湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——概率解答题——概率的最值问题 1

1.（1）由题意可知每个坑要补种的概率$P=C_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，则$n$个坑中有 3 个坑要补种的概率为

$C_n^3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.欲使$C_n^3\left(\frac{1}{2}\right)^n$最大，只需$\begin{cases}C_n^3\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq C_{n-1}^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\C_n^3\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq C_{n+1}^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{cases}$解得$5\leq n\leq 6$.因为$n\in\mathbf{N}^*$，所以$n=5$，6.

当$n=5$时，$C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$，当$n=6$时，$C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{16}$，

所以当$n=5$或$n=6$时，有 3 个坑要补种的概率最大，最大概率$\frac{5}{16}$.

（2）易知X的取值范围为$\{0,1,2,3,4\}$，且$X\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，因此$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$，

$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$，$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$，$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$，

所以X的分布列为：（略）

2.（1）由题意可知，随机变量X的可能取值为 0、1、2、3，

则$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=\mathrm{C}_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$，$P(X=2)=\mathrm{C}_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{16}$，$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\mathrm{C}_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^4+\mathrm{C}_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2}$

随机变量X的分布列如下：

则$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{16}+2\times\frac{3}{16}+3\times\frac{1}{2}=\frac{33}{16}$

（2）甲队只胜一场的概率为$f(p)=\mathrm{C}_3^1p(1-p)^3$，则$f'(p)=\mathrm{C}_3^1\left[(1-p)^3+3p(1-p)^2(-1)\right]=3(1-p)^2(1-4p)$.

故当$0<p<\frac{1}{4}$时，$f'(p)>0$，$f(p)$递增；当$\frac{1}{4}<p<1$时，$f'(p)<0$，$f(p)$递增；

则$f(p)_{\max}=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{81}{256}$

3. (1)依题意有$\chi^2=\frac{200\times(30\times90-60\times20)^2}{90\times110\times50\times150}\approx6.061>3.841$，故有 95%的把握认为密切接触者感染病毒与年龄有关；

(2)由题意得：该地区每名密切接触者感染病毒的概率为$\frac{30+20}{200}=\frac{1}{4}$，设随机抽取的 4 人中至少有 3 人感染病毒为事件 A，则$p(A)=C_4^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{13}{256}$；

(3)设事件B为：检测了 3 名成员确定为“感染高危家庭”；事件C为：检测了 4 名成员确定为“感染高危家庭”；

则$P(B)=(1-p)^2p$，$P(C)=(1-p)^3p$

即 $f(p)=(1-p)^2p+(1-p)^3p=p(1-p)^2(2-p)$

设 $x=1-p(0<x<1)$，则 $g(x)=(1-x)(1+x)x^2=(1-x^2)x^2$，

因为 $(1-x^2)>0$，$x^2>0$，由基本不等式可知：$g(x)=(1-x^2)x^2\le\left(\dfrac{1-x^2+x^2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

当且仅当 $1-x^2=x^2$，即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，即 $p=m=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4.（1）从 $(n+2)$ 个球中任选 2 个，有 C_{n+2}^2 种选法，任选的 2 个球颜色相同，有 $\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_2^2$ 种选法，

∴一次摸球中奖的概率 $p=\dfrac{\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_{n+2}^2}=\dfrac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}$.

（2）若 $n=3$，则一次摸球中奖的概率为 $\dfrac{2}{5}$.

三次摸球是独立重复试验，则三次摸球中恰有一次中奖的概率是 $\mathrm{C}_3^1\times\dfrac{2}{5}\times\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{54}{125}$.

（3）由题意，得三次摸球恰有一次中奖的概率是 $f(p)=\mathrm{C}_3^1\cdot p\cdot(1-p)^2=3p^3-6p^2+3p$，$0<p<1$.

$\because f'(p)=9p^2-12p+3=3(p-1)(3p-1)$，∴ $f(p)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ 上单调递减，

∴当 $p=\dfrac{1}{3}$ 时，$f(p)$ 取得最大值，由（1）知 $p=\dfrac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}=\dfrac{1}{3}$（$n\ge2$，且 $n\in\mathbf{N}^*$），

得 $n=2$，即 $n=2$ 时，$f(p)$ 取得最大值.

5.（1）由频率分布直方图的性质可得，$(0.004+m+0.022+0.03+0.028+0.004)\times10=1$，解得 $m=0.012$，

设中位数为 n，$0.004\times10+0.022\times10+(n-60)\times0.3=0.5$，解得 $n=68$.

（2）$\because[70,\ 80)$，$[80,\ 90)$，$[90,\ 100]$ 的三组频率之比为 $0.28:0.12:0.04=7:3:1$，

$\therefore$ 从 $[70,\ 80)$，$[80,\ 90)$，$[90,\ 100]$ 中分别抽取 7 人，3 人，1 人，ξ 所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(\xi=0)=\dfrac{C_8^3}{C_{11}^3}=\dfrac{56}{165}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_8^2C_3^1}{C_{11}^3}=\dfrac{28}{55}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_8^1C_3^2}{C_{11}^3}=\dfrac{8}{55}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_3^3}{C_{11}^3}=\dfrac{1}{165}$，

故 ξ 的分布列为：

故 $E(\xi)=0\times\dfrac{56}{165}+1\times\dfrac{28}{55}+2\times\dfrac{8}{55}+3\times\dfrac{1}{165}=\dfrac{9}{11}$.

（3）B 等级的概率为 $(0.028+0.012)\times10=0.4$，

$P(\eta=k)=C_{100}^k(0.4)^k(0.6)^{100-k}$，$k=0$，1，3，$\cdots$，100，

令 $C_{100}^k(0.4)^k(0.6)^{100-k}\ge C_{100}^{k+1}(0.4)^{k+1}(0.6)^{99-k}$ ①，$C_{100}^k(0.4)^k(0.6)^{100-k}\ge C_{100}^{k-1}(0.4)^{k-1}(0.6)^{101-k}$ ②，

由①可得，$\dfrac{0.6}{100-k}\ge\dfrac{0.4}{k+1}$，解得 $k\ge39.4$，由②可得，$\dfrac{0.4}{k}\ge\dfrac{0.6}{(101-k)}$，解得 $k\le40.4$，

故 $k=40$ 时，$P(\eta=k)$ 取得最大.

6．(1)设每一位参与答题测试的学生所得分数为 X，则 X 可取 $0,3,5$

$P(X=0)=0.5\times0.5=0.25$，$P(X=3)=0.5\times0.5=0.25$，$P(X=5)=0.5$

即每一位参与答题测试的学生所得分数的数学期望为 $E(X)=0\times0.25+3\times0.25+5\times0.5=3.25$

(2) $p=m+(1-m)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{m}{2}$

根据题意，该班恰有 9 人答题测试过关的概率为 $f\left(p\right)=C_{12}^{9}p^{9}(1-p)^{3}$

$f'(p)=9C_{12}^{9}p^{8}(1-p)^{3}-3C_{12}^{9}p^{9}(1-p)^{2}=3C_{12}^{9}p^{8}(1-p)^{2}(3-4p)$

$f'(p)>0\Rightarrow 0<p<\frac{3}{4}$， $f'(p)<0\Rightarrow \frac{3}{4}<p<1$

故 $f\left(p\right)$ 在 $\left(0,\frac{3}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{3}{4},1\right)$ 上单调递减

故当 $p=\frac{3}{4}$ 时， $f\left(p\right)$ 取最大值，此时 $\frac{1}{2}+\frac{m}{2}=\frac{3}{4},m=\frac{1}{2}$

7．(1) S_3 的取值为 -3， -1，1，3.

则 $P(S_3=-3)=q^3=\frac{1}{64}$，同理 $P(S_3=-1)=C_3^2q^2p=\frac{9}{64},P(S_3=1)=C_3^1qp^2=\frac{27}{64},P(S_3=3)=p^3=\frac{27}{64}$.

则 S_3 的分布列为：

故 $E(S_3)=-3\times\frac{1}{64}+(-1)\times\frac{9}{64}+1\times\frac{27}{64}+3\times\frac{27}{64}=\frac{3}{2}$.

(2)当 $S_8=2$ 时，即前 8 秒出现“Y”的次数为 5，出现“C”的次数为 3.

又已知 $S_i\geq 0$（i＝1，2，3，4），则有：

若第 1、3 秒出现“Y”，则其余 6 秒可任意出现 3 次“Y”;

若第 1、2 秒出现“Y”，则第 3 秒出现“C”，则后 5 秒可任意出现 3 次“Y”;

故概率 $P=C_6^3p^5\left(1-p\right)^3+C_5^3p^5\left(1-p\right)^3=30p^5\left(1-p\right)^3$，

令 $f(p)=30p^5(1-p)^3,(0<p<1)$，

$f'(p)=30\left[5p^4(1-p)^3-3p^5(1-p)^2\right]=30p^4(1-p)^2(5-8p)$，

当 $f'(p)>0\Rightarrow 0<p<\frac{5}{8}$，当 $f'(p)<0\Rightarrow \frac{5}{8}<p<1$，

故 $f(p)$ 在 $(0,\frac{5}{8})$ 上单调递增，在 $(\frac{5}{8},1)$ 上单调递减.

故当 $p=\frac{5}{8}$ 时， $f(p)$ 最大，此时 $p=\frac{5}{8}$， $q=1-p=\frac{3}{8}$.

8.（1） $\bar{x}=1\times0.085+3\times0.205+5\times0.31+7\times0.25+9\times0.13+11\times0.015+13\times0.005=5.4$ 天.

（2）由题设知：$[0,6]$ 的频率为 0.6，$(6,14]$ 的频率为 0.4，故 200 人中潜伏期在 $[0,6]$ 上有 120 人，在 $(6,14]$ 上有 80 人.

列联表如下：

	潜伏期 ≤ 6 天	潜伏期 >6 天	总计
50 岁以上（含 50）	65	35	100
50 岁以下	55	45	100
总计	120	80	200

$\therefore \chi^2=\dfrac{200\times(65\times45-35\times55)^2}{100\times100\times120\times80}\approx2.083<3.841$，故没有 95%的把捏认为潜伏期与息者年龄有关.

（3）由患者潜伏期超过 6 天发生的概率$\dfrac{400}{1000}=\dfrac{2}{5}$，设潜伏期超过 6 天的人数为 X，则 $X\sim B(20,\dfrac{2}{5})$，

$\therefore P(X=k)=C_{20}^{k}(\dfrac{3}{5})^{20-k}(\dfrac{2}{5})^{k}$ 且 $0\le k\le20$，$k\in N^*$，

由题意，$\begin{cases}P(X=k)\ge P(X=k+1)\\P(X=k)\ge P(X=k-1)\end{cases}$，即$\begin{cases}C_{20}^{k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{20-k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k}\ge C_{20}^{k+1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{19-k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k+1}\\C_{20}^{k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{20-k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k}\ge C_{20}^{k-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{21-k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}\end{cases}$，化简得$\begin{cases}3(k+1)\ge2(20-k)\\2(21-k)\ge3k\end{cases}$，解得

$\dfrac{37}{5}\le k\le\dfrac{42}{5}$，$\therefore k=8$，即潜伏期超过 6 天最有可能是 8 人.

9．解：（1）$\because \xi\sim N\left(270,5^2\right)$

$\therefore P(260<\xi\le265)=\dfrac{P(260<\xi<280)-P(265<\xi<275)}{2}=\dfrac{0.9544-0.6826}{2}=0.1359$ 所以质量指标在（260，265]内的排球个数约$1000\times0.1359\approx136$个

（2）（i）前三场赢两场，第四场必赢，则 $f(p)=3\times p^3\times(1-p)=3\left(p^3-p^4\right)$，$f'(p)=3p^2(3-4p)$，

令 $f'(p)=0$，得 $p=\dfrac{3}{4}$，（$p=0$舍去）

当 $p\in(0,\dfrac{3}{4})$时，$f'(p)>0$，函数 $f(p)$ 单调递增，

当 $p\in(\dfrac{3}{4},1)$时，$f'(p)<0$，函数 $f(p)$ 单调递减，

所以 $f(p)$ 的最大值点 $p_0=\dfrac{3}{4}$.

（ii）X 可能取的值为 0、1、2、3，

$X=3$，表示前三场均全赢，或者前三场赢两场，第四场必赢，$p(X=3)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+C_3^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{189}{256}$，

$X=2$，表示前四场赢两场，第五场必赢，$p(X=2)=C_4^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{81}{512}$，

$X=1$，表示前四场赢两场，第五场必输，$p(X=1)=C_4^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{27}{512}$，

$X=0$，表示前三场全输，或者前三场赢一场，第四场必输

$p(X=0)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+C_3^1\times\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{13}{256}$

$\therefore X$ 的分布列为：

则 $E(X)=3\times\dfrac{189}{256}+2\times\dfrac{81}{512}+1\times\dfrac{27}{512}+0\times\dfrac{13}{512}=\dfrac{1323}{512}$.

10．（1）依题意有 $\chi^2=\dfrac{400\times\left(60\times80-220\times40\right)^2}{280\times120\times100\times300}\approx6.35$，由于 $6.35>3.841$，故有 95% 的把握认为“长期潜伏”与年龄

有关；

（2）(i)若潜伏期 $X\sim N\left(7.2,2.25^2\right)$，由 $P\left(X\geq 13.95\right)=\dfrac{1-0.9974}{2}=0.0013$，

得知潜伏期超过14天的概率很低，因此隔离14天是合理的；

(ii)由于400个病例中有100个属于长潜伏期，若以样本频率估计概率，一个患者属于“长潜伏期”的概率是 $\dfrac{1}{4}$，

于是 $p\left(k\right)=C_{1000}^{k}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1000-k}$，则 $\dfrac{p\left(k\right)}{p\left(k-1\right)}=\dfrac{C_{1000}^{k}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1000-k}}{C_{1000}^{k-1}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{1001-k}}=\dfrac{C_{1000}^{k}}{3C_{1000}^{k-1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\left(k-1\right)!\left(1001-k\right)!}{k!\left(1000-k\right)!}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1001}{k}-1\right)$，

当 $0<k<\dfrac{1001}{4}$ 时，$\dfrac{p\left(k\right)}{p\left(k-1\right)}>1$；当 $\dfrac{1001}{4}<k\leq 1000$ 时，$\dfrac{p\left(k\right)}{p\left(k-1\right)}<1$；

$\therefore$ $p\left(1\right)<p\left(2\right)<\cdots<p\left(250\right)$，$p\left(250\right)>p\left(251\right)>\cdots>p\left(1000\right)$.

故当 $k=250$ 时，$p\left(k\right)$ 取得最大值.

11．（1）因为课时量介于 $\left[7,12\right]$ 内部分，按4元/节计算课时津贴；课时量介于 $\left(12,16\right]$ 内部分，按6元/节计算课时津贴；课时量介于 $\left(16,30\right]$ 内部分，按9元/节计算课时津贴，所以 $f\left(x\right)=\begin{cases}4x, x\in\left[7,12\right],\\ 4\times 12+6\left(x-12\right), x\in\left(12,16\right],\\ 4\times 12+6\left(16-12\right)+9\left(x-16\right), x\in\left(16,30\right].\end{cases}$，

即 $f\left(x\right)=\begin{cases}4x, x\in\left[7,12\right],\\ 6x-24, x\in\left(12,16\right],\\ 9x-72, x\in\left(16,30\right].\end{cases}$

（2）设取到超工作量的教师人数为 ξ，可知超工作量的教师有3名，则 ξ 可取0，1，2，3，

$P\left(\xi=0\right)=\dfrac{C_7^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{24}$，$P\left(\xi=1\right)=\dfrac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\dfrac{21}{40}$，$P\left(\xi=2\right)=\dfrac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{40}$，$P\left(\xi=3\right)=\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$，

故 ξ 的分布列是

所以 $E\left(\xi\right)=0\times\dfrac{7}{24}+1\times\dfrac{21}{40}+2\times\dfrac{7}{40}+3\times\dfrac{1}{120}=\dfrac{9}{10}$.

(3) 设从全校教师中抽取10名教师周代课量为满工作量的人数为 X，

满足 $X\sim B\left(10,\dfrac{3}{5}\right)$，可知 $P\left(X=k\right)=C_{10}^{k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{10-k}\left(k=0,1,2,3,\cdots,10\right)$，

$\begin{cases}C_{10}^{k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{10-k}\geq C_{10}^{k+1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{k+1}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{10-(k+1)}\\ C_{10}^{k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{10-k}\geq C_{10}^{k-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{k-1}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{10-(k-1)}\end{cases}$ 解得 $\dfrac{28}{5}\leq k\leq\dfrac{33}{5}$，$k\in\mathbf{N}^*$.

所以当 $k=6$ 时，P 最大，所以 $k=6$.

12．（1）随机变量 x 的所有可能取值为0，1，2，3，

则 $P\left(x=0\right)=\left(2-2p\right)\left(1-p\right)^2=2\left(1-p\right)^3$

$P(x=1)=(2p-1)(1-p)^2+2(2-2p)p(1-p)=6p^3-13p^2+8p-1$

$P(x=2)=(2-2p)p^2+2(2p-1)p(1-p)=-6p^3+8p^2-2p$

$P(x=3)=(2p-1)p^2=2p^3-p^2$

故 x 的分布列为

（2）由（1）知 $E(x)=4p-1$

因为 $4p-1\le 2.6$，所有 $p\le 0.9$，即乙种鱼苗自然成活的概率为 0.9

依题意知一尾乙种鱼苗最终成活的概率为 $0.9+0.1\times 0.80\times 0.625=0.95$

那么 n 尾乙种鱼苗最终成活的尾数为 $0.95n$，不成活的尾数是 $(1-0.95)n$

设 $F(n)$ 为购买 n 尾乙种鱼苗最终可获得的利润，

则 $F(n)=100\times 0.95n-20\times(1-0.95)n\ge 3760000$，解得 $n\ge 40000$，

所有需至少购买 40000 尾乙种鱼苗，才能确保获利不低于 376 万元.

13.（1）由 $0.02\times2+0.03\times2+0.05\times2+0.15\times2+a\times2+0.05\times2+0.04\times2+0.01\times2=1$，解得 $a=0.1$.

（2）$\mu=4\times0.04+6\times0.04+8\times0.1+10\times0.1+12\times0.3+14\times0.2+16\times0.1+18\times0.08+20\times0.02=12.16$，

$P(4.88<Z\le 15.8)=P(\mu-2\sigma<Z\le\mu+\sigma)=\dfrac{0.9545+0.6827}{2}=0.8186$，则 $10000\times0.8186=8186$（人），

所以日健步步数 Z 位于区间 $[4.88,15.8]$ 范围内的人数约为 8186 人.

（3）设从该企业员工中随机抽取 20 人日健步步数在 13 千步至 15 千步内的员工有 X 人，则 $X\sim B(20,0.2)$，

其中有 k 名员工的概率为 $P(X=k)=C_{20}^{k}0.2^{k}\cdot0.8^{20-k}$，其中 $k=0,1,2,\cdots,20$.

记 $f(k)=\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\dfrac{C_{20}^{k}0.2^{k}\cdot0.8^{20-k}}{C_{20}^{k-1}0.2^{k-1}\cdot0.8^{21-k}}=\dfrac{21-k}{4k}$，

当 $f(k)>1$ 时，$k<4.2$，则 $P(X=k-1)<P(X=k)$；当 $f(k)<1$ 时，$k>4.2$，则 $P(X=k-1)>P(X=k)$.

所以当 $k=4$ 时，$P(X=k)$ 最大.

14.（1）由散点图可以判断，$y=te^{rx}$ 更适宜作为平均产卵数 y 关于平均温度 x 的经验回归模型；

（2）对 $y=te^{rx}$ 两边取自然对数得 $\ln y=\ln t+rx$，令 $z=\ln y$，$a=\ln t$，$b=r$，则 $z=a+bx$.

因为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(z_i-\overline{z})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{40.182}{147.714}\approx 0.272$，　$\hat{a}=\overline{z}-\hat{b}\overline{x}=3.612-0.272\times27.429=-3.849$，

所以 z 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{z}=0.272x-3.849$.　所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=e^{0.272x-3.849}$

（3）①由题意可知 $f(p)=C_n^2\cdot p^2\cdot(1-p)^{n-2}$，所以 $f'(p)=2C_n^2\cdot p(1-p)^{n-2}-(n-2)C_n^2\cdot p^2(1-p)^{n-3}$

$=C_n^2\cdot p(1-p)^{n-2}\cdot[2(1-p)-(n-2)p]=C_n^2\cdot p(1-p)^{n-2}\cdot(2-np)$.

因为 $n\geqslant 3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $0<p<\dfrac{2}{n}$ 时，$f'(p)>0$；当 $\dfrac{2}{n}<p<1$ 时，$f'(p)<0$.

所以函数 $f(p)$ 在区间 $(0,\dfrac{2}{n})$ 上单调递增，在区间 $(\dfrac{2}{n},1)$ 上单调递减.

所以函数 $f(p)$ 在 $p=\dfrac{2}{n}$ 处取得极大值，亦即最大值.所以 $p_0=\dfrac{2}{n}$.

②由①可知，当 $p=\dfrac{2}{n}$ 时，$f(p)$ 取最大值· 又因为 $n=8$，所以 $p=\dfrac{1}{4}$.

由题意可知 $X\sim B(8,\dfrac{1}{4})$，所以 $E(X)=8\times\dfrac{1}{4}=2$，$D(X)=8\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$.

15．（1）3 次向 A 桶投球投进 2 次的概率 $f\left(p\right)=\mathrm{C}_3^2p^2\left(1-p\right)=-3p^3+3p^2$． $f'(p)=-9p^2+6p$．

令 $f'(p)=0$，得 $p=\dfrac{2}{3}$．

当 $p\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 时，$f'(p)>0$；当 $p\in\left(\dfrac{2}{3},1\right)$ 时，$f'(p)<0$．

∴ $f(p)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{2}{3},1\right)$ 单调递减，

∴所以 $f(p)$ 的最大值点 $p_0=\dfrac{2}{3}$．

（2）由（1）得游客甲投进 A，B，C 三桶的概率分别为 $\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{10}$．

设投进 A 桶的纯收入为 X 元，$E(X)=10\times\dfrac{1}{3}+(-10)\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{10}{3}$；

设投进 B 桶的纯收入为 Y 元，$E(Y)=50\times\dfrac{1}{5}+(-10)\times\dfrac{4}{5}=2$；

设投进 C 桶的纯收入为 Z 元，$E(Z)=80\times\dfrac{1}{10}+(-10)\times\dfrac{9}{10}=-1$；

因为 $E(X)<E(Z)<E(Y)$

所以游客甲选择向 B 桶投球更有利.

16．(1)1000 人中，步数不超过 8 千的有 $20+60+170+200=450$ 人，超过 8 千有 550 人按分层抽样，抽取的人数中不超过 8 千的有 90 人，超过 8 千的有 110 人，2×2 列联表如下

	日行步数 ≤ 8 千	日行步数 >8 千	总计
40 岁以上	40	60	100
40 岁以下(含 40 岁）	50	50	100
总计	90	110	200

∴ $\chi^2=\dfrac{200\left(40\times50-50\times60\right)^2}{100\times100\times90\times110}=\dfrac{200}{99}\approx2.020<3.841$（补充说明：小数点的位数不够三位不扣分）

故没有 95%的把握认为日行步数与居民年龄有关.

(2)居民步数超过 8 千的概率为 $\dfrac{550}{1000}=\dfrac{11}{20}$，

∴ $\begin{cases}\mathrm{C}_{20}^{x}\cdot\left(\dfrac{11}{20}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{9}{20}\right)^{20-x}\ge\mathrm{C}_{20}^{x-1}\cdot\left(\dfrac{11}{20}\right)^{x-1}\cdot\left(\dfrac{9}{20}\right)^{21-x}\\ \mathrm{C}_{20}^{x}\cdot\left(\dfrac{11}{20}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{9}{20}\right)^{20-x}\ge\mathrm{C}_{20}^{x+1}\cdot\left(\dfrac{11}{20}\right)^{x+1}\cdot\left(\dfrac{9}{20}\right)^{19-x}\end{cases}$，得 $\begin{cases}\mathrm{C}_{20}^{x}\cdot\dfrac{11}{20}\ge\mathrm{C}_{20}^{x-1}\cdot\dfrac{9}{20}\\ \mathrm{C}_{20}^{x}\cdot\dfrac{9}{20}\ge\mathrm{C}_{20}^{x+1}\cdot\dfrac{11}{20}\end{cases}$，

得$\begin{cases}\dfrac{11}{20}\cdot\dfrac{20!}{x!\cdot(20-x)!}\geq\dfrac{9}{20}\cdot\dfrac{20!}{(x-1)!\cdot(21-x)!}\\ \dfrac{9}{20}\cdot\dfrac{20!}{x!\cdot(20-x)!}\geq\dfrac{11}{20}\cdot\dfrac{20!}{(x+1)!\cdot(19-x)!}\end{cases}$，得$\begin{cases}11(21-x)\geq 9x\\ 9(x+1)\geq 11(20-x)\end{cases}$，得$\begin{cases}x\leq\dfrac{231}{20}\\ x\geq\dfrac{211}{20}\end{cases}$，$\therefore\dfrac{211}{20}\leq x\leq\dfrac{231}{20}$，

$\because x\in\mathbf{Z}$，$x=11$，即恰有 11 位居民日行步数超过 8 千的概率最大.

17.（1）

20 袋钼矿中恰有 2 件不达标的概率为 $f(p)=\mathrm{C}_{20}^{2}p^{2}(1-p)^{18}$.

因此 $f'(p)=\mathrm{C}_{20}^{2}\left[2p(1-p)^{18}-18p^{2}(1-p)^{17}\right]=2\mathrm{C}_{20}^{2}p(1-p)^{17}(1-10p)$

令 $f'(p)=0$；得 $p=0.1$，当 $p\in(0,0.1)$ 时，$f'(p)>0$，$f(p)$ 单调递增，$p\in(0.1,1)$ 时，$f'(p)<0$，$f(p)$ 单调递减，

所以 $f(p)$ 的最大值点 $p_0=0.1$.

（2）由（1）知，$p=0.1$.

①令η表示余下的 180 袋钼矿中不达标的袋数，依据题意可知$\eta\sim B(180,0.1)$，故$E(\eta)=18$，

又$\xi=20\times10+110\eta$，即$\xi=200+110\eta$，

所以$E(\xi)=E(200+110\eta)=200+110E(\eta)=200+110\times18=2180$.

②若对余下的钼矿进行检验，则所有检验成本为 2000 元. 由于$E(\xi)=2180>2000$. 应该对余下的钼矿都进行检验.

18.（1）由频率分布直方图可知，抽取的 1000 名市民作答成绩的平均数

$\overline{x}=5\times0.05+15\times0.1+25\times0.2+35\times0.3+45\times0.25+55\times0.1=34$（分），

设 1000 名市民作答成绩的中位数为 x，则$0.05+0.1+0.2+0.03\times(x-30)=0.5$，$\therefore x=35$，

所以这 1000 名市民作答成绩的平均数为 34 分，中位数为 35 分.

（2）估计这 20 位市民的作答成绩在[40,60]的人数为 7 时概率最大，由已知得 $X\sim B(20,0.35)$，

$\therefore P(X=k)=C_{20}^{k}(0.35)^{k}(1-0.35)^{20-k},k=0,1,\cdots\cdots,20$，令$\begin{cases}P(X=k)\geq P(x=k-1)\\ P(X=k)\geq P(x=k+1)\end{cases},k=1,2,\cdots,19$，

即$\begin{cases}C_{20}^{k}0.35^{k}(1-0.35)^{20-k}\geq C_{20}^{k-1}0.35^{k-1}(1-0.35)^{21-k}\\ C_{20}^{k}0.35^{k}(1-0.35)^{20-k}\geq C_{20}^{k+1}0.35^{k+1}(1-0.35)^{19-k}\end{cases}$,即$\begin{cases}7(21-k)\geq13k\\ 13(k+1)\geq7(20-k)\end{cases}$，解得$6.35\leq k\leq7.35$，

由$k\in\mathbf{N}^{*}$，$\therefore k=7$，所以这 20 位市民的作答成绩在$[40,60]$的人数为 7 时$P(X=k)$最大.

19.（1)由题可知 $f(p)=C_5^4p^4(1-p)=5p^4(1-p)$，

$f'(p)=5p^3(4-5p)$，令 $f'(p)=0$，得 $p=\dfrac{4}{5}$，

当 $p\in\left(0,\dfrac{4}{5}\right)$时，$f'(p)>0$，$f(p)$在$\left(0,\dfrac{4}{5}\right)$上单调递增；

当 $p\in\left(\dfrac{4}{5},1\right)$时，$f'(p)<0$，$f(p)$在$\left(\dfrac{4}{5},1\right)$上单调递减.

所以 $f(p)$ 的最大值点 $p_0=\dfrac{4}{5}$

(2)①记事件 A 为一个互助组合做对题，事件 B 为一个互助组合中甲档中的学生做对题，事件 C 为一个互助组合中乙档中的学生做对题，

则 $P(B)=\dfrac{4}{5}$，$P(C)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{1}{2}$，$P(A)=1-P(\bar{B})P(\bar{C})=1-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=0.9$.

②由题意知随机变量 $X\sim B(n,0.9)$，$P(X=k)=C_n^k\times0.9^k\times0.1^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$

因为 $P(X=90)$ 最大，所以 $\begin{cases}C_n^{90}\times0.9^{90}\times0.1^{n-90}\ge C_n^{91}\times0.9^{91}\times0.1^{n-91}\\C_n^{90}\times0.9^{90}\times0.1^{n-90}\ge C_n^{89}\times0.9^{89}\times0.1^{n-89}\end{cases}$，解得 $99\le n\le\frac{901}{9}$，

因为 n 是整数，所以 $n=99$ 或 $n=100$，当 $n=99$ 时，$E(X)=np=99\times0.9=89.1$；

当 $n=100$ 时，$E(X)=np=100\times0.9=90$

20．(1)甲接下来选择回答 B 类问题并取得复赛资格的概率为 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{31}{72}$，

甲接下来选择回答 C 类问题并取得复赛资格的概率为 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{41}{96}$，

故所求概率为 $\frac{31}{72}+\frac{41}{96}=\frac{247}{288}$；

(2)由于甲回答 A，B 两类问题的概率相同，故只需考虑 ABC 、ACB 、CAB 这三种回答顺序，

按 ABC 顺序回答，取得复赛资格的概率为 $\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{31}{48}$，

按 ACB 顺序回答，取得复赛资格的概率为 $\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{41}{64}$，

按 CAB 顺序回答，取得复赛资格的概率为 $\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{19}{32}$，

$\frac{31}{48}>\frac{41}{64}>\frac{19}{32}$，故甲按 ABC 或 BAC 顺序回答问题取得复赛资格的概率最大.

21．(1)由实验园的频率分布直方图得：$(0.110+0.010)\times5=0.6$，所以估计实验园的“大果”率为 60%

(2)由对照园的频率分布直方图得：这 100 个果实中大果的个数为 $(0.040+0.020)\times5\times100=30$ 个.

采用分层抽样的方法从 100 个果实中抽取 10 个，其中大果有 $\frac{30}{100}\times10=3$ 个，

从这 10 个果实中随机抽取 3 个，记“大果”个数为 X，则 X 的可能取值为 $0,1,2,3$，

$P(X=0)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$，$P(X=1)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$，$P(X=2)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$，

所以 X 的分布列为：

所以 $E(X)=0\times\frac{7}{24}+1\times\frac{21}{40}+2\times\frac{7}{40}+3\times\frac{1}{120}=\frac{9}{10}$.

(3)由题设知：$P(n)=C_n^2\cdot0.3^2\cdot0.7^{n-2}$，而 $P(n-1)=C_{n-1}^2\cdot0.3^2\cdot0.7^{n-3}$，$P(n+1)=C_{n+1}^2\cdot0.3^2\cdot0.7^{n-1}$，

∴要使 $P(n)$ 最大，则 $\frac{P(n-1)}{P(n)}=\frac{C_{n-1}^2\cdot0.7^{n-3}}{C_n^2\cdot0.7^{n-2}}=\frac{10(n-2)}{7n}<1$ 且 $\frac{P(n+1)}{P(n)}=\frac{C_{n+1}^2\cdot0.7^{n-1}}{C_n^2\cdot0.7^{n-2}}=\frac{7(n+1)}{10(n-1)}<1$，

∴ $\frac{17}{3}<n<\frac{20}{3}$，故 $n=6$.

22．(1)由题设可得 X 可取 $0,1,2,\cdots,K$，则 $P(X=k)=C_K^kp^k(1-p)^{K-k}$，此时 $X\sim B(K,p)$，故 $E(X)=Kp$.

(2)①由（1）可得：

第二天被感染人数增至 $1+10=11$，

第三天被感染人数增至 $11+11\times10=121=11^2$，

依次第五天被感染人数增至11^4，第六天被感染人数增至11^5，故$E_6=11^5-11^4=146410$.

②因为$p_1=\ln\sqrt{1+p}-\frac{1}{3}p$，故$p_1'=\frac{1}{2(1+p)}-\frac{1}{3}=\frac{1-2p}{6(1+p)}$，

当$0<p<\frac{1}{2}$时，$p_1'>0$；当$\frac{1}{2}<p<1$时，$p_1'<0$；

故$p_1=\ln\sqrt{1+p}-\frac{1}{3}p$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$为增函数，在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上为减函数，

故$p_1=\ln\sqrt{1+p}-\frac{1}{3}p$的最大值为：

$\ln\sqrt{1+\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\approx\frac{1}{2}(1.1-0.7)-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$，

当$p_1=\frac{1}{30}$时，第二天被感染人数增至$1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$，

第三天被感染人数增至$\frac{5}{3}+\frac{5}{3}\times20\times\frac{1}{30}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$，

依次第五天被感染人数增至$\left(\frac{5}{3}\right)^4$，第六天被感染人数增至$\left(\frac{5}{3}\right)^5$，

故$E_6'=\left(\frac{5}{3}\right)^5-\left(\frac{5}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^4\approx0.7(1+0.7)^4\approx6$.

由①可得$p=\frac{1}{2}$对应的$E_6=146410$，对比可得佩戴口罩必要.

23.（1）由频率分布直方图，知 200 只小白鼠按指标值分布为：

在$[0,20)$内有$0.0025\times20\times200=10$（只）；在$[20,40)$内有$0.00625\times20\times200=25$（只）；

在$[40,60)$内有$0.00875\times20\times200=35$（只）；在$[60,80)$内有$0.025\times20\times200=100$（只）；

在$[80,100]$内有$0.0075\times20\times200=30$（只）.

由题意，有抗体且指标值小于 60 的有 50 只；而指标值小于 60 的小白鼠共有$10+25+35=70$（只），所以指标值小于 60 且没有抗体的小白鼠有 20 只，同理，指标值不小于 60 且没有抗体的小白鼠有 20 只，故列联表如下：

单位：只

抗体	指标值		合计
	小于 60	不小于 60	
有抗体	50	110	160
没有抗体	20	20	40
合计	70	130	200

零假设为H_0：注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于 60 无关联.

根据列联表中数据，得$\chi^2=\frac{200\times(50\times20-20\times110)^2}{160\times40\times70\times130}\approx4.945>3.841=x_{0.05}$.

根据$\alpha=0.05$的独立性检验，推断H_0不成立，即认为注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于 60 有关，此推断犯错误的概率不大于 0.05.

（2）（i）令事件A=“小白鼠第一次注射疫苗产生抗体”，事件B=“小白鼠第二次注射疫苗产生抗体”，事件C=“小白鼠注射 2 次疫苗后产生抗体”.

记事件A，B，C发生的概率分别为$P(A)$，$P(B)$，$P(C)$，

则$P(A)=\frac{160}{200}=0.8$，$P(B)=\frac{20}{40}=0.5$，$P(C)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.2\times0.5=0.9$.

所以一只小白鼠注射 2 次疫苗后产生抗体的概率$p=0.9$.

（ii）由题意，知随机变量$X\sim B(n,0.9)$，$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k\times0.9^k\times0.1^{n-k}$（$k=0,1,2,\cdots,n$）.

因为$P(X=90)$最大，

所以$\begin{cases}\mathrm{C}_n^{90}\times0.9^{90}\times0.1^{n-90}\geq\mathrm{C}_n^{91}\times0.9^{91}\times0.1^{n-91}\\\mathrm{C}_n^{90}\times0.9^{90}\times0.1^{n-90}\geq\mathrm{C}_n^{89}\times0.9^{89}\times0.1^{n-89}\end{cases}$，

解得$99\leq n\leq\frac{901}{9}$，因为$n$是整数，所以$n=99$或$n=100$，所以接受接种试验的人数为 99 或 100.

①当接种人数为 99 时，$E(X)=np=99\times0.9=89.1$；

②当接种人数为 100 时，$E(X)=np=100\times0.9=90$.

24.（1）比赛结束后冠亚军恰好来自不同校区的概率是$p=\frac{C_3^1C_4^1+C_4^1C_5^1+C_3^1C_5^1}{C_{12}^2}=\frac{47}{66}$；

（2）①由题可知$f(p)=C_3^2p^3(1-p)=3p^3(1-p)$，

$f'(p)=3\left[3p^2(1-p)+p^3\times(-1)\right]=3p^2(3-4p)$，令$f'(p)=0$，得$p=\frac{3}{4}$，

当$p\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$时，$f'(p)>0$，$f(p)$在$\left(0,\frac{3}{4}\right)$上单调递增；

当$p\in\left(\frac{3}{4},1\right)$时，$f'(p)<0$，$f(p)$在$\left(\frac{3}{4},1\right)$上单调递减.

所以$f(p)$的最大值点$p_0=\frac{3}{4}$，

②X的可能取值为 0，1，2，3.$P(X=0)=(1-p)^3+C_3^1p(1-p)^3=\left(1-\frac{3}{4}\right)^3+C_3^1\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^3=\frac{13}{256}$；

$P(X=1)=C_4^2p^2(1-p)^3=C_4^2\times(\frac{3}{4})^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{512}$；$P(X=2)=C_4^2p^2(1-p)^2p=C_4^2(\frac{3}{4})^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{81}{512}$；

$P(X=3)=p^3+pC_3^2p^2(1-p)=(\frac{3}{4})^3+C_3^2(\frac{3}{4})^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{189}{256}$.

所以X的分布列为

X的期望为$E(X)=0\times\frac{13}{256}+1\times\frac{27}{512}+2\times\frac{81}{512}+3\times\frac{189}{256}=\frac{1323}{512}$.

25.（1）随机变量X的所有可能的取值为$0,1,2,3$.

由题意可得：$P(X=0)=\frac{C_5^0C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$，$P(X=1)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$，$P(X=2)=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$，$P(X=3)=\frac{C_5^3C_5^0}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$，

所以随机变量 X 的分布列为

数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{3}{2}$.

（2）由原始分 Y 服从正态分布 $N(75,36)$，可知 $\mu=75$，$\sigma=6$，

由正态分布的性质可得 $P(Y\geq 81)=\frac{1-P(\mu-\sigma<Y<\mu+\sigma)}{2}=\frac{1-0.7}{2}=0.15$

即每个学生生物统考成绩不低于 81 分的事件概率约为 0.15，

所以 $\xi\sim B(100,0.15)$，$P(\xi=k)=C_{100}^k0.15^k(1-0.15)^{100-k}$.

由 $\begin{cases}P(\xi=k)\geq P(\xi=k-1)\\P(\xi=k)\geq P(\xi=k+1)\end{cases}$，可得 $\begin{cases}C_{100}^k\times0.15^k\times0.85^{100-k}\geq C_{100}^{k-1}\times0.15^{k-1}\times0.85^{101-k}\\C_{100}^k\times0.15^k\times0.85^{100-k}\geq C_{100}^{k+1}\times0.15^{k+1}\times0.85^{99-k}\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\frac{100!}{k!(100-k)!}\times0.15^k\times0.85^{100-k}\geq\frac{100!}{(k-1)!(101-k)!}\times0.15^{k-1}\times0.85^{101-k}\\\frac{100!}{k!(100-k)!}\times0.15^k\times0.85^{100-k}\geq\frac{100!}{(k+1)!(99-k)!}\times0.15^{k+1}\times0.85^{99-k}\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{0.15}{k}\geq\frac{0.85}{101-k}\\\frac{0.85}{100-k}\geq\frac{0.15}{k+1}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}20k\leq303\\20k\geq283\end{cases}$，解得 $14.15\leqslant k\leqslant15.15$，

因为 $k\in\mathbf{N}$，所以 $k=15$，所以当 $k=15$ 时，$P(\xi=k)$ 取得最大值.

26.（1）由已知，ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，$P(\xi=0)=(1-0.6)\cdot(1-a)^2=0.4(1-a)^2$，

$P(\xi=1)=0.6(1-a)^2+(1-0.6)\cdot C_2^1a(1-a)=0.2(1-a)(3+a)$，

$P(\xi=2)=0.6\cdot C_2^1a(1-a)+(1-0.6)a^2=0.4a(3-2a)$，$P(\xi=3)=0.6a^2$.

$\because 0<a<0.4$，$\therefore P(\xi=1)-P(\xi=0)=0.2(1-a)(1+3a)>0$，

$P(\xi=1)-P(\xi=2)=0.2(3a^2-8a+3)>0$，$P(\xi=1)-P(\xi=3)=-0.2(4a^2+2a-3)>0$，

$\therefore$ 概率 $P(\xi=1)$ ）的值最大.

（2）由（1）可知，当 $0<a<0.4$ 时，有 $t_1=P(\xi=1)$ 的值最大，

且 $t_2-t_3=P(\xi=2)-P(\xi=3)=0.2a(6-7a)>0$，$\therefore t_1>t_2>t_3$.

$\therefore$ 应当以 A_1,A_2,A_3 的顺序派出勘探小组，可使在特殊勘探时所需派出的小组个数的均值达到最小，即优先派出完成任务概率大的小组可减少所需派出的小组个数的均值.

证明如下：

假定 p_1,p_2,p_3 为 $t_1,t_2,t_3(t_1>t_2>t_3)$ 的任意一个排列，即若三个小组 $A_i(i=1,2,3)$ 按照某顺序派出，该顺序下三个小组能完成特殊任务的概率依次为 p_1,p_2,p_3，记在特殊勘探时所需派出的小组个数为 η，则 $\eta=1,2,3$，且 η 的分布列为

η	1	2	3

P	p_1	$(1-p_1)p_2$	$(1-p_1)(1-p_2)$

∴数学期望$E(\eta)=p_1+2(1-p_1)p_2+3(1-p_1)(1-p_2)=3-2p_1-p_2+p_1p_2$.

下面证明$E(\eta)=3-2p_1-p_2+p_1p_2\geqslant 3-2t_1-t_2+t_1t_2$成立，

∵$(3-2p_1-p_2+p_1p_2)-(3-2t_1-t_2+t_1t_2)$

$=2(t_1-p_1)+(t_2-p_2)+p_1p_2-p_1t_2+p_1t_2-t_1t_2$

$=2(t_1-p_1)+(t_2-p_2)+p_1(p_2-t_2)+t_2(p_1-t_1)$

$=(2-t_2)(t_1-p_1)+(1-p_1)(t_2-p_2)$

$\geqslant(1-p_1)(t_1-p_1)+(1-p_1)(t_2-p_2)$

$=(1-p_1)\left[(t_1+t_2)-(p_1+p_2)\right]\geqslant 0$.

∴按照完成任务概率从大到小的A_1,A_2,A_3的先后顺序派出勘探小组，可使在特殊勘探时所需派出的小组个数的均值达到最小.

27．解：（1）果径$[65,80)$的频率为$(0.013+0.030+0.045)\times 5=0.44<0.5$，
果径$[65,85)$的频率为$(0.013+0.030+0.045+0.060)\times 5=0.74>0.5$，
故果径的中位数在$[80,85)$，不妨设为a，则$(a-80)\times 0.060=0.5-0.44=0.06$，
解得中位数$a=81$.
（2）果径$[70,75)$，$[75,80)$，$[80,85)$的频率之比为$(0.03\times 5):(0.045\times 5):(0.06\times 5)=2:3:4$，
所以分层抽样过程中，一级果、二级果、三级果个数分别为4，3，2个，
故随机变量$X=0,1,2,3$，

$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}$，$P(X=1)=\frac{C_5^2C_4^1}{C_9^3}=\frac{40}{84}$，$P(X=2)=\frac{C_5^1C_4^2}{C_9^3}=\frac{30}{84}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}$，

所以X的分布列为
期望$E(X)=0\times\frac{10}{84}+1\times\frac{40}{84}+2\times\frac{30}{84}+3\times\frac{4}{84}=\frac{112}{84}=\frac{4}{3}$.
（3）这批果实中一级果的概率$P=\frac{3}{10}$，每个果实相互独立，则$Y\sim B\left(100,\frac{3}{10}\right)$，

则$P(Y=k)=C_{100}^k\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^k\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{100-k}$，题目即求$k$为何值时，$P(Y=k)$最大，

令$\frac{P(Y=k+1)}{P(Y=k)}=\frac{C_{100}^{k+1}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{99-k}}{C_{100}^k\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^k\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{100-k}}=\frac{3(100-k)}{7(k+1)}>1$，解得$k<29.3$，

故当$k\le 29$时，$P(Y=k+1)>P(Y=k)$，即$P(Y=30)>P(Y=29)>P(Y=28)>P(Y=27)>\ldots$，当$k\ge 30$时，

$P(Y=k+1)<P(Y=k)$，即$P(Y=30)>P(Y=31)>P(Y=32)>P(Y=33)>\ldots$，所以$P(Y=k)_{\max}=P(Y=30)$，

即一级果的个数最有可能为30个.
28．①因为两道生产工序互不影响，

法一：所以 $p=1-(1-p_1)(1-p_2)=1-\left(1-\frac{1}{33}\right)\times\left(1-\frac{1}{34}\right)=\frac{1}{17}$.

法二：所以 $p=\frac{1}{33}\times1+\left(1-\frac{1}{33}\right)\times\frac{1}{34}=\frac{1}{17}$.

答：该款芯片的次品率为$\frac{1}{17}$；

②记该款芯片自动智能检测合格为事件 A，人工抽检合格为事件 B，

且 $P(A)=96\%,P(AB)=1-p=\frac{16}{17}$.

则人工抽检时，抽检的一个芯片恰是合格品的概率：$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{16}{17}}{96\%}=\frac{50}{51}$.

答：人工抽检时，抽检的一个芯片恰是合格品的概率为$\frac{50}{51}$；

（2）因为各个芯片的生产互不影响，所以 $f(p)=\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m}(0<p<1)$，

所 $f'(p)=\mathrm{C}_n^m\left[mp^{m-1}(1-p)^{n-m}-(n-m)p^m(1-p)^{n-m-1}\right]=\mathrm{C}_n^m p^{m-1}(1-p)^{n-m-1}(m-np)$.

令 $f'(p)=0$，得 $p=\frac{m}{n}$，

所以当$0<p<\frac{m}{n}$时，$f'(p)>0, f(p)$为单调增函数；

当$\frac{m}{n}<p<1$时，$f'(p)<0, f(p)$为单调减函数，

所以，当 $p=\frac{m}{n}$时，$f(p)$取得最大值.

29．(1)有 2 个人样本检测结果为阳性的概率为 $f(p)=C_{10}^2(1-p)^2p^8$

$\therefore f'(p)=\mathrm{C}_{10}^2\left[-2(1-p)p^8+8(1-p)^2p^7\right]=2\mathrm{C}_{10}^2(1-p)p^7(4-5p)$

令 $f'(p)=0$，得 $p=0.8$，当$0<p<0.8$时，$f'(p)>0$；当$0.8<p<1$时，$f'(p)<0$

即函数 $f(p)$在$(0,0.8)$上为单调递增，在$(0.8,1)$上单调递减，即 $f(p)$ 的最大值点 $p_0=0.8$

(2)采用“5 合 1 检测法”，总检测次数为 X 可能为$2,7,12$

$P(X=2)=p^{10},P(X=7)=2p^5(1-p^5),P(X=12)=(1-p^5)^2$

$\therefore$随机变量 X 的分布列为

X	2	7	12
P	p^{10}	$2p^5(1-p^5)$	$(1-p^5)^2$

数学期望为$E(X)=2p^{10}+14p^5(1-p^5)+12(1-p^5)^2=12-10p^5$

(3)

当 $p=p_0=0.8$时，$E(X)=12-10\times0.8^5=12-10\times\frac{8^5}{10^5}=12-10\times\frac{2^{15}}{10^5}\approx12-10\times0.33=8.7$

采用“10 合 1 检测法”，总检测次数Y可能是$1,11$

$P(Y=1)=p^{10},P(Y=11)=1-p^{10}$

数学期望$E(Y)=p^{10}+11\left(1-p^{10}\right)=11-10p^{10}\approx 11-10\times 0.33^{2}\approx 9.9$

$\therefore E(X)<E(Y)$

30．（1）解：X可取 5，6，7，8，9，10，

$P\left(X=5\right)=C_5^0?\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，$P\left(X=6\right)=C_5^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$，

$P\left(X=7\right)=C_5^2?\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$，$P\left(X=8\right)=C_5^3?\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$，

$P\left(X=9\right)=C_5^4?\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$，$P\left(X=10\right)=C_5^5?\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，

分布列如下：

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

所以$E\left(X\right)=5\times\frac{1}{32}+6\times\frac{5}{32}+7\times\frac{5}{16}+8\times\frac{5}{16}+9\times\frac{5}{32}+10\times\frac{1}{32}=7.5$（分）;

（2）

解：设一天得分不低于 3 分为事件 A，

则$P\left(A\right)=\left[1-\left(1-p\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=1-\frac{2}{3}\left(1-p\right)=\frac{2p+1}{3}$，

则恰有 3 天每天得分不低于 3 分的概率$f\left(p\right)=C_5^3\left(\frac{2p+1}{3}\right)^3\cdot\left(1-\frac{2p+1}{3}\right)^2=\frac{40}{243}\left(2p+1\right)^3\left(1-p\right)^2$，$0<p<1$

则$f'\left(p\right)=\frac{40}{243}\times 6\left(2p+1\right)^2\left(1-p\right)^2-\frac{40}{243}\times 2\left(2p+1\right)^3\left(1-p\right)$

$=\frac{40}{243}\left(2p+1\right)^2\left(1-p\right)\left(4-10p\right)$，

当$0<p<\frac{2}{5}$时，$f'\left(p\right)>0$，当$\frac{2}{5}<p<1$时，$f'\left(p\right)<0$，

所以函数$f\left(p\right)$在$\left(0,\frac{2}{5}\right)$上递增，在$\left(\frac{2}{5},1\right)$上递减，

所以当$p=\frac{2}{5}$时，$f\left(p\right)$取得最大值