金华十校 2022—2023 学年第一学期期末模拟考试

高三数学卷评分标准与参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	B	C	B	B

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合 题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的或不选的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	ABC	ABD	AC	BCD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13．$(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$　14．860　15．1220　16．$\dfrac{24}{25}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．(Ⅰ)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意可得 $\begin{cases} a_3+a_6=2a_1+7d=1 \\ a_6+a_9=2a_1+13d=7 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} a_1=-3 \\ d=1 \end{cases}$，故 $a_n=a_1+(n-1)d=n-4$．　…………………4 分

(Ⅱ)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=a_1n+\dfrac{n(n-1)d}{2}=\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{7n}{2}$．　…………………6 分

当 $n\le 3$ 时，$a_n<0, T_n=-S_n=-\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{7n}{2}$；　…………………7 分

当 $n\ge 4$ 时，$a_n\ge 0$，则

$$T_n=-a_1-a_2-a_3+a_4+\cdots+a_n=-S_3+\left(S_n-S_3\right)=S_n-2S_3$$

$$=\frac{n^2}{2}-\frac{7n}{2}-2\times\left(\frac{9}{2}-\frac{21}{2}\right)=\frac{n^2}{2}-\frac{7n}{2}+12.$$

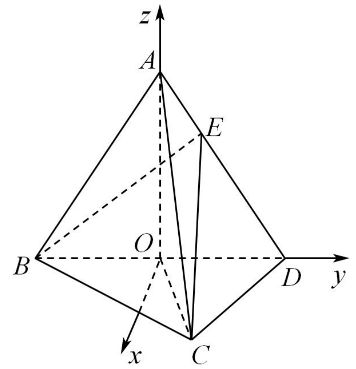
综上，$T_n=\begin{cases} -\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{7}{2}n, n\le 3, n\in \mathrm{N}^* \\ \dfrac{n^2}{2}-\dfrac{7}{2}n+12, n\ge 4, n\in \mathrm{N}^* \end{cases}$．　…………………10 分

18．(Ⅰ)因为 $AB=AD$，O 是 BD 中点，所以 $OA\perp BD$，

又 $OA\perp CD$，$CD\cap BD=D$，所以 $OA\perp$ 平面 BCD，

因为$OA\subset$平面ABD，平面$ABD\perp$平面BCD.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………5 分

(Ⅱ)以O为坐标原点，OA为z轴，OD为y轴，过O且垂直OD的直线为x轴，建立如图空间直角坐标系，$\triangle OCD$为边长为 1 的等边三角形，



则$C(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$D(0,1,0)$，$B(0,-1,0)$，设$A(0,0,m)$，$m>0$，

因为$DE=2EA$，所以$E(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}m)$，

所以$\overrightarrow{EB}=(0,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}m)$，$\overrightarrow{BC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$，设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面$EBC$的一个法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-\frac{4}{3}y-\frac{2}{3}mz=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0\end{cases}$，令$\vec{n}=(-\sqrt{3}m,m,-2)$，

又平面BCD的一个法向量为$\overrightarrow{OA}=(0,0,m)$，所以$\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{OA}\rangle\right|=\left|\frac{-2m}{m\cdot\sqrt{4m^2+4}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得$m=1$，所以$|OA|=1$，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………9 分

$S_{\triangle BCD}=2S_{\triangle OCD}=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$V_{A-BCD}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以三棱锥$A-BCD$的体积为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………12 分

19．(Ⅰ)由$2\times(0.02+0.06+0.14)=0.44,2\times(0.02+0.06+0.14+0.18)=0.8$可得中位数在$[7,9)$内，

设中位数为x，则$2\times(0.02+0.06+0.14)+(x-7)\times0.18=0.5$，解得$x\approx7.33$；　　………4 分

(Ⅱ)（i）由$X\sim N(7.4,2.63^2)$.可得$P(7.4-2.63\leqslant X\leqslant7.4+2.63)=P(4.77\leqslant X\leqslant10.03)\approx0.6827$，

则$P(X\leqslant10.03)=\frac{P(4.77\leqslant X\leqslant10.03)}{2}+0.5\approx0.84135$，$1000\times0.84135=841.35\approx841$只；…8 分

（ii）$P(7.4-2\times2.63\leqslant X\leqslant7.4+2\times2.63)=P(2.14\leqslant X\leqslant12.66)\approx0.9545$，

$P(X>12.66)\approx\frac{1-0.9545}{2}=0.02275$，随机抽检 20 只相当于进行 20 次独立重复实验，

设恰有 3 只血液中 A 指标的值大于12.66为事件B，则

$P(B)=C_{20}^{3}\times0.02275^3\times(1-0.02275)^{17}\approx0.00798<1\%$，

所以这一天该养殖场的家禽健康状况不正常.　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………12 分

20．(Ⅰ)证明：由正弦定理可得，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c}$，

由余弦定理及其推论可得，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

所以，由已知可得，$\frac{a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{a-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\frac{b}{c}$， ………………3 分

即$2a^2\left(b-c\right)=2\left(b^2-c^2\right)=2\left(b+c\right)\left(b-c\right)$，

因为$b\neq c$，所以$a^2=b+c$. ………………5 分

(Ⅱ)证明：由已知得，$\sin B=\sin 2C=2\sin C\cos C$，

又由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$可得，$b=2c\cos C$，

因为$\cos C<1$，所以$b<2c$. ………………7 分

由(Ⅰ)知，$a^2=b+c$，则$a=\frac{b+c}{a}$，

又由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$可得，

$$a=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin\left(B+C\right)}$$

$$=\frac{\sin B+\sin C}{\sin B\cos C+\cos B\sin C}=\frac{2\sin C\cos C+\sin C}{2\sin C\cos C\cos C+\left(2\cos^2 C-1\right)\sin C}$$

$$=\frac{\sin C\left(2\cos C+1\right)}{\left(4\cos^2 C-1\right)\sin C}=\frac{1}{2\cos C-1},$$

又$b=2c\cos C$，则$c=\frac{b}{2\cos C}$，将$a=\frac{1}{2\cos C-1}$以及$c=\frac{b}{2\cos C}$代入$a^2=b+c$可得，

$$\left(\frac{1}{2\cos C-1}\right)^2=b+\frac{b}{2\cos C}=b\left(\frac{1+2\cos C}{2\cos C}\right),$$

整理可得，$b=\left(\frac{2\cos C}{1+2\cos C}\right)\left(\frac{1}{2\cos C-1}\right)^2=\left(\frac{2\cos C}{1+2\cos C}\right)\left(\frac{1}{2\cos C-1}\right)^2$， ………………10 分

因为，$B=2C$，$A+B+C=\pi$，所以$0<C<\frac{\pi}{3}$，则$\frac{1}{2}<\cos C<1$.

令$t=2\cos C$，则$1<t<2$，

$$b=f\left(t\right)=\frac{t}{1+t}\cdot\left(\frac{1}{t-1}\right)^2=\frac{t}{t^3-t^2-t+1},$$

则 $f'(t)=\dfrac{-(t-1)\left[2\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}\right]}{\left(t^3-t^2-t+1\right)^2}$,

所以，当$1<t<2$，$f'(t)<0$恒成立，所以$f(t)$在$(1,2)$上单调递减.

所以，$f(t)>f(2)=\dfrac{2}{3}$，即$b>\dfrac{2}{3}$.

综上所述，$2c>b>\dfrac{2}{3}$. ………………12 分

21．(Ⅰ)证明：设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=-x+b,\end{cases}$得$x^2-8bx+4(b^2+3)=0$，故$\begin{cases}x_1+x_2=8b,\\ x_1x_2=4(b^2+3).\end{cases}$ ………………2 分

从而

$$k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-3}{x_1-4}+\frac{y_2-3}{x_2-4}=\frac{-x_1+b-3}{x_1-4}+\frac{-x_2+b-3}{x_2-4}=-\frac{2x_1x_2-(b+1)(x_1+x_2)+8(b-3)}{(x_1-4)(x_2-4)}$$

$=-\dfrac{8(b^2+3)-8b(b+1)+8(b-3)}{(x_1-4)(x_2-4)}=0$ 为定值. ………………5 分

(Ⅱ)设 AB 的中点为 C，$\triangle PAB$ 外接圆的圆心为 D，易得$C(4b,-3b)$.

所以 AB 的中垂线方程为$y=x-7b$，OP 的中垂线方程为$8x+6y-25=0$，

联立$\begin{cases}y=x-7b,\\ 8x+6y-25=0,\end{cases}$解得$D(3b+\dfrac{25}{14},-4b+\dfrac{25}{14})$. ………………6 分

由$DO^2=DB^2=DC^2+(\dfrac{AB}{2})^2$得

$$(3b+\frac{25}{14})^2+(-4b+\frac{25}{14})^2=2(b-\frac{25}{14})^2+\frac{(x_1-x_2)^2}{2}$$
$$=2(b-\frac{25}{14})^2+\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{2}=2(b-\frac{25}{14})^2+\frac{64b^2-16(b^2+3)}{2}.$$

整理得$7b^2-25b-24\cdot 7=0$，解得$b=7$（舍去）或$b=-\dfrac{24}{7}$. ………………9 分

过 P 作 x 轴的平行线交直线 AB 于点 E，则$E(-\dfrac{45}{7},3)$.

而

$$|y_1-y_2|=|(-x_1-b)-(-x_2-b)|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{64b^2-16(b^2+3)}$$

$=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{b^2+1}=\dfrac{4\sqrt{1581}}{7}$.

所以 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot|PE|\cdot|x_1-x_2|=\dfrac{1}{2}\cdot(4+\dfrac{45}{7})\cdot\dfrac{4\sqrt{1581}}{7}=\dfrac{146\sqrt{1581}}{49}$. ………………12 分

22．(Ⅰ)由题意可知 $f'(x)=3x^2+3a$，

当 $a\geq 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增，

因为 $f(0)=a^3+3>0$，$f(-a-2)=(-a-2)^3+3a(-a-2)+a^3+3=-9a^2-18a-5<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-a-2,0)$ 必有一个零点，符合题意；

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{-a}$

当 $x<-\sqrt{-a}$ 或 $x>\sqrt{-a}$ 时，$f'(x)>0$，当 $-\sqrt{-a}<x<\sqrt{-a}$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{-a})$ 上递增，$(-\sqrt{-a},\sqrt{-a})$ 上递减，$(\sqrt{-a},+\infty)$ 上递增，

故要 $f(x)$ 恰有一个负零点，由 $f(-|a|-2)<0$，

故只需满足 $f(\sqrt{-a})>0$，即 $2a\sqrt{-a}+a^3+3>0$，

令 $t=-a\sqrt{-a}\in(0,+\infty)$，故 $t^2+2t-3<0$，

解得 $0<t<1$，所以 $-1<a<0$.

综上可得 a 的取值范围为 $a\in(-1,+\infty)$. ………………6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 a 的取值范围为 $a\in(-1,+\infty)$，故存在 $x_0<0$，使得方程 $x_0^3+3ax_0+a^3+3=0$ 成立，

令 $g(a)=a^3+3x_0a+x_0^3+3$，

即等价于 $g(a)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有零点，即 $g(a)_{\min}=g(\sqrt{-x_0})\leq 0$，

$g(-1)=x_0^3-3x_0+2=\left(x_0-1\right)^2\left(x_0+2\right)$，$g(0)=x_0^3+3$，

故当 $x_0\leq\sqrt[3]{-3}$ 时，$g(0)<0$，存在零点；

当 $\sqrt[3]{-3}<x_0<0$ 时，$g(-1)>0$，

故只需 $g(a)_{最小值}=g(\sqrt{-x_0})=2x_0\sqrt{-x_0}+x_0^3+3\leq 0$，

令 $m=-x_0\sqrt{-x_0}\in\left(0,+\infty\right)$，故 $m^2+2m-3<0$，解得 $0<m<1$，所以 $-1<-x_0\sqrt{-x_0}<0$.

可得 $x_0\leq -1$．即 x_0 的最大值为 -1. ………………12 分