

高三数学一轮复习——概率解答题——概率与函数

1. 甲、乙两人参加一个游戏，该游戏设有奖金 256 元，谁先赢满 5 局，谁便赢得全部的奖金，已知每局游戏乙赢的概率为 p ($0 < p < 1$)，甲赢的概率为 $1-p$ ，每局游戏相互独立，在乙赢了 3 局甲赢了 1 局的情况下，游戏设备出现了故障，游戏被迫终止，则奖金应该如何分配才为合理？有专家提出如下的奖金分配方案：如果出现无人先赢 5 局且游戏意外终止的情况，则甲、乙按照游戏再继续进行下去各自赢得全部奖金的概率之比 $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}$ 分配奖金.

(1) 若 $p = \frac{3}{4}$ ，则乙应该得多少奖金；

(2) 记事件 A 为“游戏继续进行下去甲获得全部奖金”，试求当游戏继续进行下去，甲获得全部奖金的概率 $f(A)$ ，并判断当 $p \geq \frac{2}{3}$ 时，事件 A 是否为小概率事件，并说明理由. (注：若随机事件发生的概率小于 0.05，则称随机事件为小概率事件)

2. 在某地区进行某种疾病调查，需要对其居民血液进行抽样化验，若结果呈阳性，则患有该疾病；若结果为阴性，则未患有该疾病. 现有 n ($n \in \mathbf{N}_+$, $n \geq 2$) 个人，每人一份血液待检验，有如下两种方案：

方案一：逐份检验，需要检验 n 次；

方案二：混合检验，将 n 份血液分别取样，混合在一起检验，若检验结果呈阴性，则 n 个人都未患有该疾病；若检验结果呈阳性，再对 n 份血液逐份检验，此时共需要检验 $n+1$ 次.

(1) 若 $n=5$ ，且其中两人患有该疾病，采用方案一，求恰好检验 3 次就能确定患病两人的概率；

(2) 已知每个人患该疾病的概率为 p ($0 \leq p \leq 1$).

(i) 若两种方案检验总次数的期望值相同，求 p 关于 n 的函数解析式 $p = f(n)$ ；

(ii) 若 $n=8$ ，且每单次检验费用相同，为降低总检验费用，选择哪种方案更好？试说明理由.

3. 学校的“智慧”书屋每学年初向高一新生招募 30 名左右的志愿者.2021 学年初, 新高一学生报名踊跃, 报名人数达到 60 人. 现有两个方案确定志愿者: 方案一: 用抽签法随机抽取 30 名志愿者; 方案二: 将 60 名报名者编号, 用随机数法先从这 60 个编号中随机抽取 45 个, 然后再次用随机数法从这 60 个编号中随机抽取 45 个, 两次都被抽取到的报名者成为志愿者.

(1) 采用方案一或二, 分别记报名者甲同学被抽中为事件 A 和事件 B, 求事件 A 和事件 B 发生的概率;

(2) 若采用方案二, 设报名者甲同学被抽取到的次数为 X , 求 X 的数学期望;

(3) 不难发现采用方案二确定的志愿者人数不少于方案一的 30 人. 若采用方案二, 记两次都被抽取到的人数为 Y , 则 Y 的可取值是哪些? 其中 Y 取到哪一个值的可能性最大?

4. 某单位为患病员工集体筛查新型流感病毒, 需要去某医院检验血液是否为阳性, 现有 $k(k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2)$ 份血液样本, 有以下两种检验方案, 方案一: 逐份检验, 则需要检验 k 次; 方案二: 混合检验, 将 k 份血液样本分别取样混合在一起检验一次, 若检验结果为阴性, 则 k 份血液样本均为阴性, 若检验结果为阳性, 为了确定 k 份血液中的阳性血液样本, 则对 k 份血液样本再逐一检验逐份检验和混合检验中的每一次检验费用都是 $a(a > 0)$ 元, 且 k 份血液样本混合检验一次需要额外收 $\frac{5}{4}a$ 元的材料费和服务费. 假设在接受检验的血液样本中, 每份样本是否为阳性是相互独立的, 且据统计每份血液样本是阳性的概率为 $p(0 < p < 1)$.

(1) 假设有 5 份血液样本, 其中只有 2 份样本为阳性, 若采用逐份检验的方式, 求恰好经过 3 次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率.

(2) 若 $k(k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2)$ 份血液样本采用混合检验方案, 需要检验的总次数为 X , 求 X 分布列及数学期望;

(3) ①若 $k = 10, 0 < p < 1 - \sqrt[10]{0.225}$, 以检验总费用为决策依据, 试说明该单位选择方案二的合理性;

②若 $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[10]{e}}$, 采用方案二总费用的数学期望低于方案一, 求 k 的最大值.

参考数据: $\ln 2 \approx 0.7, \ln 3 \approx 1.1, \ln 5 \approx 1.6, \ln 11 \approx 2.4$

5. 我国某芯片企业使用新技术对一款芯片进行试产，设试产该款芯片的次品率为 p ($0 < p < 1$)，且各个芯片的生产互不影响。

(1) 试产该款芯片共有两道工序，且互不影响，其次品率依次为， $p_1 = \frac{1}{33}, p_2 = \frac{1}{34}$ 。

① 求 p ；

② 现对该款试产的芯片进行自动智能检测，自动智能检测为次品（注：合格品不会被误检成次品）的芯片会被自动淘汰，然后再进行人工抽检已知自动智能检测显示该款芯片的合格率为 96%，求人工抽检时，抽检的一个芯片是合格品的概率。

(2) 视 p 为概率，记从试产的芯片中随机抽取 n 个恰含 m ($n > m$) 个次品的概率为 $f(p)$ ，求证： $f(p)$ 在 $p = \frac{m}{n}$ 时取得最大值。

6. 设 $f(x) = a \ln(x+1)$ ， $g(x) = x - x^2$ ，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=0$ 处有相同的切线。

(1) 求 a 的值；

(2) 求证：当 $x > 0$ 时， $\frac{f(x)}{x} - g(x) > 0$ ；

(3) 若一个盒子里装有 n ($n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$) 个不同的彩色球，其中只有一个白球，每次从中随机抽取一个，然后放回，只要取到白球就停止抽取，记抽取 2 次就中止的概率为 $P_n(2)$ ，抽取 3 次就中止的概率为 $P_n(3)$ ，设 $P_n = P_n(2) - P_n(3)$

($n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$)，求证： $P_2 + P_3 + \cdots + P_n < \ln \frac{n+1}{2}$ 。

7. 非物质文化遗产是一个国家和民族历史文化成就的重要标志，是优秀传统文化的重要组成部分。瑞昌剪纸于 2008 年列入第二批国家级非物质文化遗产名录。由于瑞昌地处南北交汇处，经过千年的南北文化相互浸润与渗透，瑞昌剪纸融入了南方的阴柔之丽、精巧秀美和北方的阳刚之美、古朴豪放。为了弘扬中国优秀的传统文化，某校将举办一次剪纸比赛，共进行 5 轮比赛，每轮比赛结果互不影响。比赛规则如下：每一轮比赛中，参赛者在 30 分钟内完成规定作品和创意作品各 2 幅，若有不少于 3 幅作品入选，将获得“巧手奖”。5 轮比赛中，至少获得 4 次“巧手奖”的同学将进入决赛。某同学经历多次模拟训练，指导老师从训练作品中随机抽取规定作品和创意作品各 5 幅，其中有 4 幅规定作品和 3 幅创意作品符合入选标准。

- (1) 从这 10 幅训练作品中，随机抽取规定作品和创意作品各 2 幅，试预测该同学在一轮比赛中获“巧手奖”的概率；
(2) 以上述两类作品各自入选的频率作为该同学参赛时每幅作品入选的概率。经指导老师对该同学进行赛前强化训练，规定作品和创意作品入选的概率共提高了 $\frac{1}{10}$ ，以获得“巧手奖”的次数期望为参考，试预测该同学能否进入决赛？

8. 公元 1651 年，法国学者德梅赫向数学家帕斯卡请教了一个问题：设两名赌徒约定谁先赢满 4 局，谁便赢得全部赌注 a 元，已知每局甲赢的概率为 $p(0 < p < 1)$ ，乙赢的概率为 $1-p$ ，且每局赌博相互独立，在甲赢了 2 局且乙赢了 1 局后，赌博意外终止，则赌注该怎么分才合理？帕斯卡先和费尔马讨论了这个问题，后来惠更斯也加入了讨论，这三位当时欧洲乃至全世界著名的数学家给出的分配赌注的方案是：如果出现无人先赢 4 局且赌博意外终止的情况，则甲、乙按照赌博继续进行下去各自赢得全部赌注的概率之比 $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}$ 分配赌注。（友情提醒：珍爱生命，远离赌博）

- (1) 若 $a = 243, p = \frac{2}{3}$ ，甲、乙赌博意外终止，则甲应分得多少元赌注？
(2) 若 $p \geq \frac{4}{5}$ ，求赌博继续进行下去甲赢得全部赌注的概率 $f(p)$ ，并判断“赌博继续进行下去乙赢得全部赌注”是否为小概率事件（发生概率小于 0.05 的随机事件称为小概率事件）。

高三数学一轮复习——概率解答题——概率与函数

1. (1) 设游戏再继续进行下去 X 局乙赢得全部奖金, 则最后一局必然乙赢.

由题知, 当 $X=2$ 时, 乙以 5:1 赢, 所以 $P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$,

当 $X=3$ 时, 乙以 5:2 赢, 所以 $P(X=3) = \frac{3}{4} \times C_2^1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{18}{64}$,

当 $X=4$ 时, 乙以 5:3 赢, 所以 $P(X=4) = \frac{3}{4} \times C_3^1 \times \frac{3}{4} \times (\frac{1}{4})^2 = \frac{27}{256}$,

当 $X=5$ 时, 乙以 5:4 赢, 所以 $P(X=5) = \frac{3}{4} \times C_4^1 \times \frac{3}{4} \times (\frac{1}{4})^3 = \frac{9}{256}$,

所以乙赢得全部奖金的概率为 $\frac{9}{16} + \frac{18}{64} + \frac{27}{256} + \frac{9}{256} = \frac{252}{256}$,

所以乙应该得多少奖金为 $256 \times \frac{252}{256} = 252$ (元).

(2) 设游戏继续进行 Y 局甲获得全部奖金, 则最后一局必然甲赢.

由题知, 当 $Y=4$ 时, 甲以 5:3 赢, 所以 $P(Y=4) = (1-p)^4$,

当 $Y=5$ 时, 甲以 5:4 赢, 所以 $P(Y=5) = (1-p) \times C_4^3 \times (1-p)^3 p = 4(1-p)^4 p$,

甲获得全部奖金的概率 $f(A) = (1-p)^4 + 4(1-p)^4 p = (4p+1)(1-p)^4$,

所以 $f(A) = (1-p)^4 + 4(1-p)^4 p = (4p+1)(1-p)^4, p \in [\frac{2}{3}, 1)$,

所以 $f'(A) = 4(1-p)^4 - (4p+1)4(1-p)^3 = 4(1-p)^3(1-p-4p-1) = -20(1-p)^3 p$,

$\therefore p \in [\frac{2}{3}, 1), \therefore f'(A) = -20(1-p)^3 p < 0$,

$\therefore f(A)$ 在 $[\frac{2}{3}, 1)$ 上单调递减, 所以 $f(A)_{\max} = f(\frac{2}{3}) = \frac{11}{3} \times (\frac{1}{3})^4 = \frac{11}{3^5} \approx 0.045 < 0.05$,

故事件 A 是小概率事件.

2. (1) 将 5 份待检血液排成一排有 $A_5^5 = 120$;

满足条件的排法: 第一步, 将两份选一份排在第三位有 2 种;

第二步, 在第一、二位选一个空位排另一份患者血液有 2 种排法;

第三步, 将剩余 3 份排成一排有 $A_3^3 = 6$.

所以满足条件的排法共 $2 \times 2 \times 6 = 24$. 所以恰好检验 3 次就能确定患病两人的概率为 $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

(2) (i) 因为每个人都有可能患病, 故方案一检验次数为定值 n ;

记方案二检验次数为 X , 则 X 的取值为 1, $n+1$

$P(X=1) = (1-p)^n, P(X=n+1) = 1 - (1-p)^n$, 所以 $E(X) = (1-p)^n + (n+1)[1 - (1-p)^n]$

由题可知 $(1-p)^n + (n+1)[1 - (1-p)^n] = n$, 即 $n(1-p)^n = 1$, 整理可得 $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, 即 $p = f(n) = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(ii) 当 $n=8$ 时, 记单次检验费用为 x ,

则方案一: 检验费用为 nx ;

方案二: 记检验费为 Y , 则 Y 的分布列为

Y	x	$(n+1)x$
P	$(1-p)^n$	$1 - (1-p)^n$

则 $E(Y) = x(1-p)^n + (n+1)x[1 - (1-p)^n] = [n+1 - n(1-p)^n]x$

$E(Y) - nx = [n+1 - n(1-p)^n]x - nx = [1 - n(1-p)^n]x$

记 $g(p) = 1 - n(1-p)^n$, 因为 $n=8$, 所以 $g(p) = 1 - 8(1-p)^8$

因为 $0 < 1-p < 1$, 所以 $g(p)$ 单调递增,

由 (i) 知, 当 $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[8]{8}}$ 时, $g(p) = 0$,

所以当 $0 < p < 1 - \frac{1}{\sqrt[8]{8}}$ 时, $g(p) < 0$, 则 $E(Y) < nx$;

当 $1 - \frac{1}{\sqrt[8]{8}} < p < 1$ 时, $g(p) > 0$, 则 $E(Y) > nx$.

故当 $0 < p < 1 - \frac{1}{\sqrt[8]{8}}$ 时, 选择方案二; 当 $1 - \frac{1}{\sqrt[8]{8}} < p < 1$ 时, 选择方案一.

3. (1) 抽签法随机抽取 30 名志愿者含甲的概率为 $P(A) = \frac{C_{59}^{29}}{C_{60}^{30}} = \frac{1}{2}$,

随机数法抽取 45 名志愿者含甲的概率为 $P(B) = \left(\frac{C_{59}^{44}}{C_{60}^{45}} \right)^2 = \frac{9}{16}$.

(2) 由 (1) 知: 甲每次被抽到的概率均为 $\frac{C_{59}^{44}}{C_{60}^{45}} = \frac{3}{4}$, 则 $X \sim B\left(2, \frac{3}{4}\right)$. 所以 $E(X) = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

(3) 设两次都被抽到的人数为随机变量 Y , 则 $30 \leq Y \leq 45 (Y \in \mathbf{N}^*)$,

故 $P(Y = n) = \frac{C_{60}^n C_{60-n}^{45-n} C_{15}^{45-n}}{C_{60}^{45} C_{60}^{45}}, 30 \leq n \leq 45, n \in \mathbf{N}^*$.

令 $f(n) = C_{60}^n C_{60-n}^{45-n} C_{15}^{45-n} = \frac{60!}{(60-n)!n!} \cdot \frac{(60-n)!}{(45-n)!15!} \cdot \frac{15!}{(45-n)!(n-30)!} = \frac{60!}{[(45-n)!]^2 n! (n-30)!}$,

故 $\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{60!}{[(44-n)!]^2 (n+1)!(n-29)!} \times \frac{[(45-n)!]^2 n! (n-30)!}{60!} = \frac{(45-n)^2}{(n+1)(n-29)}$,

令 $\frac{f(n+1)}{f(n)} > 1$ 则 $(45-n)^2 - (n+1)(n-29) = 2054 - 62n > 0$, 即 $n \leq 33$,

当 $n \leq 33$ 时, $f(n+1) > f(n)$; 当 $n \geq 34$ 时, $f(n+1) < f(n)$.

因此, $n = 34$ 时 $f(n)$ 最大, 即 $P(Y = 34)$ 最大,

所以 Y 取到 34 的可能性最大.

4. (1) 记恰好经过 3 次检验就能把阳性样本全部检验出来为 A 事件, 则 $P(A) = \frac{A_3^3 + C_2^1 A_2^2 C_3^1}{A_5^3} = \frac{3}{10}$.

(2) X 的可能值为 1 和 $k+1$, $P(X = 1) = (1-p)^k, P(X = k+1) = 1 - (1-p)^k$,

所以随机变量 X 的分布列为:

X	1	$k+1$
P	$(1-p)^k$	$1 - (1-p)^k$

所以 $E(X) = 1 \times (1-p)^k + (k+1) \times [1 - (1-p)^k] = k+1 - k(1-p)^k$

(3) ① 设方案二的总费用的数学期望为 $E(Y)$, 方案一总费用为 Z ,

所以方案二总费用的数学期望为: $E(Y) = aE(X) + \frac{5}{4}a = a[k+1 - k(1-p)^k] + \frac{5}{4}a$,

又 $k=10$, 所以 $E(Y) = a[11 - 10(1-p)^{10}] + \frac{5}{4}a = -10a(1-p)^{10} + \frac{49}{4}a$,

又方案一的总费用为 $Z = 10a$, 所以 $Z - E(Y) = a \cdot \left[10(1-p)^{10} - \frac{9}{4} \right]$,

当 $0 < p < 1 - \sqrt[10]{0.225}$ 时, $\frac{9}{40} < (1-p)^{10} < 1$, $0 < 10(1-p)^{10} - \frac{9}{4}$, 又 $a > 0$,

所以 $Z > E(Y)$, 所以该单位选择方案二合理.

② 由 ① 知方案二总费用的数学期望 $E(Y) = aE(X) + \frac{5}{4}a = a[k+1 - k(1-p)^k] + \frac{5}{4}a$,

当 $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[7]{e}}$ 时, $E(Y) = a \left[k+1 - k \left(\frac{1}{\sqrt[7]{e}} \right)^k \right] + \frac{5}{4}a = a \left(k + \frac{9}{4} - ke^{\frac{k}{7}} \right)$,

又方案一的总费用为 $Z = ak$, 令 $E(Y) < Z$ 得: $a \left(k + \frac{9}{4} - ke^{\frac{k}{7}} \right) < ak$,

所以 $a \left(k + \frac{9}{4} - ke^{\frac{k}{7}} \right) < ak$, 即 $ke^{\frac{k}{7}} > \frac{9}{4}$, 即 $\ln \left(ke^{\frac{k}{7}} \right) > \ln \frac{9}{4}$, 所以 $\ln k - \frac{k}{7} - \ln \frac{9}{4} > 0$,

设 $f(x) = \ln x - \frac{x}{7} - \ln \frac{9}{4}$, $x \in [2, +\infty)$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{7} = \frac{7-x}{7x}$, $x \in [2, +\infty)$,

令 $f'(x) > 0$ 得 $2 \leq x < 7$, $f'(x) < 0$ 得 $x > 7$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[2, 7)$ 上单调递增, 在区间 $(7, +\infty)$ 上单调递减,

$f(x)_{\max} = f(7) = \ln 7 - 1 - 2(\ln 3 - \ln 2) = 0.1 > 0$,

$f(8) = 3\ln 2 - \frac{8}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) = 5\ln 2 - 2\ln 3 - \frac{8}{7} = 1.3 - \frac{8}{7} > 0$,

$f(9) = 2\ln 3 - \frac{9}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln 2 - \frac{9}{7} = 1.4 - \frac{9}{7} > 0$,

$f(10) = \ln 10 - \frac{10}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) = 1.5 - \frac{10}{7} > 0$,

$f(11) = \ln 11 - \frac{11}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) = 1.6 - \frac{11}{7} > 0$,

$f(12) = \ln 12 - \frac{12}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) = 4\ln 2 - \ln 3 - \frac{12}{7} = 1.7 - \frac{12}{7} < 0$, 所以 k 的最大值为 11.

5. (1) ①因为两道生产工序互不影响,

法一: 所以 $p = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{33}\right) \times \left(1 - \frac{1}{34}\right) = \frac{1}{17}$.

法二: 所以 $p = \frac{1}{33} \times 1 + \left(1 - \frac{1}{33}\right) \times \frac{1}{34} = \frac{1}{17}$.

故该款芯片的次品率为 $\frac{1}{17}$;

②记该款芯片自动智能检测合格为事件 A , 人工抽检合格为事件 B , 且 $P(A) = 96\%$, $P(AB) = 1 - p = \frac{16}{17}$.

则人工抽检时, 抽检的一个芯片恰是合格品的概率: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{16}{17}}{96\%} = \frac{50}{51}$.

故人工抽检时, 抽检的一个芯片恰是合格品的概率为 $\frac{50}{51}$;

(2) 因为各个芯片的生产互不影响, 所以 $f(p) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ ($0 < p < 1$),

所 $f'(p) = C_n^m [mp^{m-1}(1-p)^{n-m} - (n-m)p^m(1-p)^{n-m-1}] = C_n^m p^{m-1}(1-p)^{n-m-1}(m-np)$. 令 $f'(p) = 0$, 得 $p = \frac{m}{n}$,

所以当 $0 < p < \frac{m}{n}$ 时, $f'(p) > 0$, $f(p)$ 为单调增函数; 当 $\frac{m}{n} < p < 1$ 时, $f'(p) < 0$, $f(p)$ 为单调减函数,

所以, 当 $p = \frac{m}{n}$ 时, $f(p)$ 取得最大值.

6. (1) $f'(x) = \frac{a}{x+1}$, $g'(x) = 1 - 2x$, 由题可知: $f(0) = g(0) \Rightarrow a = 1$

(2) 当 $x > 0$ 时, $\frac{\ln(x+1)}{x} - x + x^2 > 0$ 等价于证明: $\ln(x+1) - x^2 + x^3 > 0$

设 $h(x) = \ln(x+1) - x^2 + x^3$, $h'(x) = \frac{1}{x+1} - 2x + 3x^2 = \frac{3x^3 + (x-1)^2}{x+1}$,

所以当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立, 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增,

又 $h(0) = 0$, 则 $h(x) = \ln(x+1) - x^2 + x^3 > h(0) = 0$, 故不等式得证.

(3) 由题: $P_n(2) = \frac{n-1}{n^2}$, $P_n(3) = \frac{(n-1)^2}{n^3}$, 故 $P_n = \frac{n-1}{n^2} - \frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$

由 (2) 可知, 当 $x = \frac{1}{n}$ 时, $\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \ln \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$

故: $P_2 + P_3 + \cdots + P_n < \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \frac{n+1}{2}$, 得证.

7. (1) 由题可知, 所有可能的情况有:

①规定作品入选 1 幅, 创意作品入选 2 幅的概率 $P_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{3}{25}$,

②规定作品入选 2 幅, 创意作品入选 1 幅的概率 $P_2 = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{9}{25}$,

③规定作品入选 2 幅, 创意作品入选 2 幅的概率 $P_3 = \frac{C_4^2 \cdot C_3^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{9}{50}$,

故所求的概率 $P = \frac{3}{25} + \frac{9}{25} + \frac{9}{50} = \frac{33}{50}$.

(2) 设强化训练后, 规定作品入选的概率为 p_1 , 创意作品入选的概率为 p_2 , 则 $p_1 + p_2 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{2}$,

由已知可得, 强化训练后该同学某一轮可获得“巧手奖”的概率为:

$$P = C_2^1 p_1 (1-p_1) \cdot C_2^2 p_2^2 + C_2^2 p_1^2 \cdot C_2^1 p_2 (1-p_2) + C_2^2 p_1^2 \cdot C_2^2 p_2^2 = 2p_1 p_2 (p_1 + p_2) - 3(p_1 p_2)^2 = 3p_1 p_2 - 3(p_1 p_2)^2$$

$$\because p_1 + p_2 = \frac{3}{2}, \text{ 且 } p_1 \geq \frac{4}{5}, p_2 \geq \frac{3}{5}, \text{ 也即 } \frac{3}{2} - p_2 \geq \frac{4}{5}, \frac{3}{2} - p_1 \geq \frac{3}{5}, \text{ 即 } p_2 \leq \frac{7}{10}, p_1 \leq \frac{9}{10}$$

$$\text{故可得: } \frac{4}{5} \leq p_1 \leq \frac{9}{10}, \frac{3}{5} \leq p_2 \leq \frac{7}{10}, p_1 \cdot p_2 = p_1 \left(\frac{3}{2} - p_1 \right) = -\left(p_1 - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{9}{16}, \therefore p_1 \cdot p_2 \in \left[\frac{27}{50}, \frac{14}{25} \right],$$

$$\text{令 } p_1 p_2 = t, \text{ 则 } P(t) = -3t^2 + 3t = -3 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \text{ 在 } \left[\frac{27}{50}, \frac{14}{25} \right] \text{ 上单调递减, } \therefore P(t) \leq P \left(\frac{27}{50} \right) = -3 \times \left(\frac{2}{50} \right)^2 + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}.$$

$$\because \text{该同学在 5 轮比赛中获得“巧手奖”的次数 } X \sim B(5, P), \therefore E(X) = 5P < 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} < 4, \text{ 故该同学没有希望进入决赛.}$$

8. (1) 设赌博再继续进行 X 局且甲赢得全部赌注, 则最后一局必然甲赢

由题意知, 最多再进行 4 局, 甲、乙必然有人赢得全部赌注.

$$\text{当 } X=2 \text{ 时, 甲以 } 4:1 \text{ 赢, 所以 } P(X=2) = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9};$$

$$\text{当 } X=3 \text{ 时, 甲以 } 4:2 \text{ 赢, 所以 } P(X=3) = C_2^1 \cdot \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27};$$

$$\text{当 } X=4 \text{ 时, 甲以 } 4:3 \text{ 赢, 所以 } P(X=4) = C_3^1 \cdot \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3} \right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}.$$

$$\text{所以, 甲赢的概率为 } \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{4}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}.$$

$$\text{所以, 甲应分得的赌注为 } 243 \times \frac{8}{9} = 216 \text{ 元}$$

(2) 设赌注继续进行 Y 局乙赢得全部赌注, 则最后一局必然乙赢, 则 Y 的可能取值有 3、4,

$$\text{当 } Y=3 \text{ 时, 乙以 } 4:2 \text{ 赢, } P(Y=3) = (1-p)^3;$$

$$\text{当 } Y=4 \text{ 时, 乙以 } 4:3 \text{ 赢, } P(Y=4) = C_3^1 p(1-p)^3 = 3p(1-p)^3;$$

所以, 乙赢得全部赌注的概率为

$$P(A) = (1-p)^3 + 3p(1-p)^3 = (1+3p)(1-p)^3$$

$$\text{于是甲赢得全部赌注的概率 } f(p) = 1 - (1+3p)(1-p)^3.$$

$$\text{求导, } f'(p) = -3(1-p)^3 - (1+3p) \cdot 3(1-p)^2(-1) = 12p(1-p)^2.$$

$$\text{因为 } \frac{4}{5} \leq p < 1, \text{ 所以 } f'(p) > 0, \text{ 所以 } f(p) \text{ 在 } \left[\frac{4}{5}, 1 \right) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{于是 } f(p)_{\min} = f \left(\frac{4}{5} \right) = \frac{608}{625}.$$

$$\text{故乙赢的概率最大为 } 1 - \frac{608}{625} = \frac{17}{625} = 0.0272 < 0.05, \text{ 故是小概率事件.}$$