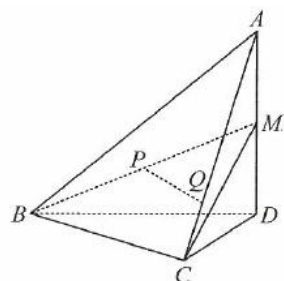


直角三棱锥综合大题

1. 如下图所示，在四面体 $A-BCD$ 中， $AD \perp$ 平面 BCD ， $BC \perp CD$ ， $AD=2$ ， $BD=2\sqrt{2}$ 。 M 是 AD 的中点， P 是 BM 的中点，点 Q 在线段 AC 上，且 $AQ=3QC$ 。

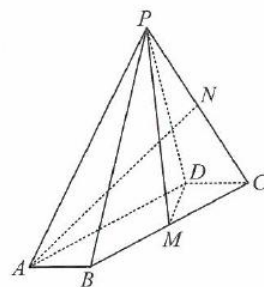
- (1) 证明： $PQ \parallel$ 平面 BCD ；
- (2) 若二面角 $C-BM-D$ 的大小为 60° ，求 $\angle BDC$ 的大小。



2. (2021 · 浙江 · 19)

如下图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB=1$ ， $BC=4$ ， $PA=\sqrt{15}$ ， M 、 N 分别是 BC 、 PC 的中点， $PD \perp DC$ ， $PM \perp MD$ 。

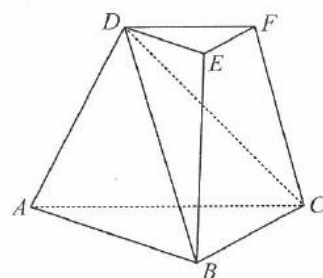
- (1) 证明： $AB \perp PM$ ；
- (2) 求直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值。



3. (2020 · 浙江 · 19)

如下图所示，三棱台 $DEF-ABC$ 中，面 $ADFC \perp$ 面 ABC ， $\angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$ ， $DC = 2BC$ 。

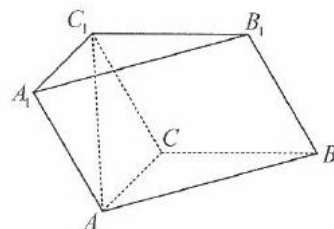
- (1) 证明： $EF \perp DB$ ；
- (2) 求 DF 与面 DBC 所成角的正弦值。



4.如下图所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC ， $BC \perp CC_1$ ， $AC_1 \perp AC$

(1) 证明： $AC \perp BC$ ；

(2) 若 $AC=1$ ， $BC=1$ ，且直线 AA_1 与平面 ABC 成 60° 角，求二面角 $C-BB_1-A$ 的余弦值.



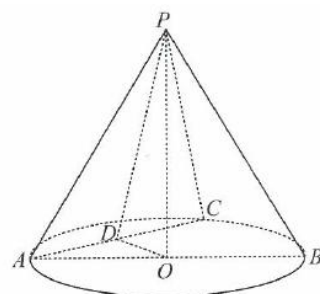
圆锥类大题

5.

如下图所示，在圆锥 PO 中，已知 $PO=\sqrt{2}$ ， $\odot O$ 的直径 $AB=2$ ， C 是 AB 的中点， D 为 AC 的中点.

(1) 证明：平面 $POD \perp$ 平面 PAC ；

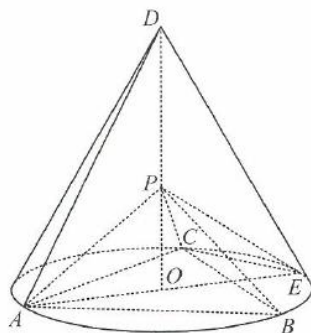
(2) 求二面角 $B-PA-C$ 的余弦值.



6.

如下图所示， D 为圆锥的顶点， O 是圆锥底面的圆心， AE 为底面的直径， $AE=AD$. $\triangle ABC$ 是底面的内接正三角形， P 为 DO 上一点， $PO=\frac{\sqrt{6}}{6}DO$.

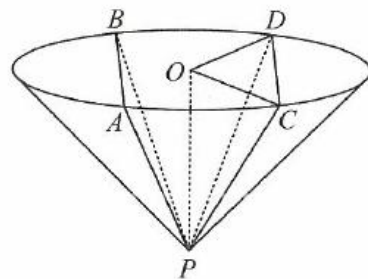
(1) 证明： $PA \perp$ 平面 PBC ；



(2) 求二面角 $B-PC-E$ 的余弦值.

7.如下图所示，圆锥顶点为 P ，底面圆心为 O ，其母线与底面成 45° 角， AB 和 CD 是底面圆 O 上的两条平行的弦，轴 OP 与平面 PCD 所成的角为 30° 。

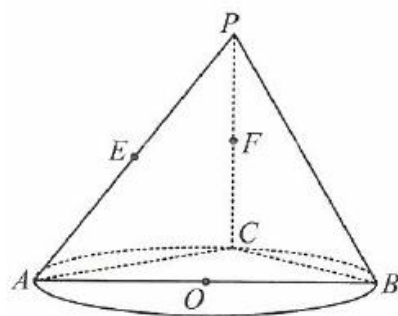
- (1) 证明：平面 PAB 与平面 PCD 的交线 l 平行于圆锥的底面；
- (2) 求 $\cos \angle COD$ 。



4. (★★★★)

如下图所示， AB 是圆 O 的直径，点 C 是圆 O 上异于 A 、 B 的点，直线 $PC \perp$ 平面 ABC ， E 、 F 分别是 PA 、 PC 的中点。

- (1) 记平面 BEF 与平面 ABC 的交线为 l ，试判断直线 l 与平面 PAC 的位置关系，并加以证明；
- (2) 设 (1) 中的直线 l 与圆 O 的另一个交点为 D ， $AB = 2\sqrt{2}$ ， C 为 AB 的中点。若二面角 $E-l-C$ 的大小为 45° ，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积。



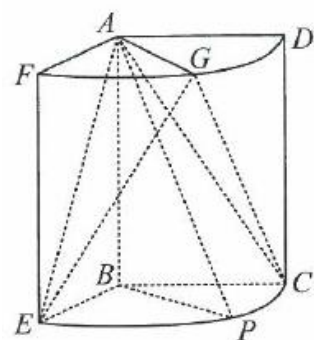
圆柱类大题与圆台、棱台类大题

8.

如下图所示，几何体是圆柱的一部分，它是由矩形 $ABCD$ （及其内部）以 AB 边所在直线为旋转轴旋转 120° 得到的， G 是 DF 的中点.

(1) 设 P 是 CE 上的一点，且 $AP \perp BE$ ，求 $\angle CBP$ 的大小；

(2) 当 $AB=3$ ， $AD=2$ ，求二面角 $E-AG-C$ 的大小.

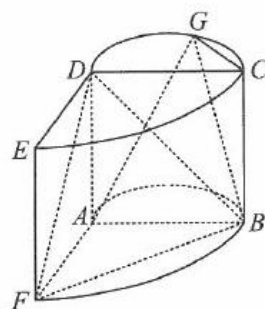


8.

如下图所示的几何体是由等高的半个圆柱和四分之一圆柱拼接而成的，点 G 为弧 CD 的中点，且 C 、 E 、 D 、 G 四点共面.

(1) 证明：平面 $BFD \perp$ 平面 BCG ；

(2) 若平面 BDF 与平面 ABG 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ，求 DF 与平面 ABF 所成角的大小.



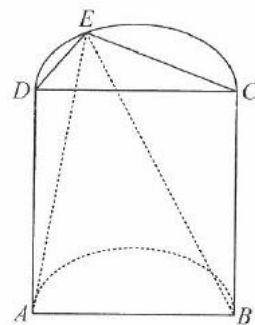
9.

如下图所示为一个半圆柱， E 为半圆弧 CD 上一点， $CD = \sqrt{5}$.

(1) 若 $AD = 2\sqrt{5}$ ，求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积的最大值；

(2) 有三个条件：① $4\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{DC}$ ；② 直线 AD 与 BE 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$ ；③ $\frac{\sin \angle EAB}{\sin \angle EBA} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

请你从中选择两个作为条件，求直线 AD 与平面 EAB 所成角的正弦值.



圆台、棱台类大题

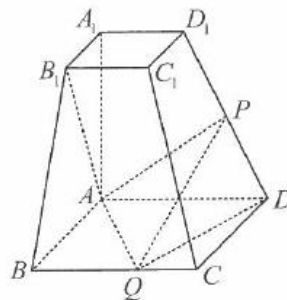
10.

如下图所示，已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面分别是边长为 3 和 6 的正方形，

$A_1A = 6$ ，且 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$ ，点 P 、 Q 分别在棱 DD_1 、 BC 上.

(1) 若 P 是 DD_1 的中点，证明： $AB_1 \perp PQ$ ；

(2) 若 $PQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ，二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{3}{7}$ ，求四面体 $ADPQ$ 的体积.

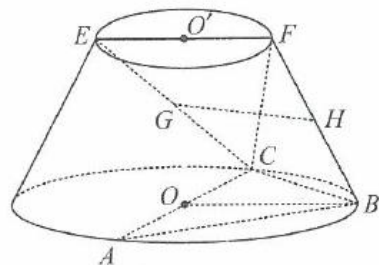


11.

在如下图所示的圆台中， AC 是下底面圆 O 的直径， EF 是上底面圆 O' 的直径， FB 是圆台的一条母线。

(1) 已知 G 、 H 分别为 EC 、 FB 的中点，求证： $GH \parallel$ 平面 ABC ；

(2) 已知 $EF = FB = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{3}$ ， $AB = BC$ ，求二面角 $F-BC-A$ 的余弦值。

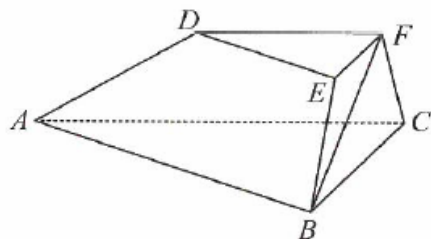


12.

如下图所示，在三棱台 $ABC-DEF$ 中，平面 $BCFE \perp$ 平面 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BE = EF = FC = 1$ ， $BC = 2$ ， $AC = 3$ 。

(1) 求证： $BF \perp$ 平面 $ACFD$ ；

(2) 求二面角 $B-AD-F$ 的平面角的余弦值。

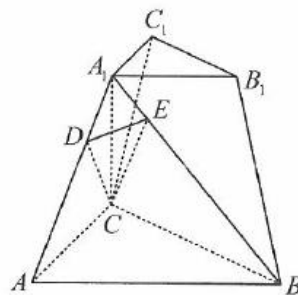


13.

如图，三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB \perp AC$ ， $A_1C \perp$ 平面 ABC ，点 D 、 E 分别在 AA_1 、 A_1B 上，且 $CD \perp AA_1$ ， $DE \perp A_1B$ ， $AB = AC = 2A_1B_1 = 2$

(1) 证明： $A_1B \perp CE$ ；

(2) 若 $A_1C = 1$ ，求二面角 C_1-BC-A 的余弦值.



14.

如图，圆台的上底面圆 O_1 的半径为 1，下底面圆 O_2 的半径为 $\sqrt{2}$ ， AB 为圆台下底面的一条直径，圆 O_2 上的点 C 满足 $AC = BC$ ， PO_1 是圆台上底面的一条半径，点 P 、 C 在平面 ABO_1 的同侧，且 $PO_1 \parallel BC$ 。

(1) 证明：平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ；

(2) 若圆台的高为 2，求直线 AO_1 与平面 PBC 所成角的正弦值.

