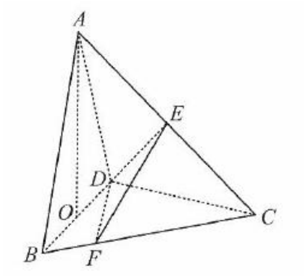
典型例题

1.（2020·江苏·24·）

如下图所示在三棱锥 $A-BCD$ 中，已知 $CB=CD=\sqrt{5}$，$BD=2$，O 为 BD 的中点，$AO\perp$ 平面 BCD，$AO=2$，E 为 AC 的中点.

（1）求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值；

（2）若点 F 在 BC 上，满足 $BF=\dfrac{1}{4}BC$，设二面角 $F-DE-C$ 的大小为 θ，求 $\sin\theta$ 的值.

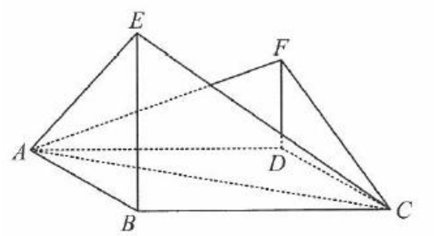


2.

如下图所示，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=120°$，E、F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点，$BE\perp$ 平面 $ABCD$，$DF\perp$ 平面 $ABCD$，$BE=2DF$，$AE\perp EC$.

（1）证明：平面 $AEC\perp$ 平面 AFC；

（2）求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.

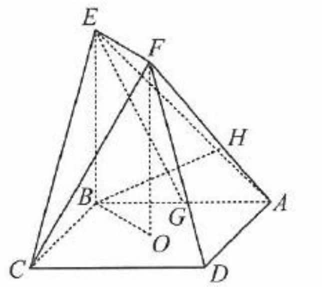


3.如下图所示，正方形 $ABCD$ 的中心为 O，四边形 $OBEF$ 为矩形，平面 $OBEF\perp$ 平面 $ABCD$，点 G 为 AB 的中点，$AB=BE=2$.

（1）求证：$EG\,//$ 平面 ADF；

（2）求二面角 $O-EF-C$ 的正弦值；

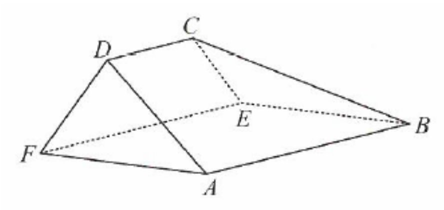
（3）设 H 为线段 AF 上的点，且 $AH=\dfrac{2}{3}HF$，求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值.



4.如下图所示，在以 A、B、C、D、E、F 为顶点的五面体中，面 $ABEF$ 为正方形，$AF=2FD$，$\angle AFD=90°$，且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 $60°$.

（1）证明：平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$；

（2）求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值.

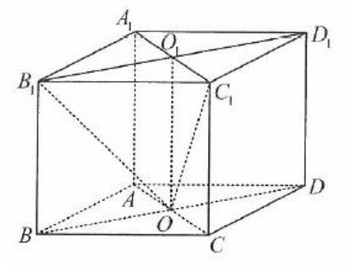


5

如下图所示，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等， $AC\cap BD=O$ ， $A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$ ，四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 均为矩形.

（1）证明： $O_1O\perp$底面 $ABCD$；

（2）若 $\angle CBA=60°$，求二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值.

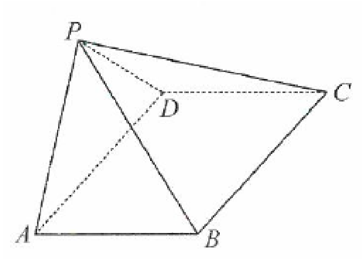


6.

如下图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$.

（1）求证： $AB\perp PD$；

（2）若 $\angle BPC=90°$， $PB=\sqrt{2}$， $PC=2$，问 AB 为何值时，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大?并求此时平面 PBC 与平面 PDC 夹角的余弦值.

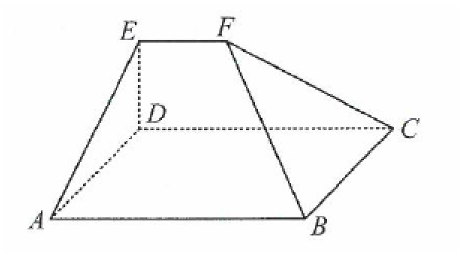


7.

如下图所示，在五面体 $ABCDEF$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是正方形， $AD\perp ED$， $CD\perp EA$.

（1）求证： $AB\parallel EF$；

（2）若 $EF=ED=1$， $CD=3$，求平面 ADE 与平面 BCF 所成的锐二面角的余弦值.

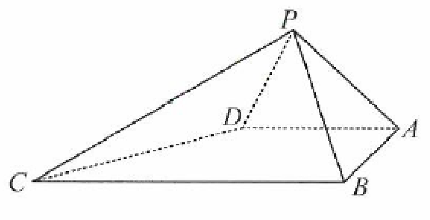


8.

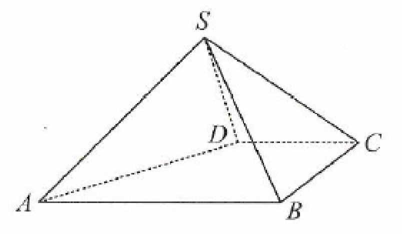
如下图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\angle ABC=\angle BAD=90°$， $BC=2AD$， $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是等边三角形.

（1）证明： $PB\perp CD$；

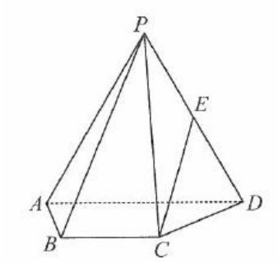
（2）求二面角 $A-PD-C$ 的余弦值.



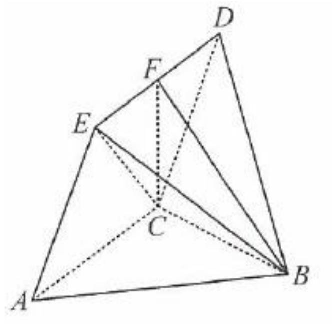
9.
如下图所示，棱锥 $S-ABCD$ 中， $AB\,/\!/\,CD$， $BC\perp CD$，侧面 SAB 为等边三角形， $AB=BC=2$， $CD=SD=1$.
（1）证明： $SD\perp$ 平面 SAB；
（2）求 AB 与平面 SBC 所成角的正弦值.



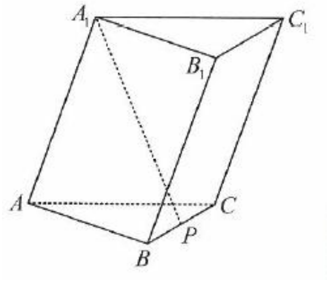
10.
如下图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为直角梯形， $AD\,/\!/\,BC$， $\angle ABC=90^\circ$， $AD=2BC=2AB=4$， $\triangle PAD$ 为正三角形，E 为 PD 的中点，直线 AB 与 CE 所成角的大小为 45°.
（1）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；
（2）求平面 PAB 与平面 PCD 所成角的正弦值.



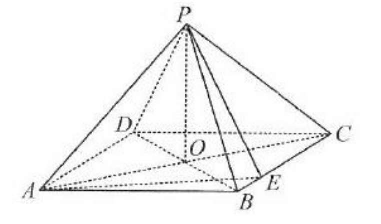
11.
如下图所示，已知四边形 $ACDE$ 为菱形， $\angle CDE=60^\circ$， $AC\perp BC$，F 是 DE 的中点，平面 $ABC\cap$ 平面 $BDE=l$.
（1）证明： $l\perp$ 平面 BCF；
（2）若平面 $ABC\perp$ 平面 $ACDE$， $AC=BC=2$，求 AE 与平面 BDE 所成角的正弦值.



12.
如下图所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BB_1=2BC=2$，$\angle CBB_1=2\angle CAB=60^\circ$，且平面 $ABC\perp$ 平面 BB_1C_1C.
（1）证明：平面 $ABC\perp$ 平面 ACB_1；
（2）设 P 为 BC 中点，求直线 A_1P 与平面 ACB_1 所成角的正弦值.



13.
如下图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为菱形， $PA=PC$ ， $BD\perp PA$，E 在棱 BC 上，且 $EC=3BE$，AC 与 BD 交于点 O.
（1）证明： $PO\perp$ 平面 $ABCD$；
（2）若 $\angle BAD=60^{\circ}$， $PA\perp PE$，求二面角 $A-PE-C$ 的余弦值.



14.
请从下面三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并作答.
① $\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}\right)=0$；② $PC=\sqrt{7}$；③点 P 在平面 $ABCD$ 的射影在直线 AD 上.
如下图所示，平面五边形 $PABCD$ 中，$\triangle PAD$ 是边长为 2 的等边三角形， $AD\parallel BC$， $AB=2BC=2$， $AB\perp BC$，将 $\triangle PAD$ 沿 AD 翻折成四棱锥 $P-ABCD$，E 是棱 PD 上的动点（端点除外），F、M 分别是 AB 、CE 的中点，且______.
（1）求证： $AB\perp FM$；
（2）当 EF 与平面 PAD 所成角最大时，求平面 ACE 与平面 PAD 所成的锐二面角的余弦值.
注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.