湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明（1）

1．高考对本部分的考查一般有三个层次：

（1）主要考查求导公式，求导法则与导数的几何意义；

（2）导数的简单应用，包括求函数的单调区间、极值、最值等；

（3）综合考查，如零点、证明不等式、恒成立问题、求参数等，包括解决应用问题，将导数内容和传统内容中有关不等式、数列及函数单调性有机结合，设计综合题．

2．利用导数证明不等式问题的求解策略：

（1）直接构造函数法：证明不等式 $f(x)>g(x)$（或 $f(x)<g(x)$）转化为证明 $f(x)-g(x)>0$（或 $f(x)-g(x)<0$），进而构造辅助函数 $h(x)=f(x)-g(x)$；

（2）适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论；

（3）构造"形似"函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数．

3．不等式无法转化为函数的最值问题的求解策略：

证明不等式时，若不等式无法转化为一个函数的最值问题，可以借助两个函数的最值进行证明，求解思路分为如下两类：

（1）想要证明 $f(x)\geq g(x)$ 成立；只需证明 $f(x)\geq h(x)$ 成立且 $h(x)\geq g(x)$ 成立；

（2）想要证明 $f(x)\geq g(x)$ 成立，只需证明 $f(x)_{\min}\geq g(x)_{\max}$ 成立即可．

4.命题角度

命题角度 1　构造函数

命题角度 2　放缩法

命题角度 3　切线法

命题角度 4　二元或多元不等式的证明思路

命题角度 5　函数凹凸性的应用

5.放缩思路

（1）指数切线放缩

0 线放缩

①$e^x\geq x+1$（切点横坐标是 $x=0$）；

②$e^x\geq x^2+1$（切点横坐标是 $x=0$）；

③$e^x\geq \dfrac{1}{2}x^2+x+1$（切点横坐标是 $x=0$）．

1 线放缩

①$e^{x-1}\geq x$（切点横坐标是 $x=1$）；

②$e^x\geq ex$（切点横坐标是 $x=1$）；

③$e^x\geq ex+(x-1)^2$（切点横坐标是 $x=1$）

（2）对数切线放缩

1 线放缩

$\ln x\leq x-1$（也可以记为 $\ln ex\leq x$，切点为 $(1，0)$ 引起的放缩）

$\ln x\geq 1-\dfrac{1}{x}$（用 $\dfrac{1}{x}$ 替换 x，切点横坐标 $x=1$），或者记为 $x\ln x\geq x-1$．

$\ln x\leq x^2-x$．（由 $\ln x\leq x-1$ 及 $x-1\leq x^2-x$ 切点横坐标是 $x=1$），或者记为 $\dfrac{\ln x}{x}\leq x-1$．

0 线放缩

$\ln(x+1)\le x$（由 $\ln x\le x-1$ 向左平移一个单位来理解）

e 线放缩：

$\ln x\le \frac{x}{e}$．（用 $\frac{x}{e}$ 替换 x，切点横坐标是 $x=e$），表示过原点与 $f(x)=\ln x$ 的切线为 $y=\frac{x}{e}$．

（3） $x\ln x\ge x-1$．

（4）三角函数放缩

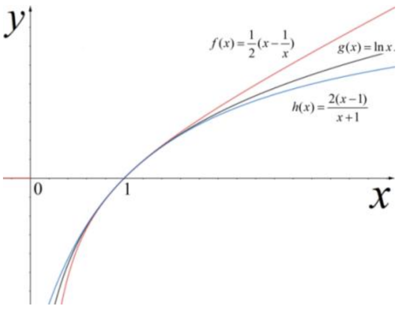
$\sin x\le x$ 对于 $x\ge 0$ 恒成立， $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$ 对于 $x\ge 0$ 恒成立；

三角函数有界性 $\sin x\le 1$，$\cos x\le 1$．

6.飘带函数与主元变更

（1）飘带函数

函数 $y=ax-\frac{b}{x}$（$a>0$，$b>0$）的图像类似两条无限延伸的飘带，故把它称为飘带函数．由于一条飘带函数 $y=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ 与对数函数 $\ln x$ 具有紧密的放缩关系，为使整个函数放缩关系完整，我们通常用一个反比例函数 $y=\frac{2(x-1)}{x+1}$ 对 $y=\ln x$ 进行逼近放缩，如图，从图像可以看出三个函数在 $x=1$ 的左右两边大小关系彻底发生改变，既有结论：①$\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})<\ln x<\frac{2(x-1)}{x+1}$，$x\in(0，1)$；②$\frac{2(x-1)}{x+1}\le\ln x\le\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，$x\in[1，+\infty)$，此不等式在多变元问题中是常见有效的放缩方法，是多元问题的一条主线，万万不能忘记．



证明①构造函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}=-\frac{(x-1)^2}{2x^2}\le 0$，而 $f(1)=0$ 故当 $0<x<1$ 时，$\ln x>\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$；当 $x\ge 1$ 时 $\ln x\le\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$．

②构造函数 $g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\ge 0$，而 $f(1)=0$，故当 $0<x<1$ 时，$\ln x<\frac{2(x-1)}{x+1}$；当 $x\ge 1$ 时，$\ln x\ge\frac{2(x-1)}{x+1}$．

（2）主元变更

7. 对数平均不等式

（1）ALG 不等式(对数平均不等式)的证明

对数平均不等式：两个正数 a，b 的对数平均 $L(a，b)=\begin{cases}\frac{a-b}{\ln a-\ln b}(a\ne b)\\ a(a=b)\end{cases}$，有如下关系 $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$，即几何平均数 $\le$ 对数平均数 $\le$ 算术平均数．证明如下：

证：由题意知当 $a=b$ 时，等号成立，以下为 $a\ne b$ 时的证明；

法 1(对称化构造) 由题意知 $\frac{a-b}{\ln a-\ln b}>0$ 恒成立，当 $a\ne b$ 时，设 $k=\frac{a-b}{\ln a-\ln b}>0$，则 $k\ln a-k\ln b=a-b$，$k\ln a-a=k\ln b-b$，等号左右结构对称，构造函数 $f(x)=k\ln x-x$，则 $f(a)=f(b)$．对 $f(x)$ 求导得到 $f'(x)=\frac{k}{x}-1$，可以发现 $f'(k)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0，k)$ 上单调递增，在 $(k，+\infty)$ 上单调递减，不等式关系可改写为 $\sqrt{ab}<k<\frac{a+b}{2}\Rightarrow\begin{cases}a+b>2k\\ ab<k^2\end{cases}$，$f(x)$ 为单峰函数，可以利用两个常规的极值点偏移求解，也可以直接利用本章第五讲的内容，直接得到结论．

法 2(比值代换) 为了换元之后我们能更清晰地找到 t 的范围，

不妨设 $a>b$，$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$，令 $t=\dfrac{a}{b}>1$，则 $b\sqrt{t}<\dfrac{b(t-1)}{\ln t}<\dfrac{b(t+1)}{2}$，下面可以对不等式进行整理和化简得到 $\sqrt{t}<\dfrac{(t-1)}{\ln t}<\dfrac{(t+1)}{2}$，所以 $\dfrac{2(t-1)}{t+1}<\ln t<\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}$，可以继续构造飘带函数求证.

法 3(主元法) 不妨设 $a>b$，$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}\Rightarrow \ln a-\ln b<\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\Rightarrow \ln a-\ln b-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<0$.

令 $f(a)=\ln a-\ln b-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$，$a\in(b，+\infty)$，则 $f'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{b}}{2a\sqrt{a}}=-\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2a\sqrt{ab}}<0$，得 $f(a)$ 在 $(b，+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(a)<f(b)=0$，左边得证，右边同理可证.

由于对数平均不等式的证法 1，2 已与极值点偏移建立了联系，这也是我们解决含对数极值点偏移问题的有效手段之一.

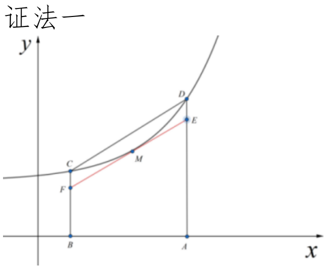
（2）指数平均不等式

ALG 不等式又称对数平均不等式．考虑到实际应用中常常使用指数，为计算方便，我们引入 ALG 不等式的拓展——指数形式的不等式．下简称指数平均不等式.

ALG 不等式的证明(指数)

设 $a=e^m$，$b=e^n$，则 $E(a，b)=\begin{cases}\dfrac{e^m-e^n}{m-n}(m\neq n)\\ e^m(m=n)\end{cases}$，有如下关系：$e^{\frac{m+n}{2}}\le E(a，\mathrm{b})\le\dfrac{e^m+e^n}{2}$．证明如下：

证法一



由题意知当 $m=n$ 时，等号成立，以下为 $m\neq n$ 时的证明：不妨设 $m>n$，$C(n，y_n)$，$D(m，y_m)$，$M(\dfrac{m+n}{2}，y_M)$ 由图像知 $S_{ABFE}<\int_b^a e^x dx<S_{A\ \ B}$，即 $f(\dfrac{m+n}{2})(m-n)<e^m-e^n<\dfrac{1}{2}(e^m+e^n)(m-n)$，因为 $m>n$，所以 $e^{\frac{m+n}{2}}<\dfrac{e^m-e^n}{m-n}<\dfrac{e^m+e^n}{2}$.

证法二 由对数平均不等式 $\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$ $(a>b)$ 令 $a=e^m$，$b=e^n$ $(m>n)$，所以 $\sqrt{e^me^n}<\dfrac{e^m-e^n}{m-n}<\dfrac{e^m+e^n}{2}$，即 $e^{\frac{m+n}{2}}<\dfrac{e^m-e^n}{m-n}<\dfrac{e^m+e^n}{2}$.

证法三 求证 $e^{\frac{m+n}{2}}<\dfrac{e^m-e^n}{m-n}<\dfrac{e^m-e^n}{2}$ $(m>n)$，先证 $e^{\frac{m+n}{2}}<\dfrac{e^m-e^n}{m-n}$ 两边同时除以 $e^{\frac{m+n}{2}}$ 得 $1<\dfrac{e^{\frac{m-n}{2}}-e^{\frac{n-m}{2}}}{m-n}$，令 $\dfrac{m-n}{2}=t$ $(t>0)$，则 $\dfrac{n-m}{2}=-t$，$m-n=2t$，所以 $1<\dfrac{e^t-e^{-t}}{2t}$，即证 $e^t-e^{-t}>2t$，令 $g(t)=e^t-e^{-t}-2t$ $(t>0)$ 则 $g'(x)=e^t+e^{-t}-2$ $(t>0)$，因为 $e^t+e^{-t}\ge 2$，所以 $g'(x)\ge 0$，所以 $g(x)$ 为增函数，所以 $g(t)>g(0)_{\min}=0$，即 $g(t)>0$ 恒成立，故原式得证.

8.函数型数列不等式问题

（1） **分析通项法：**由于左边是一个求和(积)形式的表达式，右边是一个简单的式子，为了使得两者能够明显地显现出大小特征，有必要将两者统一成同一种形式，此处有两条路可走，一种是将左边的和式收拢，一种是将右边的式子分解.很明显，左边是无法收拢的，因此需要将右边进行拆分，而拆分的原则就是和左边配对.假设右边 $f(n)=b_1+b_2+\cdots+b_n$，这样一来，相当于已知一个数列的前 n 项之和，求 b_n，利用数列的知识可知

$b_n=f(n)-f(n-1)\left(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*\right)$.所以，接下来只需要证明 $a_n<b_n$ 即可.

（2）.几种常见的数列放缩方法：

导数与数列放缩

（1）$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\left(n\geq 2\right)$；（2）$\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

（3）$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$；（4）$T_{r+1}=C_n^r\cdot\frac{1}{n^r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{1}{n^r}<\frac{1}{r!}<\frac{1}{r(r-1)}=\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r}\left(r\geq 2\right)$；

（5）$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<3$；（6）$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=2\left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)\left(n\geq 2\right)$；

（7）$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2\left(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$；

（8）$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\sqrt{2}\left(-\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}\right)$；

（9）$\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)^2}=\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^n-1\right)}<\frac{2^n}{\left(2^n-1\right)\left(2^n-2\right)}=\frac{2^{n-1}}{\left(2^n-1\right)\left(2^{n-1}-1\right)}=\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}\left(n\geq 2\right)$；

（10）$\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n\cdot n^2}}<\frac{1}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$=\left[\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}}<2\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(n\geq 2\right)$；

（11）$\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{2}{\sqrt{n^2\cdot n}+\sqrt{n\cdot n^2}}<\frac{2}{n\sqrt{n-1}+(n-1)\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{(n-1)n}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}=\frac{-2\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{(n-1)n}}=\frac{2}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\left(n\geq 2\right)$；

（12）$\frac{1}{2^n-1}=\frac{1}{(1+1)^n-1}<\frac{1}{C_n^0+C_n^1+C_n^2-1}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$；

（13）$\frac{1}{2^n-1}<\frac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}-1\right)\left(2^n-1\right)}=\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}\left(n\geq 2\right)$.

（14）设 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项，且公比为 q 的等比数列，关于 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i+1)(a_{i+1}+1)}$

$\frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{a_n+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1}\right)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i+1)(a_{i+1}+1)}=\frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1}\right)<\frac{1}{q-1}\cdot\frac{1}{a_1+1}$，

（15）数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=a_n(a_n+1)$，则 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(a_n+1)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{1+a_n}$，故 $\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$ 故

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{1}{a_1}$

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明（2）

题型一　构造函数，利用最值证明不等式

1.已知函数 $f(x)=\ln x-a(x+1)$.

(1)讨论函数的单调性；(2)对任意 $x>0$，求证：$\dfrac{2e^{x}}{xe^{2}}-a(x+1)>f(x)$.

2.设函数 $f(x)=\ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$的极值点.

(1)求实数 a 的值；(2)当 $x<a$ 时，试证明 $x+f(x)\geqslant xf(x)$成立.

3.设函数 $f(x)=e^{x}\cos x$，$g(x)$为 $f(x)$的导函数.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$时，证明：$f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$.

题型二　放缩后构造函数证明不等式

4.已知函数 $f(x)=ae^{x}-\ln x-1$.

(1)设 $x=2$ 是 $f(x)$的极值点，求 a，并求 $f(x)$的单调区间；

(2)证明：当 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant 0$.

5. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{a\ln x}{x^{2}}$.

(1)若 $a=1$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $a=0$，$x\in(0，1)$，证明：$x^{2}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{f(x)}{e^{x}}$.

6.设函数 $f(x)=e^{x}\cos x$，$g(x)$为 $f(x)$的导函数.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$时，证明：$f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$.

7. 已知函数 $f(x)=(x+b)(e^x-a)\ (b>0)$，在 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x+ey+e-1=0$.

（1）求 a,b；

（2）若 $m\le 0$，证明：$f(x)\ge mx^2+x$.

8. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2\ln x+2}{e^x}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）证明：当 $x>0$ 时，都有 $f'\left(x\right)\ln\left(x+1\right)<\dfrac{2}{e^x}+\dfrac{2}{e^{x+2}}$.

9. 已知函数 $f\left(x\right)=e^x-x^2$.

（1）求曲线 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）求证：当 $x>0$ 时，$\dfrac{e^x+\left(2-e\right)x-1}{x}\ge\ln x+1$.

10. 已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x+ax+1,a\in R$.

（1）当 $x>0$ 时，若关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\ge 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（2）当 $n\in N^*$ 时，证明：$\dfrac{n}{2n+4}<\ln^2 2+\ln^2\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln^2\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{n}{n+1}$

11.已知二次函数 $y=f\left(x\right)$ 图象经过坐标原点，其导函数为 $f'\left(x\right)=6x-2$，数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，点 $\left(n,S_n\right)\left(n\in N^*\right)$ 均在函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象上；又 $b_1=1$，$c_n=\dfrac{1}{3}\left(a_n+2\right)$，且 $b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots 2^{n-2}b_{n-1}+2^{n-1}b_n=c_n$，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

(1)求数列 $\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\left\{c_n\cdot b_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n；

(3)求证：

① $\ln\left(x+1\right)<x\left(x>0\right)$；

② $\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{\ln i}{i^2}<\dfrac{2n^2-n-1}{4\left(n+1\right)}\left(n\in N^*,n\ge 2\right)$

题型三　分拆转化函数证明不等式

12.已知函数 $f(x)=e\ln x-ax$(常数 $a\in\mathbf{R}$).

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a=e$ 时，证明：$xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$.

13.设函数 $f(x)=ax^2-(x+1)\ln x$，曲线 $y=f(x)$在点(1，$f(1)$)处的切线的斜率为 0.

(1)求 a 的值；

(2)求证：当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)>\frac{1}{2}x$.

14.已知函数 $f(x)=bx^2+a\ln x$ 的图象在点(1，$f(1)$)处的切线的斜率为 $a+2$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)当 $0<a\leqslant\frac{e}{2}$时，证明：$f(x)<x^2+\frac{2}{x}e^{x-2}$.

15.已知函数 $f\left(x\right)=\ln x$， $g\left(x\right)=\frac{3}{2}-\frac{a}{x}$($a$ 为常数）.

(1)若方程 $e^{2f(x)}=g\left(x\right)$在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上有解，求实数 a 的取值范围；

(2)当 $a=1$时，证明不等式 $g\left(x\right)<f\left(x\right)<x-2$ 在$[4$，$+\infty)$ 上恒成立；

(3)证明 $\frac{5n}{4}+\frac{1}{60}<\sum_{k=1}^{n}\left[2f(2k+1)-f(k+1)-f(k)\right]<2n+1$，$\left(n\in N^*\right)$.（参考数据：$\ln 2\approx 0.693$）

题型一　构造函数，利用最值证明不等式

1.已知函数 $f(x)=\ln x-a(x+1)$.

(1)讨论函数的单调性；

(2)对任意 $x>0$，求证：$\frac{2e^x}{xe^2}-a(x+1)>f(x)$.

(1)**解**　由题意，$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$\therefore f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1}{a}$；令 $f'(x)<0$，解得 $x>\frac{1}{a}$，

$\therefore f(x)$在$\left(0，\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a}，+\infty\right)$上单调递减.

(2)**证明**　设 $g(x)=\frac{2e^x}{xe^2}-a(x+1)-f(x)=\frac{2}{e^2}\cdot\frac{e^x}{x}-\ln x$，

则 $g'(x)=\frac{2}{e^2}\cdot\frac{xe^x-e^x}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2(x-1)e^x-e^2x}{e^2x^2}$.

令 $r(x)=2(x-1)e^x-e^2x$，则 $r'(x)=2xe^x-e^2$.

易得 $r'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，且 $r'(1)=2e-e^2<0$，$r'(2)=3e^2>0$，

$\therefore$存在唯一的实数 $x_0\in(1，2)$，使得 $r'(x_0)=0$，

$\therefore r(x)$在区间$(0，x_0)$上单调递减；在$(x_0，+\infty)$上单调递增.

又 $r(0)=-2<0$，$r(2)=0$，

当 $0<x<2$ 时，$r(x)<0$，$g'(x)<0$；

当 $x>2$ 时，$r(x)>0$，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$在$(0，2)$上单调递减，在$(2，+\infty)$上单调递增.

因此当 $x=2$ 时，$g(x)$取到最小值 $g(x)_{\min}=g(2)=1-\ln 2>0$.

综上，$\frac{2}{e^2}\cdot\frac{e^x}{x}-\ln x>0$，即$\frac{2e^x}{xe^2}-a(x+1)>f(x)$.

2.设函数 $f(x)=\ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$的极值点.

(1)求实数 a 的值；

(2)当 $x<a$ 时，试证明 $x+f(x)\geqslant xf(x)$成立.

(1)**解**　由题意得 $y=xf(x)=x\ln(a-x)$，

则 $y'=\ln(a-x)+x[\ln(a-x)]'$.

因为 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$的极值点，

所以 $y'|_{x=0}=\ln a=0$，

所以 $a=1$(经验证，$a=1$ 符合题意).

(2)**证明**　由(1)可知，$f(x)=\ln(1-x)$，其定义域为$\{x|x<1\}$.

设 $g(x)=x+f(x)-xf(x)=x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)$，

令 $1-x=t$，则 $t>0$，

要证 $g(x)\geqslant 0$，只需证明 $1-t+t\ln t\geqslant 0$.

令 $h(t)=1-t+t\ln t$，则 $h'(t)=-1+\ln t+1=\ln t$，

当 $t\in(0，1)$时，$h'(t)<0$；

当 $t\in(1，+\infty)$时，$h'(t)>0$，

所以 $h(t)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增.

所以 $h(t)$在$(0，+\infty)$的最小值为 $h(1)=0$，

因此 $h(t)\geqslant 0$，从而 $g(x)\geqslant 0$，

所以当 $x<a$ 时，$x+f(x)\geqslant xf(x)$成立.

3.设函数 $f(x)=e^x\cos x$，$g(x)$为 $f(x)$的导函数.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)当 $x\in\left[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right]$时，证明：$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$.

(1)**解**　由已知，有 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$.

因此，当 $x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}，2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$时，

有 $\sin x>\cos x$，得 $f'(x)<0$，则 $f(x)$单调递减；

当 $x\in\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}，2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$时，有 $\sin x<\cos x$，

得 $f'(x)>0$，则 $f(x)$单调递增，

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}，2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

$f(x)$的单调递减区间为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}，2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)**证明**　记 $h(x)=f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

依题意及(1)，有 $g(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，

从而 $g'(x)=-2e^x\sin x$.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，

故 $h'(x)=f'(x)+g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x)(-1)$

$=g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0$.

因此，$h(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，

进而 $h(x)\geqslant h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

所以当 $x\in\left[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

题型二　放缩后构造函数证明不等式

4.已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$.

(1)设 $x=2$ 是 $f(x)$的极值点，求 a，并求 $f(x)$的单调区间；

(2)证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant0$.

(1)解　$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$.

由题设知，$f'(2)=0$，所以 $a=\frac{1}{2e^2}$，

从而 $f(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\ln x-1$，$f'(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\frac{1}{x}$.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(0，2)$，单调递增区间为$(2，+\infty)$.

(2)证明　当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant\frac{e^x}{e}-\ln x-1(x>0)$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{e}-\ln x-1(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{e^x}{e}-\frac{1}{x}(x>0)$.

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $x=1$ 是 $g(x)$的极小值点，也是最小值点.

故当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant g(1)=0$.

因此，当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant0$.

探究提高　1.某些不等式，直接构造不易求最值，可利用条件与不等式性质，适当放缩后，再构造函数进行证明.

2.特别注意，进行放缩不等式时，一定要适度，切忌放过，导致难以证明.

5. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a\ln x}{x^2}$.

(1)若 $a=1$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $a=0$，$x\in(0，1)$，证明：$x^2-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{e^x}$.

(1)解　当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in(0，+\infty)$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^2-1+2\ln x}{x^3}$

$=\frac{(x-1)(x+1)+2\ln x}{x^3}$.

当 $x\in(0，1)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1，+\infty)$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$的单调递减区间为$(0，1)$，单调递增区间为$(1，+\infty)$.

(2)证明　当 $a=0$，$x\in(0，1)$时，$x^2-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{e^x}$等价于$\frac{-\ln x}{e^x}+x^2-\frac{1}{x}<0$.

$\because$当 $x\in(0，1)$时，$e^x\in(1，e)$，$-\ln x>0$，$\therefore\frac{-\ln x}{e^x}<-\ln x$，

∴只需要证$-\ln x+x^2-\frac{1}{x}<0$在(0，1)上恒成立.

令$g(x)=-\ln x+x^2-\frac{1}{x}$，$x\in(0，1)$，

∴$g'(x)=-\frac{1}{x}+2x+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-x+1}{x^2}>0$，

则函数$g(x)$在(0，1)上单调递增，于是$g(x)<g(1)=-\ln 1+1-1=0$，

∴当$x\in(0，1)$时，$x^2-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{e^x}$.

6.设函数$f(x)=e^x\cos x$，$g(x)$为$f(x)$的导函数.

(1)求$f(x)$的单调区间；

(2)当$x\in\left[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right]$时，证明：$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$.

(1)**解**　由已知，有$f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$.

因此，当$x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}，2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$时，

有$\sin x>\cos x$，得$f'(x)<0$，则$f(x)$单调递减；

当$x\in\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}，2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$时，有$\sin x<\cos x$，

得$f'(x)>0$，则$f(x)$单调递增，

所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}，2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

$f(x)$的单调递减区间为$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}，2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)**证明**　记$h(x)=f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

依题意及(1)，有$g(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，

从而$g'(x)=-2e^x\sin x$.

当$x\in\left(\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，

故$h'(x)=f'(x)+g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x)(-1)$

$=g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0$.

因此，$h(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，

进而$h(x)\geqslant h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

所以当$x\in\left[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

7. 已知函数 $f(x)=(x+b)(e^x-a)\ (b>0)$，在$(-1,f(-1))$处的切线方程为$(e-1)x+ey+e-1=0$.

（1）求a,b；

（2）若$m\le 0$，证明：$f(x)\ge mx^2+x$.

【解析】（1） $a=1$， $b=1$；

（2）由（1）可知 $f(x)=(x+1)(e^{x}-1)$， $f(0)=0, f\left(-1\right)=0$，

由 $m\le 0$，可得 $x\ge mx^{2}+x$，

令 $g(x)=\left(x+1\right)\left(e^{x}-1\right)-x$，则 $g'(x)=\left(x+2\right)e^{x}-2$，

当 $x\le -2$ 时， $g'(x)=\left(x+2\right)e^{x}-2<-2<0$，

当 $x>-2$ 时，设 $h(x)=g'(x)=\left(x+2\right)e^{x}-2$，则 $h'(x)=\left(x+3\right)e^{x}>0$，

故函数 $g'(x)$ 在 $\left(-2,+\infty\right)$ 上单调递增，

又 $g'(0)=0$，所以当 $x\in\left(-\infty,0\right)$ 时， $g'(x)<0$，当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时， $g'(x)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

故 $g(x)\ge g(0)=0$，即 $\left(x+1\right)\left(e^{x}-1\right)\ge x\ge mx^{2}+x$.

故 $f(x)\ge mx^{2}+x$.

【方法归纳】函数解析式中含有已知范围的参数，可以考虑借助于常识或已知的范围减少变量，对参数适当放缩达到证明的目标.

8. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2\ln x+2}{e^{x}}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）证明：当 $x>0$ 时，都有 $f'\left(x\right)\ln\left(x+1\right)<\dfrac{2}{e^{x}}+\dfrac{2}{e^{x+2}}$.

【解析】（1） $f'\left(x\right)=\dfrac{2\left(1-x-x\ln x\right)}{xe^{x}}$，

令 $g\left(x\right)=1-x-x\ln x$，则 $g\left(1\right)=0$，

当 $0<x<1$ 时， $1-x>0,-x\ln x>0$，所以 $g\left(x\right)>0, f'\left(x\right)>0$，

当 $x>1$ 时， $1-x<0,-x\ln x<0$，所以 $g\left(x\right)<0, f'\left(x\right)<0$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

（2）要证明 $f'\left(x\right)\ln\left(x+1\right)<\dfrac{2}{e^{x}}+\dfrac{2}{e^{x+2}}$，即证 $\left(1-x-x\ln x\right)\ln\left(x+1\right)<\left(1+\dfrac{1}{e^{2}}\right)x$，

令 $g\left(x\right)=1-x-x\ln x$，则 $g'\left(x\right)=-1-\left(\ln x+1\right)=-2-\ln x$，

当 $0<x<\dfrac{1}{e^{2}}$ 时， $g'\left(x\right)>0$，当 $x>\dfrac{1}{e^{2}}$ 时， $g'\left(x\right)<0$，

所以函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e^{2}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{e^{2}},+\infty\right)$ 上单调递减， $g\left(x\right)\le 1-\dfrac{1}{e^{2}}+\dfrac{2}{e^{2}}=1+\dfrac{1}{e^{2}}$，

所以$1-x-x\ln x\le 1+\frac{1}{e^2}$.

要证$(1-x-x\ln x)\ln(x+1)<\left(1+\frac{1}{e^2}\right)x$，只需再证$\ln(x+1)<x$即可.

易证 $\ln x\le x-1$，当且仅当 $x=1$时取等号（证明略），所以 $0<\ln(x+1)<x$，

综上所述，当 $x>0$时，都有 $f'(x)\ln(x+1)<\frac{2}{e^x}+\frac{2}{e^{x+2}}$.

【思路点睛】对于含有 $\ln x$ 与 e^x 型的超越函数，具体解决时须根据两类函数的特点，挖掘结构特征，灵活变形，脑中有“形”，注意重要不等式 $\ln x\le x-1\Leftrightarrow e^x\ge x+1$ 的合理代换.

9. 已知函数 $f(x)=e^x-x^2$.

（1）求曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）求证：当 $x>0$ 时，$\frac{e^x+(2-e)x-1}{x}\ge\ln x+1$.

【解析】（1） $f(x)=e^x-x^2$， $f'(x)=e^x-2x$，

由题设得 $f'(1)=e-2, f(1)=e-1$，

所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为$y=(e-2)(x-1)+e-1$，即 $y=(e-2)x+1$；

（2）令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-2$，

当 $x<\ln 2$ 时， $g'(x)<0$，当 $x>\ln 2$ 时， $g'(x)>0$，

所以函数 $g(x)=f'(x)$ 在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，

$g(x)_{\min}=g(\ln 2)=f'(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，

所以函数 $f(x)=e^x-x^2$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，

由于曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=(e-2)x+1$， $f(1)=e-1$，可猜测函数 $f(x)$ 的图象恒在切线 $y=(e-2)x+1$的上方.

先证明当 $x>0$ 时， $f(x)\ge(e-2)x+1$.

设$h(x)=f(x)-(e-2)x-1(x>0)$，则$h'(x)=e^x-2x-(e-2), h''(x)=e^x-2$，

当 $x<\ln 2$时， $h''(x)<0$，当 $x>\ln 2$时， $h''(x)>0$，

所以$h'(x)$在$(0,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，

由$h'(0)=3-e>0, h'(1)=0, 0<\ln 2<1$，所以$h'(\ln 2)<0$，

所以存在 $x_0\in(0,\ln 2)$，使得$h'(x_0)=0$，

所以当 $x\in(0,x_0)\cup(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(0)=h(1)=0$，所以 $h(x)\ge 0$，即 $f(x)\ge(e-2)x+1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，

所以当 $x>0$ 时，$e^x-x^2\ge(e-2)x+1$，

变形可得 $\dfrac{e^x+(2-e)x-1}{x}\ge x$，

又由于 $x\ge\ln x+1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号（证明略），

所以 $\dfrac{e^x+(2-e)x-1}{x}\ge\ln x+1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

【审题点津】切线放缩法值得认真探究，若第一小题是求曲线的切线方程，就要注意是否运用切线放缩法进行放缩解决问题.

10. 已知函数 $f(x)=x\ln x+ax+1,a\in R$.

（1）当 $x>0$ 时，若关于 x 的不等式 $f(x)\ge 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（2）当 $n\in N^*$ 时，证明：$\dfrac{n}{2n+4}<\ln^2 2+\ln^2\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln^2\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{n}{n+1}$

【解析】（1）$[-1,+\infty)$；

（2）设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项的和分别为 $S_n=\dfrac{n}{2n+4},T_n=\dfrac{n}{n+1}$，则

由于 $a_n=\begin{cases}S_1(n=1),\\S_n-S_{n-1}(n\ge 2),\end{cases}$，解得 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$；

同理，$b_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

所以只需证明 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}<\ln^2\dfrac{n+1}{n}<b_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

由（1）知 $a=-1$ 时，有 $x\ln x\ge x-1$，即 $\ln x\ge\dfrac{x-1}{x}$.

令 $x=\dfrac{n+1}{n}>1$，则 $\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$，

所以 $\ln^2\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{(n+1)^2}>\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，

所以 $\ln^2 2+\ln^2\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln^2\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n}{2n+4}$；

再证明 $\ln^2\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{n(n+1)}$，亦即 $\ln\dfrac{n+1}{n}<\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$，

因为 $\ln\dfrac{n+1}{n}=2\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$，

所以只需证 $2\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}<\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$，

现证明 $2\ln x<x-\dfrac{1}{x}(x>1)$.

令 $h(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}(x>1)$，则 $h'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$h(x)<h(1)=0$，

所以当 $x>1$ 时，$2\ln x<x-\frac{1}{x}$ 恒成立，

令 $x=\sqrt{\frac{n+1}{n}}>1$，则 $2\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}<\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$，

综上，$\frac{1}{(n+1)(n+2)}<\ln^2\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n(n+1)}$，

所以对数列 $\{a_n\},\left\{\ln^2\frac{n+1}{n}\right\},\{b_n\}$ 分别求前 n 项的和，得

$\frac{n}{2n+4}<\ln^2 2+\ln^2\frac{3}{2}+\cdots+\ln^2\frac{n+1}{n}<\frac{n}{n+1}$.

【思路总结】待证数列不等式的一端是 n 项之和（或积）的结构，另一端含有变量 n 时，可以将它们分别视为两个数列的前 n 项的和（或积），从而将不等式的证明转化为两个数列的对应项之间的大小关系的证明.

10.已知二次函数 $y=f(x)$ 图象经过坐标原点，其导函数为 $f'(x)=6x-2$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，点 $(n,S_n)(n\in N^*)$ 均在函数 $y=f(x)$ 的图象上；又 $b_1=1$，$c_n=\frac{1}{3}(a_n+2)$，且 $b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots 2^{n-2}b_{n-1}+2^{n-1}b_n=c_n$，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

(1)求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\{c_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n；

(3)求证：

①$\ln(x+1)<x(x>0)$；

②$\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{\ln i}{i^2}<\frac{2n^2-n-1}{4(n+1)}(n\in N^*,n\geq 2)$.

【答案】(1) $a_n=6n-5$，$b_n=\begin{cases}1,n=1\\2^{2-n},n\geq 2\end{cases}$

(2) $T_n=11-(2n+3)\times 2^{2-n}$

(3)①证明见解析；②证明见解析

【解析】

【分析】

（1）设出二次函数，求导可得 a 与 b，进而求得 S_n，再利用退一相减法可求得 a_n 与 c_n，再利用退一相减法求得 b_n；

（2）由（1）求出 $c_n\cdot b_n$，再利用分组求和与错位相减可得 T_n；

（3）①构造函数 $g(x)=x-\ln(x+1)(x>0)$，利用导数判断单调性，求最值即可得证；②根据①构造 $\ln n<n-1$，再

变形、赋值、放缩得：$\frac{\ln n^2}{n^2}<1-\frac{1}{n^2}$，代入$\sum_{i=2}^{n}\frac{\ln i}{i^2}$化简后，再进一步放缩，利裂项相消法求和即可.

(1)

设二次函数$f\left(x\right)=ax^2+bx$，$f'\left(x\right)=2ax+b$，

$\therefore 2a=6,b=-2$，则$f\left(x\right)=3x^2-2x$，

$\because\left(n,S_n\right)$在$y=3x^2-2x$上，$\therefore S_n=3n^2-2n$

当$n\geq 2$时$a_n=S_n-S_{n-1}=3n^2-2n-3\left(n-1\right)^2+2\left(n-1\right)=6n-5$，

又$n=1$时$a_1=3-2=1=6\times 1-5$符合，

$\therefore a_n=6n-5$，

则$c_n=\frac{1}{3}\left(a_n+2\right)=\frac{6n-3}{3}=2n-1$，

由$b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots 2^{n-2}b_{n-1}+2^{n-1}b_n=c_n$得，

$b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots 2^{n-2}b_{n-1}+2^{n-1}b_n=2n-1$①，

令$n=n-1\left(n\geq 2\right)$代入上式得，

$b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots 2^{n-3}b_{n-2}+2^{n-2}b_{n-1}=2n-3$②，

①−②得，$2^{n-1}b_n=2$，即$b_n=2^{2-n}\left(n\geq 2\right)$，

又$b_1=1$不满足上式，

$\therefore b_n=\begin{cases}1,n=1\\2^{2-n},n\geq 2\end{cases}$；

(2)

由（1）得，$c_n\cdot b_n=\begin{cases}1,n=1\\\left(2n-1\right)2^{2-n},n\geq 2\end{cases}$，

$\therefore T_n=1+3+5\times 2^{-1}+7\times 2^{-2}+\cdots+\left(2n-1\right)\times 2^{2-n}$③，

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+3\times 2^{-1}+5\times 2^{-2}+7\times 2^{-3}+\cdots+\left(2n-1\right)\times 2^{1-n}$④，

③−④得，$\frac{1}{2}T_n=\frac{7}{2}+2\left(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{2-n}\right)-\left(2n-1\right)\times 2^{1-n}$

$=\frac{7}{2}+2\times\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\left(2n-1\right)\times 2^{1-n}=\frac{11}{2}-\left(2n+3\right)\times 2^{1-n}$，

则$T_n=11-\left(2n+3\right)\times 2^{2-n}$，

(3)

①设 $g(x)=x-\ln(x+1)(x>0)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

$\therefore g(x)>g(0)=0$，即 $x-\ln(x+1)>0$，

故 $\ln(x+1)<x(x>0)$；

②$\because \ln(x+1)<x(x>0)$，

当 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 2$ 时，令 $n=n-1$ 代入上式得：

$\ln n<n-1$，即 $\frac{\ln n}{n}<\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$，

令 $n=n^2$ 代入上式得，$\frac{\ln n^2}{n^2}<1-\frac{1}{n^2}$，$\therefore \frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$，

则 $\sum_{i=2}^{n}\frac{\ln i}{i^2}=\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{3^2}+\cdots+1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[(n-1)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right]<\frac{1}{2}\left[(n-1)-\left(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(n-1)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(n-1)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[(n-1)-\frac{n-1}{2(n+1)}\right]=\frac{2n^2-n-1}{4(n+1)}$，

故结论成立.

题型三　分拆转化函数证明不等式

11.已知函数 $f(x)=e\ln x-ax$(常数 $a\in\mathbf{R}$).

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a=e$ 时，证明：$xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$.

(1)**解**　$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{e}{x}-a$，

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增；

②若 $a>0$，则当 $0<x<\frac{e}{a}$时，$f'(x)>0$；

当 $x>\frac{e}{a}$时，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$在$\left(0，\frac{e}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{e}{a}，+\infty\right)$上单调递减.

(2)**证明**　当 $x>0$ 时，$xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$ 等价于 $f(x)\leqslant\frac{e^x}{x}-2e$.

当 $a=e$ 时，根据(1)知，$f(x)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=-e$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}-2e(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以 $g(x)_{min}=g(1)=-e$.

综上，当 $x>0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，即 $f(x)\leqslant\frac{e^x}{x}-2e$.

即 $xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$ 得证.

探究提高 1.若直接求导比较复杂或无从下手时，可将待证式进行变形，构造两个函数，从而找到可以传递的中间量，达到证明的目标.

2.在证明过程中，等价转化是关键，此处 $g(x)_{min}\geqslant f(x)_{max}$ 恒成立，从而 $f(x)\leqslant g(x)$恒成立.

12.设函数 $f(x)=ax^2-(x+1)\ln x$，曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线的斜率为 0.

(1)求 a 的值；

(2)求证：当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)>\frac{1}{2}x$.

(1)**解** 由 $f(x)=ax^2-(x+1)\ln x$，得 $f'(x)=2ax-\ln x-\frac{1}{x}-1$.

∵曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线的斜率为 0，

∴$f'(1)=2a-2=0$，则 $a=1$.

(2)**证明** 由(1)得 $f(x)=x^2-(x+1)\ln x$，

要证当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)>\frac{1}{2}x$，只需证当 $0<x\leqslant 2$ 时，

$x-\frac{\ln x}{x}-\ln x>\frac{1}{2}$，即 $x-\ln x>\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}$.

令 $g(x)=x-\ln x$，$h(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}$，

令 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=0$，得 $x=1$，

易知 $g(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，2]$上单调递增，

故当 $0<x\leqslant 2$ 时，$g(x)_{min}=g(1)=1$.

∵$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x\leqslant 2$ 时，$h'(x)>0$，

∴$h(x)$在$(0，2]$上单调递增，

故当 $0<x\leqslant 2$ 时，$h(x)_{max}=h(2)=\frac{1+\ln 2}{2}<1$，

故 $h(x)_{max}<g(x)_{min}$，

故当 $0<x\leqslant 2$ 时，$h(x)<g(x)$，

即当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f(x)>\frac{1}{2}x$.

13.已知函数 $f(x)=bx^2+a\ln x$ 的图象在点(1，$f(1)$)处的切线的斜率为 $a+2$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)当 $0<a\leqslant\frac{e}{2}$时，证明：$f(x)<x^2+\frac{2}{x}e^{x-2}$.

(1)**解**　$f'(x)=2bx+\frac{a}{x}$，则 $f'(1)=2b+a=a+2$，

解得 $b=1$，$f'(x)=2x+\frac{a}{x}=\frac{2x^2+a}{x}(x>0)$.

当 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\sqrt{-\frac{a}{2}}$；

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\sqrt{-\frac{a}{2}}$，

所以 $f(x)$在$\left(\sqrt{-\frac{a}{2}}，+\infty\right)$上单调递增，

在$\left(0，\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$上单调递减.

(2)**证明**　要证 $f(x)<x^2+\frac{2}{x}e^{x-2}$，只要证$\frac{a\ln x}{x}<\frac{2e^{x-2}}{x^2}$.

令 $g(x)=\frac{a\ln x}{x}\left(0<a\leqslant\frac{e}{2}\right)$，则 $g'(x)=\frac{a（1-\ln x）}{x^2}$，

当 $g'(x)>0$ 时，得 $0<x<e$；当 $g'(x)<0$ 时，得 $x>e$，

所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{a}{e}$.

令 $h(x)=\frac{2e^{x-2}}{x^2}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{2e^{x-2}（x-2）}{x^3}$.

当 $h'(x)<0$ 时，得 $0<x<2$；当 $h'(x)>0$ 时，得 $x>2$，

所以 $h(x)_{\min}=h(2)=\frac{1}{2}$.

因为 $0<a\leqslant\frac{e}{2}$，所以 $g(x)_{\max}=\frac{a}{e}\leqslant\frac{1}{2}$.

又 $e\neq2$，所以$\frac{a\ln x}{x}<\frac{2e^{x-2}}{x^2}$，

故 $f(x)<x^2+\frac{2}{x}e^{x-2}$ 得证.

14.已知函数 $f\left(x\right)=\ln x$， $g\left(x\right)=\frac{3}{2}-\frac{a}{x}$($a$ 为常数）.

(1)若方程 $e^{2f(x)}=g\left(x\right)$ 在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上有解，求实数 a 的取值范围；

(2)当 $a=1$时，证明不等式 $g\left(x\right)<f\left(x\right)<x-2$ 在$[4，+\infty)$ 上恒成立；

(3)证明 $\frac{5n}{4}+\frac{1}{60}<\sum_{k=1}^{n}\left[2f(2k+1)-f(k+1)-f(k)\right]<2n+1$，$\left(n\in N^*\right)$.（参考数据：$\ln2\approx0.693$）

【答案】(1)$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(2)证明见解析.

(3)证明见解析.

【解析】

【分析】

（1）将原方程化为$x^2=\frac{3}{2}-\frac{a}{x}$.分离参数得$a=-x^3+\frac{3}{2}x$.令$h(x)=-x^3+\frac{3}{2}x$.求导函数，分析导函数的符号得所令函数的单调性和值域，从而求得答案；

（2）将不等式$g(x)<f(x)$转化为$\ln x+\frac{1}{x}>\frac{3}{2}$.令$r(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.运用导函数求出$r(x)$的最小值，即可得证；不等式$f(x)<x-2$化为$\ln x-x<-2$.令$k(x)=\ln x-x$，运用导函数求出$k(x)$最大值，从而不等式可得证；

（3）由已知得$2f(2k+1)-f(k+1)-f(k)=f\left(\frac{1}{k(k+1)}+4\right)$，由（2）得，$\frac{3}{2}-\frac{1}{x}<f(x)<x-2$，即

$\frac{3}{2}-\frac{k(k+1)}{4k(k+1)+1}<f\left(\frac{1}{k(k+1)}+4\right)<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+2$，由此可得证.

(1)

解：$\because f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{3}{2}-\frac{a}{x}$，

$\therefore$方程$e^{2f(x)}=g(x)$可化为$x^2=\frac{3}{2}-\frac{a}{x}$.即$a=-x^3+\frac{3}{2}x$.

令$h(x)=-x^3+\frac{3}{2}x$.则$h'(x)=-3x^2+\frac{3}{2}$.

由$h'(x)=-3x^2+\frac{3}{2}=0$得，$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，或$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）.

当$x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$时，$h'(x)=-3x^2+\frac{3}{2}>0$.$h(x)$单调递增.

当$x\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$时，$h'(x)=-3x^2+\frac{3}{2}<0$.$h(x)$单调递减.

$\because h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$，$h$（1）$=\frac{1}{2}$，$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore x\in[\frac{1}{2}$，1]时，$h(x)\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$\therefore$方程$e^{2f(x)}=g(x)$在区间$[\frac{1}{2}$，1]上有解等价于$a\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(2)

解：$a=1$时，要证不等式$g(x)<f(x)$，

只需证$\frac{3}{2}-\frac{1}{x}<\ln x$，即$\ln x+\frac{1}{x}>\frac{3}{2}$.

令$r(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.则$r'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2},x\ge 4,r'(x)>0$，

所以$x\in[4，+\infty)$时，$r(x)$单调递增.

$\therefore r(x)_{min}=r$（4）$=\ln 4+\frac{1}{4}>\frac{3}{2}$.

$\therefore$当$x\in[4，+\infty)$时，$g(x)<f(x)$恒成立.

要证$f(x)<x-2$，只需证$\ln x<x-2$，即$\ln x-x<-2$.

令$k(x)=\ln x-x$.$k'(x)=\frac{1}{x}-1,x\ge 4,k'(x)<0$，

所以$x\in[4，+\infty)$时，$k(x)$单调递减.$\therefore k(x)_{max}=k$（4）$=\ln 4-4<-2$.

$\therefore$当$x\in[4，+\infty)$时，$f(x)<x-2$恒成立.

$\therefore$当$a=1$时，证明不等式$g(x)<f(x)<x-2$在$[4，+\infty)$上恒成立.

(3)

解：$\because f(x)=\ln x$，

$\therefore 2f(2k+1)-f(k+1)-f(k)=2\ln(2k+1)-\ln(k+1)-\ln k$

$=\ln\frac{(2k+1)^2}{k(k+1)}=f\left(\frac{1}{k(k+1)}+4\right)$，

由（2）可知，$\frac{3}{2}-\frac{1}{x}<f(x)<x-2$，$\therefore\frac{3}{2}-\frac{1}{\frac{1}{k(k+1)}+4}<f\left(\frac{1}{k(k+1)}+4\right)<\frac{1}{k(k+1)}+4-2$，

即$\frac{3}{2}-\frac{k(k+1)}{4k(k+1)+1}<f\left(\frac{1}{k(k+1)}+4\right)<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+2$，

$\therefore\frac{5}{4}+\frac{1}{16k(k+1)+4}<f\left(\frac{1}{k(k+1)}+4\right)<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+2$，

$\therefore\frac{5n}{4}+\frac{1}{16\times 2+4}+\frac{1}{16\times 2\times 3+4}+\cdots+\frac{1}{16n(n+1)+4}$

$\le\sum_{k=1}^{n}[2f(2k+1)-f(k+1)-f(k)]<1-\frac{1}{n+1}+2n$，

$\because n\in N,\therefore\frac{5n}{4}+\frac{1}{60}<\sum_{k=1}^{n}[2f(2k+1)-f(k+1)-f(k)]<2n+1$.

函数型数列不等式问题

[子题 2]　(2021 泉州模拟)设函数 $f(x)=\ln x-kx+1$.

(1)当 $k>0$ 时，若对任意的 $x>0$，恒有 $f(x)\leqslant 0$，求 k 的取值范围；

(2)证明：$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}<\frac{2n^2-n-1}{2(n+1)}(n\in\mathbf{N}，n\geqslant 2)$.

(1)解　$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-k=\frac{1-kx}{x}$，

当 $x\in\left(0，\frac{1}{k}\right)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{k}，+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，

∴$f(x)$在$\left(0，\frac{1}{k}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{k}，+\infty\right)$上单调递减，

∴$f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}\leqslant 0$，解得 $k\geqslant 1$，

∴k 的取值范围是$[1，+\infty)$．

(2)证明　令 $k=1$，由(1)知，$\ln x-x+1\leqslant 0$，

∴$\ln x\leqslant x-1$，∵$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$，

∴$\ln n^2\leqslant n^2-1$，∴$\frac{\ln n^2}{n^2}\leqslant\frac{n^2-1}{n^2}=1-\frac{1}{n^2}$，

∴$\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}\leqslant\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=(n-1)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$

$<(n-1)-\left[\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

$=(n-1)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=(n-1)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n^2-n-1}{2(n+1)}$，∴结论成立．

跟踪演练

1．已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a<0$ 时，证明：$f(x)\leqslant-\frac{3}{4a}-2$.

(1)解　$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+2a+1=\frac{(x+1)(2ax+1)}{x}$.

若 $a\geqslant 0$，则当 $x\in(0，+\infty)$时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增．

若 $a<0$，则当 $x\in\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$时，$f'(x)>0$；

当 $x\in\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$上单调递增，在$\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单调递减．

(2)证明　由(1)知，当 $a<0$ 时，$f(x)$在 $x=-\frac{1}{2a}$处取得最大值，最大值为 $f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1-\frac{1}{4a}$，

所以 $f(x)\leqslant-\frac{3}{4a}-2$ 等价于 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1-\frac{1}{4a}\leqslant-\frac{3}{4a}-2$，

即 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2a}+1\leqslant0$.

设 $g(x)=\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减．

故当 $x=1$ 时，$g(x)$取得最大值，最大值为 $g(1)=0$.

所以当 $x>0$ 时，$g(x)\leqslant0$.

从而当 $a<0$ 时，$\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2a}+1\leqslant0$，

即 $f(x)\leqslant-\frac{3}{4a}-2$.

2．(2021 德州模拟)已知函数 $f(x)=a\ln x+x+\frac{2}{x}+2a(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)若 $0<a<\frac{\mathrm{e}}{4}$，求证：$f(x)<x+\frac{\mathrm{e}^x+2}{x}$.

(1)解　函数 $f(x)=a\ln x+x+\frac{2}{x}+2a$ 的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}+1-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2+ax-2}{x^2}$.

对于方程 $x^2+ax-2=0$，$\Delta=a^2+8>0$.

解方程 $x^2+ax-2=0$，

可得 $x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2}<0$，$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}>0$.

当 $0<x<\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}$时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}$时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$在$\left(0,\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2},+\infty\right)$上单调递增．

(2)证明　要证明 $f(x)<x+\frac{e^{x}+2}{x}$，

即证 $x+a\ln x+\frac{2}{x}+2a<x+\frac{e^{x}+2}{x}$，

即证 $a(\ln x+2)<\frac{e^{x}}{x}$，即证$\frac{a(\ln x+2)}{x}<\frac{e^{x}}{x^{2}}$.

令 $g(x)=\frac{e^{x}}{x^{2}}$，其中 $x>0$，则 $g'(x)=\frac{e^{x}(x-2)}{x^{3}}$.

当 $0<x<2$ 时，$g'(x)<0$，此时函数 $g(x)$单调递减；

当 $x>2$ 时，$g'(x)>0$，此时函数 $g(x)$单调递增．

所以 $g(x)_{\min}=g(2)=\frac{e^{2}}{4}$.

构造函数 $h(x)=\frac{a(\ln x+2)}{x}$，其中 $0<a<\frac{e}{4}$，$x>0$，

则 $h'(x)=-\frac{a(\ln x+1)}{x^{2}}$.

当 $0<x<\frac{1}{e}$时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$单调递增；

当 $x>\frac{1}{e}$时，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$单调递减．

所以 $h(x)_{\max}=h\left(\frac{1}{e}\right)=ae<\frac{e^{2}}{4}$，则 $h(x)_{\max}<g(x)_{\min}$，

所以$\frac{a(\ln x+2)}{x}<\frac{e^{x}}{x^{2}}$.

故原不等式得证．

专题强化练

1．已知函数 $f(x)=x^{2}-(a-2)x-a\ln x$，$a>0$.

(1)求函数 $y=f(x)$的单调区间；

(2)当 $a=1$ 时，证明：对任意的 $x>0$，$f(x)+e^{x}>x^{2}+x+2$.

(1)解　$f(x)=x^{2}-(a-2)x-a\ln x$，$a>0$，定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=2x-(a-2)-\frac{a}{x}=\frac{(2x-a)(x+1)}{x}$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{a}{2}$；令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{a}{2}$.

∴函数 $y=f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{a}{2}\right)$，单调递增区间为$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$.

(2)证明　方法一　∵$a=1$，∴$f(x)=x^2+x-\ln x(x>0)$，

即证 $e^x-\ln x-2>0$ 恒成立，

令 $g(x)=e^x-\ln x-2$，$x\in(0,+\infty)$，

即证 $g(x)_{min}>0$ 恒成立，

$g'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，令 $u(x)=e^x-\frac{1}{x}$，则 $u'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，$g'(x)$为增函数，又 $g'\left(\frac{1}{2}\right)<0$，$g'(1)>0$，

∴$\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $g'(x_0)=0$ 成立，

即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，

则当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$g'(x)>0$，

∴$y=g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

∴$g(x)_{min}=g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2$，

又∵$e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，

∴$g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=e^{x_0}+\ln\frac{1}{x_0}-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2$，

又∵$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，∴$x_0+\frac{1}{x_0}>2$，

∴$g(x_0)>0$，即对任意的 $x>0$，$f(x)+e^x>x^2+x+2$.

方法二　令 $\varphi(x)=e^x-x-1$，

∴$\varphi'(x)=e^x-1$，

∴$\varphi(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

∴$\varphi(x)_{min}=\varphi(0)=0$，

∴$e^x\geqslant x+1$，①

令 $h(x)=\ln x-x+1(x>0)$，

∴$h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

∴$h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

∴$h(x)_{max}=h(1)=0$，

∴$\ln x\leqslant x-1$，∴$x+1\geqslant\ln x+2$，②

要证 $f(x)+e^x>x^2+x+2$，

即证 $e^x>\ln x+2$，

由①②知 $e^x\geqslant x+1\geqslant \ln x+2$，且两等号不能同时成立，

$\therefore e^x>\ln x+2$，即证原不等式成立．

2．(2021 晋城模拟)已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{2a}{x+1}-2$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=2$ 时，证明：$f(x)>0$ 在$(1，+\infty)$上恒成立；

(2)当 $x>0$ 时，证明：$\ln(x+1)>\dfrac{x^2}{e^x-1}$.

证明　(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=\ln x+\dfrac{4}{x+1}-2$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant 0$，

$f(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增，

$\therefore f(x)>f(1)=0$，

$\therefore f(x)>0$.

(2)方法一　当 $x>0$ 时，要证 $\ln(x+1)>\dfrac{x^2}{e^x-1}$，

只需证$\dfrac{\ln(x+1)}{x}>\dfrac{x}{e^x-1}$，

只需证$\dfrac{\ln(x+1)}{x}>\dfrac{\ln(e^x-1+1)}{e^x-1}$，

记 $k(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}(x>0)$，

$\therefore k'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}$，

令 $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)(x>0)$，

$\therefore h'(x)=-\dfrac{x}{(x+1)^2}<0$，

$\therefore h(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

$\therefore h(x)<h(0)=0$，$\therefore k'(x)<0$，

$\therefore k(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

又$\because$当 $x>0$ 时，$e^x-1>0$，且 $e^x-1>x$，

$\therefore k(x)>k(e^x-1)$，

即$\dfrac{\ln(x+1)}{x}>\dfrac{\ln(e^x-1+1)}{e^x-1}$，

即证 $\ln(x+1)>\dfrac{x^2}{e^x-1}$.

方法二　由(1)知 $\ln x+\dfrac{4}{x+1}-2>0$ 在$(1，+\infty)$上恒成立，

即 $\ln(x+1)+\dfrac{4}{x+2}-2>0$ 在$(0，+\infty)$上恒成立，

即 $\ln(x+1)>\dfrac{2x}{x+2}$在$(0，+\infty)$上恒成立，

要证 $\ln(x+1)>\dfrac{x^2}{e^x-1}$，只需证$\dfrac{2x}{x+2}>\dfrac{x^2}{e^x-1}$，

只需证 $2e^x-x^2-2x-2>0$，

令 $\varphi(x)=2e^x-x^2-2x-2$，$x>0$，

$\therefore \varphi'(x)=2e^x-2x-2=2(e^x-x-1)$，

令 $g(x)=e^x-x-1$，$x>0$，

$\therefore g'(x)=e^x-1>0$，$\therefore g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

$\therefore g(x)>g(0)=0$，$\therefore e^x-x-1>0$，

$\therefore \varphi'(x)>0$，

$\therefore \varphi(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

$\therefore \varphi(x)>\varphi(0)=0$，即证 $2e^x-x^2-2x-2>0$，

即证 $\ln(x+1)>\dfrac{x^2}{e^x-1}$.