高三数学一轮复习——数列讲义——数列递推、迭代（1）

■一阶递推

1．迭加：$a_{n+1}=a_n+f(n)$（一阶迭加）

【例 1】设数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=\dfrac{8}{3}$，满足$a_n=a_{n-1}-\dfrac{7}{4n^2-1}(n=2,3,\cdots)$，求$\{a_n\}$通项公式.

2．迭乘：$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$（一阶迭乘）

【例 2】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=2$，满足$a_n=5^{1-n}a_{n-1}$，求$\{a_n\}$通项公式.

3．迭代：$a_{n+1}\cdot f(n+1)=a_n\cdot f(n)=\cdots=a_1\cdot f(1)$（一阶迭代之构造常数数列法）

【例 3】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$na_{n+1}=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，求$\{a_n\}$的通项公式.

【例 4】已知数列$\{a_n\}$满足：$na_{n+1}=(2n+1)a_n-(n+1)a_{n-1}$，$a_1=1$，$a_2=3$，求$\{a_n\}$的通项公式.

4．迭代法之辅助数列模型：$f(n)=\dfrac{h(n+1)}{h(n)}\left(或f(n)=\dfrac{h(n)}{h(n+1)}\right)$，则$\dfrac{a_{n+1}}{h(n+1)}=\dfrac{a_n}{h(n)}\left(a_{n+1}h(n+1)=a_nh(n)\right)$

$\left\{\dfrac{a_n}{h(n)}\right\}$（或$\{a_nh(n)\}$）是常数数列，$\dfrac{a_n}{h(n)}=\dfrac{a_1}{h(1)}\left(或a_nh(n)=a_1h(1)\right)$ $\therefore a_n=a_1\cdot\dfrac{h(n)}{h(1)}\left(或a_n=a_1\cdot\dfrac{h(1)}{h(n)}\right)$

注意：如果 $f(n)=\dfrac{h(n+1)}{h(n-1)}\left(或f(n)=\dfrac{h(n-1)}{h(n+1)}\right)$，则$\dfrac{a_{n+1}}{h(n)h(n+1)}=\dfrac{a_n}{h(n)h(n-1)}\left(a_{n+1}h(n)h(n+1)=a_nh(n)h(n-1)\right)$

【例 5】设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$3S_n=a_n(n+2)$，$a_1=2$，求数列$\{a_n\}$的通项.

有的时候需要添加一项，有的时候需要添加两项，具体题目按需要去添加.

【例 6】设数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，若$a_1=1$，$2S_n=n(3n-1)a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项.

5. **递推式** $a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$，$a_1=a$

迭代法之辅助数列模型：$f(n)=\dfrac{h(n+1)}{h(n+1)}$，则$\dfrac{a_{n+1}}{h(n+1)}=\dfrac{a_n}{h(n)}+\dfrac{g(n)}{h(n+1)}$，再用迭加法求出

$$\frac{a_n}{h(n)}=\frac{g(n-1)}{h(n)}+\frac{g(n-2)}{h(n-1)}+\Lambda+\frac{g(1)}{h(2)}+\frac{a_1}{h(1)}\Rightarrow a_n=h(n)\left[\frac{g(n-1)}{h(n)}+\frac{g(n-2)}{h(n-1)}+\Lambda+\frac{g(1)}{h(2)}+\frac{a}{h(1)}\right]$$

注意：如果 $f(n)=\dfrac{h(n+1)}{h(n-1)}$，则$\dfrac{a_{n+1}}{h(n)h(n+1)}=\dfrac{a_n}{h(n)h(n-1)}+\dfrac{g(n)}{h(n)h(n+1)}$，再用迭加法求出.

【例 7】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{5n+7}{5n+2}a_n+7(5n+7)$，求$\{a_n\}$通项公式.

【例 8】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3n+4}{3n-2}a_n+9$，求$\{a_n\}$通项公式.

6. **递推式** $a_{n+1}=ka_n+f(n)(k\neq 0，1)$

递推式 $a_{n+1}=ka_n+f(n)(k\neq 0，1)$ 转化为 $a_{n+1}+g(n+1)=k[a_n+g(n)]$，$g(n)$为待定系数

1．当 $f(n)=A$时，$a_{n+1}+\dfrac{A}{k-1}=k\left(a_n+\dfrac{A}{k-1}\right)$，$\left\{a_n+\dfrac{A}{k-1}\right\}$是以$a_1+\dfrac{A}{k-1}$为首项，$k$为公比的等比数列.

2．当 $f(n)=Ak^n$时，同除以k^n，得：$\dfrac{a_{n+1}}{k^n}=\dfrac{a_n}{k^{n-1}}+A$数列$\left\{\dfrac{a_n}{k^{n-1}}\right\}$是以$a_1$为首项，$A$为公差的等差数列， 则

$\dfrac{a_n}{k^{n-1}}=a_1+A(n-1)$.

3．当 $f(n)=Aq^n(k\neq q)$时，可用待定系数法，$a_{n+1}+xq^{n+1}=k(a_n+xq^n)$，对比系数可知$A=x(k-q)$，

$\therefore$数列$\left\{a_n+\dfrac{A}{k-q}q^n\right\}$是以$a_1+\dfrac{Aq}{k-q}$为首项，$k$为公比的等比数列.

4．$f(n)=Aq^n+B$转化成$a_{n+1}+xq^{n+1}+y=k(a_n+xq^n+y)$即$\begin{cases}kx-xq=A\\ky-y=B\end{cases}$解出$A,B$；可得数列

$\{a_n+xq^n+y\}$是以a_1+xq+y为首项，k为公比的等比数列，$a_n+xq^n+y=(a_1+xq+y)\cdot k^{n-1}$

$\therefore a_n=(a_1+xq+y)\cdot k^{n-1}-xq^n-y$.

5．$a_{n+1}=ka_n+an+b$转化成$a_{n+1}+A(n+1)+B=k(a_n+An+B)$即$\begin{cases}kA-A=a\\kB-B-A=b\end{cases}$解出$A,B$；可得数列

$\{a_n+An+B\}$是以a_1+A+B为首项，k为公比的等比数列，$a_n+An+B=(a_1+A+B)\cdot k^{n-1}$

$\therefore a_n=(a_1+A+B)\cdot k^{n-1}-An-B$.

6．$a_{n+1}=ka_n+an^2+bn+c$转化成$a_{n+1}+A(n+1)^2+B(n+1)+C=k(a_n+An^2+Bn+C)$，即$\begin{cases}kA-A=a\\kB-B-2A=b\\kC-C-B-A=c\end{cases}$解出

A,B,C；可得数列$\{a_n+An^2+Bn+C\}$是以$a_1+A+B+C$为首项，k为公比的等比数列，

$a_n+An^2+Bn+C=(a_1+A+B+C)\cdot k^{n-1}\ \therefore a_n=(a_1+A+B+C)\cdot k^{n-1}-An^2-Bn-C$.

【例 9】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=\dfrac{2}{3}$，满足$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}(n=1,2,\Lambda)$.

（1）求$\{a_n\}$通项公式；（2）求数列$\left\{\dfrac{n}{a_n}\right\}$的前$n$项和$S_n$.

【例 10】设数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，满足$a_n=3a_{n-1}+2n+5(n=2,3,\Lambda)$，求$\{a_n\}$通项公式.

【例 11】设数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=3$，且$a_n=3a_{n-1}+5\cdot 7^{n-2}+2(n=2,3,\Lambda)$，求$\{a_n\}$通项公式.

【例 12】设数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，满足$a_{n+1}=2a_n-n^2+3n(n=1,2,\Lambda)$.

（1）是否存在λ，μ，使得数列$\{a_n+\lambda n^2+\mu n\}$成等比数列？若存在，求出$\lambda$，$\mu$的值，若不存在，说明理由.

（2）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{1}{a_n+n-2^{n-1}}$，$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$，证明：当$n\ge 2$时，$\dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)}\le S_n<\dfrac{5}{3}$.

■二阶递推

一、 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}(a_1=a,a_2=b,n\ge 2)$

1．设$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$ 与$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$比较，**得**$\alpha+\beta=p,\alpha\cdot\beta=-q$，**可知：**

α，β是方程$x^2-px-q=0$的两根，容易求得α，β.

（I）**当**$\alpha\ne\beta$**时，数列**$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$是以$a_2-\alpha a_1$为首项，β为公比的等比数列

同时满足数列$\{a_{n+1}-\beta a_n\}$是以$a_2-\beta a_1$为首项，α为公比的等比数列

则有$\begin{cases}a_{n+1}-\alpha a_n=(b-\alpha a)\beta^{n-1}\\ a_{n+1}-\beta a_n=(b-\beta a)\alpha^{n-1}\end{cases}$ **两式联立，消去**a_{n+1}**得：**$a_n=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\left[(b-\alpha a)\beta^{n-1}-(b-\beta a)\alpha^{n-1}\right]$

特例：当$p+q=1$时， $a_{n+1}-a_n=-qa_n+qa_{n-1}$，$\therefore\{a_{n+1}-a_n\}$是以$b-a$为首项，$-q$为公比的等比数列

$\therefore a_{n+1}-a_n=(b-a)(-q)^{n-1}$，**同时** $a_{n+1}+qa_n=a_n+qa_{n-1}$，$\therefore\{a_{n+1}+qa_n\}$是以$b+qa$为常数的数列

故可以求出： $a_n=a+\dfrac{(b-a)\left[1-(-q)^{n-1}\right]}{1+q}$.

特征根解方程法：令 $a_n=x\cdot\alpha^n+y\cdot\beta^n$，**再将** a_1,a_2 **代入即可秒杀.**

（II）**当** $\alpha=\beta$ **时，** 设$a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha(a_n-\alpha a_{n-1})=\alpha^{n-1}(b-\alpha a)$，**两边同除以** α^{n-1} **得：** $\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n-1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^{n-2}}=b-\alpha a$

数列$\left\{\dfrac{a_n}{\alpha^{n-2}}\right\}$是以$\alpha a$为首项，$b-\alpha a$为公差的等差数列，$\therefore\dfrac{a_n}{\alpha^{n-2}}=\alpha a+(n-1)(b-\alpha a)$

特征根解方程法：令 $a_n=(xn+y)\alpha^n$，**再将** a_1,a_2 **代入即可秒杀.**

【例 1】已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{4}{3}$，$a_2=\dfrac{13}{9}$，且$3a_n+a_{n-2}=4a_{n-1}(n\geqslant3)$，则$a_n=$____.

【例 2】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，$a_2=4$，且$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$，求：$\{a_n\}$通项公式.

【例 3】设p,q为实数，α，β是方程$x^2-px+q=0$的两根，数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=p$，$a_2=p^2-q$，$a_{n+2}=pa_{n+1}-qa_n$.

（1）证明：$\alpha+\beta=p,\alpha\cdot\beta=q$；

（2）求$\{a_n\}$通项公式；

（3）$p=1,q=\dfrac{1}{4}$，求$\{a_n\}$的前n项和S_n.

湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列递推、迭代（2）

二、斐波那契数列

定义：一个数列，前两项都为 1，从第三项起，每一项都是前两项之和，那么这个数列称为斐波那契数列，又称黄金分割数列；表达式 $F_0=1, F_1=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\in N^+)$

通项公式：$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$（又叫“比内公式”，是用无理数表示有理数的一个范例）

比较有趣的是：一个完全是自然数的数列，通项公式竟然是用无理数表示的.

证明：线性递推数列的特征方程为：$x^2=x+1$，解得：$x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 则 $F_n=c_1{x_1}^n+c_2{x_2}^n$

$\because F_1=F_2=1$　$\therefore \begin{cases}1=c_1x_1+c_2x_2\\1=c_1{x_1}^2+c_2{x_2}^2\end{cases}$ 解得：$c_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$；$c_2=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\therefore F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

斐波那契数列的一些性质：

求和问题：① $S_n=a_{n+2}-1$；② $a_1+a_3+a_5+\Lambda\ a_{2n-1}=a_{2n}$；③ $a_2+a_4+a_6+\Lambda\ a_{2n}=a_{2n+1}-1$.

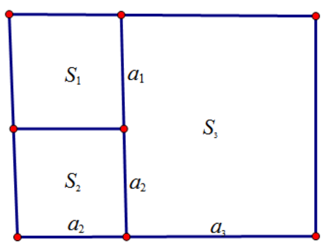
证明：① $a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)+\Lambda+(a_2-a_1)+a_1=a_n+a_{n-1}+\Lambda+a_1+a_1=S_n+1$，故 $S_n=a_{n+2}-1$，此证明方法也是错位相减的一种特例.

② $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=a_1+(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-3}+a_{2n-2})=a_1+S_{2n-2}=a_{2n}$，此证明过程也需要利用①的结论.

③ $a_2+a_4+\Lambda+a_{2n}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\Lambda+(a_{2n-2}+a_{2n-1})=S_{2n-1}=a_{2n+1}-1$.

这三个式子用数学归纳法证明也非常简单，无需强化记忆，每次列出前几项比划一下，考试中如果出现需要这些结论的，拿出前几项及时推导即可.

平方和问题：${a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2=a_na_{n+1}$（根据面积公式推导，如下图）



构造正方形来设计面积，${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2=S_1+S_2+S_3=(a_1+a_2)(a_2+a_3)=a_3a_4$，以此类推，也可以用数学归纳法证明，知道一个大致的方向即可.

裂项问题：$\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-3}a_{2n-1}}+\dfrac{1}{a_{2n-2}a_{2n}}=\dfrac{1}{a_2}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_3}\right)+\dfrac{1}{a_3}\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_4}\right)+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n-2}}\left(\dfrac{1}{a_{2n-3}}-\dfrac{1}{a_{2n-1}}\right)$

$+\frac{1}{a_{2n-1}}\left(\frac{1}{a_{2n-2}}-\frac{1}{a_{2n}}\right)=\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}$.

注意：如果是斐波那契数列的部分项求和也可以，比如 $\frac{p}{a_ma_{m+2}}+\frac{p}{a_{m+1}a_{m+3}}+\Lambda+\frac{p}{a_{m+n-2}a_{m+n}}=\frac{p}{a_{m+1}}\left(\frac{1}{a_m}-\frac{1}{a_{m+n}}\right)$

前提就是必须隔项，否则无法裂项相消.

【例 4】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{3}$，$a_2=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$，则$\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+\ldots+\frac{1}{a_{2019}a_{2021}}$的整数部分为（　　）

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

【例 5】斐波那契数列中，若$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in N^*)$，$S_n$为斐波那契数列的前$n$项和，则下列式子中成立的是（　　）

A．$S_{2019}=a_{2020}+1$　　B．$S_{2019}=a_{2021}$

C．$a_1+a_3+\Lambda+a_{2019}=a_{2021}$　　D．$a_2+a_4+\Lambda+a_{2018}=a_{2019}-1$

三、 二阶构造的周期数列

若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$，或者$a_n=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}(n\geqslant 3)$，则数列$\{a_n\}$是周期为 6 的数列.

【例 6】已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in N^*)$则$\{a_n\}$前 100 项之和为（　　）

A．5　　B．20　　C．300　　D．652

四 、 二阶递推式：$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}+A(a_1=a,a_2=b,n\geq 2)$

（1）**当** $p+q=1$**时，** $a_{n+1}-a_n=-q(a_n-a_{n-1})+A$，$\therefore a_{n+1}-a_n+\frac{A}{-q-1}=\left(a_{n+1}-a_n+\frac{A}{-q-1}\right)(-q)$，

$\therefore a_{n+1}-a_n+\frac{A}{-q-1}=\left(b-a+\frac{A}{-q-1}\right)(-q)^{n-1}$**，再由迭加法求出** a_n**.**

（2）**当**$p+q\neq 1$**时，设**$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})+A$　**与**$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}+A$**比较，得**$\alpha+\beta=p,\alpha\cdot\beta=-q$**，可知，**

α，β**是方程**$x^2-px-q=0$**的两根，容易求得**α，β**.**

（I）当$\alpha\neq\beta$时，数列$\left\{a_{n+1}-\alpha a_n+\frac{A}{\beta-1}\right\}$是以$b-\alpha a+\frac{A}{\beta-1}$为首项，$\beta$为公比的等比数列

同时满足数列$\left\{a_{n+1}-\beta a_n+\frac{A}{\alpha-1}\right\}$是以$b-\beta a+\frac{A}{\alpha-1}$为首项，$\alpha$为公比的等比数列

则有$\begin{cases} a_{n+1}-\alpha a_n+\dfrac{A}{\beta-1}=\left(b-\alpha a+\dfrac{A}{\beta-1}\right)\beta^{n-1} \\ a_{n+1}-\beta a_n+\dfrac{A}{\alpha-1}=\left(b-\beta a+\dfrac{A}{\alpha-1}\right)\alpha^{n-1} \end{cases}$ 两式联立，消去a_{n+1}得a_n.

暴力特征根解法： $a_n=x\cdot\alpha^n+y\cdot\beta^n+z$，**代入**$a_1$，$a_2$，$a_3$**即可解得.**

（II）**当**$\alpha=\beta$**时，**设$a_{n+1}-\alpha a_n+\dfrac{A}{\alpha-1}=\alpha\left(a_n-\alpha a_{n-1}+\dfrac{A}{\alpha-1}\right)\Rightarrow a_{n+1}-\alpha a_n+\dfrac{A}{\alpha-1}=\alpha^{n-1}\left(b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}\right)$，

数列$\left\{a_{n+1}-\alpha a_n+\dfrac{A}{\alpha-1}\right\}$是以$b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}$为首项，$\alpha$为公比的等比数列，**将上式子两边同除以**$\alpha^{n-1}$**得：**

$\dfrac{a_{n+1}}{\alpha^{n-1}}-\dfrac{a_n}{\alpha^{n-2}}+\dfrac{A}{(\alpha-1)\alpha^{n-1}}=b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}$，**令**$\dfrac{a_{n+1}+x}{\alpha^{n-1}}-\dfrac{a_n+x}{\alpha^{n-2}}=b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}$**通过以上两式子比较得：**

$\dfrac{x}{\alpha^{n-1}}-\dfrac{x}{\alpha^{n-2}}=\dfrac{A}{(\alpha-1)\alpha^{n-1}}\Rightarrow x=-\dfrac{A}{(\alpha-1)^2}$，**数列**$\left\{\dfrac{a_n-\dfrac{A}{(\alpha-1)^2}}{\alpha^{n-2}}\right\}$是以$\left(a-\dfrac{A}{(\alpha-1)^2}\right)\alpha$为首项，$b-\alpha a+\dfrac{A}{\alpha-1}$**为公差的等差数列.**

暴力特征根法： $a_n=(xn+y)\alpha^n+z$，**代入**a_1，a_2，a_3**即可解得.**

【例 7】已知数列$\{a_n\}$是首项为$a_1=1$，$a_2=5$，且$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+8$，求：$\{a_n\}$通项公式.

【例 8】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=8$，$a_{n+1}=6a_n-9a_{n-1}+4(n\ge 2)$

（1）是否存在实数p,r，使数列$\{a_{n+1}+pa_n+r\}$为等比数列？若存在，求出实数p,r若不存在，说明理由；

（2）是否存在实数λ，使数列$\left\{\dfrac{a_n+\lambda}{3^{n-2}}\right\}$为等差数列？若存在，求出实数$\lambda$和$\{a_n\}$的通项公式，若不存在，说明理由.

【例 9】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+1}=3a_n+10a_{n-1}+1(n\ge 2)$，，求$\{a_n\}$通项公式.

■数列的本质—函数迭代

一、函数迭代和数列的关系

已知函数 $y=f(x)$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，则一定有 $a_{n+1}=f(a_n)=f_2(a_{n-1})=\cdots f_n(a_1)$，故函数 $y=f(x)$ 通过反复迭代产生的一系列数构成了数列 $\{a_n\}$ 或者记为 $\{b_n\}$、$\{x_n\}$，而数列的每一项与函数迭代的关系可以如下表所示：

下面以函数 $y=2x+1$ 和数列 $a_{n+1}=2a_n+1$

数列	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	……	a_n	a_{n+1}
函数	x	$f(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	……	$f_{n-1}(x)$	$f_n(x)$
数列	1	x	7	15	31	63		2^n-1	$2^{n+1}-1$
数列	-1	-1	-1	-1	-1	-1		-1	-1
函数	x	$2x+1$	$4x+3$	$8x+7$	$16x+15$	$32x+31$	……	$2^{n-1}x+2^{n-1}-1$	$2^n x+2^n-1$

可以发现：

1．数列的递推式和函数的迭代式是有着相同的法则的，故数列的任何一项 (a_n,a_{n+1}) 都在函数 $y=f(x)$ 上.

2．数列的通项公式是函数对 a_1 迭代 $n-1$ 次的结果，即 $a_n=f_{n-1}(a_1)$，每一次由于迭代产生出的因变量成为下一次迭代的自变量.

3．数列的首相 a_1 对整个数列有很大的影响，当迭代不断重复出现同一结果时，我们将其称为不动点.

二、 函数的迭代图像——蛛网图

函数的迭代图像，简称蛛网图或者折线图，函数 $y=f(x)$ 和直线 $y=x$ 共同决定.

其步骤如下：

1．在同一坐标系中作出 $y=f(x)$ 和 $y=x$ 的图像（草图），并确定不动点.（如图 1 所示）

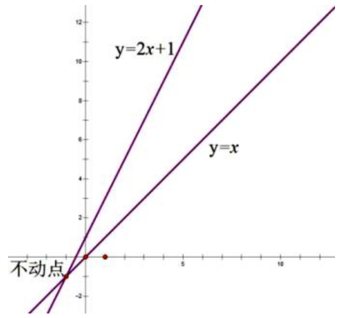


图 1

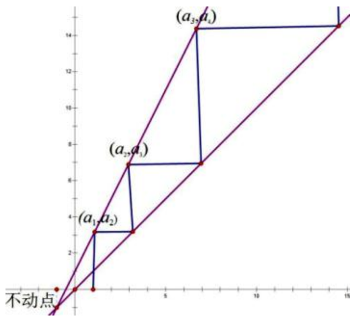


图 2

2．在找出不动点之后，确定范围，将不动点之间的图像放大，并找出起始点 a_1（如图 2 所示）

3．由 a_1 向 $y=f(x)$ 作垂直于 x 轴的直线与 $y=f(x)$ 相交，并确定交点 (a_1,a_2).

4．由 (a_1,a_2) 向 $y=x$ 作平行于 x 轴的直线与 $y=x$ 相交，并确定交点 (a_2,a_2).

5．由 (a_2,a_2) 向 $y=f(x)$ 作垂直于 x 轴的直线与 $y=f(x)$ 相交，并确定交点 (a_2,a_3).

重复 4，5，直至找到点 (a_n,a_{n+1}) 的最终去向.

【例 1】设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【例 2】设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a(a>0), a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$，证明：存在常数 M，使得对于任意的 $n\in N^*$，都有 $a_n\le M$.

湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列递推、迭代（3）

【例 3】首项为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n^2+3), n\in N^*$,若对$n\in N^*$，一切都有$a_{n+1}>a_n$，求$a_1$的取值范围.

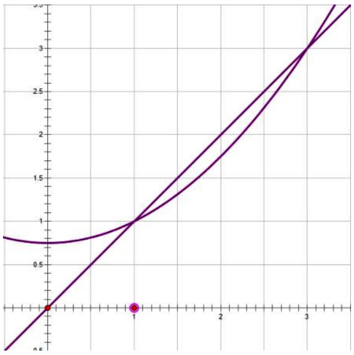


图 5

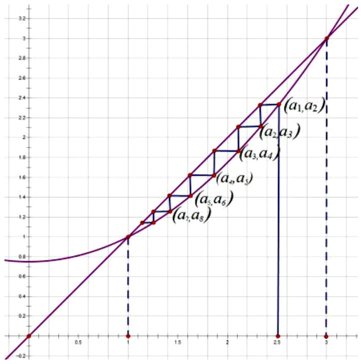


图 6

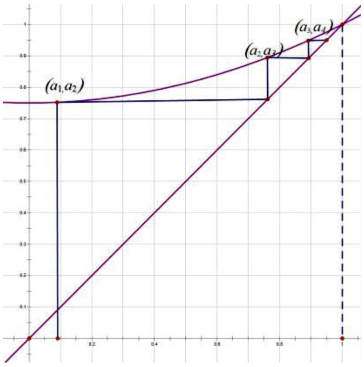


图 7

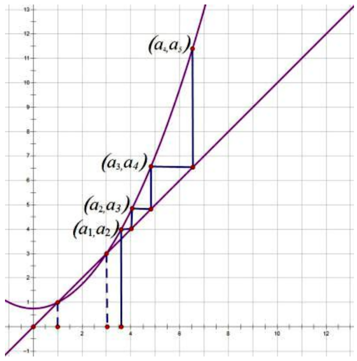


图 8

三、 蛛网图与数列的单调性

定理 1：$y=f(x)$的单调增区间存在两个不动点 x_1，x_2（$x_1<x_2$），且在两个不动点之间形成一上凸的图形时，（如图 9）则数列$a_{n+1}=f(a_n)$在两个不动点之间的区间是递增的，即$a_{n+1}>a_n$，在两不动点以外的区间则是递减的，即$a_{n+1}<a_n$.

定理 2：$y=f(x)$的单调增区间存在两个不动点x_1，x_2（$x_1<x_2$），且在两个不动点之间形成一下凹的图形时，（如图 10）则数列$a_{n+1}=f(a_n)$在两个不动点之间的区间是递减的，即$a_{n+1}<a_n$，在两不动点以外的区间则是递增的，即$a_{n+1}>a_n$.

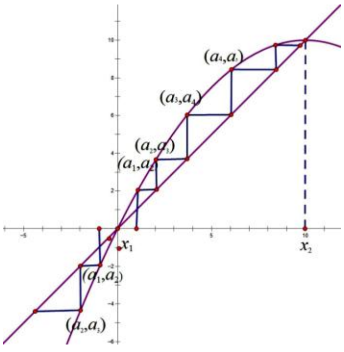


图 9

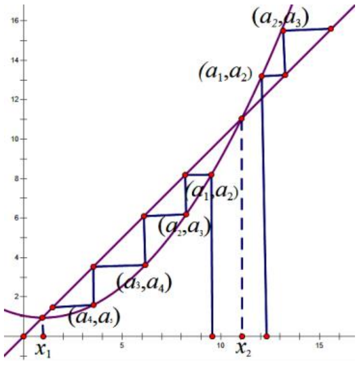


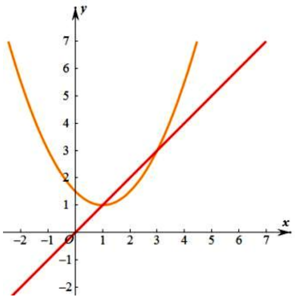
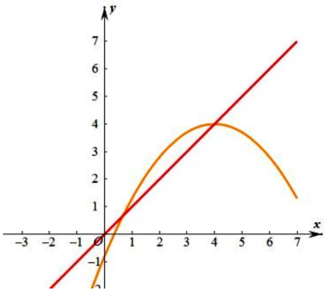
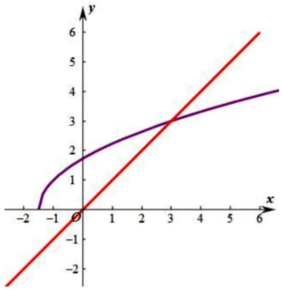
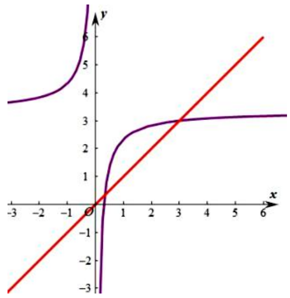
图 10

综上可得，当 $y=f(x)$ 的单调增区间位于上凸内或者下凹外时，即当迭代起点 a_1 位于此区域时，一定有 $a_{n+1}>a_n$ 同理，当迭代起点 a_1 位于单调增区间的上凸外或者下凹内时，一定有 $a_{n+1}<a_n$.

数列的极限

根据蛛网图可知，当一数列 $\{a_n\}$ 为单调上凸曲线时，迭代点 (a_n,a_{n+1}) 会无限靠近大的不动点 x_2，我们将这个大的不动点 x_2 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_2$；当一数列 $\{a_n\}$ 为单调下凹曲线时，迭代点 (a_n,a_{n+1}) 会无限靠近小的不动点 x_1，我们将这个小的不动点 x_1 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_1$.

几种常见的函数迭代图（未画折线）

$y=a(x-h)^2+h(a>0)$　$y=a(x-h)^2+h(a<0)$　$y=\sqrt{ax+b}(a>0,b>0)$　$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad>b)$

顶点为不动点抛物线　顶点为不动点的抛物线　横着的抛物线　二四象限反比例函数的平移函数

请思考：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=h$　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=h$　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_1$　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_2$

四、 由耐克函数的迭代产生的数列

1．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{a}{x}(a>0)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，求不动点得，$x_0=\frac{1}{2}x_0+\frac{a}{x_0},x_0=\sqrt{2a}$，故不动点 $(\sqrt{2a},\sqrt{2a})$ 为耐克函数的顶点（图 11），思考：为什么 $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的不动点一定是顶点？

2．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x-h)+\frac{a}{x-h}+h(a>0)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$，求此函数的不动点得，$x_0-h=\frac{1}{2}(x_0-h)+\frac{a}{x_0-h},x_0=\sqrt{2a}+h$，故可知不动点 $(\sqrt{2a}+h,\sqrt{2a}+h)$ 为耐克函数的顶点（图 12）.

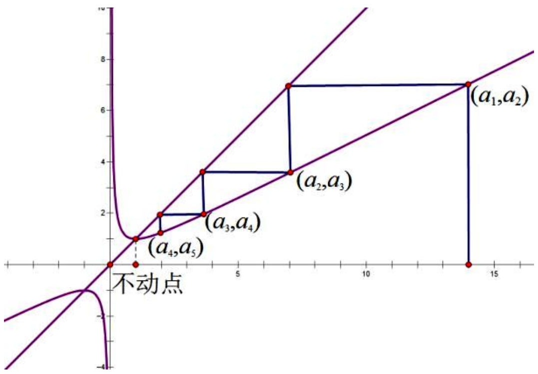


图 11

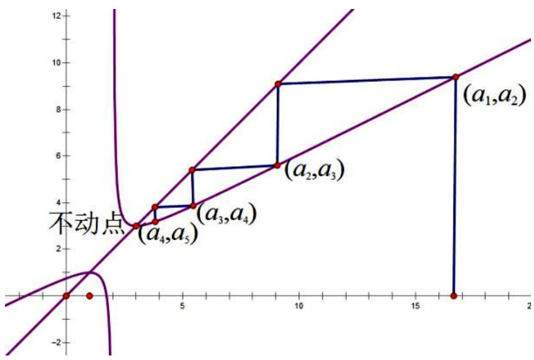


图 12

结论：耐克函数一般为收缩函数，即 $x_0<a_{n+1}<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_2<a_1$.

【例 4】数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{4}{x_n}\right)(n\in N^*)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$, 则 $A=$________.

【例 5】数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\left(a>0,n\in N^*\right)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$，则 $A=$_________.

【例 6】设 $a>2$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=a$ ，$x_{n+1}=\frac{x^2{}_n}{2(x_n-1)}\left(n\in N^*\right)$，求证：$x_n>2$，且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$.

【例 7】数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$ ，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$，求证：$1<a_n<\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$.

五、迭代函数与周期数列问题

已知 $a_{n+1}=\frac{aa_n+b}{ca_n+d}(ad<bc)$，求 $\{a_n\}$ 的通项可由函数 $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ 和直线 $y=x$ 的折线图决定．函数 $y=f(x)$ 和直线 $y=x$ 一定没有交点，即函数 $y=f(x)$ 一定没有不动点．

定理 3　当 $f(x)=f^{-1}(x)$ 时，$f_{2n-1}(x)=f(x);f_{2n}(x)=x$.

例如：$f(x)=\pm\frac{a}{x}(a\in R)$（反比例函数，如图 13）；$f(x)=a-x$（与直线 $y=x$ 垂直的直线，如图 14）

$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$，当 $a+d=0$（将反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 向右向上移动相等的距离得到的图像，如图 15）

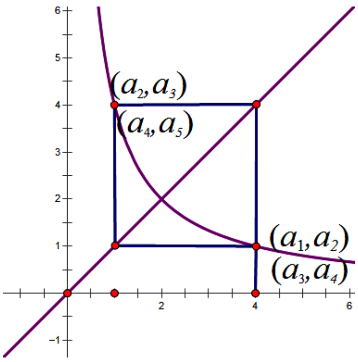


图 13

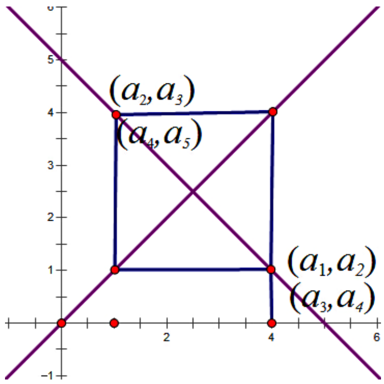


图 14

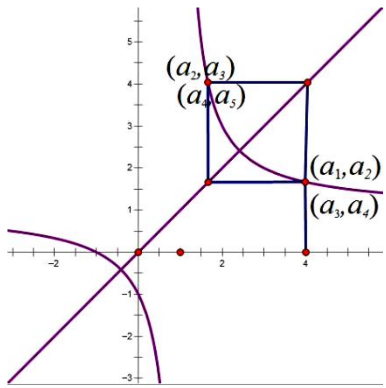


图 15

定理 4　函数 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$，当 $(a+d)^2=ad-bc$ 时，$f_{3n-2}(x)=f(x);f_{3n-1}(x)=f_2(x);f_{3n}(x)=x$

（将反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 仅向右或者向上移动相同单位得到的图像，如图 16，图 17）。

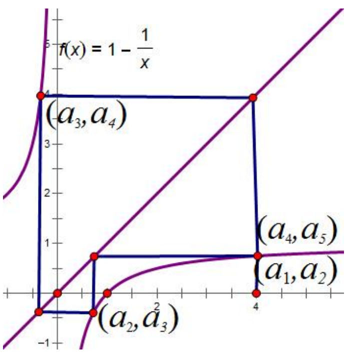


图 16

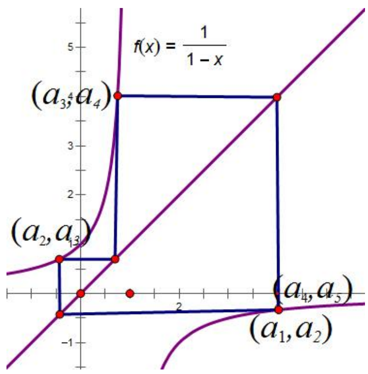


图 17

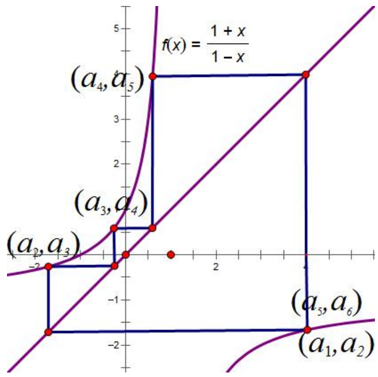


图 18

定理 5　函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，当 $\left(a+d\right)^{2}=2\left(ad-bc\right)$ 时，$f_{4n-3}\left(x\right)=f\left(x\right)$；$f_{4n-2}\left(x\right)=f_{2}\left(x\right)=-\dfrac{1}{x}$；$f_{4n-1}\left(x\right)=f_{3}\left(x\right)$；$f_{4n}\left(x\right)=x$（将反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k<0)$ 向右向下移动相等的距离得到的图像，如图 18）.

*定理 6　函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，当 $\left(a+d\right)^{2}=3\left(ad-bc\right)$ 时，每迭代六次为一周期；当 $\left(a+d\right)^{2}\geq 4\left(ad-bc\right)$，则不会出现迭代周期.

【例 8】设 S 是实数集 R 的真子集，且满足下列两个条件：①$1\notin S$；②若 $a\in S$.则 $1-\dfrac{1}{a}\in S$，问：

（1）若 $2\in S$，则 S 中一定还有哪几个数？（2）集合 S 中能否只有一个元素？说明理由.

【例 9】已知集合 A 的元素全为实数，且满足：若 $a\in A$，则 $\dfrac{1+a}{1-a}\in A$.

（1）若 $a=-3$，求出 A 中其它所有元素；

（2）0 是不是集合 A 中的元素？请你设计一个实数 $a\in A$，再求出 A 中的所有元素？

（3）根据（1）（2），你能得出什么结论.

【例 10】已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2, a_n=\dfrac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

六、摆动数列以及由求导构造函数单调性来解决数列问题

由反比例（递减函数）函数迭代构成的摆动数列，如图 19 所示，当 $f(x)$ 在区间为减函数时，和直线 $y=x$ 相交于不动点，那么由此函数迭代构成的数列为摆动数列，即奇数项和偶数项构成相反的单调性，但都螺旋靠近不动点，极限也是不动点。如图 19 所示 $a_1<a_3<a_5<\Lambda<a_{2n-1}$，同时 $a_2>a_4>a_6>\Lambda>a_{2n}$；如图 20 所示 $a_1>a_3>a_5>\Lambda>a_{2n-1}$，同时 $a_2<a_4<a_6<\Lambda<a_{2n}$.

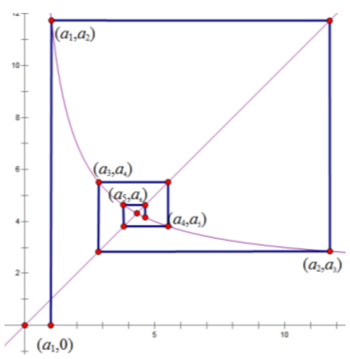


图 19

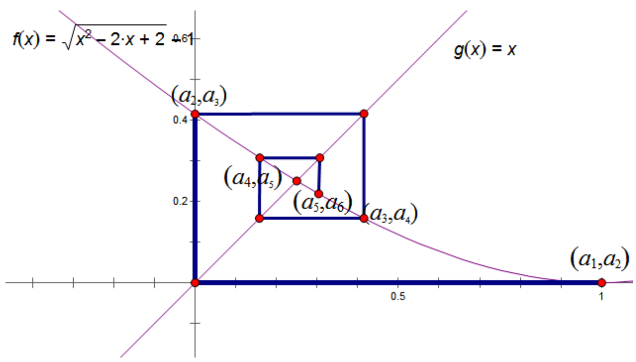


图 20