一、单选题

1． D 通项为：$T_{r+1}=C_n^r(-1)^r x^r$，则$T_4=-C_n^3x^3(n\geq 3)$，所以x^3的系数为：$-C_3^3-C_4^3-C_5^3-C_6^3-C_7^3=-70$.

2． D $7^n+C_n^1 7^{n-1}+C_n^2 7^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}7+C_n^n=(7+1)^n=(9-1)^n=9^n-C_n^1 9^{n-1}+C_n^2 9^{n-2}+\cdots++C_n^{n-1}\cdot 9\cdot(-1)^{n-1}+C_n^n 9^0\cdot(-1)^n$

3． D $xC_n^4(-1)^4x^4-\frac{1}{x}C_n^6(-1)^6x^6=C_n^4x^5-C_n^6x^5=0$ 即 $C_n^4=C_n^6$ 所以 $n=10$，

4． B $(x-1)^7$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_7^r x^{7-r}\left(-1\right)^r,r=0,1,\cdots,7$，令$7-r=4$、5、6 得

中x^6项的系数$-35\times 9+21\times\left(-30\right)+25\times\left(-7\right)==-1120$.

5． A

6． A 令$x=1$得到$4^n=M$，再结合二项式系数的性质得到$2^n=N$，利用$M-N=992$得$n=5$

7． B $T_{r+1}=C_{12}^r\left(\frac{x}{2}\right)^{12-r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=C_{12}^r\left(-1\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{12-r}x^{12-\frac{4}{3}r}$，若为常数项，则$12-\frac{4}{3}r=0$，所以，$r=9$，得常数项为：

$$T_{10}=C_{12}^9\left(-1\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^{12-9}=-\frac{220}{8}=-\frac{55}{2}$$

8． C 解：$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)^4=\left(\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{(\sqrt{x}-1)^8}{x^2}$.又$(\sqrt{x}-1)^8$的展开式的通项$T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r x^{\frac{8-r}{2}}(-1)^r$，所以$\frac{T_{r+1}}{x^2}=\mathrm{C}_8^r(-1)^r x^{2-\frac{r}{2}}$.

当x的指数是整数时，该项为有理项，所以当$r=0$，2，4，6，8时，该项为有理项，即有理项的项数为5.选：C.

9． A【详解】令$t=x+1$，可得$x=t-1$，则$\left[2-\left(t-1\right)\right]^{2021}=\left(3-t\right)^{2021}=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{2021}t^{2021}$，

二项式$\left(3-t\right)^{2021}$的展开式通项为$T_{r+1}=C_{2021}^r\cdot 3^{2021-r}\cdot\left(-t\right)^r$，则$a_r=C_{2021}^r\cdot 3^{2021-r}\cdot\left(-1\right)^r$.

当r为奇数时，$a_r<0$，当r为偶数时，$a_r>0$，因此，$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{2021}|=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{2021}=\left(3+1\right)^{2021}=2^{4042}$.

10． A 解：依题意$(x+3y)^4$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_4^r x^{4-r}(3y)^r=3^rC_4^r x^{4-r}y^r$，

当$4-r=2$时，得$r=2$；当$4-r=3$时，得$r=1$，故可得展开式中含x^3y^2的项为$2x\cdot 3^2C_4^2x^2y^2+(-y)\cdot 3C_4^1x^3y=96x^3y^2$，

即展开式中x^3y^2项的系数为96.

11． B【详解】$\left(1+ax\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\left(n\in N^*\right)$，令$x=0$，则$a_0=1$；

令$x=1$，$n=5$，则$\left(1+a\right)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5$，因为$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=242$，

所以$\left(1+a\right)^5=243=3^5$，$a=2$，$(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，

当$n=6$时，$\left(1+2x\right)^6=C_6^0\times\left(2x\right)^0+C_6^1\times\left(2x\right)^1+C_6^2\times\left(2x\right)^2+C_6^3\times\left(2x\right)^3+C_6^4\times\left(2x\right)^4+C_6^5\times\left(2x\right)^5+C_6^6\times\left(2x\right)^6$

$=1+12x+60x^2+160x^3+240x^4+192x^5+64x^6$，则$a_1=12$，$a_3=160$，$a_5=192$，$a_1+3a_3+5a_5=1452$，

12. B【详解】设$f\left(x\right)=\left(2x-1\right)^{10}$，则$f\left(1\right)=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=1$，

$f(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7+a_8-a_9+a_{10}=(-3)^{10}=3^{10}$，所以，$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{1-3^{10}}{2}$.

13． D【详解】在$\left(x+\dfrac{2}{x}-1\right)^4$的展开式中，令$x=1$，可得展开式中各项系数和为$(1+2-1)^4=2^4=16$，

$\left(x+\dfrac{2}{x}-1\right)^4$的展开式通项为$A_{r+1}=C_4^r\cdot(-1)^{4-r}\cdot\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^r$，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^r$的展开式通项为$B_{k+1}=C_r^k x^{r-k}\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)^k=C_r^k 2^k x^{r-2k}$，

所以，$\left(x+\dfrac{2}{x}-1\right)^4$的展开式通项可表示为$T_{r+1,k+1}=C_4^r C_r^k\cdot(-1)^{4-r}\,2^k x^{r-2k}\left(0\le k\le r\le 4,r,k\in N\right)$，

令$r-2k=0$，可得$\begin{cases}r=0\\k=0\end{cases}$或$\begin{cases}r=2\\k=1\end{cases}$或$\begin{cases}r=4\\k=2\end{cases}$，所以，展开式中常数项为$C_4^0+C_4^2C_2^1\cdot2+C_4^4C_4^2\cdot2^2=49$，

因此，展开式中除常数项外，其余各项系数的和为$16-49=-33$.

14． C【详解】令$x=1$，则$\left(2x+\dfrac{1}{x}-1\right)^5$的展开式各项的系数之和为$2^5$，

$\left(2x+\dfrac{1}{x}-1\right)^5$的通项公式为：$T_{r+1}=C_5^r\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^r(-1)^{5-r}$,当$r=0$时，$T_1=(-1)^5$，无$x^2$项出现，

当$r=1$时，$T_2=C_5^1\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)(-1)^4$无$x^2$项出现，

当$r=2$时，$T_3=C_5^2\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^2(-1)^3=C_5^3C_2^k2^kx^{2k-2}(-1)^3$，当$k=2$时，$x^2$项的系数为$C_5^2C_2^22^2(-1)^3=-40$，

当$r=3$时，$T_4=C_5^3\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^3=C_5^3C_3^h2^hx^{2h-3}$，无$x^2$项出现，

当$r=4$时，$T_5=C_5^4\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^4(-1)=C_5^4C_4^s2^sx^{2s-4}$，当$s=3$时，$x^2$项的系数为$-C_5^4C_4^32^3=-160$，

当$r=5$时，$T_6=C_5^5\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^5=C_5^4C_4^t2^tx^{2t-5}$，无$x^2$项出现，

所以除x^2项外，其余各项的系数之和为 32-（-40-160）=232，

15． C 解：依题意$n=8$所以$(1+x+x^2)^8=[(1+x)+x^2]^8$

$=C_8^0(1+x)^8+C_8^1(1+x)^7x^2+C_8^2(1+x)^6x^4+C_8^3(1+x)^5x^6+C_8^4(1+x)^4x^8+C_8^5(1+x)^3x^{10}+C_8^6(1+x)^2x^{12}+C_8^7(1+x)x^{14}+C_8^8x^{16}$

$=1+8x+36x^2+112x^3+266x^4+504x^5+784x^6+1016x^7+1107x^8+1016x^9+784x^{10}+504x^{11}+266x^{12}+112x^{13}+36x^{14}+8x^{15}+x^{16}$ 由上式可知，选项A，D正确；

$(1+x+x^2)^9=[(1+x)+x^2]^9$展开式中$C_9^0(1+x)^9$，$C_9^1(1+x)^8x^2$，$C_9^2(1+x)^7x^4$的$x^4$的系数和为：

$T_9^4=C_9^0C_9^4+C_9^1C_8^2+C_9^2C_7^0=414$，而$T_8^2+T_8^3+T_8^4=36+112+266=414$，

故$T_8^2+T_8^3+T_8^4=T_9^4$，故B正确；由式子可得，$T_8^0+T_8^2+\ldots+T_8^{16}>T_8^1+T_8^3+\ldots+T_8^{15}$，故选项$C$不正确.

16． C

A．令$x=0$可计算出a_0的值；B．令$x=1$结合$x=0$的结果可计算出$a_1+a_2+\ldots+a_{10}$的值；

C．分别令 $x=\pm1$，然后根据展开式的通项公式判断取值的正负即可计算出 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|$ 的值；

D．将原式求导，然后令 $x=1$ 即可得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+9a_9+10a_{10}$ 的值，再根据展开式的通项公式即可求解出 a_{10} 的值，则 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+9a_9$ 的值可求.

17． B【详解】$(3\cdot\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x})^n$ 的通项公式是 $T_{r+1}=C_n^r\cdot\left(3\sqrt[6]{x^5}\right)^{n-r}\cdot\left(-2\sqrt{x}\right)^r=C_n^r\cdot3^{n-r}\cdot(-2)^r\cdot x^{\frac{5n-2r}{6}}$

设其有理项为第 $r+1$ 项，则 x 的乘方指数为 $\dfrac{5n-2r}{6}$，依题意 $\dfrac{5n-2r}{6}$ 为整数，

注意到 $0\le r\le n$，对照选择项知 $n=4$、6、8，逐一检验：$n=4$ 时，$r=1,4$，不满足条件；

$n=6$ 时，$r=0$、3、6，成立；$n=8$ 时，$r=2$、5、8，成立

18． C【详解】因为 $(1-2x)^{2\,019}=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\ldots+a_{2\,018}(x-2)^{2\,018}+a_{2\,019}(x-2)^{2\,019}(x\in R)$，两边分别对 x 求导可得 $-2\,019\times2\times(2x-1)^{2\,018}=a_1+2a_2(x-2)+\ldots+2\,018a_{2\,018}(x-2)^{2\,017}+2\,019a_{2\,019}(x-2)^{2\,018}(x\in R)$，令 $x=1$ 得 $-4\,038=a_1-2a_2+\ldots-2\,018a_{2\,018}+2\,019a_{2\,019}$，

19． B

【分析】由 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^a<\left(\dfrac{1}{3}\right)^b\Leftrightarrow a>b$，$\log_3a>\log_3b\Leftrightarrow a>b>0$ 可判断出①错误，由当 $x<0$ 时，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x>1$ 可判断出②错误，由 $x^{2020}=[2+(x-2)]^{2020}=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots+a_{2020}(x-2)^{2020}$ 可求出 $a_1=2^{2019}C_{2020}^1$，可得到③正确，

由 $\alpha\in\left(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 可得 $\dfrac{\alpha}{2}\in\left(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right),k\in Z$，然后可判断出④正确.

20． C【详解】解：因为 $\left(\sqrt{2}-x\right)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，令 $x=1$ 得 $\left(\sqrt{2}-1\right)^{10}=a_0+a_1+a_2+a_3\cdots+a_{10}$，

令 $x=-1$ 得 $\left(\sqrt{2}+1\right)^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}$，所以 $\left(a_0+a_2+\cdots+a_{10}\right)^2-\left(a_1+a_3+\cdots+a_9\right)^2$

$=\left(a_0+a_1+a_2+a_3\cdots+a_{10}\right)\left(a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)^{10}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^{10}=\left[\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\right]^{10}=1^{10}=1$

21． AB【分析】赋值法求二项展开式的所有项的系数和可判断 A；利用二项式系数和公式可判断 B；写出二项展开式的通项，令 x 的次数为 0 求出 r 可判断 C；写出所有项的系数可判断 D.

22． ACD【详解】取 $x=1$ 得 $a_0=1$，A 正确；

由 $\left(x-2\right)^{10}=\left[1-\left(x-1\right)\right]^{10}$ 展开式中第 7 项为 $C_{10}^6\left[-\left(x-1\right)\right]^6$ 所以 $a_6=C_{10}^6=210$，B 错误；

由 $\left[1-(\dfrac{x-1}{2})\right]^{10}=\dfrac{a_0}{2^0}+\dfrac{a_1}{2}(x-1)+\dfrac{a_2}{2^2}(x-1)^2+\cdots+\dfrac{a_{10}}{2^{10}}(x-1)^{10}$ 取 $x=2$ 得

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots+\dfrac{a_{10}}{2^{10}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}-a_0=-\dfrac{1023}{1024}$，C 正确；

由 $(x-2)^{10}=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$ 取 $x=0$ 得 $\left(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}\right)-\left(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9\right)=2^{10}$

取 $x=2$ 得 $\left(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}\right)+\left(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9\right)=0$

所以 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=2^9=512$，D 正确.

23． BD【详解】对于 A，该二项展开式中二项式系数和是 2^{2020}，故错误；

对于 B，由于$T_{6+1}=C_{2020}^{6}(\sqrt{x})^{2020-6}(-1)^{6}=C_{2020}^{6}x^{1007}$，即该二项展开式中第七项为$C_{2020}^{6}x^{1007}$，故正确.

对于 C，该二项展开式中，最后一项为$C_{2020}^{2020}(\sqrt{x})^{0}(-1)^{2020}=1$，是有理项，故错误.

对于 D，当$x=100$时，$(10-1)^{2020}=C_{2020}^{0}(10)^{2020-0}.(-1)^{0}+\cdots+C_{2020}^{2019}(10)^{1}.(-1)^{2019}+C_{2020}^{2020}(10)^{0}(-1)^{2020}$，除了最后一项（最后一项等于 1），前面的所有项都能被 100 整除，即当$x=100$时，$\left(\sqrt{x}-1\right)^{2020}$除以 100 的余数是 1，故正确.

24． ABC

【详解】对 A：令$x=0$，可得$a_0=-1$，故 A 正确；

对 B: 左右两边分别求导得：$5\times(2x-1)^{4}\times 2=5a_5x^4+4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x^1+a_1$，令$x=1$，得$5a_5+4a_4+3a_3+2a_2+a_1=10$，

故 B 正确；对 C：$a_3=C_5^2\times 2^3\times(-1)^2=80$，故 C 正确；

对 D：令$x=1$，可得$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$，而$a_0=-1$，所以$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2$，故 D 错误.

25． ACD

【详解】

由题意知，三项式系数塔与杨辉三角构造相似，其第二行为三个数，且下行对应的数是上一行三个数之和，故$T_7^i=T_7^{14-i}$，T_7^7是T_7^0，T_7^1，T_7^2，…，T_7^{14}的中间项，故T_7^7最大，所以 A，D 正确；令$x=0$可知：

$1=T_n^0+T_n^1\cdot 0+T_n^2\cdot 0+\ldots+T_n^{2n}\cdot 0=T_n^0$；

当$n=7$时，$\left(1+x+x^2\right)^7=1+T_7^1x+T_7^2x^2+\ldots+T_7^{14}x^{14}$，$T_7^2=C_7^1+C_7^2=7+21=28$，$T_7^3=C_7^1C_6^1+C_7^3=42+35=77$，

$T_8^3=C_8^1C_7^1+C_8^3=112$，所以$T_7^2+T_7^3\neq T_8^3$.令$x=1$可知，$3^7=T_7^0+T_7^1+T_7^2+\ldots+T_7^{14}=\sum_{i=0}^{14}T_7^i=1+\sum_{i=1}^{14}T_7^i$，即$3^7-1=\sum_{i=1}^{14}T_7^i$；

又因为$2\sum_{i=1}^{b}3^i=2(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^b)=2\cdot\dfrac{3^7-1}{3-1}=3^7-1$.故$\sum_{i=1}^{14}T_7^i=2\sum_{i=0}^{6}3^i$，C 正确.

26． ACD

【详解】令$f(x)=(2x-3)(x-2)^8=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+\cdots+a_9(x-1)^9$.

对于 A 选项，$a_0=f(1)=-1$，$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=f(2)=0$，

所以$a_1+a_2+\cdots+a_9=1$，故 A 正确；

对于 B 选项，令$t=x-1$，可得$x=t+1$，

则有$(2t-1)(t-1)^8=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_9t^9$，

$\because(2t-1)(t-1)^8=2t(t-1)^8-(t-1)^8$，$(t-1)^8$的展开式通项为$A_{r+1}=C_8^r\cdot t^{8-r}\cdot(-1)^r$，

所以，$(2t-1)(t-1)^8$的展开式通项为$T_{r+1,k+1}=2tC_8^r\cdot t^{8-r}\cdot(-1)^r-C_8^k\cdot t^{8-k}\cdot(-1)^k=2C_8^r\cdot t^{9-r}\cdot(-1)^r-C_8^k\cdot t^{8-k}\cdot(-1)^k$，

由$\begin{cases}9-r=5\\8-k=5\end{cases}$，解得$\begin{cases}r=4\\k=3\end{cases}$，所以，$a_5=2C_8^4\cdot(-1)^4-C_8^3\cdot(-1)^3=140+56=196$，故 B 错误；

对于 C 选项，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_9}{2^9}=0$，因此，$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_9}{2^9}=1$，故 C 正确；

对于 D 选项， $f'(x)=2(x-2)^8+8(2x-3)(x-2)^7=a_1+2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2+\cdots+9a_9(x-1)^8$，

因此， $a_1+2a_2+\cdots+9a_9=f'(2)=0$，故 D 正确.

27． ACD【详解】由题意，当 $x=0$ 时， $a_0=1^{2009}=1$，

当 $x=1$ 时， $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2009}=(-1)^{2009}=-1$，当 $x=-1$ 时， $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{2009}=3^{2009}$，

所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2009}=-\dfrac{3^{2009}+1}{2}$， $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2008}=\dfrac{3^{2009}-1}{2}$，

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{2009}}{2^{2009}}=a_1\times\dfrac{1}{2}+a_2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+a_{2009}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2009}$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时， $0=a_0+a_1\times\dfrac{1}{2}+a_2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+a_{2009}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2009}$，

所以 $a_1\times\dfrac{1}{2}+a_2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+a_{2009}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2009}=-a_0=-1$.

28． CD【详解】$\because$ 在 $(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中，前 3 项的系数成等差数列，$\therefore 2C_n^1\cdot\dfrac{1}{2}=C_n^0(\dfrac{1}{2})^0+C_n^2(\dfrac{1}{2})^2$，解得： $n=8$ 或 1

（舍去）. 当 $x=1$ 时，所有项的系数和为： $(\dfrac{3}{2})^8\neq 256$， $\therefore A$ 错；

$(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}})^8$ 通项为： $T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}})^r=(\dfrac{1}{2})^rC_8^rx^{\frac{24-5r}{6}}$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2^{k-1}}C_8^{k-1}\geq\dfrac{1}{2^{k-2}}C_8^{k-2}\\ \dfrac{1}{2^{k-1}}C_8^{k-1}\geq\dfrac{1}{2^k}C_8^k\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{8!}{(k-1)!\cdot(8-k+1)!}\geq 2\dfrac{8!}{(k-2)!.(8-k+2)!}\\ 2\cdot\dfrac{8!}{(k-1)!\cdot(8-k+1)!}\geq\dfrac{8!}{k!\cdot(8-k)!}\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{1}{k-1}\geq\dfrac{2}{10-k}\\ \dfrac{2}{9-k}\geq\dfrac{1}{k}\end{cases}\quad 3\leq k\leq 4,$$

展开式中第 3 项与第 4 项系数最大，$\therefore B$ 错，

当 $r=0$，6 时为有理项，共 2 项， $\therefore C$ 对；

由上面通项可令 $\dfrac{24-5r}{6}=1$，解得 $r=\dfrac{18}{5}$ 不为整数，

$\therefore$ 展开式不含 x 一次项，$\therefore D$ 对.

29． BC【详解】

对于选项 A：令 $x=0$ 得展开式各项系数和为 -1，但其二项式系数和为 2^{2021}，故 A 错误；

对于选项 B：展开式中第 8 项为 $\mathrm{C}_{2021}^7\left(\sqrt{x}\right)^{2014}\cdot(-1)^7=-\mathrm{C}_{2021}^7x^{1007}$，故 B 正确；

对于选项 C：当 $x=100$ 时， $(\sqrt{x}-1)^{2021}=(10-1)^{2021}$

$=C_{2021}^0\cdot10^{2021}-C_{2021}^1\cdot10^{2020}+...+C_{2021}^r\cdot10^{2021-r}\cdot(-1)^r+...+C_{2021}^{2020}\cdot10^1+C_{2021}^{2021}\cdot(-1)^{2021}$

$=100(C_{2021}^0\cdot10^{2019}-C_{2021}^1\cdot10^{2018}+...+C_{2021}^{2019}\cdot10^0)+C_{2021}^{2020}\cdot10^1-1$，

$\because 100(C_{2021}^0\cdot10^{2019}-C_{2021}^1\cdot10^{2018}+...+C_{2021}^{2019}\cdot10^0)$ 能被 100 整除，

而 $C_{2021}^{2020}\cdot10^1-1=20210-1=20209=20200+9$，除以 100 的余数是 9，

$\therefore$ 当 $x=100$ 时， $(\sqrt{x}-1)^{2021}$ 除以 100 的余数是 9，故 C 正确；

对于选项 D：$(\sqrt{x}-1)^{2021}$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_{2021}^{r}\cdot(\sqrt{x})^{2021-r}(-1)^{r}=(-1)^{r}\cdot C_{2021}^{r}\cdot x^{\frac{2021-r}{2}}$，

当 $\frac{2021-r}{2}$ 为整数，即 $r=1$，3，⋯，2021 时，T_{r+1} 为有理项，故 D 错误.

30．AB【详解】解：依题意可得 $a_n=2^n$，$b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$，$c_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n$，

因为 $a_nb_n=2^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{4}{3}\right)^n=c_n$，所以 A 正确.。因为 $\frac{b_n+c_n}{a_n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{4}{3}\right)^n}{2^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\le\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$，所以 B 正确.

因为 $\mathrm{y}=\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增且 $y=2^x$ 在定义域上单调递增，所以 $y=\frac{1}{2^x}+2^x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以

$\frac{b_n}{c_n}+\frac{c_n}{b_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+2^n\ge\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$，当且仅当 $n=1$ 时取等号，所以 C 不正确.

因为 $b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$，当 $n\ge3$ 时，$b_1+2b_2+3b_3+\cdots+nb_n\ge2$，所以 D 不正确.

31．$-\frac{5}{32}$【详解】$x^5=\frac{1}{32}[(2x+1)-1]^5$，则展开式通项为 $T_{r+1}=\frac{1}{32}C_5^r(2x+1)^{5-r}(-1)^r$，∴ $r=1$ 时，$a_4=\frac{1}{32}\times C_5^1\times(-1)=-\frac{5}{32}$

32．1120

【详解】$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n=256\Rightarrow n=8$

$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^n$ 展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_8^r(x^2)^{8-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r=2^r\cdot C_8^r\cdot x^{16-3r}$

当 $16-3r=4$ 时, $r=4$, 即 $T_5=2^4\cdot C_8^4\cdot x^4=1120x^4$ 则展开式中 x^4 的系数为 1120

33．120【详解】解：因为 $\left(\frac{9}{|x|}+4|x|-12\right)^5=\left[\left(\frac{3}{\sqrt{|x|}}-2\sqrt{|x|}\right)^2\right]^5=\left(\frac{3}{\sqrt{|x|}}-2\sqrt{|x|}\right)^{10}$，所以展开式中第 4 项的二项式系数

为 $\mathrm{C}_{10}^3=120$.

34．64【详解】由题意知 $\begin{cases}\mathrm{C}_n^3>\mathrm{C}_n^2\\ \mathrm{C}_n^3>\mathrm{C}_n^4\end{cases}$，则 $\begin{cases}\frac{n(n-1)(n-2)}{6}>\frac{n(n-1)}{2}\\ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}>\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\end{cases}$，解得 $5<n<7$，又 $n\in\mathrm{N}$，因此 $n=6$，

则令 $x=1$，可得 $(1+x)^6$ 的系数和为 $2^6=64$.

35．$1-\left(5-\sqrt{17}\right)^{30}$

【详解】$A=\left(5+\sqrt{17}\right)^{30}=5^{30}+C_{30}^1 5^{29}\left(\sqrt{17}\right)^1+C_{30}^2 5^{28}\left(\sqrt{17}\right)^2+C_{30}^3 5^{27}\left(\sqrt{17}\right)^3+\cdots+C_{30}^{30}5^0\left(\sqrt{17}\right)^{30}$，

$B=\left(5-\sqrt{17}\right)^{30}=5^{30}-C_{30}^1 5^{29}\left(\sqrt{17}\right)^1+C_{30}^2 5^{28}\left(\sqrt{17}\right)^2-C_{30}^3 5^{27}\left(\sqrt{17}\right)^3+\cdots+C_{30}^{30}5^0\left(\sqrt{17}\right)^{30}$，

所以$A=\left(5+\sqrt{17}\right)^{30}$，$B=\left(5-\sqrt{17}\right)^{30}$的奇数数项相同，偶数项相反，且绝对值相同，

所以$\left(5+\sqrt{17}\right)^{30}+\left(5-\sqrt{17}\right)^{30}$的结果是整数.所以$\left(5+\sqrt{17}\right)^{30},\left(5-\sqrt{17}\right)^{30}$的小数部分的和为 1.

下面求$\left(5-\sqrt{17}\right)^{30}$的小数部分：因为$4<\sqrt{17}<5,\therefore 0<5-\sqrt{17}<1,\therefore 0<(5-\sqrt{17})^{30}<1,$

所以$\left(5-\sqrt{17}\right)^{30}$的小数部分就是$\left(5-\sqrt{17}\right)^{30}$.所以$\left(5+\sqrt{17}\right)^{30}$的小数部分为$1-\left(5-\sqrt{17}\right)^{30}$.

36．①③④

【详解】对于①，$\because\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$，令二项式中的$x$为 1 得到展开式的各项系数和为$1+a$，

$\therefore 1+a=1$，故①正确；对于②，$\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6=\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6+\frac{1}{x}\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$，

$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$展开式的通项为$T_{r+1}=(-1)^r 2^{6-r}C_6^r x^{6-2r}$，当$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$展开式是中常数项为：令$6-2r=0$，得$r=3$，

可得展开式中常数项为：$T_4=(-1)^3 2^3 C_6^3=-160$，当$\frac{1}{x}\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$展开式是中常数项为：

$\frac{1}{x}(-1)^r 2^{6-r}C_6^r x^{6-2r}=(-1)^r 2^{6-r}C_6^r x^{5-2r}$，令$5-2r=0$，得$r=\frac{5}{2}$（舍去），

故$\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中常数项为-160.故②错误；

对于③，求其展开式系数的绝对值的和与$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$展开式系数的绝对值的和相等，

$\because\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2x+\frac{1}{x}\right)^6$，令$x=1$，可得：$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(2+\frac{1}{1}\right)^6=2\times 3^6=1458$

$\therefore\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$展开式系数的绝对值的和为：1458，故③正确；

对于④，$\because\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6=\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6+\frac{1}{x}\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$

$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$展开式的通项为$T_{r+1}=(-1)^r 2^{6-r}C_6^r x^{6-2r}$，当$r$为偶数，保证展开式中$x^r$和$x^{r-1}$的系数相等，

①x^2和x^1的系数相等，$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$展开式系数中$x^2$系数为：$(-1)^2 2^{6-2}C_6^2$

展开式系数中x^1系数为：$(-1)^2 2^{6-2}C_6^2$，此时x^2和x^1的系数相等，

②x^4和x^3的系数相等，$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$展开式系数中$x^4$系数为：$(-1)^1 2^5 C_6^1$

展开式系数中 x^3 系数为：$(-1)^1 2^5 C_6^1$，此时 x^4 和 x^3 的系数相等，

③ x^6 和 x^5 的系数相等，$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式系数中 x^6 系数为：$(-1)^0 2^6 C_6^0$，

展开式系数中 x^5 系数为：$(-1)^0 2^6 C_6^0$，此时 x^6 和 x^5 的系数相等，故④正确.

故答案为：①③④.

37． -1【详解】因为 $(1-2x)^{2021}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2021}x^{2021}\,(x\in R)$，

令 $x=0$ 可得 $a_0=1$；令 $x=\frac{1}{2}$ 可得：$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{a_{2021}}{2^{2021}}=\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)^{2021}=0$；故 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{a_{2021}}{2^{2021}}=0-a_0=-1$.

38． 454

【详解】解：因为 $a_{n+1}+1=2a_n+2=2(a_n+1)$，所以 $\{a_n+1\}$ 以 2 为首项，

2 为公比的等比数列，所以 $a_n+1=2\times 2^{n-1}=2^n$，所以 $a_n=2^n-1$，

则 $C_5^0a_1+C_5^1a_2+C_5^2a_3+C_5^3a_4+C_5^4a_5+C_5^5a_6$

$=C_5^0\times 2+C_5^1\times 2^2+C_5^2\times 2^3+C_5^3\times 2^4+C_5^4\times 2^5+C_5^5\times 2^6-\left(C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5\right)$

又 $C_5^0\times 2+C_5^1\times 2^2+C_5^2\times 2^3+C_5^3\times 2^4+C_5^4\times 2^5+C_5^5\times 2^6=2\times\left(C_5^0\times 2^0+C_5^1\times 2^1+C_5^2\times 2^2+C_5^3\times 2^3+C_5^4\times 2^4+C_5^5\times 2^5\right)$

$=2\times(1+2)^5=486$，$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=2^5=32$，所以原式 $=486-32=454$，

39． 98 解：三角形数阵中，第 n 行的数由二项式系数 C_n^k（$n\in N$，$k\in\mathbf{N}$，$k\le n$）组成，

如果第 n 行中有 $\frac{C_n^{k-1}}{C_n^k}=\frac{k}{n-k+1}=\frac{4}{5}$，$\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}=\frac{k+1}{n-k}=\frac{5}{6}$，那么 $\begin{cases}9k-4n=4\\5n-11k=6\end{cases}$，解得 $\begin{cases}n=98\\k=44\end{cases}$.故答案为：98.

40． 4【详解】$\because \frac{x}{1+x-2x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$

$\therefore x=(1+x-2x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)=a_0+(a_0+a_1)x+(a_2+a_1-2a_0)x^2+(a_3+a_2-2a_1)x^3+\cdots$

$\therefore\begin{cases}a_0=0\\a_0+a_1=1\\a_2+a_1-2a_0=0\\a_3+a_2-2a_1=0\end{cases}$,解得：$a_0=0,a_1=1,a_2=-1,a_3=3$，即 $a_1+a_3=4$.