湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点解答 1

题型一　判断、证明或讨论函数零点的个数

1.证明　(1)设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$.

当 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)$单调递减，而 $g'(0)>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，可得 $g'(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$有唯一零点，设为 α.

则当 $x\in(-1,\alpha)$时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$在$(-1,\alpha)$上单调递增，在$\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，故 $g(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点，

即 $f'(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点.

(2)$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

①当 $x\in(-1,0]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(-1,0)$上单调递增，而 $f'(0)=0$，

所以当 $x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减.

又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$在$(-1,0]$上的唯一零点；

②当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(0,\alpha)$上单调递增，在$\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，而 $f'(0)=0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，

所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\beta)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$在$(0,\beta)$上单调递增，在$\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减.又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$，

所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)>0$.从而，$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上没有零点；

③当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}<0$，所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减.而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$，

所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$上有唯一零点；

④当 $x\in(\pi,+\infty)$时，$\ln(x+1)>1$，所以 $f(x)<0$，从而 $f(x)$在$(\pi,+\infty)$上没有零点.

综上，$f(x)$有且仅有 2 个零点.

2(1)解　由函数的解析式，得 $f'(x)=x(e^x-2a)$，$x\in\mathbf{R}$.
当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\ln(2a)$，

当 $0<a<\frac{1}{2}$时，令 $f'(x)>0$，得 $x>0$ 或 $x<\ln(2a)$；

令 $f'(x)<0$，得 $\ln(2a)<x<0$，
所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln(2a))$，$(0,+\infty)$上单调递增，在$(\ln(2a),0)$上单调递减.

当 $a=\frac{1}{2}$时，$f'(x)=x(e^x-1)\geqslant 0$ 且等号不恒成立，所以 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增.

当 $a>\frac{1}{2}$时，令 $f'(x)>0$，得 $x<0$ 或 $x>\ln(2a)$；令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\ln(2a)$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，0)$，$(\ln(2a)，+\infty)$上单调递增，在$(0，\ln(2a))$上单调递减.

(2)证明　由于$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，故 $1<2a\leqslant e^2$，

则 $b>2a>1$，$f(0)=b-1>0$，$f(-b)=(-1-b)e^{-b}-ab^2+b<0$.
又由(1)知函数 $f(x)$在区间$(-\infty，0)$上单调递增，故函数 $f(x)$在区间$(-\infty，0)$上有一个零点.
$f(\ln(2a))=2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+b>2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+2a=2a\ln(2a)-a[\ln(2a)]^2=a\ln(2a)[2-\ln(2a)]$，

由于$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，$1<2a\leqslant e^2$，故 $a\ln(2a)[2-\ln(2a)]\geqslant 0$，

结合函数 $f(x)$的单调性可知函数 $f(x)$在区间$(0，+\infty)$上没有零点.
综上可得，函数 $f(x)$只有一个零点.
（3）证明　由(1)知，$f(x)$在$(-\infty，\ln(2a))$，$(0，+\infty)$上单调递增，在$(\ln(2a)，0)$上单调递减.
$f(\ln(2a))=2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+b\leqslant 2a[\ln(2a)-1]-a[\ln(2a)]^2+2a=2a\ln(2a)-a[\ln(2a)]^2=a\ln(2a)[2-\ln(2a)]$，

由于 $0<a<\frac{1}{2}$，$0<2a<1$，则 $\ln(2a)<0$，故 $a\ln(2a)[2-\ln(2a)]<0$，

所以 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant f(\ln(2a))<0$，此时 $f(x)$无零点；
当 $x>0$ 时，$f(x)$单调递增，注意到 $f(0)=b-1\leqslant 2a-1<0$，
取 $c=\sqrt{2（1-b）+2}$，因为 $b\leqslant 2a<1$，所以 $c>\sqrt{2}>1$，
又易证 $e^c>c+1$，

所以 $f(c)=(c-1)e^c-ac^2+b>(c-1)(c+1)-ac^2+b=(1-a)c^2+b-1>\frac{1}{2}c^2+b-1=1-b+1+b-1=1>0$，

所以 $f(x)$在$(0，c)$上有唯一零点，即 $f(x)$在$(0，+\infty)$上有唯一零点.
综上，$f(x)$只有一个零点.
3.解　(1)当 $a=e$ 时，$f(x)=e^x-ex$，$f'(x)=e^x-e$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，
当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，
则 $f(x)$的最小值为 $f(1)=0$，无最大值.
(2)$g(x)=f'(x)=a^x\ln a-a$，
①若 $0<a<1$，$g(x)<0$ 在$(0，1)$恒成立，此时 $g(x)$在$(0，1)$没有零点.
②若 $a>1$，$g'(x)=(\ln a)^2\,a^x>0$，所以 $g(x)$在$(0，1)$单调递增.

易得 $g(0)=\ln a-a$，令 $h(a)=\ln a-a(a>1)$，因为 $h'(a)=\frac{1}{a}-1<0$，所以 $h(a)$在$(1，+\infty)$单调递减，

故 $h(a)<h(1)=-1<0$，所以 $g(0)=\ln a-a<0$；又 $g(1)=a\ln a-a=a(\ln a-1)$，
①当 $1<a\leqslant e$ 时，$g(1)\leqslant 0$，$g(x)$在$(0，1)$没有零点.
②当 $a>e$ 时，$g(1)>0$，$g(x)$在$(0，1)$有且只有 1 个零点.
综上所述，若 $0<a<1$ 或 $1<a\leqslant e$，$g(x)$在$(0，1)$没有零点；若 $a>e$，$g(x)$在$(0，1)$有且只有 1 个零点.

4.解　$t(x)=0$，$x\in(0，\pi)$，即$\frac{x^2-1}{\sin x}-2=0$，等价于 $x^2-1-2\sin x=0$.设 $g(x)=x^2-1-2\sin x$，$x\in(0，\pi)$，

则 $g'(x)=2x-2\cos x$.

①当 $x\in\left[\frac{\pi}{2}，\pi\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{2}，\pi\right)$上单调递增．又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-3<0$，$g(\pi)=\pi^2-1>0$，

所以 $g(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{2}，\pi\right)$上有一个零点．

②当 $x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$时，设 $h(x)=g'(x)=2x-2\cos x$.$h'(x)=2+2\sin x>0$，

所以 $g'(x)$在区间$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增. 又 $g'(0)=-2<0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi>0$，

所以存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $g'(x_0)=0$.所以当 $x\in(0,x_0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增. 又 $g(0)=-1<0$，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}-3<0$，所以 $g(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上无零点．

综上所述，函数 $t(x)$在定义域内只有一个零点．

5.解　(1)由 $f(x)=\ln x-ae^x+1$，知 $x\in(0,+\infty)$．

当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-e^x+1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-e^x$，显然 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减．

又 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$，$f'(1)=1-e<0$，

所以 $f'(x)$在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$上存在零点 x_0，且是唯一零点，

当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)<0$，

所以 x_0 是 $f(x)=\ln x-e^x+1$ 的极大值点，且是唯一极值点．

(2)令 $f(x)=\ln x-ae^x+1=0$，则 $a=\dfrac{\ln x+1}{e^x}$.令 $y=a$，$g(x)=\dfrac{\ln x+1}{e^x}$，$g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}(x>0)$．

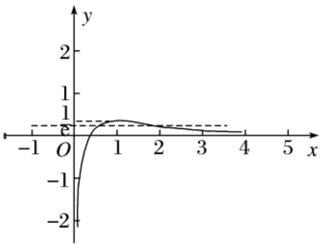
令 $h(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$，则 $h'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}<0$，所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，而 $h(1)=0$，

故当 $x\in(0,1)$时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$g(x)$单调递减．故 $g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$.

又 $g\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$，当 $x>1$ 且 $x\to+\infty$时，$g(x)>0$ 且 $g(x)\to0$，

作出函数 $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{e^x}$的图象如图所示．



结合图象知，当 $a>\dfrac{1}{e}$时，$f(x)$无零点，

当 $a\leqslant0$ 或 $a=\dfrac{1}{e}$时，$f(x)$有 1 个零点，

当 $0<a<\dfrac{1}{e}$时，$f(x)$有两个零点．

6．证明　$f'(x)=\dfrac{1}{x}-axe^x=\dfrac{1-ax^2e^x}{x}$，令 $g(x)=1-ax^2e^x(x>0)$，

$\therefore g'(x)=-ax(x+2)e^x<0$，$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

又 $g(1)=1-ae>0$，$g\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)^2\dfrac{1}{a}=1-\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)^2<0$，

$\therefore\exists x_0\in\left(1,\ln\dfrac{1}{a}\right)$，使 $g(x_0)=0$，即 $1-ax_0^2e^{x_0}=0$，$\therefore$当 $x\in(0,x_0)$时，$g(x)>0$，$\therefore f'(x)>0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$g(x)<0$，$\therefore f'(x)<0$，$\therefore f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,+\infty)$上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(x_0)>f(1)=0$，

$\because f(1)=0$，$\therefore f(x)$在$(0,x_0)$上有唯一零点 1，又 $f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=\ln\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)-\ln\dfrac{1}{a}+1$，易证 $\ln x<x-1(x>1)$，

$\therefore\ln\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)<\ln\dfrac{1}{a}-1$，$\therefore f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)<0$，$\therefore f(x)$在$(x_0,+\infty)$上有唯一零点，

综上，$f(x)$有两个零点．

7.证明　(1)$f'(x)=\ln x-2ax+2$，则 $f'(1)=2-2a$，即切线斜率为 $2-2a$，又 $f(1)=1-a$，

则切线 l 的方程为 $y-(1-a)=(2-2a)(x-1)$，即 $y=(2-2a)\left(x-\frac{1}{2}\right)$，

可得当 $x=\frac{1}{2}$时，$y=0$，故切线 l 恒过定点$\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(2)∵x_1，x_2 是 $f(x)$的零点，$x_2>2x_1$，且 $x_1>0$，$x_2>0$，

则$\begin{cases}x_1\ln x_1-ax_1^2+x_1=0,\\ x_2\ln x_2-ax_2^2+x_2=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}\ln x_1+1=ax_1,\\ \ln x_2+1=ax_2,\end{cases}$ $\therefore a=\frac{\ln x_1+\ln x_2+2}{x_1+x_2}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

即 $\ln(x_1x_2)+2=\frac{(x_1+x_2)\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$，令 $t=\frac{x_2}{x_1}$，则 $t>2$，则 $\ln(x_1x_2)+2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$，

令 $g(t)=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$，则 $g'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$.

令 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$，则 $h'(t)=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$，则 $h(t)$单调递增，

$\therefore h(t)>h(2)=\frac{3}{2}-2\ln 2>0$，即 $g'(t)>0$，则 $g(t)$单调递增，$\therefore g(t)>g(2)=3\ln 2$，

$\therefore \ln(x_1x_2)+2>3\ln 2$，即 $\ln(x_1x_2)>3\ln 2-2=\ln\frac{8}{e^2}$，即 $x_1x_2>\frac{8}{e^2}$，

则$\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\sqrt{2x_1x_2}>\frac{4}{e}$(由于 $x_1\neq x_2$，故不取等号)，

8.【解析】:（Ⅰ）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切于点 $(x_0,0)$，

则 $f(x_0)=0$， $f'(x_0)=0$，即$\begin{cases}x_0^3+ax_0+\frac{1}{4}=0\\ 3x_0^2+a=0\end{cases}$，解得 $x_0=\frac{1}{2},a=-\frac{3}{4}$.

因此，当 $a=-\frac{3}{4}$时， x 轴是曲线 $y=f(x)$ 的切线.

（Ⅱ）当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $g(x)=-\ln x<0$，从而 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\le g(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 在（1，+∞）无零点.

当 x=1 时，若 $a\ge-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}\ge0$， $h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=g(1)=0$，故 x=1 是 $h(x)$ 的零点；若 $a<-\frac{5}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{5}{4}<0$， $h(1)=\min\{f(1),g(1)\}=f(1)<0$，故 x=1 不是 $h(x)$ 的零点.

当 $x\in(0,1)$ 时， $g(x)=-\ln x>0$，所以只需考虑 $f(x)$ 在（0, 1）的零点个数.

（ⅰ）若 $a\le-3$ 或 $a\ge0$，则 $f'(x)=3x^2+a$ 在(0, 1)无零点，故 $f(x)$ 在(0, 1)单调，而 $f(0)=\frac{1}{4}$， $f(1)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $a\le-3$ 时， $f(x)$ 在（0，1）有一个零点；当 $a\ge0$ 时， $f(x)$ 在（0，1）无零点.

（ⅱ）若 $-3<a<0$，则 $f(x)$ 在（0，$\sqrt{-\frac{a}{3}}$）单调递减，在（$\sqrt{-\frac{a}{3}}$，1）单调递增，故当 $x=\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 时， $f(x)$ 取

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点解答 2

的最小值，最小值为 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}$.

①若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)>0$，即 $-\frac{3}{4}<a<0$， $f\left(x\right)$ 在（0, 1）无零点.

②若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=0$，即 $a=-\frac{3}{4}$，则 $f\left(x\right)$ 在（0, 1）有唯一零点；

③若 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)<0$，即 $-3<a<-\frac{3}{4}$，由于 $f\left(0\right)=\frac{1}{4}$， $f\left(1\right)=a+\frac{5}{4}$，所以当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时， $f\left(x\right)$ 在（0, 1）有两个零点；当 $-3<a\le-\frac{5}{4}$ 时， $f\left(x\right)$ 在（0, 1）有一个零点. …10 分

综上，当 $a>-\frac{3}{4}$ 或 $a<-\frac{5}{4}$ 时，$h\left(x\right)$ 由一个零点；当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{5}{4}$ 时，$h\left(x\right)$ 有两个零点；当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$h\left(x\right)$ 有三个零点.

题型二　根据零点个数求参数范围

9.解　(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-2$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，在$(0,+\infty)$单调递增.

(2)$f'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增.故 $f(x)$至多存在一个零点，不合题意.

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=\ln a$.当 $x\in(-\infty,\ln a)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$单调递减，在$(\ln a,+\infty)$单调递增.

故当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$.

(ⅰ)若 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)\geqslant 0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$至多存在一个零点，不合题意.

(ⅱ)若 $a>\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)<0$.因为 $f(-2)=e^{-2}>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$存在唯一零点.

由(1)知，当 $x>2$ 时，$e^x-x-2>0$.所以当 $x>4$ 且 $x>2\ln(2a)$时，$f(x)=e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\ln(2a)}\left(\frac{x}{2}+2\right)-a(x+2)=2a>0$.

故 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$存在唯一零点.从而 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有两个零点.

综上，a 的取值范围是$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

10.解 (1)当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{2^x}(x>0)$，$f'(x)=\frac{x(2-x\ln 2)}{2^x}(x>0)$，

令 $f'(x)>0$，则 $0<x<\frac{2}{\ln 2}$，此时函数 $f(x)$单调递增，

令 $f'(x)<0$，则 $x>\frac{2}{\ln 2}$，此时函数 $f(x)$单调递减，

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$，单调递减区间为$\left(\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$.

(2)曲线 $y=f(x)$与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，

可转化为方程$\frac{x^a}{a^x}=1(x>0)$有两个不同的解，即方程$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$有两个不同的解.

设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$，令 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，得 $x=\mathrm{e}$，

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$单调递增，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$单调递减，

故 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

且当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g(x)\in\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，又 $g(1)=0$，所以 $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $a>1$ 且 $a\neq\mathrm{e}$，

即 a 的取值范围为$(1, \mathrm{e})\cup(\mathrm{e}, +\infty)$.

11.(1)证明 当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant 1$ 等价于$(x^2+1)\mathrm{e}^{-x}-1\leqslant 0$.

设函数 $g(x)=(x^2+1)\mathrm{e}^{-x}-1$，则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)\mathrm{e}^{-x}=-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}$，

当 $x\neq 1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(0, +\infty)$单调递减，而 $g(0)=0$，故当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\geqslant 1$.

(2)解 设函数 $h(x)=1-ax^2\mathrm{e}^{-x}$.$f(x)$在$(0, +\infty)$只有一个零点当且仅当 $h(x)$在$(0, +\infty)$只有一个零点.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$h(x)>0$，$h(x)$没有零点；

②当 $a>0$ 时，$h'(x)=ax(x-2)\mathrm{e}^{-x}$.当 $x\in(0, 2)$时，$h'(x)<0$；当 $x\in(2, +\infty)$时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$在$(0, 2)$单调递减，在$(2, +\infty)$单调递增.

故 $h(2)=1-\frac{4a}{\mathrm{e}^2}$是 $h(x)$在$[0, +\infty)$的最小值.

1 若 $h(2)>0$，即 $a<\frac{\mathrm{e}^2}{4}$，$h(x)$在$(0, +\infty)$没有零点；

2 若 $h(2)=0$，即 $a=\frac{\mathrm{e}^2}{4}$，$h(x)$在$(0, +\infty)$只有一个零点；

3 若 $h(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$，由于 $h(0)=1$，所以 $h(x)$在$(0，2)$有一个零点.

由(1)知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，所以 $h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0$.

故 $h(x)$在$(2，4a)$有一个零点.

因此 $h(x)$在$(0，+\infty)$有两个零点.

综上 $f(x)$在$(0，+\infty)$只有一个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$.

12.证明　(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，导函数 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$，

由 $f'(x_1)=f'(x_2)$得$\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_2}}-\frac{1}{x_2}$，

因为 $x_1\neq x_2$，所以$\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{1}{2}$.

由基本不等式得$\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geqslant 2\sqrt[4]{x_1x_2}$，

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1x_2>256$.

由题意得 $f(x_1)+f(x_2)=\sqrt{x_1}-\ln x_1+\sqrt{x_2}-\ln x_2=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln(x_1x_2)$.

设 $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}-\ln x$，

则 $g'(x)=\frac{1}{4x}(\sqrt{x}-4)$，

所以 $x>0$ 时，$g'(x)$，$g(x)$的变化情况如下表：

x	$(0，16)$	16	$(16，+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$		$2-4\ln 2$	

所以 $g(x)$在$(256，+\infty)$上单调递增，故 $g(x_1x_2)>g(256)=8-8\ln 2$，即 $f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$.

(2)令 $m=e^{-(|a|+k)}$，$n=\left(\frac{|a|+1}{k}\right)^2+1$，则 $f(m)-km-a>|a|+k-k-a\geqslant 0$，

$f(n)-kn-a<n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{n}-k\right)\leqslant n\left(\frac{|a|+1}{\sqrt{n}}-k\right)<0$，所以，存在 $x_0\in(m，n)$使 $f(x_0)=kx_0+a$，

所以，对于任意的 $a\in\mathbf{R}$ 及 $k\in(0，+\infty)$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$有公共点.

由 $f(x)=kx+a$ 得 $k=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$.设 $h(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{\ln x-\frac{\sqrt{x}}{2}-1+a}{x^2}=\dfrac{-g(x)-1+a}{x^2}$，

其中 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln x$.由(1)可知 $g(x)\geqslant g(16)$，又 $a\leqslant 3-4\ln 2$，

故 $-g(x)-1+a\leqslant -g(16)-1+a=-3+4\ln 2+a\leqslant 0$，

所以 $h'(x)\leqslant 0$，即函数 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，因此方程 $f(x)-kx-a=0$ 至多 1 个实根.

综上，当 $a\leqslant 3-4\ln 2$ 时，对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$有唯一公共点.

13.解　当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$在区间$(-\infty,0)$单调递减，又 $h(-\sqrt{m})=0$，

故 $h(x)$在区间$(-\infty,0)$有唯一实根，

当 $x>0$ 时，$h(x)=\ln x^2-x+\dfrac{m}{x}-\ln m$，$h'(x)=\dfrac{2}{x}-1-\dfrac{m}{x^2}=\dfrac{-x^2+2x-m}{x^2}$，

①若 $m\geqslant 1$，$-x^2+2x-m=-(x-1)^2+1-m\leqslant 0$，

当 $x>0$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，$h(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递减，

故 $h(x)$在区间$(0,+\infty)$至多有一个实根，不符合题意.

②若 $0<m<1$，令 x_1，$x_2(x_1<x_2)$是方程 $-x^2+2x-m=0$ 的两不同实根，

则 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=m$，则 $0<x_1<x_2$，

故 $h(x)$在区间$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上单调递减，在区间(x_1,x_2)上单调递增.

$h(x_1)=\ln x_1^2-x_1+\dfrac{m}{x_1}-\ln m=\ln x_1^2-x_1+\dfrac{-x_1^2+2x_1}{x_1}-\ln(-x_1^2+2x_1)=-2x_1+2+\ln x_1-\ln(2-x_1)$，

$\varphi(x)=-2x+2+\ln x-\ln(2-x)(0<x<1)$，$\varphi'(x)=-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{2(x-1)^2}{x(2-x)}>0$，

$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，$h(x_1)<0$，同理可证 $h(x_2)>0$.

取 $x_3=\left(1+\sqrt{2+\dfrac{1}{m}}\right)^2>x_2=1+\sqrt{1-m}$，$h(x_3)<2\sqrt{x_3}-x_3+1+\dfrac{1}{m}=0$.取 $x_4=\min\left\{\ln\dfrac{1}{m},\dfrac{m^2}{4}\right\}$，

$x_4\leqslant\dfrac{m^2}{4}<\dfrac{m}{2}<x_1=1-\sqrt{1-m}$，$h(x_4)>2\sqrt{x_4}-\dfrac{2}{\sqrt{x_4}}+\dfrac{m}{x_4}+\left(\ln\dfrac{1}{m}-x_4\right)=2\sqrt{x_4}+\dfrac{m-2\sqrt{x_4}}{x_4}+\left(\ln\dfrac{1}{m}-x_4\right)>0$.

故 $h(x)$在(x_4,x_1)，(x_1,x_2)，(x_2,x_3)各存在一个零点，

实数 m 的取值范围是$(0,1)$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点解答 3

14.

【解答】解：（1） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=a(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})=\frac{a(x-1)}{x^2}$，

当 $a>0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，
所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 a，
当 $a=0$ 时， $f(x)=0$，所以无极值，
当 $a<0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，
所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 a.

（2）设 $h(x)=2f(x)-lnx+x+2$，即 $h(x)=(2a-1)lnx+\frac{2a}{x}+x+2$，

$h'(x)=\frac{2a-1}{x}-\frac{2a}{x^2}+1=\frac{(x-1)(x+2a)}{x^2}(x>0)$.

①若 $a\geqslant 0$，则当 $x\in(0,1)$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减，
当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增， $h(x)$ 至多有两个零点.

②若 $a=-\frac{1}{2}$，则 $x\in(0,+\infty)$， $h'(x)\geqslant 0$（仅 h'（1）$=0)$，

$h(x)$ 单调递增， $h(x)$ 至多有一个零点.

③若 $-\frac{1}{2}<a<0$，则 $0<-2a<1$，

当 $x\in(0,-2a)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增；
当 $x\in(-2a,1)$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减，

要使 $h(x)$ 有三个零点，必须有 $\begin{cases}h(-2a)>0\\h(1)<0\end{cases}$ 成立.

由 h（1）<0，得 $a<-\frac{3}{2}$，这与 $-\frac{1}{2}<a<0$ 矛盾，所以 $h(x)$ 不可能有三个零点.

④若 $a<-\frac{1}{2}$，则 $-2a>1$．当 $x\in(0,1)$ 或 $x\in(-2a,+\infty)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增；
当 $x\in(1,-2a)$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 单调递减，

要使 $h(x)$ 有三个零点，必须有 $\begin{cases}h(1)>0\\h(-2a)<0\end{cases}$ 成立，

由 h（1）>0，得 $a>-\frac{3}{2}$，

由 $h(-2a)=(2a-1)[ln(-2a)-1]<0$ 及 $a<-\frac{1}{2}$，得 $a<-\frac{e}{2}$，

$\therefore -\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$．并且，当 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$ 时， $0<e^{-2}<1$， $e^2>-2a$，

$h(e^{-2})=4+e^{-2}+2a(e^2-2)<4+e^{-2}-e(e^2-2)<4+1-5e<0$，

$h(e^2)=e^2+2a(e^{-2}+2)>e^2-3(e^{-2}+2)=e^2-6-3e^{-2}>e^2-7>0$.

综上，使 $h(x)$ 有三个零点的 a 的取值范围为 $(-\frac{3}{2},-\frac{e}{2})$.

15.解：（1）函数 $f(x)=e^x-a(x-2)^2$， $a>0$， $f'(x)=e^x-2a(x-2)=g(x)$，

$g'(x)=e^x-2a$，令 $g'(x)=e^x-2a=0$，解得 $x_0=ln(2a)$.

可得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0，+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore g(x)_{min}=g(x_0)=g(ln(2a))=2a-2a(ln(2a)-2)=6a-2aln(2a)$，

①令 $6a-2aln(2a)\geqslant0$，化为：$ln(2a)\leqslant3$，解得 $a\leqslant\frac{e^3}{2}$.

$\therefore 0<a\leqslant\frac{e^3}{2}$ 时， $f'(x)\geqslant0$，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

令 $6a-2aln(2a)<0$，化为： $ln(2a)>3$，解得 $a>\frac{e^3}{2}$.

$x\to-\infty$ 时， $f'(x)\to+\infty$； $x\to+\infty$ 时， $f'(x)\to+\infty$.

$\therefore$ 存在 $2<x_1<x_2$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

可得：函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 单调递增，在 $(x_1，x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2，+\infty)$ 上单调递增.

综上可得： $0<a\leqslant\frac{e^3}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

$a>\frac{e^3}{2}$ 时．函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 单调递增，在 $(x_1，x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2，+\infty)$ 上单调递增.

其中 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

②由上面可得： $x_0=ln(2a)$ 时， $f'(x)$ 取得最小值，$\therefore m=6a-2aln(2a)$，令 $2a=t>0$.

$u(t)=3t-tlnt$，令 $u'(t)=3-lnt-1=2-lnt=0$，解得 $t=e^2$． $\therefore m\leqslant u(e^2)=3e^2-e^2lne^2=e^2$.

$\therefore m\leqslant e^2$.

（2）函数 $f(x)=e^x-a(x-2)^2$， $a>0$，

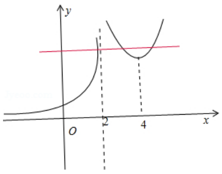
$\because f$ （2） $=e^2\neq0$，$\therefore 2$ 不是函数 $f(x)$ 的零点．由 $f(x)=e^x-a(x-2)^2=0$，化为： $a=\frac{e^x}{(x-2)^2}(x\neq2)$.

令 $G(x)=\frac{e^x}{(x-2)^2}(x\neq2)$，可得 $G'(x)=\frac{e^x(x-4)}{(x-2)^3}$.

可得函数 $G(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,4)$ 上单调递减，在 $(4,+\infty)$ 上单调递增． G （4） $=\frac{e^4}{4}$.

画出图象：可得 $a>\frac{e^4}{4}$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $(\frac{e^4}{4}，+\infty)$.



16.解　(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-(x+2)$，$f'(x)=e^x-1$，

令 $f'(x)<0$，解得 $x<0$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增．

(2)方法一　$f'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增．故 $f(x)$至多存在一个零点，不符合题意．

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=\ln a$.

当 $x\in(-\infty,\ln a)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增．

故当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$．

(ⅰ)若 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$，则 $f(\ln a)\geqslant 0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上至多存在一个零点，不符合题意．

(ⅱ)若 $a>\frac{1}{e}$，$f(\ln a)<0$.因为 $f(-2)=e^{-2}>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上存在唯一零点．

由(1)知，当 $x>2$ 时，$e^x-x-2>0$，

所以当 $x>4$ 且 $x>2\ln 2a$ 时，$f(x)=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\ln 2a}\left(\frac{x}{2}+2\right)-a(x+2)=2a>0$.

故 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上存在唯一零点．从而 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有两个零点．

综上，a 的取值范围是$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

方法二　令 $f(x)=0$，得 $e^x=a(x+2)$，即$\frac{1}{a}=\frac{x+2}{e^x}$，

所以函数 $y=\frac{1}{a}$的图象与函数 $\varphi(x)=\frac{x+2}{e^x}$的图象有两个交点，

$\varphi'(x)=\frac{-x-1}{e^x}$，当 $x\in(-\infty,-1)$时，$\varphi'(x)>0$；当 $x\in(-1,+\infty)$时，$\varphi'(x)<0$，

所以 $\varphi(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增，在$(-1,+\infty)$上单调递减，

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(-1)=e$，且 $x\to-\infty$时，$\varphi(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to 0$，

所以 $0<\frac{1}{a}<e$，解得 $a>\frac{1}{e}$.

所以 a 的取值范围是$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

17.解　$f(x)=\frac{x^a}{a^x}=1\Leftrightarrow a^x=x^a\Leftrightarrow x\ln a=a\ln x\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$，设函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，

则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=e$，

在$(0,e)$上，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

在$(e,+\infty)$上，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

$\therefore g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，

又 $g(1)=0$，当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to 0$，

∴曲线 $y=f(x)$与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，即曲线 $y=g(x)$与直线 $y=\frac{\ln a}{a}$有两个交点的充要条件是 $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$，这即是 $0<g(a)<g(e)$，

∴a 的取值范围是$(1，e)\cup(e，+\infty)$．

18.解　(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-2$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.所以 $f(x)$在$(-\infty，0)$单调递减，在$(0，+\infty)$单调递增.

(2)$f'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$单调递增.故 $f(x)$至多存在一个零点，不合题意.

②当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=\ln a$.当 $x\in(-\infty，\ln a)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln a，+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(-\infty，\ln a)$单调递减，在$(\ln a，+\infty)$单调递增.

故当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(\ln a)=-a(1+\ln a)$.

又当 $x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

所以要使 $f(x)$有两个零点，只要 $f(\ln a)<0$ 即可，则 $1+\ln a>0$，可得 $a>\frac{1}{e}$.

综上，若 $f(x)$有两个零点，a 的取值范围是$\left(\frac{1}{e}，+\infty\right)$.

类型三　求零点及零点代数式的最值与范围

19.解　(1)$f'(x)=\frac{a}{x}-2=\frac{a-2x}{x}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，不符合题意；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，即 $a-2x>0$，解得 $x<\frac{a}{2}$，则 $f(x)$在$\left(0，\frac{a}{2}\right)$上单调递增，$\left(\frac{a}{2}，+\infty\right)$上单调递减，

故要使 $f(x)$有两个零点，只需 $f\left(\frac{a}{2}\right)>0$，即 $a\ln\frac{a}{2}-a+3>0$.

令 $g(a)=a\ln\frac{a}{2}-a+3=a\ln a-a\ln 2-a+3(a>0)$，$g'(a)=1+\ln a-\ln 2-1=\ln a-\ln 2$，

∴当 $a\in(0，2)$时，$g'(a)<0$，$g(a)$单调递减；当 $a\in(2，+\infty)$时，$g'(a)>0$，$g(a)$单调递增，

∴$g(a)_{\min}=g(2)=1>0$，∴$g(a)>0$ 恒成立，∴a 的取值范围为$(0，+\infty)$.

(2)由题意得 $a\ln x_1-2x_1+3=a\ln x_2-2x_2+3=0$，

即 $a=\frac{2x_1-3}{\ln x_1}=\frac{2x_2-3}{\ln x_2}=\frac{2(x_2-x_1)}{\ln\frac{x_2}{x_1}}=\frac{2x_1\left(\frac{x_2}{x_1}-1\right)}{\ln\frac{x_2}{x_1}}$，∴$\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}=\frac{2x_1-3}{2x_1\ln x_1}$.

由于 $f(1)=1$，∴$0<x_1<1<x_2$.令$\frac{x_2}{x_1}=t$，函数 $h(t)=\frac{t-1}{\ln t}$，$t>1$，

则 $h'(t)=\frac{\ln t-(t-1)\frac{1}{t}}{\ln^2 t}=\frac{\ln t-1+\frac{1}{t}}{\ln^2 t}$.令函数 $\varphi(t)=\ln t-1+\frac{1}{t}$，则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}>0$，

∴函数 $\varphi(t)$在$(1，+\infty)$上单调递增，又 $\varphi(1)=0$，∴$h'(t)>0$ 在$(1，+\infty)$恒成立，函数 $h(t)$在$(1，+\infty)$上单调递增，

故当 t 取最小值时，等价于 $h(t)$取最小值

湛江一中卓越班 2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点解答 4

.令函数 $F(x)=\dfrac{2x-3}{2x\ln x}(0<x<1)$，则 $F'(x)=\dfrac{2x\ln x-(2x-3)(1+\ln x)}{2x^2\ln^2 x}=\dfrac{3\ln x-(2x-3)}{2x^2\ln^2 x}$.

令 $G(x)=3\ln x-(2x-3)$，则 $G'(x)=\dfrac{3}{x}-2=\dfrac{3-2x}{x}$，$\therefore G(x)$在$(0，1)$上单调递增.

又 $G(1)=1>0$，$\therefore G(x)=0$ 在$(0，1)$内存在唯一实根 m，

即 $G(m)=0$，$3\ln m-(2m-3)=0$，$\therefore$函数 $F(x)$在$(0，m)$上单调递减，在$(m，1)$上单调递增，$\therefore F(x)_{\min}=F(m)$，

$\because h(t)=F(x_1)$，$\therefore$当 $h(t)$取最小值时，$F(x_1)$取最小值，此时 $a=\dfrac{2x_1-3}{\ln x_1}=3$.

综上所述，$a=3$.

20（1）由题意，函数 $f(x)=x\ln x+\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}$，

设 $g(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}$，

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f'(1)=0$，所以当 $0<x<1$时，$f'(x)<0$，当 $x>1$时，$f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

（2）设函数 $F(x)=x\ln x+\dfrac{1}{x}-kx+k$，

由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-k(k>0)$ 有且只有一个公共点 $P(x_0,y_0)$，等价于函数 $F(x)$ 有且只有一个零点 x_0，

又由 $F'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}-k$，设 $h(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}-k$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}$，

当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，即 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $F'(1)=-k<0, F'(e^k)=1-\dfrac{1}{e^{2k}}>0$，所以存在 $x_1\in(1,e^k)$，使 $F'(x_1)=0$，

所以当 $0<x<x_1$ 时，$F'(x)<0, F(x)$ 单调递减，当 $x>x_1$ 时，$F'(x)>0, F(x)$ 单调递增，

而 $F(1)=1>0, F(e^{k+1})=e^{k+1}\ln e^{k+1}+\dfrac{1}{e^{k+1}}-ke^{k+1}+k=e^{k+1}+\dfrac{1}{e^{k+1}}+k>0$，

所以要使函数 $F(x)$ 有且只有一个零点 x_0，则 $x_1=x_0$，

所以 $\begin{cases}F(x_0)=0\\F'(x_0)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_0\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}-kx_0+k=0\\\ln x_0+1-\dfrac{1}{x_0^2}-k=0\end{cases}$，消元得 $\ln x_0-x_0+\dfrac{2}{x_0}-\dfrac{1}{x_0^2}+1=0$.

令 $G(x)=\ln x-x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+1$，则 $G'(x)=\dfrac{1}{x}-1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{(x-1)\left(-x^2-2\right)}{x^3}$，

当 $x>1$ 时，$G'(x)<0$，所以函数 $G(x)$ 单调递减，

又由 $G(2)=\ln 2-\dfrac{1}{4}>0, G(3)=\ln 3-\dfrac{13}{9}<0$，所以存在 $x_0\in(2,3)$，使得 $G\left(x_0\right)=0$，

即若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-k(k>0)$ 有且只有一个公共点 $P\left(x_0,y_0\right)$，则 $2<x_0<3$.

21.（1）因为 $f'(x)=3x^2+b$，由题意，$f'(\dfrac{1}{2})=0$，即 $3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b=0$，则 $b=-\dfrac{3}{4}$；

（2）由（1）可得 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{4}=3(x+\dfrac{1}{2})(x-\dfrac{1}{2})$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{1}{2}$ 或 $x<-\dfrac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，得 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(-\infty,-\dfrac{1}{2})$，$(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(-1)=c-\dfrac{1}{4}, f(-\dfrac{1}{2})=c+\dfrac{1}{4}, f(\dfrac{1}{2})=c-\dfrac{1}{4}, f(1)=c+\dfrac{1}{4}$，

若 $f(x)$ 所有零点中存在一个绝对值大于 1 的零点 x_0，则 $f(-1)>0$ 或 $f(1)<0$，即 $c>\dfrac{1}{4}$ 或 $c<-\dfrac{1}{4}$.

当 $c>\dfrac{1}{4}$ 时，$f(-1)=c-\dfrac{1}{4}>0, f(-\dfrac{1}{2})=c+\dfrac{1}{4}>0, f(\dfrac{1}{2})=c-\dfrac{1}{4}>0, f(1)=c+\dfrac{1}{4}>0$，

又 $f(-4c)=-64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)<0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(-4c,-1)$ 上存在唯一一个零点 x_0，

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-1,+\infty)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；

当 $c<-\dfrac{1}{4}$ 时，$f(-1)=c-\dfrac{1}{4}<0, f(-\dfrac{1}{2})=c+\dfrac{1}{4}<0, f(\dfrac{1}{2})=c-\dfrac{1}{4}<0, f(1)=c+\dfrac{1}{4}<0$，

又 $f(-4c)=64c^3+3c+c=4c(1-16c^2)>0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(1,-4c)$ 上存在唯一一个零点 x_0'，

即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在唯一一个零点，在 $(-\infty,1)$ 上不存在零点，

此时 $f(x)$ 不存在绝对值不大于 1 的零点，与题设矛盾；
综上，$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

22（Ⅰ）证明：由题知 $f\left(x\right)=\ln x+x-4-axe^{x}$，则 $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+1-e\left(x+1\right)e^{x}=\frac{\left(x+1\right)\left(1-exe^{x}\right)}{x}$，

令 $u\left(x\right)=1-exe^{x}$，则 $u'\left(x\right)=-e\left(x+1\right)e^{x}<0$（$x>0$），$\therefore u(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减.

又 $u\left(0\right)=1>0$，$u\left(\frac{1}{e}\right)=1-e^{\frac{1}{e}}<0$，

所以存在 $x_0\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，使得 $u\left(x_0\right)=0$，

综上 $f'\left(x\right)$ 存在唯一零点 $x_0\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

当 $x\in\left(0,x_0\right)$，$u\left(x\right)>0$，于是 $f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 单调递增；

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$，$u\left(x\right)<0$，于是 $f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 单调递减.

故 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(x_0\right)=\ln x_0+x_0-4-ex_0e^{x_0}$，

又 $u\left(x_0\right)=1-ex_0e^{x_0}=0$，$ex_0=\frac{1}{e^{x_0}}$，$x_0=\ln\frac{1}{ex_0}=-1-\ln x_0$，

故 $f\left(x\right)_{\max}=\ln x_0+\left(-1-\ln x_0\right)-4-ex_0\frac{1}{ex_0}=-6$.

（Ⅱ）$\left|p\left(x\right)\right|>q\left(x\right),\left|\ln x+x-4\right|>axe^{x}\Leftrightarrow a<\frac{\left|\ln x+x-4\right|}{xe^{x}}$

令 $h\left(x\right)=\frac{\ln x+x-4}{xe^{x}}$，则 $h'\left(x\right)=\frac{\left(x+1\right)\left(\ln x+x-5\right)}{x^2e^{x}}$，

令 $\varphi\left(x\right)=\ln x+x-5$，则 $\varphi\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增.

又 $\varphi\left(3\right)=\ln 3-2<0$，$\varphi\left(4\right)=\ln 4-1>0$，

$\therefore$ 存在 $t\in\left(3,4\right)$，使得 $\varphi\left(t\right)=0$.

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,t\right)$，$\varphi\left(x\right)<0$，即 $h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$ 在 $\left(0,t\right)$ 单调递减；

当 $x\in\left(t,+\infty\right)$，$\varphi\left(x\right)>0$，即 $h'\left(x\right)>0$，$h\left(x\right)$ 在 $\left(t,+\infty\right)$ 单调递增.

$\because h\left(1\right)=-\frac{3}{e}<0$，$h\left(2\right)=\frac{\ln 2-2}{2e^2}<0$，$h\left(3\right)=\frac{\ln 3-1}{3e^3}>0$，且当 $x>3$ 时，$h\left(x\right)>0$，

又$\left|h(1)\right|=\frac{3}{e}$，$\left|h(2)\right|=\frac{2-\ln 2}{2e^2}>h(3)=\frac{\ln 3-1}{3e^3}$，$\left|h(4)\right|=\frac{2\ln 2}{4e^4}$，

故要使不等式式$\left|p(x)\right|>q(x)$解集中有且只有两个整数，

a的取值范围应为：$\frac{\ln 3-1}{3e^3}\le a<\frac{2-\ln 2}{2e^2}$.

23.

(1)

解：因为$f(x)=x+ke^x$，则$f'(x)=1+ke^x$，所以，$f(2)=2+ke^2$，$f'(2)=1+ke^2$，

因此，曲线$y=f(x)$在点$M(2,f(2))$处的切线方程$y-(2+ke^2)=(1+ke^2)(x-2)$，

即$y=(1+ke^2)x-ke^2$.

(2)

解：函数$f(x)=x+ke^x$的定义域为R，且$f'(x)=1+ke^x$.

当$k\ge 0$时，对任意的$x\in R$，$f'(x)>0$，此时函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$，无递减区间；

当$k<0$时，由$f'(x)=0$，可得$x=-\ln(-k)$.

当$x<-\ln(-k)$时，$f'(x)>0$；当$x>-\ln(-k)$时，$f'(x)<0$.

此时，函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-\ln(-k))$，单调递减区间为$(-\ln(-k),+\infty)$.

综上所述，当$k\ge 0$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$，无递减区间；

当$k<0$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-\ln(-k))$，单调递减区间为$(-\ln(-k),+\infty)$.

(3)

证明：由$f(x)=x+ke^x=0$可得$k=-\frac{x}{e^x}$，

因为函数$f(x)=x+ke^x$有两个不同的零点，且较大的零点为x_0，则$k=-\frac{x_0}{e^{x_0}}$，

要证$(1+ke^2)x_0-ke^2=x_0+ke^2(x_0-1)=x_0-\frac{x_0(x_0-1)}{e^{x_0-2}}>0$对任意的$x_0\in(1,2)$恒成立，

即证$e^{x_0-2}>x_0-1$对任意的$x_0\in(1,2)$恒成立，

构造函数$g(x)=e^{x-2}-x+1$，其中$x\in(1,2)$，则$g'(x)=e^{x-2}-1<0$，

所以，函数$g(x)$在$(1,2)$上单调递减，所以，$g(x)>g(2)=0$，

因为$x_0\in(1,2)$，则$g(x_0)>g(2)=0$，即$e^{x_0-2}>x_0-1$，故原不等式得证.

24.(1)解　当$a=-1$时，$f(x)=\ln x-x^2-x$，且定义域为$(0，+\infty)$，

则$f'(x)=\frac{1}{x}-2x-1=-\frac{(x+1)(2x-1)}{x}$.

令$f'(x)>0$，得$0<x<\frac{1}{2}$；

令$f'(x)<0$，得$x>\frac{1}{2}$.

故$f(x)$在$\left(0，\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$上单调递减，

故$f(x)$的极大值是$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-\frac{3}{4}$，

综上，函数$f(x)$的极大值是$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-\frac{3}{4}$，无极小值.

(2)证明　由题意$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-1=\frac{2ax^2-x+1}{x}$，且$x>0$，

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点解答 5

则 x_1，x_2 是方程 $2ax^2-x+1=0$ 的两个不相等正实根，

$$\therefore\begin{cases}\varDelta=1-8a>0,\\ x_1+x_2=\dfrac{1}{2a}>0,\\ x_1x_2=\dfrac{1}{2a}>0,\end{cases}$$ 解之得 $0<a<\frac{1}{8}$.

$f(x_1)+f(x_2)-x_1-x_2=\ln x_1+\ln x_2+ax_1^2+ax_2^2-2(x_1+x_2)=a(x_1^2+x_2^2)-2(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)$

$=a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-2(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=\ln\dfrac{1}{2a}-\dfrac{3}{4a}-1$，

令 $t=\dfrac{1}{2a}$，$g(t)=\ln t-\dfrac{3t}{2}-1$，$t\in(4,+\infty)$，则 $g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{2-3t}{2t}<0$，$t\in(4,+\infty)$，

故 $g(t)$在$(4,+\infty)$上单调递减，故 $g(t)<g(4)=\ln 4-7<2-7=-5$，所以 $f(x_1)+f(x_2)<x_1+x_2-5$.

题型四　函数零点的综合问题

25 (1)解　$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\dfrac{a}{x}(x>0)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f'(x)$没有零点；

当 $a>0$ 时，因为 $y=e^{2x}$ 单调递增，$y=-\dfrac{a}{x}$单调递增，所以 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $f'(a)>0$，当 b 满足 $0<b<\dfrac{a}{4}$，且 $b<\dfrac{1}{4}$时，$f'(b)<0$，

(讨论 $a\geqslant 1$ 或 $a<1$ 来检验，

①当 $a\geqslant 1$ 时，则 $0<b<\dfrac{1}{4}$，$f'(b)=2e^{2b}-\dfrac{a}{b}<2e^{\frac{1}{2}}-4a<2e^{\frac{1}{2}}-4<0$；

②当 $a<1$ 时，则 $0<b<\dfrac{a}{4}$，$f'(b)=2e^{2b}-\dfrac{a}{b}<2e^{\frac{a}{2}}-4<2e^{\frac{1}{2}}-4<0$，综上，$f'(b)<0$.)

故当 $a>0$ 时，$f'(x)$存在唯一零点.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)$没有零点，当 $a>0$ 时，$f'(x)$存在唯一零点.

(2)证明　由(1)，可设 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上的唯一零点为 x_0，
又当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，
故 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，
所以当 $x=x_0$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(x_0)$.

由于 $2e2x_0-\dfrac{a}{x_0}=0$，则 $e2x_0=\dfrac{a}{2x_0}$，$x_0=\dfrac{a}{2e2x_0}$，所以 $f(x_0)=e2x_0-a\ln x_0=\dfrac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\dfrac{2}{a}\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

故当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

27(1)解　$f'(x)=3x^2+b$.依题意得 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，即$\dfrac{3}{4}+b=0$，故 $b=-\dfrac{3}{4}$.

(2)证明　由(1)知 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{4}$.令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\dfrac{1}{2}$或 $x=\dfrac{1}{2}$.

当 x 变化时，$f'(x)$与 $f(x)$的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$c+\frac{1}{4}$		$c-\frac{1}{4}$	

因为 $f(1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=c+\frac{1}{4}$，所以当 $c<-\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有大于 1 的零点.

因为 $f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}$，所以当 $c>\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有小于-1 的零点.

由题设可知$-\frac{1}{4}\leqslant c\leqslant\frac{1}{4}$.

当 $c=-\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点$-\frac{1}{2}$和 1.

当 $c=\frac{1}{4}$时，$f(x)$只有两个零点-1 和$\frac{1}{2}$.

当$-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$时，$f(x)$有三个零点 x_1，x_2，x_3，

且 $x_1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，$x_2\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$x_3\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

综上，若 $f(x)$有一个绝对值不大于 1 的零点，则 $f(x)$所有零点的绝对值都不大于 1.

隐零点

类型一　导函数隐零点中的(整体)代换

1.(1)解　$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$.由 $f'(x)=0$ 得 $2xe^{2x}=a$.令 $g(x)=2xe^{2x}$，$g'(x)=(4x+2)e^{2x}>0(x\geqslant 0)$，从而 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$.

故当 $a>0$ 时，方程 $g(x)=a$ 有一个根，即 $f'(x)$存在唯一零点；

当 $a\leqslant 0$ 时，方程 $g(x)=a$ 没有根，即 $f'(x)$没有零点.

(2)证明　由(1)可设 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上的唯一零点为 x_0，当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)$.

由 $2e2x_0-\frac{a}{x_0}=0$ 得 $e2x_0=\frac{a}{2x_0}$，又 $x_0=\frac{a}{2e2x_0}$，得 $\ln x_0=\ln\frac{a}{2e2x_0}=\ln\frac{a}{2}-2x_0$，所以 $f(x_0)=e2x_0-a\ln x_0=\frac{a}{2x_0}-a\left(\ln\frac{a}{2}-2x_0\right)$

$=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{2x_0}\cdot 2ax_0}+a\ln\frac{2}{a}=2a+a\ln\frac{2}{a}$.当且仅当 $x_0=\frac{1}{2}$时取等号.

故当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

2.证明　(1)$f'(x)=\ln x+1-a(x+1)$，$x>0$，

结合题意，$\ln x+1-a(x+1)=0$，即 $\ln x+1=a(x+1)$存在 2 个不同正根，

先考虑 $y=a(x+1)$与 $y=\ln x+1$ 相切，记切点横坐标为 x_0，

则$\begin{cases}a(x_0+1)=\ln x_0+1,\\ a=\frac{1}{x_0},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}ax_0=1,\\ x_0\ln x_0=1,\end{cases}$

记 $g(x)=x\ln x-1$，$x>0$，

则 $g'(x)=1+\ln x$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{e}$，

故 $y=g(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，且 $g(1)=-1<0$，$g(2)=\ln 4-1>0$，

故存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使得 $x_0\ln x_0=1$ 成立，取 $m=\frac{1}{x_0}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

则 $0<a<m$ 时，$f(x)$恰有 2 个极值点，得证.

(2)由(1)知，$f'(x_1)=\ln x_1+1-a(x_1+1)$，且$\frac{1}{e}<x_1<x_0<2$，故 $a=\frac{\ln x_1+1}{x_1+1}$，代入 $f(x_1)$，

得 $f(x_1)=\frac{1}{2}(x_1\ln x_1-x_1-\ln x_1-1)$，设 $h(x)=\frac{1}{2}(x\ln x-x-\ln x-1)$，$\frac{1}{e}<x<2$，$h'(x)=\frac{1}{2}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$，

由 $h'(x_0)=0$，得 $\ln x_0=\frac{1}{x_0}$，即 $x_0\ln x_0=1$，

则 $x\in\left(\frac{1}{e},x_0\right)$时，$h'(x)<0$，$x\in(x_0,2)$，$h'(x)>0$，

故 $h(x)$在$\left(\frac{1}{e},x_0\right)$上单调递减，在$(x_0,2)$上单调递增，

$h(x)>h(x_0)=\frac{1}{2}(x_0\ln x_0-\ln x_0-x_0-1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x_0}-x_0-1\right)=-\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，

$\because x_0\in(1,2)$，$\therefore x_0+\frac{1}{x_0}\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$，$\therefore h(x_0)\in\left(-\frac{5}{4},-1\right)$，故 $h(x)>-\frac{5}{4}$，即 $f(x_1)>-\frac{5}{4}$，

而 $h(x)<h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}>h(2)=\frac{1}{2}(\ln 2-3)$，故 $-\frac{5}{4}<f(x_1)<-\frac{1}{e}$.

类型二　导函数零点的设而不求技巧

3.证明　$\because f'(x)=e^{x+a}-\frac{1}{x}(x>0)$，

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^{x+a}+\frac{1}{x^2}>0$，$\therefore g(x)$是增函数.

$\because e^{x+a}>e^{a}$，又由 $e^{a}>\frac{1}{x}\Rightarrow x>e^{-a}$，$\therefore$当 $x>e^{-a}$ 时，$f'(x)>0$；

若 $0<x<1\Rightarrow e^{x+a}<e^{a+1}$，由 $e^{a+1}<\frac{1}{x}\Rightarrow x<e^{-a-1}$，

$\therefore$当 $0<x<\min\{1,e^{-a-1}\}$时，$f'(x)<0$，

故 $f'(x)=0$ 仅有一解，记为 x_0，则当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$递减；

当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$递增；

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=ex_0+a-\ln x_0$，而 $f'(x_0)=ex_0+a-\frac{1}{x_0}=0\Rightarrow ex_0+a=\frac{1}{x_0}\Rightarrow a=-\ln x_0-x_0$，

记 $h(x)=\ln x+x$，则 $f(x_0)=\frac{1}{x_0}-\ln x_0=h\left(\frac{1}{x_0}\right)$，$a>1-\frac{1}{e}\Leftrightarrow -a<\frac{1}{e}-1\Leftrightarrow h(x_0)<h\left(\frac{1}{e}\right)$，

而 $h(x)$显然是增函数，

$\therefore 0<x_0<\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{1}{x_0}>e$，$\therefore h\left(\frac{1}{x_0}\right)>h(e)=e+1$.

综上，当 $a>1-\frac{1}{e}$时，$f(x)>e+1$.

4. 证明　(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\frac{1}{x}$.

记 $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$，

所以 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $f'(1)=-1<0$，$f'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{\ln 4-1}{2}>0$，

故存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使得 $f'(x_0)=0$.

又当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，因此，$f(x)$存在唯一的极值点.

(2)由(1)知 $f(x_0)<f(1)=-2$，又 $f(e^2)=e^2-3>0$，

所以 $f(x)=0$ 在$(x_0, +\infty)$内存在唯一根 $x=\alpha$.由 $\alpha>x_0>1$ 得$\frac{1}{\alpha}<1<x_0$.

又 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，故$\frac{1}{\alpha}$是 $f(x)=0$ 在$(0, x_0)$的唯一根.

综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

5.解　(1)∵函数 $f(x)$在区间$[e, +\infty)$上为增函数，∴$f'(x)=a+\ln x+1\geqslant 0$ 在区间$[e, +\infty)$上恒成立，

∴$a\geqslant(-\ln x-1)_{max}=-2$.∴$a$ 的取值范围是$[-2, +\infty)$.

(2)当 $a=1$ 时，$f(x)=x+x\ln x$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，不等式 $k(x-1)<f(x)$在 $x\in(1, +\infty)$上恒成立，∴$k<\left(\frac{x+x\ln x}{x-1}\right)_{\min}$.

令 $g(x)=\frac{x+x\ln x}{x-1}$，则 $g'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，令 $h(x)=x-\ln x-2(x>1)$.则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$，

∴$h(x)$在$(1, +\infty)$上单调递增.

∵$h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2-2\ln 2>0$，∴存在 $x_0\in(3, 4)$，使 $h(x_0)=0$，

即当 $1<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，

当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，

$g(x)$在$(1, x_0)$上单调递减，在$(x_0, +\infty)$上单调递增.

令 $h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，即 $\ln x_0=x_0-2$，$g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1}=\frac{x_0(1+x_0-2)}{x_0-1}=x_0\in(3, 4)$.

$k<g(x)_{\min}=x_0\in(3, 4)$，且 $k\in\mathbf{Z}$，

∴$k_{max}=3$.

6.(1)证明　函数 $f(x)=x$，$g(x)=x^2+2x-2$，则 $f'(x)=1$，$g'(x)=2x+2$.

由 $f(x)=g(x)$且 $f'(x)=g'(x)$，得$\begin{cases}x=x^2+2x-2,\\1=2x+2,\end{cases}$ 此方程组无解.因此，$f(x)$与 $g(x)$不存在“S 点”.

(2)解　函数 $f(x)=ax^2-1$，$g(x)=\ln x$，则 $f'(x)=2ax$，$g'(x)=\frac{1}{x}$.

设 x_0 为 $f(x)$与 $g(x)$的“S 点”，由 $f(x_0)=g(x_0)$且 $f'(x_0)=g'(x_0)$，得$\begin{cases}ax_0^2-1=\ln x_0,\\2ax_0=\frac{1}{x_0},\end{cases}$ 即$\begin{cases}ax_0^2-1=\ln x_0,\\2ax_0^2=1,\end{cases}$ (*)

得 $\ln x_0=-\frac{1}{2}$，即 $x_0=e^{-\frac{1}{2}}$，则 $a=\frac{1}{2\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{e}{2}$.

当 $a=\frac{e}{2}$时，$x_0=e^{-\frac{1}{2}}$满足方程组(*)，即 x_0 为 $f(x)$与 $g(x)$的“S 点”.

因此，a 的值为$\frac{e}{2}$.

(3)解　对任意 $a>0$，设 $h(x)=x^3-3x^2-ax+a$.

因为 $h(0)=a>0$，$h(1)=1-3-a+a=-2<0$，且 $h(x)$的图象是不间断的.

所以存在 $x_0\in(0, 1)$，使得 $h(x_0)=0$.

令 $b=\frac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}$，则 $b>0$.函数 $f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\frac{be^x}{x}$.则 $f'(x)=-2x$，$g'(x)=\frac{be^x(x-1)}{x^2}$.

由 $f(x)=g(x)$且 $f'(x)=g'(x)$，

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点解答 6

得$\begin{cases}-x^2+a=\dfrac{be^x}{x},\\ -2x=\dfrac{be^x(x-1)}{x^2},\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x^2+a=\dfrac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}\cdot\dfrac{e^x}{x},\\ -2x=\dfrac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}\cdot\dfrac{e^x(x-1)}{x^2},\end{cases}$ (**)

此时，x_0满足方程组(**)，即x_0是函数$f(x)$与$g(x)$在区间(0，1)内的一个“S点”．因此，对任意$a>0$，存在$b>0$，使函数$f(x)$与$g(x)$在区间(0，+∞)内存在“S点”．

7.解　(1)$f(x)=x-\ln x-\dfrac{e^x}{x}$，定义域为(0，+∞)，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x-e^x)}{x^2}$.

令$g(x)=x-e^x(x>0)$，则$g'(x)=1-e^x<0$，所以$g(x)$在(0，+∞)上单调递减，故$g(x)<g(0)=-1<0$，

当$x\in(0，1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在(0，1)上单调递增；

当$x\in(1，+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在(1，+∞)上单调递减.

所以$f(x)_{max}=f(1)=1-e$.

(2)$f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x-bx\geqslant1$，$\Leftrightarrow-\ln x+x-\dfrac{e^x}{x}+xe^x+\dfrac{e^x}{x}-bx\geqslant1$，$\Leftrightarrow\dfrac{xe^x-\ln x-1+x}{x}\geqslant b$恒成立，

令$\varphi(x)=\dfrac{xe^x-\ln x-1+x}{x}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$.

令$h(x)=x^2e^x+\ln x$，则$h(x)$在(0，+∞)上单调递增，$x\to0$，$h(x)\to-\infty$，且$h(1)=e>0$，

所以$h(x)$在(0，1)上存在零点x_0，

即$h(x_0)=x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，$x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0\Leftrightarrow x_0e^{x_0}=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)(e^{\ln\frac{1}{x_0}})$，

由于$y=xe^x$在(0，+∞)上单调递增，故$x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}=-\ln x_0$，即$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

所以$\varphi(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，

$\varphi(x)_{min}=\varphi(x_0)=\dfrac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1+x_0}{x_0}=\dfrac{1+x_0-1+x_0}{x_0}=2$，

因此$b\leqslant2$，即实数b的取值范围是(-∞，2].

8.(1)解　$f'(x)=(x+1)e^x-a\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)=\dfrac{(x+1)(xe^x-a)}{x}$，$x\in(0，+\infty)$.

①当$a\leqslant0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在(0，+∞)上为增函数，不存在极值点；

②当$a>0$时，令$h(x)=xe^x-a$，$h'(x)=(x+1)e^x>0$，显然函数$h(x)$在(0，+∞)上是增函数，

又因为当$x\to0$时，$h(x)\to-a<0$，$h(a)=a(e^a-1)>0$，必存在$x_0>0$，使$h(x_0)=0$.

当$x\in(0，x_0)$时，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

当$x\in(x_0，+\infty)$时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

所以，$x=x_0$是$f(x)$的极小值点.

综上，当$a\leqslant0$时，$f(x)$无极值点，当$a>0$时，$f(x)$有一个极值点.

(2)证明　由(1)得，$f'(x_0)=0$，即$x_0e^{x_0}=a$，

$f(x_0)=x_0e^{x_0}-a(x_0+\ln x_0)=x_0e^{x_0}(1-x_0-\ln x_0)$，

因为$f(x_0)>0$，所以$1-x_0-\ln x_0>0$，

令$g(x)=1-x-\ln x$，$g'(x)=-1-\dfrac{1}{x}<0$，

$g(x)$在(0，+∞)上是减函数，且$g(1)=0$，

由$g(x)>g(1)$得$x<1$，所以$x_0\in(0，1)$，

设 $\varphi(x)=\ln x-x+1$，$x\in(0，1)$，$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

当 $x\in(0，1)$时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$为增函数，$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，即 $\varphi(x)<0$，
即 $\ln x<x-1$，所以 $-\ln x>1-x$，
所以 $\ln(x+1)<x$，所以 $e^x>x+1>0$，则 $ex_0>x_0+1$.
因为 $x_0\in(0，1)$，所以 $1-x_0-\ln x_0>1-x_0+1-x_0=2(1-x_0)>0$.
相乘得 $ex_0(1-x_0-\ln x_0)>(x_0+1)(2-2x_0)$，
所以 $f(x_0)=x_0ex_0(1-x_0-\ln x_0)$
$>2x_0(x_0+1)(1-x_0)=2x_0(1-x_0^2)=2(x_0-x_0^3)$.
故 $f(x_0)>2(x_0-x_0^3)$成立.

最值函数的零点问题

1.【解答】（Ⅰ）证明：设函数 $\varphi(x)=lnx-x+1$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1, x>0$.

令 $\varphi'(x)=0$ 得 $x=1$，则在 $(0,1)$ 上，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 上，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 递减.
所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi$（1）$=0$，即 $lnx\leqslant x-1$.

（Ⅱ）证明：当 $a=2$ 时，$f(x)=lnx-x^2+2x\leqslant x-1-x^2+2x=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}$，

前面的“$\leqslant$”仅当 $x=1$ 时取等号后面的“$\leqslant$”仅当 $x=\frac{3}{2}$ 时取等号，不能同时取到.

所以 $f(x)<\frac{5}{4}$.

（Ⅲ）解：在区间 $(1,+\infty)$ 上，$g(x)>0$，所以 $h(x)=max\{f(x)，g(x)\}\geqslant g(x)>0$，
所以 $h(x)=max\{f(x)，g(x)\}\geqslant g(x)>0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上不可能有零点.
下面只考虑区间 $(0,1))$ 上和 $x=1$ 处的情况.

由题意 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2x+a=\frac{-2x^2+ax+1}{x}$.

令 $f'(x_0)=0$ 可得 $x_0=\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}$（负值舍去）.

在 $(0,x_0)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，在 $(x_0，+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，$f(x)_{max}=f(x_0)$.

①当 $a=1$ 时，$x_0=1$，所以 $f(x)_{max}=f$（1）$=0$.

因为在区间 $(0,1)$ 上，$g(x)<0$，且 g（1）$=0$，所以此时 $h(x)$ 存在唯一的零点 $x=1$.

②当 $0<a<1$ 时，$x_0=\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}<1$. 因为 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}-2x_0+a=0$，所以 $a=2x_0-\frac{1}{x_0}$.

所以 $f(x_0)=lnx_0-x_0^2+x_0(2x_0-\frac{1}{x_0})=lnx_0+x_0^2-1<ln1+1^2-1=0$.

于是 $f(x)<0$ 恒成立.
结合函数 $g(x)$ 的性质，可知此时 $h(x)$ 存在唯一的零点 $x=1$.

③当 $a>1$ 时，$x_0=\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}>1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增.

又因为 f（1）$=a-1>0$，$f(\frac{1}{2a})=ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2a}-1-\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2}=-(\frac{1}{2a}-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在唯一的零点 $x=x_1$．

结合函数 $g(x)$ 的性质，可知 $x=x_1$ 是 $h(x)$ 唯一的零点．

综上所述：当 $0<a\leqslant 1$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点 $x=1$；
当 $a>1$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也有 1 个零点．

2．解：（1）$f'(x)=(x-3)e^{x-3}-x+3=(x-3)(e^{x-3}-1)$，（1 分）

当 $x>3$ 时，$x-3>0$，$e^{x-3}-1>0$，$\therefore f'(x)>0$，

当 $x<3$ 时，$x-3<0$，$e^{x-3}-1<0$，$\therefore f'(x)>0$，

当 $x=3$ 时，$f'(x)=0$，（2 分）
所以当 $x\in R$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，即 $f(x)$ 在 R 上是增函数；（3 分）
又 f（3）$=0$，所以 $f(x)>0$ 的解集为 $(3,+\infty)$．（4 分）

（2）$g'(x)=e^x-\sin x$．（5 分）

由 $x>0$，得 $e^x>1$，$\sin x\in[-1,1]$，（6 分）

则 $g'(x)=e^x-\sin x>0$，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数．（7 分）

故 $g(x)>g(0)=2$，即 $g(x)>2$．（8 分）
（3）由（1）知，
当 $x\geqslant 3$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，故 $h(x)\geqslant 0$ 恒成立；
当 $x<3$ 时，$f(x)<0$，因为 $h(x)=max\{f(x),g(x)\}$，要使得 $h(x)\geqslant 0$ 恒成立，
只要 $g(x)\geqslant 0$ 在 $(0,3)$ 上恒成立即可．（9 分）

由 $g(x)=ae^x+\cos x\geqslant 0$，得 $a\geqslant -\dfrac{\cos x}{e^x}$．

设函数 $r(x)=-\dfrac{\cos x}{e^x}$，$x\in[0,3]$，

则 $r'(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$．（10 分）

令 $r'(x)=0$，得 $x=\dfrac{3}{4}\pi$．
随着 x 变化，$r'(x)$ 与 $r(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(0,\frac{3\pi}{4})$	$\frac{3}{4}\pi$	$(\frac{3\pi}{4},3)$
$r'(x)$	+	0	−
$r(x)$	单调递增	极大值	单调递减

所以 $r(x)$ 在 $(0,\frac{3\pi}{4})$ 上单调递增，在 $(\frac{3\pi}{4},3)$ 上单调递减．（11 分）

$r(x)$ 在 $(0,3)$ 上唯一的一个极大值，即极大值 $r(\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$，故 $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$．

综上所述，所求实数 a 的取值范围为 $[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}},+\infty)$．（12 分）
3．（1）证明：由题得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

则 $x^2-x-xlnx\geqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立等价于 $x-1-lnx\geqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，．……（1 分）

记 $\phi(x)=x-1-lnx$，则 $\phi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，．……………………………………………………（2 分）

当 $\phi'(x)<0$ 时，$0<x<1$；$\phi'(x)>0$ 时，$x>1$，

故 $\phi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，．…………………………………………………（3 分）

所以 $\phi(x)\geqslant\phi$（1）$=0$，即 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立．……………………………………………………………（4 分）

（2）解：由题得 $h(x)=1-lnx$，

①当 $0<x<e$ 时，$\varphi(x)\geqslant h(x)>0$，此时无零点．………………………………………………（5 分）

②当 $x=e$ 时，h（e）$=0$，g（e）$=e^3-3ae+e$

a．当 g（e）$=e^3-3ae+e\leqslant 0$，即 $a\geqslant\dfrac{e^2+1}{3}$ 时，$x=e$ 是 $\varphi(x)$ 的一个零点；

b．当 g（e）$=e^3-3ae+e>0$，即 $a<\dfrac{e^2+1}{3}$ 时，$x=e$ 不是 $\varphi(x)$ 的一个零点；．………………………（6 分）

③当 $x>e$ 时，$h(x)<0$ 恒成立，因此只需考虑 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上的零点情况．

由 $g'(x)=3x^2-3a$

a．当 $a\leqslant e^2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，且 g（e）$=e^3-3ae+e$，

当 $a<\dfrac{e^2+1}{3}$ 时，g（e）>0，则 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上无零点，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点；

当 $a=\dfrac{e^2+1}{3}$ 时，g（e）$=0$，则 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上无零点，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 1 个零点；

当 $\dfrac{e^2+1}{3}<a\leqslant e^2$ 时，由 g（e）<0，$g(2e)=8e^3-6ae+e\geqslant 8e^3-6e^3+e>0$，得 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上仅有一个零点，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点；

所以 $\dfrac{e^2+1}{3}<a\leqslant e^2$，．……………………………………………………………………………（9 分）

b．当 $a>e^2$ 时，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\pm\sqrt{a}$，

由 $g'(x)<0$ 时，$e<x<\sqrt{a}$；当 $g'(x)>0$ 时 $x>\sqrt{a}$，$g'(x)<0$，

故 $g(x)$ 在 $(e,\sqrt{a})$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增；

由 g（e）<0，$g(2a)=8a^3-6a^2+e\geqslant 2a^2+e>0$，得 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上仅有一个零点，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点；

所以 $a>e^2$，．……………………………………………………………………………………………（11 分）

综上所述，$a>\dfrac{e^2+1}{3}$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有两个零点．…………………………………………（12 分）

4．解：（1）$\because f'(x)=2x^2-4x=2x(x-2)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 上单调递减，

$f(x)$ 的极大值为 $f(0)=\dfrac{4}{3}$，$f(x)$ 的极小值为 f（2）$=-\dfrac{4}{3}$，

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点解答 7

又 f（3）$=\frac{4}{3}$，$\therefore$ 若 $f(x)$ 在区间 $[a-5，a-1]$ 上的最大值为 $\frac{4}{3}$，

则 $\begin{cases} a-5\leqslant 0 \\ 0\leqslant a-1\leqslant 3 \end{cases}$，解得 $1\leqslant a\leqslant 4$；

（2）$h(x)=\frac{3}{2}f(x)-x+1=x^3-3x^2-x+3=(x+1)(x-1)(x-3)$，

当 $x\leqslant -1$ 时，$g(x)=e^x-ax>0$，此时 $F(x)=h(x)$，

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty，-1]$ 上有一个零点，$x_1=-1$；

当 $x>-1$ 时，$g'(x)=e^x-a$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,lna)$ 上单调递减，在 $(lna,+\infty)$ 上单调递增，

又 $a\geqslant e^3$，$\therefore lna\geqslant 3$，

由于 $g(0)=1>0$，g（1）$=e-a<0$，$x\in(-1,1)$ 时，$f(x)>0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点 x_2；

又 $g(lna)=a(1-lna)<0$，

令 $k(x)=x-lnx(x\geqslant e^3)$，$k'(x)=\frac{x-1}{x}>0$，

$\therefore k(x)$ 在 $[e^3，+\infty)$ 上单调递增，$k(x)=x-lnx\geqslant k(e^3)=e^3-3>0$，

$\therefore a>lna$，g（a）$=e^a-a^2$．

再令 $\varphi(x)=e^x-x^2(x\geqslant 2)$，$\varphi'=e^x-2x$，$\varphi''(x)=e^x-2>0$，

$\therefore \varphi'$ 在 $[2，+\infty)$ 上单调递增，从而 $\varphi'(x)>\varphi'$（2）$=e^2-4>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[2，+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)>\varphi$（2）$=e^2-4>0$，则 g（a）>0．

$\therefore F(x)$ 在 (lna,a) 上有一个零点 x_3，

综上所述，当 $a\geqslant e^3$ 时，$F(x)$ 有三个零点 $x_1=-1$，$0<x_2<1$，$lna<x_3<a$．

且 $x_1<x_2<x_3$．

零点差问题解答

5．

【解答】解：（Ⅰ）当 $a=b=-3$ 时，$f(x)=(x^3+3x^2-3x-3)e^{-x}$，

故 $f'(x)=-(x^3+3x^2-3x-3)e^{-x}+(3x^2+6x-3)e^{-x}=-e^{-x}(x^3-9x)=-x(x-3)(x+3)e^{-x}$

当 $x<-3$ 或 $0<x<3$ 时，$f'(x)>0$；
当 $-3<x<0$ 或 $x>3$ 时，$f'(x)<0$．
从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$，$(0,3)$ 单调增加，在 $(-3,0)$，$(3,+\infty)$ 单调减少；

（Ⅱ）$f'(x)=-(x^3+3x^2+ax+b)e^{-x}+(3x^2+6x+a)e^{-x}=-e^{-x}[x^3+(a-6)x+b-a]$．

由条件得：f'（2）$=0$，即 $2^3+2(a-6)+b-a=0$，故 $b=4-a$，

从而 $f'(x)=-e^{-x}[x^3+(a-6)x+4-2a]$．

因为 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$，

所以 $x^3+(a-6)x+4-2a=(x-2)(x-\alpha)(x-\beta)=(x-2)(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)$．

将右边展开，与左边比较系数得，$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=a-2$．

故 $\beta-\alpha=\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{12-4a}$．，

又 $(\beta-2)(\alpha-2)<0$，即 $\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4<0$．由此可得 $a<-6$．
于是 $\beta-\alpha>6$．

6．【解答】（1）解：当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-x^2-x$，

$g(x)=f(x)+x^2=\frac{1}{2}e^{2x}-x$，$g'(x)=e^{2x}-1$，

令 $g'(x)>0$，可得 $x>0$，令 $g'(x)<0$，可得 $x<0$，
所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$．

（2）证明：函数 $f(x)=\frac{1}{2}ae^{2x}-x^2-ax$ 的定义域为 R，$f'(x)=ae^{2x}-2x-a$，

令 $h(x)=f'(x)=ae^{2x}-2x-a$，

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，

所以 x_1，x_2 是函数 $h(x)$ 的两个零点，

$h(x_1)=h(x_2)=0$，

$h'(x)=2ae^{2x}-2$，令 $h'(x)>0$，可得 $x>\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，令 $h'(x)<0$，可得 $x<\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}ln\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，$+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_1<\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，$x_2>\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，

由 $0<a<\frac{4}{e^4-1}$，可得 $\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}>\frac{1}{2}ln\frac{e^4-1}{4}>0$，

因为 $h(0)=0$，所以 $x_1=0$，

所以要证 $x_2-x_1>2$，即证 $x_2>2$，只需证 h（2）<0，

因为 $0<a<\frac{4}{e^4-1}$，

所以 h（2）$=ae^4-4-a=a(e^4-1)-4<\dfrac{4}{e^4-1}(e^4-1)-4<4-4=0$，

所以 $x_2-x_1>2$，得证.

7.解：(1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，令 $g(x)=1-ax$，

所以在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在 $(\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 上，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上 $f(x)$ 单调递增，在 $(\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递减.

（2）证明：(i) 由（1）可知，要使由函数 $f(x)$ 有两个零点，需 $a>0$，且 $f(x)_{max}=f(\dfrac{1}{a})>0$，则 $0<a<\dfrac{1}{e}$，

又 $x_1<x_2$，故 $0<x_1<\dfrac{1}{a},x_2>\dfrac{1}{a}$，则 $\dfrac{2}{a}-x_1>\dfrac{1}{a}$，

令 $g(x)=f(\dfrac{2}{a}-x)-f(x)(0<x<\dfrac{1}{a})$，则 $g'(x)=-\dfrac{1}{\dfrac{2}{a}-x}+a-\dfrac{1}{x}+a=\dfrac{-2(ax-1)^2}{ax(\dfrac{2}{a}-x)}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单减，

$\therefore$ $g(x_1)>g(\dfrac{1}{a})=0$，

又 $f(x_1)=0$，

$\therefore$ $f(\dfrac{2}{a}-x_1)=ln(\dfrac{2}{a}-x_1)-a(\dfrac{2}{a}-x_1)-f(x_1)=g(x_1)>0$，

又 $f(x_2)=0$，

$\therefore$ $x_2>\dfrac{2}{a}-x_1$，即 $x_1+x_2>\dfrac{2}{a}$；

(ii) 要证 $x_2-x_1>\dfrac{2\sqrt{1-ea}}{a}$，由（1）可知，只需证 $x_1+x_2+x_2-x_1>\dfrac{2}{a}+\dfrac{2\sqrt{1-ea}}{a}$，即证 $x_2>\dfrac{1+\sqrt{1-ea}}{a}>\dfrac{1}{a}$，

又 $f(x_2)=lnx_2-ax_2=0$，

$\therefore$ 只需证 $f(\dfrac{1+\sqrt{1-ea}}{a})>0$，即证 $ln\dfrac{1+\sqrt{1-ea}}{a}-(1+\sqrt{1-ea})>0$，

令 $t=1+\sqrt{1-ea}$，则 $a=\dfrac{1-(t-1)^2}{e}$，$\because$ $0<a<\dfrac{1}{e}$，$\therefore 1<t<2$，

所以上述不等式等价于 $ln\dfrac{et}{1-(t-1)^2}-t>0$，即 $ln\dfrac{e}{2-t}-t>0$，亦即 $ln(2-t)+t<1$，

令 $\varphi(t)=ln(2-t)+t$，则 $\varphi'(t)=-\dfrac{1}{2-t}+1=\dfrac{1-t}{2-t}<0(t\in(1,2))$，

$\therefore\varphi(t)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，即 $\varphi(t)<\varphi$（1）$=1$，即得证.

8.解：（1）由题意可知，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

因为 $f(x)=ax+lnx$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a=\dfrac{1+ax}{x}$，

当 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，当 $0<x<-\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，

当 $x>-\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，则 $f'(x)$ 单调递减.

综上所述，当 $a\geqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-\dfrac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(-\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 上单调递减.

（2）证明：(i) 原不等式等价于 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>-\dfrac{1}{a}$，

因为 $-ax_1=lnx_1$①，$-ax_2=lnx_2$②，

由②$-$①，可得 $-a(x_2-x_1)=lnx_2-lnx_1$，故 $-a=\dfrac{lnx_2-lnx_1}{x_2-x_1}$，

则 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>-\dfrac{1}{a}$ 等价于 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_2-x_1}{lnx_2-lnx_1}$，

因为 $x_2>x_1>0$，所以 $lnx_2-lnx_1>0$，

即证明 $lnx_2-lnx_1>\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$③，

等价于证明 $ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{2(\dfrac{x_2}{x_1}-1)}{1+\dfrac{x_2}{x_1}}>0$，

令 $t=\dfrac{x_1}{x_1}(t>1)$，设 $g(t)=lnt-\dfrac{2(t-1)}{1+t}(t>1)$，即证明 $g(t)>0$，

因为 $g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(1+t)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

则 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(t)>g$（1）$=0$，

因此 $x_1+x_2>-\dfrac{2}{a}$；

(ii) 设 $h(x)=\dfrac{lnx}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{1-lnx}{x^2}$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $-a=h(x)$ 有两个不相等的实数根，且 h（e）$=\dfrac{1}{e}$，

则 $0<-a<\dfrac{1}{e}$ 且 $1<x_1<e<x_2$，

因为 $lnx<1-x$ 对于 $x\in(0$，$1)\cup(1$，$+\infty)$ 恒成立，

则 $ln\dfrac{1}{x}>1-x$ 对于 $x\in(0,1)$ 恒成立，

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点解答 8

所以$-ax_1-1=lnx_1-1=ln\frac{x_1}{e}>1-\frac{e}{x_1}$，

因为$x_1>0$，所以$-ax_1^2-2x_1+e>0$，

又因为$a<0$，$\triangle=4+4ae>0$，

所以$x_1<-\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{1+ea}}{a}$或$x_1>-\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{1+ea}}{a}$，

因为$0<x_1<e$且$-\frac{1}{e}<a<0$，所以$x_1<-\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{1+ea}}{a}$，

因为$\frac{x_1+x_2}{2}>-\frac{1}{a}$，所以$\frac{x_1+x_2}{2}-x_1>-\frac{1}{a}-(-\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{1+ea}}{a})$，

所以$x_2-x_1>-\frac{2\sqrt{1+ea}}{a}$.

同构法解零点问题

9.【解答】解：方法一：由$f(x)=\frac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$可得$f'(x)=\frac{x-1}{e^{x-1}}(\frac{e^{x-1}}{x}-a)$，

设$y=\frac{e^{x-1}}{x}-a$，$x>0$，$a>0$，则$y'=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}$，令$y'=0\Rightarrow x=1$，$\therefore y$在$x\in(0,1)$单调递减，在$x\in(1,+\infty)$单调递增，

故$y_{min}=y$（1）$=1-a$.

①当$0<a<1$时，令$f'(x)=0\Rightarrow x=1$，当$x\in(0,1)$时，$f(x)$单调递减，当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)$单调递增，

$\therefore f(x)_{min}=f$（1）$=a-1-lna>0$，此时$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内无零点；

②当$a=1$时，f（1）$=a-1-lna=0$，此时$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内有零点；

③当$a>1$时，令$f'(x)=\frac{x-1}{e^{x-1}}(\frac{e^{x-1}}{x}-a)=0$，解得$x=x_1$或1或$x_2$，且$0<x_1<1<x_2$，

此时$f(x)$在$x\in(0,x_1)$单减，$x\in(x_1$，$1)$单增，$x\in(1,x_2)$单减，$x\in(x_2$，$+\infty)$单增，

当$x=x_1$或x_2时，$f(x)_{极小值}=0$，此时$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内有两个零点；

综合①②③知$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内有零点$\Rightarrow a\geqslant 1$.

方法二：由题意可得

$e^{-x+1+ln(ax)}=ln(ax)-x+2$，即$e^{-x+1+ln(ax)}-[-x+1+ln(ax)]-1=0$，

因为$e^x\geqslant x+1$当$x=0$时等号成立，

所以$-x+1+ln(ax)=0$，即$ax=e^{x-1}$，

$a=\frac{e^{x-1}}{x}$，令$g(x)=\frac{e^{x-1}}{x}$，$g'(x)=\frac{1}{e}\times\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，

易知$g(x)$在$(0,1)$单减，在$(1,+\infty)$上单增，所以$g(x)\geqslant g$（1）$=1$，

又 x 趋近于 0 和正无穷时， $g(x)$ 趋近于正无穷，
所以 $a\geqslant 1$.

10.解：（1） $g(x)=\frac{a}{2}x^2+x\cos x-\sin x$ ， $x\in(0$ ， $\frac{\pi}{2}]$ ，

所以 $g'(x)=x(a-\sin x)$ ，

当 $a\geqslant 1$ 时， $a?\sin x\geqslant 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0$ ， $\frac{\pi}{2}]$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0$ ， $\frac{\pi}{2}]$ 上无零点；

当 $0<a<1$ 时， $\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$ ，使得 $\sin x_0=a$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(x_0$ ， $\frac{\pi}{2}]$ 单调递减，在 $(0,x_0)$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$ ， $g(\frac{\pi}{2})=\frac{a\pi^2}{8}-1$ ，

所以若 $\frac{a\pi^2}{8}-1>0$ ，即 $a>\frac{8}{\pi^2}$ 时， $g(x)$ 在 $(0$ ， $\frac{\pi}{2}]$ 上无零点，

若 $\frac{a\pi^2}{8}?1\leqslant 0$ ，即 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ 时， $g(x)$ 在 $(0$ ， $\frac{\pi}{2}]$ 上有一个零点，

当 $a\leqslant 0$ 时， $g'(x)=a-x\sin x<0$ ， $g(x)$ 在 $(0$ ， $\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减， $g(x)$ 在 $(0$ ， $\frac{\pi}{2}]$ 上无零点，

综上当 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ 时， $g(x)$ 在 $(0$ ， $\frac{\pi}{2}]$ 上有一个零点；

（2）由 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1(x>0)$ ，

即 $xe^{x-a}=xlnx+ax$ ，即 $e^{x-a}=lnx+a$ ，

则有 $e^{x-a}+(x-a)=x+lnx$ ，

令 $h(x)=x+lnx$ ， $x>0$ ，则 $h(e^{x-a})=e^{x-a}+(x-a)$ ，

$h'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ ，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

所以 $e^{x-a}=x$ ，则有 $x-a=lnx$ ，即 $a=x-lnx$ ， $x>0$ ，

因为关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1$ 有两个不同的实数解，

则方程 $a=x-lnx$ ， $x>0$ 有两个不同的实数解，

令 $\varphi(x)=x-lnx$ ，则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ ，

当 $0<x<1$ 时， $\varphi'(x)<0$ ，当 $x>1$ 时， $\varphi'(x)>0$ ，
所以函数 $\varphi(x)=x-lnx$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

所以 $\varphi(x)_{min}=\varphi$ （1） $=1$ ，

当 $x\to 0$ 时， $\varphi(x)\to+\infty$ ，当 $x\to+\infty$ 时， $\varphi(x)\to+\infty$ ，
所以 $\{a\,|\,a>1\}$.

11.【解答】解：（1）因为函数 $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上恒成立，

由 $f(x)=e^{2x+a}-\frac{1}{2}lnx+\frac{a}{2}$， $x>0$，

可得 $f'(x)=2e^{2x+a}-\frac{1}{2x}=\frac{4xe^{2x+a}-1}{2x}$，

由于 $x>0$，则 $4xe^{2x+a}-1\leqslant 0$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上恒成立，

令 $F(x)=4xe^{2x+a}-1$， $F'(x)=(8x+4)e^{2x+a}>0$，

故 $F(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，

所以只需 $F(\frac{1}{2})\leqslant 0$ 即可， $F(\frac{1}{2})=2e^{1+a}-1\leqslant 0$，

所以 $a\leqslant -1-ln2$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty，-1-ln2]$.

（2） $f(x)=e^{2x+a}-\frac{1}{2}lnx+\frac{a}{2}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2e^{2x+a}-\frac{1}{2x}$，令 $g(x)=2e^{2x+a}$， $h(x)=\frac{1}{2x}$，

当 $x>0$ 时， $g(x)$ 单调递增， $g(x)\in(2e^{a}，+\infty)$， $h(x)\in(0，+\infty)$，

故存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $2e^{2x_0+a}-\frac{1}{2x_0}=0$，

即 $4e^{2x_0+a}=\frac{1}{x_0}$ ①，两边取对数得 $ln4+2x_0+a=-lnx_0$ ②，

而 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0，+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)_{min}=f(x_0)>0$，故 $e^{2x_0+a}-\frac{1}{2}lnx_0+\frac{a}{2}>0$，

将①②代入上式得 $\frac{1}{4x_0}+\frac{ln4+2x_0+a}{2}+\frac{a}{2}>0$，化简得 $a>-\frac{1}{4x_0}-x_0-ln2$，

因为 $\frac{1}{4x_0}+x_0\geqslant 1$，当且仅当 $\frac{1}{4x_0}=x_0$，即 $x_0=\frac{1}{2}$ 时取等号，

所以 $-\frac{1}{4x_0}-x_0-ln2\leqslant -1-ln2$，

故 $a>-1-ln2$，

即 a 的取值范围是 $(-1-ln2,+\infty)$.

12.解：（1）若选①： $m=\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}x^{2}$，

所以 $f'(x)=e^{x-1}-x$， $f''(x)=e^{x-1}-1$，

因为 $f''(x)$ 单调递增，且 f''（1）$=0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减， $(1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f'(x)\geqslant f'$（1）$=0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以不存在极小值点；

若选②： $m=1$，则 $f(x)=e^{x-1}-x^{2}$，

所以 $f'(x)=e^{x-1}-2x$， $f''(x)=e^{x-1}-2$，

由 $f''(x)$ 单调递增，且 $f''(1+ln2)=0$，
所以 $f'(x)$ 在 $(0,1+ln2)$ 上单调递减，在 $(1+ln2,+\infty)$ 上单调递增，
故 $f'(x)\geqslant f'(1+ln2)=-2ln2<0$，

又 f'（4）$=e^3-8>0$，

所以存在极小值点 $x_0\in(1+ln2,4)$.

（2）令 $g(x)=0$，则 $e^{x-1}-mx^2+mxln(mx)=0$，

又 $mx>0$，
所以 $\frac{e^{x-1}}{mx}-x+ln(mx)=\frac{e^{x-1}}{e^{ln(mx)}}-x+ln(mx)=e^{x-ln(mx)-1}-[x-ln(mx)]=0$，
令 $t=x-ln(mx)$，
故 $e^{t-1}-t=0$ 有解，

设 $h(t)=e^{t-1}-t$，

则 $h'(t)=e^{t-1}-1$，令 $h'(t)=0$，解得 $t=1$，

所以 $h(t)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，
又 h（1）$=0$，

所以 $h(t)=e^{t-1}-t$ 有唯一的零点 $t=1$，

若 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点，
即 $1=x-ln(mx)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，
整理可得 $1+lnm=x-lnx$，
令 $l(x)=x-lnx$，

则 $l'(x)=1-\frac{1}{x}$，令 $l'(x)=0$，解得 $x=1$，
所以 $l(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，
故 $l(x)\geqslant l$（1）$=1$，
所以 $1+lnm\geqslant 1$，
解得 $m\geqslant 1$，
所以 m 的取值范围为 $[1,\ +\infty)$.