湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明答案 1

题型一　构造函数，利用最值证明不等式

1.(1)解　由题意，$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，且$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

当$a\leqslant 0$时，$f'(x)>0$恒成立，$\therefore f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

当$a>0$时，令$f'(x)>0$，解得$0<x<\frac{1}{a}$；令$f'(x)<0$，解得$x>\frac{1}{a}$，

$\therefore f(x)$在$\left(0，\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a}，+\infty\right)$上单调递减.

(2)证明　设$g(x)=\frac{2e^x}{xe^2}-a(x+1)-f(x)=\frac{2}{e^2}\cdot\frac{e^x}{x}-\ln x$，则$g'(x)=\frac{2}{e^2}\cdot\frac{xe^x-e^x}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2(x-1)e^x-e^2x}{e^2x^2}$.

令$r(x)=2(x-1)e^x-e^2x$，则$r'(x)=2xe^x-e^2$.

易得$r'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，且$r'(1)=2e-e^2<0$，$r'(2)=3e^2>0$，

$\therefore$存在唯一的实数$x_0\in(1，2)$，使得$r'(x_0)=0$，

$\therefore r(x)$在区间$(0，x_0)$上单调递减；在$(x_0，+\infty)$上单调递增.

又$r(0)=-2<0$，$r(2)=0$，

当$0<x<2$时，$r(x)<0$，$g'(x)<0$；当$x>2$时，$r(x)>0$，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$在$(0，2)$上单调递减，在$(2，+\infty)$上单调递增.

因此当$x=2$时，$g(x)$取到最小值$g(x)_{\min}=g(2)=1-\ln 2>0$.

综上，$\frac{2}{e^2}\cdot\frac{e^x}{x}-\ln x>0$，即$\frac{2e^x}{xe^2}-a(x+1)>f(x)$.

2.(1)解　由题意得$y=xf(x)=x\ln(a-x)$，则$y'=\ln(a-x)+x[\ln(a-x)]'$.因为$x=0$是函数$y=xf(x)$的极值点，所以$y'|_{x=0}=\ln a=0$，所以$a=1$(经验证，$a=1$符合题意).

(2)证明　由(1)可知，$f(x)=\ln(1-x)$，其定义域为$\{x|x<1\}$.设$g(x)=x+f(x)-xf(x)=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)$，

令$1-x=t$，则$t>0$，要证$g(x)\geqslant 0$，只需证明$1-t+t\ln t\geqslant 0$.

令$h(t)=1-t+t\ln t$，则$h'(t)=-1+\ln t+1=\ln t$，

当$t\in(0，1)$时，$h'(t)<0$；当$t\in(1，+\infty)$时，$h'(t)>0$，

所以$h(t)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增.所以$h(t)$在$(0，+\infty)$的最小值为$h(1)=0$，

因此$h(t)\geqslant 0$，从而$g(x)\geqslant 0$，所以当$x<a$时，$x+f(x)\geqslant xf(x)$成立.

3.(1)解　由已知，有$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$.

因此，当$x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}，2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$时，有$\sin x>\cos x$，得$f'(x)<0$，则$f(x)$单调递减；

当$x\in\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}，2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$时，有$\sin x<\cos x$，得$f'(x)>0$，则$f(x)$单调递增，

所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}，2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

$f(x)$的单调递减区间为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}，2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)证明　记$h(x)=f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

依题意及(1)，有$g(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，从而$g'(x)=-2e^x\sin x$.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，故 $h'(x)=f'(x)+g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x)(-1)=g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0$.

因此，$h(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，进而 $h(x)\geqslant h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

所以当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

题型二　放缩后构造函数证明不等式

4(1)解　$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$.由题设知，$f'(2)=0$，所以 $a=\frac{1}{2e^2}$，

从而 $f(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\ln x-1$，$f'(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\frac{1}{x}$.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(0，2)$，单调递增区间为$(2，+\infty)$.

(2)证明　当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant\frac{e^x}{e}-\ln x-1(x>0)$.设 $g(x)=\frac{e^x}{e}-\ln x-1(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{e^x}{e}-\frac{1}{x}(x>0)$.

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $x=1$ 是 $g(x)$的极小值点，也是最小值点.

故当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant g(1)=0$.

因此，当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant0$.

5. (1)解　当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in(0，+\infty)$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^2-1+2\ln x}{x^3}=\frac{(x-1)(x+1)+2\ln x}{x^3}$.

当 $x\in(0，1)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1，+\infty)$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$的单调递减区间为$(0，1)$，单调递增区间为$(1，+\infty)$.

(2)证明　当 $a=0$，$x\in(0，1)$时，$x^2-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{e^x}$等价于$\frac{-\ln x}{e^x}+x^2-\frac{1}{x}<0$.

$\because$ 当 $x\in(0，1)$时，$e^x\in(1，e)$，$-\ln x>0$，$\therefore\frac{-\ln x}{e^x}<-\ln x$，

$\therefore$ 只需要证$-\ln x+x^2-\frac{1}{x}<0$ 在$(0，1)$上恒成立.

令 $g(x)=-\ln x+x^2-\frac{1}{x}$，$x\in(0，1)$，$\therefore g'(x)=-\frac{1}{x}+2x+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-x+1}{x^2}>0$，

则函数 $g(x)$在$(0，1)$上单调递增，于是 $g(x)<g(1)=-\ln 1+1-1=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0，1)$时，$x^2-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{e^x}$.

6.(1)解　由已知，有 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$.

因此，当 $x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$时，

有 $\sin x>\cos x$，得 $f'(x)<0$，则 $f(x)$单调递减；

当 $x\in\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$时，有 $\sin x<\cos x$，

得 $f'(x)>0$，则 $f(x)$单调递增，

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

$f(x)$的单调递减区间为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},\ 2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)证明　记$h(x)=f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.依题意及(1)，有$g(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，从而$g'(x)=-2e^x\sin x$.

当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，故$h'(x)=f'(x)+g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x)(-1)=g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0$.

因此，$h(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，进而$h(x)\geqslant h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

所以当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

7.（1） $a=1$， $b=1$；

（2）由（1）可知$f(x)=(x+1)(e^x-1)$， $f(0)=0, f(-1)=0$，

由$m\le 0$，可得$x\ge mx^2+x$，

令$g(x)=(x+1)\left(e^x-1\right)-x$，则$g'(x)=(x+2)e^x-2$，

当$x\le -2$时， $g'(x)=(x+2)e^x-2<-2<0$，

当$x>-2$时，设$h(x)=g'(x)=(x+2)e^x-2$，则$h'(x)=(x+3)e^x>0$，

故函数$g'(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增，

又$g'(0)=0$，所以当$x\in(-\infty,0)$时， $g'(x)<0$，当$x\in(0,+\infty)$时， $g'(x)>0$，

所以函数$g(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

故$g(x)\ge g(0)=0$，即$(x+1)\left(e^x-1\right)\ge x\ge mx^2+x$.

故$f(x)\ge mx^2+x$.

8.【解析】(1) $f'(x)=\frac{2(1-x-x\ln x)}{xe^x}$，令$g(x)=1-x-x\ln x$，则$g(1)=0$，

当$0<x<1$时， $1-x>0,-x\ln x>0$，所以$g(x)>0, f'(x)>0$，

当$x>1$时， $1-x<0,-x\ln x<0$，所以$g(x)<0, f'(x)<0$，

所以函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

（2）要证明$f'(x)\ln(x+1)<\frac{2}{e^x}+\frac{2}{e^{x+2}}$，即证$(1-x-x\ln x)\ln(x+1)<\left(1+\frac{1}{e^2}\right)x$，

令$g(x)=1-x-x\ln x$，则$g'(x)=-1-(\ln x+1)=-2-\ln x$，

当$0<x<\frac{1}{e^2}$时， $g'(x)>0$，当$x>\frac{1}{e^2}$时， $g'(x)<0$，

所以函数$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上单调递减， $g(x)\le 1-\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}=1+\frac{1}{e^2}$，

所以$1-x-x\ln x\le 1+\frac{1}{e^2}$.

要证$(1-x-x\ln x)\ln(x+1)<\left(1+\frac{1}{e^2}\right)x$，只需再证$\ln(x+1)<x$即可.

易证 $\ln x\le x-1$，当且仅当 $x=1$时取等号（证明略），所以 $0<\ln(x+1)<x$，

综上所述，当 $x>0$时，都有 $f'(x)\ln(x+1)<\frac{2}{e^x}+\frac{2}{e^{x+2}}$.

9.【解析】(1) $f(x)=e^x-x^2$， $f'(x)=e^x-2x$，由题设得 $f'(1)=e-2, f(1)=e-1$，

所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$处的切线方程为$y=(e-2)(x-1)+e-1$，即 $y=(e-2)x+1$；

（2）令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-2$，

当 $x<\ln 2$时， $g'(x)<0$，当 $x>\ln 2$时， $g'(x)>0$，所以函数 $g(x)=f'(x)$在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增， $g(x)_{\min}=g(\ln 2)=f'(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，所以函数 $f(x)=e^x-x^2$在$(0,+\infty)$上单调递增，

由于曲线 $f(x)$ 在 $x=1$处的切线方程为$y=(e-2)x+1$， $f(1)=e-1$，可猜测函数 $f(x)$ 的图象恒在切线 $y=(e-2)x+1$ 的上方.

先证明当 $x>0$时， $f(x)\ge(e-2)x+1$.

设$h(x)=f(x)-(e-2)x-1(x>0)$，则$h'(x)=e^x-2x-(e-2),h''(x)=e^x-2$，

当 $x<\ln 2$时， $h''(x)<0$，当 $x>\ln 2$时， $h''(x)>0$，

所以$h'(x)$在$(0,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，

由$h'(0)=3-e>0,h'(1)=0,0<\ln 2<1$，所以$h'(\ln 2)<0$，

所以存在$x_0\in(0,\ln 2)$，使得$h'(x_0)=0$，

所以当$x\in(0,x_0)\cup(1,+\infty)$时， $h'(x)>0$，当$x\in(x_0,1)$时， $h'(x)<0$，

所以$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

因为$h(0)=h(1)=0$，所以$h(x)\ge 0$，即 $f(x)\ge(e-2)x+1$，当且仅当 $x=1$时取等号，

所以当 $x>0$时， $e^x-x^2\ge(e-2)x+1$，

变形可得$\frac{e^x+(2-e)x-1}{x}\ge x$，

又由于 $x\ge\ln x+1$，当且仅当 $x=1$时取等号（证明略），

所以$\frac{e^x+(2-e)x-1}{x}\ge\ln x+1$，当且仅当 $x=1$时取等号.

湛江一中卓越班 2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明答案 2

10.（1）$[-1,+\infty)$；

（2）设数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前n项的和分别为$S_n=\dfrac{n}{2n+4},T_n=\dfrac{n}{n+1}$，则

由于$a_n=\begin{cases}S_1(n=1),\\ S_n-S_{n-1}(n\geq 2),\end{cases}$，解得$a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$；

同理，$b_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

所以只需证明$a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}<\ln^2\dfrac{n+1}{n}<b_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$．

由（1）知$a=-1$时，有$x\ln x\geq x-1$，即$\ln x\geq\dfrac{x-1}{x}$.令$x=\dfrac{n+1}{n}>1$，则$\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$，

所以$\ln^2\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{(n+1)^2}>\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，所以$\ln^2 2+\ln^2\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln^2\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n}{2n+4}$；

再证明$\ln^2\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{n(n+1)}$，亦即$\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$，

因为$\ln\dfrac{n+1}{n}=2\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$，所以只需证$2\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}<\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$，

现证明$2\ln x<x-\dfrac{1}{x}(x>1)$.令$h(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}(x>1)$，则$h'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}<0$，

所以函数$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，$h(x)<h(1)=0$，

所以当$x>1$时，$2\ln x<x-\dfrac{1}{x}$恒成立，令$x=\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}>1$，则$2\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}<\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$，

综上，$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}<\ln^2\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{n(n+1)}$，

所以对数列$\{a_n\},\left\{\ln^2\dfrac{n+1}{n}\right\},\{b_n\}$分别求前$n$项的和，得

$\dfrac{n}{2n+4}<\ln^2 2+\ln^2\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln^2\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{n}{n+1}$.

11.(1)设二次函数$f(x)=ax^2+bx$，$f'(x)=2ax+b$，$\therefore 2a=6,b=-2$，则$f(x)=3x^2-2x$，

$\because(n,S_n)$在$y=3x^2-2x$上，$\therefore S_n=3n^2-2n$

当$n\geq 2$时$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-2n-3(n-1)^2+2(n-1)=6n-5$，又$n=1$时$a_1=3-2=1=6\times 1-5$符合，

$\therefore a_n=6n-5$，

则$c_n=\dfrac{1}{3}(a_n+2)=\dfrac{6n-3}{3}=2n-1$，由$b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots 2^{n-2}b_{n-1}+2^{n-1}b_n=c_n$得，

$b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots 2^{n-2}b_{n-1}+2^{n-1}b_n=2n-1$①，

令 $n=n-1\left(n\geq 2\right)$ 代入上式得，$b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots 2^{n-3}b_{n-2}+2^{n-2}b_{n-1}=2n-3$ ②，

①－②得，$2^{n-1}b_n=2$，即 $b_n=2^{2-n}\left(n\geq 2\right)$，又 $b_1=1$ 不满足上式，

$\therefore b_n=\begin{cases}1,n=1\\2^{2-n},n\geq 2\end{cases}$；

(2)由（1）得，$c_n\cdot b_n=\begin{cases}1,n=1\\\left(2n-1\right)2^{2-n},n\geq 2\end{cases}$，

$\therefore T_n=1+3+5\times 2^{-1}+7\times 2^{-2}+\cdots+\left(2n-1\right)\times 2^{2-n}$ ③，

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+3\times 2^{-1}+5\times 2^{-2}+7\times 2^{-3}+\cdots+\left(2n-1\right)\times 2^{1-n}$ ④，

③－④得，$\frac{1}{2}T_n=\frac{7}{2}+2\left(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{2-n}\right)-\left(2n-1\right)\times 2^{1-n}=\frac{7}{2}+2\times\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\left(2n-1\right)\times 2^{1-n}=\frac{11}{2}-\left(2n+3\right)\times 2^{1-n}$，

则 $T_n=11-\left(2n+3\right)\times 2^{2-n}$，

(3)①设 $g\left(x\right)=x-\ln\left(x+1\right)\left(x>0\right)$，则 $g'\left(x\right)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数，

$\therefore g\left(x\right)>g\left(0\right)=0$，即 $x-\ln\left(x+1\right)>0$，故 $\ln\left(x+1\right)<x\left(x>0\right)$；

②$\because \ln\left(x+1\right)<x\left(x>0\right)$，

当 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 2$ 时，令 $n=n-1$ 代入上式得：

$\ln n<n-1$，即 $\frac{\ln n}{n}<\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$，

令 $n=n^2$ 代入上式得，$\frac{\ln n^2}{n^2}<1-\frac{1}{n^2}$，$\therefore\frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$，

则 $\sum_{i=2}^{n}\frac{\ln i}{i^2}=\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{3^2}+\cdots+1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(n-1\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right]<\frac{1}{2}\left[\left(n-1\right)-\left(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\left(n+1\right)}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\left(n-1\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(n-1\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(n-1\right)-\frac{n-1}{2\left(n+1\right)}\right]=\frac{2n^2-n-1}{4\left(n+1\right)}$，

故结论成立.

题型三　分拆转化函数证明不等式

12.(1)解　$f(x)$的定义域为(0，$+\infty$)，且 $f'(x)=\frac{e}{x}-a$，

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$在(0，$+\infty$)上单调递增；

②若 $a>0$，则当 $0<x<\frac{e}{a}$时，$f'(x)>0$；

当 $x>\frac{e}{a}$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在$\left(0,\frac{e}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{e}{a},+\infty\right)$上单调递减.

(2)**证明** 当 $x>0$ 时，$xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$ 等价于 $f(x)\leqslant\frac{e^x}{x}-2e$.

当 $a=e$ 时，根据(1)知，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，
所以 $f(x)_{max}=f(1)=-e$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}-2e(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，
所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；
当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，
所以 $g(x)_{min}=g(1)=-e$.

综上，当 $x>0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，即 $f(x)\leqslant\frac{e^x}{x}-2e$.

即 $xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$ 得证.

13.(1)**解** 由 $f(x)=ax^2-(x+1)\ln x$，得 $f'(x)=2ax-\ln x-\frac{1}{x}-1$.

∵曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的斜率为 0，∴$f'(1)=2a-2=0$，则 $a=1$.
(2)**证明** 由(1)得 $f(x)=x^2-(x+1)\ln x$，

要证当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)>\frac{1}{2}x$，只需证当 $0<x\leqslant 2$ 时，$x-\frac{\ln x}{x}-\ln x>\frac{1}{2}$，即 $x-\ln x>\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}$.

令 $g(x)=x-\ln x$，$h(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}$，令 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=0$，得 $x=1$，

易知 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,2]$上单调递增，故当 $0<x\leqslant 2$ 时，$g(x)_{min}=g(1)=1$.

∵$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x\leqslant 2$ 时，$h'(x)>0$，

∴$h(x)$在$(0,2]$上单调递增，

故当 $0<x\leqslant 2$ 时，$h(x)_{max}=h(2)=\frac{1+\ln 2}{2}<1$，故 $h(x)_{max}<g(x)_{min}$，

故当 $0<x\leqslant 2$ 时，$h(x)<g(x)$，

即当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)>\frac{1}{2}x$.

14.(1)**解** $f'(x)=2bx+\frac{a}{x}$，则 $f'(1)=2b+a=a+2$，

解得 $b=1$，$f'(x)=2x+\frac{a}{x}=\frac{2x^2+a}{x}(x>0)$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\sqrt{-\frac{a}{2}}$；

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\sqrt{-\frac{a}{2}}$，

所以 $f(x)$在$\left(\sqrt{-\frac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递增，

在$\left(0,\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$上单调递减.

(2)**证明** 要证 $f(x)<x^2+\frac{2}{x}e^{x-2}$，只要证$\frac{a\ln x}{x}<\frac{2e^{x-2}}{x^2}$.

令 $g(x)=\dfrac{a\ln x}{x}\left(0<a\leqslant\dfrac{e}{2}\right)$，则 $g'(x)=\dfrac{a（1-\ln x）}{x^2}$，

当 $g'(x)>0$ 时，得 $0<x<e$；当 $g'(x)<0$ 时，得 $x>e$，

所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{a}{e}$.

令 $h(x)=\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{2e^{x-2}（x-2）}{x^3}$.

当 $h'(x)<0$ 时，得 $0<x<2$；当 $h'(x)>0$ 时，得 $x>2$，

所以 $h(x)_{\min}=h(2)=\dfrac{1}{2}$.

因为 $0<a\leqslant\dfrac{e}{2}$，所以 $g(x)_{\max}=\dfrac{a}{e}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

又 $e\neq2$，所以$\dfrac{a\ln x}{x}<\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}$，

故 $f(x)<x^2+\dfrac{2}{x}e^{x-2}$ 得证.

15.(1)

解：$\because f\left(x\right)=\ln x$， $g\left(x\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{a}{x}$，

$\therefore$ 方程 $e^{2f(x)}=g\left(x\right)$ 可化为 $x^2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{a}{x}$.即 $a=-x^3+\dfrac{3}{2}x$.

令 $h\left(x\right)=-x^3+\dfrac{3}{2}x$.则 $h'\left(x\right)=-3x^2+\dfrac{3}{2}$.

由 $h'\left(x\right)=-3x^2+\dfrac{3}{2}=0$ 得， $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，或 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）.

当 $x\in\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$时， $h'\left(x\right)=-3x^2+\dfrac{3}{2}>0$. $h\left(x\right)$ 单调递增.

当 $x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$时， $h'\left(x\right)=-3x^2+\dfrac{3}{2}<0$. $h\left(x\right)$ 单调递减.

$\because h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$， h（1） $=\dfrac{1}{2}$， $h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore x\in[\dfrac{1}{2}$， $1]$时， $h\left(x\right)\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$\therefore$ 方程 $e^{2f(x)}=g\left(x\right)$ 在区间$[\dfrac{1}{2}$， $1]$上有解等价于 $a\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(2)

解： $a=1$时，要证不等式 $g\left(x\right)<f\left(x\right)$，

只需证 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{x}<\ln x$， 即 $\ln x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{3}{2}$.

令 $r\left(x\right)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.则 $r'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2},x\geq4,r'\left(x\right)>0$，

高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明答案 3

所以 $x\in[4，+\infty)$ 时，$r\left(x\right)$ 单调递增.

$\therefore r\left(x\right)_{min}=r$（4）$=\ln4+\dfrac{1}{4}>\dfrac{3}{2}$.

$\therefore$ 当 $x\in[4，+\infty)$ 时，$g\left(x\right)<f\left(x\right)$ 恒成立.

要证 $f\left(x\right)<x-2$，只需证 $\ln x<x-2$，即 $\ln x-x<-2$.

令 $k\left(x\right)=\ln x-x$. $k'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-1, x\geq 4, k'\left(x\right)<0$，

所以 $x\in[4，+\infty)$ 时，$k\left(x\right)$ 单调递减. $\therefore k\left(x\right)_{max}=k$（4）$=\ln4-4<-2$.

$\therefore$ 当 $x\in[4，+\infty)$ 时，$f\left(x\right)<x-2$ 恒成立.

$\therefore$ 当 $a=1$ 时，证明不等式 $g\left(x\right)<f\left(x\right)<x-2$ 在 $[4，+\infty)$ 上恒成立.

(3)

解：$\because f\left(x\right)=\ln x$，

$\therefore 2f\left(2k+1\right)-f\left(k+1\right)-f\left(k\right)=2\ln\left(2k+1\right)-\ln\left(k+1\right)-\ln k$

$=\ln\dfrac{\left(2k+1\right)^2}{k\left(k+1\right)}=f\left(\dfrac{1}{k\left(k+1\right)}+4\right)$，

由（2）可知，$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{x}<f\left(x\right)<x-2$，$\therefore \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{k\left(k+1\right)}+4}<f\left(\dfrac{1}{k\left(k+1\right)}+4\right)<\dfrac{1}{k\left(k+1\right)}+4-2$，

即 $\dfrac{3}{2}-\dfrac{k\left(k+1\right)}{4k\left(k+1\right)+1}<f\left(\dfrac{1}{k\left(k+1\right)}+4\right)<\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}+2$，

$\therefore \dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{16k\left(k+1\right)+4}<f\left(\dfrac{1}{k\left(k+1\right)}+4\right)<\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}+2$，

$\therefore \dfrac{5n}{4}+\dfrac{1}{16\times2+4}+\dfrac{1}{16\times2\times3+4}+\cdots+\dfrac{1}{16n(n+1)+4}$

$\leq\sum\limits_{k=1}^{n}[2f(2k+1)-f(k+1)-f(k)]<1-\dfrac{1}{n+1}+2n$，

$\because n\in N, \therefore \dfrac{5n}{4}+\dfrac{1}{60}<\sum\limits_{k=1}^{n}[2f(2k+1)-f(k+1)-f(k)]<2n+1$.

一、证明不等式 1：不含参：

1.【解析】：（1）因为 $f\left(x\right)=e^{x}-x-mx^{2}$ ，所以 $f'\left(x\right)=e^{x}-1-2mx,x\in\left(0,+\infty\right)$ ，

因为 $f\left(x\right)$ 是增函数，所以 $f'\left(x\right)\geq 0$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时恒成立，

又 $f''\left(x\right)=e^{x}-2m$ ，可知 $y=f''\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，令 $f''\left(x\right)=0$ ， $x=\ln 2m$ ，

当 $\ln 2m\leq 0$ 时，即 $m\leq\frac{1}{2}$ 时， $f''\left(x\right)\geq 0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，

所以 $y=f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=0$ ，符合题意；

当 $\ln 2m>0$ 时，即 $m>\frac{1}{2}$ 时，当 $x\in\left(0,\ln 2m\right)$ 时， $f''\left(x\right)<0$ ，当 $x\in\left(\ln 2m,+\infty\right)$ 时， $f''\left(x\right)>0$ ，

所以 $y=f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,\ln 2m\right)$ 上单调递减，在 $\ln 2m,+\infty$ 上单调递增，

所以 $f'\left(x\right)_{\min}=f'\left(\ln 2m\right)=2m-2m\ln 2m-1$，令 $2m=t\left(t>1\right)$， $g\left(t\right)=t-t\ln t-1$，

所以 $g'\left(t\right)=-\ln t$，所以 $t\in\left(1,+\infty\right)$ 时， $g'\left(t\right)<0$，

所以 $g\left(t\right)_{\max}<g\left(1\right)=0$，所以 $f'\left(x\right)_{\min}=f'\left(\ln 2m\right)=2m-2m\ln 2m-1<0$，这与 $f'\left(x\right)\geq 0$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时恒成立矛盾，

综上可知： $m\leq\frac{1}{2}$；

（2）当 $m=1$ 时， $f\left(x\right)=e^{x}-x-x^{2}$， $f'\left(x\right)=e^{x}-1-2x$， $f''\left(x\right)=e^{x}-2$，且 $y=f''\left(x\right)$ 为增函数，

令 $f''\left(x\right)=e^{x}-2=0$，所以 $x=\ln 2$，所以 $y=f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,\ln 2\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln 2,+\infty\right)$ 山单调递增，

所以 $f'\left(x\right)_{\min}=f'\left(\ln 2\right)=1-2\ln 2<0$，

又因为 $f'\left(0\right)=0$， $f'\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}-4=\sqrt{e^{3}}-4>\sqrt{16}-4=0$， $f'\left(1\right)=e-3<0$，

所以存在唯一 $x_{0}\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 使得 $f'\left(x_{0}\right)=0$，

所以当 $x\in\left(0,x_{0}\right)$ 时， $f'\left(x\right)<0$，当 $x\in\left(x_{0},+\infty\right)$ 时， $f'\left(x\right)>0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_{0}\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_{0},+\infty\right)$ 上单调递增，且 $f'\left(x_{0}\right)=e^{x_{0}}-1-2x_{0}=0$，

所以 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(x_{0}\right)=e^{x_{0}}-x_{0}-x_{0}^{2}=-x_{0}^{2}+x_{0}+1=-\left(x_{0}-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{5}{4}$，

又因为 $x_{0}\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以 $-\left(x_{0}-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{5}{4}>-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$，

所以 $f(x)_{\min}>\frac{1}{4}$，所以 $f(x)>\frac{1}{4}$成立.

2.【解析】:（1）由函数 $f(x)=\ln x+ax+\frac{1}{x}$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}+a-\frac{1}{x^2}=\frac{ax^2+x-1}{x^2}$.

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，此时在区间 $(0,1)$ 上，$f'(x)<0$；在区间 $(1,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

当 $a<0$ 且 $\Delta=1+4a\le 0$ 时，即 $a\leqslant -\frac{1}{4}$ 时，$ax^2+x-1\le 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $f'(x)\le 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，且不恒为 0.

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$；

当 $a<0$ 且 $\Delta=1+4a>0$ 时，即 $-\frac{1}{4}<a<0$ 时，方程 $ax^2+x-1=0$ 的两根依次为 $x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}$，

$x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}(0<x_1<x_2)$，

此时在区间 $(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$；在区间 (x_1,x_2) 上，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$，$\left(\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty\right)$，单调递增区间为

$\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a},\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$；

当 $a>0$ 时，方程 $ax^2+x-1=0$ 的两根依次为 $x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}(x_2<0<x_1)$，

此时在区间 $(0,x_1)$ 上，$f'(x)<0$；在区间 $(x_1,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$，单调递增区间为 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty\right)$；

（2）证明：当 $a=-1$ 时，$g(x)=f(x)+(x-2)\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}=\ln x-x+\frac{1}{x}+(x-2)\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}=(x-2)\mathrm{e}^x-x+\ln x$，

则 $g'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-1+\frac{1}{x}=(x-1)\left(\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}\right)$.

当 $\frac{1}{4}<x<1$ 时，$x-1<0$，令 $h(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$，

则 $h'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4},1\right]$ 上单调递增.

因为$h\left(\frac{1}{2}\right)=h\left(x\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-2<0$，$h\left(1\right)=\mathrm{e}-1>0$，

所以存在$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得$h\left(x_0\right)=0$，即$\mathrm{e}^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即$\ln x_0=-x_0$．

故当$x\in\left(\frac{1}{4},x_0\right)$时，$h\left(x\right)<0$，此时$g'\left(x\right)>0$；

当$x\in\left(x_0,1\right)$时，$h\left(x\right)>0$，此时$g'\left(x\right)<0$．

即$g\left(x\right)$在$\left(\frac{1}{4},x_0\right)$上单调递增，在$\left(x_0,1\right)$上单调递减，

则$m=g\left(x\right)_{\max}=g\left(x_0\right)=\left(x_0-2\right)\mathrm{e}^{x_0}-x_0+\ln x_0=\left(x_0-2\right)\frac{1}{x_0}-x_0-x_0=1-\frac{2}{x_0}-2x_0$．

令$G\left(x\right)=1-\frac{2}{x}-2x$，$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，则$G'\left(x\right)=\frac{2}{x^2}-2=\frac{2\left(1-x^2\right)}{x^2}>0$，

所以$G\left(x\right)$在$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递增，则$G\left(x\right)>G\left(\frac{1}{2}\right)=-4$，$G\left(x\right)<G\left(1\right)=-3$，

所以$-4<m<-3$．
故$\left(m+4\right)\left(m+3\right)<0$．
3.（Ⅰ）由$y=f(x)$过（0,0）点，得 b=-1.

由$y=f(x)$在（0,0）点的切线斜率为$\frac{3}{2}$，又$y'\big|_{x=0}=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+a\right)\big|_{x=0}=\frac{3}{2}+a$

得 a=0
（Ⅱ）（证法一）
由均值不等式，当 x>0 时，$2\sqrt{(x+1)\bullet 1}<x+1+1=x+2$ 故$\sqrt{x+1}<\frac{x}{2}+1$

记$h(x)=f(x)-\frac{9x}{x+6}$，

则$h'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{5x}{(x+6)^2}=\frac{2+\sqrt{x+1}}{2(x+1)}-\frac{5x}{(x+6)^2}<\frac{x+6}{4(x+1)}-\frac{5x}{(x+6)^2}$

令$g(x)=(x+6)^3-216(x+1)$，则当 0<x<2 时，$g'(x)=3(x+6)^2-216<0$

因此$g(x)$在（0,2）内是递减函数，又由$g(0)=0$，得$g(x)<0$，所以$h'(x)<0$

因此$h(x)$在（0,2）内是递减函数，又由$h(0)=0$，得$h(x)<0$

当 0<x<2 时$f(x)<\frac{9x}{x+6}$

（证法二）

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明答案 4

由（Ⅰ）知 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1$ 由均值不等式，当 x>0 时，$2\sqrt{(x+1)\bullet 1}<x+1+1=x+2$ 故 $\sqrt{x+1}<\frac{x}{2}+1$

①

令 $k(x)=\ln(x+1)-x$，则 $k(0)=0$，$k'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}<0$，故 $k(x)<0$

即 $\ln(x+1)<x$　②

由①②得，当 x>0 时，$f(x)<\frac{3}{2}x$

记 $h(x)=(x+6)f(x)-9x$，则当 0<x<2 时，

$$h'(x)=f(x)+(x+6)f'(x)-9<\frac{3}{2}x+(x+6)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)-9$$

$$=\frac{1}{2(x+1)}[3x(x+1)+(x+6)(2+\sqrt{x+1})-18(x+1)]$$

$$<\frac{1}{2(x+1)}[3x(x+1)+(x+6)(3+\frac{x}{2})-18(x+1)]=\frac{x}{4(x+1)}(7x-18)<0$$

因此 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调递减，又 $h(0)=0$，所以 $h(x)<0$ 即 $f(x)<\frac{9x}{x+6}$.

4. 解 (1)由 $f(x)=\frac{\ln x+k}{e^x}$，得 $f'(x)=\frac{1-kx-x\ln x}{xe^x}$，$x\in(0,+\infty)$，

由于曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

所以 $f'(1)=0$，因此 $k=1$.

(2)由(1)得 $f'(x)=\frac{1}{xe^x}(1-x-x\ln x)$，$x\in(0,+\infty)$，

令 $h(x)=1-x-x\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$.

又 $e^x>0$，所以 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

因此 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$

(3)因为 $g(x)=xf'(x)$，所以 $g(x)=\frac{1}{e^x}(1-x-x\ln x)$，$x\in(0,+\infty)$，

由(2)得，$h(x)=1-x-x\ln x$，

求导得 $h'(x)=-\ln x-2=-(\ln x-\ln e^{-2})$.

所以当 $x\in(0,e^{-2})$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减.

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)\le h(e^{-2})=1+e^{-2}$.

又当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$0<\frac{1}{e^x}<1$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\frac{1}{e^x}h(x)<1+e^{-2}$，即 $g(x)<1+e^{-2}$.

综上所述结论成立

5.（1）当 $a=-1$ 时，原问题为证明 $-x-\ln x\geqslant 1-xe^{x}$.

令 $h(x)=xe^{x}-\ln x-x-1$，则 $h'(x)=(x+1)e^{x}-\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{(x+1)\left(xe^{x}-1\right)}{x}$（$x>0$）. 1 分

令 $g(x)=xe^{x}-1$（$x\geqslant 0$），则 $g'(x)=(x+1)e^{x}>0$（$x>0$），所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
又 $g(0)=-1<0$，$g(1)=e-1>0$，

所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $g\left(x_0\right)=0$，所以 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，所以 $x_0=-\ln x_0$. · · · · · · . 3 分

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$g(x)<0$，则 $h'(x)<0$；当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$g(x)>0$，则 $h'(x)>0$

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $h(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值也是最小值，

即 $h(x)_{\min}=h\left(x_0\right)=x_0e^{x_0}-\ln x_0-x_0-1=x_0\times\dfrac{1}{x_0}+x_0-x_0-1=0$，

所以 $\forall x\in(0,+\infty)$，$h(x)\geqslant 0$，即 $-x-\ln x\geqslant 1-xe^{x}$. · · · · · · · · · · · · · · · 5 分

（2）记函数 $\varphi(x)=e^{x-2}-\ln x$，则原不等式可化简为 $\varphi(x)>0$，

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{e^{2}}\times e^{x}-\dfrac{1}{x}=e^{x-2}-\dfrac{1}{x}$，可知 $\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， · · · · · · · · 6 分

由 $\varphi'(1)<0$，$\varphi'(2)>0$ 知，$\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点 x_1，且 $1<x_1<2$，

所以 $\varphi'\left(x_1\right)=e^{x_1}-2-\dfrac{1}{x_1}=0$，即 $e^{x_1-2}=\dfrac{1}{x_1}$. · · · · · · · · · · · · · · · · · · 8 分

当 $x\in\left(0,x_1\right)$ 时 $\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $\left(0,x_1\right)$ 上单调递减；当 $x\in\left(x_1,+\infty\right)$ 时 $\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $\left(x_1,+\infty\right)$ 上单调递增.

所以对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$\varphi(x)\geqslant\varphi\left(x_1\right)=e^{x_1-2}-\ln x_1$.

由 $e^{x_1-2}=\dfrac{1}{x_1}$ 知，$x_1-2=-\ln x_1$， · 10 分

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi\left(x_1\right)=\dfrac{1}{x_1}+x_1-2=\dfrac{x_1^{2}-2x_1+1}{x_1}=\dfrac{\left(x_1-1\right)^{2}}{x_1}>0$. · · · · · · · · · · 11 分

则 $\forall x\in(0,+\infty)$，$\varphi(x)=e^{x-2}-\ln x>0$，即 $\forall x\in(0,+\infty)$，$\dfrac{\ln x}{e^{x}}<\dfrac{1}{e^{2}}$ 恒成立. 12 分

二、证明不等式 2：含参，讨论单调性

6. (1) $f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+m}$.

由 x=0 是 f(x)的极值点得 f '(0)=0，所以 m=1.

于是 f(x)=e^{x}—ln(x+1)，定义域为(—1，+∞)，$f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

函数 $f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+1}$ 在(—1，+∞)上单调递增，且 f '(0)=0，因此当 x∈(—1，0)时， f '(x)<0;当 x∈(0，+∞)时， f '(x)>0.

所以 f(x)在(—1，0)上单调递减，在(0，+∞)上单调递增.

(2)当 m≤2，x∈(—m，+∞)时，ln(x+m)≤ln(x+2)，故只需证明当 m=2 时， f(x)>0.

当 m=2 时，函数 $f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+2}$ 在(—2，+∞)上单调递增.

又 f '(—1)<0， f '(0)>0，故 f '(x)=0 在(—2，+∞)上有唯一实根 x_0，且 $x_0\in(-1,0)$.

当 $x\in(-2,x_0)$ 时， f '(x)<0;当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时， f '(x)>0，从而当 $x=x_0$ 时，f(x)取得最小值.

由 f '(x_0)=0 得 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+2}$， $\ln(x_0+2)=-x_0$，

故 $f(x)\geq f(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$.

综上，当 m≤2 时， f(x)>0.

7.（1）当 $a=0$ 时， $f(x)=\ln x-x+1$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

因为 $x\in[1,+\infty)$，所以 $f^{'}(x)\leq 0$. 所以 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减

所以 $f(x)$ 区间 $[1,+\infty)$ 上最大值为 $f(1)=0$.

（2）由题可知 $f\ '(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-(2a+1)=\dfrac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}=\dfrac{(2ax-1)(x-1)}{x}$.

①当 $a=0$ 时，由（1）知，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，
所以函数 $f(x)$ 无最小值，此时不符合题意；

②当 $a\geq\dfrac{1}{2}$ 时，因为 $x\in(1,+\infty)$，所以 $2ax-1>0$. 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增
所以函数 $f(x)$ 无最小值，此时亦不符合题意；

③当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，此时 $1<\dfrac{1}{2a}$.

函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\dfrac{1}{2a})$ 上单调递减，在区间 $(\dfrac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递增

所以 $f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{2a})=\ln\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{4a}$，即 $g(a)=\ln\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{4a}$.

要证 $g(a)<\dfrac{1}{4a}-1$，只需证当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时， $g(a)-\dfrac{1}{4a}+1<0$ 成立. 即证 $\ln\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{2a}+1<0,\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$

设 $t=\dfrac{1}{2a}$， $h(t)=\ln t-t+1,(t>1)$

由（1）知 $h(t)<h(1)=0$，即 $g(a)-\dfrac{1}{4a}+1<0$ 成立. 所以 $g(a)<\dfrac{1}{4a}-1$.

8.（1）由已知 $f'(x)=e^x-ax-1$

设 $g(x)=f'(x)$， $\therefore g'(x)=e^x-a$

①当 $a\leq 0$ 时. $g'(x)=e^x-a>0$ 在 R 上恒成立， $\therefore g(x)=f^{'}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增

②当 $a>0$ 时. 令 $g'(x)>0$ 得 $x>\ln a$， $g'(x)<0$ 得 $x<\ln a$

$\therefore g'(x)=f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上递减. 在 $(\ln a,+\infty)$ 上递增

综上所述：当 $a\leq 0$ 时. $y=f^{'}(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数

当 $a>0$ 时. $y=f^{'}(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 是减函数. 在 $(\ln a,+\infty)$ 上是增函数

（2）由（1）知. ①当 $a\le 0$ 时. $f'(x)=e^{x}-ax-1$ 在 $(-1,+\infty)$ 上递增

又 $f'(0)=0$，$\therefore -1<x<0$ 时. $f'(x)<0; x>0$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减. 在 $(0,+\infty)$ 上递增，$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=1$

②当 $0<a\le\frac{1}{e}$ 时，$\ln a\le -1$

由（1）知 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上递增. 又 $f'(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减. 在 $(0,+\infty)$ 上递增

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=1$

③当 $\frac{1}{e}<a\le 1-\frac{1}{e}$ 时. 由（1）知 $f'(x)$ 在 $(-1,\ln a)$ 上递减. 在 $(\ln a,+\infty)$ 上递增

且 $f'(0)=0, f'(-1)=\frac{1}{e}+a-1\le 0$

$\therefore -1\le x<0$ 时. $f'(x)<0; x>0$ 时. $f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减. 在 $(0,+\infty)$ 在递增，则 $f(x)_{\min}=f(0)=1$

综上所述：函数 $f(x)$ 在 $\left[-1,+\infty\right)$ 上的最小值为 1.

$\therefore f(x)\ge 1$，则要证明原不等式只须证明 $x-\ln(x+1)\ge 0$

设 $h(x)=x-\ln(x+1)(x>-1)$，$\therefore h'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

则当 $-1<x<0$ 时，$h'(x)<0$；$x>0$ 时，$h'(x)>0$

即: $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减. 在 $(0,+\infty)$ 上递增，则 $h(x)_{\min}=h(0)=0$，即 $x-\ln(x+1)\ge 0$

又 $f(x)\ge 1$，故 $f(x)+x-\ln(x+1)\ge 1$.

9.（1）因为 $f'(x)=-\frac{(x-1)(mx+1-m)}{e^{x}}$，

①当 $m=0$ 时，$f'(x)=-\frac{x-1}{e^{x}}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $m>0$ 时，$f'(x)=-\frac{m(x-1)\left(x-1+\frac{1}{m}\right)}{e^{x}}, 1-\frac{1}{m}<1$，

当 $x\in\left(1-\frac{1}{m},1\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(-\infty,1-\frac{1}{m}\right)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(1-\frac{1}{m},1\right)$ 单调递增，

在 $\left(-\infty,1-\frac{1}{m}\right),(1,+\infty)$ 单调递减；

③当$m<0$时，$1-\frac{1}{m}>1$，当$x\in\left(1,1-\frac{1}{m}\right)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(-\infty,1)\cup\left(1-\frac{1}{m},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，所以

$f(x)$在$\left(1,1-\frac{1}{m}\right)$单调递减，在$(-\infty,1),\left(1-\frac{1}{m},+\infty\right)$单调递增.

（2）要证明$ef(x)+\ln x\le x$，只需证明$ef(x)\le x-\ln x$，

而$x-\ln x\ge 1$，因此只需证明$f(x)\le\frac{1}{e}$，

当$m=0$时，$f(x)=\frac{x}{e^x}$，由（1）知$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$f(x)_{\max}=f(1)=\frac{1}{e}$；

当$m<0$时，$f(x)=\frac{m\left(x^2+1\right)+x}{e^x}<\frac{x}{e^x}\le\frac{1}{e}$，

故$ef(x)+\ln x\le x$.

三　证明不等式 3：放缩法

10.（1）$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$；$f'\left(x\right)=a-\frac{a}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{\left(ax^2-2\right)\left(x-1\right)}{x^3}$.

当$a\le 0$，$x\in\left(0,1\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$单调递增；$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$单调递减.

当$a>0$时，$f'\left(x\right)=\frac{a\left(x-1\right)}{x^3}\left(x+\sqrt{\frac{2}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$.

（1）$0<a<2$，$\sqrt{\frac{2}{a}}>1$，

当$x\in\left(0,1\right)$或$x\in\left(\sqrt{\frac{2}{a}},+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$单调递增；

当$x\in\left(1,\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$单调递减；

（2）$a=2$时，$\sqrt{\frac{2}{a}}=1$，在$x\in\left(0,+\infty\right)$内，$f'\left(x\right)\ge 0$，$f\left(x\right)$单调递增；

（3）$a>2$时，$0<\sqrt{\frac{2}{a}}<1$，

当$x\in\left(0,\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$或$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in\left(\sqrt{\frac{2}{a}},1\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

综上所述，

当$a\le 0$时，函数$f(x)$在$(0,1)$内单调递增，在$(1,+\infty)$内单调递减；

当$0<a<2$时，$f(x)$在$(0,1)$内单调递增，在$(1,\sqrt{\frac{2}{a}})$内单调递减，在$(\sqrt{\frac{2}{a}},+\infty)$内单调递增；

当$a=2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增；

当$a>2$，$f(x)$在$(0,\sqrt{\frac{2}{a}})$内单调递增，在$(\sqrt{\frac{2}{a}},1)$内单调递减，在$(1,+\infty)$内单调递增.

（2）由（1）知，$a=1$时，

$f(x)-f'(x)=x-\ln x+\frac{2x-1}{x^2}-\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=x-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-1$，$x\in[1,2]$，

令$g(x)=x-\ln x,h(x)=\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-1$，$x\in[1,2]$.

则$f(x)-f'(x)=g(x)+h(x)$，

由$g'(x)=\frac{x-1}{x}\ge 0$可得$g(x)\ge g(1)=1$，当且仅当$x=1$时取得等号.

又$h'(x)=\frac{-3x^2-2x+6}{x^4}$，

设$\varphi(x)=-3x^2-2x+6$，则$\varphi(x)$在$x\in[1,2]$单调递减，

因为$\varphi(1)=1,\varphi(2)=-10$，

所以在$[1,2]$上存在x_0使得$x\in(1,x_0)$时，$\varphi(x)>0,x\in(x_0,2)$时，$\varphi(x)<0$，

所以函数$h(x)$在$(1,x_0)$上单调递增；在$(x_0,2)$上单调递减，

由于$h(1)=1,h(2)=\frac{1}{2}$，因此$h(x)\ge h(2)=\frac{1}{2}$，当且仅当$x=2$取得等号，

所以$f(x)-f'(x)>g(1)+h(2)=\frac{3}{2}$，即$f(x)>f'(x)+\frac{3}{2}$对于任意的$x\in[1,2]$恒成立。

11.（1）$f(x)$的定义域为(0，$+\infty$)，则$f'(x)=\ln x+1-1-\frac{a}{x^2}=\ln x-\frac{a}{x^2}$，

令 $g(x)=\ln x-\dfrac{a}{x^2}$，$x>0$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{x^2+2a}{x^3}$，……………………………………1 分

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=\ln x$，令 $f'(x)=0$，则 $x=1$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增

所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$上有且仅有一个极值点．………………………………………………2 分

②当 $a>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

又 $g(1)=-a<0$，$g(e^a)=a-\dfrac{a}{e^{2a}}=a(1-\dfrac{1}{e^{2a}})>0$

所以 $g(x)$在$(1，e^a)$上存在唯一零点，记为 x_0，列表：

x	$(0，x_0)$	x_0	$(x_0，+\infty)$
$f'(x)$	－	0	＋
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$上有且仅有一个极值点．………………………………………………4 分

③当 $a<0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=\sqrt{-2a}$，

当 $0<x<\sqrt{-2a}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当 $x>\sqrt{-2a}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(\sqrt{-2a})=\ln\sqrt{-2a}+\dfrac{1}{2}$，

当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2e}$ 时，$g(x)_{\min}\geqslant0$，故 $f'(x)\geqslant0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$上无极值点，………………………………………………………5 分

当 $-\dfrac{1}{2e}<a<0$ 时，$g(x)_{\min}=g(\sqrt{-2a})=\ln\sqrt{-2a}+\dfrac{1}{2}<0$，又 $g(1)=-a>0$，

$0<-2a<\sqrt{-2a}<1$，下面证 $g(-2a)=\ln(-2a)-\dfrac{1}{4a}>0$，……………………………6 分

令 $\varphi(a)=\ln(-2a)-\dfrac{1}{4a}$ $(-\dfrac{1}{2e}<a<0)$，$\varphi'(a)=\dfrac{-2}{-2a}+\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{4a+1}{4a^2}>\dfrac{1-\frac{2}{e}}{4a^2}>0$，

所以 $\varphi(a)$ 在$(-\dfrac{1}{2e}，0)$上单调递增，

所以 $g(-2a)=\varphi(a)>\varphi(-\dfrac{1}{2e})=\ln\dfrac{1}{e}+\dfrac{e}{2}=\dfrac{e}{2}-1>0$，

所以 $g(x)$在$(0，+\infty)$上有且仅有两个零点，记为$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，列表：

x	$(0，\alpha)$	α	$(\alpha，\beta)$	β	$(\beta，+\infty)$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$上有且仅有两个极值点．………………………………………………7 分

综上所述，当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2e}$ 时，$f(x)$无极值点；当$-\dfrac{1}{2e}<a<0$ 时，$f(x)$有两个极值点；

当 $a\geqslant0$ 时，$f(x)$有一个极值点．……………………………………………………………8 分

（2）由（1）知，当 $a=0$ 时，$f(x)\geqslant f(1)=-1$，所以 $x\ln x\geqslant x-1$，…………………………10 分

即 $\ln x\geqslant1-\dfrac{1}{x}$，所以 $\ln^2 x\geqslant(1-\dfrac{1}{x})^2$，令 $x=\dfrac{n+1}{n}$ 得

故 $\ln^2\dfrac{n+1}{n}\geqslant(\dfrac{1}{n+1})^2>\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，

$\ln^2 2+\ln^2\frac{3}{2}+\ln^2\frac{4}{3}+\cdots+\ln^2\frac{n+1}{n}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}$. ……12 分

12.（1） $f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，当$a=1$时， $f'\left(x\right)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$，

若 $f'\left(x\right)>0$，则$x>1$；若 $f'\left(x\right)<0$，则$0<x<1$,

$\therefore f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

$\therefore f\left(x\right)_{极小值}=f\left(1\right)=0$，没有极大值.

（2） $f'\left(x\right)=2x-\frac{a}{x}+\left(a-2\right)=\frac{\left(2x+a\right)\left(x-1\right)}{x}\left(x>0\right)$，

1°当$a\geq0$时，若 $f'\left(x\right)>0$，则$x>1$，若 $f'\left(x\right)<0$，则$0<x<1$，

$\therefore f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

2°当$0<-\frac{a}{2}<1$，即$-2<a<0$时，

若 $f'\left(x\right)>0$，则$0<x<-\frac{a}{2}$或$x>1$；若 $f'\left(x\right)<0$，则$-\frac{a}{2}<x<1$

$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-\frac{a}{2},1\right)$上单调递减，在$(0,-\frac{a}{2})$，$\left(1,+\infty\right)$上单调递增

3°当$-\frac{a}{2}=1$，即$a=-2$时， $f'\left(x\right)\geq0$恒成立，$\therefore f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增.

4°当$-\frac{a}{2}>1$，即$a<-2$时，若 $f'\left(x\right)>0$，则$0<x<1$或$x>-\frac{a}{2}$；若 $f'\left(x\right)<0$，则$1<x<\frac{a}{2}$，

$\therefore f\left(x\right)$在$(1,-\frac{a}{2})$上单调递减，在$\left(0,1\right)(-\frac{a}{2},+\infty)$上单调递增

综上所述：1°当$a<-2$时， $f\left(x\right)$在$(1,-\frac{a}{2})$上单调递减，在$\left(0,1\right)(-\frac{a}{2},+\infty)$上单调递增；

2°当$a=-2$时， $f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；

3°当$-2<a<0$时， $f\left(x\right)$在$\left(-\frac{a}{2},1\right)$上单调递减，在$(0,1)\left(-\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增

4°当$a\geq0$时， $f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增；

（3）由（1）知$f\left(x\right)=x^2-x-lnx$在$\left(0,1\right)$上为减函数，

$\therefore x\in\left(0,1\right)$时， $x^2-x-lnx>f\left(1\right)=0$，$\therefore x^2-x>lnx$

令$x=\frac{n}{n+1}$，得$x^2-x=-\frac{n}{\left(n+1\right)^2}$，$\therefore-\frac{n}{\left(n+1\right)^2}>ln\frac{n}{n+1}=-ln\frac{n+1}{n}$，即$ln\frac{n+1}{n}>\frac{n}{\left(n+1\right)^2}$

湛江一中卓越班　2023-17

$\therefore ln2>\frac{1}{2^2},ln\frac{3}{2}>\frac{2}{3^2},ln\frac{4}{3}>\frac{3}{4^2}$，…，$ln\frac{n+1}{n}>\frac{n}{(n+1)^2}$，

将以上各式左右两边相加得：$\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{n}{(n+1)^2}$，

$\therefore ln(n+1)>\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{n}{(n+1)^2}$．

13.【解析】:（1） $f'(x)=\frac{1}{x}-a$，因为 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，所以 $\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{2},2\right]$， 1 分

当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)_{\max}=f(2)=\ln 2-2a+1$； ······· 2 分

当 $a\geqslant 2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+1$； ······ 3 分

当 $\frac{1}{2}<a<2$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{a}$，由 $f'(x)<0$ 得 $\frac{1}{a}<x\leqslant 2$，

所以此时 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}$． ························ 4 分

（2）证明：当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$，由 $f'(x)<0$ 得 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立， ········ 6 分

即 $\ln(1+x)<x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 都成立. ······················· 7 分

所以 $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$， ······· 8 分

即 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$． ········· 9 分

由于 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 1}=1$． ················ 10 分

所以 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]<1$． ················· 11 分

所以 $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\mathrm{e}$． 12 分

14.（1）函数 $f(x)$ 的定义域为：$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}+2x=\frac{a+2x^2}{x}$，

①当 $a\geq 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{-\frac{a}{2}}$．

当$0<x<\sqrt{-\frac{a}{2}}$时，$a+2x^2<0$，所以$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$\left(0,\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$上单调递减；

当$x>\sqrt{-\frac{a}{2}}$时，$a+2x^2>0$，所以$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$\left(\sqrt{-\frac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递增.

综上，当$a\geq 0$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a<0$时，函数$f(x)$在$\left(0,\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt{-\frac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递增.

（2）当$a=1$时，$f(x)=\ln x+x^2$，要证明$f(x)\leq x^2+x-1$，

即证$\ln x\leq x-1$，即证：$\ln x-x+1\leq 0$.

设$g(x)=\ln x-x+1$，则$g'(x)=\frac{1-x}{x}$，令$g'(x)=0$得，$x=1$.

当$x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，

所以$x=1$为极大值点，且$g(x)$在$x=1$处取得最大值.

所以$g(x)\leq g(1)=0$，即$\ln x-x+1\leq 0$. 故$f(x)\leq x^2+x-1$.

（3）证明：$\ln x\leq x-1$（当且仅当$x=1$时等号成立），即$\frac{\ln x}{x}\leq 1-\frac{1}{x}$，

则有$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}<1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{3^2}+\cdots+1-\frac{1}{n^2}=n-1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$

$<n-1-\left(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$，

故：$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}=\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$.

15.（Ⅰ）由$f'(x)=\frac{1}{x}-m=\frac{1-mx}{x}$，

若$m\leq 0$，则当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；

若$m>0$，则当$x\in\left(0,\frac{1}{m}\right)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

当$x\in\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，

所以当$m\leq 0$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$；

当$m>0$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{m}\right)$，单调递减区间为$\left(\frac{1}{m},+\infty\right)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $m=1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，最大值为 $f\left(1\right)=0$，

所以当 $x\neq1$ 时，$\ln x<x-1$，

故当 $x\in\left(1,+\infty\right),\ln x<x-1$，$\therefore 1<\dfrac{x-1}{\ln x}$.

又 $\ln\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x}-1$，即 $\dfrac{x-1}{\ln x}<x$，故 $1<\dfrac{x-1}{\ln x}<x$.

（Ⅲ）当 $m=1$ 时，$f\left(x\right)=\ln x-x+1\le0$，即 $\ln x\le x-1$，

则有 $\ln\left(x+1\right)\le x$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，

$\therefore \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)<\dfrac{1}{2^k},k\in\mathbf{N}^*$.

一方面：$=\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}<1$，

即 $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}$.

另一方面：当 $n\ge3$ 时 $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)>\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)=\dfrac{135}{64}>2$，

当 $n\ge3$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)\in(2,\mathrm{e})$.

$\because t\in\mathbf{N}^*,\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<t$

$\therefore t$ 的最小正整数值为 3.

四、证明不等式 4：指数✖对数

16.：（1）函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，$f'(x)=ae^x\ln x+\dfrac{a}{x}e^x-\dfrac{b}{x^2}e^{x-1}+\dfrac{b}{x}e^{x-1}$.

由题意可得 $f(1)=2$，$f'(1)=e$. 故 $a=1$，$b=2$.

（2）证明：由（1）知，$f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2}{x}e^{x-1}$，从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$.

设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$.

所以当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，从而 $g(x)$ 在 $0,+\infty$ 上的最小值为 $g(\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$. 故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

从而 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 $h(1)=-\dfrac{1}{e}$.

综上，当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

17:（1）依题意，$f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，1 分

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{x^2}=\frac{x-2a}{x^2}$， ………………………………………………………………………… 2 分

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数； ………………………………… 3 分

②若 $a>0$，当 $x>2a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数；当 $0<x<2a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数． 4 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,2a)$ 上为减函数，在区间 $(2a,+\infty)$ 上为增函数． ………………………………………………………………………………………… 5 分

（2）要证 $f(x)>\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}$，只要证 $\ln x+\frac{2a}{x}>\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}$，即证 $x\ln x-\frac{x}{2}+2a>x\,\mathrm{e}^{-x}$，

……… 7 分

下证 $x\ln x-\frac{x}{2}+2a>x\,\mathrm{e}^{-x}$，

令 $g(x)=x\ln x-\frac{x}{2}+2a$， $g'(x)=\ln x+1-\frac{1}{2}=\ln x+\frac{1}{2}$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数；当 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数， 8 分

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}-\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}+2a=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+2a$， ……………………………… 9 分

又 $a\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $g(x)\geqslant-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+2a\geqslant-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+1$． ……………………………………… 10 分

令 $h(x)=x\mathrm{e}^{-x}$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为增函数；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为减函数，

所以 $h(x)_{\max}=h(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$． ………………………………………………………………… 11 分

由参考数据可知 $\left(-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+1\right)-\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}}>0$，即 $-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+1>\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以 $g(x)>h(x)$，即 $x\ln x-\frac{x}{2}+2a>x\,\mathrm{e}^{-x}$，

所以 $f(x)>\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}$． ………………………………………………………………………… 12 分

18.（1）由题意，函数 $h(x)=f(x)-\mathrm{e}^x\left(1+\frac{2}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^x(x\ln x-1)$，其定义域为 $(0,+\infty)$，

可得 $h'(x)=e^x(x+1)\ln x$，

令 $h'(x)<0$，解得 $0<x<1$；令 $h'(x)>0$，解得 $x>1$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

（2）要证 $f(x)-x>0$，即要证 $e^x\left(x\ln x+\frac{2}{e}\right)>x$，即证明 $x\ln x+\frac{2}{e}>\frac{x}{e^x}$.

令 $F(x)=x\ln x+\frac{2}{e}(x>0)$，则 $F'(x)=\ln x+1$.

由$F'(x)<0$，解得$0<x<\frac{1}{e}$；由$F'(x)>0$，解得$x>\frac{1}{e}$.

所以$F(x)$在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，$F(x)_{\min}=F\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}+\frac{2}{e}=\frac{1}{e}$.

令$G(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$，则$G'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

由$G'(x)<0$，解得$x>1$；由$G'(x)>0$，解得$0<x<1$.

所以$G(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，$G(x)_{\max}=G(1)=\frac{1}{e}$，

所以$F(x)\geq\frac{1}{e}\geq G(x)$，且等号不同时取得，即$x\ln x+\frac{2}{e}>\frac{x}{e^x}$成立，

所以$f(x)-x>0$.

19.

20.（1）解：由题意可知$f'(x)=\frac{1-x-a}{e^x}$，

因为函数$f(x)$的图像在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=x$，

所以$f'(0)=1-a=1$，即$a=0$，　　　　（2分）

所以$f(x)=\frac{x}{e^x}$，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

令$f'(x)=0$，得$x=1$.

当$x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减.　　　　（4分）

（2）证明：令$g(x)=x\ln x$，则$g'(x)=1+\ln x$，

令$g'(x)=1+\ln x=0$，则$x=\frac{1}{e}$.

当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$，函数$g(x)$单调递减；

当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，函数$g(x)$单调递增.

所以$g(x)\geq g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

由（1）可得在区间$(0,+\infty)$内，$f(x)_{\max}=f(1)=\frac{1}{e}$，

则$\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}\leq\frac{1}{e}-\frac{2}{e}=-\frac{1}{e}$，

所以$x\ln x>\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$.①　　　　（8分）

记$h(x)=x-\ln(x+1)(x>0)$，

则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)>h(0)=0$，

即 $x>\ln(x+1)$，

所以 $\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2}{e}>\dfrac{\ln(x+1)}{e^x}-\dfrac{2}{e}$.②

由①②得 $x\ln x>\dfrac{\ln(x+1)}{e^x}-\dfrac{2}{e}$.　　　　　　　　　　（12 分）

20【解析】:（1）$\because f(x)=\ln x-e^{1-x}(x>0)$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{e}{x^x}>0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

又 $f(1)=-1<0$，$f(e)=1-e^{1-e}=1-\dfrac{e}{e^e}>0$，

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在 $(1,e)$ 内存在零点，所以 $y=f(x)$ 的零点的个数为1.

（2）由题意得 $h(x)=a(x^2-1)-\dfrac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{e^x}=ax^2-a-\ln x(x>0)$，

$\therefore h'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-1}{x}$.

当 $a\le 0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，由 $h'(x)=0$，解得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$（舍去负值），

所以 $x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

综上：当 $a\le 0$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

当 $a>0$ 时，$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 单调递增.

（3）由题意得 $\ln x-\dfrac{e}{e^x}<a(x^2-1)-\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，$\therefore a(x^2-1)-\ln x>\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{e^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，

设 $k(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{e^x}=\dfrac{e^x-ex}{xe^x}$，令 $k_1(x)=e^x-ex$，则 $k_1'(x)=e^x-e$，

当 $x>1$ 时，$k_1'(x)>0$，$k_1(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

$k_1(x)>k_1(1)=0$，即 $k(x)>0$，

若$a\le 0$，由于$x>1$，故$a\left(x^2-1\right)-\ln x<0$，所以$f\left(x\right)<g\left(x\right)$不成立，

故当$f\left(x\right)<g\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$恒成立时，必有$a>0$.

当$a>0$时，设$h\left(x\right)=a\left(x^2-1\right)-\ln x$，

①当$\frac{1}{\sqrt{2a}}>1$，即$0<a<\frac{1}{2}$时，

由（2）知$x\in\left(1,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$，$h\left(x\right)$单调递减，$x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$，$h\left(x\right)$单调递增，

因此$h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)<h\left(1\right)=0$，而$k\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)>0$，即存在$x=\frac{1}{\sqrt{2a}}>1$，使$f\left(x\right)<g\left(x\right)$，

故当$0<a<\frac{1}{2}$时，$f\left(x\right)<g\left(x\right)$不恒成立.

②当$\frac{1}{\sqrt{2a}}\le 1$，即$a\ge\frac{1}{2}$时，

设$s\left(x\right)=a\left(x^2-1\right)-\ln x-\frac{1}{x}+\frac{e}{e^x}$，则$s'\left(x\right)=2ax-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{e}{e^x}$，

由于$2ax\ge x$且$k_1\left(x\right)=e^x-ex>0$，即$\frac{e}{e^x}<\frac{1}{x}$，故$-\frac{e}{e^x}>-\frac{1}{x}$，

因此$s'\left(x\right)>x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}$ $>\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2}>0$，故$s\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$单调递增.

所以$s\left(x\right)>s\left(1\right)=0$时，即$a\ge\frac{1}{2}$时，$f\left(x\right)<g\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$恒成立.

综上：当$a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，$f\left(x\right)<g\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$恒成立.

21.【解析】:（1）当$a=-2$时，$f\left(x\right)=\ln x-\frac{2}{x}-x,\ f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-1=-\frac{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{x^2}$，

$\therefore$当$x\in\left(0,2\right)$时，$f'\left(x\right)>0$；当$x\in\left(2,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)<0$.

$\therefore$ $f\left(x\right)$在$\left(0,2\right)$上单调递增，在$\left(2,+\infty\right)$上单调递减.

$\therefore$ $f\left(x\right)$在$x=2$处取得极大值$f\left(2\right)=\ln 2-3,\ f\left(x\right)$无极小值

（2）当$a=1$时，$f\left(x\right)-\frac{1}{e^x}+x=\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x}$，

下面证$\ln x+\frac{1}{x}>\frac{1}{e^x}$，即证$x\ln x+1>\frac{x}{e^x}$.

设$g\left(x\right)=x\ln x+1$，则$g'\left(x\right)=1+\ln x$，

在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上，$g'(x)<0, g(x)$是减函数；在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上，$g'(x)>0, g(x)$是增函数.

所以$g(x)\geq g\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{e}$.

设$h(x)=\frac{x}{e^x}$，　则$h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

在$(0,1)$上，$h'(x)>0, h(x)$是增函数；在$(1,+\infty)$上，$h'(x)<0, h(x)$是减函数，

所以$h(x)\leq h(1)=\frac{1}{e}<1-\frac{1}{e}$.

所以$h(x)<g(x)$，即$\frac{x}{e^x}<x\ln x+1$，所以$x\ln x+1-\frac{x}{e^x}>0$，即$\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x}>0$，

即 $f(x)-\frac{1}{e^x}+x>0$在$(0,+\infty)$上恒成立.