点，

实数 m 的取值范围是$(0，1)$.

1．已知函数 $f(x)=a(lnx+\dfrac{1}{x})$，$a\in R$．

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）若方程 $2f(x)-lnx+x+2=0$ 有三个解，求实数 a 的取值范围．

【解答】解：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=a(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{a(x-1)}{x^2}$，

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 a，

当 $a=0$ 时，$f(x)=0$，所以无极值，

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 a．

（2）设 $h(x)=2f(x)-lnx+x+2$，即 $h(x)=(2a-1)lnx+\dfrac{2a}{x}+x+2$，

$h'(x)=\dfrac{2a-1}{x}-\dfrac{2a}{x^2}+1=\dfrac{(x-1)(x+2a)}{x^2}(x>0)$.

①若 $a\geqslant 0$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，
当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$h(x)$ 至多有两个零点.

②若 $a=-\dfrac{1}{2}$，则 $x\in(0,+\infty)$，$h'(x)\geqslant 0$（仅 h'（1）$=0$），

$h(x)$ 单调递增，$h(x)$ 至多有一个零点.

③若 $-\dfrac{1}{2}<a<0$，则 $0<-2a<1$，

当 $x\in(0,-2a)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；
当 $x\in(-2a,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

要使 $h(x)$ 有三个零点，必须有 $\begin{cases}h(-2a)>0\\h(1)<0\end{cases}$ 成立.

由 h（1）<0，得 $a<-\dfrac{3}{2}$，这与 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 矛盾，所以 $h(x)$ 不可能有三个零点.

④若 $a<-\dfrac{1}{2}$，则 $-2a>1$．当 $x\in(0,1)$ 或 $x\in(-2a,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；
当 $x\in(1,-2a)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

要使 $h(x)$ 有三个零点，必须有 $\begin{cases}h(1)>0\\h(-2a)<0\end{cases}$ 成立，

由 h（1）>0，得 $a>-\dfrac{3}{2}$，

由 $h(-2a)=(2a-1)[ln(-2a)-1]<0$ 及 $a<-\dfrac{1}{2}$，得 $a<-\dfrac{e}{2}$，

$\therefore -\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{e}{2}$．并且，当 $-\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{e}{2}$ 时，$0<e^{-2}<1$，$e^2>-2a$，

$h(e^{-2})=4+e^{-2}+2a(e^2-2)<4+e^{-2}-e(e^2-2)<4+1-5e<0$，

$h(e^2)=e^2+2a(e^{-2}+2)>e^2-3(e^{-2}+2)=e^2-6-3e^{-2}>e^2-7>0$.

综上，使 $h(x)$ 有三个零点的 a 的取值范围为 $(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{e}{2})$.

3．已知函数 $f(x)=e^x-a(x-2)^2$，$a>0$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性，设 $f'(x)$ 的最小值为 m，并求证：$m\leqslant e^2$；

（2）若 $f(x)$ 有三个零点，求 a 的取值范围.

【解答】解：（1）函数 $f(x)=e^x-a(x-2)^2$，$a>0$，

$f'(x)=e^x-2a(x-2)=g(x)$，

$g'(x)=e^x-2a$，

令 $g'(x)=e^x-2a=0$，解得 $x_0=ln(2a)$.

可得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0，+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore g(x)_{min}=g(x_0)=g(ln(2a))=2a-2a(ln(2a)-2)=6a-2aln(2a)$，

①令 $6a-2aln(2a)\geqslant 0$，化为：$ln(2a)\leqslant 3$，解得 $a\leqslant\dfrac{e^3}{2}$.

$\therefore 0<a\leqslant\dfrac{e^3}{2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

令 $6a-2aln(2a)<0$，化为：$ln(2a)>3$，解得 $a>\dfrac{e^3}{2}$.

$x\to-\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$.

$\therefore$ 存在 $2<x_1<x_2$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

可得：函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 单调递增，在 $(x_1，x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2，+\infty)$ 上单调递增.

综上可得：$0<a\leqslant\dfrac{e^3}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

$a>\dfrac{e^3}{2}$ 时．函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 单调递增，在 $(x_1，x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2，+\infty)$ 上单调递增.

其中 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

②由上面可得：$x_0=ln(2a)$ 时，$f'(x)$ 取得最小值，$\therefore m=6a-2aln(2a)$，令 $2a=t>0$.

$u(t)=3t-tlnt$，令 $u'(t)=3-lnt-1=2-lnt=0$，解得 $t=e^2$．$\therefore m\leqslant u(e^2)=3e^2-e^2lne^2=e^2$.

$\therefore m\leqslant e^2$.

（2）函数 $f(x)=e^x-a(x-2)^2$，$a>0$，

$\because f$（2）$=e^2\neq 0$，$\therefore 2$ 不是函数 $f(x)$ 的零点.

由 $f(x)=e^x-a(x-2)^2=0$，化为：$a=\dfrac{e^x}{(x-2)^2}(x\neq 2)$.

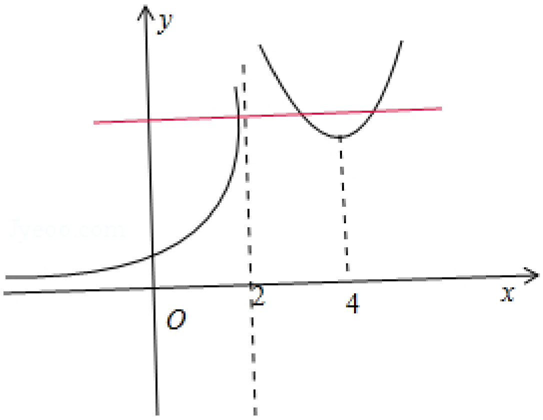
令 $G(x)=\dfrac{e^x}{(x-2)^2}(x\neq 2)$，可得 $G'(x)=\dfrac{e^x(x-4)}{(x-2)^3}$.

可得函数 $G(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,4)$ 上单调递减，在 $(4,+\infty)$ 上单调递增.

G（4）$=\dfrac{e^4}{4}$.

画出图象：可得 $a>\dfrac{e^4}{4}$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $(\dfrac{e^4}{4}，+\infty)$.



【母题】 (2020 全国Ⅰ)已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $f(x)$有两个零点，求 a 的取值范围.

(2)思路分析一

❶$f(x)$有两个零点

↓

❷$f(x)$的图象与 x 轴有两个交点

↓

❸求导函数 $f'(x)$，确定函数 $f(x)$的性质

思路分析二

❶$f(x)$有两个零点

❷$\frac{1}{a}=\frac{x+2}{e^x}$有两个不相等的实数根

↓

❸函数 $y=\frac{1}{a}$的图象与函数 $\varphi(x)=\frac{x+2}{e^x}$的图象有两个交点

↓

❹求导确定 $\varphi(x)=\frac{x+2}{e^x}$的性质

解　(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-(x+2)$，$f'(x)=e^x-1$，

令 $f'(x)<0$，解得 $x<0$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增．

(2)方法一　$f'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增．

故 $f(x)$至多存在一个零点，不符合题意．

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=\ln a$.

当 $x\in(-\infty,\ln a)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增．

故当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$．

(ⅰ)若 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)\geqslant 0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上至多存在一个零点，不符合题意．

(ⅱ)若 $a>\frac{1}{e}$，$f(\ln a)<0$.

因为 $f(-2)=e^{-2}>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上存在唯一零点．

由(1)知，当 $x>2$ 时，$e^x-x-2>0$，

所以当 $x>4$ 且 $x>2\ln 2a$ 时，$f(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\ln 2a}\cdot\left(\frac{x}{2}+2\right)-a(x+2)=2a>0$.

故 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上存在唯一零点．

从而 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有两个零点．

综上，a 的取值范围是$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

方法二　令 $f(x)=0$，得 $e^x=a(x+2)$，即$\frac{1}{a}=\frac{x+2}{e^x}$，

所以函数 $y=\frac{1}{a}$的图象与函数 $\varphi(x)=\frac{x+2}{e^x}$的图象有两个交点，

$\varphi'(x)=\frac{-x-1}{e^x}$，当 $x\in(-\infty,-1)$时，$\varphi'(x)>0$；当 $x\in(-1,+\infty)$时，$\varphi'(x)<0$，

所以 $\varphi(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增，在$(-1,+\infty)$上单调递减，

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(-1)=e$，且 $x\to-\infty$时，$\varphi(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to 0$，

所以 $0<\frac{1}{a}<e$，解得 $a>\frac{1}{e}$.

所以 a 的取值范围是$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

[子题 1]　(2021 全国甲卷改编)已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$，若曲线 $y=f(x)$与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，求 a 的取值范围.

解　$f(x)=\frac{x^a}{a^x}=1\Leftrightarrow a^x=x^a\Leftrightarrow x\ln a=a\ln x\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$，设函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=e$，

在 $(0，e)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

在 $(e，+\infty)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$\therefore g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$，

又 $g(1)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，即曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=\dfrac{\ln a}{a}$ 有两个交点的充要条件是 $0<\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{1}{e}$，这

即是 $0<g(a)<g(e)$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(1，e)\cup(e，+\infty)$．

【例 2】 已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解 (1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-2$，$x\in\mathbf{R}$，

则 $f'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty，0)$ 单调递减，在 $(0，+\infty)$ 单调递增.

(2) $f'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 至多存在一个零点，不合题意.

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=\ln a$.

当 $x\in(-\infty，\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\ln a，+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty，\ln a)$ 单调递减，在 $(\ln a，+\infty)$ 单调递增.

故当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$.

又当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

所以要使 $f(x)$ 有两个零点，只要 $f(\ln a)<0$ 即可，则 $1+\ln a>0$，可得 $a>\dfrac{1}{e}$.

综上，若 $f(x)$ 有两个零点，a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{e}，+\infty\right)$.

【训练 2】 设函数 $f(x)=-x^2+ax+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)若函数 $f(x)$在$\left[\frac{1}{3}，3\right]$上有两个零点，求实数 a 的取值范围.

解 (1)由题意知函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-2x-1+\frac{1}{x}=\frac{-(2x-1)(x+1)}{x}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$($x=-1$ 舍去)，

当 $0<x<\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{2}$时，$f'(x)<0$.

∴$f(x)$的单调递增区间为$\left(0，\frac{1}{2}\right)$，单调递减区间为$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$.

(2)令 $f(x)=-x^2+ax+\ln x=0$，得 $a=x-\frac{\ln x}{x}$.

令 $g(x)=x-\frac{\ln x}{x}$，其中 $x\in\left[\frac{1}{3}，3\right]$，

则 $g'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=1$.

当$\frac{1}{3}\leqslant x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $1<x\leqslant 3$ 时，$g'(x)>0$，

∴$g(x)$在$\left[\frac{1}{3}，1\right)$上单调递减，在$(1，3]$上单调递增，

∴$g(x)_{\min}=g(1)=1$.

∵函数 $f(x)$在$\left[\frac{1}{3}，3\right]$上有两个零点，

又 $g\left(\frac{1}{3}\right)=3\ln 3+\frac{1}{3}$，$g(3)=3-\frac{\ln 3}{3}$，$3\ln 3+\frac{1}{3}>3-\frac{\ln 3}{3}$，

∴实数 a 的取值范围是$\left(1，3-\frac{\ln 3}{3}\right]$.

题型四 函数零点的综合问题

【例 3】 设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$零点的个数；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

(1)**解** $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f'(x)$没有零点；

当 $a>0$ 时，因为 $y=e^{2x}$单调递增，$y=-\frac{a}{x}$单调递增，

所以 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

又 $f'(a)>0$，当 b 满足 $0<b<\frac{a}{4}$，且 $b<\frac{1}{4}$时，$f'(b)<0$，

(讨论 $a\geqslant 1$ 或 $a<1$ 来检验，

①当 $a\geqslant 1$ 时，则 $0<b<\frac{1}{4}$,

$f'(b)=2e^{2b}-\frac{a}{b}<2e^{\frac{1}{2}}-4a<2e^{\frac{1}{2}}-4<0$；

②当 $a<1$ 时，则 $0<b<\frac{a}{4}$，$f'(b)=2e^{2b}-\frac{a}{b}<2e^{\frac{a}{2}}-4<2e^{\frac{1}{2}}-4<0$，综上，$f'(b)<0$.)

故当 $a>0$ 时，$f'(x)$存在唯一零点.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)$没有零点，当 $a>0$ 时，$f'(x)$存在唯一零点.

(2)证明　由(1)，可设 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上的唯一零点为 x_0，

又当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，

所以当 $x=x_0$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(x_0)$.

由于 $2e2x_0-\frac{a}{x_0}=0$，则 $e2x_0=\frac{a}{2x_0}$，$x_0=\frac{a}{2e2x_0}$，

所以 $f(x_0)=e2x_0-a\ln x_0=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

故当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

探究提高　1.在(1)中，当 $a>0$ 时，$f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，从而 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上至多有一个零点，问题的关键是找到 b，使 $f'(b)<0$.

2.由(1)知，函数 $f'(x)$存在唯一零点 x_0，则 $f(x_0)$为函数的最小值，从而把问题转化为证明 $f(x_0)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

【训练 3】　设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$在点$\left(\frac{1}{2}，f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$处的切线与 y 轴垂直.

(1)求 b；

(2)若 $f(x)$有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$所有零点的绝对值都不大于 1.

(1)解　$f'(x)=3x^2+b$.

依题意得 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，即$\frac{3}{4}+b=0$，故 $b=-\frac{3}{4}$.

(2)证明　由(1)知 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\frac{3}{4}$.令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$或 $x=\frac{1}{2}$.

当 x 变化时，$f'(x)$与 $f(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty，-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$c+\frac{1}{4}$		$c-\frac{1}{4}$	

因为 $f(1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=c+\frac{1}{4}$,

所以当 $c<-\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有大于 1 的零点.

因为 $f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}$，

所以当 $c>\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有小于-1 的零点.

由题设可知$-\frac{1}{4}\leqslant c\leqslant\frac{1}{4}$.

当 $c=-\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点$-\frac{1}{2}$和 1.

当 $c=\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点-1 和$\frac{1}{2}$.

当$-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$时，$f(x)$有三个零点 x_1，x_2，x_3，

且 $x_1\in\left(-1，-\frac{1}{2}\right)$，$x_2\in\left(-\frac{1}{2}，\frac{1}{2}\right)$，$x_3\in\left(\frac{1}{2}，1\right)$.

综上，若 $f(x)$有一个绝对值不大于 1 的零点，则 $f(x)$所有零点的绝对值都不大于 1.

专题训练　对接高考

求落实　迎高考

1.(2021 **浙江卷节选**)设 a，b 为实数，且 $a>1$，函数 $f(x)=a^x-bx+e^2(x\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)若对任意 $b>2e^2$，函数 $f(x)$有两个不同的零点，求 a 的取值范围.

解　(1)由题意得 $f'(x)=a^x\ln a-b$.

因为 $a>1$，所以 $\ln a>0$，$a^x>0$，

所以当 $b\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，

函数 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增.

当 $b>0$ 时，令 $f'(x)>0$，则 $a^x>\frac{b}{\ln a}$，得 $x>\log_a\frac{b}{\ln a}$；

令 $f'(x)<0$，得 $x<\log_a\frac{b}{\ln a}$，

所以函数 $f(x)$在$\left(-\infty，\log_a\frac{b}{\ln a}\right)$上单调递减，在$\left(\log_a\frac{b}{\ln a}，+\infty\right)$上单调递增.

综上，当 $b\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty，+\infty)$，无单调递减区间；

当 $b>0$ 时，函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left(-\infty，\log_a\frac{b}{\ln a}\right)$，单调递增区间为$\left(\log_a\frac{b}{\ln a}，+\infty\right)$.

(2)因为函数 $f(x)$有两个不同的零点，所以 $a^x-bx+e^2=0$ 有两个不同的根，即曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=bx-e^2$ 有两个不同的交点.

易知直线 $y=bx-e^2$ 与 y 轴交于点$(0，-e^2)$.

先考虑曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=bx-e^2$ 相切的情况.

设切点坐标为$(t，a^t)$，则切线斜率为 $a^t\ln a$，

所以切线方程为 $y-a^t=a^t\ln a(x-t)$，

则 $y=(a^t\ln a)x+a^t-ta^t\ln a=bx-e^2$，

所以 $a^t-ta^t\ln a=a^t-a^t\ln a^t=-e^2$，

令 $a^t=m(m>0)$，则 $m-m\ln m=-e^2$，

令 $g(m)=m-m\ln m+e^2$，则 $g'(m)=-\ln m$，

当 $m\in(0，1)$时，$g'(m)>0$，

当 $m\in(1，+\infty)$时，$g'(m)<0$，

故 $g(m)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，

观察可知 $a^t=e^2$，

所以要满足条件，则 $b>a^t\ln a=e^2\ln a$ 恒成立.

因为 $b>2e^2$，只需 $2e^2\geqslant e^2\ln a$ 即可，解得 $1<a\leqslant e^2$.

故 a 的取值范围为$(1，e^2]$.

2.设函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)e^x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a\leqslant 0$，讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $0<a<\frac{1}{e}$，试证明 $f(x)$恰有两个零点.

(1)**解**　由已知，$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}-[ae^x+a(x-1)e^x]=\frac{1-ax^2e^x}{x}$.

因此当 $a\leqslant 0$ 时，$1-ax^2e^x>0$，从而 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$内单调递增.

(2)**证明**　由(1)知，$f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}$，$x\in(0，+\infty)$.

令 $g(x)=1-ax^2e^x$，

由 $0<a<\frac{1}{e}$，可知 $g(x)$在$(0，+\infty)$内单调递减.

又 $g(1)=1-ae>0$，且

$$g\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2\frac{1}{a}=1-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2<0,$$

故 $g(x)=0$ 在$(0，+\infty)$内有唯一解，

从而 $f'(x)=0$ 在$(0，+\infty)$内有唯一解，

不妨设为 x_0，则 $1<x_0<\ln\frac{1}{a}$.

当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g(x_0)}{x}=0$，

所以 $f(x)$在$(0，x_0)$内单调递增；

当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g(x_0)}{x}=0$，

所以 $f(x)$在$(x_0，+\infty)$内单调递减，

因此 x_0 是 $f(x)$的唯一极值点.

令 $h(x)=\ln x-x+1$，

则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，

故 $h(x)$在$(1，+\infty)$内单调递减，

从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，

所以 $\ln x<x-1$，

从而 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-a\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)e^{\ln\frac{1}{a}}$

$=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-\ln\frac{1}{a}+1=h\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0.$

又因为 $f(x_0)>f(1)=0$，

所以 $f(x)$在$(x_0，+\infty)$内有唯一零点.

又 $f(x)$在$(0，x_0)$内有唯一零点 1，

从而，$f(x)$在$(0，+\infty)$内恰有两个零点.

3.(2021 **长沙模拟**)已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-x$.

(1)若 $a=-1$，求函数 $f(x)$的极值；

(2)设 $f'(x)$为 $f(x)$的导函数，若 x_1，x_2 是函数 $f'(x)$的两个不相等的零点，求证：$f(x_1)+f(x_2)<x_1+x_2-5$.

(1)**解**　当 $a=-1$ 时，$f(x)=\ln x-x^2-x$，且定义域为$(0，+\infty)$，

则 $f'(x)=\frac{1}{x}-2x-1=-\frac{(x+1)(2x-1)}{x}$.

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$；

令 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{2}$.

故 $f(x)$在$\left(0，\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$上单调递减，

故 $f(x)$的极大值是 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-\frac{3}{4}$，

综上，函数 $f(x)$的极大值是 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-\frac{3}{4}$，无极小值.

(2)**证明**　由题意 $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-1=\frac{2ax^2-x+1}{x}$，且 $x>0$，

则 x_1，x_2 是方程 $2ax^2-x+1=0$ 的两个不相等正实根，

$\therefore\begin{cases}\Delta=1-8a>0,\\ x_1+x_2=\frac{1}{2a}>0,\\ x_1x_2=\frac{1}{2a}>0,\end{cases}$ 解之得 $0<a<\frac{1}{8}$.

$f(x_1)+f(x_2)-x_1-x_2=\ln x_1+\ln x_2+ax_1^2+ax_2^2-2(x_1+x_2)$

$=a(x_1^2+x_2^2)-2(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)$

$=a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-2(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)$

$=\ln\frac{1}{2a}-\frac{3}{4a}-1$，

令 $t=\frac{1}{2a}$，$g(t)=\ln t-\frac{3t}{2}-1$，$t\in(4，+\infty)$，

则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{3}{2}=\frac{2-3t}{2t}<0$，$t\in(4，+\infty)$，

故 $g(t)$在$(4，+\infty)$上单调递减，

故 $g(t)<g(4)=\ln 4-7<2-7=-5$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)<x_1+x_2-5$.

类型三　求零点及零点代数式的最值与范围

【例 3】 (2021 超级全能生联考)设函数 $f(x)=a\ln x-2x+3$，x_1，$x_2(x_1<x_2)$为函数 $f(x)$的两个零点.

(1)求 a 的取值范围；

(2)当$\frac{x_2}{x_1}$取得最小值时，求 a 的值.

解　(1)$f'(x)=\frac{a}{x}-2=\frac{a-2x}{x}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，不符合题意；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，即 $a-2x>0$，解得 $x<\frac{a}{2}$，

则 $f(x)$在$\left(0，\frac{a}{2}\right)$上单调递增，$\left(\frac{a}{2}，+\infty\right)$上单调递减，

故要使 $f(x)$有两个零点，只需 $f\left(\frac{a}{2}\right)>0$，

即 $a\ln\frac{a}{2}-a+3>0$.

令 $g(a)=a\ln\frac{a}{2}-a+3=a\ln a-a\ln 2-a+3(a>0)$，

$g'(a)=1+\ln a-\ln 2-1=\ln a-\ln 2$，

∴当 $a\in(0，2)$时，$g'(a)<0$，$g(a)$单调递减；

当 $a\in(2，+\infty)$时，$g'(a)>0$，$g(a)$单调递增，

∴$g(a)_{\min}=g(2)=1>0$，∴$g(a)>0$ 恒成立，

∴a 的取值范围为$(0，+\infty)$.

(2)由题意得 $a\ln x_1-2x_1+3=a\ln x_2-2x_2+3=0$，

即 $a=\dfrac{2x_1-3}{\ln x_1}=\dfrac{2x_2-3}{\ln x_2}=\dfrac{2(x_2-x_1)}{\ln\dfrac{x_2}{x_1}}=\dfrac{2x_1\left(\dfrac{x_2}{x_1}-1\right)}{\ln\dfrac{x_2}{x_1}}$，

$\therefore\dfrac{\dfrac{x_2}{x_1}-1}{\ln\dfrac{x_2}{x_1}}=\dfrac{2x_1-3}{2x_1\ln x_1}$.

由于 $f(1)=1$，$\therefore 0<x_1<1<x_2$.

令$\dfrac{x_2}{x_1}=t$，函数 $h(t)=\dfrac{t-1}{\ln t}$，$t>1$，

则 $h'(t)=\dfrac{\ln t-(t-1)\dfrac{1}{t}}{\ln^2 t}=\dfrac{\ln t-1+\dfrac{1}{t}}{\ln^2 t}$.

令函数 $\varphi(t)=\ln t-1+\dfrac{1}{t}$，

则 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t-1}{t^2}>0$，

$\therefore$函数 $\varphi(t)$在$(1，+\infty)$上单调递增，

又 $\varphi(1)=0$，

$\therefore h'(t)>0$ 在$(1，+\infty)$恒成立，

函数 $h(t)$在$(1，+\infty)$上单调递增，

故当 t 取最小值时，等价于 $h(t)$取最小值.

令函数 $F(x)=\dfrac{2x-3}{2x\ln x}(0<x<1)$，

则 $F'(x)=\dfrac{2x\ln x-(2x-3)(1+\ln x)}{2x^2\ln^2 x}$

$=\dfrac{3\ln x-(2x-3)}{2x^2\ln^2 x}$.

令 $G(x)=3\ln x-(2x-3)$，

则 $G'(x)=\dfrac{3}{x}-2=\dfrac{3-2x}{x}$，

$\therefore G(x)$在$(0，1)$上单调递增.

又 $G(1)=1>0$，

∴$G(x)=0$ 在(0，1)内存在唯一实根 m，

即 $G(m)=0$，$3\ln m-(2m-3)=0$，

∴函数 $F(x)$在$(0,m)$上单调递减，

在$(m,1)$上单调递增，

∴$F(x)_{\min}=F(m)$，

∵$h(t)=F(x_1)$，

∴当 $h(t)$取最小值时，$F(x_1)$取最小值，

此时 $a=\dfrac{2x_1-3}{\ln x_1}=3$.

综上所述，$a=3$.

探究提升　多个零点时应注意两点：

(1)各零点的范围及零点之间的关系；

(2)构造关于零点代数式的函数来解决问题.

【例1】【已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x+\dfrac{1}{x}$.

（1）求 $f\left(x\right)$的单调区间；

（2）若曲线 $y=f\left(x\right)$与直线 $y=kx-k\left(k>0\right)$有且只有一个公共点 $P\left(x_0,y_0\right)$，求证：$2<x_0<3$.（参考数据：$\ln 2\approx 0.69,\ln 3\approx 1.10,\ln 5\approx 1.61$）

【答案】:（1）单调递减区间为$(0,1)$，单调递增区间为$(1,+\infty)$；（2）证明见解析.

【解析】:（1）由题意，函数 $f(x)=x\ln x+\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}$，

设 $g\left(x\right)=\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}$，则 $g'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}$，

当 $x>0$ 时，$g'\left(x\right)>0$，函数 $g\left(x\right)$ 单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f'(1)=0$，所以当 $0<x<1$时，$f'(x)<0$，当 $x>1$时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

（2）设函数 $F(x)=x\ln x+\dfrac{1}{x}-kx+k$，

由曲线 $y=f\left(x\right)$ 与直线 $y=kx-k(k>0)$ 有且只有一个公共点 $P\left(x_0,y_0\right)$，等价于函数 $F(x)$ 有且只有一个零点 x_0，

又由 $F^{'}(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}-k$，设 $h\left(x\right)=\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}-k$，则 $h'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}$，

当 $x>0$ 时，$h'\left(x\right)>0$，函数 $h\left(x\right)$ 单调递增，即 $F^{'}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $F^{'}(1)=-k<0,F^{'}\left(e^k\right)=1-\dfrac{1}{e^{2k}}>0$，所以存在 $x_1\in\left(1,e^k\right)$，使 $F'\left(x_1\right)=0$，

所以当 $0<x<x_1$ 时，$F'(x)<0,F(x)$ 单调递减，当 $x>x_1$ 时，$F'(x)>0,F(x)$ 单调递增，

而 $F(1)=1>0,F\left(e^{k+1}\right)=e^{k+1}\ln e^{k+1}+\dfrac{1}{e^{k+1}}-ke^{k+1}+k=e^{k+1}+\dfrac{1}{e^{k+1}}+k>0$，

所以要使函数 $F(x)$ 有且只有一个零点 x_0，则 $x_1=x_0$，

所以 $\begin{cases}F\left(x_0\right)=0\\F'\left(x_0\right)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_0\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}-kx_0+k=0\\\ln x_0+1-\dfrac{1}{x_0^2}-k=0\end{cases}$，消元得 $\ln x_0-x_0+\dfrac{2}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}+1=0$.

令 $G(x)=\ln x-x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+1$，则 $G^{'}(x)=\dfrac{1}{x}-1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{(x-1)\left(-x^2-2\right)}{x^3}$，

当 $x>1$ 时，$G^{'}(x)<0$，所以函数 $G(x)$ 单调递减，

又由 $G(2)=\ln 2-\dfrac{1}{4}>0,G(3)=\ln 3-\dfrac{13}{9}<0$，所以存在 $x_0\in(2,3)$，使得 $G\left(x_0\right)=0$，

即若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-k(k>0)$ 有且只有一个公共点 $P\left(x_0,y_0\right)$，则 $2<x_0<3$.

【2020·全国III卷·理科】设函数 $f\left(x\right)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直.

（1）求 b.

（2）若 $f\left(x\right)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f\left(x\right)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

【答案】:（1）$b=-\dfrac{3}{4}$；（2）证明见解析.

【解析】:（1）因为 $f^{'}(x)=3x^2+b$，由题意，$f^{'}(\dfrac{1}{2})=0$，即 $3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b=0$，则 $b=-\dfrac{3}{4}$；

（2）由（1）可得 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x+c$，$f^{'}(x)=3x^2-\dfrac{3}{4}=3(x+\dfrac{1}{2})(x-\dfrac{1}{2})$，

令 $f^{'}(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$；令 $f^{'}(x)<0$，得 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(-1)=c-\frac{1}{4}, f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}, f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}, f(1)=c+\frac{1}{4}$，

若 $f(x)$ 所有零点中存在一个绝对值大于 1 的零点 x_0，则 $f(-1)>0$ 或 $f(1)<0$，即 $c>\frac{1}{4}$ 或 $c<-\frac{1}{4}$.

当 $c>\frac{1}{4}$ 时，$f(-1)=c-\frac{1}{4}>0, f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}>0, f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}>0, f(1)=c+\frac{1}{4}>0$，

又 $f(-4c)=-64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)<0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(-4c,-1)$ 上存在唯一一个零点 x_0，

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-1,+\infty)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；

当 $c<-\frac{1}{4}$ 时，$f(-1)=c-\frac{1}{4}<0, f(-\frac{1}{2})=c+\frac{1}{4}<0, f(\frac{1}{2})=c-\frac{1}{4}<0, f(1)=c+\frac{1}{4}<0$，

又 $f(-4c)=64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)>0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(1,-4c)$ 上存在唯一一个零点 x_0'，

即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-\infty,1)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；

综上，$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

4、函数 $p(x)=\ln x+x-4$，$q(x)=axe^x$（$a\in R$）.

（Ⅰ）若 $a=e$，设 $f(x)=p(x)-q(x)$，试证明 $f'(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in(0,\frac{1}{e})$，并求 $f(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式 $|p(x)|>q(x)$ 的解集中有且只有两个整数，求实数 a 的取值范围.

【答案】：（1）见解析；（2）$\frac{\ln 3-1}{3e^3}\le a<\frac{2-\ln 2}{2e^2}$.

【解析】：（Ⅰ）证明：由题知 $f(x)=\ln x+x-4-axe^x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}+1-e(x+1)e^x=\frac{(x+1)(1-exe^x)}{x}$，

令 $u(x)=1-exe^x$，则 $u'(x)=-e(x+1)e^x<0$（$x>0$），$\therefore u(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又 $u(0)=1>0$，$u\left(\frac{1}{e}\right)=1-e^{\frac{1}{e}}<0$，

所以存在 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$，使得 $u\left(x_0\right)=0$，

综上 $f'(x)$ 存在唯一零点 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$.

当 $x \in \left(0, x_0\right)$，$u(x)>0$，于是 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(0, x_0\right)$ 单调递增；

当 $x \in \left(x_0, +\infty\right)$，$u(x)<0$，于是 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(x_0, +\infty\right)$ 单调递减.

故 $f(x)_{\max}=f\left(x_0\right)=\ln x_0+x_0-4-e x_0 e^{x_0}$，

又 $u\left(x_0\right)=1-e x_0 e^{x_0}=0$，$e x_0=\frac{1}{e^{x_0}}$，$x_0=\ln \frac{1}{e x_0}=-1-\ln x_0$，

故 $f(x)_{\max}=\ln x_0+\left(-1-\ln x_0\right)-4-e x_0 \frac{1}{e x_0}=-6$.

（II） $|p(x)|>q(x), |\ln x+x-4|>a x e^{x} \Leftrightarrow a<\frac{|\ln x+x-4|}{x e^{x}}$

令 $h(x)=\frac{\ln x+x-4}{x e^{x}}$，则 $h'(x)=\frac{(x+1)(\ln x+x-5)}{x^2 e^{x}}$，

令 $\varphi(x)=\ln x+x-5$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\varphi(3)=\ln 3-2<0$，$\varphi(4)=\ln 4-1>0$，

$\therefore$ 存在 $t \in(3,4)$，使得 $\varphi(t)=0$.

$\therefore$ 当 $x \in(0, t)$，$\varphi(x)<0$，即 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0, t)$ 单调递减；

当 $x \in(t,+\infty)$，$\varphi(x)>0$，即 $h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(t,+\infty)$ 单调递增.

$\because h(1)=-\frac{3}{e}<0$，$h(2)=\frac{\ln 2-2}{2 e^2}<0$，$h(3)=\frac{\ln 3-1}{3 e^3}>0$，且当 $x>3$ 时，$h(x)>0$，

又 $|h(1)|=\frac{3}{e}$，$|h(2)|=\frac{2-\ln 2}{2 e^2}>h(3)=\frac{\ln 3-1}{3 e^3}$，$|h(4)|=\frac{2 \ln 2}{4 e^4}$，

故要使不等式式 $|p(x)|>q(x)$ 解集中有且只有两个整数，

a 的取值范围应为：$\frac{\ln 3-1}{3 e^3} \leq a<\frac{2-\ln 2}{2 e^2}$.

6.（北京市密云区 2022 届高三上学期期末考试数学试题）已知函数 $f(x)=x+k e^{x}$，$k \in \mathrm{R}$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(2, f(2))$ 处的切线方程；

(2)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(3)若函数 $f(x)=x+ke^{x}$ 有两个不同的零点，记较大的零点为x_0，证明：当 $x_0\in(1,2)$ 时，$\left(1+ke^{2}\right)x_0-ke^{2}>0$.

【答案】(1) $y=\left(1+ke^{2}\right)x-ke^{2}$；

(2)答案见解析；

(3)证明见解析.

【解析】

【分析】

（1）求出 $f(2)$、$f'(2)$，利用导数的几何意义可求得所求切线的方程；

（2）求得 $f'(x)=1+ke^{x}$，分 $k\geq0$、$k<0$ 两种情况讨论，分析导数的符号变化，由此可得出函数 $f(x)$ 的增区间和减区间；

（3）分析可得 $k=-\dfrac{x_0}{e^{x_0}}$，将所证不等式等价变形为 $e^{x_0-2}>x_0-1$ 对任意的 $x_0\in(1,2)$ 恒成立，构造函数 $g(x)=e^{x-2}-x+1$，利用导数分析函数 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上的单调性，可得出 $g(x)>0$，即可证得结论成立.

(1)

解：因为 $f(x)=x+ke^{x}$，则 $f'(x)=1+ke^{x}$，所以，$f(2)=2+ke^{2}$，$f'(2)=1+ke^{2}$，

因此，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(2,f(2))$ 处的切线方程 $y-\left(2+ke^{2}\right)=\left(1+ke^{2}\right)(x-2)$，

即 $y=\left(1+ke^{2}\right)x-ke^{2}$.

(2)

解：函数 $f(x)=x+ke^{x}$ 的定义域为 R，且 $f'(x)=1+ke^{x}$.

当 $k\geq0$ 时，对任意的 $x\in\mathrm{R}$，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无递减区间；

当 $k<0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=-\ln(-k)$.

当 $x<-\ln(-k)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>-\ln(-k)$ 时，$f'(x)<0$.

此时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\ln(-k))$，单调递减区间为 $(-\ln(-k),+\infty)$.

综上所述，当 $k\geq0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无递减区间；

当 $k<0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\ln(-k))$，单调递减区间为 $(-\ln(-k),+\infty)$.

(3)

证明：由 $f(x)=x+ke^{x}=0$ 可得 $k=-\dfrac{x}{e^{x}}$，

因为函数 $f(x)=x+ke^{x}$ 有两个不同的零点，且较大的零点为x_0，则 $k=-\dfrac{x_0}{e^{x_0}}$，

要证 $\left(1+ke^{2}\right)x_0-ke^{2}=x_0+ke^{2}(x_0-1)=x_0-\dfrac{x_0(x_0-1)}{e^{x_0-2}}>0$ 对任意的 $x_0\in(1,2)$ 恒成立，

即证 $e^{x_0-2}>x_0-1$ 对任意的 $x_0\in(1,2)$ 恒成立，

构造函数 $g(x)=e^{x-2}-x+1$，其中 $x\in(1,2)$，则 $g'(x)=e^{x-2}-1<0$，

所以，函数 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，所以，$g(x)>g(2)=0$，

因为 $x_0 \in (1,2)$，则 $g(x_0) > g(2) = 0$，即 $e^{x_0-2} > x_0 - 1$，故原不等式得证.

题型四 隐零点问题

零点问题之三个零点解答

1．已知函数 $f(x)=a(lnx+\dfrac{1}{x})$， $a\in R$.

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）若方程 $2f(x)-lnx+x+2=0$ 有三个解，求实数 a 的取值范围.

【解答】解：（1） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=a(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{a(x-1)}{x^2}$，

当 $a>0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 a，

当 $a=0$ 时， $f(x)=0$，所以无极值，

当 $a<0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 a .

（2）设 $h(x)=2f(x)-lnx+x+2$，即 $h(x)=(2a-1)lnx+\dfrac{2a}{x}+x+2$，

$h'(x)=\dfrac{2a-1}{x}-\dfrac{2a}{x^2}+1=\dfrac{(x-1)(x+2a)}{x^2}(x>0)$.

①若 $a\geqslant 0$，则当 $x\in(0,1)$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增， $h(x)$ 至多有两个零点.

②若 $a=-\dfrac{1}{2}$，则 $x\in(0,+\infty)$， $h'(x)\geqslant 0$（仅 h'（1）$=0$），

$h(x)$ 单调递增， $h(x)$ 至多有一个零点.

③若 $-\dfrac{1}{2}<a<0$，则 $0<-2a<1$，

当 $x\in(0,-2a)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(-2a,1)$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减，

要使 $h(x)$ 有三个零点，必须有 $\begin{cases}h(-2a)>0\\h(1)<0\end{cases}$ 成立.

由 h（1）<0，得 $a<-\dfrac{3}{2}$，这与 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 矛盾，所以 $h(x)$ 不可能有三个零点.

④若 $a<-\dfrac{1}{2}$，则 $-2a>1$．当 $x\in(0,1)$ 或 $x\in(-2a,+\infty)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,-2a)$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减，

要使 $h(x)$ 有三个零点，必须有 $\begin{cases}h(1)>0\\h(-2a)<0\end{cases}$ 成立，

由 h（1）>0，得 $a>-\dfrac{3}{2}$，

由 $h(-2a)=(2a-1)[ln(-2a)-1]<0$ 及 $a<-\dfrac{1}{2}$，得 $a<-\dfrac{e}{2}$，

$\therefore -\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{e}{2}$．并且，当 $-\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{e}{2}$ 时，$0<e^{-2}<1$，$e^{2}>-2a$，

$h(e^{-2})=4+e^{-2}+2a(e^{2}-2)<4+e^{-2}-e(e^{2}-2)<4+1-5e<0$，

$h(e^{2})=e^{2}+2a(e^{-2}+2)>e^{2}-3(e^{-2}+2)=e^{2}-6-3e^{-2}>e^{2}-7>0$．

综上，使 $h(x)$ 有三个零点的 a 的取值范围为 $(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{e}{2})$．

2．已知函数 $f(x)=xlnx-(a+1)x+1$，$a\in R$．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值

（2）若方程 $(2a-1)(\dfrac{f(x)}{x}+a+1)+\dfrac{1}{x}+x+2=0$ 有三个解，求实数 a 的取值范围．

【解答】解：（1）函数的定义域 $(0,+\infty)$，$f'(x)=lnx-a$，

当 $x>e^{a}$ 时，$f'(x)>0$，函数单调递增，当 $0<x<e^{a}$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减，

故当 $x=e^{a}$ 时，函数取得极小值 $f(e^{a})=1-e^{a}$，没有极大值，

(2 由）$(2a-1)(\dfrac{f(x)}{x}+a+1)+\dfrac{1}{x}+x+2=0$ 整理可得 $(1-2a)(xlnx+1)=(x+1)^{2}$，

令 $y=xlnx+1$，则 $y'=lnx+1=0$ 可得 $x=\dfrac{1}{e}$，

易得当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，函数单调递增，当 $x<\dfrac{1}{e}$ 时，函数单调递减，

故 $x=\dfrac{1}{e}$ 时，函数取得最小值 $1-\dfrac{1}{e}>0$ 即 $y=xlnx+1>0$，

故原方程可转化为 $1-2a=\dfrac{(x+1)^{2}}{xlnx+1}$，

令 $g(x)=\dfrac{(x+1)^{2}}{xlnx+1}$，则 $g'(x)=\dfrac{(x+1)(lnx-1)(x-1)}{(xlnx+1)^{2}}$，

因为 $x>0$，

易得当 $x>e$ 或 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，函数单调递增，当 $1<x<e$ 时，$g'(x)<0$，函数单调递减，

故当 $x=1$ 时，函数取得极大值 g（1）$=4$，当 $x=e$ 时，函数取得极小值 g（e）$=e+1$，

由题意可得，$y=1-2a$ 与 $g(x)$3 个交点，则 $e+1<1-2a<4$，

解可得，$\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{e}{2}$，

故 a 的范围 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{e}{2})$．

3．已知函数 $f(x)=e^{x}-a(x-2)^{2}$，$a>0$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性，设 $f'(x)$ 的最小值为 m，并求证：$m\leqslant e^{2}$；

（2）若 $f(x)$ 有三个零点，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1）函数 $f(x)=e^{x}-a(x-2)^{2}$，$a>0$，

$f'(x)=e^{x}-2a(x-2)=g(x)$，

$g'(x)=e^{x}-2a$，

令 $g'(x)=e^{x}-2a=0$，解得 $x_0=ln(2a)$.

可得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0$，$+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore g(x)_{min}=g(x_0)=g(ln(2a))=2a-2a(ln(2a)-2)=6a-2aln(2a)$，

①令 $6a-2aln(2a)\geqslant 0$，化为：$ln(2a)\leqslant 3$，解得 $a\leqslant \dfrac{e^{3}}{2}$.

$\therefore 0<a\leqslant \dfrac{e^{3}}{2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

令 $6a-2aln(2a)<0$，化为：$ln(2a)>3$，解得 $a>\dfrac{e^{3}}{2}$.

$x\to -\infty$ 时，$f'(x)\to +\infty$；$x\to +\infty$ 时，$f'(x)\to +\infty$.

$\therefore$存在 $2<x_1<x_2$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

可得：函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 单调递增，在 $(x_1$，$x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2$，$+\infty)$ 上单调递增.

综上可得：$0<a\leqslant \dfrac{e^{3}}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

$a>\dfrac{e^{3}}{2}$ 时．函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 单调递增，在 $(x_1$，$x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2$，$+\infty)$ 上单调递增.

其中 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

②由上面可得：$x_0=ln(2a)$ 时，$f'(x)$ 取得最小值，$\therefore m=6a-2aln(2a)$，令 $2a=t>0$.

$u(t)=3t-tlnt$，令 $u'(t)=3-lnt-1=2-lnt=0$，解得 $t=e^{2}$．$\therefore m\leqslant u(e^{2})=3e^{2}-e^{2}lne^{2}=e^{2}$.

$\therefore m\leqslant e^{2}$.

（2）函数 $f(x)=e^{x}-a(x-2)^{2}$，$a>0$，

$\because f$（2）$=e^{2}\neq 0$，$\therefore 2$ 不是函数 $f(x)$ 的零点.

由 $f(x)=e^{x}-a(x-2)^{2}=0$，化为：$a=\dfrac{e^{x}}{(x-2)^{2}}(x\neq 2)$.

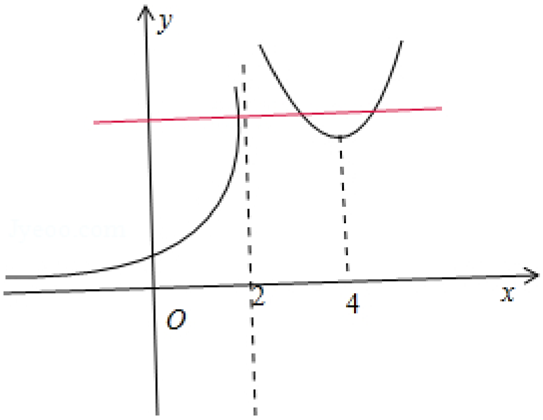
令 $G(x)=\dfrac{e^{x}}{(x-2)^{2}}(x\neq 2)$，可得 $G'(x)=\dfrac{e^{x}(x-4)}{(x-2)^{3}}$.

可得函数 $G(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,4)$ 上单调递减，在 $(4,+\infty)$ 上单调递增.

G（4）$=\dfrac{e^{4}}{4}$.

画出图象：可得 $a>\dfrac{e^{4}}{4}$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $(\dfrac{e^{4}}{4}$，$+\infty)$.



4．已知函数 $f(x)=xe^{x}-ax^{2}-2ax$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 恰有三个零点，求 a 的取值范围.

【解答】解：（1）函数 $f(x)=xe^{x}-ax^{2}-2ax$ ，定义域为 R ，

$f'(x)=e^{x}+xe^{x}-2ax-2a=e^{x}(x+1)-2a(x+1)=(x+1)(e^{x}-2a)$ ，

①当 $a\leqslant 0$ 时， $e^{x}-2a>0$ ，当 $x<-1$ 时， $f'(x)<0$ ，当 $x>-1$ 时， $f'(x)>0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ ，解得 $x=-1$ 或 $x=ln(2a)$ ，

（ⅰ）当 $a=\dfrac{1}{2e}$ 时， $f(x)$ 在 R 上单调递增；

（ⅱ）当 $0<a<\dfrac{1}{2e}$ 时，当 $x<ln(2a)$ ，则 $f'(x)>0$ ，当 $ln(2a)<x<-1$ 时， $f'(x)>0$ ，当 $x>-1$ 时， $f'(x)>0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty$ ， $ln(2a))$ 上单调递增，在 $(ln(2a)$ ， $-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

（ⅲ）当 $a>\dfrac{1}{2e}$ 时，当 $x<-1$ 时， $f'(x)>0$ ，当 $-1<x<ln(2a)$ 时， $f'(x)<0$ ，当 $x>ln(2a)$ 时， $f'(x)>0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1$ ， $ln(2a))$ 上单调递减，在 $(ln(2a)$ ， $+\infty)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<\dfrac{1}{2e}$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty$ ， $ln(2a))$ 上单调递增，在 $(ln(2a)$ ， $-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a=\dfrac{1}{2e}$ 时， $f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>\dfrac{1}{2e}$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1$ ， $ln(2a))$ 上单调递减，在 $(ln(2a)$ ， $+\infty)$ 上单调递增.

（2）函数 $f(x)=xe^{x}-ax^{2}-2ax=x(e^{x}-ax-2a)$ ，

则 $f(0)=0$ ，即 $f(x)$ 有一个零点 0，

令 $g(x)=e^{x}-ax-2a$ ，

要使 $f(x)$ 有三个零点，只需要 $g(x)=e^{x}-ax-2a$ 有两个不为 0 的零点，

若 $g(x)=e^{x}-ax-2a$ 的零点为 0，即 $g(0)=e^{0}-2a=0$ ，解得 $a=\dfrac{1}{2}$ ，

此时 $g(x)=e^{x}-\dfrac{1}{2}x-1$ 有两个零点，但有一个零点是 0，此时 $f(x)$ 只有两个零点，故 $a\neq\dfrac{1}{2}$ ；

又 $g'(x)=e^{x}-a$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)=e^{x}-a>0$，则 $g(x)$ 在 R 上单调递增，故 $g(x)$ 至多有一个零点，不合题意；

②当 $a>0$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,lna)$ 上单调递减，在 $(lna,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)_{min}=g(lna)=a-alna-2a=-a(1+lna)$，

（ⅰ）当 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$ 时，$g(x)_{min}=g(lna)\geqslant 0$，故 $g(x)$ 至多有一个零点，不合题意，舍去；

（ⅱ）当 $a>\frac{1}{e}$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$ 时，$g(x)_{min}=g(lna)<0$，

因为 $g(-2)=e^{-2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,lna)$ 上有唯一零点，

由（1）知，当 $x>2$ 时，$e^{x}-x-2>0$，

则当 $x>4$ 且 $x>2ln(2a)$ 时，$g(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\frac{2ln(2a)}{2}}\cdot(\frac{x}{2}+2)-a(x+2)=2a>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(lna,+\infty)$ 上有唯一零点，

从而 $g(x)$ 在 R 上有两个零点，此时 $f(x)$ 有三个零点.

综上所述，$f(x)$ 恰有三个零点时 a 的取值范围是 $(\frac{1}{e},\frac{1}{2})\bigcup(\frac{1}{2},+\infty)$.

最值函数的零点问题解答

1．已知函数 $f(x)=x^{3}+ax+\frac{1}{4}$，$g(x)=-lnx$.

（1）当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线.

（2）设 $F(x)=f(x)-g(x)$ 在 $[1$，$+\infty)$ 单调递增，求 a 的取值范围.

（3）用 $min\{m$，$n\}$ 表示 m，n 中的最小值，设函数 $h(x)=min\{f(x)$，$g(x)\}(x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

【解答】解：(1) $f'(x)=3x^{2}+a$.

设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $P(x_{0}$，$0)$，

则 $f(x_{0})=0$，$f'(x_{0})=0$，

$$\therefore\begin{cases}x_{0}^{3}+ax_{0}+\frac{1}{4}=0\\3x_{0}^{2}+a=0\end{cases},$$

解得 $x_{0}=\frac{1}{2}$，$a=-\frac{3}{4}$，

因此当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（2）$F(x)=f(x)-g(x)=x^{3}+ax+\frac{1}{4}+lnx$，

导数为$F'(x)=3x^{2}+a+\frac{1}{x}$，

由题意可得$3x^{2}+a+\frac{1}{x}\geqslant 0$在$[1，+\infty)$恒成立，

即有$-a\leqslant 3x^{2}+\frac{1}{x}$的最小值，

由$3x^{2}+\frac{1}{x}$的导数为$6x-\frac{1}{x^{2}}>0$在$x\geqslant 1$递增，

即有最小值为 4，

则$-a\leqslant 4$，解得$a\geqslant -4$；

（3）当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)=-lnx<0$，

$\therefore$函数$h(x)=min\{f(x)，g(x)\}\leqslant g(x)<0$，

故$h(x)$在$x\in(1,+\infty)$时无零点．

当$x=1$时，若$a\geqslant -\frac{5}{4}$，则f（1）$=a+\frac{5}{4}\geqslant 0$，

$\therefore h(x)=min\{f$（1），g（1）$\}=g$（1）$=0$，

故$x=1$是函数$h(x)$的一个零点；

若$a<-\frac{5}{4}$，则f（1）$=a+\frac{5}{4}<0$，

$\therefore h(x)=min\{f$（1），g（1）$\}=f$（1）<0，

故$x=1$不是函数$h(x)$的零点；

当$x\in(0,1)$时，$g(x)=-lnx>0$，

因此只考虑$f(x)$在$(0,1)$内的零点个数即可．

①当$a\leqslant -3$或$a\geqslant 0$时，$f'(x)=3x^{2}+a$在$(0,1)$内无零点，

因此$f(x)$在区间$(0,1)$内单调，

而$f(0)=\frac{1}{4}$，f（1）$=a+\frac{5}{4}$，

$\therefore$当$a\leqslant -3$时，函数$f(x)$在区间$(0,1)$内有一个零点，

当$a\geqslant 0$时，函数$f(x)$在区间$(0,1)$内没有零点．

②当$-3<a<0$时，函数$f(x)$在$(0,\sqrt{\frac{-a}{3}})$内单调递减，在$(\sqrt{\frac{-a}{3}}，1)$内单调递增，

故当$x=\sqrt{\frac{-a}{3}}$时，$f(x)$取得最小值$f(\sqrt{\frac{-a}{3}})=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{-a}{3}}+\frac{1}{4}$．

若$f(\sqrt{\frac{-a}{3}})>0$，即$-\frac{3}{4}<a<0$，则$f(x)$在$(0,1)$内无零点．

若$f(\sqrt{\frac{-a}{3}})=0$，即$a=-\frac{3}{4}$，则$f(x)$在$(0,1)$内有唯一零点．

若$f(\sqrt{\frac{-a}{3}})<0$，即$-3<a<-\frac{3}{4}$，由$f(0)=\frac{1}{4}$，f（1）$=a+\frac{5}{4}$，

$\therefore$当$-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$时，$f(x)$在$(0,1)$内有两个零点．

当$-3<a\leqslant -\frac{5}{4}$时，$f(x)$在$(0,1)$内有一个零点．

综上可得：当$a>-\frac{3}{4}$或$a<-\frac{5}{4}$时，$h(x)$有一个零点；

当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；

当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，函数 $h(x)$ 有三个零点．

2．已知函数 $f(x)=x^{2}+ax+\frac{1}{4}$，$g(x)=-lnx$．

（1）若函数 $g[f(x)]$ 的定义域为 R，求实数 a 的取值范围；

（2）若函数 $g[f(x)]$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围；

（3）用 $min\{m$，$n\}$ 表示 m，n 中的最小值，设函数 $h(x)=min\{f(x)$，$g(x)\}(x>0)$，讨论 $h(x)$ 零点的个数．

【解答】解：（1）若函数 $g[f(x)]$ 的定义域为 R，

则任意 $x\in R$，使得 $f(x)=x^{2}+ax+\frac{1}{4}>0$，

所以$\triangle=a^{2}-4\times1\times\frac{1}{4}<0$，解得 $-1<a<1$，

所以实数 a 的取值范围为 $(-1,1)$．

（2）若函数 $g[f(x)]$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又因为 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数且任意 $x\in(1,+\infty)$，$f(x)>0$，

所以 $-\frac{a}{2}\leqslant1$，且 f（1）>0，

即 $-\frac{a}{2}\leqslant1$，且 $1+a+\frac{1}{4}>0$，

解得 $a>-\frac{5}{4}$，

所以 a 的取值范围为 $(-\frac{5}{4}$，$+\infty)$．

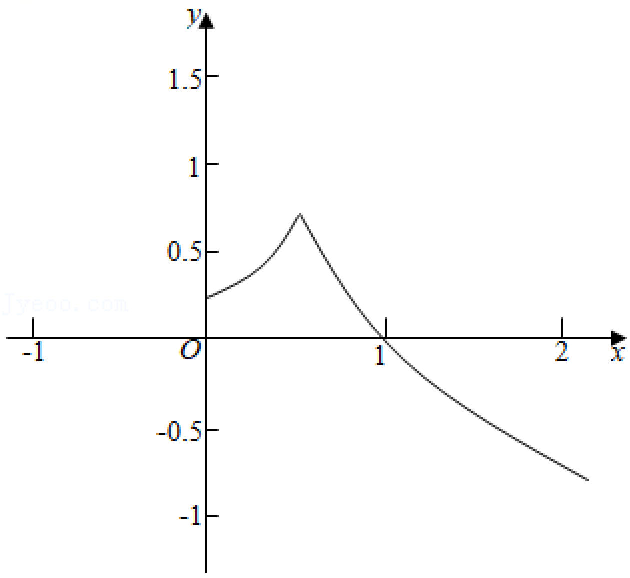
（3）因为当 $x>1$ 时，$g(x)=-lnx<0$，

所以 $h(x)=min\{f(x)$，$g(x)\}\leqslant g(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上无零点，

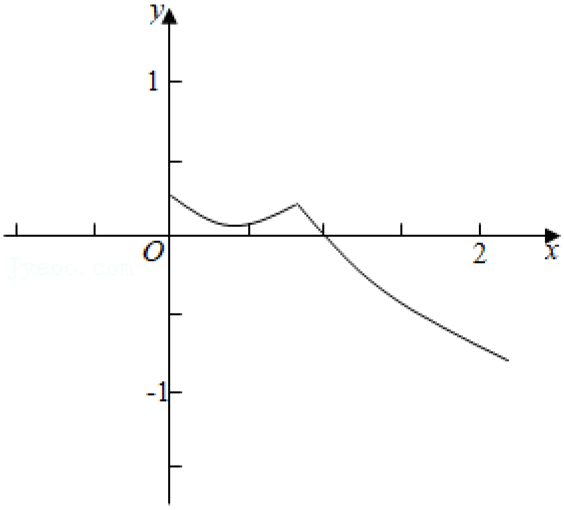
①当 $a\geqslant0$ 时，$f(x)$ 过 $(0,\frac{1}{4})$ 点，且对称轴 $-\frac{a}{2}\leqslant0$，

作出 $h(x)$ 的图象，可得 $h(x)$ 只有一个零点 $x=1$，

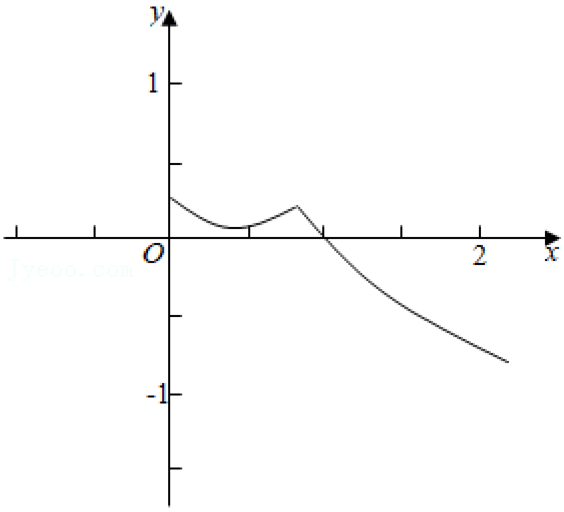


②当 $a<0$ 时，$f(x)$ 过 $(0,\frac{1}{4})$ 点，且对称轴 $-\frac{a}{2}>0$，

当$\triangle = a^2 - 4\times 1\times \frac{1}{4} < 0$，即$-1 < a < 0$时，$h(x)$只有一个零点$x = 1$，

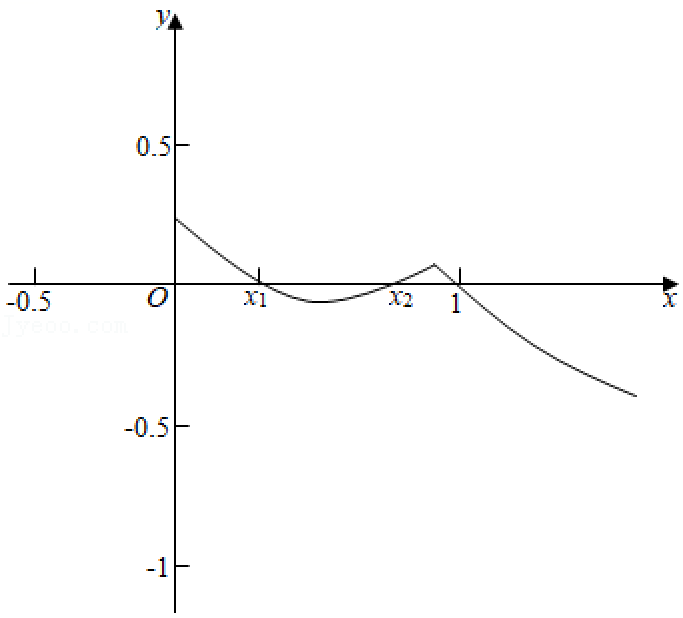


当$\triangle = a^2 - 4\times 1\times \frac{1}{4} = 0$，即$a = -1$时，$f(x)$的零点为$x = -\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$，$h(x)$由两个零点$x = \frac{1}{2}$，$x = 1$，

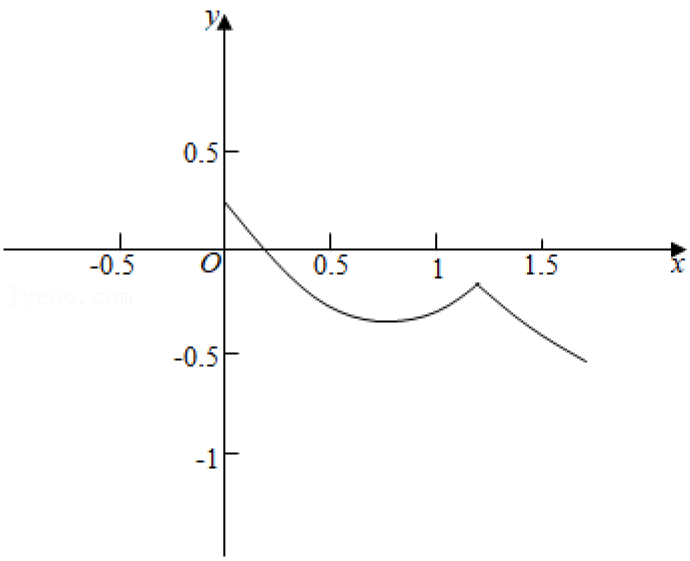


当$\triangle = a^2 - 4\times 1\times \frac{1}{4} > 0$，即$a < -1$时，令$f(x) = 0$，解得$x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-1}}{2}$，$x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{2}$，且$0 < x_1 < 1$，$0 < x_2$，

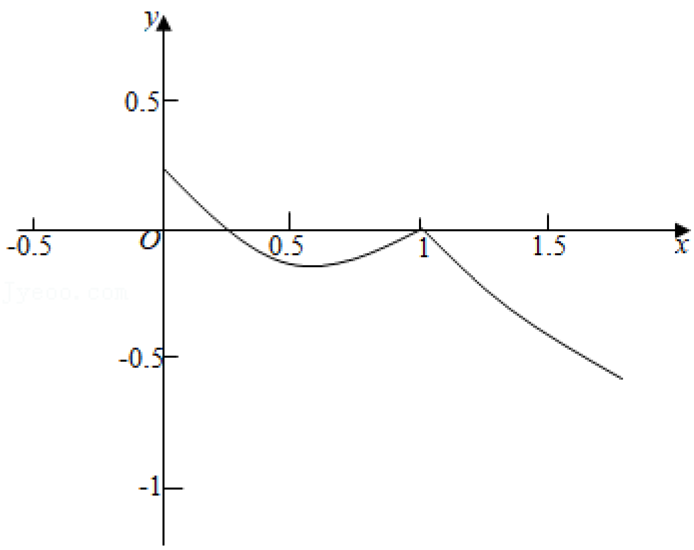
若$x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{2} < 1$，即$-\frac{5}{4} < a < -1$时，函数$h(x)$有3个零点$x = x_1$，$x = x_2$，$x = 1$，



若 $x_2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-1}}{2}>1$，即 $a<-\dfrac{5}{4}$ 时，函数 $h(x)$ 有 1 个零点 $x=x_1$，



若若 $x_2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-1}}{2}=1$，即 $a=-\dfrac{5}{4}$ 时，函数 $h(x)$ 有 2 个零点 $x=x_1$， $x=1$，



综上所述，当 $a\in(-\infty,\ -\dfrac{5}{4})\cup(-1,\ 0)$ 时，$h(x)$ 只有一个零点，

当 $a=-1$ 或 $-\dfrac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点，

当 $a\in(-\dfrac{5}{4},\ -1)$ 时，$h(x)$ 有三个零点．

3．已知函数 $f(x)=x^3-3ax+e$，$g(x)=1-lnx$，其中 e 为自然对数的底数．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）用 $max\{m,\ n\}$ 表示 m，n 中较大者，记函数 $h(x)=max\{f(x),\ g(x)\}$，$(x>0)$．若函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个零点，求实数 a 的取值范围．

【解答】解：（1）$f'(x)=3x^2-3a$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 R 上单调递增，

当 $a>0$ 时，$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$，

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{a})$，$(\sqrt{a},\ +\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(-\sqrt{a},\sqrt{a})$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

（2）当 $x\in(0,e)$ 时，$g(x)>0$，$h(x)\geqslant g(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,e)$ 无零点，

当 $x=e$ 时，g（e）$=0$，f（e）$=e^3-3ae+e$，

若 f（e）$\leqslant 0$，即 $a\geqslant\dfrac{e^2+1}{3}$，则 e 是 $h(x)$ 的一个零点，

若 f（e）>0，即 $a<\dfrac{e^2+1}{3}$，则 e 不是 $h(x)$ 的零点，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，所以此时只需考虑函数 $f(x)$ 的零点的情况．因为 $f'(x)=3x^2-3a>3e^2-3a$，

①当 $a\leqslant e^2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增．

所以：（ⅰ）当 $a\leqslant\dfrac{e^2+1}{3}$ 时，f（e）$\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上无零点；

（ⅱ）当 $\dfrac{e^2+1}{3}<a\leqslant e^2$ 时，f（e）<0，又 $f(2e)=8e^3-6ae+e\geqslant 8e^3-6e^3+e>0$，所以此时 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上恰有一个零点；

②当 $a>e^2$ 时，由（1）知，$f(x)$ 在 $(e,\sqrt{a})$ 递减，$(\sqrt{a},\ +\infty)$ 递增，

又因为 f（e）$=e^3-3ae+e<e^3-3e^3+e<0$，$f(2a)=8a^3-6a^2+e>8a^2-6a^2+e=2a^2+e>0$，所以此时 $f(x)$ 恰有一个零点．

综上，$a>\dfrac{e^2+1}{3}$．

4．已知函数 $f(x)=lnx-x^2+ax$，$g(x)=e^x-e$，其中 $a>0$．

（Ⅰ）证明：$lnx\leqslant x-1$；

（Ⅱ）若 $a=2$，证明 $f(x)<\dfrac{5}{4}$；

（Ⅲ）用 $max\{m,\ n\}$ 表示 m 和 n 中的较大值，设函数 $h(x)=max\{f(x),\ g(x)\}$，讨论函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点的

个数．

【解答】（Ⅰ）证明：设函数 $\varphi(x)=lnx-x+1$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1,x>0$．

令 $\varphi'(x)=0$ 得 $x=1$，则在 $(0,1)$ 上，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 上，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 递减．
所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi$（1）$=0$，即 $lnx\leqslant x-1$．

（Ⅱ）证明：当 $a=2$ 时，$f(x)=lnx-x^2+2x\leqslant x-1-x^2+2x=-(x-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{5}{4}\leqslant\dfrac{5}{4}$，

前面的"$\leqslant$"仅当 $x=1$ 时取等号后面的"$\leqslant$"仅当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时取等号，不能同时取到．

所以 $f(x)<\dfrac{5}{4}$．

（Ⅲ）解：在区间 $(1,+\infty)$ 上，$g(x)>0$，所以 $h(x)=max\{f(x)$，$g(x)\}\geqslant g(x)>0$，
所以 $h(x)=max\{f(x)$，$g(x)\}\geqslant g(x)>0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上不可能有零点．
下面只考虑区间 $(0,1))$ 上和 $x=1$ 处的情况．

由题意 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x+a=\dfrac{-2x^2+ax+1}{x}$．

令 $f'(x_0)=0$ 可得 $x_0=\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}$（负值舍去）．

在 $(0,x_0)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，在 $(x_0$，$+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，$f(x)_{max}=f(x_0)$．

①当 $a=1$ 时，$x_0=1$，所以 $f(x)_{max}=f$（1）$=0$．

因为在区间 $(0,1)$ 上，$g(x)<0$，且 g（1）$=0$，所以此时 $h(x)$ 存在唯一的零点 $x=1$．

②当 $0<a<1$ 时，$x_0=\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}<1$．因为 $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-2x_0+a=0$，所以 $a=2x_0-\dfrac{1}{x_0}$．

所以 $f(x_0)=lnx_0-x_0^2+x_0(2x_0-\dfrac{1}{x_0})=lnx_0+x_0^2-1<ln1+1^2-1=0$．
于是 $f(x)<0$ 恒成立．
结合函数 $g(x)$ 的性质，可知此时 $h(x)$ 存在唯一的零点 $x=1$．

③当 $a>1$ 时，$x_0=\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}>1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增．

又因为 f（1）$=a-1>0$，$f(\dfrac{1}{2a})=ln\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2a}-1-\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{2}=-(\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在唯一的零点 $x=x_1$．

结合函数 $g(x)$ 的性质，可知 $x=x_1$ 是 $h(x)$ 唯一的零点．

综上所述：当 $0<a\leqslant 1$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点 $x=1$；
当 $a>1$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也有 1 个零点．

同构法解零点问题与恒成立问题解答

1．已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在零点，求实数 a 的取值范围

【解答】解：方法一：由 $f(x)=\frac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$ 可得 $f'(x)=\frac{x-1}{e^{x-1}}(\frac{e^{x-1}}{x}-a)$，

设 $y=\frac{e^{x-1}}{x}-a$，$x>0$，$a>0$，则 $y'=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}$，令 $y'=0\Rightarrow x=1$，$\therefore y$ 在 $x\in(0,1)$ 单调递减，在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $y_{min}=y$（1）$=1-a$．

①当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)_{min}=f$（1）$=a-1-lna>0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内无零点；

②当 $a=1$ 时，f（1）$=a-1-lna=0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点；

③当 $a>1$ 时，令 $f'(x)=\frac{x-1}{e^{x-1}}(\frac{e^{x-1}}{x}-a)=0$，解得 $x=x_1$ 或 1 或 x_2，且 $0<x_1<1<x_2$，

此时 $f(x)$ 在 $x\in(0,x_1)$ 单减，$x\in(x_1$，$1)$ 单增，$x\in(1,x_2)$ 单减，$x\in(x_2$，$+\infty)$ 单增，

当 $x=x_1$ 或 x_2 时，$f(x)_{极小值}=0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有两个零点；

综合①②③知 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点 $\Rightarrow a\geqslant 1$．

方法二：由题意可得

$e^{-x+1+ln(ax)}=ln(ax)-x+2$，即 $e^{-x+1+ln(ax)}-[-x+1+ln(ax)]-1=0$，

因为 $e^x\geqslant x+1$ 当 $x=0$ 时等号成立，

所以 $-x+1+ln(ax)=0$，即 $ax=e^{x-1}$，

$a=\frac{e^{x-1}}{x}$，令 $g(x)=\frac{e^{x-1}}{x}$，$g'(x)=\frac{1}{e}\times\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，

易知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，在 $(1,+\infty)$ 上单增，所以 $g(x)\geqslant g$（1）$=1$，

又 x 趋近于 0 和正无穷时，$g(x)$ 趋近于正无穷，

所以 $a\geqslant 1$．

2．已知函数 $f(x)=ae^x-ln(x+2)+lna-2$，

（1）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，求 a 的值及函数的单调区间．

（2）请在下列两问中选择一问作答，答题前请标好选择．如果多写按第一个计分．

①若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

②若 $f(x)$ 仅有两个零点，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1）函数 $f(x)=ae^x-ln(x+2)+lna-2$，

则 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,+\infty)$，

且 $f'(x)=ae^x-\frac{1}{x+2}$，

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，

所以 $f'(0)=0$，即 $a-\frac{1}{2}=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$；

此时 $f'(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{x+2}$，

所以 $f'(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

则当 $-2<x<0$ 时， $f'(x)<0$ ，则 $f(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$ ，则 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2,0)$ ，单调递增区间为 $(0,+\infty)$ ；

（2）若选①：

因为 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $ae^{x}-ln(x+2)+lna-2\geqslant 0$ 恒成立，

整理可得 $e^{x+lna}+x+lna\geqslant ln(x+2)+x+2$ 恒成立，

即 $e^{x+lna}+x+lna\geqslant ln(x+2)+e^{ln(x+2)}$ 恒成立，

令 $h(x)=e^{x}+x$ ，

则 $h(x+lna)\geqslant h(ln(x+2))$ 恒成立，

因为 $h'(x)=e^{x}+1>0$ 恒成立，

则 $h(x)$ 为单调递增函数，

所以 $x+lna\geqslant ln(x+2)$ 恒成立，即 $lna\geqslant ln(x+2)-x$ 恒成立，

令 $\varphi(x)=ln(x+2)-x$ ， $x<-2$ ，

则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+2}-1=-\dfrac{x+1}{x+2}$ ，

当 $-2<x<-1$ 时， $\varphi'(x)>0$ ，则 $\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x>-1$ 时， $\varphi'(x)<0$ ，则 $\varphi(x)$ 单调递减，

所以 $\varphi(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，即最大值 $\varphi(-1)=1$ ，

故 $lna\geqslant -1$ ，解得 $a\geqslant e$ ，

所以 a 的取值范围为 $[e，+\infty)$ ；

若选②：

因为 $f(x)$ 仅有两个零点，即 $ae^{x}-ln(x+2)+lna-2=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有两个根，

整理可得 $e^{x+lna}+x+lna=ln(x+2)+x+2$ ，

即 $e^{x+lna}+x+lna=ln(x+2)+e^{ln(x+2)}$ ，

令 $h(x)=e^{x}+x$，

则 $h(x+lna)=h(ln(x+2))$，

因为 $h'(x)=e^{x}+1>0$ 恒成立，

则 $h(x)$ 为单调递增函数，

所以 $x+lna=ln(x+2)$，即 $lna=ln(x+2)-x$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有两个根，

令 $\varphi(x)=ln(x+2)-x$， $x<-2$，

则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+2}-1=-\dfrac{x+1}{x+2}$，

当 $-2<x<-1$ 时， $\varphi'(x)>0$，则 $\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x>-1$ 时， $\varphi'(x)<0$，则 $\varphi(x)$ 单调递减，

所以 $\varphi(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，即最大值 $\varphi(-1)=1$，

要想 $lna=ln(x+2)-x$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有两个根，

只需 $lna<1$，解得 $0<a<e$，

所以 a 的取值范围为 $(0,e)$．

3．已知 $f(x)=xlnx+\dfrac{a}{2}x^{2}+1$．

（1）若函数 $g(x)=f(x)+x\cos x-\sin x-xlnx-1$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上有 1 个零点，求实数 a 的取值范围．

（2）若关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\dfrac{a}{2}x^{2}+ax-1$ 有两个不同的实数解，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1） $g(x)=\dfrac{a}{2}x^{2}+x\cos x-\sin x$， $x\in(0$， $\dfrac{\pi}{2}]$，

所以 $g'(x)=x(a-\sin x)$，

当 $a\geqslant1$ 时， $a?\sin x\geqslant0$，所以 $g(x)$ 在 $(0$， $\dfrac{\pi}{2}]$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0$， $\dfrac{\pi}{2}]$ 上无零点；

当 $0<a<1$ 时， $\exists x_{0}\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $\sin x_{0}=a$，

所以 $g(x)$ 在 $(x_{0}$， $\dfrac{\pi}{2}]$ 单调递减，在 $(0,x_{0})$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$， $g(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{a\pi^{2}}{8}-1$，

所以若 $\dfrac{a\pi^{2}}{8}-1>0$，即 $a>\dfrac{8}{\pi^{2}}$ 时， $g(x)$ 在 $(0$， $\dfrac{\pi}{2}]$ 上无零点，

若 $\dfrac{a\pi^{2}}{8}?1\leqslant0$，即 $0<a\leqslant\dfrac{8}{\pi^{2}}$ 时， $g(x)$ 在 $(0$， $\dfrac{\pi}{2}]$ 上有一个零点，

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)=a-x\sin x<0$，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上无零点，

综上当 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上有一个零点；

（2）由 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1(x>0)$，

即 $xe^{x-a}=xlnx+ax$，即 $e^{x-a}=lnx+a$，

则有 $e^{x-a}+(x-a)=x+lnx$，

令 $h(x)=x+lnx$，$x>0$，则 $h(e^{x-a})=e^{x-a}+(x-a)$，

$h'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

所以 $e^{x-a}=x$，则有 $x-a=lnx$，即 $a=x-lnx$，$x>0$，

因为关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1$ 有两个不同的实数解，

则方程 $a=x-lnx$，$x>0$ 有两个不同的实数解，

令 $\varphi(x)=x-lnx$，则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，

所以函数 $\varphi(x)=x-lnx$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

所以 $\varphi(x)_{min}=\varphi$（1）$=1$，

当 $x\to 0$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，

所以 $\{a\,|\,a>1\}$.

4．已知函数 $f(x)=ae^x-ln(x+1)+lna-1$.

（1）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）若函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点，求 a 的取值范围.

【解答】解析：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-ln(x+1)-1$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$，$x>-1$，

显然 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，且 $f'(0)=0$，

$\therefore$ 当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$，无极大值.

（2）函数 $f(x)$ 有两个零点，即 $f(x)=0$ 有两个解，即 $ae^x+ln(ae^x)=ln(x+1)+(x+1)$ 有两个解，

设 $h(t)=t+lnt$，则 $h'(t)=1+\frac{1}{t}>0$，$h(t)$ 单调递增，

$\therefore ae^x=x+1(x>-1)$ 有两个解，即 $a=\frac{x+1}{e^x}(x>-1)$ 有两个解.

令 $s(x)=\frac{x+1}{e^x}(x\geqslant -1)$，则 $s'(x)=-\frac{x}{e^x}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$s'(x)>0$，$s(x)$ 单调递增；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$s'(x)<0$，$s(x)$ 单调递减.

$\because s(-1)=0$，$s(0)=1$，当 $x>0$ 时 $s(x)>0$，

$\therefore 0<a<1$.

5．已知函数 $f(x)=e^{2x+a}-\frac{1}{2}lnx+\frac{a}{2}$.

（1）若函数 $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $y=f(x)$ 在定义域内没有零点，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1）因为函数 $y=f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上单调递减，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上恒成立，

由 $f(x)=e^{2x+a}-\dfrac{1}{2}lnx+\dfrac{a}{2}$， $x>0$，

可得 $f'(x)=2e^{2x+a}-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{4xe^{2x+a}-1}{2x}$，

由于 $x>0$，则 $4xe^{2x+a}-1\leqslant 0$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上恒成立，

令 $F(x)=4xe^{2x+a}-1$， $F'(x)=(8x+4)e^{2x+a}>0$，

故 $F(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上单调递增，

所以只需 $F(\dfrac{1}{2})\leqslant 0$ 即可， $F(\dfrac{1}{2})=2e^{1+a}-1\leqslant 0$，

所以 $a\leqslant -1-ln2$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty，-1-ln2]$．

（2） $f(x)=e^{2x+a}-\dfrac{1}{2}lnx+\dfrac{a}{2}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2e^{2x+a}-\dfrac{1}{2x}$，令 $g(x)=2e^{2x+a}$， $h(x)=\dfrac{1}{2x}$，

当 $x>0$ 时， $g(x)$ 单调递增， $g(x)\in(2e^{a}，+\infty)$， $h(x)\in(0，+\infty)$，

故存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $2e^{2x_0+a}-\dfrac{1}{2x_0}=0$，

即 $4e^{2x_0+a}=\dfrac{1}{x_0}$①，两边取对数得 $ln4+2x_0+a=-lnx_0$②，

而 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0，+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)_{min}=f(x_0)>0$，故 $e^{2x_0+a}-\dfrac{1}{2}lnx_0+\dfrac{a}{2}>0$，

将①②代入上式得 $\dfrac{1}{4x_0}+\dfrac{ln4+2x_0+a}{2}+\dfrac{a}{2}>0$，化简得 $a>-\dfrac{1}{4x_0}-x_0-ln2$，

因为 $\dfrac{1}{4x_0}+x_0\geqslant 1$，当且仅当 $\dfrac{1}{4x_0}=x_0$，即 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，

所以 $-\dfrac{1}{4x_0}-x_0-ln2\leqslant -1-ln2$，

故 $a>-1-ln2$，

即 a 的取值范围是 $(-1-ln2,+\infty)$．