湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——立体几何复习 3—— 空间中点线面的位置关系

知识与方法

1.空间中线与线的位置关系：平行、相交、异面.

2.空间中线与面的位置关系：线面平行、线在面内、线面相交.

3.空间中面与面的位置关系：面面平行、面面相交.

解题的一般方法是根据题干的描述，结合空间想象，画出图形，判断正误.画图的基本顺序是：先画面面，再画线面，最后添线.也可借助常见几何体（如正方体等）来辅助判断.

一、位置关系的判断

1.已知 m，n 表示两条不同直线，α 表示平面，下列说法正确的是（　　）

A.若 $m // \alpha$，$n // \alpha$，则 $m // n$　B.若 $m \perp \alpha$，$n \perp \alpha$，则 $m \perp n$

C.若 $m \perp \alpha$，$m \perp n$，则 $n // \alpha$　D.若 $m // \alpha$，$m \perp n$，则 $n \perp \alpha$

2.设 l 是直线，α，β 是两个不同的平面，则下列结论正确的是（　　）

A.若 $l // \alpha$，$l // \beta$，则 $\alpha // \beta$　B.若 $l // \alpha$，$l \perp \beta$，则 $\alpha \perp \beta$

C.若 $\alpha \perp \beta$，$l \perp \alpha$，则 $l \perp \beta$　D.若 $\alpha \perp \beta$，$l // \alpha$，则 $l \perp \beta$

3.已知互相垂直的平面 α，β 交于直线 l，若直线 m，n 满足 $m // \alpha$，$n \perp \beta$，则（　　）

A. $m // l$　B. $m // n$　C. $n \perp l$　D. $m \perp n$

4.已知 m，n 是两条不同直线，α，β 是两个不同平面，则下列命题正确的是（　　）

A.若 α，β 垂直于同一平面，则 α 与 β 平行　B 若 m，n 平行于同一平面，则 m 与 n 平行

C.若 α，β 不平行，则在 α 内不存在与 β 平行的直线　D.若 m，n 不平行，则 m 与 n 不可能垂直于同一平面

5.若空间中四条两两不同的直线 l_1，l_2，l_3，l_4，满足 $l_1 \perp l_2$，$l_2 \perp l_3$，$l_3 \perp l_4$，则下列结论一定正确的是（　　）

A. $l_1 \perp l_4$　B. $l_1 // l_4$　C. l_1，l_4 既不垂直也不平行　D. l_1，l_4 的位置关系不确定

6.设 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，下列命题中正确的是（　　）

A.若 $\alpha \perp \beta$，$m \subset \alpha$，$n \subset \beta$，则 $m \perp n$　B.若 $\alpha // \beta$，$m \subset \alpha$，$n \subset \beta$，则 $m // n$

C.若 $m \perp n$，$m \subset \alpha$，$n \subset \beta$，则 $\alpha \perp \beta$　D.若 $m \perp \alpha$，$m // n$，$n // \beta$，则 $\alpha \perp \beta$

7.已知 m，n 为异面直线，$m \perp$ 平面 α，$n \perp$ 平面 β，直线 l 满足 $l \perp m$，$l \perp n$，$l \not\subset \alpha$，$l \not\subset \beta$，则（　　）

A. $\alpha // \beta$ 且 $l // \alpha$　B. $\alpha \perp \beta$ 且 $l \perp \beta$　C. α 与 β 相交，且交线垂直于 l　D. α 与 β 相交，且交线平行于 l

8.设 α，β 为两个平面，则 $\alpha // \beta$ 的充要条件是（　　）

A. α 内有无数条直线与 β 平行　B. α 内有两条相交直线与 β 平行

C. α，β 平行于同一条直线　D. α，β 垂直于同一平面

9.已知平面 α，直线 m，n 满足 $m \not\subset \alpha$，$n \subset \alpha$，则“$m // n$”是“$m // \alpha$”的（　　）

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件　C.充分必要条件　D.既不充分也不必要条件

10.若 l，m 是两条不同的直线，m 垂直于平面 α，则“$l \perp m$”是“$l // \alpha$”的（　　）

A.充分而不必要条件　B.必要而不充分条件　C.充分必要条件　D.既不充分也不必要条件

11.设平面 α 与平面 β 相交于直线 m，直线 a 在平面 α 内，直线 b 在平面 β 内，且 $b \perp m$，则“$\alpha \perp \beta$”是“$a \perp b$”的（　　）

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件　C.充要条件　D.既不充分也不必要条件

12.设 α，β 是两个不同的平面，m 是直线且 $m \subset \alpha$，“$m // \beta$”是“$\alpha // \beta$”的（　　）

A.充分而不必要条件　B.必要而不充分条件　C.充分必要条件　D.既不充分也不必要条件

13.已知 l，m 是平面 α 外的两条不同直线.给出下列三个论断：① $l \perp m$；② $m // \alpha$；③ $l \perp \alpha$.

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：_________.

14. α，β 是两个平面，m，n 是两条直线，有下列四个命题：

①如果 $m \perp n$，$m \perp \alpha$，$n // \beta$，那么 $\alpha \perp \beta$；②如果 $m \perp \alpha$，$n // \alpha$，那么 $m \perp n$；

③如果 $\alpha // \beta$，$m \subset \alpha$，那么 $m // \beta$；④如果 $m // n$，$\alpha // \beta$，那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.

其中正确的命题有______.（填写所有正确命题的序号）

14.设有下列四个命题：

p_1：两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内． p_2：过空间中任意三点有且仅有一个平面．

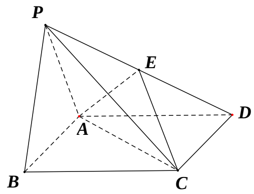
p_3：若空间两条直线不相交，则这两条直线平行． p_4：若直线$l \subset$平面α，直线$m \perp$平面α，则$m \perp l$．

则下述命题中所有真命题的序号是_______ $p_1 \wedge p_4$； ②$p_1 \wedge p_2$； ③$\neg p_2 \vee p_3$； ④$\neg p_3 \vee \neg p_4$

二、平行的证明

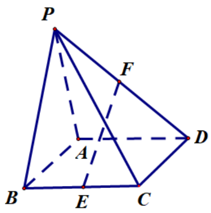
法一 线面平行构造之三角形中位线法（又称“A”型平行）

【例 1】四棱锥$P-ABCD$底面为平行四边形，E、F分别为PD、BC中点，证明：$PB //$平面ACE．



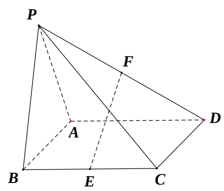
法二 线面平行构造之平行四边形法（又称“▱”型平行）

【例 2】四棱锥$P-ABCD$底面为平行四边形，E、F分别为PD、BC中点，证明：$EF //$平面PAB．



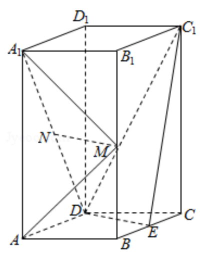
法三 线面平行构造之面面平行推导法（做一个辅助平行平面）

【例 3】四棱锥$P-ABCD$底面为平行四边形，E、F分别为PD、BC中点，证明：$EF \parallel$平面PAB



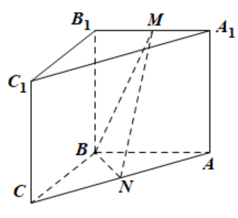
【训练 1】（如图，直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N分别是BC，BB_1，A_1D的中点．

（1）证明：$MN //$平面C_1DE；

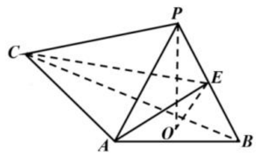


【训练 2】如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面BCC_1B_1为正方形，平面$BCC_1B_1 \perp$平面ABB_1A_1，$AB=BC=2$，M，N分别为A_1B_1，AC的中点．

（1）求证：$MN //$平面BCC_1B_1；



【训练 3】 如图，PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E 是 PB 的中点．

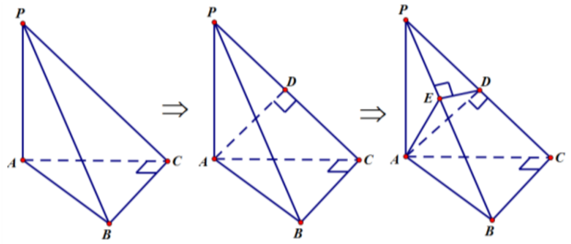


（1）求证：$OE//$ 平面 PAC；

三、垂直的证明

1．在被垂直平面找垂直（鳖臑法则）

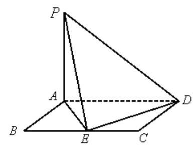
定理：若一条直线 l 垂直于一个平面，如果在被垂直的平面内找到相互垂直的两条线 $l_1\perp l_2$（l_1 与 l 相交），则与 l 异面的直线 l_2 垂直于 l 和 l_1 构成的平面．鳖臑是最典型的例子．



当出现重垂线 PA 时，就需要在水平面 ACB 内找到两条垂直相交的直线 $AC\perp BC$，由于 AC 与重垂线 PA 相交，故能得到 $BC\perp$ 面PAC，同理，PAC 作为被垂直的平面，在平面内找到 $AD\perp PC$，BC 与 PC 相交，故可以得到 $AD\perp$ 面PBC，PBC 作为被垂直的平面，需要在这个面内找到垂直的两条直线，当 $DE\perp PB$ 时（或 $AE\perp PB$），能得到 $PB\perp$ 面ADE．

【例 1】已知 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB=90^\circ$，$SA\perp$ 面 ABC，$AD\perp SC$，求证：$AD\perp$ 面 SBC．

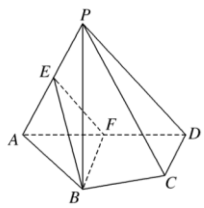
【例 2】已知 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=2$，$PA=AD=4$，E 为 BC 的中点．



（1）求证：$DE\perp$ 平面 PAE；

（2）求直线 DP 与平面 PAE 所成的角．

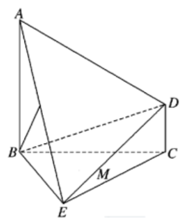
【例 3】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=AD$，$\angle BAD=60^\circ$，E，F 分别是 AP，AD 的中点．求证：



（1）直线 $EF//$ 平面 PCD;

（2）平面 $BEF\perp$ 平面 PAD.

【例 4】如图，已知 $AB\perp$平面 BCE，$CD//AB$，$\triangle BCE$ 是正三角形，$AB=BC=2CD$.



（1）在线段 BE 上是否存在一点 F，使 $CF//$ 平面 ADE?

（2）求证：平面 $ADE\perp$平面 ABE.

2．等腰三角形三线合一构造法

在没有特殊的重垂线和水平面，证一些线面垂直则需要一些特殊的几何性质，由有着共底边的两个等腰三角形构成的立体图形，则两个顶点的连线一定垂直于底边．

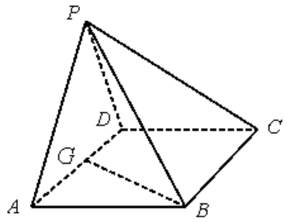
【例 5】已知空间四边形 $ABCD$ 中，$BC=AC$，$AD=BD$，E 是 AB 的中点．

求证：（1）$AB\perp$ 平面 CDE;（2）平面 $CDE\perp$ 平面 ABC.

【例 6】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是 $\angle DAB=60^\circ$ 且边长为 a 的菱形，侧面 PAD 是等边三角形，且平面 PAD 垂直于底面 $ABCD$.

（1）若 G 为 AD 的中点，求证：$BG\perp$ 平面 PAD;

（2）求证：$AD\perp PB$.



【解题总结】

线面与面面垂直的题型最终都归结在线线垂直的证明，而显现垂直的思路可总结为：

证明 $l_1\perp l_2$，先看两直线的位置关系，如果：

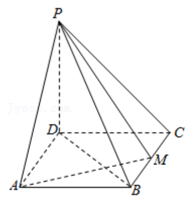
共面 $\Rightarrow\begin{cases}\text{三线合一（有等腰三角形就必用）}\\ \text{勾股定理（题目中线段数据多）}\\ \text{其他（初中平面几何学习的其他垂直证明方法）}\end{cases}$

异面 $\Rightarrow$ 考虑用线面垂直推导异面垂直 $\Rightarrow$ 找重垂线
$\Rightarrow$ 在重垂线对应平面内找垂直

【例 7】（2021• 乙卷）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，M 为 BC 的中点，且 $PB\perp AM$.

（1）证明：平面 $PAM\perp$ 平面 PBD；

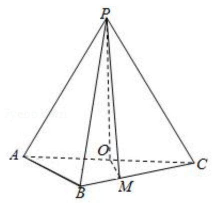
（2）若 $PD=DC=1$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



【训练 1】如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点.

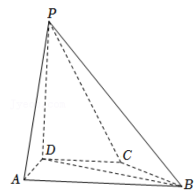
（1）证明：$PO\perp$ 平面 ABC；

（2）若点 M 在棱 BC 上，且 $MC=2MB$，求点 C 到平面 POM 的距离.



【训练 2】在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$CD//AB$，$AD=DC=CB=1$，$AB=2$，$DP=\sqrt{3}$.

（1）证明：$BD\perp PA$；



【训练 3】如图，D 为圆锥的顶点，O 是圆锥底面的圆心，$\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形，P 为 DO 上一点，$\angle APC=90^\circ$.

（1）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAC；

（2）设 $DO=\sqrt{2}$，圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.