湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——立体几何复习 2——球的截面、外接球、内切球

一、球的截面、外接与内切问题

1.已知 ***A***，***B***，***C*** 为球 ***O*** 的球面上的三个点，$\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆.若 $\odot O_1$ 的面积为 4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球 ***O*** 的表面积为（　　）**A.** 64π　**B.** 48π　**C.** 36π　**D.** 32π

2.已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形，且其顶点都在球 ***O*** 的球面上.若球 ***O*** 的表面积为 16π，则点 ***O*** 到平面 ***ABC*** 的距离为（　　）　**A.** $\sqrt{3}$　**B.** $\frac{3}{2}$　**C.** 1　**D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.设 ***A***，***B***，***C***，***D*** 是球面上的四个点，且在同一平面内，$AB=BC=CD=DA=3$，球心到该平面的距离是球的半径的一半，则球的体积是（　　）　**A.** $8\sqrt{6}\pi$　**B.** $64\sqrt{6}\pi$　**C.** $24\sqrt{2}\pi$　**D.** $72\sqrt{2}\pi$

4.已知 ***H*** 是球 ***O*** 的直径 AB 上一点，$AH:HB=1:2$，$AB\perp$ 平面 α，***H*** 为垂足，α 截球 ***O*** 所得截面的面积为 π，则球 ***O*** 的表面积为________.

5.已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 ***O*** 的表面上.$\triangle ABC$ 是边长为 **1** 的正三角形，SC 为球 ***O*** 的直径，且 $SC=2$，则此三棱锥的体积为（　　）**A.** $\frac{1}{4}$　**B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$　**C.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$　**D.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$

6.已知正三棱锥 $P-ABC$，点 ***P***、***A***、***B***、***C*** 都在半径为 $\sqrt{3}$ 的球面上，若 ***PA***、***PB***、***PC*** 两两互相垂直，则球心到截面 ABC 的距离为________.

7.已知圆 ***O*** 和圆 ***K*** 是球 ***O*** 的大圆和小圆，其公共弦长等于球 ***O*** 的半径，$OK=\frac{3}{2}$，且圆 ***O*** 与圆 ***K*** 所在的平面所成角为 **60°**，则球 ***O*** 的表面积等于______.

8.已知球 ***O*** 的半径为 **l**，四棱锥的顶点为 ***O***，底面的四个顶点在球 ***O*** 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）**A.** $\frac{1}{3}$　**B.** $\frac{1}{2}$　**C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$　**D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9.已知正四棱锥的侧棱长为 ***l***，其各顶点都在同一球面上．若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥的体积的取值范围是（　　）

10.已知正三棱台的高为 **1**，上下底面的边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$，其顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

A. 100π　**B.** 128π　**C.** 144π　**D.** 192π

11.已知一圆锥的底面圆的直径为 **3**，高为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，在该圆锥内放一个棱长为 ***a*** 的正四面体，且正四面体在圆锥内可以任意转动，则 ***a*** 的最大值为（　　）**A.** 3　**B.** $\sqrt{2}$　**C.** $\frac{9\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2}$　**D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

12.已知四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点都在球 ***O*** 的球面上，$AB=3$，$BC=4$，$CD=1$，$AD=2\sqrt{6}$，$AC=5$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA\perp PD$，则球 ***O*** 的体积为______.

13.已知在圆柱 O_1O_2 内有一个球 ***O***，该球与圆柱的上、下底面及侧面均相切，过直线 O_1O_2 的平面截圆柱所得截面

$ABCD$ 的面积为 **8**，若 P 为圆柱底面圆弧 CD 的中点，则平面 PAB 与球 O 的交线长度为_____.

14.在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$\angle BAC=120°$，$AP=3$，$AB=2\sqrt{3}$，Q 是边 BC 上的动点，且直线 PQ 与平面 ABC 所成角的最大值为 **60°**，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为______.

15.已知球 O 的直径 $AB=4$，C、D 是球 O 的球面上两点，且 $CD=2$，则三棱锥 $A-BCD$ 体积的最大值是______.

16.在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$PA=AB=1$，$AC=\sqrt{2}$，三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的表面上，则球 O 的半径为____，若点 M 是 $\triangle ABC$ 的重心，则过点 M 的球 O 的平面截球 O 所得截面的面积的最小值为______.

17.如图 **1** 所示，已知矩形 $ABCD$ 满足 $AB=2\sqrt{3}$，$AD=2$，现将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折到 $\triangle A'BD$ 的位置，使平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，M、N 分别为 $A'B$、CD 的中点，如图 **2** 所示，则直线 MN 被四面体 $A'BCD$ 的外接球截得的线段的长为______.

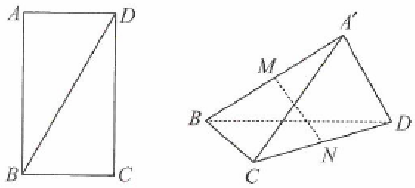
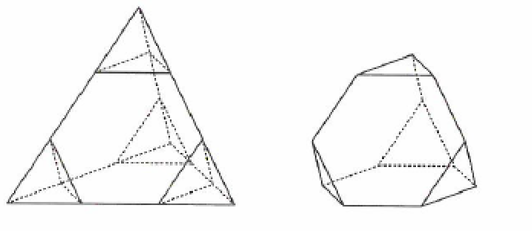


图1　　图2

18.半正多面体亦称“阿基米德多面体”，是由边数不全相同的正多边形为面构成的多面体．例如将正四面体所有的棱各自三等分，沿三等分点从原几何体割去四个小正四面体（如下图所示），余下的多面体就成为一个半正多面体，若这个半正多面体的棱长为 **4**，则它的外接球的表面积为______.



二. 外接球问题

（1）能在正方体（长方体）内还原的立方体，即长方体切割体的外接球

设长方体相邻的三条边棱长分别为 a，b，c．

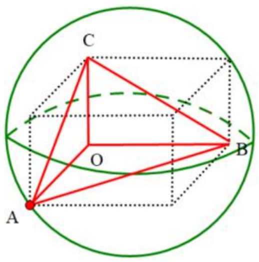


图 1 墙角体

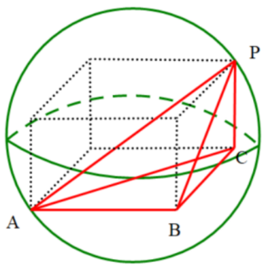


图 1 鳖臑

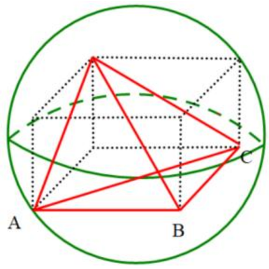


图 3 挖墙角体

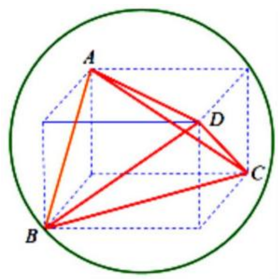


图 4 对角线相等的四面体

图 1 有重垂线，三视图都是三个直角三角形，侧面（侧棱）两两垂直，

图 2 有重垂线，所有面均为直角三角形，（线面垂直+线线垂直）；

图 3 无重垂线，俯视图是一矩形，AC 为虚线，主视图和左视图为直角三角形，

图 4 若是长方体则为对角巷相等的四面体，若是正方体则是正四面体（所有棱长均相等）

图 4 中（长方体），$\left.\begin{matrix} AD=BC \\ AB=CD \\ AC=BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=BC^2=\alpha^2 \\ b^2+c^2=AC^2=\beta^2 \\ c^2+a^2=AB^2=\gamma^2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2} \Rightarrow R=\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}}$，

$V_{A-BCD}=abc-\dfrac{1}{6}abc\times 4=\dfrac{1}{3}abc$.

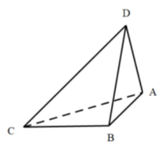
【例 1】若棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（　　）

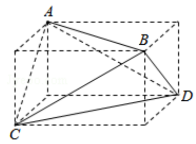
A. 12π　　　B. 24π　　　C. 36π　　　D. 144π

【例 2】在球面上有四个点 P 、 A 、 B 、 C .如果 PA 、 PB 、 PC 两两互相垂直，且 $PA=PB=PC=a$,则这个球的表面积是__________.

【例 3】在三棱锥 $A-BCD$ 中，侧棱 AB 、 AC 、 AD 两两垂直，ΔABC 、ΔACD 、ΔADB 的面积分别为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的体积为（　　）**A．** $\sqrt{6}\pi$　　**B．** $2\sqrt{6}\pi$　　**C．** $3\sqrt{6}\pi$　　**D．** $4\sqrt{6}\pi$

【例 4】如图所示，已知球 O 的面上有四点 A 、 B 、 C 、 D ， $DA\perp$ 面ABC，$AB\perp BC$，$DA=AB=BC=\sqrt{2}$,则球 O 的体积等于__________.





【例 5】四面体 $A-BCD$ 中， $AB=CD=5$ ， $AC=BD=\sqrt{34}$ ， $AD=BC=\sqrt{41}$ ，则四面体 $A-BCD$ 外接球的表面积为（　　）**A．** 50π　　**B．** 100π　　**C．** 150π　　**D．** 200π

【解题总结】

此类题做题时先画图，在图中标注题干条件，综合条件整理看看是否符合上述四类还原型的外接球类型：(有重垂线考虑是墙角或者鳖臑；无重垂线考虑是挖墙脚体或者是对棱相等的四面体；有一些数据给的比较多的，多利用勾股或者解三角形证明直角，从而找到重垂线)，确定模型后，可在长方体内重新作图，找到原始模型，确定长方体长宽高，从而利用公式 $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$ 求解球半径.

【训练】

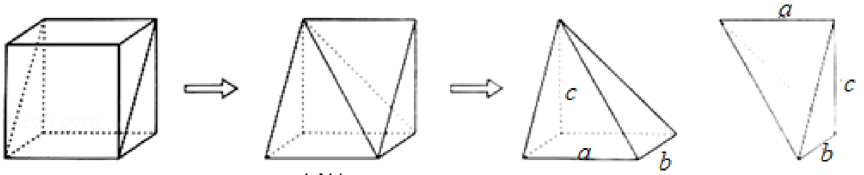
1.已知三棱锥 $A-BCD$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，且 $AB\perp$ 平面 BCD ，$AB=2\sqrt{3}$ ，$AC=AD=4$ ，$CD=2\sqrt{2}$ ，则球 O 的表面积为(　　)**A．** 20π　**B．** 18π　**C．** 36π　**D．** 24π

2.已知三棱锥 $ABCD$ ， $AB=CD=\sqrt{3}$ ， $AD=BC=2$ ， $AC=BD=\sqrt{5}$ ，则三棱锥 $ABCD$ 外接球的体积是(　　)

A． $2\sqrt{6}\pi$　　**B．** $\sqrt{6}\pi$　　**C．** 6π　　**D．** 3π

3.已知四面体 $P-ABC$ 中， $AB\perp AC$ ， $AB\perp PB$ ，且 $AB=PB=2AC=2$ ， $PC=3$ ，则该四面体的外接球的体积为(　　)**A．** 9π **B．** $\dfrac{9}{2}\pi$ **C．** 8π **D．** $\dfrac{27}{4}\pi$

4.《九章算术·商功》有如下叙述：“斜解立方，得两堵斜解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑．阳马居二，鳖臑居一，不易之率也．”（阳马和鳖臑是我国古代对一些特殊锥体的称谓）．取一个长方体，按如图所示将其一分为二，得两个一模一样的三棱柱，均称为堑堵，再沿堑堵的一顶点与相对的棱剖开，得四棱锥和三棱锥各一个．其中以矩形为底，有一棱与底面垂直的四棱锥，称为阳马．余下的三棱锥是由四个直角三角形组成的四面体，称为鳖臑．那么如图所示，$a=3$，$b=4$，$c=5$的阳马外接球的表面积是(　　)



堑堵　　阳马　　鳖臑

A． $20\sqrt{2}\pi$　　**B．** $25\sqrt{2}\pi$　　**C．** 50π　　**D．** 200π

5.已知三棱锥$P-ABC$的四个顶点在球O的球面上，$PA=PB=PC$，ΔABC是边长为**2**的正三角形，E，F分别是PA，AB的中点，$\angle CEF=90°$，则球O的体积为(　　)**A．** $8\sqrt{6}\pi$ **B．** $4\sqrt{6}\pi$　**C．** $2\sqrt{6}\pi$　**D．** $\sqrt{6}\pi$

7.沿正三角形ABC的中线AD翻折，使点B与点C间的距离为$\sqrt{2}$，若该正三角形边长为**2**，则四面体$ABCD$外接球表面积为________．

（2）常规型一（底面外心O'，球心O，上顶点A在同一直线上）

对于常规型一的外接球问题我们可以采用如下解题步骤（我们以棱长为a的正四面体为例，如图1)：

Step1:先找到立体体底面外接圆的圆心O'，如图2:

（本题底面$\triangle BCD$是等边三角形，外心O'在中线BE的$\frac{2}{3}$处，即外接圆半径$r=BO'=\frac{2}{3}BE=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，或者直接利用正弦定理，$2r=\frac{a}{\sin A}$可以求出）

Step2:将底面外接圆的圆心O'垂直底面拉高到一定高度(高度为h)形成球心O，如图3;

（在这个步骤中，底面外接圆圆心O'，垂直拉高过程中始终保持到底面三顶点的距离相等，即$O'B=O'C=O'D$，若拉到一定高度是的$O'A=O'B=O'C=O'D$，此时的O'即为外接球球心O，这就是此步骤的原理）

Step3:连接球心O和任意下顶点B，形成$Rt\triangle OBO'$，解$Rt\triangle OBO'$求球半径R:$R^2=r^2+h^2$，即

$R^2=(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2+(\frac{\sqrt{6}}{3}a-R)^2$解之得$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$，如图4.

（此时$OA=R,O'A=\sqrt{AB^2-BO'^2}=\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$OO'=h=O'A-OA=\frac{\sqrt{6}}{3}a-R.$ ）

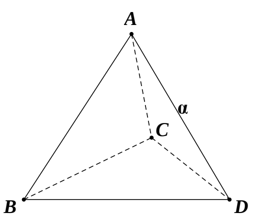


图 1

$\Rightarrow$

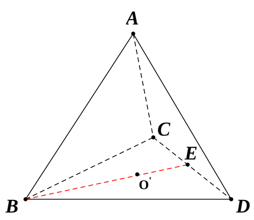


图 2

$\Rightarrow$

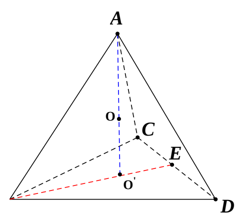


图 3

$\Rightarrow$

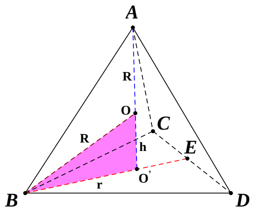


图 4

$\Rightarrow$

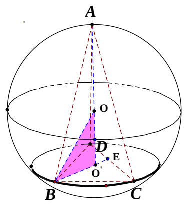


图 5

【例 1】在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=\sqrt{2}$，$\angle ABC=90^\circ$，ΔACD 为等边三角形，将 ΔACD 沿边 AC 折起，使得平面 $ACD\perp$ 平面 ABC，则三棱锥 $D-ABC$ 外接球的表面积为(　　)

A. 8π　　**B.** 12π　　**C.** $\dfrac{4\pi}{3}$　　**D.** $\dfrac{16\pi}{3}$

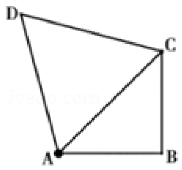


图 1

$\Rightarrow$

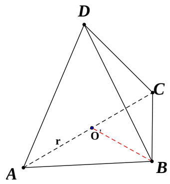


图 2

$\Rightarrow$

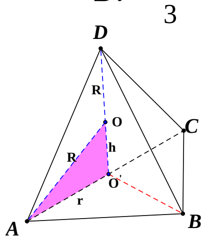


图 3

【训 练】

1. 知为球 O 的球面上的三个点，$\odot O_1$ 为 ΔABC 的外接圆．若 $\odot O_1$ 的面积为 4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球 O 的表面积为（　　）A. 64π　　B. 48π　　C. 36π　　D. 32π

2. 已知 $\triangle ABC$ 是面积为 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 的等边三角形，且其顶点都在球 O 的表面上，若球 O 的表面积为 16π，则球 O 到平面 ABC 的距离为　（　　）A. $\sqrt{3}$　B. $\dfrac{3}{2}$　C. 1　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3.已知正三棱锥的四个顶点 P，A，B，C 都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 是正三角形，正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 **3**，且 $\angle APO=\angle BPO=\angle CPO=30^\circ$，则球 O 的体积为(　　)**A.** 4π　**B.** 12π　**C.** 16π　**D.** $\dfrac{32}{3}\pi$

（3）常规型二（底面外心 O'，球心 O，上顶点 A 在不在同一直线上）

对于常规型二的外接球问题整体步骤和常规型一一致，在 step3 有细节区别，具体解题步骤如下（我们以墙角体模型（侧面（棱）两两垂直）为例，$CA=CB=CD=a$，如图 1)：

Step1:先找到立体体底面外接圆的圆心 O'，如图 2:

（ΔBCD 是直角三角形，外心即为斜边 BD 中点，外接圆半径 $r=O'B=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$）

Step2:将底面外接圆的圆心 O' 垂直底面拉高到一定高度(高度为 h)形成球心 O，如图 2;

（此题中很明显拉到的高度 OO' 所在直线是与 AC 平行的）

Step3:连接球心 O 和任意下顶点 B，形成 $Rt\triangle OBO'$，解 $Rt\triangle OBO'$ 求球半径 R:$R^2=r^2+h^2$①，即

（在 step2 中容易发现底面外心 O'，球心 O，上顶点 A 在不在同一直线上，导致高度 h 不好求，光一个 $Rt\triangle OBO'$ 解不出，需要借助其他三角形，故有了 Step4)，如图 3.

Step4：连接球心O和上顶点A，过球心O向AC（AC即过上顶点A的重垂线）作垂线OE交AC于点E，形成第二个$Rt\triangle OAE$，解$Rt\triangle OAE$：$OA^2=OE^2+AE^2$即$R^2=OE^2+\left(AC-h\right)^2$②，如图4；

（如图4中，四边形$OO'CE$为矩形，即$CE=OO'=h,OE=CO'=r$，当然不是每个题中OE的长都恰好是底面外接圆半径r，但均可利用矩形$OO'CE$求解）

联立①②得$\begin{cases}R^2=r^2+h^2\\R^2=OE^2+\left(AC-h\right)^2\end{cases}$，解之得$\begin{cases}h=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a}{2}\\R=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\end{cases}$.

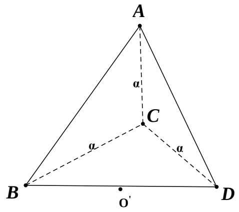


图 1

$\Rightarrow$

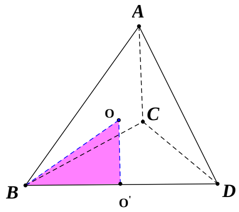


图 2

$\Rightarrow$

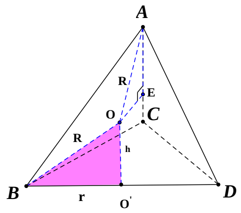


图 3

$\Rightarrow$

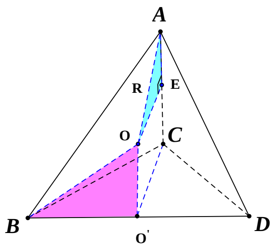


图 4

$\Rightarrow$

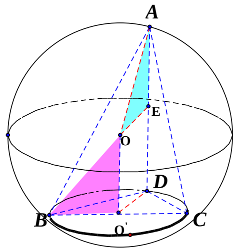


图 5

【解题总结】

1．由常规型二 Step4可知，当几何体侧棱垂直于底面时，底面外接圆的圆心O'垂直底面拉高到一定高度h即为整个几何体高的一半，即$h=\dfrac{H}{2}$（秒杀技巧）；

2．当底面外接圆半径r不好求时，可利用正弦定理$2r=\dfrac{a}{\sin A}$求解.

3.有关外接球更细致的分类在秒2系列和接下来的二轮复习中一一剖析，敬请期待.

【例2】在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=BC=2$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，若该直三棱柱的外接球表面积为$16\pi$，则此直三棱柱的高为(　　)

A． 4　　**B．** 3　　**C．** $4\sqrt{2}$　　**D．** $2\sqrt{2}$

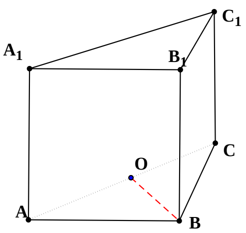


图 1

$\Rightarrow$

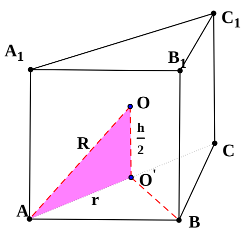


图 2

【例 3】四面体 $ABCD$ 的四个顶点都在球 O 上，且 $AB=AC=BC=BD=CD=4$， $AD=2\sqrt{6}$，则球 O 的表面积为(　　)

A. $\dfrac{70\pi}{3}$　　B. $\dfrac{80\pi}{3}$　　C. 30π　　D. 40π

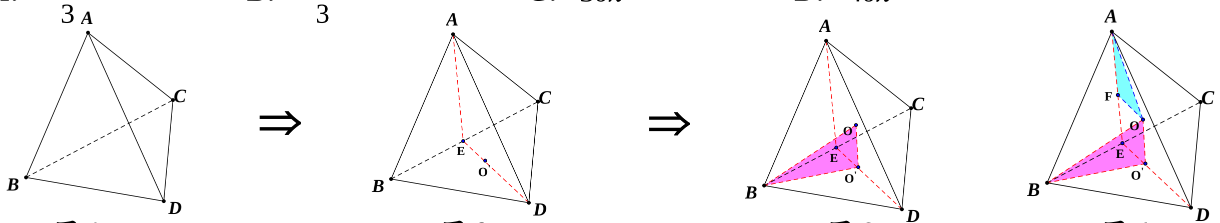


图 1　　图 2　　图 3　　图 4

【跟踪训练】

1. 设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱的长都为 1，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为(　　)

A. 5π　　B. π　　C. $\dfrac{11}{3}\pi$　　D. $\dfrac{7}{3}\pi$

2. 已知三棱锥 $P-ABC$， $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$， $BC=\sqrt{3}$， $PA\perp$ 平面 ABC 且 $PA=2\sqrt{3}$，则此三棱锥的外接球的体积为(　　)

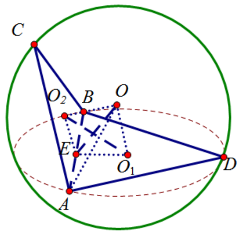
A. $\dfrac{16\pi}{3}$　　B. $4\sqrt{3}\pi$　　C. 16π　　D. $\dfrac{32\pi}{3}$

3. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是边长为 2 的正方形，高为 4， E 是 DD_1 的中点，则三棱锥 B_1-C_1EC 的外接球的表面积为(　　) A. 12π　B. 20π　C. 24π　D. 32π

4. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，其中 $AD=1$， $AB=2$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$， $PA=PD$，且直线 PB 与 CD 所成角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球表面积为(　　)

A. $\dfrac{16\pi}{3}$　　B. $\dfrac{76\pi}{3}$　　C. $\dfrac{64\pi}{3}$　　D. $\dfrac{19\pi}{3}$

（4）含二面角的外接球终极公式



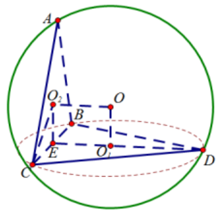
双距离单交线公式： $R^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}$

如右图，若空间四边形 $ABCD$ 中，二面角 $C-AB-D$ 的平面角大小为 α， ABD 的外接圆圆心为 O_1， ABC 的外接圆圆心为 O_2， E 为公共弦 AB 中点，则 $\angle O_1EO_2=\alpha$， $O_1E=m$， $O_2E=n$， $AE=\dfrac{l}{2}$， $OA=R$，由于 O、O_1、E、O_2 四点共圆，且 $OE=2R'=\dfrac{O_1O_2}{\sin\alpha}$，根据余弦定理 $|O_1O_2|^2=m^2+n^2-2mn\cos\alpha$， $R^2=|OE|^2+|AE|^2=\dfrac{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{l^2}{4}$.

注意：1. 此公式最好配合剖面图，需要求出两个半平面的外接圆半径，和外接圆圆心到公共弦的距离，通常是，剖面图能很快判断出两条相等弦的优先使用公式 $R^2=r^2+(h-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$.

2. 当二面角是直二面角是可直接用双半径单交线公式秒杀：

双半径单交线公式：$R^2=R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}-\frac{l^2}{4}$



$R^2=OD^2=OO_1^{\ 2}+O_1D^2=O_2E^2+O_1D^2$

$=(O_2C^2-CE^2)+O_1D^2=O_2C^2-(\frac{1}{2}BC)^2+O_1D^2=R_1^{\ 2}+R_2^{\ 2}-\frac{l^2}{4}$

双半径单交线公式适合所有的直二面角模型，两个半平面的外接圆半径分别为 R_1 和 R_2，两半平面交线长度为 l，此公式属于一种开挂般的存在，在前面的直三棱柱切割体模型当中也可以使用，一旦两个半平面的二面角不是 $90°$ 时，此公式将不再适用.

【例 1】已知三棱锥 $D-ABC$ 所有顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 为边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，$\triangle ABD$ 是以 BD 为斜边的直角三角形，且 $AD=2$，二面角 $C-AB-D$ 为 $120°$，则球 O 的表面积为（　　）

A. $\frac{148\pi}{3}$　　**B.** 28π　　**C.** $\frac{37\pi}{3}$　　**D.** 36π

【例 2】在四面体 $S-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=BC=\sqrt{2}$，$\triangle SAC$ 为等边三角形，二面角 $S-AC-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，则四面体 $S-ABC$ 的外接球表面积为________.

【跟踪训练】

1.在三棱锥 $A-BCD$ 中，$BC=BD=\sqrt{2}$，$AC=AD=CD=2$，当二面角 $A-CD-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为(　　) **A.** $\frac{15\pi}{11}$　**B.** $\frac{30\pi}{11}$　**C.** $\frac{60\pi}{11}$　**D.** $\frac{120\pi}{11}$

2.在四面体 $ABCD$ 中，$AB=AC=BC=AD=CD=2$，二面角 $B-AC-D$ 为 $120°$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为____.

3.已知四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点均在球 O 的球面上，底面 $ABCD$ 是矩形，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=2$，$\angle APB=60°$，二面角 $P-AB-C$ 大小为 $120°$，当 ΔPAB 面积最大时，球 O 的表面积为____.

三、　内切球

1.已知圆维的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积为____________.

2.正三棱锥 $S-ABC$，底面边长为3，侧棱长为2，则其外接球和内切球的半径是___________

3.在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球，若 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 V 的最大值是(　　) **A.** 4π　**B.** $\frac{9\pi}{2}$　**C.** 6π　**D.** $\frac{32\pi}{3}$

4.若某正四面体内切球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$，则正四面体外接球的表面积为（　　）**A.** 4π　**B.** 16π　**C.** 36π　**D.** 64π

5.已知圆锥的底面周长 2π，母线长为 **3**，则该圆锥的内切球的体积为（　）**A.** $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　**B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　**C.** $\frac{4}{3}\pi$　**D.** 2π

6.三棱锥 $P-ABC$ 中，顶点 P 在底面 ABC 的投影为 ΔABC 的内心，三个侧面的面积分别为 **12**，**16**，**20**，且底面面积为 **24**，则三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的表面积为（　　）**A.** $\frac{4\pi}{3}$　**B.** 12π　**C.** $\frac{16\pi}{3}$　**D.** 16π

7.已知三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 是边长为 6 的等边三角形，$PA=PB=PC=\sqrt{21}$，先在三棱锥 $P-ABC$ 内放入一个内切球 O_1，然后再放入一个球 O_2，使得球 O_2 与球 O_1 及三棱锥 $P-ABC$ 的三个侧面都相切，则球 O_1 的体积为_______，球 O_2 的表面积为________.