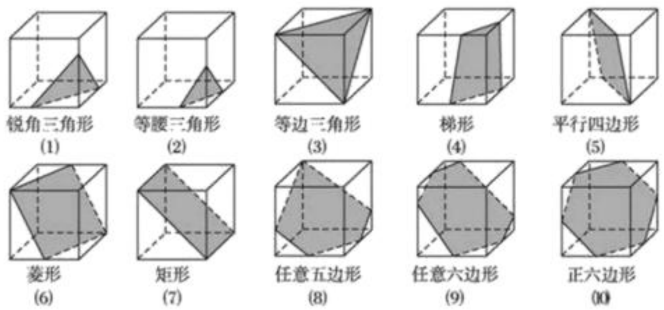
湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——立体几何复习 1——截面、截线、轨迹

知识点 1 截面定义

在立体几何中，截面是指用一个平面去截一个几何体（包括圆柱，圆锥，球，棱柱，棱锥、长方体，正方体等等），得到的平面图形，叫截面。立体图形的截面方式，分别为横截、竖截、斜截。

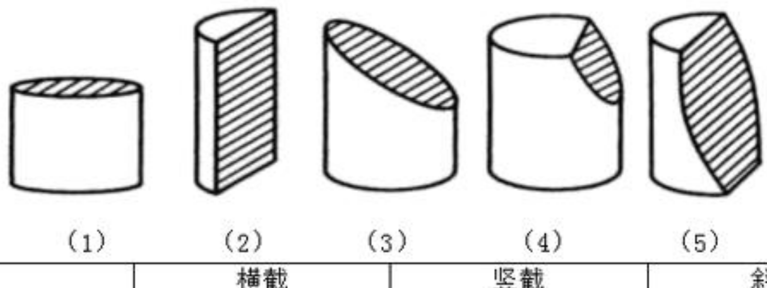
知识点 2 正六面体的基本斜截面



	横截	竖截	斜截
正六面体	正方形	正方形／矩形	如上图所示

知识点 3 圆柱体的基本截面

正六面体斜截面是不会出现以下几种图形：直角三角形、钝角三角形、直角梯形、正五边形。



	横截	竖截	斜截
圆柱体	圆形	矩形	如图（3）、（4）、（5）

1. 【多选】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别是棱 AB,CC_1 的中点，则下列说法正确的是（　　）

A． 过三点 B、E、F 的平面截正方体的截面图形是矩形　　**B．** 过三点 B_1、E、F 的平面截正方体的截面图形是等腰梯形

C． AC // 平面 D_1EF　　**D．** 若 $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，则平面 $B_1BP\perp$ 平面 D_1EF

2. 在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 AB，C_1D_1 的中点，G 为棱 CC_1 靠近 C 点的三等分点，用过点 E，F，G 的平面截正方体，则截面图形的周长为 **A．** $\frac{13+2\sqrt{2}}{3}$　**B．** $\frac{10+2\sqrt{2}}{3}$　**C．** $\frac{13+2\sqrt{2}}{6}$　**D．** $\frac{14}{3}$

3.【多选】在棱长为 **1** 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，***M*** 为底面 ***ABCD*** 的中心，$\overrightarrow{D_1Q}=\lambda\overrightarrow{D_1A_1}$，$\lambda\in(0,1)$，***N*** 为线段 ***AQ*** 的中点，则下列命题中正确的是（　　）

A．*CN* 与 ***QM*** 共面　　　　　　　　**B．**三棱锥 $A-DMN$ 的体积跟 λ 的取值有关

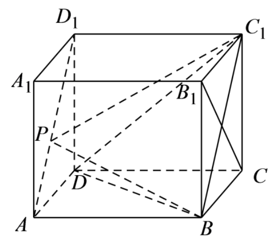
C．当 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 时，过 ***A***，***Q***，***M*** 三点的平面截正方体所得截面的周长为 $\dfrac{4\sqrt{2}+2\sqrt{13}}{3}$　　**D．**$\lambda=\dfrac{1}{4}$ 时，$AM\perp QM$

4．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 **1**，点 ***P*** 是线段 AD_1 上的动点，给出以下四个结论：

① $PC_1\perp B_1C$；②三棱锥 B_1-PBC_1 体积为定值；

③当 $AP=\dfrac{1}{2}PD_1$ 时，过 ***P***，***D***，***C*** 三点的平面与正方体表面形成的交线长度之和为 **3**；

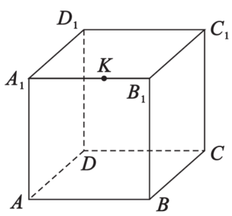
④若 ***Q*** 是对角线 AC_1 上一点，则 ***PQ***＋***QC*** 长度的最小值为 $\dfrac{4}{3}$.



其中正确的序号是______.

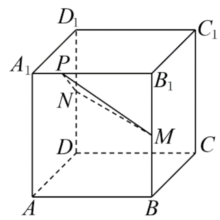
5.已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为边长为 **2** 的正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD, PA=2$，过点 ***A*** 作平面 α 与 PC 垂直，则 PA 与 α 所成角的正切值为_________；α 截此四棱锥的截面面积为_______.

6.如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的一个截面经过顶点 A,C 及棱 A_1B_1 上一点 K，截面将正方体分成体积比为 $2:1$ 的两部分，则 $\dfrac{A_1K}{KB_1}$ 的值为（　　）



A．$\dfrac{2}{3}$　　　　**B．**$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

C．$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　**D．**$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$



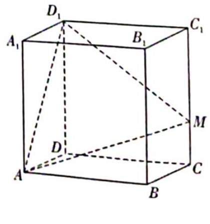
7.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，***M***、***N*** 分别是棱 BB_1、DD_1 的中点，***P*** 是棱 A_1B_1 上靠近 A_1 的四等分点，过 ***M***、***N***、***P*** 三点的平面 α 交棱 BC 于 ***Q***，记 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则 $\lambda=$________. 若平面 α 将正方体截成两部分体积分别为 V_1、$V_2\left(V_1\geq V_2\right)$，则 $\dfrac{V_1}{V_2}=$_________.

8.在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle PCB=\angle ABC=90^\circ$，***PC*=2**，***AB*=1**，***BC*=3**，$AP=\sqrt{14}$，过 ***BC*** 中点 ***D*** 作四面体外接球的截面，则过点 ***D*** 的最大截面与最小截面的面积和为______.

9.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，设 P 为 BC 中点，Q 为线段 CC_1 上的动点，$CQ=t(0<t\leq 2)$，过点 A，P，Q 的平面截该正方体所得截面记为 S. 以下结论正确的有___________.（填上所有正确的说法的序号）

①S 不可能是菱形；②S 可能是五边形；③ $t=1$ 时，S 的面积为 $\dfrac{9}{2}$；④ $t=\dfrac{3}{2}$ 时，S 将棱 C_1D_1 截成长度比为 $2:1$ 的两部分.

10.【多选】已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 **2**（如图所示），点 ***M*** 为线段 CC_1（含端点）上的动点，由点 ***A***，D_1，***M*** 确定的平面为 α，则下列说法正确的是（　　）



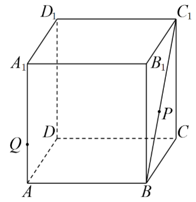
A．平面 α 截正方体的截面始终为四边形

B．点 ***M*** 运动过程中，三棱锥 A_1-AD_1M 的体积为定值

C．平面 α 截正方体的截面面积的最大值为 $4\sqrt{2}$

D． 三棱锥 A_1-AD_1M 的外接球表面积的取值范围为 $\left[\frac{41}{4}\pi,12\pi\right]$

11.【多选】在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，点 P 在线段 BC_1 上运动，点 Q 在线段 AA_1 上运动，则下列说法中正确的有(　　)



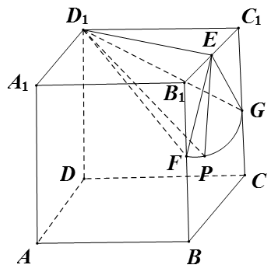
A． 当 P 为 BC_1 中点时，三棱锥 P- ABB_1 的外接球半径为 $\sqrt{2}$

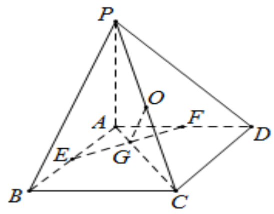
B． 线段 PQ 长度的最小值为 2

C． 三棱锥 D_1-APC 的体积为定值

D． 平面 BPQ 截该正方体所得截面可能为三角形、四边形、五边形

12. 已知直四棱柱 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD$=60°. 以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为________.

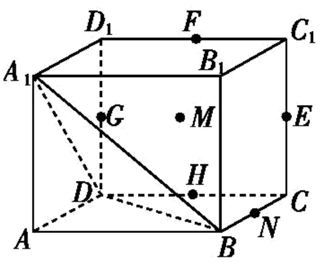




13. 在四棱锥 $P—ABCD$ 中，$PA\perp$ 面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 PA=2．若点 E、F 分别为 AB, AD 的中点，则直线 EF 被四棱锥 $P—ABCD$ 的外接球所截得的线段长为_____.

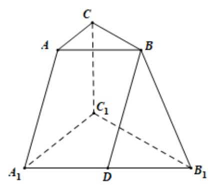
14. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $\sqrt{3}$，过顶点 B,D,C_1 的平面为 α，点 P 是平面 α 内的动点，$A_1P=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，则点 P 的轨迹长度等于（　　　）A. π　B. $\sqrt{2}\pi$　　C. $\sqrt{3}\pi$　D. 2π

15.如图，在边长为 a 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H、N 分别是 CC_1、C_1D_1、DD_1、CD、BC 的中点，M 在四边形 $EFGH$ 边上及其内部运动，若 MN∥面 A_1BD，则点 M 轨迹的长度是（　　）



A． $\sqrt{3}a$　　　　**B．** $\sqrt{2}a$　　　　**C．** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$　　　　**D．** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$

16.在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，点 D 在 A_1B_1 上，且 $AA_1//BD$，点 M 是三角形 $A_1B_1C_1$ 内（含边界）的一个动点，且有平面 BDM//平面 A_1ACC_1，则动点 M 的轨迹是（　　）



A． 三角形 $A_1B_1C_1$ 边界的一部分　　　　**B．** 一个点

C． 线段的一部分　　　　**D．** 圆的一部分

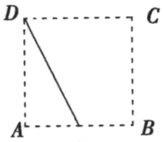
17.在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，Q 是正方形 B_1BCC_1 内的动点，$A_1Q\perp BC_1$，则 Q 点的轨迹是（　　）

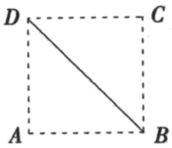
A．点 B_1　　B．线段 B_1C　　C．线段 B_1C_1　　D．平面 B_1BCC_1

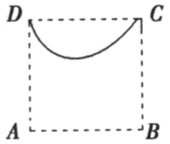
18.已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为底面 $ABCD$ 内一点，若 P 到棱 CD，A_1D_1 距离相等的点，则点 P 的轨迹是（　　）

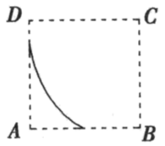
A．直线　　B．椭圆　　C．抛物线　　D．双曲线

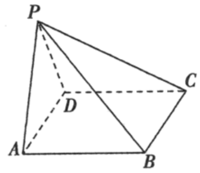
19.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为正三角形，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，M 为正方形 $ABCD$ 内（包括边界）的一个动点，且满足 $MP=MC$．则点 M 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹为（　　）

A. 

B. 

C. 

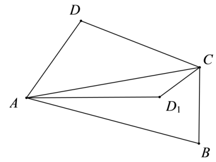
D. 



20.如图，将四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ADC$ 沿着 AC 翻折到 AD_1C，则翻折过程中线段 DB 中点 M 的轨迹是（　　）

A．椭圆的一段　　B．抛物线的一段

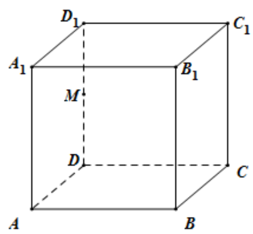
C．双曲线的一段　　D．一段圆弧



21.已知△ABC 的边长都为 2，在边 AB 上任取一点 D，沿 CD 将△BCD 折起，使平面 BCD⊥平面 ACD．在平面 BCD 内过点 B 作 BP⊥平面 ACD，垂足为 P，那么随着点 D 的变化，点 P 的轨迹长度为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．π

22.【多选】已知正方体 $ABC-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，M 为 DD_1 的中点，N 为 $ABCD$ 所在平面上一动点，则下列命题正确的是（　　）



A．若 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，则点 N 的轨迹为圆

B．若 $MN=4$，则 MN 的中点 P 的轨迹所围成图形的面积为 2π

C．若点 N 到直线 BB_1 与直线 DC 的距离相等，则点 N 的轨迹为抛物线

D．若 D_1N 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，则点 N 的轨迹为双曲线

23.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，点 P 在矩形 ACC_1A_1 区域(包含边界)内运动，且 $\angle PBD=45°$，则动点 P 的轨迹长度为（　　）A．π　B．$\sqrt{2}\pi$　C．2π　D．$2\sqrt{2}\pi$

24.正四面体 $ABCD$ 的棱长为 12，在平面 BCD 内有一动点 P，且满足 $AP=6\sqrt{3}$，则 P 点的轨迹是__________；设直线 AP 与直线 BC 所成的角为 θ，则 $\cos\theta$ 的取值范围为__________．

答案 1.AD　2.B.　3.AC　4.①②④．　5.$\frac{\sqrt{2}}{2}$；$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．　6.C　7.$\frac{3}{4}$；1.　8.$\frac{23}{4}\pi$　9.②③④　10.BCD　11.ABC．

12. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ .13. B　14. $\sqrt{6}$．　15.D　16.C　17.B　18.D　19.A　20.D　21.C　22.ACD　23.B　24.圆　$\left[0,\frac{1}{3}\right]$

1. 【多选】在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F分别是棱AB,CC_1的中点，则下列说法正确的是（　　）

A．过三点B、E、F的平面截正方体的截面图形是矩形

B．过三点B_1、E、F的平面截正方体的截面图形是等腰梯形

C．$AC//$平面D_1EF

D．若$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，则平面$B_1BP\perp$平面$D_1EF$

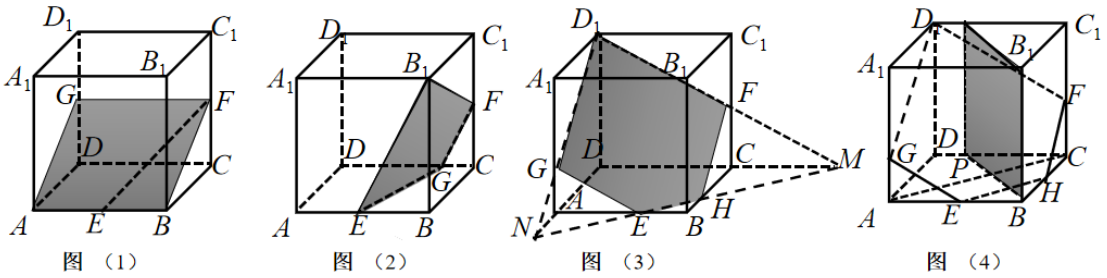
【解析】对于 **A**：如图（**1**）所示，因为线段BE在棱AB上，过F作棱CD的平行线，交DD_1于点G，显然G为DD_1的中点，因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GF}$，所以平行四边形$ABFG$即为截面，因为$AB\perp BF$，所以截面图形是矩形，故 A 正确；

对于 **B**：如图（**2**）所示，作CD中点H，连接C_1H，可知$\overrightarrow{C_1H}=\overrightarrow{B_1E}$，作$CH$中点$G$，连接$FG$，在$\triangle C_1HC$中，由三角形中位线定理可知$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1H}$，所以$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1E}$，所以$EGFB_1$即为截面，由面面平行的性质定理可知$EB_1$平行$GF$，且$GE\neq B_1F$，所以$EGFB_1$是梯形，但不等腰，故 **B** 错误；

对于 **C**：如图（**3**）所示，延长D_1F交DC延长线于点M，连接ME，交BC于点H，交DA于点N，连接D_1N，交AA_1于点G，五边形D_1GEHF为过三点D_1,E,F的平面截正方体的截面，其中G为AA_1的四等分点，且靠近 A 点，其中H为BC的三等分点，且靠近B点，由于直线CA与EH相交，而$EH\subset$面D_1EF，所以CA不平行平面D_1EF，故 **C** 错误；

对于 **D**：如图（**4**）所示，当$DP=\frac{1}{3}DC$时，由 ***E*** 为 **AB** 中点，其中H为靠近B的BC的三等分点，所以$\frac{CP}{HB}=\frac{BC}{BE}$，所以$\triangle BEH\sim\triangle CBP$,所以$\angle BHE=\angle CPB$.因为$\angle CBP+\angle CPB=90^\circ$，所以$\angle BHE+\angle CBP=90^\circ$，所以$EH\perp BP$.在正方体中，$BB_1\perp$面$ABCD$，所以$BB_1\perp EH$.因为$BB_1\cap BP=B$,所以$EH\perp$面$BB_1P$.由面面垂直的判定定理，所以平面

$B_1BP\perp$平面D_1EF.故 D 正确.



故选：AD

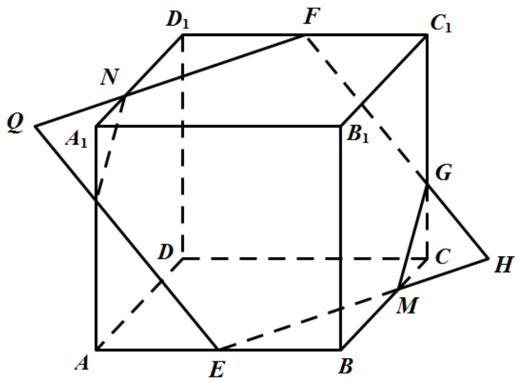
2.在棱长为1**的正方体**$ABCD-A_1B_1C_1D_1$**中，**E**，**F**分别为棱**AB**，**C_1D_1**的中点，**G**为棱**CC_1**靠近**C**点的三等分点，用过点**E**，**F**，**G**的平面截正方体，则截面图形的周长为**

A．$\dfrac{13+2\sqrt{2}}{3}$　　**B．**$\dfrac{10+2\sqrt{2}}{3}$　　**C．**$\dfrac{13+2\sqrt{2}}{6}$　　**D．**$\dfrac{14}{3}$

【解析】连接 FG 并延长交 DC 延长线于点 H，连接 EH 交 BC 于点 M,连接 GM，取A_1D_1**靠近点**A_1**的三等分点 N，连接 FN 并延长交**B_1A_1**的延长线于点 Q,连接 QE 交**A_1**A 于点 P,连接 NP，则六边形 EMGFNP 即为过点**E**，**F**，**G**的截面，**由G为棱CC_1靠近C点的三等分点，可得$\dfrac{CH}{FC_1}=\dfrac{1}{2}$**,即 CH=**$\dfrac{1}{4}$**,由**$\dfrac{CH}{BE}=\dfrac{1}{2}$**，知点 M 为靠近点 C 的三等分点，即 CM=**$\dfrac{1}{3}$**，由勾股定理得 GM=**$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$**=NP,**

FG=PE=$\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{5}{6}$**,同理得 EM=FN=**$\dfrac{5}{6}$**，则截面图形的周长为**$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{5}{6}\times 4=\dfrac{10+2\sqrt{2}}{3}$，

故选 B.



3.【多选】在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$**中，*M* 为底面 *ABCD* 的中心，**$\overrightarrow{D_1Q}=\lambda\overrightarrow{D_1A_1}$**，**$\lambda\in(0,1)$**，*N* 为线段 *AQ* 的中点，则下列命题中正确的是（　　）**

A．*CN* 与 *QM* 共面

B．三棱锥$A-DMN$**的体积跟**λ**的取值有关**

C．当$\lambda=\dfrac{1}{3}$**时，过 *A*，*Q*，*M* 三点的平面截正方体所得截面的周长为**$\dfrac{4\sqrt{2}+2\sqrt{13}}{3}$

D．$\lambda=\dfrac{1}{4}$**时，**$AM\perp QM$

【解析】连接 AC,AQ,QM,CN,MN ,在 $\triangle AQC$ 中，$MN//QC$,所以 **CN** 与 **QM** 共面，故 **A** 对.

$\because V_{A-DMN}=V_{N-DMA}=\frac{1}{3}S_{\triangle DMA}\cdot\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{24}$，三棱锥 $A-DMN$ 的体积跟 λ 的取值无关，故 **B** 错.

当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，过 **A**，**Q**，**M** 三点的正方体的截面 $ACEQ$ 是等腰梯形，

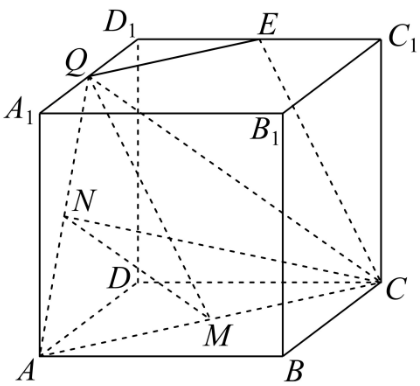
$AC=\sqrt{2},QE=\frac{1}{3}AC=\frac{\sqrt{2}}{3},CE=AQ=\sqrt{CC_1^{\ 2}+\left(\frac{2}{3}C_1D_1\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$ 所以截面的周长为

$AC+CE+EQ+QA=\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{13}}{3}$,故 **C** 对.

当 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时，$CQ=\sqrt{CD_1^{\ 2}+\left(QD_1\right)^2}=\sqrt{2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{4},AQ=\sqrt{AA_1^{\ 2}+\left(\frac{3}{4}A_1D_1\right)^2}=\frac{5}{4}$ $\because AQ\neq CQ,M$ 是中点，所以

AM,QM 不垂直，故 **D** 错误.

故选：**AC**



4．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 **1**，点 ***P*** 是线段 AD_1 上的动点，给出以下四个结论：

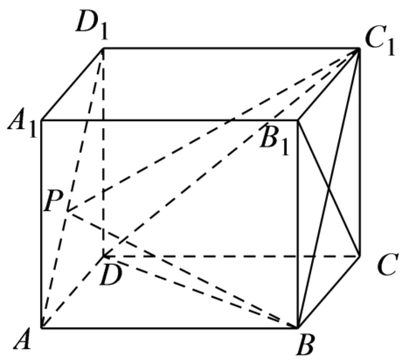
①$PC_1\perp B_1C$；

②三棱锥 B_1-PBC_1 体积为定值；

③当 $AP=\frac{1}{2}PD_1$ 时，过 ***P***，***D***，***C*** 三点的平面与正方体表面形成的交线长度之和为 **3**；

④若 ***Q*** 是对角线 AC_1 上一点，则 ***PQ***＋***QC*** 长度的最小值为 $\frac{4}{3}$.

其中正确的序号是______.



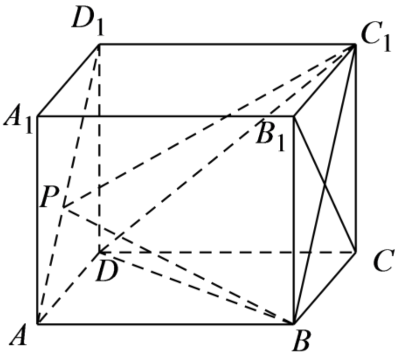
【解析】由 $AB\perp$平面 BCC_1B_1， $B_1C\subset$平面 BCC_1B_1，得 $AB\perp B_1C$，

又 $B_1C\perp BC_1$． $AB\cap BC_1=B$， $AB,BC_1\subset$平面 ABC_1D_1，

所以 $B_1C\perp$平面 ABC_1D_1， $PC_1\subset$平面 ABC_1D_1，所以 $B_1C\perp PC_1$，①正确；

正方体中，平面 $ADD_1A_1//$平面 BCC_1B_1， $P\in$平面 ADD_1A_1，因此 P 到平面 BB_1C_1 的距离不变，$\triangle BB_1C_1$ 的面积不变，

所以三棱锥 $P-BB_1C_1$ 的体积不变，即三棱锥 B_1-PBC_1 体积为定值，②正确；



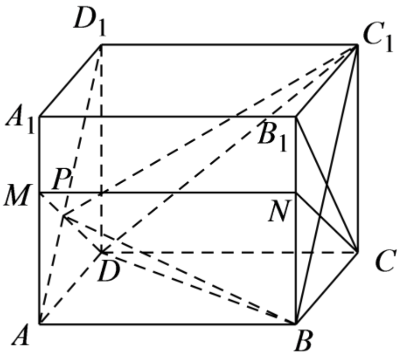
由于正方体的对面平行，因此截面 PDC 与正方体的表面的交线相互平行，

连结 DP 延长交 AA_1 于 M，过 M 在 $MN // AB // CD$ 交 BB_1 于 N，连结 NC，

则 $NC // DM$，四边形 $CDMN$ 是过 **P，D，C** 三点的平面与正方体表面形成的交线，

正方体棱长为 **1**， $CD=MN=1$， $CN=DM=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

因此四边形 $CDMN$ 周长为 $2+\sqrt{5}>3$，③错误；



正方体中，易知 $\triangle AD_1C_1$ 与 $\triangle ACC_1$ 是两个全等的直角三角形， $C_1D_1=C_1C=1$， $AC_1=\sqrt{3}$， $AC=AD_1=\sqrt{2}$，

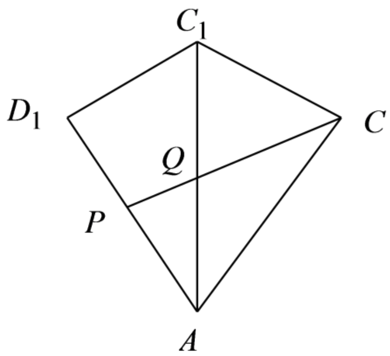
把这两个三角形沿 AC_1 摊平形成一个平面四边形 ACC_1D_1，如下图，

当 $CP\perp AD_1$， Q 是 CP 与 AC_1 的交点时， $PQ+QC$ 最小.

$\cos\angle CAC_1=\cos\angle D_1AC_1=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，

$\cos\angle CAP=2\times(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2-1=\frac{1}{3}$， $\sin\angle CAP=\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$CP=AC\sin\angle CAP=\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{3}$，④正确.



故答案为：①②④.

5.已知四棱锥$P-ABCD$的底面为边长为 **2** 的正方形，$PA\perp$底面$ABCD, PA=2$，过点 **A** 作平面α与PC垂直，则PA与α所成角的正切值为_________；α截此四棱锥的截面面积为_______.

【解析】作$AM\perp PC$，垂足为M，作$MH\perp PC$，$MF\perp PC$，连接AF、AH，则平面$AFMH$即为平面α，

因为$PC\perp$平面$AFMH$，所以$\angle PAM$即为PA与α所成角，

底面$ABCD$是边长为 2 的正方形，所以$AC=2\sqrt{2}$，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=2$，所以$PC=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$，

由等面积法可得$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\cdot AM$，解得$AM=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

由对称性可得到$FH//BD$，在$\triangle PAC$中，$\frac{PM}{PA}=\frac{PA}{PC}$，所以$PM=\frac{PA^2}{PC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以$\tan\angle PAM=\frac{PM}{AM}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又$PC=2\sqrt{3}$，$PD=2\sqrt{2}$，$CD=2$，所以$PC^2=PD^2+DC^2$，故$\angle PDC=90°$，

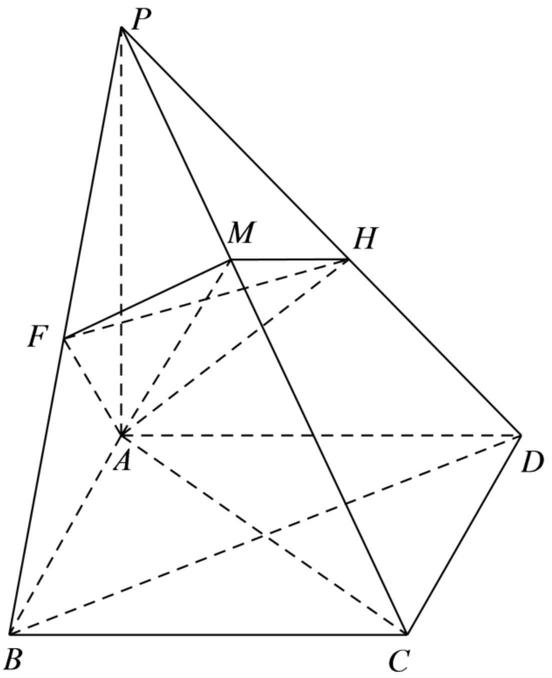
在$\triangle PDC$中，$\frac{PH}{PC}=\frac{PM}{PD}$，所以$PH=\frac{PM\cdot PC}{PD}=\sqrt{2}$，

所以H为PD的中点，同理可得F为PB的中点，

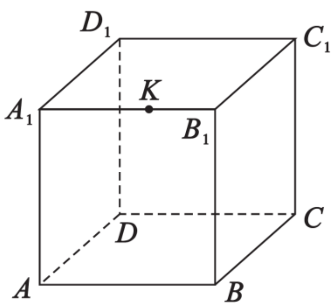
在$\triangle PBD$中，$\frac{FH}{BD}=\frac{1}{2}$，所以$FH=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$，

所以棱锥$P-ABCD$截平面α所得截面的面积为$S_{AFMH}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot FH=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$；$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



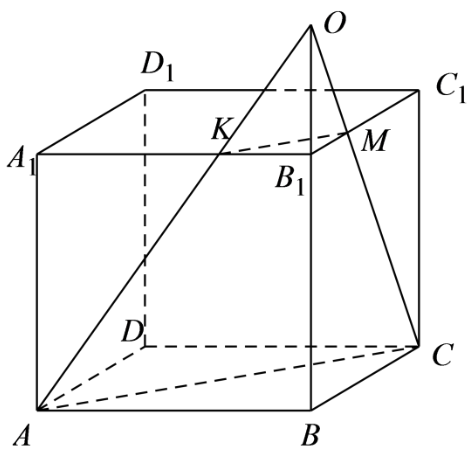
6.如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的一个截面经过顶点 A,C 及棱 A_1B_1 上一点 K，截面将正方体分成体积比为 $2:1$ 的两部分，则 $\frac{A_1K}{KB_1}$ 的值为（　　）



A． $\frac{2}{3}$　　**B．** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　　**C．** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　**D．** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

【解析】设正方体棱长为 **1**，$KB_1=x$，

如图所示，该截面把正方体分为几何体 $ABC-KB_1M$ 和另一几何体，



由面面平行的性质可知：$KM\ //AC$，

延长 AK,CM，相交于点 O，则 $O\in$ 平面 ABB_1A_1，且 $O\in$ 平面 BCC_1B_1，

又平面 $ABB_1A_1\bigcap$ 平面 $BCC_1B_1=BB_1$，

所以 O 在直线 BB_1 上，即 AK,CM,BB_1 三线共点，

所以几何体 $ABC-KB_1M$ 为三棱台，

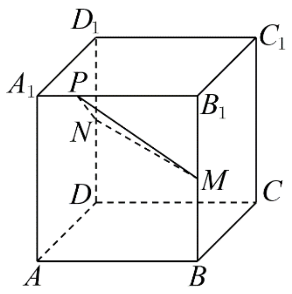
其中三棱台 $ABC-KB_1M$ 上底面积是 $\frac{1}{2}x^2$，下底面积为 $\frac{1}{2}$，高等于 **1**，

所以 $V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2+\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}x^2}\right)\times 1=\frac{1}{3}$，解得：$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

所以 $A_1K=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{A_1K}{KB_1}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

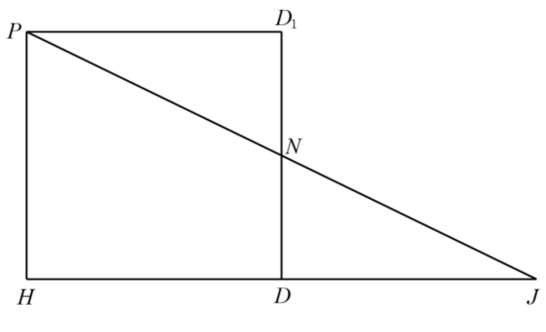
故选：**C**

7.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，***M***、***N*** 分别是棱 BB_1、DD_1 的中点，***P*** 是棱 A_1B_1 上靠近 A_1 的四等分点，过 ***M***、***N***、***P*** 三点的平面 α 交棱 BC 于 ***Q***，记 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则 $\lambda=$________．若平面 α 将正方体截成两部分体积分别为 V_1、$V_2\left(V_1\geq V_2\right)$，则 $\frac{V_1}{V_2}=$_________.

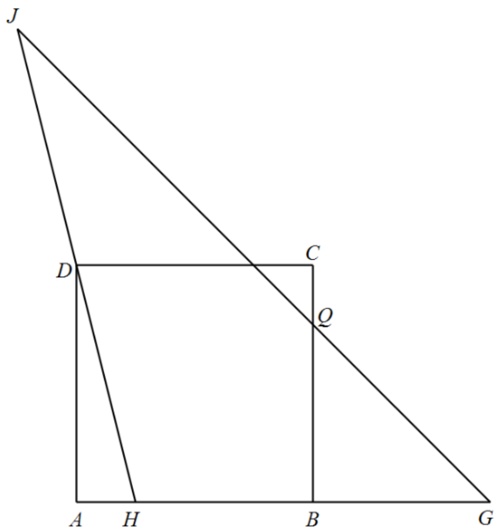


【解析】①过点 ***P*** 作 $PH\perp AB$，在平面 ABB_1A_1 内，延长 PM 和 AB 交于点 ***G***，设正方体棱长为 **4**，则 $BG=3$；

在平面 $PHDD_1$ 内，延长 PN 和 HD 交于点 ***J***，则 ***HD=DJ***：



在底面 $ABCD$ 内，连接 JG 交边 BC 于点 ***Q***：



$\cos\angle GHJ=-\cos\angle AHD=-\dfrac{AH}{DH}=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$，

在$\triangle GHJ$中，$HJ=2DH=2\sqrt{17}$，$GH=6$，

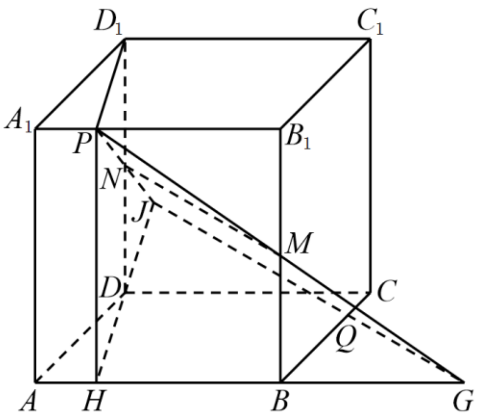
根据余弦定理得，

$GJ=\sqrt{HJ^2+GH^2-2HJ\cdot GH\cdot\cos\angle GHJ}=\sqrt{4\times17+36+2\times2\sqrt{17}\times6\times\dfrac{1}{\sqrt{17}}}=8\sqrt{2}$，

∴$\cos\angle BGQ=\dfrac{GH^2+GJ^2-HJ^2}{2GH\cdot GJ}=\dfrac{36+128-68}{2\times6\times8\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\angle BGQ=45°$，

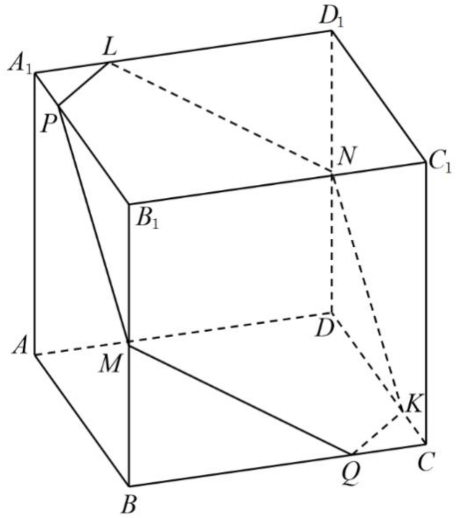
$\therefore\triangle BGQ$是等腰直角三角形，∴$BQ=BG=3$，

∴$\lambda=\dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{3}{4}$；



②如图，在平面CDD_1C_1作 ***NK*// *PM*** 交 ***CD*** 于 ***K***，则易知 ***K*** 为 ***CD*** 靠近 ***C*** 的四等分点；

由①知平面 ***α*** 于 ***BC*** 交点为 ***Q***，连接 ***KQ***，在平面$A_1B_1C_1D_1$作 ***PL*// *KQ***，则易知 ***L*** 是A_1D_1靠近A_1的四等分点，连接 ***LN***，则六边形$MPLNKQ$即为平面 ***α*** 截正方体的面得到的多边形，根据对称性可知$V_1=V_2$，故$\dfrac{V_1}{V_2}=1$．



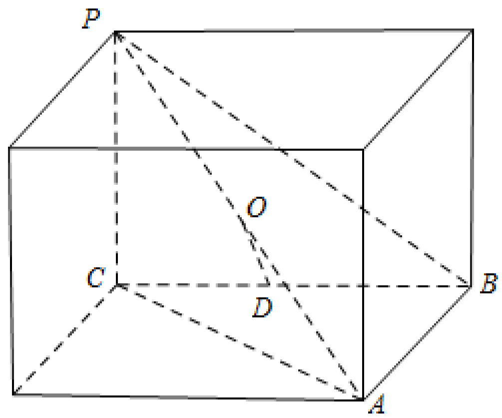
故答案为：$\frac{3}{4}$；**1**.

8.在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle PCB=\angle ABC=90°$ ，***PC*=2**，***AB*=1**，***BC*=3**，$AP=\sqrt{14}$，过 ***BC*** 中点 ***D*** 作四面体外接球的截面，则过点 ***D*** 的最大截面与最小截面的面积和为______.

【解析】由 $\angle ABC=90°$，***AB*=1**，***BC*=3** 得，$AC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

由于 $PC=2$ ，$AP=\sqrt{14}$，则 $AP^2=PC^2+AC^2$，

故 $PC\perp AC$ ，由此可将三棱锥 $P-ABC$ 中置于长宽高分别为 $3,1,2$ 的长方体中，如图示：



则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即为长方体的外接球，外接球半径为 $R=\frac{AP}{2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$ ，

过 ***BC*** 中点 ***D*** 作四面体外接球的截面，当截面过球心 ***O*** 时，截面圆面积最大，

最大值为 $\pi\times(\frac{\sqrt{14}}{2})^2=\frac{7\pi}{2}$ ；

当截面与 **OD** 垂直时，截面圆面积最小，而 $OD=\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，

故此时截面圆的半径为 $\sqrt{(\frac{\sqrt{14}}{2})^2-(\frac{\sqrt{5}}{2})^2}=\frac{3}{2}$ ，

则截面面积最小值为 $\pi\times(\frac{3}{2})^2=\frac{9\pi}{4}$，

故过点 ***D*** 的最大截面与最小截面的面积和为 $\frac{7\pi}{2}+\frac{9\pi}{4}=\frac{23\pi}{4}$，

故答案为：$\frac{23}{4}\pi$

9.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，设 P 为 BC 中点，Q 为线段 CC_1 上的动点，$CQ=t(0<t\le 2)$，过点 A，P，Q 的平面截该正方体所得截面记为 S. 以下结论正确的有__________.（填上所有正确的说法的序号）

①S 不可能是菱形；

②S 可能是五边形；

③ $t=1$时，S 的面积为$\frac{9}{2}$；

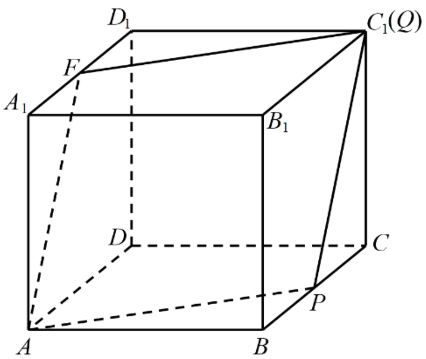
④ $t=\frac{3}{2}$时，S 将棱 C_1D_1 截成长度比为$2:1$的两部分.

【解析】①当 $t=2$时，Q 与 C_1 重合，取 A_1D_1 的中点 F，连接 AF，

根据正方体的性质可知 $AF//PC_1, AF=PC_1$，且 $PC_1=C_1F=AF=AP$，

所以截面 APC_1F 为菱形，

故①错误；



对于②④，当 $t=CQ=\frac{3}{2}$时，

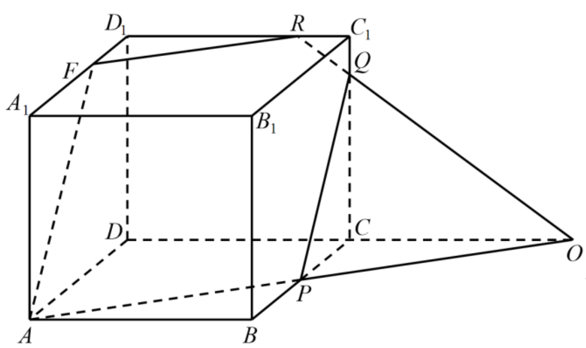
延长 AP，交 DC 的延长线于 O，连接 OQ 并延长，交 C_1D_1 于 R，

设 $A_1F=\frac{4}{3}$，连接 AF,FR，

由于 $\tan\angle A_1FA=\tan\angle QPC=\frac{3}{2}$，结合正方体的性质可知 $AF//PQ$，

结合 A,P,O,Q,R 共面可知 $APQRF$ 为截面 S，

如图所示，



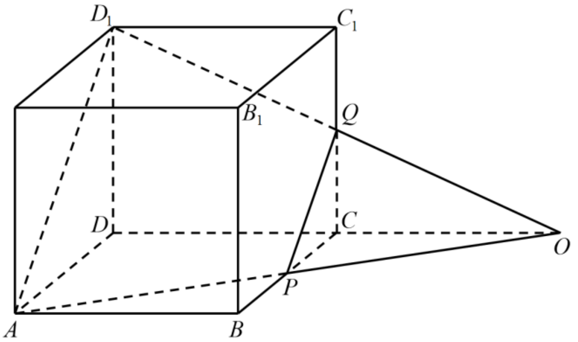
$\because$点 P 是 BC 的中点，可得 $CO=CD=AB$，$\therefore \dfrac{C_1R}{CO}=\dfrac{C_1Q}{CQ}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore S$ 与 C_1D_1 的交点 R 满足 $C_1R=\dfrac{2}{3}$，此时 S 是五边形，且 S 将棱 C_1D_1 截成长度比为 $2:1$ 的两部分.

故②④正确；

对于③，当 $t=CQ=1$ 时，根据正方体的性质可知 $PQ//AD_1, PQ=\dfrac{1}{2}AD_1$，且 $AP=D_1Q$，

如图所示，S 为等腰梯形，



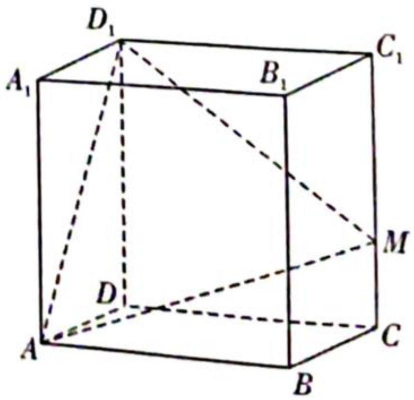
可得 $PQ=\sqrt{2}$，$AD_1=2\sqrt{2}$，等腰梯形得高为 $\sqrt{5-(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，

则 S 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)\times\dfrac{3}{2}\sqrt{2}=\dfrac{9}{2}$.

故③正确.

故答案为：②③④

10.【多选】已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 **2**（如图所示），点 $\boldsymbol{M}$ 为线段 CC_1（含端点）上的动点，由点 **A**，D_1，$\boldsymbol{M}$ 确定的平面为 α，则下列说法正确的是（　　）



A．平面 α 截正方体的截面始终为四边形

B．点 $\boldsymbol{M}$ 运动过程中，三棱锥 A_1-AD_1M 的体积为定值

C．平面 α 截正方体的截面面积的最大值为 $4\sqrt{2}$

D．三棱锥 A_1-AD_1M 的外接球表面积的取值范围为 $\left[\dfrac{41}{4}\pi,12\pi\right]$

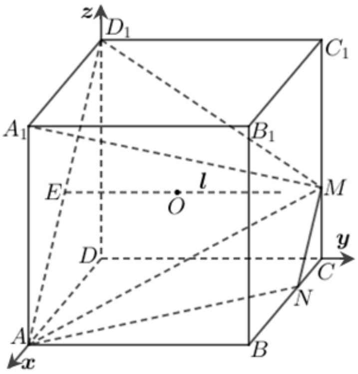
【解析】正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 **2**，点 $\boldsymbol{M}$ 为线段 CC_1（含端点）上的动点，

对于 **A**，当点 M 与点 C 重合时，平面 α 只与正方体的共点 D 的三个面有公共点，所得截面为三角形，**A** 不正确；

对于 **B**，点 M 到平面 ADD_1A_1 的距离为 **2**，而 $V_{A_1-AD_1M}=V_{M-AA_1D_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1D_1}\times 2=\frac{4}{3}$，**B** 正确；

对于 **C**，当点 M 与点 C 重合时，截面为正三角形，其边长为 $AD_1=2\sqrt{2}$，截面面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}AD_1^2=2\sqrt{3}$，

当点 M 与点 C 不重合时，平面 $\alpha\cap$ 平面 $BCC_1B_1=MN$，如图，$MN//AD_1$，



当点 M 与点 C_1 重合时，截面是正方体的对角面 ABC_1D_1，其面积为 $4\sqrt{2}$，

令 $MC=x(0<x<2)$，截面是等腰梯形 AD_1MN，则 $MN=\sqrt{2}x$，$AN=D_1M=\sqrt{4+(2-x)^2}$，

等腰梯形 AD_1MN 的高 $h=\sqrt{AN^2-(\frac{AD_1-MN}{2})^2}=\sqrt{4+\frac{1}{2}(2-x)^2}$，

截面面积 $S=\frac{\sqrt{2}x+2\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{2}(2-x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8(x+2)^2+(x^2-4)^2}$，

令 $f(x)=8(x+2)^2+(x^2-4)^2=x^4+32x+48$，显然 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增，$48<f(x)<128$，则 $2\sqrt{3}<S<4\sqrt{2}$，

所以截面面积 $S\in[2\sqrt{3},4\sqrt{2}]$，最大值为 $4\sqrt{2}$，**C** 正确；

对于 **D**，以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，$A(2,0,0)$，设点 $M(0,2,t)$，$0\le t\le 2$，

三棱锥 A_1-AD_1M 的外接球截平面 AA_1D_1 所得截面小圆是 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1D_1$ 的外接圆，其圆心为 AD_1 中点 $E(1,0,1)$，

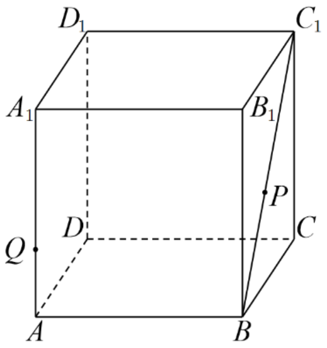
三棱锥 A_1-AD_1M 的外接球球心 O 在过点 E 垂直于平面 AA_1D_1 的直线 l 上，设点 $O(1,y,1)$，

由 $|OM|=|OA|$ 得：$1+(2-y)^2+(t-1)^2=2+y^2$，即 $y=\frac{1}{4}[(t-1)^2+3]\in[\frac{3}{4},1]$，有 $(2+y^2)\in[\frac{41}{16},3]$，

所以三棱锥 A_1-AD_1M 的外接球表面积 $S_1=4\pi|OA|^2=4\pi(2+y^2)\in[\frac{41}{4}\pi,12\pi]$，**D** 正确.

故选：**BCD**

11.【多选】在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$，点 P 在线段 BC_1 上运动，点 Q 在线段 AA_1 上运动，则下列说法中正确的有(　　)



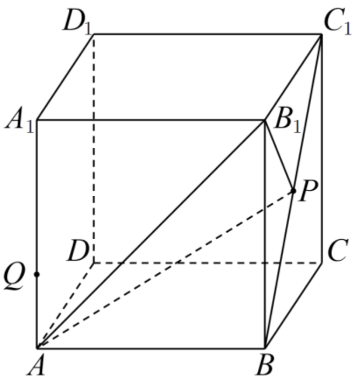
A．当 ***P*** 为 BC_1 中点时，三棱锥 ***P***- ABB_1 的外接球半径为 $\sqrt{2}$

B．线段 ***PQ*** 长度的最小值为 **2**

C．三棱锥 D_1-***APC*** 的体积为定值

D．平面 ***BPQ*** 截该正方体所得截面可能为三角形、四边形、五边形

【解析】对于 **A**，当 ***P*** 为 BC_1 中点时，



∵ BCC_1B_1 是正方形，∴ $B_1P\perp BC_1$，

∵***AB***⊥平面 BCC_1B_1， $B_1P\subset$平面 BCC_1B_1， ∴***AB***⊥ B_1P ，

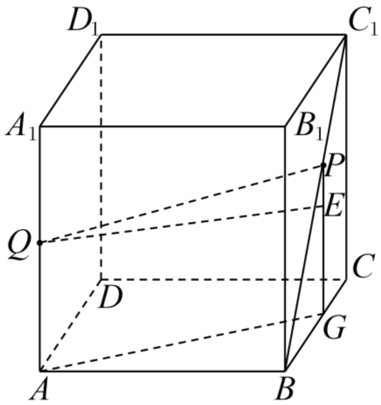
∵***AB***∩ BC_1 =***B***，***AB***、 $BC_1\subset$平面 ***ABP***，∴ $B_1P\perp$平面 ***ABP***，

∵ $B_1P\subset$平面 ***AP*** B_1， ∴平面 ***AP*** $B_1\perp$平面 ***ABP***，

易知 **Rt△*ABP*** 外接圆圆心为 ***AP*** 中点，**Rt△*AP*** B_1 外接圆圆心为 AB_1 中点，

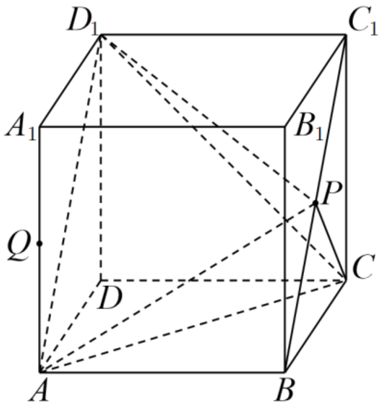
则过 **Rt△*ABP*** 外接圆圆心作平面 ***ABP*** 的垂线，过 **Rt△*AP*** B_1 外接圆圆心作平面 ***AP*** B_1 的垂线，易知两垂线交点为 AB_1 中点，则三棱锥 ***P***- ABB_1 的外接球球心即为 AB_1 中点，外接球半径即为 $\frac{AB_1}{2}=\sqrt{2}$，故 **A** 正确；

对于 **B**，如图过 ***P*** 作 ***PG***⊥***BC*** 于 ***G***，过 ***Q*** 作 ***QE***⊥***PG*** 于 ***E***，



易知 ***PQ*≥*QE*=*AG*≥*AB***，故线段 ***PQ*** 长度的最小值为 ***AB*=2**，故 **B** 正确；

对于 **C**，

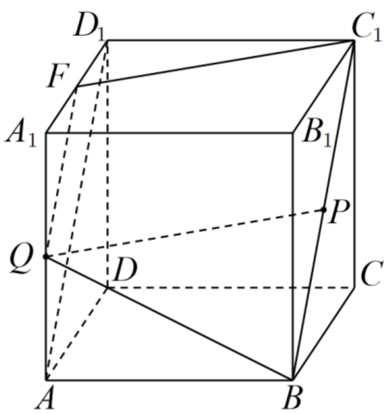


∵ $BC_1 // AD_1$， $AD_1 \subset$平面 ACD_1， $BC_1 \not\subset$平面 ACD_1， ∴ $BC_1 //$平面 ACD_1，

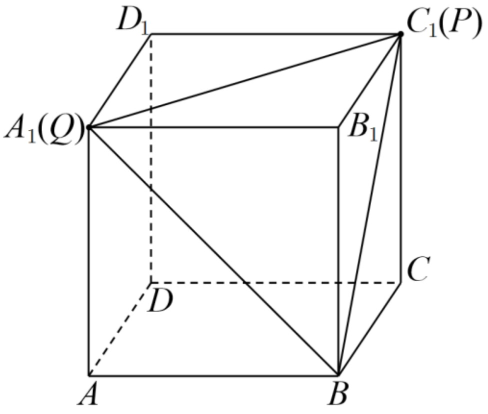
∵***P***∈ BC_1，故 ***P*** 到平面 ACD_1 的距离为定值，又 $S_{\triangle ACD_1}$ 为定值，则 $V_{D_1-APC}=V_{P-ACD_1}$ 为定值，故 **C** 正确；

对于 **D**，易知，截面 ***BPQ*** 与平面 BCC_1B_1 的交线始终为 BC_1，连接 AD_1，易知 $BC_1 // AD_1$，过 ***Q*** 作 ***QF*** // AD_1 交 A_1D_1

于 ***F***，连接 FC_1、***QB***，则 $BQFC_1$ 即为截面，其最多为四边形：



当 ***Q*** 与 A_1 重合，***P*** 与 C_1 重合，此时截面 ***BPQ*** 为三角形：

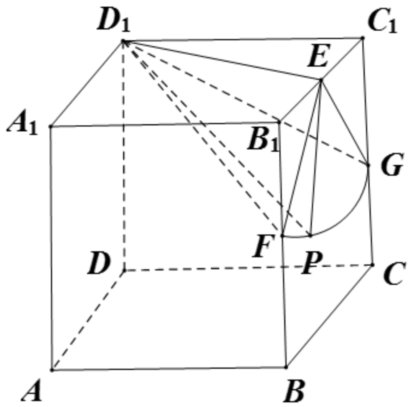


平面 ***BPQ*** 截该正方体所得截面不可能为五边形，故 **D** 错误．

故选：**ABC**．

12. 已知直四棱柱 ***ABCD–A*₁*B*₁*C*₁*D*₁** 的棱长均为 **2**，∠***BAD*=60**°．以 D_1 为球心，$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 ***BCC*₁*B*₁** 的交线长为________.

解析：如图：



解析：取 B_1C_1 的中点为 E，BB_1 的中点为 F，CC_1 的中点为 G，因为 $\angle BAD = 60$°，直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，所以△ $D_1B_1C_1$ 为等边三角形，所以 $D_1E = \sqrt{3}$，

<找到球在这个面的边界点（利用已知数据计算）>.

$D_1E \perp B_1C_1$，又四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 为直四棱柱，所以 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $BB_1 \perp B_1C_1$，因为 $BB_1 \cap B_1C_1 = B_1$，所以 $D_1E \perp$ 侧面 B_1C_1CB，设 P 为侧面 B_1C_1CB 与球面的交线上的点，则 $D_1E \perp EP$，因为球的半径为 $\sqrt{5}$，$D_1E = \sqrt{3}$，所以 $|EP| = \sqrt{|D_1P|^2 - |D_1E|^2} = \sqrt{5-3} = \sqrt{2}$，所以侧面 B_1C_1CB 与球面的交线上的点到 E 的距离为 $\sqrt{2}$，因为 $|EF| = |EG| = \sqrt{2}$，所以侧面 B_1C_1CB 与球面的交线是扇形 EFG 的弧 FG，因为 $\angle B_1EF = \angle C_1EG = \frac{\pi}{4}$，所以 $\angle FEG = \frac{\pi}{2}$，所以根据弧长公式可得 $FG = \frac{\pi}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$．故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$．

其实，相关问题亦可用向量法来解决，下面我们看一下相关例子.

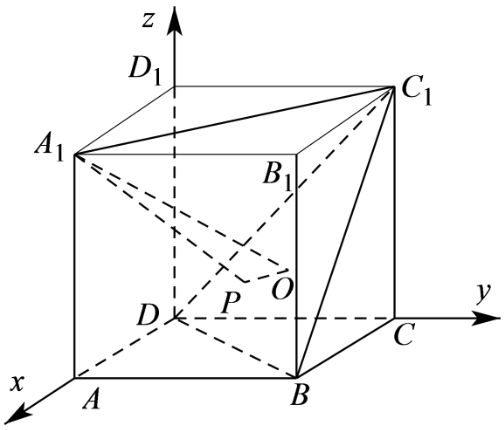
13. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $\sqrt{3}$，过顶点 B,D,C_1 的平面为 α，点 P 是平面 α 内的动点，$A_1P=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，则点 P 的轨迹长度等于（　　　　　）

A. π　　　　B. $\sqrt{2}\pi$　　　　C. $\sqrt{3}\pi$　　　　D. 2π

解析：如图建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},\sqrt{3},0)$，$C_1(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$，$A_1(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，

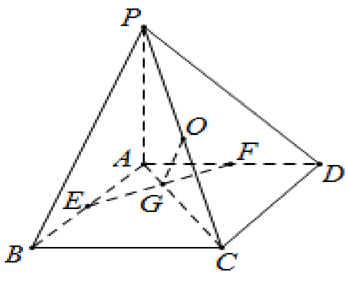
所以 $\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DA_1}=(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，设平面 BDC_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=\sqrt{3}x+\sqrt{3}y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,-1,1)$，所以点 A_1 到平面 BDC_1 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{DA_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$，设点 A_1 在平面 BDC_1 的射影为 O，即 $A_1O=2$，又 $A_1P=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $OP=\sqrt{A_1P^2-A_1O^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\because\triangle BDC_1$ 是边长为 $\sqrt{6}$ 的等边三角形，其内切圆半径为 $\frac{2S_{\triangle BDC_1}}{3BD}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}BD^2}{3BD}=\frac{\sqrt{3}}{6}BD=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 P 为以 O 为圆心，半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆上，所以点 P 的轨迹长度为 $2\pi r=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\pi=\sqrt{2}\pi$；故选：B



注：此题亦可用几何法算得，球与面 DBC_1 的边界点分别是 C_1D,C_1B 的中点，三角形 DBC_1 的外接圆圆心为其中心.

14. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，且 $PA=2$．若点 E、F 分别为 AB,AD 的中点，则直线 EF 被四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球所截得的线段长为_____.



解法 1．如图所示：因为 $PA\perp$ 面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是正方形，

所以$\triangle PAC,\triangle PBC,\triangle PDC$均为以$PC$为斜边的直角三角形，所以外接球的球心 O 为 PC 的中点，则

$$R=\frac{1}{2}PC=\frac{1}{2}\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{3}$$ ，

取 EF 的中点 G, 因为$\frac{PC}{AC}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{GC}{OC}=\frac{\frac{3}{4}\times 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以$\frac{PC}{AC}=\frac{GC}{OC}$ ，则$\triangle PAC\sim\triangle GOC$，所以$GO\perp PC$，

所以球心到直线的距离为$d=GO=\sqrt{GC^2-OC^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以$l=2\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{6}$，

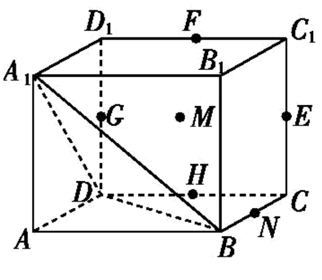
所以所截得的线段长为$\sqrt{6}$，故答案为：$\sqrt{6}$.

这个几何证法可以让很多学生望洋兴叹，下来我们再尝试用例 1 所总结的向量方法来计算. 即计算球心O与截线上两个特殊点E,F所构成的ΔEOF的高线长.

解法 2. 以A为原点，AB,AD,AP所在直线分别为x,y,z轴，所需各点坐标为$E(1,0,0),F(0,1,0),O(1,1,1)$，则$\vec{EO}=(0,1,1),\vec{FO}=(1,0,1),\vec{EF}=(-1,1,0)$，则$\Delta EOF$为边长是$\sqrt{2}$的等边三角形，则点$O$到直线$EF$的距离$d=\frac{\sqrt{6}}{2}$，最后所截得的线段长为$\sqrt{6}$.

两个方法，高低立现，所以我们在处理一些立体几何的选题压轴题时，多去尝试用向量的方法来解决可以着实提高很多学生的解题能力.

15.如图，在边长为 a 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H、N 分别是 CC_1、C_1D_1、DD_1、CD、BC 的中点，M 在四边形 $EFGH$ 边上及其内部运动，若 MN∥面 A_1BD，则点 M 轨迹的长度是（　　）



A. $\sqrt{3}a$　　B. $\sqrt{2}a$　　C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$

【答案】D

【分析】

连接 GH、HN，有 GH∥BA_1，HN∥BD，证得面 A_1BD∥面 GHN，由已知得点 M 须在线段 GH 上运动，即满足条件，由此可得选项.

【详解】

解：连接 GH、HN、GN，∵在边长为 a 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H 分别是 CC_1、C_1D_1、DD_1、CD 的中点，N 是 BC 的中点，

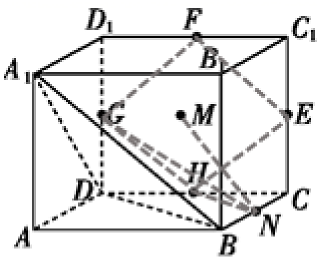
则 GH∥BA_1，HN∥BD，又$GH\not\subset$面 A_1BD，$BA_1\subset$面 A_1BD，所以GH∥面 A_1BD，同理可证得NH∥面 A_1BD，

又$GH\cap HN=H$，∴面 A_1BD∥面 GHN，

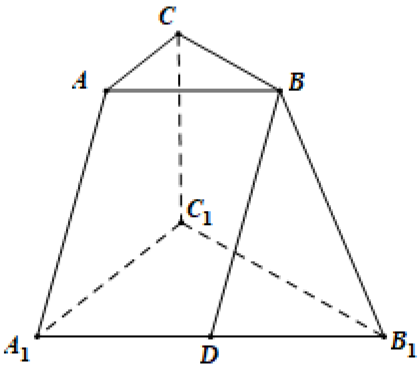
又∵点 **M** 在四边形 **EFGH** 上及其内部运动，**MN**∥面 A_1BD，

则点 **M** 须在线段 **GH** 上运动，即满足条件，$GH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，则点 **M** 轨迹的长度是 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

故选：D.



16.在三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，点 D 在 A_1B_1 上，且 $AA_1//BD$，点 M 是三角形 $A_1B_1C_1$ 内（含边界）的一个动点，且有平面 BDM // 平面 A_1ACC_1，则动点 M 的轨迹是（　　）



A．三角形 $A_1B_1C_1$ 边界的一部分　　B．一个点

C．线段的一部分　　D．圆的一部分

【答案】C

【分析】

过 D 作 $DE//A_1C_1$ 交 B_1C_1 于 E，连接 BE，证明平面 BDE // 平面 AA_1C_1C，得 $M\in DE$，即得结论.

【详解】

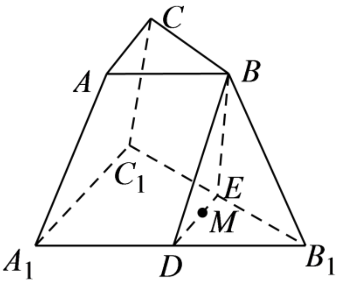
如图，过 D 作 $DE//A_1C_1$ 交 B_1C_1 于 E，连接 BE，

$BD // AA_1$，$BD\not\subset$ 平面 AA_1C_1C，$AA_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BD//$ 平面 AA_1C_1C，

同理 $DE//$ 平面 AA_1C_1C，又 $BD\cap DE=D$，$BD,DE\subset$ 平面 BDE，

所以平面 $BDE//$ 平面 AA_1C_1C，所以 $M\in DE$，（M 不与 D 重合，否则没有平面 BDM），

故选：C.



17.在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，*Q*是正方形B_1BCC_1内的动点，$A_1Q\perp BC_1$，则*Q*点的轨迹是（　　）

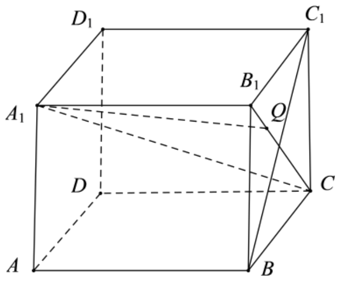
A． 点B_1　　　　**B．** 线段B_1C　　　　**C．** 线段B_1C_1　　　　**D．** 平面B_1BCC_1

【答案】B

【分析】

如图，连接A_1C,证明$BC_1\perp B_1Q$,又$BC_1\perp B_1C$，即得解.

【详解】



如图，连接A_1C，

因为$BC_1\perp A_1Q, BC_1\perp A_1B_1, A_1Q\cap A_1B_1=A_1, A_1Q, A_1B_1\subset$平面$A_1B_1Q$,所以$BC_1\perp$平面$A_1B_1Q$，又$B_1Q\subset$平面$A_1B_1Q$，

所以$BC_1\perp B_1Q$,又$BC_1\perp B_1C$.所以点Q在线段B_1C上.故选：B

18.已知正方体 ***ABCD-A₁B₁C₁D₁*** 的棱长为 1，*P* 为底面 ***ABCD*** 内一点，若 *P* 到棱 ***CD***，A_1D_1 距离相等的点，则点 *P* 的轨迹是（　　）

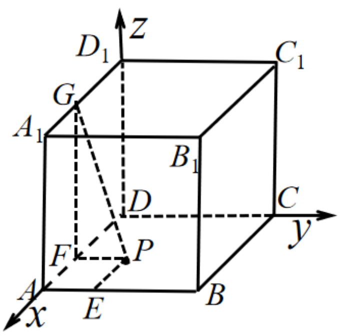
A． 直线　　　　**B．** 椭圆　　　　**C．** 抛物线　　　　**D．** 双曲线

【答案】D

【分析】

以 *D* 为坐标原点建立空间直角坐标系$D-xyz$，求出点 *P* 的轨迹方程即可判断.

【详解】



如图示，过 *P* 作 *PE*⊥*AB* 与 *E*，过 *P* 作 *PF*⊥*AD* 于 *F*，过 *F* 作 *FG*∥AA_1 交 A_1D_1 于 *G*，连结 *PG*，由题意可知 *PE=PG*

以 *D* 为坐标原点建立空间直角坐标系$D-xyz$，设$P(x,y,0)$，由 *PE=PG* 得：

$|1-x|=\sqrt{y^2+1^2}$，平方得：$(x-1)^2-y^2=1$即点 *P* 的轨迹是双曲线.故选：D.

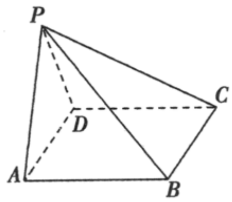
【提分秘籍】

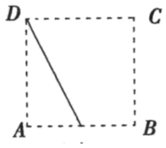
基本规律

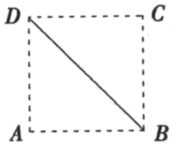
1.距离，可转化为在一个平面内的距离关系，借助于圆锥曲线定义或者球和圆的定义等知识求解轨迹

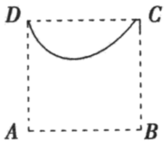
2.利用空间坐标计算求轨迹

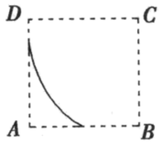
19.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为正三角形，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，M 为正方形 $ABCD$ 内（包括边界）的一个动点，且满足 $MP=MC$．则点 M 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹为（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【分析】

如图，以 D 为坐标原点，建立空间直角坐标系，设 $M(x,y,0)$，正方形 $ABCD$ 的边长为 a，求出 $\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MP}$ 的坐标，

利用 $|\overrightarrow{MP}|=|\overrightarrow{MC}|$ 可得 x 与 y 的关系，即可求解.

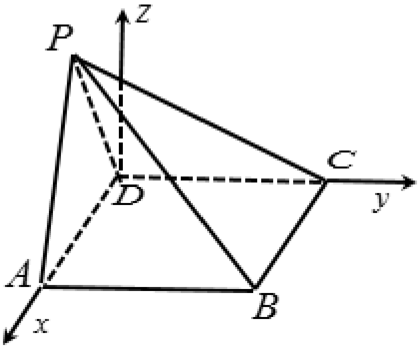
【详解】

如图，以 D 为坐标原点，DA，DC 所在的直线分别为 x，y 轴建立如图所示的空间直角坐标系，设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，$M(x,y,0)$，则 $0\le x\le a$，$0\le y\le a$，$P\left(\dfrac{a}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，$C(0,a,0)$，则 $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{x^2+(a-y)^2}$，

$|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}-x\right)^2+y^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}$．由 $|\overrightarrow{MP}|=|\overrightarrow{MC}|$，得 $x=2y$，

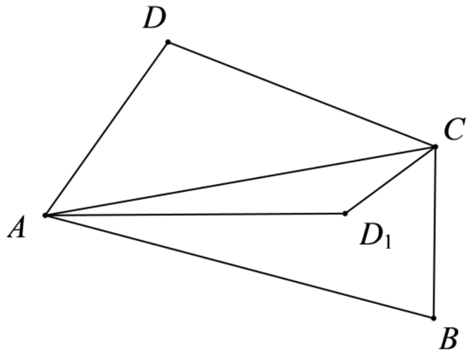
所以点 M 在正方形 $ABCD$ 内的轨迹为一条线段 $y=\dfrac{1}{2}x\,(0\le x\le a)$，

故选：A.



【典例分析】

20.如图，将四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ADC$ 沿着 AC 翻折到 AD_1C，则翻折过程中线段 DB 中点 M 的轨迹是（　　）



A．椭圆的一段　　　　B．抛物线的一段

C．双曲线的一段　　　　D．一段圆弧

【答案】D

【分析】

过点D作AC的垂线，垂足为F，过点点B作AC的垂线，垂足为E，连接DE,BF，再分别分析翻折前、后的变化量与不变量，在翻折后的图形中取BE中点O，进而可得答案.

【详解】

解：在四边形$ABCD$中，过点D作AC的垂线，垂足为F，过点点B作AC的垂线，垂足为E，连接DE,BF，如图1，

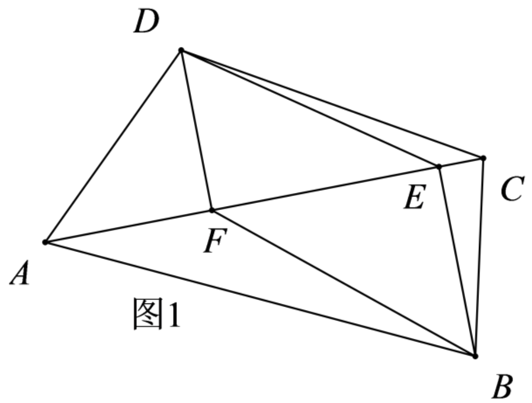


图1

所以当四边形$ABCD$确定时，　$\triangle DEF$和$\triangle BEF$三边长度均为定值，

当$\triangle ADC$沿着AC翻折到AD_1C，形成如图2的几何体，并取BE中点O，连接OM，

由于在翻折过程中，$DE=D_1E$，所以由中位线定理可得$OM=\frac{1}{2}D_1E$为定值，

所以线段DB中点M的轨迹是以BE中点O为圆心的圆弧上的部分.故选：D

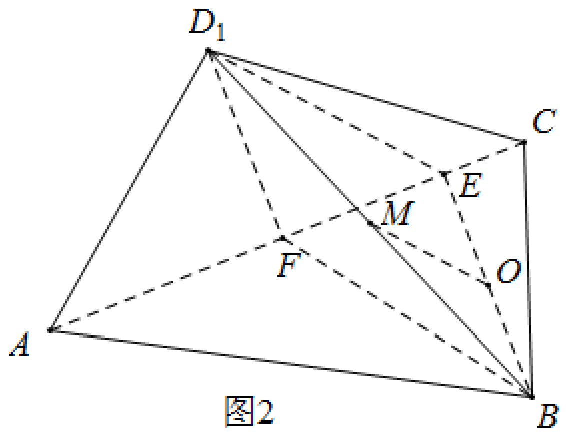


图2

【提分秘籍】

基本规律
1.翻折过程中寻找不变的垂直的关系求轨迹
2.翻折过程中寻找不变的长度关系求轨迹
3.可以利用空间坐标运算求轨迹

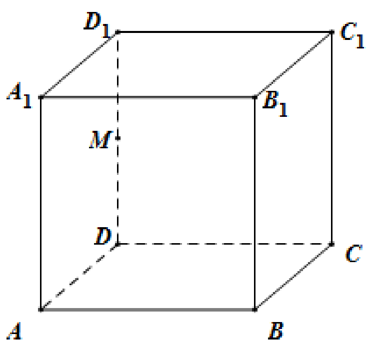
【变式演练】

21.已知△***ABC*** 的边长都为 **2**，在边 ***AB*** 上任取一点 ***D***，沿 ***CD*** 将△***BCD*** 折起，使平面 ***BCD***⊥平面 ***ACD***．在平面 ***BCD*** 内过点 ***B*** 作 ***BP***⊥平面 ***ACD***，垂足为 ***P***，那么随着点 ***D*** 的变化，点 ***P*** 的轨迹长度为（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　　　B．$\frac{\pi}{3}$　　　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　　　D．π

【答案】C
【分析】
根据题意，先确定点 ***P*** 轨迹的形状，进而求出轨迹的长度即可.
【详解】
由题意，在平面 ***BCD*** 内作 ***BQ***⊥***CD***，交 ***CD*** 于 ***Q***，因为平面 ***BCD***⊥平面 ***ACD***，平面 ***BCD*** 与平面 ***ACD*** 交于 ***CD***，所以 ***BQ***⊥平面 ***ACD***，又 ***BP***⊥平面 ***ACD***，所以 ***P,Q*** 两点重合，于是随着点 ***D*** 的变化，***BP***⊥***CD*** 始终成立，可得在平面 ***ABC*** 中，***BP***⊥***CP*** 始终成立，即得点 ***P*** 的轨迹是以 ***BC*** 为直径的圆的一部分，由题意知随着点 ***D*** 的变化，∠***BCD*** 的范围为 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，可得点 ***P*** 的轨迹是以 ***BC*** 为直径（半径为 **1**）的圆的 $\frac{1}{3}$，即得点 ***P*** 的轨迹长度为 $\frac{1}{3}\times 2\pi\times 1^2=\frac{2}{3}\pi$.故选：C.
题型二　轨迹问题

22.已知正方体 $ABC-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 **4**，M 为 DD_1 的中点，N 为 $ABCD$ 所在平面上一动点，则下列命题正确的是（　　）



A．若 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，则点 N 的轨迹为圆

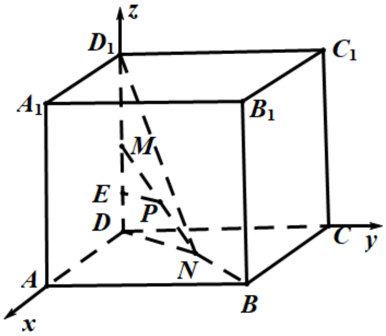
B．若 $MN=4$，则 MN 的中点 P 的轨迹所围成图形的面积为 2π

C．若点 N 到直线 BB_1 与直线 DC 的距离相等，则点 N 的轨迹为抛物线

D．若 D_1N 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，则点 N 的轨迹为双曲线

【答案】ACD

【解析】如图：



对于 A，根据正方体的性质可知，$MD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle MND$ 为 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角，

所以 $\angle MND=\frac{\pi}{4}$，所以 $DN=DM=\frac{1}{2}DD_1=\frac{1}{2}\times 4=2$，所以点 N 的轨迹为以 D 为圆心，2 为半径的圆；故 A 正确；

对于 B，在直角三角形 MDN 中，$DN=\sqrt{MN^2-MD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，取 MD 的中点 E，因为 P 为 MN 的中点，所以 $PE//DN$，且 $PE=\frac{1}{2}DN=\sqrt{3}$，因为 $DN\perp ED$，所以 $PE\perp ED$，即点 P 在过点 E 且与 DD_1 垂直的平面内，又 $PE=\sqrt{3}$，所以点 P 的轨迹为以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆，其面积为 $\pi\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=3\pi$，故 B 不正确；

对于 C，连接 NB，因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $BB_1\perp NB$，所以点 N 到直线 BB_1 的距离为 NB，所以点 N 到点 B 的距离等于点 N 到定直线 CD 的距离，又 B 不在直线 CD 上，所以点 N 的轨迹为以 B 为焦点，CD 为准线的抛物线，故 C 正确；

对于 D，以 D 为原点，DA,DC,DD_1 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(4,0,0)$，$B(4,4,0)$，$D_1(0,0,4)$，设 $N(x,y,0)$，

则 $\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{D_1N}=(x,y,-4)$，

因为 D_1N 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $|\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D_1N}>|=\cos\frac{\pi}{3}$，

所以 $|\frac{4y}{4\sqrt{x^2+y^2+16}}|=\frac{1}{2}$，整理得 $\frac{3y^2}{16}-\frac{x^2}{16}=1$，所以点 N 的轨迹为双曲线，故 D 正确.

故选：ACD

23.已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，点 P 在矩形 ACC_1A_1 区域(包含边界)内运动，且 $\angle PBD=45°$，则动点 P 的轨迹长度为（　　）

A. π　　B. $\sqrt{2}\pi$　　C. 2π　　D. $2\sqrt{2}\pi$

【答案】B

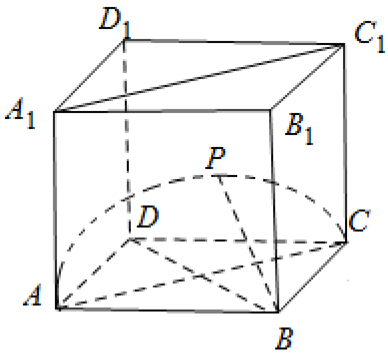
【解析】

确定 P 点轨迹，由于 $\angle PBD=45°$，因此 P 点轨迹是以 B 为顶点，BD 为轴，母线与轴夹角为 $45°$ 圆锥侧面与面 ACC_1A_1 的交线，在矩形 ACC_1A_1 区域是以 AC 为直径的半圆，求出半圆长即得.

$\angle PBD=45°$，所以 P 在以 B 为顶点，BD 为轴，母线与轴夹角为 $45°$ 圆锥的侧面上，由于轴 $BD\perp$ 对角面 ACC_1A_1，所以此圆锥侧面与平面 ACC_1A_1 的交线是圆，而 $\angle ABD=\angle CBD=45°$，因此在矩形 ACC_1A_1 区域 P 点轨迹是以 AC 为直径的半圆，

$AC=2\sqrt{2}$，因此轨迹长度为 $\pi\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$.

故选：B.



24. 正四面体 $ABCD$ 的棱长为 12，在平面 BCD 内有一动点 P，且满足 $AP=6\sqrt{3}$，则 P 点的轨迹是__________；设直线 AP 与直线 BC 所成的角为 θ，则 $\cos\theta$ 的取值范围为__________.

【答案】圆　$\left[0,\frac{1}{3}\right]$

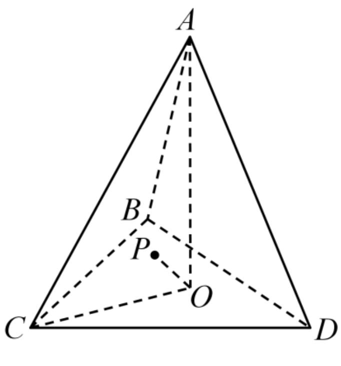
【分析】

（1）求出正四面体的高，进而求得 $PO=2\sqrt{3}$，可判断 P 点的轨迹是何种曲线；

（2）在四面体底面 BCD 内建立平面直角坐标系，求出 P 点轨迹方程，据此可设 P 点坐标，然后利用向量的夹角公式求解，可得答案.

【详解】

设底面 BCD 的中心为 O，则 $AO\perp$ 平面 BCD，



$|CO|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 12\cdot\frac{2}{3}=4\sqrt{3}$，$|AO|=\sqrt{|CA|^2-|CO|^2}=4\sqrt{6}$，

由$|PO|^2+|AO|^2=|PA|^2$，

则$|PO|=\sqrt{|PA|^2-|AO|^2}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-(4\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$，

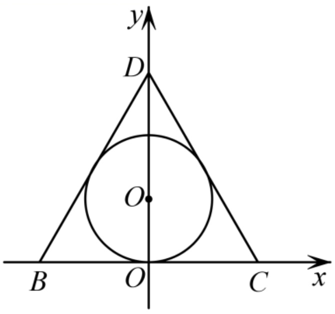
$\therefore P$点轨迹是圆；

又$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OP}$，

如图在平面 ***BCD*** 内建立平面直角坐标系，以 ***BC*** 中点为原点，过点 ***O*** 和 ***BC*** 垂直的直线为 ***y*** 轴，

则$B(-6,0)$，$C(6,0)$，$O(0,2\sqrt{3})$

故P在$x^2+(y-2\sqrt{3})^2=12$上运动，



则可设$P(2\sqrt{3}\cos\alpha,2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\alpha)$，$\alpha\in\mathbf{R}$ ，

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OP}=(12,0)(2\sqrt{3}\cos\alpha,2\sqrt{3}\sin\alpha)=24\sqrt{3}\cos\alpha$

$\therefore|\cos\left\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OP}\right\rangle|=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AP}\right\rangle\right|=\dfrac{|24\sqrt{3}\cos\alpha|}{12\cdot6\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}|\cos\alpha|\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$，

故$\cos\theta\in[0,\dfrac{1}{2}]$ ，

故答案为：圆；$\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$