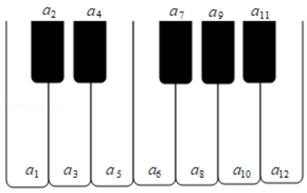
湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列应用与数列文化

角度 1．数列在数学文化与实际问题中的应用

【例 1-1】）某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折．规格为 $20dm\times 12dm$ 的长方形纸，对折 1 次共可以得到 $10dm\times 12dm$，$20dm\times 6dm$ 两种规格的图形，它们的面积之和 $S_1=240dm^2$，对折 2 次共可以得到 $5dm\times 12dm$，$10dm\times 6dm$，$20dm\times 3dm$ 三种规格的图形，它们的面积之和 $S_2=180dm^2$，以此类推．则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为____；如果对折 n 次，那么 $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=$____ dm^2．

【例 1-2】如图，将钢琴上的 12 个键依次记为 a_1，a_2，…，a_{12}．设 $1\leqslant i<j<k\leqslant 12$．若 $k-j=3$ 且 $j-i=4$，则 a_i，a_j，a_k 为原位大三和弦；若 $k-j=4$ 且 $j-i=3$，则称 a_i，a_j，a_k 为原位小三和弦．用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为（　　）



A．5　　B．8　　C．10　　D．15

【例 1-3】（1）我国古代数学著作《九章算术》有如下问题："今有金箠，长五尺，斩本一尺，重四斤，斩末一尺，重二斤，问次一尺各重几何？"意思是："现有一根金箠，长 5 尺，一头粗，一头细，在粗的一端截下 1 尺，重 4 斤，在细的一端截下 1 尺，重 2 斤，问依次每一尺各重多少斤？"设该金箠由粗到细是均匀变化的，其重量为 M，现将该金箠截成长度相等的 10 段，记第 i 段的重量为 $a_i(i=1,2,\ldots,10)$ 且 $a_1<a_2<\cdots<a_{10}$，若 $48a_i=5M$，则 $i=$（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

（2）九连环是我国从古至今广为流传的一种益智游戏，它用九个圆环相连成串，以解开为胜．据明代杨慎《丹铅总录》记载："两环互相贯为一，得其关捩，解之为二，又合而为一．"在某种玩法中，用 a_n 表示解下 $n(n\leq 9,\ n\in N^*)$ 个圆环所需的最少移动次数，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，

且 $a_n=\begin{cases}2a_{n-1}-1，n为偶数\\2a_{n-1}+2，n为奇数\end{cases}$，则解下 4 个环所需的最少移动次数 a_4 为（　　）

A．7　　B．10　　C．12　　D．22

【例 1-3】（2020•全国Ⅱ卷）$0-1$ 周期序列在通信技术中有着重要应用．若序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 满足 $a_i\in\{0,1\}(i=1,2,\cdots)$，且存在正整数 m，使得 $a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$ 成立，则称其为 $0-1$ 周期序列，

并称满足 $a_{i+m}=a_i(i=1,2,\cdots)$ 的最小正整数 m 为这个序列的周期．对于周期为 m 的 $0-1$ 序列 $a_1a_2\cdots a_n\cdots$，

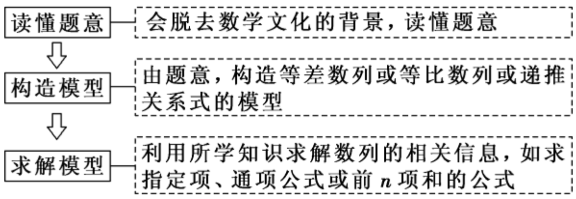
$C(k)=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}a_ia_{i+k}(k=1,2,\cdots,m-1)$ 是描述其性质的重要指标，下列周期为 5 的 $0-1$ 序列中，满足

$C(k)\leq\dfrac{1}{5}(k=1,2,3,4)$ 的序列是（　　）

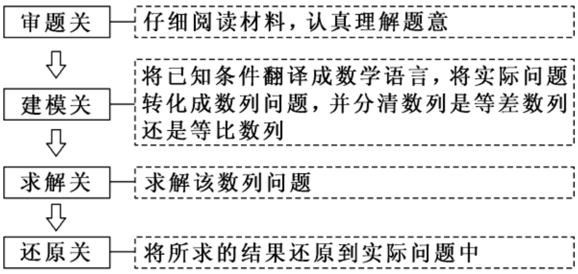
A．11010L　　　　B．11011L　　　　C．10001L　　　　D．11001L

【解题总结】

1．解决数列与数学文化相交汇问题的关键



2．解答数列应用题需过好“四关”



【训练 1】据统计测量，已知某养鱼场，第一年鱼的质量增长率为200%，以后每年的增长率为前一年的一半．若饲养5年后，鱼的质量预计为原来的t倍．下列选项中，与t值最接近的是(　　)

A．11　　　　B．13　　　　C．15　　　　D．17

【训练 2】（多选）意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时，发现有这样一列数：1，1，2，3，5，….，其中从第三项起，每个数等于它前面两个数的和，后来人们把这样的一列数组成的数列$\{a_n\}$称为“斐波那契数列”，记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，则下列结论正确的是（　　）

A．$a_6=8$　　　　B．$S_7=33$

C．$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}=a_{2020}$　　　　D．$\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_{2019}^2}{a_{2019}}=a_{2020}$

角度2．数列中的新定义问题

【例 2-1】若数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=d$($n\in N^*$，$d$为常数)，则称数列$\{a_n\}$为“调和数列”，已知正项数列$\{\dfrac{1}{b_n}\}$为“调和数列”，且$b_1+b_2+\ldots+b_{2021}=20210$，则$b_2b_{2020}$的最大值是________．

【例 2-2】（多选）若数列$\{a_n\}$满足：对任意正整数n，$\{a_{n+1}-a_n\}$为递减数列，则称数列$\{a_n\}$为“差递减数列”．给出下列数列$\{a_n\}\left(n\in N^*\right)$，其中是“差递减数列”的有（　　）

A．$a_n=3n$　　　　B．$a_n=n^2+1$　　　　C．$a_n=\sqrt{n}$　　　　D．$a_n=\ln\dfrac{n}{n+1}$

【解题总结】

1．新定义数列问题的特点

通过给出一个新的数列的概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求考生在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的．

2．新定义问题的解题思路

遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析、运算、验证，使问题得以解决．

【训练3】数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，定义$\{a_n\}$的“优值”为$H_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n}{n}$，现已知$\{a_n\}$的“优值”$H_n=2^n$，则$S_n=$________.

角度3．数列与函数、不等式的综合问题

【例3-1】设函数$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$，正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n=f(\frac{1}{a_{n-1}})(n\in N^*，n\ge 2)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求证：$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}<2$.

【解题总结】

1．数列与函数综合问题的主要类型及求解策略

（1）已知函数条件，解决数列问题，此类问题一般利用函数的性质、图象研究数列问题.

（2）已知数列条件，解决函数问题，解决此类问题一般要利用数列的通项公式、前n项和公式、求和方法等对式子化简变形.

注意数列与函数的不同，数列只能看作是自变量为正整数的一类函数，在解决问题时要注意这一特殊性.

2．数列与不等式综合问题的求解策略

解决数列与不等式的综合问题时，若是证明题，则要灵活选择不等式的证明方法，如比较法、综合法、分析法、放缩法等；若是含参数的不等式恒成立问题，则可分离参数，转化为研究最值问题来解决.

【训练4】等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差$d>0$，a_6和a_8是$f(x)=\frac{15}{4}\ln x+\frac{1}{2}x^2-8x$的极值点，则$S_8=$（　　）

A．-38　　B．38　　C．-17　　D．17

【训练5】已知数列$\{a_n\}$为等比数列，数列$\{b_n\}$为等差数列，且$b_1=a_1=1,b_2=a_1+a_2,a_3=2b_3-6$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=\frac{1}{b_nb_{n+2}}$，数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n，证明：$\frac{1}{5}\le T_n<\frac{1}{3}$.

角度4 数列在实际问题中的应用

现实生活中涉及银行利率、企业股金、产品利润、人口增长、产品产量等问题，常常考虑用数列的知识去解决.

1．数列实际应用中的常见模型

（1）等差模型：如果增加(或减少)的量是一个固定的数，则该模型是等差模型，这个固定的数就是公差；

（2）等比模型：如果后一个量与前一个量的比是一个固定的数，则该模型是等比模型，这个固定的数就是公比；

（3）递推数列模型：如果题目中给出的前后两项之间的关系不固定，随项的变化而变化，则应考虑是第 n 项 a_n 与第 $n+1$ 项 a_{n+1} 的递推关系还是前 n 项和 S_n 与前 $n+1$ 项和 S_{n+1} 之间的递推关系.

2．解决数列实际应用题的 3 个关键点

（1）根据题意，正确确定数列模型；

（2）利用数列知识准确求解模型；

（3）问题作答，不要忽视问题的实际意义.

【例 4-1】某商店投入 81 万元经销某种纪念品，经销时间共 60 天，市场调研表明，该商店在经销这一产品期间第 n 天的利润 $a_n=\begin{cases}1,1\le n\le 20\\ \dfrac{n}{10},21\le n\le 60\end{cases}$（单位：万元，$n\in N^*$）. 为了获得更多的利润，商店将每天获得的利润投入到次日的经营中，记第 n 天的利润率 $b_n=\dfrac{第n天的利润}{这n天的投入资金总和}$. 例如，

$b_3=\dfrac{a_3}{81+a_1+a_2}$.

（1）求 b_1，b_2 的值；

（2）求第 n 天的利润率 b_n .

【解题总结】

（1）在实际问题中建立数列模型时，一般有两种途径：一是从特例入手，归纳猜想，再推广到一般结论；二是从一般入手，找到递推关系，再进行求解.

（2）一般地，涉及递增率或递减率要用等比数列，涉及依次增加或减少要用等差数列，有的问题需通过转化得到等差或等比数列，在解决问题时要往这些方面联系.

【训练 6】大衍数列来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理，数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和，它是中华传统文化中隐藏着的世界数学史上第一道数列题目，该数列从第一项起依次是 $0,2,4,8,12,18,24,32,40,50\cdots$ ，则该数列的第 16 项为（　　）

A．98　　　　B．112　　　　C．144　　　　D．128

【训练 7】为了加强城市环保建设，某市计划用若干年时间更换 5000 辆燃油型公交车，每更换一辆新车，则淘汰一辆旧车，替换车为电力型和混合动力型两种车型．今年年初投入了电力型公交车 128 辆，混合动力型公交车 300 辆；计划以后电力型车每年的投入量比上一年增加 50% ，混合动力型车每年比上一年多投入 a 辆．市政府根据人大代表的建议，要求 5 年内完成全部更换，则 a 的最小值为______