湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 1

恒成立问题解题基本方法 1——直接求最值

1.（1）$\because f(x)=e^{x}-\ln x+1$，$\therefore f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x}$，$\therefore k=f'(1)=e-1$.

$\because f(1)=e+1$，$\therefore$切点坐标为$(1,1+e)$，$\therefore$切线方程为$y-e-1=(e-1)(x-1)$，即$y=(e-1)x+2$，

$\therefore$切线与坐标轴交点坐标分别为$(0,2),(\dfrac{-2}{e-1},0)$，$\therefore$所求三角形面积为$\dfrac{1}{2}\times 2\times|\dfrac{-2}{e-1}|=\dfrac{2}{e-1}$；

（2）$\because f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，$\therefore f'(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，且$a>0$.

设$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=ae^{x-1}+\dfrac{1}{x^{2}}>0$，$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$a=1$时，$f'(1)=0$，$\therefore f(x)_{min}=f(1)=1$，$\therefore f(x)\geq 1$成立.

当$a>1$时，$\dfrac{1}{a}<1$，$\therefore e^{\frac{1}{a}-1}<1$，$\therefore f'(\dfrac{1}{a})f'(1)=a(e^{\frac{1}{a}-1}-1)(a-1)<0$，

$\therefore$存在唯一$x_0>0$，使得$f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0}=0$，且当$x\in(0,x_0)$时$f'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时$f'(x)>0$，

$\therefore ae^{x_0-1}=\dfrac{1}{x_0}$，$\therefore \ln a+x_0-1=-\ln x_0$，

因此$f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a=\dfrac{1}{x_0}+\ln a+x_0-1+\ln a\geq 2\ln a-1+2\sqrt{\dfrac{1}{x_0}\cdot x_0}=2\ln a+1>1$，

$\therefore f(x)>1$，$\therefore f(x)\geq 1$恒成立；

当$0<a<1$时，$f(1)=a+\ln a<a<1$，$\therefore f(1)<1$，$f(x)\geq 1$不是恒成立.

综上所述，实数a的取值范围是$[1,+\infty)$.

2.（1）由题意知，$f'(x)=-\dfrac{a}{x}-\dfrac{xe^{x}-e^{x}}{x^{2}}+a=\dfrac{(ax-e^{x})(x-1)}{x^{2}}$，

令$F(x)=(ax-e^{x})(x-1)$，当$a<0$时，$ax-e^{x}<0$恒成立，

$\therefore$当$x>1$时，$F(x)<0$，即$f'(x)>0$；当$0<x<1$时，$F(x)>0$，即$f'(x)<0$；

$\therefore$函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

（2）因为$g(x)=f(x)+xf'(x)=-a\ln x-\dfrac{e^{x}}{x}+ax+x\left(-\dfrac{a}{x}-\dfrac{xe^{x}-e^{x}}{x^{2}}+a\right)=-a\ln x-e^{x}+2ax-a$，

由题意知，存在$x_0\in[1,2]$，使得$g\left(x_0\right)\le -e^{x_0}+\dfrac{x_0^2}{2}+(a-1)x_0$成立.

即存在$x_0\in[1,2]$，使得$-a\ln x_0+(a+1)x_0-\dfrac{x_0^2}{2}-a\le 0$成立；

令$h(x)=-a\ln x+(a+1)x-\dfrac{x^2}{2}-a, x\in[1,2]$，$\therefore h'(x)=\dfrac{-a}{x}+a+1-x=-\dfrac{(x-a)(x-1)}{x}, x\in[1,2]$，

①当$a\le 1$时，对任意$x\in[1,2]$，都有$h'(x)\le 0$，∴函数$h(x)$在$[1,2]$上单调递减，

$\therefore h(x)_{\min}=h(2)=-a\ln 2+a\le 0$成立，解得$a\le 0$，$\therefore a\le 0$；

②当$1<a<2$时，令$h'(x)>0$，解得$1<x<a$；令$h'(x)<0$，解得$a<x<2$，
∴函数$h(x)$在$[1,a]$上单调递增，在$[a,2]$上单调递减，
又$h(1)=\dfrac{1}{2}$，$\therefore h(2)=-a\ln 2+a\le 0$，解得$a\le 0$，$\therefore a$无解；

③当$a\ge 2$时，对任意的$x\in[1,2]$，都有$h'(x)\ge 0$，∴函数$h(x)$在$[1,2]$上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=\dfrac{1}{2}>0$，不符合题意，舍去；
综上所述，a的取值范围为$(-\infty,0]$.

3.（1）解：函数$f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)+a\left(x^2-x\right)$的定义域为$\left(-1,+\infty\right)$ $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}+2ax-a=\dfrac{2ax^2+ax+1-a}{x+1}$

令$g\left(x\right)=2ax^2+ax+1-a$，$x\in\left(-1,+\infty\right)$

当$a=0$ 时，$g\left(x\right)=1>0$ ，$f'\left(x\right)>0$ 在$\left(-1,+\infty\right)$上恒成立所以，函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上单调递增无极值；

当$a>0$ 时，$\Delta=a^2-8a\left(1-a\right)=a\left(9a-8\right)$

①当$0<a\le\dfrac{8}{9}$时，$\Delta\le 0$，$g\left(x\right)\ge 0$，所以，$f'\left(x\right)\ge 0$，函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上单调递增无极值；

②当$a>\dfrac{8}{9}$ 时，$\Delta>0$，设方程$2ax^2+ax+1-a=0$的两根为$x_1,x_2(x_1<x_2)$,

因为$x_1+x_2=-\dfrac{1}{2}$，所以$x_1<-\dfrac{1}{4}, x_2>-\dfrac{1}{4}$，由$g\left(-1\right)=1>0$可得：$-1<x_1<-\dfrac{1}{4}$,

所以，当$x\in\left(-1,x_1\right)$时，$g\left(x\right)>0, f'\left(x\right)>0$ ，函数$f\left(x\right)$单调递增；

当$x\in\left(x_1,x_2\right)$时，$g\left(x\right)<0, f'\left(x\right)<0$ ，函数$f\left(x\right)$单调递减；

当$x\in\left(x_2,+\infty\right)$时，$g\left(x\right)>0, f'\left(x\right)>0$ ，函数$f\left(x\right)$单调递增；

因此函数$f\left(x\right)$有两个极值点.

当$a<0$ 时，$\Delta>0$，由$g\left(-1\right)=1>0$可得：$x_1<-1$,

当$x\in\left(-1,x_2\right)$时，$g\left(x\right)>0, f'\left(x\right)>0$ ，函数$f\left(x\right)$单调递增；

当$x\in\left(x_2,+\infty\right)$时，$g\left(x\right)<0, f'\left(x\right)<0$，函数$f\left(x\right)$单调递减；

因此函数$f\left(x\right)$有一个极值点.

综上：当$a<0$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上有唯一极值点；当$0\le a\le\frac{8}{9}$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上无极值点；当$a>\frac{8}{9}$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上有两个极值点；

（2）由（Ⅰ）知，

当$0\le a\le\frac{8}{9}$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

因为$f\left(0\right)=0$，所以，$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)>0$，符合题意；

当$\frac{8}{9}<a\le 1$时，由$g\left(0\right)\ge 0$，得$x_2\le 0$，所以，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

又$f\left(0\right)=0$，所以，$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)>0$，符合题意；

当$a>1$时，由$g\left(0\right)<0$，可得$x_2>0$，所以$x\in\left(0,x_2\right)$时，函数$f\left(x\right)$单调递减；

又$f\left(0\right)=0$，所以，当$x\in\left(0,x_2\right)$时，$f\left(x\right)<0$不符合题意；

当$a<0$时，设$h\left(x\right)=x-\ln\left(x+1\right)$

因为$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$h'\left(x\right)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$，所以$h\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

因此当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$h\left(x\right)>h\left(0\right)=0$，即：$\ln\left(x+1\right)<x$

可得：$f\left(x\right)<x+a\left(x^2-x\right)=ax^2+\left(1-a\right)x$

当$x>1-\frac{1}{a}$时，$ax^2+\left(1-a\right)x<0$，此时，$f\left(x\right)<0$, 不合题意.

综上所述，a的取值范围是 $0,1$.

4.（1）由已知得$f\left(0\right)=2, g\left(0\right)=2$，$f'\left(0\right)=4, g'\left(0\right)=4$

而$f'\left(x\right)=2x+a, g'\left(x\right)=e^x\left(cx+d+c\right)$，$\therefore a=4, b=2, c=2, d=2$.

（2）由（1）知，$f\left(x\right)=x^2+4x+2, g\left(x\right)=2e^x\left(x+1\right)$，

设函数$F\left(x\right)=kg\left(x\right)-f\left(x\right)=2ke^x\left(x+1\right)-x^2-4x-2, \left(x\ge -2\right)$，

$F'\left(x\right)=2ke^x\left(x+2\right)-2x-4=2\left(x+2\right)\left(ke^x-1\right)$. 由题设可得$F\left(0\right)\ge 0$，即$k\ge 1$，

令$F'\left(x\right)=0$得$x_1=-\ln k, x_2=-2$，

①若$1\le k<e^2$，则$-2<x_1\le 0$，$\therefore$当$x\in\left(-2,x_1\right)$时，

$F'(x)<0$，当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，即 F（x）在 $x\in(-2,x_1)$ 单调递减，在 $(x_1,+\infty)$ 单调递增，故 $F(x)$ 在 $x=x_1$ 取最小值 $F(x_1)$，而 $F(x_1)=2x_1+2-x_1^{2}-4x_1-2=-x_1(x_1+2)\geq 0$.

∴当 $x\geq -2$ 时，$F(x)\geq 0$，即 $f(x)\leq kg(x)$ 恒成立.

②若 $k=e^2$，则 $F'(x)=2e^2(x+2)(e^x-e^2)$，∴当 $x\geq -2$ 时，$F'(x)\geq 0$，∴ $F(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 单调递增，

而 $F(-2)=0$，∴当 $x\geq -2$ 时，$F(x)\geq 0$，即 $f(x)\leq kg(x)$ 恒成立，

③若 $k>e^2$，则 $F(-2)=-2ke^{-2}+2=-2e^{-2}(k-e^2)<0$，∴当 $x\geq -2$ 时，$f(x)\leq kg(x)$ 不可能恒成立.

综上所述，k 的取值范围为 $[1,e^2]$.

5.（1） $f'(x)=e^x+xe^x-\dfrac{a}{x}-a=e^x(x+1)-\dfrac{a(x+1)}{x}=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)$

当 $a=e$ 时， $f'(x)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{e}{x}\right)$ $x>0$

当 $x>1$ 时 $e^x>\dfrac{e}{x}$，$e^x-\dfrac{e}{x}>0$ 可得 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $0<x<1$ 时，$e^x<\dfrac{e}{x}$，$e^x-\dfrac{e}{x}<0$，可得 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

综上所述：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

（2）由（1）知 $f'(x)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)$

当 $a<0$ 时，$f'(x)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)>0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 的值域为 R，不符合题意；

当 $a=0$ 时，则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$，也不符合题意.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)=0$ 可得 $e^x-\dfrac{a}{x}=0$，即 $e^x\cdot x-a=0$，

令 $g(x)=e^x\cdot x$，则 $g'(x)=e^x\cdot x+e^x=e^x(x+1)>0$，所以 $g(x)=e^x\cdot x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

设存在 $x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $e^{x_0}\cdot x_0=a$，两边同时取对数可得 $x_0+\ln x_0=\ln a$

则 $0<x<x_0$ 时，$e^x\cdot x<a$，$f'(x)<0$，

当 $x>x_0$ 时，$e^x\cdot x<a$，$f'(x)>0$，

所以当 $x=x_0$ 时，$f(x)_{\min}=x_0\cdot e^{x_0}-a\ln x_0-ax_0=a-a(-x_0+\ln a)-ax_0=a-a\ln a$，

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 2

故只需 $a-alna\geq 1$ 即可，

令 $h(a)=a-a\ln a\ (a>0)$，$h'(a)=1-\ln a-a\times\dfrac{1}{a}=-\ln a$，

由 $h'(a)>0$ 可得 $0<a<1$，由 $h'(a)<0$ 可得 $a>1$，因此 $h(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

从而 $h(a)_{max}=h(1)=1-0=1$，所以 $h(a)=a-alna\leq 1$，

又因为 $h(a)=a-alna\geq 1$，所以 $h(a)=a-alna=1$，由以上证明可知 $h(1)=1$，所以 $a=1$

故满足条件的实数 a 的值为 1.

6.(1) $f'(x)=\mathrm{e}^x+1+\cos x$，则 $f'(0)=3, f(0)=1$，故切线方程为 $y-1=3(x-0)$，化简得 $3x-y+1=0$；

(2)由 $f(x)\geq ax^2+2x+1$ 得 $\mathrm{e}^x+\sin x-ax^2-2x-1\geq 0$，令 $m(x)=\mathrm{e}^x+\sin x-ax^2-2x-1, x\geq 0$，即 $m(x)_{\min}\geq 0$

$m'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x-2ax-2$，令 $h(x)=m'(x)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\sin x-2a$，令 $H(x)=h'(x)$，

则 $H'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$，

$\because x\geq 0$，$\therefore \mathrm{e}^x\geq 1\geq \cos x$，

$\therefore H'(x)=\mathrm{e}^x-\cos x\geq 0$，$\therefore h'(x)$ 在[0，$+\infty$)上单调递增，且 $h'(x)\geq h'(0)=1-2a$，

当 $1-2a\geq 0$，即 $a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，$h'(x)\geq h'(0)=1-2a\geq 0$，$m'(x)$ 在[0，$+\infty$)上单调递增，$m'(x)\geq m'(0)=0$，

$\therefore m(x)$在[0，$+\infty$)上单调递增，$m(x)\geq m(0)=0$，符合题意；

当 $1-2a<0$ 即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$h'(x)\geq h'(0)=1-2a<0$，$h'[\ln(2a+1)]=1-\sin[\ln(2a+1)]\geq 0$，而 $h'(x)$ 在[0，$+\infty$)上单调递增，

$\therefore \exists x_0\in(0,\ln(2a+1)]$，使得 $h'(x_0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减，$m'(x)<m'(0)=0$，

$\therefore m(x)$在 $(0,x_0)$ 单调递减，$\therefore$ 此时 $m(x)<g(0)=0$，不满足 $m(x)_{\min}\geq 0$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$.

7.：（1） $f'(x)=\dfrac{\alpha(\frac{x+1}{x}-\ln x)}{(x+1)^2}-\dfrac{b}{x^2}$

由于直线 $x+2y-3=0$ 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$，且过点 $(1,1)$，故 $\begin{cases} f(1)=1, \\ f'(1)=-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b=1, \\ \dfrac{a}{2}-b=-\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=1$.

（2）由（1）知 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}$，所以 $f(x)-(\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x})=\frac{1}{1-x^2}(2\ln x+\frac{(k-1)(x^2-1)}{x})$.

考虑函数 $h(x)=2\ln x+\frac{(k-1)(x^2-1)}{x}\ (x>0)$，则 $h'(x)=\frac{(k-1)(x^2+1)+2x}{x^2}$.

(i)设 $k\le 0$，由 $h'(x)=\frac{k(x^2+1)-(x-1)^2}{x^2}$ 知，当 $x\ne 1$ 时，$h'(x)<0$，h(x)递减.

而 $h(1)=0$ 故当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x)>0$；

当 x∈（1，+∞）时，h（x）<0，可得 $\frac{1}{1-x^2}$h（x）>0

从而当 x>0, 且 x≠1 时，f（x）-（$\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$）>0，即 f（x）>$\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$.

（ii）设 0<k<1. 由于 $(k-1)(x^2+1)+2x=(k-1)x^2+2x+k-1$ 的图像开口向下，且 $(k-1)x^2+2x+k-1$，对称轴 x=$\frac{1}{1-k}>1$. 当 x∈（1，$\frac{1}{1-k}$）时，（k-1）（x^2+1）+2x>0, 故 h'（x）>0, 而 h（1）=0，故当 x∈（1，$\frac{1}{1-k}$）时，h（x）>0，可得 $\frac{1}{1-x^2}$h（x）<0, 与题设矛盾.

（iii）设 k≥1. 此时 $x^2+1\ge 2x$，$(k-1)(x^2+1)+2x>0\Rightarrow h'$（x）>0, 而 h（1）=0，故当 x∈（1，+∞）时，h（x）>0，可得 $\frac{1}{1-x^2}$h（x）<0, 与题设矛盾.

综合得，k 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

8.【解析】:（1）函数 $f(x)=\frac{x-a}{(x+a)^2}$ 的导函数为 $f'(x)=\frac{3a-x}{(x+a)^3}(x\ne -a)$,

则函数 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 $f'(0)=\frac{3}{a^2}$，依题意有 $\frac{3}{a^2}=3$，解得 $a=\pm 1$.

（2）对于定义域内的任意 x_1，总存在 x_2 使得 $f(x_2)<f(x_1)$，即为 $f(x)$ 在定义域内不存在最小值.

①当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$，无最小值，符合题意；

②当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=\frac{3a-x}{(x+a)^2}$，

可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 单调递增，在 $(-a,3a)$ 单调递增，在 $(3a,+\infty)$ 单调递减，

即有 $f(x)$ 在 $x=3a$ 取得极大值，

当 $x>a$ 时，$f(x)>0$；当 $x<a$ 时，$f(x)<0$. 取 $x_1<a, x_2\neq -a$ 即可，

当 $x_1<-a$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 单调递减，且 $x_1<x_1+\frac{1}{2}|x_1+a|<-a$，$f(x_1)>f\left(x_1+\frac{1}{2}|x_1+a|\right)$，

故存在 $x_2=x_1+\frac{1}{2}|x_1+a|$，使得 $f(x_2)<f(x_1)$，

同理当 $-a<x_1<a$ 时，令 $x_2=x_1-\frac{1}{2}|x_1+a|$ 使得 $f(x_2)<f(x_1)$，则有当 $a>0$ 时，$f(x_2)<f(x_1)$ 成立；

③当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,3a)$ 单调递减，在 $(3a,-a)$ 单调递增，在 $(-a,+\infty)$ 单调递增，

即有 $f(x)$ 在 $x=3a$ 处取得极小值，

当 $x>a$ 时，$f(x)>0$；当 $x<a$ 时 $f(x)<0$，所以 $f(x)_{\min}=f(3a)$，

当 $x_1=3a$ 时，不存在 x_2 使得 $f(x_2)<f(x_1)$ 成立，

综上可得，a 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

恒成立问题解题基本方法 2——参变分离

类型一　常规

9.【解析】:（1）由题得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{a-1}{x^2}-1=-\frac{x^2-ax+(a-1)}{x^2}=-\frac{(x-1)[x-(a-1)]}{x^2}$，

当 $a-1\leq 0$，即 $a\leq 1$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增；令 $f'(x)<0$，得 $x>1$，则 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，且极大值为 $f(1)=a-2$，无极小值.

当 $0<a-1<1$，即 $1<a<2$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=a-1$.

当 $x\in(0,a-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,a-1),(1,+\infty)$ 内单调递减；当 $x\in(a-1,1)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(a-1,1)$ 内单调递增，所以 $f(x)$ 在 $x=a-1$ 处取得极小值，且极小值 $f(a-1)=a\ln(a-1)-a+2$，在 $x=1$ 处取得极大值，且极大值为 $f(1)=a-2$.

综上所述，当 $a\leq 1$ 时，$f(x)$ 的极大值为 $a-2$，无极小值；

当 $1<a<2$ 时，$f(x)$ 的极大值为 $a-2$，极小值为 $a\ln(a-1)-a+2$.

（2）由 $f(x)<m-(x-2)e^x$，得 $m>\ln x-x+(x-2)e^x$，

设 $h(x)=(x-2)e^x+\ln x-x, x\in(0,1]$，则 $h'(x)=(x-1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$，

所以当 $0<x\leq 1$ 时，$x-1\leq 0$.

设 $u(x)=e^x-\frac{1}{x}$，则 $u'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $u(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增.

又$u\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$u(1)=e-1>0$，

所以$\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$u(x_0)=0$，即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$，

当$x\in(0,x_0)$时，$u(x)<0$，$h'(x)>0$；当$x\in(x_0,1]$时，$u(x)>0$，$h'(x)<0$，

所以函数$h(x)$在区间$(0,x_0)$内单调递增，在区间$(x_0,1]$上单调递减，

所以$h(x)_{\max}=h(x_0)=(x_0-2)e^{x_0}+\ln x_0-x_0=(x_0-2)\cdot\frac{1}{x_0}-2x_0=1-\left(\frac{2}{x_0}+2x_0\right)$.

因为函数$y=1-\left(\frac{2}{x}+2x\right)$在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内单调递增，所以$h(x_0)\in(-4,-3)$，

又$m>h(x)$对任意的$x\in(0,1]$恒成立，且$m\in\mathrm{Z}$，所以m的最小值是-3.

10（1） $f'(x)=(x+2)(x-a)e^x$

①若$a<-2$，则$f(x)$在$(-\infty,a)$，$(-2,+\infty)$上单调递增，在$(a,-2)$上单调递减；

②$a=-2$，则$(-\infty,+\infty)$在上单调递增；

③若$a>-2$，则$f(x)$在$(-\infty,-2)$，$(a,+\infty)$上单调递增，在$(-2,a)$上单调递减；

（2）由1知，当$a\in(0,2)$时，$f(x)$在$(-4,-2)$上单调递增，在$(-2,0)$单调递减，

所以$f(x)_{\max}=f(-2)=(a+4)e^{-2}$，$f(-4)=(3a+16)e^{-4}>-a=f(0)$，

故$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|_{\max}=\left|f(-2)-f(0)\right|=(a+4)e^{-2}+a=a\left(e^{-2}+1\right)+4e^{-2}$，

$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<4e^{-2}+me^a$恒成立，即$a\left(e^{-2}+1\right)+4e^{-2}<4e^{-2}+me^a$恒成立，即$m>\frac{a}{e^a}\left(e^{-2}+1\right)$恒成立，

令$g(x)=\frac{x}{e^x},x\in(0,2)$，易知$g(x)$在其定义域上有最大值$g(1)=\frac{1}{e}$，

所以$m>\frac{1+e^2}{e^3}$.

类型二　参变分离后，分母含 0

11【解析】：(1)当$a=1$时，$f(x)=e^x+x^2-x$，$f'(x)=e^x+2x-1$，

由于$f''(x)=e^x+2>0$，故$f'(x)$单调递增，注意到$f'(0)=0$，故：

当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0,f(x)$单调递减；当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0,f(x)$单调递增.

(2)由$f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$得，$e^x+ax^2-x\geqslant\frac{1}{2}x^3+1$，其中$x\geq0$，

①. 当$x=0$时，不等式为：$1\geq1$，显然成立，符合题意；

②. 当$x>0$时，分离参数a得，$a\geqslant-\frac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$，

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 3

记$g(x)=-\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$，$g'(x)=-\dfrac{(x-2)\left(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)}{x^3}$，

令$h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1(x\geq 0)$，则$h'(x)=e^x-x-1$，$h''(x)=e^x-1\geq 0$，

故$h'(x)$单调递增，$h'(x)\geq h'(0)=0$，故函数$h(x)$单调递增，$h(x)\geq h(0)=0$，

由$h(x)\geq 0$可得：$e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\geqslant 0$恒成立，

故当$x\in(0,2)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当$x\in(2,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

因此，$[g(x)]_{\max}=g(2)=\dfrac{7-e^2}{4}$，

综上可得，实数a的取值范围是$\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$.

12.

【解答】由题意$x^2+4x+2\leq 2ke^x(x+1)$，对任意的$x\geq -2$恒成立

当$x=-1$时，上式恒成立，故$k\in R$；

当$x>-1$时，上式化为$k\geq\dfrac{x^2+4x+2}{2e^x(x+1)}$

令$h(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{2e^x(x+1)}(x>-1),h'(x)=\dfrac{-xe^x(x+2)^2}{2e^x(x+1)^2}$，所以$h(x)$在$x=0$处取得最大值，

$k\geq h(0)=1$

当$-2\leq x<-1$时，上式化为$k\leq\dfrac{x^2+4x+2}{2e^x(x+1)}$，$h(x)$单调递增，故$h(x)$在$x=-2$处取得最小值，$k\leq h(-2)=e^2$

综上，k的取值范围为$[1,e^2]$.□

13.【解析】:（1）$f(x)=(x-2)e^x-\frac{a}{2}x^2+ax$，$a\in R$．$\therefore f'(x)=(x-1)e^x-ax+a=(x-1)(e^x-a)$.

①当$a\leq 0$时，令$f'(x)<0$，得$x<1$．$\therefore f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减；

令$f'(x)>0$，得$x>1$，$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

②当$0<a<e$时，令$f'(x)<0$，得$\ln a<x<1$．$\therefore f(x)$在$(\ln a,1)$上单调递减；

令 $f'(x)>0$，得 $x<\ln a$ 或 $x>1$．$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

③当 $a=e$ 时，$f'(x)\ge 0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 时恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调递增.

④当 $a>e$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $1<x<\ln a$．$\therefore f(x)$ 在 $(1,\ln a)$ 上单调递减；

令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$ 或 $x<1$．$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<e$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln a,1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a=e$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>e$ 时，$f(x)$ 在 $(1,\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\infty,1)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

（2）不等式 $f(x)+(x+1)e^x+\dfrac{a}{2}x^2-2ax+a>0$，等价于 $(2x-1)e^x>a(x-1)$.

①当 $x=1$ 时，$0<e$，则 $a\in\mathbf{R}$.

②当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$a<\dfrac{(2x-1)e^x}{x-1}$.

设函数 $g(x)=\dfrac{(2x-1)e^x}{x-1}$，则 $g'(x)=\dfrac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}$.

当 $x\in\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，此时 $g(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，此时 $g(x)$ 单调递增.

$\therefore g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$．$\therefore a<4e^{\frac{3}{2}}$.

③当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$a>\dfrac{(2x-1)e^x}{x-1}$.

设函数 $h(x)=\dfrac{(2x-1)e^x}{x-1}$，则 $h'(x)=\dfrac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，此时 $h(x)$ 单调递减；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)>0$，此时 $h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{\max}=h(0)=1$；$\therefore a>1$.

综上，a 的取值范围为 $\left(1,4e^{\frac{3}{2}}\right)$.

类型三 参变分离后，需多次求导

14.（1） $f'(x)=\dfrac{1-a-\ln x}{x^2}$，

由题意可得： $f'(1)=\dfrac{1-a}{x^2}=0$，解得： $a=1$，此时函数 $f(1)=a=1$，

函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线为 $y=1$ 成立

所以 $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$， $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，

由 $f'(x)>0$ 可得 $0<x<1$，由 $f'(x)<0$ 可得 $x>1$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=1$，不存在极小值.

(2) 由 $f(x)\le e^x+\dfrac{2}{x}-1$ 可得 $\dfrac{\ln x+a}{x}\le e^x+\dfrac{2}{x}-1$，分离 a 可得： $a\le x\left(e^x-1\right)-\ln x+2\ (x>0)$

令 $F(x)=x\left(e^x-1\right)-\ln x+2,x>0$， $F'(x)=e^x-1+xe^x-\dfrac{1}{x}=e^x(x+1)-\dfrac{x+1}{x}=(x+1)\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right),x>0$

$h(x)=e^x-\dfrac{1}{x},x>0.$ 令 $h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0,h(1)=e-1>0,$

存在唯一的 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $h(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$

当 $0<x<x_0$ 时， $h(x)<0$，即 $F'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时， $h(x)>0$，即 $F'(x)>0$，

故 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

$F(x)_{\min}=x_0\left(e^{x_0}-1\right)-lnx_0+2=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0+2$，

由于 $h(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，得 $x_0e^{x_0}=1$，再对 $x_0e^{x_0}=1$ 两边取对数可得： $x_0+\ln x_0=0$

所以 $F(x)_{\min}=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0+2=1-0+2=3$，所以 $a\le 3$.

即实数 a 的取值范围 $a\le 3$

15.【解析】:（1） $f'(x)=2-a-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(2-a)-2}{x}$， $x>0$.

1）当 $a\ge 2$， $f'(x)<0$；

2）当$a<2$，令$f'(x)=0$，$x=\dfrac{2}{2-a}$；

综上：当$a\geq 2$时，$f(x)$的单调递减区间是 $0,+\infty$ ；

当$a<2$时，$f(x)$的单调递减区间是$\left(0,\dfrac{2}{2-a}\right)$，单调递增区间是$\left(\dfrac{2}{2-a},+\infty\right)$.

（2）即对$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$a>2-\dfrac{2\ln x}{x-1}$恒成立，

令$l(x)=2-\dfrac{2\ln x}{x-1}$，$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，则

$l'(x)=-\dfrac{\dfrac{2}{x}(x-1)-2\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{2\ln x+\dfrac{2}{x}-2}{(x-1)^2}$，

再令$m(x)=2\ln x+\dfrac{2}{x}-2$，$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，

$m'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{-2(1-x)}{x^2}<0$，

$m(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上为减函数，于是

$m(x)>m\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-2\ln 2>0$，

从而，$l'(x)>0$，于是$l(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上为增函数，

$l(x)<l\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-4\ln 2$，

故要$a>2-\dfrac{2\ln x}{x-1}$恒成立，只要$a\in[2-4\ln 2,+\infty)$

，即a的最小值为$2-4\ln 2$；

（3）$\because g(x)=xe^{1-x}$，$\therefore g'(x)=(1-x)e^{1-x}$，

$\therefore g(x)$在$(0,1)$内递增，在$(1,e)$内递减. 又$\because g(0)=0$，$g(1)=1$，$g(e)=e^{2-e}>0$，

$\therefore$函数$g(x)$在$(0,e)$内的值域为$(0,1]$.

由$f(x)=(2-a)(x-1)-2\ln x$，得$f'(x)=\dfrac{(2-a)x-2}{x}$.

①当$a\geq 2$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,e]$上单调递减，不合题意；

②当$a<2$时，令$f'(x)>0$，则$x>\dfrac{2}{2-a}$；令$f'(x)<0$，则$0<x<\dfrac{2}{2-a}$.

i）当$\dfrac{2}{2-a}\geq e$，即$2-\dfrac{2}{e}\leq a<2$时，$f(x)$在$(0,e]$上单调递减，不合题意；

ii）当$\dfrac{2}{2-a}<e$，即$a<2-\dfrac{2}{e}$时，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{2}{2-a}\right]$上单调递减，在$\left(\dfrac{2}{2-a},e\right]$上单调递增.

令$m(a)=f\left(\dfrac{2}{2-a}\right)=a-2\ln\dfrac{2}{2-a}$，$a<2-\dfrac{2}{e}$，则$m'(a)=\dfrac{-a}{2-a}$，

$\therefore m(a)$在$(-\infty,0)$上单调递增，在$\left(0,2-\dfrac{e}{2}\right]$上单调递减；

$\therefore m(a)\leq m(0)=0$，即$a-2\ln\dfrac{2}{2-a}\leq 0$在$\left(-\infty,2-\dfrac{e}{2}\right)$上恒成立.

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 4

令 $t=\dfrac{2}{2-a}$，则 $t>0$，设 $k(t)=\ln t+\dfrac{1}{t}$，$t>0$，则 $k'(t)=\dfrac{t-1}{t^2}$，

$\therefore k(t)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，在 $1,+\infty$ 上单调递增，

$\therefore k(t)\ge k(1)=1>0$，即 $\ln t+\dfrac{1}{t}>0$，$\therefore \ln t>-\dfrac{1}{t}$，$\therefore$ $t>e^{-\frac{1}{t}}$，即 $\dfrac{2}{2-a}>e^{\frac{a-2}{2}}>e^{\frac{a-3}{2}}$.

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,e^{\frac{a-3}{2}}\right)$ 时，$f(x)=(2-a)(x-1)-2\ln x>\ \ a-2-2\ln x>a-2-(a-3)=1$，

且 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上连续.

欲使对任意的 $x_0\in(0,e]$ 在 $(0,e]$ 上总存在两个不同的 $x_i\ (i=1,2)$，使 $f(x_i)=g(x_0)$ 成立，

则需满足 $f(e)\ge 1$，即 $a\le 2-\dfrac{3}{e-1}$.

又 $\because 2-\dfrac{2}{e}-\left(2-\dfrac{3}{e-1}\right)=\dfrac{e+2}{e(e-1)}>0$，$\therefore 2-\dfrac{2}{e}>2-\dfrac{3}{e-1}$，

$\therefore a\le 2-\dfrac{3}{e-1}$. 综上所述，$a\in\left(-\infty,2-\dfrac{3}{e-1}\right]$.

类型四　参变分离后，零点设而不求（隐零点）

16.【解析】:（1） $f'(x)=a+1+\ln x$，令 $f'(x)>0\Rightarrow x>e^{-a-1}$，令 $f'(x)<0\Rightarrow 0<x<e^{-a-1}$，

故 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(e^{-a-1}\right)=-e^{-a-1}=-e^{-2}$，得 $a=1$.

（2）当 $x>1$ 时，令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x+\ln x}{x-1}$，$\therefore g'(x)=\dfrac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$，

令 $h(x)=x-2-\ln x$，$\therefore h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$，故 $y=h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

由于 $h'(3)=1-\ln 3<0$，$h'(4)=2-\ln 4>0$，存在 $x_0\in(3,4)$，使得 $h'(x_0)=0$.

则 $x\in(1,x_0)$，$h'(x)<0$，知 $g(x)$ 为减函数；$x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)>0$，知 $g(x)$ 为增函数.

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0+x_0\ln x_0}{x_0-1}=x_0$，$\therefore k<x_0$，又 $x_0\in(3,4)$，所以 $k_{\max}=3$.

17.（Ⅰ）函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 无公共点，等价于方程 $\dfrac{\ln x}{x}=a$ 在 $(0,+\infty)$ 无解

令 $t(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $t'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 令 $t'(x)=0$, 得 $x=e$

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$t'(x)$	+	0	−
$t(x)$	增	极大值	减

因为 $x=e$ 是唯一的极大值点，故 $t_{\max}=t(e)=\frac{1}{e}$

故要使方程 $\frac{\ln x}{x}=a$ 在 $(0,+\infty)$ 无解，当且仅当 $a>\frac{1}{e}$，故实数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{e},+\infty)$

（Ⅱ）假设存在实数 m 满足题意，则不等式 $\ln x+\frac{m}{x}<\frac{e^x}{x}$ 对 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 恒成立.

即 $m<e^x-x\ln x$ 对 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 恒成立. 令 $r(x)=e^x-x\ln x$，则 $r'(x)=e^x-\ln x-1$，

令 $\varphi(x)=e^x-\ln x-1$，则 $\varphi'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，

$\because$ $\varphi'(x)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，$\varphi'(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，$\varphi'(1)=e-1>0$，且 $\varphi'(x)$ 的图象在 $(\frac{1}{2},1)$ 上连续，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $\varphi'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，则 $x_0=-\ln x_0$，

$\therefore$ 当 $x\in(\frac{1}{2},x_0)$ 时，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)$ 单调递增，

则 $\varphi(x)$ 取到最小值 $\varphi(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-1=x_0+\frac{1}{x_0}-1\geq 2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}-1=1>0$，

$\therefore$ $r'(x)>0$，即 $r(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递增. $m\leq r(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln 2=1.99525$，

$\therefore$ 存在实数 m 满足题意，且最大整数 m 的值为1.

18.（1）由 $f(x)=\frac{m+\ln x}{x}$ $(x>1)$，得 $f'(x)=\frac{1-m-\ln x}{x^2}$，$x>1$，

当 $1-m\leq 0$ 时，即 $m\geq 1$ 时，$1-m-\ln x\leq 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(1,+\infty)$，无单调递增区间；

当 $1-m>0$ 时，即 $m<1$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x\in(1,e^{1-m})$，

由 $f'(x)<0$，得 $x\in(e^{1-m},+\infty)$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(e^{1-m},+\infty)$，单调递增区间是 $(1,e^{1-m}]$.

综上，当 $m\geq 1$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(1,+\infty)$，无单调递增区间；

当 $m<1$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $\left(e^{1-m},+\infty\right)$，单调递增区间是 $\left(1,e^{1-m}\right]$.

（2）$f(x)=\dfrac{4+\ln x}{x}$，$x>1$，由 $\dfrac{k}{x+1}<f(x)$，得 $k<\dfrac{(x+1)(4+\ln x)}{x}$，$x>1$，

令 $h(x)=\dfrac{(x+1)(4+\ln x)}{x}$，$x>1$，则 $h'(x)=\dfrac{x-3-\ln x}{x^2}$，$x>1$，

令 $\varphi(x)=x-3-\ln x$，$x>1$，则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0(x>1)$，

所以，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，$\varphi(4)=1-\ln 4<0$，$\varphi(5)=2-\ln 5>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(4,5)$，使 $\varphi\left(x_0\right)=0$，

且 $x\in\left(1,x_0\right)$，$\varphi'(x)<0$，$h'(x)<0$，$h\left(x\right)$ 单调递减；$x\in\left(x_0,+\infty\right)$，$\varphi'(x)>0$，$h'(x)>0$，$h\left(x\right)$ 单调递增，

$h_{\min}(x)=h\left(x_0\right)=\dfrac{(x_0+1)\left(4+\ln x_0\right)}{x_0}$，

$\varphi\left(x_0\right)=x_0-3-\ln x_0=0$，所以 $x_0+1=4+\ln x_0$，

所以 $h\left(x_0\right)=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0}=x_0+\dfrac{1}{x_0}+2\in\left(\dfrac{25}{4},\dfrac{36}{5}\right)$，

令 $x+\dfrac{1}{x}+2=7$，$\therefore$ $x=x_0=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$，$\varphi\left(x_0\right)=\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}-\ln\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}>0$，

$\therefore$ $x_0\in\left(4,\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$，$h\left(x_0\right)=x_0+\dfrac{1}{x_0}+2\in\left(\dfrac{25}{4},7\right)$，

又 $k\in Z$，$\therefore$ $k\le 6$，

综上，k 的最大值为 6.

恒成立问题解题基本方法 3——变更主元

19.（1）$f'(x)=3x^2+2ax+b$，则 $\begin{cases} f'(1)=3+2a+b=0 \\ f(1)=1+a+b+a^2=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-11 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-3 \\ b=3 \end{cases}$

当 $\begin{cases} a=4 \\ b=-11 \end{cases}$ 时，$f'(x)=3x^2+8x-11,\quad \Delta=64+132>0$，所以函数有极值点；

当 $\begin{cases} a=-3 \\ b=3 \end{cases}$ 时，$f'(x)=3(x-1)^2\ge 0$，所以函数无极值点；则 b 的值为 -11.

（2）解法一：$f'(x)=3x^2+2ax+b\ge 0$ 对任意的 $a\in[-4,+\infty)$，$x\in[0,2]$ 都成立

则 $F(a)=2xa+3x^2+b\ge 0$ 对任意的 $a\in[-4,+\infty)$，$x\in[0,2]$ 都成立

$\because x\ge 0, F(a)$ 在 $a\in[-4,+\infty)$ 单调递增或为常数函数

所以得 $F(a)_{\min}=F(-4)=-8x+3x^2+b\geq 0$ 对任意的 $x\in[0,2]$ 恒成立，

即 $b\geq(-3x^2+8x)_{\max}$，又 $-3x^2+8x=-3(x-\frac{4}{3})^2+\frac{16}{3}\leq\frac{16}{3}$，

当 $x=\frac{4}{3}$ 时 $(-3x^2+8x)_{\max}=\frac{16}{3}$，得 $b\geq\frac{16}{3}$，所以 b 的最小值为 $\frac{16}{3}$.

解法二：$f'(x)=3x^2+2ax+b\geq 0$ 对任意的 $a\in[-4,+\infty)$，$x\in[0,2]$ 都成立

即 $b\geq -3x^2-2ax$ 对任意的 $a\in[-4,+\infty)$，$x\in[0,2]$ 都成立,

即 $b\geq(-3x^2-2ax)_{\max}$.　　令 $F(x)=-3x^2-2ax=-3(x+\frac{a}{3})^2+\frac{a^2}{3}$

①当 $a\geq 0$时,$F(x)_{\max}=0,\therefore b\geq 0$；

②当 $-4\leq a<0$时,$F(x)_{\max}=\frac{a^2}{3},\therefore b\geq\frac{a^2}{3}$. 又$\because\left(\frac{a^2}{3}\right)_{MAX}=\frac{16}{3},\therefore b\geq\frac{16}{3}$.

综上，b 的最小值为 $\frac{16}{3}$.

20.（1）函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，

当 $m>0$ 时，由 $f'\left(x\right)<0$，得 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$；由 $f'\left(x\right)>0$，得 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$；

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $m<0$ 时，由 $f'\left(x\right)<0$，得 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$；由 $f'\left(x\right)>0$，得 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$；

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递减；

当 $m=0$ 时，$f\left(x\right)=0$ 为常量函数，不具有单调性.

（2）由 $f\left(x\right)<\mathrm{e}^x$，得 $mx\ln x<\mathrm{e}^x$，

①当 $0<x\leq 1$ 时，$\mathrm{e}^x>1$，$mx\ln x\leq 0$，不等式显然成立；

②当 $x>1$ 时，$x\ln x>0$，由 $0<m\leq\frac{\mathrm{e}^2}{2}$，得 $0<mx\ln x\leq\frac{\mathrm{e}^2}{2}x\ln x$，

所以只需证：$\mathrm{e}^x>\frac{\mathrm{e}^2}{2}x\ln x$，即证 $\frac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}-\ln x>0$.

令 $g\left(x\right)=\frac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}-\ln x$，则 $g'\left(x\right)=\frac{2\mathrm{e}^{x-2}\left(x-1\right)-x}{x^2}$，$x>1$，

令 $h\left(x\right)=2\mathrm{e}^{x-2}\left(x-1\right)-x$，则 $h'\left(x\right)=2x\mathrm{e}^{x-2}-1$，

令 $h'\left(x\right)=\varphi\left(x\right)$，则 $\varphi'\left(x\right)=2\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x-2}>0$，

所以 $h'\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上为增函数，

因为 $h'\left(1\right)=\frac{2}{\mathrm{e}}-1<0$，$h'\left(2\right)=3>0$，所以存在 $x_0\in\left(1,2\right)$，$h'\left(x_0\right)=0$，

所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(1,x_0\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递增，

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 5

又因为 $h(1)=-1<0$，$h(2)=0$，

当 $x\in(1,2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)\ge g(2)=1-\ln 2>0$，所以 $g(x)>0$，所以原命题得证.

恒成立问题解题基本方法 4——赋值法

21.

.【解析】(1) $\because f'(x)=e^x\left(x\ln x+\ln x+\dfrac{2}{e}+1\right)$，…………（1 分）

$\therefore f'(1)=e+2$，$\because f(1)=2$，…………（2 分）

$\therefore$ 所求切线方程为 $y-2=(e+2)(x-1)$，即 $(e+2)x-y-e=0$. …………（4 分）

(2) 由 $f(1)>g(1)$ 得 $a<2$，

现证明不等式：$e^x\left(x\ln x+\dfrac{2}{e}\right)>x$ 即证 $x\ln x+\dfrac{2}{e}>\dfrac{x}{e^x}$，

令 $m(x)=x\ln x+\dfrac{2}{e}$，$h(x)=\dfrac{x}{e^x}(x>0)$，

$\because m'(x)=\ln x+1$，$\therefore 0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 递减；$x>\dfrac{1}{e}$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 递增.

$\therefore m_{\min}(x)=m\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}$. …………（8 分）

$\because h'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，$\therefore 0<x<1$ 时 $h'(x)>0$，$h(x)$ 递增；$x>1$ 时 $h'(x)<0$，$h(x)$ 递减.

$\therefore h_{\max}(x)=h(1)=\dfrac{1}{e}$. …………（10 分）

$\therefore m(x)\geqslant\dfrac{1}{e}\geqslant h(x)$ 且等号不同时取得，

$\therefore x\ln x+\dfrac{2}{e}>\dfrac{x}{e^x}$ 即 $e^x\left(x\ln x+\dfrac{2}{e}\right)>x$ 成立.

综上，$a_{\max}=1$. …………（12 分）

22.（1）$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2(x+1)=\dfrac{2x^2+2x+a}{x}$，

$a\ge 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0,+\infty)$；

$a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}$（$\dfrac{-1-\sqrt{1-2a}}{2}$ 舍去），所以 $x\in\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，

$x\in\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f\left(x\right)$ 的单调减区间是 $\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$，单调增区间是 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty\right)$；

（2）由 $f\left(1\right)-\dfrac{1}{a}\le 0$ 可得 $0<a\le\dfrac{1}{4}$，

只需证明当 $0<a\le\dfrac{1}{4}$ 时，$f\left(x\right)-\dfrac{x^2}{a}\le 0$ 恒成立，等价于 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{\left(x+1\right)^2}{a}-lnx\ge 0$，

令 $t=\dfrac{1}{a}$，则 $t\ge 4$，设 $g\left(t\right)=x^2t^2-\left(x+1\right)^2t-lnx$，对称轴 $t=\dfrac{\left(x+1\right)^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2\le 2$，

故有 $g\left(t\right)\ge g\left(4\right)=16x^2-4\left(x+1\right)^2-lnx$.

记 $h\left(x\right)=16x^2-4\left(x+1\right)^2-lnx$，$h'\left(x\right)=32x-8\left(x+1\right)-\dfrac{1}{x}=24x-8-\dfrac{1}{x}\ge 24\times 1-8-\dfrac{1}{1}>0$，

所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 单调递增，且 $h\left(1\right)=0$. 故有 $h\left(x\right)\ge 0$，于是 $g\left(t\right)\ge 0$ 恒成立.

由此 $0<a\le\dfrac{1}{4}$.

23.（1）当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=x^2-x\ln x+2$，$f'\left(x\right)=2x-\ln x-1$，

$f\left(1\right)=3$，$f'\left(1\right)=1$. ……………………………………………………………………2 分

l：$y-3=x-1$，即 $x-y+2=0$.

所以曲线 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $x-y+2=0$. ………………………………4 分

（2）$f\left(x\right)>0$ 即 $x^2-ax\ln x+a+1>0$，所以 $x-a\ln x+\dfrac{a+1}{x}>0$.

令 $h\left(x\right)=x-a\ln x+\dfrac{a+1}{x}$，$h'\left(x\right)=1-\dfrac{a+1}{x^2}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-ax-\left(a+1\right)}{x^2}=\dfrac{\left(x+1\right)\left[x-\left(a+1\right)\right]}{x^2}$. ………6 分

若不等式 $f\left(x\right)>0$，对任意 $x\in\left[1,e\right]$ 恒成立，即函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上的最小值大于零.

①当 $1+a\ge e$，即 $a\ge e-1$ 时，$h\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上单调递减，所以 $h\left(x\right)$ 的最小值为 $h\left(e\right)$，

由 $h\left(e\right)=e+\dfrac{1+a}{e}-a>0$ 可得 $a<\dfrac{e^2+1}{e-1}$，

因为 $\dfrac{e^2+1}{e-1}>e-1$，所以 $e-1\le a<\dfrac{e^2+1}{e-1}$. ……………………………………………………8 分

②当 $1+a\le 1$，即 $a\le 0$ 时，$h\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上单调递增，

所以 $h\left(x\right)$ 最小值为 $h\left(1\right)$，由 $h\left(1\right)=1+1+a>0$ 可得 $a>-2$，即 $-2<a\le 0$. ………9 分

③当$1<1+a<e$，即$0<a<e-1$时，可得$h(x)$最小值为$h(1+a)$，

因为$0<\ln(1+a)<1$，所以$0<a\ln(1+a)<a$，

故$h(1+a)=2+a-a\ln(1+a)>2$. 即$0<a<e-1$，…………………………………11 分

综上可得，a的取值范围是$\left(-2,\dfrac{e^2+1}{e-1}\right)$. ……………………………………………12 分

24.（Ⅰ）由题得$h(x)=e^x+a\ln x$，$h'(x)=e^x+\dfrac{a}{x}=\dfrac{xe^x+a}{x}$

又$\varphi(x)=xe^x$在$(0,+\infty)$上为单调递增函数，$\varphi(0)=0$，

故当$a\ge 0$时，$h(x)$无极值.

当$a<0$时，存在$x_0>0$，$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，$(x_0,+\infty)$上单调递增，存在极小值故$a<0$.

（Ⅱ）由$m^2x^2f(x-1)-(x+1)g(x)-mx\ge 0$即$m^2x^2e^{x-1}-(x+1)\ln x-mx\ge 0$

首先，令$x=1$，得$m\ge 1$；

下面证明当$m\ge 1$时符合要求：令$t(m)=m^2x^2e^{x-1}-(x+1)\ln x-mx$.

（1）若$\dfrac{x}{2x^2e^{x-1}}=\dfrac{1}{2xe^{x-1}}\le 1$，即$xe^{x-1}\ge\dfrac{1}{2}$时，$t(m)\ge t(1)=x^2e^{x-1}-(x+1)\ln x-x$.

令$k(x)=x^2e^{x-1}-(x+1)\ln x-x$. 得$k'(x)=(x^2+2x)e^{x-1}-\dfrac{1}{x}-\ln x-2$.

$k''(x)=(x^2+4x+2)e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\ge(x^4+4x+2)\cdot\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x^2}+2$.

显然当$x>0$时，$k'(0)>0$，从而$k'(x)$递增，又$k'(1)=0$

则$0<x<1$时，$k'(x)<0$，$k(x)$在$(0,1)$上单调递减；$x>1$时，$k'(x)>0$，$k(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$k_{\min}(x)=k(1)=0$得证；

（2）若$\dfrac{x}{2x^2e^{x-1}}=\dfrac{1}{2xe^{x-1}}>1$，即$xe^{x-1}<\dfrac{1}{2}$时，$t(m)\ge t\left(\dfrac{1}{2xe^{x-1}}\right)=-\dfrac{4e^{x-1}(x+1)\ln x+1}{4e^{x-1}}$.

下面，只要证$n(x)=4e^{x-1}(x+1)\ln x+1\le 0$，其中$xe^{x-1}<\dfrac{1}{2}$.

由$xe^{x-1}<\dfrac{1}{2}$，且$y=xe^{x-1}$在$(0,+\infty)$上单调递增，记$x_0e^{x_0-1}=\dfrac{1}{2}$，得$x\in(0,x_0)$

又$(1-\ln 2)e^{(1-\ln 2)-1}<\dfrac{1}{2}$，所以$x_0>1-\ln 2$

又$n(x)\le 4e^{x-1}(x+1)(x-1)+1=4x^2e^{x-1}-4e^{x-1}+1<2x-4e^{x-1}+1$.

令$p(x)=2x-4e^{x-1}+1$，则$p'(x)=2-4e^{x-1}$.

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$p(x)$ 在 $(0,1-\ln 2)$ 上单调递增，$(1-\ln 2,x_0)$ 上单调递减，

$p(x)\le p(1-\ln 2)=1-2\ln 2<0$，得证.

故所求实数 m 的取值范围为 $m\ge 1$.

25.（1）【解法一】:（整体法）$f'(x)=e^{x-a}-a$

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不可能有两个零点

当 $a>0$ 时，

x	$(-\infty,a+\ln a)$	$a+\ln a$	$(a+\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

要有两个零点，需要 $f(a+\ln a)<0$，即 $a-a(a+\ln a)<0$，即 $1-a-\ln a<0$

$h(a)=1-a-\ln a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$h(1)=0$，因此 $h(a)<0$ 得到 $a>1$，此时 $a+\ln a>0$

因为 $f(0)=e^{-a}>0$，$f(a+\ln a)<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

因此 $f(x)$ 在 $(0,a+\ln a)$ 和 $(a+\ln a,+\infty)$ 内各有一个零点

因此实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

【解法二】:（分离法）

当 $a\le 0$ 时，$f(x)=e^{x-a}-ax>0$，$f(x)$ 无零点

当 $a>0$ 时，$e^{x-a}=ax$，$x-a=\ln(ax)=\ln a+\ln x$

因此 $x-\ln x=a+\ln a$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上有两个零点

令 $g(x)=x-\ln x$

由 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

$g(1)=0$，易知：$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

因此 $g(x)=a+\ln a$ 有两个解，需要 $a+\ln a>1$

由 $h(a)=a+\ln a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增且 $h(1)=0$，可知 $a>1$

（2）（必要性分析）

$$p(x)=f(x+1)+\frac{a}{2}(x+2)-\sqrt{x^2+ax+1}=e^{x+1-a}-\frac{a}{2}x-\sqrt{x^2+ax+1}$$

由 $p(0)=e^{1-a}-1\ge 0$ 可知 $1-a\ge 0$，得 $a\le 1$

下证明：当 $a\le 1$ 时，$p(x)\ge 0$ 对任意 $x\ge 0$ 成立

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 6

当 $x>0$ 时，e^{x+1-a} 关于 a 单调递减，$\dfrac{a}{2}x$ 关于 a 单调递增，$\sqrt{x^2+ax+1}$ 关于 a 单调递增

因此 $p(x)$ 关于 a 单调递减，则 $p(x)\ge e^x-\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}$

先证明：当 $x>0$ 时，$e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

令 $k(x)=\dfrac{1+x+\frac{1}{2}x^2}{e^x}$，由 $k'(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{e^x}<0$ 知 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

则 $k(x)<k(0)=1$，即 $1+x+\dfrac{1}{2}x^2<e^x$

因此 $e^x-\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}>1+x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}$

$$e^x-\frac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}>1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1}^2-\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)^2>0$$

因此当 $x>0$ 时，$p(x)\ge e^x-\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}>0$

综上可知，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

存在性问题与有解问题的基本方法

26.（1）解：$y=f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$，所以 $f'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$.

令 $g(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$，所以函数 $y=g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单增；在区间 $(1,+\infty)$ 单减.
又因为 $g(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 时 $g(x)<0$，$f'(x)<0$
所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 上均单调递减；

(2)解：$\because \lambda x^2-\lambda x\ge\left(e^{\lambda x}-1\right)\ln x\ \therefore (x-1)\ln e^{\lambda x}\ge\left(e^{\lambda x}-1\right)\ln x$

当 $\lambda>0$，$x>1$ 时 $x-1>0$，所求不等式可化为 $\dfrac{\ln e^{\lambda x}}{e^{\lambda x-1}}\ge\dfrac{\ln x}{x-1}$，即 $f\left(e^{\lambda x}\right)\ge f(x)$，

$\because \lambda>0$ 易知 $e^{\lambda x}\in(1,+\infty)$，由（1）知，$y=f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

故只需 $e^{\lambda x}\le x$ 在 $(1,+\infty)$ 上能成立．两边同取自然对数，得 $\lambda x\le\ln x$，即 $\lambda\le\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上能成立.

令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(1.e)$ 时，$\varphi'(x)>0$，函数 $y=\varphi(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，函数 $y=\varphi(x)$ 单调递减，

$\therefore \varphi(x)_{\max}=\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$,

所以$\lambda \le \dfrac{1}{e}$，又$\lambda>0$，故λ的取值范围是$\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$.

27 (1)已知函数$f(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x$，定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=2ax-(a+2)+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-(a+2)x+1}{x}=\dfrac{(ax-1)(2x-1)}{x}$，

①当$0<a<2$时，$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{2}$，

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{a}\right)$上单调递减；

②当$a=2$时，$f'(x)=\dfrac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{x}\ge 0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增；

③当$a>2$时，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2}$，

x	$\left(0,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right),\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减.

综上所述，$0<a<2$时，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{a}\right)$上单调递减；

$a=2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增；

$a>2$时，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right),\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减.

(2)若存在$x\in[1,+\infty)$，使得$f(x)+\mathrm{e}\le 0$成立，即使得$f_{\min}(x)\le -\mathrm{e}$.

由（1），可知当$a\ge 1$时，$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$f_{\min}(x)=f(1)=-2$，不满足$f_{\min}(x)\le -\mathrm{e}$；

当$0<a<1$时，$\dfrac{1}{a}>1$

x	$\left(1,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	递减	极小值	递增

$f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{a}\right)=-1-\frac{1}{a}-\ln a$，所以$-1-\frac{1}{a}-\ln a\le -\mathrm{e}$，即$\ln a+\frac{1}{a}\ge \mathrm{e}-1$，

令$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}(0<x<1)$，$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0$，

$\therefore g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$在$(0,1)$上单调递减，

又$\because g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}-1$，由$\ln a+\frac{1}{a}\ge \mathrm{e}-1$，得$0<a\le\frac{1}{\mathrm{e}}$.

综上，实数a的取值范围为$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

28 (1)函数$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x-1}$，$x>1$，求导得：$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$，

令$g(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$，$x>1$，则$g'(x)=\frac{1-x}{x^2}<0$，即函数$y=g(x)$在区间$(1,+\infty)$单调递减，

而$g(1)=0$，则当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<g(1)=0$，即$f'(x)<0$，

所以函数$y=f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减.

(2)

当$x>1$时$\ln x>0$，$(x-1)f\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)-\ln x\ge 0\Leftrightarrow f\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)\ge\frac{\ln x}{x-1}\Leftrightarrow f\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)\ge f(x)$，

因$\lambda>0$且$x>1$，则$\mathrm{e}^{\lambda x}\in(1,+\infty)$，由(1)知，$y=f(x)$在$(1,+\infty)$单调递减，

则存在$x\in(1,+\infty)$，不等式$f\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)\ge f(x)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda x}\le x\Leftrightarrow \lambda x\le\ln x\Leftrightarrow\lambda\le\frac{\ln x}{x}$成立，

令$\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$，则$\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当$x\in(1,\mathrm{e})$时，$\varphi'(x)>0$，当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$\varphi'(x)<0$，

因此，函数$\varphi(x)$在$(1,\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，$\varphi(x)_{\max}=\varphi(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，于是得$0<\lambda\le\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以λ的取值范围是$(0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$.

29.(1)若$a=2$时，$f(x)=\mathrm{e}^x-2x+2$，则$f'(x)=\mathrm{e}^x-2$，

令$f'(x)=\mathrm{e}^x-2>0$，得$x>\ln 2$，令$f'(x)=\mathrm{e}^x-2<0$，得$x<\ln 2$，

所以$f(x)$在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增.

(2)由题意可知，即求$f(x)>g(x_0)_{\min}$成立的a的取值范围，

因为$g(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，$x\in[-1,2]$，所以$\mathrm{e}^x\in[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^2]$，所以$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\ge 2$（当且仅当$x=0$时取等号），

即 $g(x_0)_{\min}=2$，即求 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax+2>2$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立的 a 的取值范围，

当 $a<0$ 时，$f'(x)=\mathrm{e}^x-a>0$，此时 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

且有 $f(\frac{3}{a})=\mathrm{e}^{\frac{3}{a}}-3+2=\mathrm{e}^{\frac{3}{a}}-1<0<2$，不满足 $f(x)_{\min}>2$；

当 $a=0$ 时，易知 $f(x)>2$，显然成立；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a>0$，得 $x>\ln a$，令 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a<0$，得 $x<\ln a$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a+2$，所以 $a-a\ln a+2>2$，解得，$0\le a<\mathrm{e}$ 所以实数 a 的取值范围为[0，e).

30.(1)解：当 $a=-5$ 时，$f(x)=x^2-8\ln x$，可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=2x-\frac{8}{x}=\frac{2x^2-8}{x},x>0$，

可知当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$.

(2)解：由题可知，存在 $x\in[2,\mathrm{e}]$，使得 $f(x)-x^2>2x+\frac{2a+4}{x}$ 成立，

等价于 $2x+\frac{2a+4}{x}-(2a+2)\ln x<0$ 在 $[2,\mathrm{e}]$ 内有解，

可设 $h(x)=2x+\frac{2a+4}{x}-(2a+2)\ln x$，即在 $[2,\mathrm{e}]$ 上，函数 $h(x)_{\min}<0$，

$\therefore h'(x)=2-\frac{(2a+4)}{x^2}-\frac{(2a+2)}{x}=\frac{2x^2-(2a+2)x-(2a+4)}{x^2}=\frac{2(x+1)[x-(a+2)]}{x^2}$，

令 $h'(x)=0$，即 $(x+1)[x-(a+2)]=0$，解得：$x=a+2$ 或 $x=-1$（舍去），

当 $a+2\ge\mathrm{e}$，即 $a\ge\mathrm{e}-2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $[2,\mathrm{e}]$ 上单调递减，

$\therefore h(x)_{\min}=h(\mathrm{e})=2\mathrm{e}+\frac{2a+4}{\mathrm{e}}-2a-2<0$，得 $a>\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1}$，

又 $\because\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1}>\mathrm{e}-2$，所以 $a>\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1}$；

当 $a+2\le2$ 时，即 $a\le0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $[2,\mathrm{e}]$ 上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(2)=6+a-(2a+2)\ln2<0$，得 $a>\frac{6-\ln4}{\ln4-1}>0$，不合题意；

当 $2<a+2<\mathrm{e}$，即 $0<a<\mathrm{e}-2$ 时，则 $h(x)$ 在 $[2,a+2]$ 上单调递减，在 $[a+2,\mathrm{e}]$ 上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(a+2)=2a+6-(2a+2)\ln(a+2)$，

$\because\ln2<\ln(a+2)<\ln\mathrm{e}=1$，$\therefore(2a+2)\ln2<(2a+2)\ln(2a+2)<2a+2$，

$\therefore h(a+2)=2a+6-(2a+2)\ln(a+2)>2a+6-2a-2=4$，即 $h(x)_{\min}>4$，不符合题意；

综上得，实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1},+\infty\right)$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 7

30．(1)当$a=1$时，$f\left(x\right)=e^{x}-x-1$，所以$f'\left(x\right)=e^{x}-1$

当$x<0$时$f'\left(x\right)<0$；当$x>0$时$f'\left(x\right)>0$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上单调递减，在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

所以当$x=0$时函数$f\left(x\right)$有极小值$f\left(0\right)=0$，无极大值.

(2)因为$f\left(x\right)\le x^{2}$在$\left[0,+\infty\right)$上有解，所以$e^{x}-x^{2}-ax-1\le 0$在$\left[0,+\infty\right)$上有解，

当$x=0$时，不等式成立，此时$a\in R$，

当$x>0$时$a\ge \frac{e^{x}}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上有解，

令$g\left(x\right)=\frac{e^{x}}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)$，则$g'\left(x\right)=\frac{e^{x}\left(x-1\right)}{x^{2}}-\left(\frac{x^{2}-1}{x^{2}}\right)=\frac{\left(x-1\right)\left[e^{x}-\left(x+1\right)\right]}{x^{2}}$

由（1）知$x>0$时$f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$，即$e^{x}-(x+1)>0$，

当$0<x<1$时$g'\left(x\right)<0$；当$x>1$时$g'\left(x\right)>0$，

所以$g\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

所以当$x=1$时，$g(x)_{\min}=e-2$，所以$a\ge e-2$，

综上可知，实数a的取值范围是$a\ge e-2$.

31．(1)当$a=1$时，$f(x)=2x^{3}-x^{2}+8$，$f'(x)=6x^{2}-2x=2x(3x-1)$，又$f(1)=9$，$f'(1)=4$，

故$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为：$y-9=4(x-1)$，即：$4x-y+5=0$.

(2)因为$x\in[1,2)$，若$f(x)<0$，即$2x^{3}-ax^{2}+8<0$，$a>2x+\frac{8}{x^{2}}$.

令$h(x)=2x+\frac{8}{x^{2}},x\in[1,2)$，则$h'(x)=2-\frac{16}{x^{3}}=\frac{2(x^{3}-8)}{x^{3}}$，

当$x\in[1,2)$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，故$h(x)>h(2)=6$.

若在区间$[1,2)$内至少存在一个实数x，使得$f(x)<0$成立，

故$a\ge 6$,

则实数a的取值范围为$[6,+\infty)$.

恒成立与存在性问题结合

32．（1）$f(x)$为定义域上的偶函数.

证明：$f(x)=e^{x}+e^{-x}$的定义域为R，$\because f(-x)=e^{-x}+e^{x}=f(x)$，$\therefore f(x)$为定义域上的偶函数；

（2）若关于x的不等式$mf(x)\le e^{-x}+m-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，

即$m(e^{x}+e^{-x}-1)\le e^{-x}-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，

$\because x>0$，$\therefore e^{x}+e^{-x}-1>0$，即$m\le\frac{e^{-x}-1}{e^{x}+e^{-x}-1}$在（0，+∞）上恒成立，

设$t=e^x,(t>1)$，则$m\le \frac{1-t}{t^2-t+1}$在$(1,+\infty)$上恒成立．$\because \frac{1-t}{t^2-t+1}=-\frac{t-1}{(t-1)^2+(t-1)+1}=-\frac{1}{(t-1)+\frac{1}{t-1}+1}\ge -\frac{1}{3}$.

当且仅当$t=2$时上式等号成立．$\therefore m\le -\frac{1}{3}$；

（3）令$g(x)=e^x+e^{-x}-a(-x^3+3x)$．则$g'(x)=e^x-e^{-x}+3a(x^2-1)$，

当$x>1$时，$g'(x)>0$，即$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，故此时$g(x)$的最小值$g(1)=e+\frac{1}{e}-2a$.

由于存在$x_0\in[1,+\infty)$，使得$f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$成立，故$e+\frac{1}{e}-2a<0$，即$a>\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$.

令$h(x)=x-(e-1)\ln x-1$，$h'(x)=1-\frac{e-1}{x}$，由$h'(x)=1-\frac{e-1}{x}=0$，解得$x=e-1$.

当$0<x<e-1$时，$h'(x)<0$，此时函数单调递减，
当$x>e-1$时，$h'(x)>0$，此时函数单调递增.
$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为$h(e-1)$.
注意到$h(0)=h(1)=0$，
$\therefore$当$x\in(1,e-1)\subseteq(0,e-1)$时，$h(e-1)\le h(x)<h(1)=0$.
$x\in(e-1,e)\subseteq(e-1,+\infty)$时，$h(x)<h(e)=0$.
$\therefore h(x)<0$对任意$x\in(1,e)$成立.

①$a\in\left(\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right),e\right)\subseteq(1,e)$时，$h(a)<0$，即$a-1<(e-1)\ln a$，从而$e^{a-1}<a^{e-1}$；

②$a=e$时，$e^{a-1}=a^{e-1}$；
③$a\in(e,+\infty)\subseteq(e-1,+\infty)$时，$h(a)>h(e)=0$，即$a-1>(e-1)\ln a$，从而$e^{a-1}>a^{e-1}$.

综上可知：当$\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)<a<e$时，$e^{a-1}<a^{e-1}$；当$a=e$时，$e^{a-1}=a^{e-1}$；当$a>e$时，$e^{a-1}>a^{e-1}$.

33.解：（1）$f(x)=\ln x+x^2-ax$，定义域是$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-a=\frac{2x^2-ax+1}{x}$，

令$h(x)=2x^2-ax+1(x>0)$，$\triangle=a^2-8$，
①$a^2-8\leqslant 0$即$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$时，$h(x)\geqslant 0$恒成立，
即$f'(x)\geqslant 0$恒成立，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，
②$a^2-8>0$即$a>2\sqrt{2}$或$a<-2\sqrt{2}$时，$h(x)=0$有 2 个不相等的实数根，

此时$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$，

$a>2\sqrt{2}$时，$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}>0$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}>0$，

故$x\in(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})$时，$h(x)>0$，即$f'(x)>0$，

$x\in(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})$时，$h(x)<0$，即$f'(x)<0$，

$x\in(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4},+\infty)$时，$h(x)>0$，即$f'(x)>0$，

故$f(x)$在$(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})$递增，在$(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})$递减，在$(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4},+\infty)$递增；

$a<-2\sqrt{2}$时，$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}<0$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}<0$，$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$递增，

综上：$a\leqslant 2\sqrt{2}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

$a>2\sqrt{2}$时，$f(x)$在$(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})$递增，在$(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})$递减，在$(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4},+\infty)$递增.

（2）$\because x>0$，$\therefore \frac{1}{x}+2x\geqslant 2\sqrt{2}$，当$a\in(1,2)$时，$f'(x)>0$在[1，2]上恒成立，

$f(x)$在[1，2]上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=1-a$，
故问题等价于：对于任意的$a\in(1,2)$，不等式$1-a>m\ln a$恒成立，

即$m<\frac{1-a}{\ln a}$恒成立，记$g(a)=\frac{1-a}{\ln a}(1<a<2)$，则$g'(a)=\frac{-a\ln a-1+a}{a\ln^2 a}$,

令$M(a)=-a\ln a-1+a$，则$M'(a)=-\ln a<0$，
所以$M(a)$在$(1,2)$上递减，所以$M(a)<M(1)=0$，
故$g'(a)<0$，所以$g(a)$在$a\in(1,2)$上单调递减，

所以$m\leq g(2)=-\frac{1}{\ln 2}$,

即实数m的取值范围为$(-\infty,-\frac{1}{\ln 2}]$.

34.（1）由题意，函数$y=f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，

当$a\leq 0$时，$f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$，函数$y=f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

此时，函数$y=f(x)$在定义域上无最大值；

当$a>0$时，令$f'(x)=\frac{1}{x}-a=0$，得$x=\frac{1}{a}$，

由$f'(x)>0$，得$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$，由$f'(x)<0$，得$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，

此时，函数$y=f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调减区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

所以当$x=\frac{1}{a}$时，函数$f\left(x\right)$有最大值，即$f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1=1\Rightarrow a=\frac{1}{e^2}$，即$a=e^{-2}$为所求；

（3）只需$b\geq(x-2)e^x+\ln x-x$对任意的$x\in(\frac{1}{2},1)$恒成立即可.

构造函数$g(x)=(x-2)e^x+\ln x-x$，

$g'(x)=(x-1)e^x+\frac{1}{x}-1=(x-1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$，

$\because x\in(\frac{1}{2},1)$，$\therefore x-1<0$，且$t(x)=e^x-\frac{1}{x}$单调递增，

$\because t(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-2<0,t(1)=e-1>0$，

$\therefore$一定存在唯一的$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得$t(x_0)=0$，即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0},x_0=-\ln x_0$，

且当$\frac{1}{2}<x<x_0$时，$t(x)<0$，即$g'(x)>0$；

当$x_0<x<1$时，$t(x)>0$，即$g'(x)<0$.

所以，函数$y=g(x)$在区间$(\frac{1}{2},x_0)$上单调递增，在区间$(x_0,1)$上单调递减，

$\therefore g(x)_{\max}=g(x_0)=(x_0-2)e^{x_0}+\ln x_0-x_0=1-2\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，$x\in(\frac{1}{2},1)$

则$y=1-2(x_0+\frac{1}{x_0})$在$(\frac{1}{2},1)$上单调递增，所以$1-2(x_0+\frac{1}{x_0})\in(-4,-3)$，

因此b的最小整数值为-3.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 8

不等式恒成立之端点不成立问题

1.（1）$f\left(x\right)=e^{x}-ax$，$f'\left(x\right)=e^{x}-a$.

当 $a\le 0$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)=e^{x}-ax$ 在 R 上单调递增.

当 $a>0$ 时，令 $f'\left(x\right)=e^{x}-a=0$，得 $x=\ln a$.

$x<\ln a$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln a\right)$ 上单调递减，

$x>\ln a$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(\ln a,+\infty\right)$ 上单调递增，

故当 $a\le 0$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 R；

当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $\left(-\infty,\ln a\right)$，单调递增区间是 $\left(\ln a,+\infty\right)$.

（2）$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{1}{2}x^{2}-\dfrac{1}{2}a^{2}=e^{x}-ax-\dfrac{1}{2}x^{2}-\dfrac{1}{2}a^{2}$，$g'\left(x\right)=e^{x}-x-a$，$g''\left(x\right)=e^{x}-1$，

$\because x\ge 0$，$\therefore g''\left(x\right)=e^{x}-1\ge 0$，$g'\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，$g'\left(x\right)_{\min}=g'\left(0\right)=1-a$.

当 $1-a\ge 0$，即 $a\le 1$ 时，$g'\left(x\right)_{\min}=1-a\geqslant 0$，$g\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，

则 $g\left(x\right)_{\min}=g\left(0\right)=1-\dfrac{1}{2}a^{2}\geqslant 0$，$-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$，故 $-\sqrt{2}\le a\le 1$.

当 $1-a<0$，即 $a>1$ 时，$g'\left(x\right)_{\min}=1-a<0$，

$\exists x_{0}>0$，$g'\left(x_{0}\right)=e^{x_{0}}-x_{0}-a=0$，即 $a=e^{x_{0}}-x_{0}$ 或 $e^{x_{0}}=a+x_{0}$，

$0<x<x_{0}$ 时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_{0}\right)$ 上单调递减，

$x>x_{0}$ 时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$ 在 $\left(x_{0},+\infty\right)$ 上单调递增，

则 $g\left(x\right)_{\min}=g\left(x_{0}\right)=e^{x_{0}}-\dfrac{1}{2}\left(x_{0}+a\right)^{2}=e^{x_{0}}-\dfrac{1}{2}\left(e^{x_{0}}\right)^{2}=\dfrac{1}{2}e^{x_{0}}\left(2-e^{x_{0}}\right)\geqslant 0$，$e^{x_{0}}\leqslant 2$，$\therefore 0<x_{0}\le\ln 2$.

令函数 $h\left(x\right)=e^{x}-x$，且 $0<x\le\ln 2$，$h'\left(x\right)=e^{x}-1\ge 0$，$h\left(x\right)=e^{x}-x$ 在 $\left(0,\ln 2\right]$ 上单调递增，$1<h\left(x\right)\leqslant 2-\ln 2$，

$\because a=e^{x_{0}}-x_{0}$（$0<x\le\ln 2$），$\therefore 1<a\le 2-\ln 2$.

综上，实数 a 的取值范围是 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2-\ln 2$.

2.（1）当 $a=2$ 时，$f\left(x\right)=2x\cos x-2\sin x$，则 $f'\left(x\right)=-2x\sin x$，令 $f'\left(x\right)=0$，当 $x\in\left(0,2\pi\right)$ 时，解得 $x=\pi$，故当 $x\in\left(0,\pi\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(\pi,2\pi\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$.所以，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上单调递减，在 $\left(\pi,2\pi\right)$ 上单调递增.

（2）令 $g(x)=3x+2\sin x-ax\cos x$，则 $g'(x)=3+(2-a)\cos x+ax\sin x$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$ax\cos x\leqslant 0$，所以 $g(x)>g(0)=0$.

当 $0<a\leqslant 5$ 时，$g'(x)\geqslant 3-3\cos x+ax\sin x>0$，故 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.又 $g(0)=0$，故 $g(x)>g(0)=0$.

当 $a>5$ 时，令 $h(x)=g'(x)=3+(2-a)\cos x+ax\sin x$，则 $h'(x)=(2a-2)\sin x+ax\cos x>0$，故 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增. $h(0)=5-a<0,h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3+\dfrac{a\pi}{2}>0.$

故存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 使得 $h(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时 $h(x)<0$，即 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，故不符合 .

综上所述，a 的取值范围为 $\{a\mid a\leq 5\}$.

3.（1）由 $f(x)=\dfrac{3a-\ln x^3}{x}$ 得 $f'(x)=\dfrac{-3-3a+\ln x^3}{x^2}=\dfrac{-3-3a+3\ln x}{x^2}=\dfrac{3\left(\ln x-(a+1)\right)}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$ 得 $\ln x=a+1$，$x=e^{a+1}$，

当 $e^{a+1}\geq 2$ 时，$a\geq -1+\ln 2$，$f'(x)\leq 0$ 对 $[1,2]$ 恒成立，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 单减；

当 $e^{a+1}\leq 1$ 时，$a\leq -1$，$f'(x)\geq 0$ 对 $[1,2]$ 恒成立，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 单增；

当 $1<e^{a+1}<2$ 时，$a\in(-1,-1+\ln 2)$，当 $x\in(1,e^{a+1})$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减；当 $a\in(e^{a+1},2)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增；

综上所述，当 $a\geq -1+\ln 2$，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 单减；当 $a\leq -1$，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 单增；当 $a\in(-1,-1+\ln 2)$，当 $x\in(1,e^{a+1})$，$f(x)$ 单减；当 $a\in(e^{a+1},2)$，$f(x)$ 单增；

（2）若 $a=-1$，则 $f(x)=\dfrac{-3-3\ln x}{x}$，$f(x)>-3x-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立 $\Leftrightarrow -3-3\ln x>-3x^2-2x$，即 $3\ln x+3-3x^2-2x<0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

令 $h(x)=3\ln x+3-3x^2-2x$，则 $h'(x)=\dfrac{3}{x}-6x-2=\dfrac{-6x^2-2x+3}{x}$，

令 $h'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}}{6}\approx 0.56$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{19}}{6}\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单增；当 $x\in\left(\dfrac{-1+\sqrt{19}}{6},+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单减，

所以 $h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{-1+\sqrt{19}}{6}\right)$，令 $M=\dfrac{-1+\sqrt{19}}{6}$，则 $3\ln M<0$，又 $-6M^2-2M+3=0$，即 $3-2M=6M^2$，故

$h(M)=3\ln M+3-3M^2-2M=3\left(\ln M+M^2\right)$，

构造函数 $g(x)=\ln x+x^2$，

又 $\ln x\leq x-1$，设 $t(x)=\ln x-x+1$，$t'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，当 $x\in(0,1)$，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单增，当 $x\in(1,+\infty)$，$t'(x)<0$，

$t(x)$单减，故$t(x)\le t(1)=0$（得证），

所以$g(x)=\ln x+x^2\le x^2+x-1$，$0.56\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$，令$m(x)=x^2+x-1$，$m(x)$在$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$单增，$m\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},m\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{25}$，所以$g(M)<m(M)<0$，

所以$f(x)>-3x-2$在$(0,+\infty)$上恒成立.

4．（1）函数$f(x)=\frac{1+ln(x+1)}{x}$ $\therefore f'(x)=\frac{1}{x^2}[\frac{x}{x+1}-1-ln(x+1)]=-\frac{1}{x^2}[\frac{1}{x+1}+ln(x+1)]$.

由$x>0$，$x^2>0$，$\frac{1}{x+1}>0$，$ln(x+1)>0$，得$f'(x)<0$．因此函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是减函数.

（2）当$x>0$时，$f(x)>\frac{k}{x+1}$恒成立．即$h(x)=\frac{(x+1)[1+ln(x+1)]}{x}>k$对$x>0$恒成立.

即$h(x)(x>0)$的最小值大于k．由$h'(x)=\frac{x-1-ln(x+1)}{x^2}$，记$\Phi(x)=x-1-ln(x+1)$．$(x>0)$则$\Phi'(x)=\frac{x}{x+1}>0$，

$\therefore\Phi(x)$在$(0,+\infty)$上连续递增．又Φ（2）$=1-ln3<0$，Φ（3）$=2-2ln2>0$，

$\therefore\Phi(x)=0$存在惟一实根a，且满足：$a\in(2,3)$，$a=1+ln(a+1)$，

由$x>a$时，$\Phi(x)>0$，$h'(x)>0$；$0<x<a$时，$\Phi(x)<0$，$h'(x)<0$知：

$h(x)(x>0)$的最小值为h（a）$=\frac{(a+1)[1+ln(a+1)]}{a}=a+1\in(3,4)$．因此正整数$k$的最大值为3.

不等式恒成立之端点恒成立问题

5．（1）因为$a=0$，所以$f(x)=\sin x+e^x$，$f'(x)=\cos x+e^x$，

因为$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上是单调增函数，

又因为$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+e^{-\frac{\pi}{2}}=-1+e^{-\frac{\pi}{2}}<0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+e^{\frac{\pi}{2}}=1+e^{\frac{\pi}{2}}>0$，

所以$f(x)$在$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上只有一个零点.

（2）因为$f(x)=\sin x+e^x+ax$，所以$f'(x)=\cos x+e^x+a$，

令$h(x)=\cos x+e^x+a$，$h'(x)=e^x-\sin x$，因为$x\in[0,+\infty)$，$e^x\ge1$，所以$h'(x)>0$，$h(x)$为增函数，$h(x)\ge h(0)=2+a$，

当$2+a\ge0$时，即$a\ge-2$时，$h(x)\ge h(0)=2+a\ge0$，即$f'(x)\ge0$，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，$f(x)\geqslant f(0)=1$，

所以$a\ge-2$时满足$x\in[0,+\infty)$时都有$f(x)\ge1$；当$2+a<0$时，即$a<-2$时，$h(0)=2+a<0$，

又$h(\ln(2-a))=\cos(\ln(2-a))+e^{\ln(2-a)}+a=\cos(\ln(2-a))+2>0$，

所以$\exists x_0\in(0,\ln(2-a))$，使$h(x_0)=0$，

所以$x\in(0,x_0)$时$h(x)<0$，即$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，$f(x)<f(0)=1$，与$f(x)\ge1$矛盾，所以$a<-2$不成立，

综上实数a的取值范围是$[-2,+\infty)$

6．（1）

当 $a=1$ 时， $f(x)=\ln x-x+1$， $f'(x)=\frac{1}{x}-1$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，

且当 $0<x<1$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ $\boxed{\nearrow}$；当 $x>1$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ $\boxed{\searrow}$，

∴ $f(x)_{\max}=f(1)=0$.

（2） $\ln x-ax+1+\frac{e^{x-1}}{x}+a-2\geq 0$ 对任意的 $x\geq 1$ 恒成立，即 $a(x-1)\leq e^{x-1-\ln x}+\ln x-1$ 对 $\forall x\geq 1$ 恒成立，
当 $x=1$ 时，显然成立.

当 $x>1$ 时， $a\leq\left(\frac{e^{x-1-\ln x}+\ln x-1}{x-1}\right)_{\min}$ ，由 $\frac{e^{x-\ln x-1}+\ln x-1}{x-1}\geq\frac{x-\ln x+\ln x-1}{x-1}=1$，

当且仅当 $x-\ln x-1=0$， $x=1$ 时取“ =”，∴取不到“ =”，即 $\frac{e^{x-1-\ln x}+\ln x-1}{x-1}>1$，

∴ $a\leq 1$， a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

7.（1）

$x\in\mathrm{R}$，由题意得 $f'(x)=x+1-\mathrm{e}^x$， $f'(0)=0$，设 $g(x)=f'(x)=x+1-\mathrm{e}^x$，则 $g'(x)=1-\mathrm{e}^x$，

易知当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $g'(x)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $g'(x)<0$，

∴ $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，∴ $g(x)=f'(x)\leq g(0)=0$，∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减.

（2）

当 $x=0$ 时， $f(0)=0$，满足题意；

当 $x>0$ 时，由题已知 $a-\frac{1}{2}\geq\left(\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-\mathrm{e}^x}{x^2}\right)_{\max}$ ．设 $h(x)=\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-\mathrm{e}^x}{x^2}$， $x>0$，

则 $h'(x)=\frac{\left(\frac{3}{2}x^2+1-\mathrm{e}^x\right)\cdot x^2-2x\cdot\left(\frac{1}{2}x^3+x+1-\mathrm{e}^x\right)}{x^4}=\frac{\frac{1}{2}x^3-x-2-(x-2)\cdot\mathrm{e}^x}{x^3}=\frac{(x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)-(x-2)\cdot\mathrm{e}^x}{x^3}$

$=\frac{(x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x+1-\mathrm{e}^x\right)}{x^3}$，

由（1）可知，当 $x>0$ 时， $f(x)<f(0)=0$，即 $\frac{1}{2}x^2+x+1-\mathrm{e}^x<0$，∴当 $x\in(0,2)$ 时， $h'(x)>0$，当 $x\in(0,2)$ 时，

$h'(x)<0$，

即 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，∴ $h(x)_{\max}=h(2)=\frac{7-\mathrm{e}^2}{4}$，

∴ $a-\frac{1}{2}\geq\frac{7-\mathrm{e}^2}{4}$，即 $a\geq\frac{9-\mathrm{e}^2}{4}$.

综上可知，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{9-\mathrm{e}^2}{4},+\infty\right)$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 9

8.（1）解：因为 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\sin x+m$，令 $f'(0)=0$，则 $\frac{1}{0+1}-\sin 0+m=0$，所以 $m=-1$.

即 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\sin x-1(x>-1)$，

当 $-1<x<0$ 时，设 $g(x)=f'(x)=\frac{1}{x+1}-\sin x-1$，所以 $g'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\cos x<0$，

故 $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，所以 $f'(x)>f'(0)=0$，

当 $0<x<\pi$ 时，$\frac{1}{x+1}<1$，$-\sin x<0$，所以 $f'(x)<0$.

终上所述，$m=-1$ 时，$x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点成立，

所以 $m=-1$.

（2）解：由（1）知 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\sin x+m$，

当 $-1<x<0$ 时，$\because f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，$\therefore f'(x)>f'(0)=1+m$，

① $m\geq-1$ 时，$\because f'(x)>f'(0)=1+m\geq0$，$f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递增，所以 $f(x)\leq f(0)=1$，

② $m<-1$ 时，因为 $f'(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减，$f'(0)<0$；$f'\left(-\frac{1}{m}-1\right)=-\sin\left(-\frac{1}{m}-1\right)>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(-1,0)$ 使 $f'(x_0)=0$，即 $x\in(x_0,0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

当 $x\in(x_0,0)$ 时，$f(x)>f(0)=1$，与 $f(x)\leqslant1$ 矛盾.

综上：$m\geq-1$ 时，$f(x)\leqslant1$ 在 $(-1,0]$ 上恒成立.

所以实数 m 的范围是 $[-1,+\infty)$.

不等式恒成立之双变量最值问题

9.（1）当 $a=0$ 时，直线 $g(x)=bx+1$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象相切于 $P(x_0,y_0)$，因为 $f(x)=\ln x$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}$，

则 $\frac{1}{x_0}=b$ 且 $bx_0+1=\ln x_0$，即 $b\bullet\frac{1}{b}+1=\ln\frac{1}{b}$，解得：$b=\frac{1}{e^2}$.

（2）若对任意 $x>0$，都有 $f(x)\leq g(x)$ 恒成立，得 $\ln x-1\leq ax^2+bx$.

假设 $a<0$，则当 $x>e$ 时，$\ln x-1>0$，而当 $x>\max\left\{0,-\frac{b}{a}\right\}$ 时，$ax^2+bx<0$.

取 $x_0=\max\left\{e,-\frac{b}{a}\right\}$，则当 $x>x_0$ 时，$\ln x-1>0$，而 $ax^2+bx<0$，矛盾；故 $a>0$.

当 $x=e$ 时，由 $f(e)\leq g(e)$，得 $ae^2+be\geq0$，即 $\frac{b}{a}\geq-e$.

下证：$\frac{b}{a}$能取到$-e$.当$a=\frac{1}{e^2},b=-\frac{1}{e}$时，$\frac{b}{a}=-e$.

记$F\left(x\right)=\ln x-\frac{x}{e}\left(x>0\right)$，则$F'\left(x\right)=\frac{e-x}{ex}$，

令$F'\left(x\right)>0$，得$0<x<e$；令$F'\left(x\right)<0$，得$x>e$；

所以$F\left(x\right)$在$\left(0,e\right)$上单调递增，在$\left(e,+\infty\right)$上单调递增，

所以$F\left(x\right)\le F\left(e\right)=0$，即$\ln x\le\frac{x}{e}$.

所以 $f(x)-g(x)=\ln x-\frac{x^2}{e^2}+\frac{x}{e}-1\le-\frac{x^2}{e^2}+\frac{x}{e}-1=-\left(\frac{x}{e}-1\right)^2\le 0$.

即对任意 $x>0$，$f(x)\le g(x)$恒成立，故 $\frac{b}{a}$ 的最小值为$-e$.

10．解：（1）由 $f(x)=e^x+(1+x)^a+\frac{a}{1+x}-a-2$，得 $f^{'}(x)=e^x+a(1+x)^{a-1}-\frac{a}{(1+x)^2}$，

所以 $f^{'}(0)=e^0+a(1+0)^{a-1}-\frac{a}{(1+0)^2}=1+a-a=1$，

因为 $f(0)=e^0+(1+0)^a+\frac{a}{1+0}-a-2=1+1+a-a-2=0$，

所以 $f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y=x$，即 $x-y=0$，

（2） $f(x)-g(x)=e^x+(1+x)^a+\frac{a}{1+x}-a-2-bx^2-x$，

令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(0)=0$，所以$h^{'}(x)\ge 0$

$h^{'}(x)=e^x+a(1+x)^{a-1}-\frac{a}{(1+x)^2}-2bx-1$，$h^{'}(0)=e^0+a(1+0)^{a-1}-\frac{a}{(1+0)^2}-1=0$，

所以$h^{''}(0)\ge 0$，$h^{''}(x)=e^x+a(a-1)(1+x)^{a-2}+\frac{2a}{(1+x)^2}-2b$，

所以$h^{''}(0)=e^0+a(a-1)(1+0)^{a-2}+\frac{2a}{(1+0)^2}-2b=a^2+a+1-2b\ge 0$，

所以 $b\le\frac{a^2+a+1}{2}$，所以 $b_{\max}=\frac{a^2+a+1}{2}$，

所以$M=\frac{b+12}{a}=\frac{a^2+a+25}{2a}=\frac{1}{2}(a+\frac{25}{a}+1)$，

令$\varphi(a)=a+\frac{25}{a}+1(a\ge 4)$，则$\varphi^{'}(a)=1-\frac{25}{a^2}$，当$4\le a<5$时，$\varphi^{'}(a)<0$，当$a>5$时，$\varphi^{'}(a)>0$，所以$\varphi(a)$在$[4,5)$上单调递减，在$(5,+\infty)$上单调递增，

所以$\varphi(a)_{\min}=\varphi(5)=5+\frac{25}{5}+1=11$，此时$M=\frac{11}{2}$，

综上，$M=\frac{b+12}{a}$的最小值为$\frac{11}{2}$

11.解：（1）由 $f\left(x\right)=e^{ax}\sin x$，得 $f'\left(x\right)=e^{ax}\left(a\sin x+\cos x\right)$，

由 $f\left(x\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，可得 $f'\left(x\right)\ge 0$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上恒成立，

即 $a\sin x+\cos x\ge 0$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上恒成立，

当 $x=0$ 时，$a\in R$；当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，则 $a\ge -\dfrac{1}{\tan x}$，$\therefore$ $a\ge -1$，

$\therefore$ a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

（2）设 $g(x)=f(x)-bx=e^{ax}\sin x-bx$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

则 $g'(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)-b$.

设 $h(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)-b$，则 $h'(x)=e^{ax}\left[(a^2-1)\sin x+2a\cos x\right]\ge 0$，

$\therefore$ $h(x)$ 单调递增，即 $g'(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

$\therefore$ $g'(x)\in\left[1-b,ae^{\frac{\pi}{2}a}-b\right]$.

当 $b\le 1$ 时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，$\therefore$ $g(x)\ge g(0)=0$，不符合题意；

当 $b\ge ae^{\frac{\pi}{2}a}$ 时，$g'(x)\le 0$，$g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，$g(x)\le g(0)=0$，符合题意；

当 $1<b<ae^{\frac{\pi}{2}a}$ 时，由于 $g'(x)$ 为一个单调递增的函数，

而 $g'(0)=1-b<0$，$g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=ae^{\frac{\pi}{2}a}-b>0$，

由零点存在性定理，必存在一个零点 x_0，使得 $g'(x_0)=0$，

从而 $g(x)$ 在 $x\in[0,x_0]$ 上单调递减，在 $\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

因此只需 $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\le 0$，$\therefore$ $e^{\frac{\pi}{2}a}\le\dfrac{\pi}{2}b$，$\therefore$ $b\ge\dfrac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}$，从而 $\dfrac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}\le b<ae^{\frac{\pi}{2}a}$，

综上，b 的取值范围为 $\left[\dfrac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a},+\infty\right)$，

因此 $b-e^2a\ge\dfrac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2a$.设 $G(a)=\dfrac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2a$，则 $G'(a)=e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2$，

令 $G'(a)=0$，则 $a=\dfrac{4}{\pi}>1$，$\therefore$ $G(a)$ 在 $\left[1,\dfrac{4}{\pi}\right]$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{4}{\pi},+\infty\right)$ 上单调递增，

从而 $G(a)\ge G\left(\dfrac{4}{\pi}\right)=-\dfrac{2e^2}{\pi}$，$\therefore$ $b-e^2a$ 的最小值为 $-\dfrac{2e^2}{\pi}$.

12.

（1）函数定义域为 $(0,+\infty)$，由题意得 $g(x)=\ln x-ax+1$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，

①当 $a\le 0$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{a}$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

（2）设函数$F(x)=\ln x-(a-e)x-b$，其中 e 为自然对数的底数，

$\therefore F'(x)=\frac{1}{x}+e-a$，$x>0$，

当 $a\le e$时，$F'(x)>0$，$F(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，$\therefore F(x)\le 0$不可能恒成立，

当 $a>e$时，由$F'(x)=\frac{1}{x}+e-a=0$，得$x=\frac{1}{a-e}$，

$\because$不等式$F(x)\le 0$恒成立，$\therefore F(x)_{\max}\le 0$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a-e}\right)$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{a-e},+\infty\right)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，

$\therefore$当$x=\frac{1}{a-e}$时，$F(x)$取最大值，$F\left(\frac{1}{a-e}\right)=-\ln(a-e)-b-1\le 0$，

$\therefore$满足$\ln(a-e)+b+1\ge 0$即可，$\therefore b\ge -1-\ln(a-e)$，

$\therefore \frac{b}{a}\ge\frac{-1-\ln(a-e)}{a}(a>e)$，

令$G(x)=\frac{-1-\ln(x-e)}{x}$，$x>e$，$G'(x)=\frac{-\frac{x}{x-e}+1+\ln(x-e)}{x^2}=\frac{(x-e)\ln(x-e)-e}{(x-e)x^2}$.

令$H(x)=(x-e)\ln(x-e)-e$，$H'(x)=\ln(x-e)+1$，由$H'(x)=0$，得 $x=e+\frac{1}{e}$，

当 $x\in\left(e+\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$H'(x)>0$，$H(x)$是增函数，

当 $x\in\left(e,e+\frac{1}{e}\right)$时，$H'(x)<0$，$H(x)$是减函数，

$\therefore$当 $x=e+\frac{1}{e}$时，$H(x)$取最小值$H\left(e+\frac{1}{e}\right)=-e-\frac{1}{e}$，

$\because x\to e$时，$H(x)\to 0$，$x>2e$时，$H(x)>0$，$H(2e)=0$，

$\therefore$当 $x\in(e,2e)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$是减函数，

当 $x\in(2e,+\infty)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$是增函数，

$\therefore x=2e$时，$G(x)$取最小值，$G(2e)=\frac{-1-1}{2e}=-\frac{1}{e}$，

$\therefore \frac{b}{a}$的最小值为$-\frac{1}{e}$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 10

13.（1）由题意，函数 $f\left(x\right)=\left(a+1\right)x-\ln x(a,b\in R)$，

因为 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)\le 0$，可得 $f\left(x\right)=(a+1)x-\ln x\le 0$，即 $a+1\le\dfrac{\ln x}{x}$，

设函数 $h\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}\left(x>0\right)$，可得 $h'\left(x\right)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $h'\left(x\right)>0$，即 $1-\ln x>0$，解得 $0<x<e$；

令 $h'\left(x\right)<0$，即 $1-\ln x<0$，解得 $x>e$，

所以函数 $h\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left(0,e\right)$，同理可求得单调递减区间为 $\left(e,+\infty\right)$.

所以 $h\left(x\right)_{max}=h\left(e\right)=\dfrac{1}{e}$，所以 $a+1\le\dfrac{1}{e}$，解得所以 $a\le\dfrac{1}{e}-1$，

即实数 a 的取值范围 $(-\infty,\dfrac{1}{e}-1]$.

（2）由函数 $f\left(x\right)=\left(a+1\right)x-\ln x(a,b\in R)$，可得 $f'\left(x\right)=a+1-\dfrac{1}{x},x>0$，

若 $a+1\le 0$，即 $a\le -1$ 时，$f'\left(x\right)<0$ 恒成立，所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减，

又由 $x\to+\infty$ 时，$f\left(x\right)\to-\infty$，与题意不符.

若 $a+1>0$，即 $a>-1$ 时，令 $f'\left(x\right)>0$，即 $a+1>\dfrac{1}{x}$，解得 $x>\dfrac{1}{a+1}$，

所以 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{a+1},+\infty\right)$ 内单调递增，在区间 $\left(0,\dfrac{1}{a+1}\right)$ 内单调递减，

所以 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{a+1}\right)=\left(a+1\right)\cdot\dfrac{1}{a+1}-\ln\dfrac{1}{a+1}=1-\ln\dfrac{1}{a+1}=1+\ln\left(a+1\right)$

所以 $b\le 1+\ln(a+1)$，所以 $b-a^2-a\le 1+\ln(a+1)-a^2-a$，

设 $g\left(x\right)=1+\ln(x+1)-x^2-x,x>-1$，

所以 $g'\left(x\right)=\dfrac{1}{x+1}-2x-1=\dfrac{1-\left(x+1\right)(2x+1)}{x+1}=\dfrac{-2x^2-3x}{x+1}$

令 $g'\left(x\right)>0$，即 $2x^2+3x<0$，解得 $-\dfrac{3}{2}<x<0,$

又因为 $x>-1$，所以 $g\left(x\right)$ 在区间 $(-1,0)$ 内单调递增，在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 内单调递减，

所以 $g\left(x\right)_{\max}=g\left(0\right)=1+\ln 1-0-0=1$，

所以当 $a=0,b=1$ 时，$b-a^2-a$ 有最大值为 1.

不等式恒成立之 max，min 问题

14．【详解】（1）$\because\ f'(x)=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$，

$\therefore$切线的斜率 $k=f'(1)=\dfrac{1}{e}$， $f(1)=\dfrac{1}{e}$.$\therefore$函数 $f(x)$ 在点 $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{e}x$.

（2）证明：$\because F(x)=f(x)-x+\dfrac{1}{x}$， $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$，$\therefore F(1)=\dfrac{1}{e}>0$，$F(2)=\dfrac{4}{e^2}-\dfrac{3}{2}<0$，$F(1)F(2)<0$，$\therefore F(x)$ 存在零点 x_0，且 $x_0\in(1,2)$.

$\because F'(x)=\dfrac{x(2-x)}{e^x}-1-\dfrac{1}{x^2}$，$\therefore$当 $x\geq 2$ 时，$F'(x)<0$；

当 $0<x<2$ 时，由 $x(2-x)\leq\left[\dfrac{x+(2-x)}{2}\right]^2=1$ 得 $F'(x)\leq\dfrac{1}{e^x}-1-\dfrac{1}{x^2}<1-1-\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}<0$.

$\therefore F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.$\therefore$若 $x_1>0$， $x_2>0$， $x_1\neq x_2$，则 $F(x_1)\neq F(x_2)$.

$\therefore$函数 $F(x)$ 只有一个零点 x_0，且 $x_0\in(1,2)$.

（3）解： $g(x)=\begin{cases}x-\dfrac{1}{x},0<x\leq x_0\\ \dfrac{x^2}{e^x}, \quad x>x_0\end{cases}$，故 $h(x)=\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}-cx^2,0<x\leq x_0\\ \dfrac{x^2}{e^x}-cx^2, \quad x>x_0\end{cases}$，

$\because$函数 $F(x)$ 只有一个零点 x_0，$\therefore F(x_0)=0$，即 $x_0-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{x_0^2}{e^{x_0}}$.$\therefore$ $x_0-\dfrac{1}{x_0}-cx_0^2=\dfrac{x_0^2}{e^{x_0}}-cx_0^2$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数 $\Leftrightarrow h'(x)\geq 0$ 在 $(0,x_0)$，$(x_0,+\infty)$ 恒成立.

当 $x>x_0$ 时 $h'(x)=\dfrac{x(2-x)}{e^x}-2cx\geq 0$，即 $c\leq\dfrac{2-x}{2e^x}$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上恒成立.

设 $u(x)=\dfrac{2-x}{2e^x}(x>x_0)$，只需 $c\leq[u(x)]_{\min}$，

$u'(x)=\dfrac{x-3}{2e^x}$，$u(x)$ 在 $(x_0,3)$ 单调减，在 $(3,+\infty)$ 单调增.

$u(x)$ 的最小值 $[u(x)]_{\min}=u(3)=-\dfrac{1}{2e^3}$，$c\leq-\dfrac{1}{2e^3}$.

当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-2cx$，由上述得 $c<0$，则 $h'(x)>0$ 在 $(0,x_0)$ 恒成立.

综上述，实数 c 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2e^3}\right]$.

14．

解：（1）由题意，得 $f'(x)=\ln x+1$，故 $g(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x+1$，

故 $g'(x)=2ax-(a+2)+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2x-1)(ax-1)}{x}$， $x>0,a>0$.

令 $g'(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{1}{2},x_2=\dfrac{1}{a}$

①当 $0<a<2$ 时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{2}$，$g'(x)>0 \Leftarrow 0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>\frac{1}{a}$；$g'(x)<0 \Leftarrow \frac{1}{2}<x<\frac{1}{a}$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减；

所以 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极大值 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{4}-\ln 2$，在 $x=\frac{1}{a}$ 处取极小值 $g\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}-\ln a$.

②当 $a=2$ 时，$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$，$g'(x)\geq 0$ 恒成立，所以不存在极值；

③当 $a>2$ 时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$，$g'(x)>0 \Leftarrow 0<x<\frac{1}{a}$ 或 $x>\frac{1}{2}$；$g'(x)<0 \Leftarrow \frac{1}{a}<x<\frac{1}{2}$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减；

所以 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取极大值 $g\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}-\ln a$，

在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极小值 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{4}-\ln 2$.

综上，当 $0<a<2$ 时，$g(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极大值 $-\frac{a}{4}-\ln 2$，在 $x=\frac{1}{a}$ 处取极小值 $-\frac{1}{a}-\ln a$；当 $a=2$ 时，不存在极值；$a>2$ 时，$g(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取极大值 $-\frac{1}{a}-\ln a$，在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极小值 $-\frac{a}{4}-\ln 2$.

（2）$F(x)=x\ln x-\frac{x}{e^x}$，定义域为 $x\in(0,+\infty)$，$F'(x)=1+\ln x+\frac{x-1}{e^x}$，而 $x\in(1,2)$，

故 $F'(x)>0$，即 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内单调递增又 $F(1)=-\frac{1}{e}<0$，$F(2)=2\ln 2-\frac{2}{e^2}>0$，

且 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内的图象连续不断，

故根据零点存在性定理，有 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且仅有唯一零点.

所以存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $F(x_0)=f(x_0)-\frac{x_0}{e^{x_0}}=0$，且当 $1<x<x_0$ 时，$f(x)<\frac{x}{e^x}$；

当 $x>x_0$ 时，$f(x)>\frac{x}{e^x}$，所以 $m(x)=\begin{cases} x\ln x, 1<x\leq x_0 \\ \frac{x}{e^x}, x>x_0 \end{cases}$

当 $1<x<x_0$ 时，$m(x)=x\ln x$，由 $m'(x)=1+\ln x>0$ 得 $m(x)$ 单调递增；

当 $x>x_0$ 时，$m(x)=\frac{x}{e^x}$，由 $m'(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$ 得 $m(x)$ 单调递减；

若 $m(x)=n$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有两个不等实根 x_1,x_2（$x_1<x_2$）则 $x_1\in(1,x_0), x_2\in(x_0,+\infty)$.

要证 $x_1+x_2>2x_0$，即证 $x_2>2x_0-x_1$ 又 $2x_0-x_1>x_0$，而 $m(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 内单调递减，

故可证 $m(x_2)<m(2x_0-x_1)$，又由 $m(x_1)=m(x_2)$，即证 $m(x_1)<m(2x_0-x_1)$，

即 $x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$

记 $h(x)=x\ln x-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}, 1<x<x_0$，其中 $h(x_0)=0$

记 $\phi(t)=\frac{t}{e^t}$，则 $\phi'(t)=\frac{1-t}{e^t}$，当 $t\in(0,1)$ 时，$\phi'(t)>0$；

当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$\phi'(t)<0$，故 $\phi(t)_{\max}=\frac{1}{e}$

而 $\phi(t)>0$，故 $0<\phi(t)<\frac{1}{e}$，而 $2x_0-x>1$，所以 $-\frac{1}{e}<-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}<0$，

因此 $h'(x)=1+\ln x+\frac{1}{e^{2x_0-x}}-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}>1-\frac{1}{e}>0$，

即 $h(x)$ 单调递增，故当 $1<x<x_0$ 时，$h(x)<h(x_0)=0$，

即 $x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$，故 $x_1+x_2>2x_0$，得证.

16.（1）$f'(x)=(x-1)e^{x-1}-x+1=(x-1)(e^{x-1}-1)$，$x\in R$，

当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$e^{x-1}-1>0$，则 $f'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$x-1<0$，$e^{x-1}-1<0$，则 $f'(x)>0$，

当 $x=1$ 时，$f'(1)=0$．所以当 $x\in R$ 时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 在 R 上是增函数，

又 $f(1)=0$，所以当 $x\geq 1$ 时，$f(x)\geq f(1)=0$；

当 $x<1$ 时，$f(x)<f(1)=0$.

（2）函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，由（1）得，当 $x\geq 1$ 时，$f(x)\geq 0$，又 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}\geq f(x)\geq 0$，

所以当 $x\geq 1$ 时，$F(x)\geq 0$ 恒成立.

由于当 $-1<x<1$ 时，$f(x)<0$ 恒成立，

故 $F(x)\geq 0$ 等价于：当 $-1<x<1$ 时，$g(x)\geq 0$ 恒成立.

$g'(x)=a-\cos x-\frac{1}{x+1}$，$g''(x)=\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$.

当 $-1<x<0$ 时，$-1<\sin x<0$，$\frac{1}{(x+1)^2}>1$，故 $g''(x)>0$；

当 $0\leq x<1$ 时，$0\leq\sin x<1$，$\frac{1}{(x+1)^2}>0$，故 $g''(x)>0$.

从而当 $-1<x<1$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增.

①若 $g'(1)\leq 0$，即 $a\leq\cos 1+\frac{1}{2}$，则当 $x\in(-1,1)$ 时，$g'(x)<g'(1)\leq 0$，$g(x)$ 单调递减，

故当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，不符合题意；

②若 $g'(1)>0$，即 $a>\cos 1+\frac{1}{2}$，取 $b\in\left(-1,-1+\frac{1}{a+1}\right)$，

则 $-1<-1+\dfrac{1}{a+1}<0$，且 $g'(b)=a-\cos b-\dfrac{1}{b+1}\le a+1-\dfrac{1}{b+1}<0$，

故存在唯一 $x_0\in(-1,1)$，满足 $g'(x_0)=0$，当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

若 $x_0<0$，则当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g(x)$ 单调递增，$g(x)<g(0)$，不符合题意；

若 $x_0=0$，则 $g(x)\ge g(0)=0$，符合题意，此时由 $g'(x_0)=0$，得 $a=2$；

若 $x_0>0$，则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)$ 单调递减，$g(x)<g(0)$，不符合题意.

综上可知：存在唯一实数 $a=2$ 满足题意.

17.（1）设 $F(x)=x^2-1-2\ln x$，则 $F'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $x>1$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增；当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；

所 $F(x)_{\min}=F(1)=0$，所以 $F(x)\ge 0$，即 $x^2-1\ge 2\ln x$，所以 $f(x)=x^2-1$.

设 $G(x)=3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-1)^2$，结合 $f(x)$ 与 $G(x)$ 在 $(0,1]$ 上的图象可知，

这两个函数的图象在 $(0,1]$ 内有两个交点，

即 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上的零点个数为 2（或由方程 $f(x)=G(x)$ 在 $(0,1]$ 内有两根可得）.

（2）假设存在实数 $a\in(-2,+\infty)$，使得 $g(x)<\dfrac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，

则 $\begin{cases}x+\ln x<\dfrac{3}{2}x+4a\\ -x^2+\left(a^2-\dfrac{1}{2}\right)x+2a^2+4a<\dfrac{3}{2}x+4a\end{cases}$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，

即 $\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{2}x<4a,\\ (x+2)(x-a^2)>0,\end{cases}$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，

①设 $H(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x$，则 $H'(x)=\dfrac{2-x}{2x}$，

当 $0<x<2$ 时，$H'(x)>0$，$H(x)$ 单调递增；当 $x>2$ 时，$H'(x)<0$，$H(x)$ 单调递减.

所以 $H(x)_{\max}=H(2)=\ln 2-1$，

当 $0<a+2<2$ 即 $-2<a<0$ 时，$4a>\ln 2-1$，所以 $a>\dfrac{\ln 2-1}{4}$，因为 $a<0$，所以 $a\in\left(\dfrac{\ln 2-1}{4},0\right)$，

故当 $a\in\left(\dfrac{\ln 2-1}{4},0\right)$ 时，$\ln x-\dfrac{1}{2}x<4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立；

当 $a+2\geq 2$，即 $a\geq 0$ 时，$H(x)$ 在 $(a+2,+\infty)$ 上递减，

所以 $H(x)<H(a+2)=\ln(a+2)-\dfrac{1}{2}a-1$.

因为 $\left[\ln(a+2)-\dfrac{1}{2}a-1\right]'=\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{2}\leq 0$，所以 $H(a+2)\leq H(2)=\ln 2-1<0$，

故当 $a\geq 0$ 时，$\ln x-\dfrac{1}{2}x<4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立.

②若 $(x+2)(x-a^2)>0$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，则 $a+2\geq a^2$，所以 $a\in[-1,2]$.

由①②得，$a\in\left(\dfrac{\ln 2-1}{4},2\right]$.

故存在实数 $a\in(-2,+\infty)$，使得 $g(x)<\dfrac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，且 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{\ln 2-1}{4},2\right]$.

同构法解零点问题与恒成立问题解答

18【解答】解：方法一：由 $f(x)=\dfrac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$ 可得 $f'(x)=\dfrac{x-1}{e^{x-1}}(\dfrac{e^{x-1}}{x}-a)$，

设 $y=\dfrac{e^{x-1}}{x}-a$，$x>0$，$a>0$，则 $y'=\dfrac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}$，令 $y'=0\Rightarrow x=1$，$\therefore y$ 在 $x\in(0,1)$ 单调递减，在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $y_{min}=y$（1）$=1-a$.

①当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)_{min}=f$（1）$=a-1-lna>0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内无零点；

②当 $a=1$ 时，f（1）$=a-1-lna=0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点；

③当 $a>1$ 时，令 $f'(x)=\dfrac{x-1}{e^{x-1}}(\dfrac{e^{x-1}}{x}-a)=0$，解得 $x=x_1$ 或 1 或 x_2，且 $0<x_1<1<x_2$，

此时 $f(x)$ 在 $x\in(0,x_1)$ 单减，$x\in(x_1$，$1)$ 单增，$x\in(1,x_2)$ 单减，$x\in(x_2$，$+\infty)$ 单增，

当 $x=x_1$ 或 x_2 时，$f(x)_{极小值}=0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有两个零点；

综合①②③知 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点 $\Rightarrow a\geqslant 1$.

方法二：由题意可得

$e^{-x+1+ln(ax)}=ln(ax)-x+2$，即 $e^{-x+1+ln(ax)}-[-x+1+ln(ax)]-1=0$，

因为 $e^x\geqslant x+1$ 当 $x=0$ 时等号成立，

所以 $-x+1+ln(ax)=0$，即 $ax=e^{x-1}$，

$a=\dfrac{e^{x-1}}{x}$，令 $g(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1}{e}\times\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，

易知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，在 $(1,+\infty)$ 上单增，所以 $g(x)\geqslant g$（1）$=1$，

又 x 趋近于 0 和正无穷时，$g(x)$ 趋近于正无穷，

所以 $a\geqslant 1$.

19.【解答】解：（1）函数 $f(x)=ae^x-ln(x+2)+lna-2$，则 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,+\infty)$，

且 $f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x+2}$，因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，

所以 $f'(0)=0$，即 $a-\dfrac{1}{2}=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$；

此时 $f'(x)=\dfrac{1}{2}e^x-\dfrac{1}{x+2}$，

所以 $f'(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

则当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

（2）若选①：因为 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $ae^x-ln(x+2)+lna-2\geqslant 0$ 恒成立，

整理可得 $e^{x+lna}+x+lna\geqslant ln(x+2)+x+2$ 恒成立，即 $e^{x+lna}+x+lna\geqslant ln(x+2)+e^{ln(x+2)}$ 恒成立，

令 $h(x)=e^x+x$，则 $h(x+lna)\geqslant h(ln(x+2))$ 恒成立，因为 $h'(x)=e^x+1>0$ 恒成立，

则 $h(x)$ 为单调递增函数，所以 $x+lna\geqslant ln(x+2)$ 恒成立，即 $lna\geqslant ln(x+2)-x$ 恒成立，

令 $\varphi(x)=ln(x+2)-x$，$x<-2$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+2}-1=-\dfrac{x+1}{x+2}$，

当 $-2<x<-1$ 时，$\varphi'(x)>0$，则 $\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x>-1$ 时，$\varphi'(x)<0$，则 $\varphi(x)$ 单调递减，

所以 $\varphi(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，即最大值 $\varphi(-1)=1$，

故 $lna\geqslant -1$，解得 $a\geqslant e$，所以 a 的取值范围为 $[e$，$+\infty)$；

若选②：因为 $f(x)$ 仅有两个零点，即 $ae^x-ln(x+2)+lna-2=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有两个根，

整理可得 $e^{x+lna}+x+lna=ln(x+2)+x+2$，即 $e^{x+lna}+x+lna=ln(x+2)+e^{ln(x+2)}$，

令 $h(x)=e^x+x$，则 $h(x+lna)=h(ln(x+2))$，因为 $h'(x)=e^x+1>0$ 恒成立，则 $h(x)$ 为单调递增函数，

所以 $x+lna=ln(x+2)$，即 $lna=ln(x+2)-x$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有两个根，

令 $\varphi(x)=ln(x+2)-x$，$x<-2$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+2}-1=-\dfrac{x+1}{x+2}$，

当 $-2<x<-1$ 时，$\varphi'(x)>0$，则 $\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x>-1$ 时，$\varphi'(x)<0$，则 $\varphi(x)$ 单调递减，

所以 $\varphi(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，即最大值 $\varphi(-1)=1$，

要想 $lna=ln(x+2)-x$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有两个根，只需 $lna<1$，解得 $0<a<e$，

所以 a 的取值范围为 $(0,e)$.

20.解：（1） $g(x)=\dfrac{a}{2}x^2+x\cos x-\sin x$，$x\in(0$，$\dfrac{\pi}{2}]$，所以 $g'(x)=x(a-\sin x)$，

当 $a\geqslant1$ 时，$a?\sin x\geqslant0$，所以 $g(x)$ 在 $(0$，$\dfrac{\pi}{2}]$ 单调递增，又因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0$，$\dfrac{\pi}{2}]$ 上无零点；

当 $0<a<1$ 时，$\exists x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $\sin x_0=a$，所以 $g(x)$ 在 $(x_0$，$\dfrac{\pi}{2}]$ 单调递减，在 $(0,x_0)$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$，$g(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{a\pi^2}{8}-1$，所以若 $\dfrac{a\pi^2}{8}-1>0$，即 $a>\dfrac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\dfrac{\pi}{2}]$ 上无零点，

若 $\dfrac{a\pi^2}{8}?1\leqslant0$，即 $0<a\leqslant\dfrac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\dfrac{\pi}{2}]$ 上有一个零点，

当 $a\leqslant0$ 时，$g'(x)=a-x\sin x<0$，$g(x)$ 在 $(0$，$\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $(0$，$\dfrac{\pi}{2}]$ 上无零点，

综上当 $0<a\leqslant\dfrac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\dfrac{\pi}{2}]$ 上有一个零点；

（2）由 $xe^{x-a}=f(x)-\dfrac{a}{2}x^2+ax-1(x>0)$，即 $xe^{x-a}=xlnx+ax$，即 $e^{x-a}=lnx+a$，则有 $e^{x-a}+(x-a)=x+lnx$，

令 $h(x)=x+lnx$，$x>0$，则 $h(e^{x-a})=e^{x-a}+(x-a)$，$h'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

所以 $e^{x-a}=x$，则有 $x-a=lnx$，即 $a=x-lnx$，$x>0$，

因为关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\dfrac{a}{2}x^2+ax-1$ 有两个不同的实数解，

则方程 $a=x-lnx$，$x>0$ 有两个不同的实数解，

令 $\varphi(x)=x-lnx$，则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，

所以函数 $\varphi(x)=x-lnx$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

所以 $\varphi(x)_{min}=\varphi$（1）$=1$，

当 $x\to0$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，

所以$\{a\mid a>1\}$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题答案 12

21.（1）当$a=1$时，$f(x)=e^x-ln(x+1)-1$，$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$，$x>-1$，

显然$f'(x)$在$(-1,+\infty)$单调递增，且$f'(0)=0$，

$\therefore$当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x>0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

$\therefore f(x)$在$x=0$处取得极小值$f(0)=0$，无极大值.

（2）函数$f(x)$有两个零点，即$f(x)=0$有两个解，即$ae^x+ln(ae^x)=ln(x+1)+(x+1)$有两个解，

设$h(t)=t+lnt$，则$h'(t)=1+\dfrac{1}{t}>0$，$h(t)$单调递增，

$\therefore ae^x=x+1(x>-1)$有两个解，即$a=\dfrac{x+1}{e^x}(x>-1)$有两个解.

令$s(x)=\dfrac{x+1}{e^x}(x\geqslant-1)$，则$s'(x)=-\dfrac{x}{e^x}$，

当$x\in(-1,0)$时，$s'(x)>0$，$s(x)$单调递增；当$x\in(0,+\infty)$时，$s'(x)<0$，$s(x)$单调递减.

$\because s(-1)=0$，$s(0)=1$，当$x>0$时$s(x)>0$，

$\therefore 0<a<1$.

22.解：（1）若选①：$m=\dfrac{1}{2}$，则函数$f(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{2}x^2$，

所以$f'(x)=e^{x-1}-x$，$f''(x)=e^{x-1}-1$，

因为$f''(x)$单调递增，且f''（1）$=0$，

所以$f'(x)$在$(0,1)$上单调递减，$(1,+\infty)$上单调递增，

则$f'(x)\geqslant f'$（1）$=0$，

故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以不存在极小值点；

若选②：$m=1$，则$f(x)=e^{x-1}-x^2$，

所以$f'(x)=e^{x-1}-2x$，$f''(x)=e^{x-1}-2$，

由$f''(x)$单调递增，且$f''(1+ln2)=0$，

所以$f'(x)$在$(0,1+ln2)$上单调递减，在$(1+ln2,+\infty)$上单调递增，

故$f'(x)\geqslant f'(1+ln2)=-2ln2<0$，

又f'（4）$=e^3-8>0$，

所以存在极小值点$x_0\in(1+ln2,4)$.

（2）令$g(x)=0$，则$e^{x-1}-mx^2+mxln(mx)=0$，

又$mx>0$，

所以$\dfrac{e^{x-1}}{mx}-x+ln(mx)=\dfrac{e^{x-1}}{e^{ln(mx)}}-x+ln(mx)=e^{x-ln(mx)-1}-[x-ln(mx)]=0$，
令$t=x-ln(mx)$，
故$e^{t-1}-t=0$有解，

设$h(t)=e^{t-1}-t$，

则$h'(t)=e^{t-1}-1$，令$h'(t)=0$，解得$t=1$，

所以$h(t)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，
又h（1）$=0$，

所以$h(t)=e^{t-1}-t$有唯一的零点$t=1$，

若$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在零点，
即$1=x-ln(mx)$在$(0,+\infty)$上有解，
整理可得$1+lnm=x-lnx$，
令$l(x)=x-lnx$，

则$l'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，令$l'(x)=0$，解得$x=1$，
所以$l(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，
故$l(x)\geqslant l$（1）$=1$，
所以$1+lnm\geqslant 1$，
解得$m\geqslant 1$，
所以m的取值范围为$[1,\ +\infty)$．

23.解析　$a\left(e^{ax}+1\right)\geqslant 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\Leftrightarrow ax\left(e^{ax}+1\right)\geqslant\left(x^2+1\right)\ln x^2\Leftrightarrow\left(e^{ax}+1\right)\ln e^{ax}\geqslant\left(x^2+1\right)\ln x^2$，

令$f(x)=(x+1)\ln x$，则$f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}$，$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

易知$f'(x)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

所以$f'(x)\geqslant f'(1)=2>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增.

则$\left(e^{ax}+1\right)\ln e^{ax}\geqslant\left(x^2+1\right)\ln x^2\Leftrightarrow f\left(e^{ax}\right)\geqslant f\left(x^2\right)$

$\Leftrightarrow e^{ax}\geqslant x^2\Leftrightarrow ax\geqslant 2\ln x\Leftrightarrow a\geqslant\dfrac{2\ln x}{x}$，

令$g\left(x\right)=\dfrac{2\ln x}{x}$，则$g'\left(x\right)=\dfrac{2\left(1-\ln x\right)}{x^2}$

当$x\in\left(0,e\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，当$x\in\left(e,+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)<0$

所以函数$g\left(x\right)$在$\left(0,e\right)$上单调递增，在$\left(e,+\infty\right)$上单调递减

所以$g\left(x\right)_{\max}=g\left(e\right)=\dfrac{2}{e}$，所以$a\geqslant\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)_{\max}=\dfrac{2}{e}$，

所以实数a的最小值为$\dfrac{2}{e}$.

24.解析 $f(x)=\mathrm{e}^x-a\ln(ax-a)+a>0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}\mathrm{e}^x>\ln a(x-1)-1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-\ln a}-\ln a>\ln(x-1)-1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-\ln a}+x-\ln a>\mathrm{e}^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^x+x$，则 $g'\left(x\right)=\mathrm{e}^x+1>0$，所以函数 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

则原命题又等价于

$g(x-\ln a)>g(\ln(x-1)) \Leftrightarrow x-\ln a>\ln(x-1) \Leftrightarrow \ln a<x-\ln(x-1)$.

由于 $x-\ln(x-1)\geqslant x-(x-2)=2$，所以 $\ln a<2$，即得 $0<a<\mathrm{e}^2$.

25.解析 $2a\mathrm{e}^{2x}-\ln x+\ln a\geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2a\mathrm{e}^{2x}\geqslant \ln\frac{x}{a} \Leftrightarrow 2x\mathrm{e}^{2x}\geqslant \frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}(x>0)$

$\Leftrightarrow 2x+\ln 2x\geqslant \ln\frac{x}{a}+\ln\left(\ln\frac{x}{a}\right)(x>a)$.

设 $f\left(x\right)=x+\ln x$，则 $f'\left(x\right)=1+\frac{1}{x}>0$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增

所以由 $f(2x)\geqslant f\left(\ln\frac{x}{a}\right)$，得 $2x\geqslant \ln\frac{x}{a}$，即 $a\geqslant \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}$ 恒成立.

令 $g(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}$，则 $g'(x)=\frac{1-2x}{\mathrm{e}^{2x}}$，

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'\left(x\right)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$

所以函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减

所以 $g\left(x\right)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}}$，所以实数 a 的最小值为 $\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

易得 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\mathrm{e}}$，所以实数 a 的最小值为 $\frac{1}{2\mathrm{e}}$

26.证明:当 $a\geq\frac{1}{e}$ 时，$f(x)\geq\frac{e^x}{e}-\ln x-1$，所以只需证明 $\frac{e^x}{e}-\ln x-1\geq 0$.

由于 $\frac{e^x}{e}-\ln x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq e\ln ex \Leftrightarrow xe^x\geq ex\ln ex \Leftrightarrow xe^x\geq e^{\ln ex}\ln ex$

令 $g(x)=xe^x$，由 $g'(x)=e^x(x+1)>0$)知 $g\left(x\right)$ 为增函数，又易证 $x\geq lnex=\ lnx+1$，

所以 $g(x)\geq g(\ln ex)$，即 $xe^x\geq e^{\ln ex}\ln ex$ 成立.故当 $a\geq\frac{1}{e}$ 时，$f\left(x\right)\geq 0$.

27．解析：$f\left(x\right)\geq 1+x+\ln x \Leftrightarrow x\left(\mathrm{e}^{2x}-a\right)\geq 1+x+\ln x$

$\Leftrightarrow e^{2x+\ln x}-1-x-\ln x \geq ax$

$\Leftrightarrow a \leq \dfrac{e^{2x+\ln x}-1-x-\ln x}{x}$.

由于 $\dfrac{e^{2x+\ln x}-1-\ln x}{x} \geq \dfrac{2x+\ln x+1-1-x-\ln x}{x}=1$，

当且仅当 $2x+\ln x=0$ 等号成立，

所以 $a \leq 1$，即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, 1\right]$.