湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数的极值和最值

1．高考对本部分的考查一般有三个层次：

（1）主要考查求导公式，求导法则与导数的几何意义；

（2）导数的简单应用，包括求函数的单调区间、极值、最值等；

（3）综合考查，如零点、证明不等式、恒成立问题、求参数等，包括解决应用问题，将导数内容和传统内容中有关不等式、数列及函数单调性有机结合，设计综合题．

2．函数极值问题的常见类型及解题策略

（1）函数极值的判断：先确定导数为 0 的点，再判断导数为 0 的点的左、右两侧的导数符号．

（2）求函数 $f(x)$ 极值的方法：

①确定函数 $f(x)$ 的定义域．

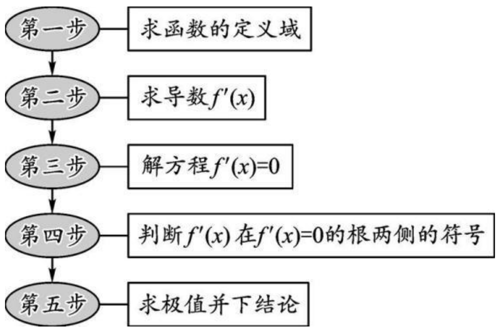
②求导函数 $f'(x)$．

③求方程 $f'(x)=0$ 的根．

④检查 $f'(x)$ 在方程的根的左、右两侧的符号，确定极值点．如果左正右负，那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值；如果左负右正，那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值；如果 $f'(x)$ 在这个根的左、右两侧符号不变，则 $f(x)$ 在这个根处没有极值．

（3）利用极值求参数的取值范围：确定函数的定义域，求导数 $f'(x)$，求方程 $f'(x)=0$ 的根的情况，得关于参数的方程(或不等式)，进而确定参数的取值或范围．

利用导数求函数极值的步骤



3．求函数 $f(x)$在$[a,b]$上最值的方法

（1）若函数 $f(x)$在$[a,b]$上单调递增或递减，$f(a)$与 $f(b)$一个为最大值，一个为最小值．

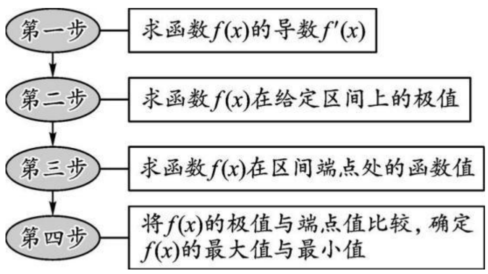
（2）若函数 $f(x)$在区间(a,b)内有极值，先求出函数 $f(x)$在区间(a,b)上的极值，与 $f(a)$、$f(b)$比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值．

（3）函数 $f(x)$在区间(a,b)上有唯一一个极值点时，这个极值点就是最大(或最小)值点．

注意：（1）若函数中含有参数时，要注意分类讨论思想的应用．

（2）极值是函数的“局部概念”，最值是函数的“整体概念”，函数的极值不一定是最值，函数的最值也不一定是极值．要注意利用函数的单调性及函数图象直观研究确定．

利用导数求函数最值的步骤



4.技巧总结

对于解析式中含有参数的函数求极值,有时需要分类讨论后解决问题.讨论的主要思路:
（1）参数是否影响 $f'(x)$ 零点的存在;
（2）参数是否影响 $f'(x)$ 不同零点（或零点与函数定义域中的间断点）的大小;
（3）参数是否影响 $f'(x)$ 在零点左右的符号.如果有影响,需要分类讨论.

5.规律提炼

（1）求可导函数的极值,实质上是解方程 $f'(x)=0$,然后列表即可.
（2）导数为 0 的点不一定是极值点.如函数 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处的导数是 0,但它不是极值点.对于可导函数,极值点的导数必为 0.

一、证明函数有极值或极值点，求函数的极值或最值

1.设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+a\ln x$.

（1）若 $a<0$，求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）在（1）的条件下，证明：若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点；

（3）若存在 $x_0\geq 1$，使得 $f(x)-\dfrac{a}{2}x^2-x<\dfrac{a}{a-1}(a\neq 1)$，求 a 的取值范围

2.已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}x-2\sin x+\sqrt{3}-1\left(x>0\right)$，$g\left(x\right)=2\sqrt{3}x-5\sin x-\sqrt{3}\cos x+3$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的最小值；

（2）证明：$g\left(x\right)>f\left(x\right)$.

3.设函数 $f(x)=a^x+e^{-x}\left(a>1\right)$.

（1）求证：$f(x)$ 有极值点；

（2）设 $f(x)$ 的极值点为 x_0，若对任意正整数 a 都有 $x_0\in\left(m,n\right)$，其中 $m,n\in Z$，求 $n-m$ 的最小值.

4.已知函数 $f(x)=e^x-ax$，其中 $a\in R$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性；

（2）若函数 $g(x)=f(x)+\ln(x+1)-\cos x$，则是否存在实数 a，使得函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值？若存在，求出 a 值；若不存在，说明理由.

5.已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}ax^2+\ln\left(x+1\right)\left(a>0\right)$，$g\left(x\right)=\sin x$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的极值点；

（2）当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f\left(x\right)-g\left(x\right)>0$，求 a 的取值范围.

6.已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$，$g\left(x\right)=\ln x$.

（1）求函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot g'\left(x\right)$ 的最小值（$g'\left(x\right)$ 为函数 $g\left(x\right)$ 的导函数）；

（2）试判断曲线 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=g\left(x\right)$ 公切线的条数.

二、判断函数极值点个数

7.已知函数 $f\left(x\right)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}+a\left(\ln x-x\right)\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

(1)当 $a=1$时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)讨论函数 $f\left(x\right)$ 的极值点的个数.

8.已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-ax^{2}-2$.

(1)当 $a=1$时，证明：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

(2)若 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\mathrm{e}^{-x}$，讨论函数 $g\left(x\right)$ 的极值点的个数.

9. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}-kx-1$，$k\in\mathbf{R}$.

（1）若 $f\left(x\right)$ 在 R 上是增函数，求实数 k 的取值范围；

（2）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的极值，并说明理由；

（3）若 $f\left(x\right)$ 有两个极值点 x_1，x_2，求证：函数 $f\left(x\right)$ 有三个零点.

三、已知函数有极值或最值，求参数或表达式取值范围

10．已知函数 $f(x)=\frac{ax^{2}}{e^{x}}+\frac{1}{2}x^{2}-2x(a\in\mathbf{R})$（$e=2.71828\ldots$是自然对数的底数）.

（1）若 $f(x)$ 在 $x\in(0.2)$ 内有两个极值点，求实数 a 的取值范围；

（2）$a=1$时，计论关于 x 的方程 $\left[f(x)-\frac{1}{2}x^{2}+2x\right]\frac{1}{xe^{x}}+b=|\ln x|(b\in\mathbf{R})$ 的根的个数.

11．已知函数 $f(x)=x(lnx+3ax+2)-3ax+4$.
（1）若 $f(x)$ 在$[1，+\infty)$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围.
（2）若 $f(x)$ 的最大值为 6，求实数 a 的值.

12．已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^{x}}+ax+b(a,b\in R)$.
（1）若 $f(x)$ 在 R 上是单调递增函数，求 a 的取值范围；
（2）若当 $a\in(-1,0)$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $2b$，求证：$b>0$.

13.已知函数 $f(x)=ln(ax+1)+\frac{1-x}{1+x},x\geqslant 0$，其中 $a>0$.
（1）求 $f(x)$ 的单调区间；
（2）若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 a 的取值范围.

14.设函数 $f(x)=e^{x}[ax^{2}-(4a+1)x+4a+3]$.

（1）$a>0$时，求 $y=f(x)$ 的单调增区间；
（2）若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

15.设 $f(x)=xlnx-ax^2+(2a-1)x$， $a\in R$.

（1）令 $g(x)=f'(x)$ ，求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求实数 a 的取值范围.

16.已知函数 $f(x)=ax^2+2ln(1+x)-2\sin x$， $a>0$.

（1）若 $a\geqslant 1$，证明：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时， $f(x)>0$；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求正实数 a 的取值范围.

17.记 $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．若对 $\forall x\in D$， $f''(x)>0$，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的"凸函数"．已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{3}x^3-ax^2-1$， $a\in\mathbf{R}$.

（1）若函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $y=f(x)-x$ 在 $(1,+\infty)$ 上有极值，求 a 的取值范围.

18 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+2)x+2a\ln x$.

（1）若 $a>0$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $1\le a\le 4$ 且 $a\ne 2$ 时，$f(x)$ 的极大值为 M，$f(x)$ 的极小值为 N，求 $|M-N|$ 的取值范围.（参考数据：$\ln 2\approx 0.7$，$\ln 3\approx 1.1$）

四、与极值有关的综合问题

19.已知函数 $f(x)=(x-2)\cdot e^x-\frac{a}{2}(x-1)^2, g(x)=m(x+\ln x)-2e^x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=0$ 时，令 $F(x)=f(x)-g(x)$，若 x_0 是函数 $F(x)$ 的极值点，且 $F(x_0)>0$，求证：$F(x)>-2x_0^3+2x_0$.

20 已知函数 $f(x)=\ln x-2ax-\frac{2a-1}{x}+1(a\in R)$.

（1）当 $0\leqslant a<\frac{1}{4}$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2a-1}{x}+f(x)$，当 $|a|>1$ 时，若函数 $g(x)$ 的极大值点为 x_1，证明：$x_1\ln x_1-ax_1^2>-1$.

一、证明函数有极值或极值点，求函数的极值或最值

4.设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+a\ln x$.

（1）若 $a<0$，求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）在（1）的条件下，证明：若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点；

（3）若存在 $x_0\ge 1$，使得 $f(x)-\dfrac{a}{2}x^2-x<\dfrac{a}{a-1}(a\ne 1)$，求 a 的取值范围

8．已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}x-2\sin x+\sqrt{3}-1\left(x>0\right)$， $g\left(x\right)=2\sqrt{3}x-5\sin x-\sqrt{3}\cos x+3$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的最小值；

（2）证明： $g\left(x\right)>f\left(x\right)$.

9．设函数 $f\left(x\right)=a^x+e^{-x}\left(a>1\right)$.

（1）求证： $f(x)$ 有极值点；

（2）设 $f(x)$ 的极值点为 x_0，若对任意正整数 a 都有 $x_0\in\left(m,n\right)$，其中 $m,n\in Z$，求 $n-m$ 的最小值.

10．已知函数 $f(x)=e^x-ax$，其中 $a\in R$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性；

（2）若函数 $g(x)=f(x)+\ln(x+1)-\cos x$，则是否存在实数 a，使得函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值？若存在，求出 a 值；若不存在，说明理由.

18.已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}ax^2+\ln\left(x+1\right)\left(a>0\right)$， $g\left(x\right)=\sin x$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的极值点；

（2）当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时， $f\left(x\right)-g\left(x\right)>0$，求 a 的取值范围.

19.已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$， $g\left(x\right)=\ln x$.

（1）求函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot g'\left(x\right)$ 的最小值（ $g'\left(x\right)$ 为函数 $g\left(x\right)$ 的导函数）；

（2）试判断曲线 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=g\left(x\right)$ 公切线的条数.

二、判断函数极值点个数

1.已知函数 $f\left(x\right)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}+a\left(\ln x-x\right)\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

(1)当 $a=1$时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)讨论函数 $f\left(x\right)$ 的极值点的个数.

2.已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-ax^{2}-2$.

(1)当 $a=1$时，证明：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

(2)若 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\mathrm{e}^{-x}$，讨论函数 $g\left(x\right)$ 的极值点的个数.

3. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}-kx-1$，$k\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若 $f\left(x\right)$ 在 R 上是增函数，求实数 k 的取值范围；

（Ⅱ）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的极值，并说明理由；

（Ⅲ）若 $f\left(x\right)$ 有两个极值点 x_1， x_2，求证：函数 $f\left(x\right)$ 有三个零点.

三、已知函数有极值或最值，求参数或表达式取值范围

11．已知函数 $f(x)=\frac{ax^{2}}{e^{x}}+\frac{1}{2}x^{2}-2x(a\in\mathbf{R})$（$e=2.71828\ldots$是自然对数的底数）.

（1）若 $f(x)$ 在 $x\in(0.2)$ 内有两个极值点，求实数 a 的取值范围；

（2）$a=1$时，计论关于 x 的方程 $\left[f(x)-\frac{1}{2}x^{2}+2x\right]\frac{1}{xe^{x}}+b=|\ln x|(b\in\mathbf{R})$ 的根的个数.

12．已知函数 $f(x)=x(lnx+3ax+2)-3ax+4$.

（1）若 $f(x)$ 在$[1，+\infty)$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围.

（2）若 $f(x)$ 的最大值为 6，求实数 a 的值.

13．已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^{x}}+ax+b(a,b\in R)$.

（1）若 $f(x)$ 在 R 上是单调递增函数，求 a 的取值范围；

（2）若当 $a\in(-1,0)$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $2b$，求证：$b>0$.

14.已知函数 $f(x)=ln(ax+1)+\frac{1-x}{1+x},x\geqslant 0$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 a 的取值范围.

15.设函数 $f(x)=e^{x}[ax^{2}-(4a+1)x+4a+3]$.

（1）$a>0$时，求 $y=f(x)$ 的单调增区间；

（2）若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

16.设 $f(x)=xlnx-ax^2+(2a-1)x$， $a\in R$.

（1）令 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间;

（2）已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求实数 a 的取值范围.

17.已知函数 $f(x)=ax^2+2ln(1+x)-2\sin x$， $a>0$.

（1）若 $a\geqslant 1$，证明：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时， $f(x)>0$；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求正实数 a 的取值范围.

20.记 $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．若对 $\forall x\in D$， $f''(x)>0$，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的"凸函数"．已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{3}x^3-ax^2-1$， $a\in\mathbf{R}$.

（1）若函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $y=f(x)-x$ 在 $(1,+\infty)$ 上有极值，求 a 的取值范围.

6.已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+2)x+2a\ln x$.

（1）若 $a>0$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $1\le a\le 4$ 且 $a\ne 2$ 时，$f(x)$ 的极大值为 M，$f(x)$ 的极小值为 N，求 $|M-N|$ 的取值范围.（参考数据：$\ln 2\approx 0.7$，$\ln 3\approx 1.1$）

四、与极值有关的综合问题

5.已知函数 $f(x)=(x-2)\cdot e^x-\frac{a}{2}(x-1)^2, g(x)=m(x+\ln x)-2e^x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=0$ 时，令 $F(x)=f(x)-g(x)$，若 x_0 是函数 $F(x)$ 的极值点，且 $F(x_0)>0$，求证：$F(x)>-2x_0^3+2x_0$.

7．已知函数 $f(x)=\ln x-2ax-\frac{2a-1}{x}+1(a\in R)$.

（1）当 $0\leqslant a<\frac{1}{4}$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2a-1}{x}+f(x)$，当 $|a|>1$ 时，若函数 $g(x)$ 的极大值点为 x_1，证明：$x_1\ln x_1-ax_1^2>-1$.

1.已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^{x}}+a(\ln x-x)(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数.

【答案】(1) $y=\frac{1}{e}-1$；

(2)答案见解析.

【解析】

【分析】

（1）分别求出 $f(1)$ 和 $f'(1)$，即可求出切线方程；

（2）分 $a\geq 0$、$a\leq-\frac{1}{e}$ 和 $-\frac{1}{e}<a<0$ 三种情况，分别讨论 $f(x)$ 单调性，即可得到对应的极值点的情况.

(1)

当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{x}{e^{x}}+\ln x-x$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f(1)=\frac{1}{e}-1$.

因为 $f'(x)=\frac{1-x}{e^{x}}+\frac{1}{x}-1$，所以 $f'(1)=\frac{1-1}{e}+1-1=0$.

所以 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：$y=\frac{1}{e}-1$.

(2)

函数 $f(x)=\frac{x}{e^{x}}+a(\ln x-x)(a\in\mathbf{R})$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-x}{e^{x}}+a\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{1-x}{x}\left(\frac{x}{e^{x}}+a\right)$.

令 $g(x)=\frac{x}{e^{x}}+a,(x>0)$，$g'(x)=\frac{1-x}{e^{x}}$.

令 $g'(x)>0$，得 $0<x<1$；令 $g'(x)<0$，得 $x>1$；

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单增，在 $(1,+\infty)$ 上单减.

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}+a$，所以 $a<g(x)\leq\frac{1}{e}+a$

①当 $a\geq 0$ 时，$\frac{1}{e^{x}}+\frac{a}{x}>0$，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$；令 $f'(x)<0$，得 $x>1$；

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单增，在 $(1,+\infty)$ 上单减.

此时 $f(x)$ 有且只有一个极值点.

②当 $a\leq-\frac{1}{e}$ 时，$g(x)=\frac{x}{e^{x}}+a\leq 0$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$；令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$；

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单减，在 $(1,+\infty)$ 上单增.

此时 $f(x)$ 有且只有一个极值点.

③当 $-\frac{1}{\mathrm{e}}<a<0$ 时，方程 $g(x)=0$ 有两个相异正根 x_1,x_2，不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

则当 $0<x<x_1$ 时，有 $f'(x)<0$；当 $x_1<x<1$ 时，有 $f'(x)>0$；当 $1<x<x_2$ 时，有；$f'(x)<0$；当 $x>x_2$ 时，有；$f'(x)>0$；

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单减，在 $(x_1,1)$ 上单增，在 $(1,x_2)$ 上单减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单增，

此时 $f(x)$ 有三个极值点.

综上所述：当 $a\geq 0$ 或 $a\leq -\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 有且只有一个极值点；

当 $-\frac{1}{\mathrm{e}}<a<0$ 时，$f(x)$ 有三个极值点.

2.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-ax^2-2$.

(1)当 $a=1$ 时，证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

(2)若 $g(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}$，讨论函数 $g(x)$ 的极值点的个数.

【答案】(1)证明见解析

(2)答案见解析

【解析】

【分析】

（1）先对函数求导，再二次求导，可求得导函数在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，从而可得 $f'(x)>f'(0)=0$，进而可证得结论，

（2）当 $a=0$ 时，可得 $g(x)$ 单调递增，无极值点，当 $a\neq 0$ 时，$g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，令 $\mathrm{e}^x-2ax=0\Rightarrow 2a=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，令 $h(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，利用导数求出 $h(x)$ 的单调区间和极值，从而分 $0<a<\frac{\mathrm{e}}{2}$，$a=\frac{\mathrm{e}}{2}$ 和 $a>\frac{e}{2}$ 求解即可

(1)

证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-x^2-2, f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$.

当 $x>0$ 时，$f''(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2>0$，.

所以函数 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f'(x)>f'(0)=0$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)

解：当$a=0$时，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2$单调递增，无极值点，

当$a\neq 0$时，$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2ax$，

令$\mathrm{e}^{x}-2ax=0\Rightarrow 2a=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$，

令$h\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$，则$h'\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^{x}\left(x-1\right)}{x^{2}}$，

当$x<0$时，$h\left(x\right)<0$，且$h'\left(x\right)<0$，当$a<0$时，方程$2a=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$有唯一小于零的零点，故函数$g\left(x\right)$存在一个极值点；

当$0<x<1$时，$h'\left(x\right)<0$，当$x>1$时，$h'\left(x\right)>0$，

故函数$h\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，$h\left(1\right)=\mathrm{e}$为函数$h\left(x\right)$极小值，

所以当$0<a<\frac{\mathrm{e}}{2}$时，方程$2a=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$无解，函数$g\left(x\right)$无极值点；

当$a=\frac{\mathrm{e}}{2}$时，方程$2a=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$有一个解，

但当$0<x<1$时，$\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}>2a,g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2ax>0$，当$x>1$时，$\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}>2a,g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2ax>0$，故函数$g\left(x\right)$无极值点.

当$a>\frac{e}{2}$时，方程$2a=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}$有两解，函数$g\left(x\right)$存在一个极大值点和一个极小值点.

综上，当$a<0$时，函数$g\left(x\right)$存在一个极值点，

当$0\leqslant a\leqslant\frac{\mathrm{e}}{2}$时，函数$g\left(x\right)$无极值点，

当$a>\frac{e}{2}$时，函数$g\left(x\right)$存在一个极大值点和一个极小值点.

3. 已知函数$f\left(x\right)=e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}-kx-1$，$k\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若$f\left(x\right)$在R上是增函数，求实数k的取值范围；

（Ⅱ）讨论函数$f\left(x\right)$的极值，并说明理由；

（Ⅲ）若$f\left(x\right)$有两个极值点x_1，x_2，求证：函数$f\left(x\right)$有三个零点.

【答案】:（Ⅰ）$\left(-\infty,1\right]$；（Ⅱ）当$k\in\left(-\infty,1\right]$时，$f\left(x\right)$无极值；当$k\in\left(1,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)$存在一个极大值和一个极小值；（Ⅲ）见解析.

【解析】（Ⅰ）由$f\left(x\right)=e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}-kx-1$得：$f'\left(x\right)=e^{x}-x-k$

$\because f\left(x\right)$在R上是增函数，$\therefore f'\left(x\right)\geq 0$在$R$上恒成立，即：$k\leq e^{x}-x$在$R$上恒成立

设$g\left(x\right)=e^{x}-x$，则$g'\left(x\right)=e^{x}-1$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$

即 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(0)=1$，$\therefore k\le 1$

即 k 的取值范围为：$(-\infty,1]$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：当 $k\in(-\infty,1]$ 时，$f(x)$ 在 R 上是增函数，此时 $f(x)$ 无极值；

当 $k\in(1,+\infty)$ 时，令 $f'(x)=0$，即 $g(x)=k$

$\because x\to-\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$；$g(0)=1$；$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$

$\therefore g(x)=k$ 有两个根，设两根为 x_1，x_2 且 $x_1<0<x_2$

可知：$x\in(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递增；在 (x_1,x_2) 上单调递减

$\therefore f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值 $f(x_1)$；在 $x=x_2$ 处取得极小值 $f(x_2)$

综上所述：当 $k\in(-\infty,1]$ 时，$f(x)$ 无极值；当 $k\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 存在一个极大值和一个极小值

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，$f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，则 $k\in(1,+\infty)$，且 $x_1<0<x_2$

$\therefore f'(x_1)=e^{x_1}-x_1-k=0$；$f'(x_2)=e^{x_2}-x_2-k=0$

又 $f(x_1)=e^{x_1}-\dfrac{1}{2}x_1^2-kx_1-1=e^{x_1}-\dfrac{1}{2}x_1^2-(e^{x_1}-x_1)x_1-1=(1-x_1)e^{x_1}+\dfrac{1}{2}x_1^2-1$

$f(x_2)=(1-x_2)e^{x_2}+\dfrac{1}{2}x_2^2-1$

令 $h(x)=(1-x)e^x+\dfrac{1}{2}x^2-1$，则 $h'(x)=x(1-e^x)$

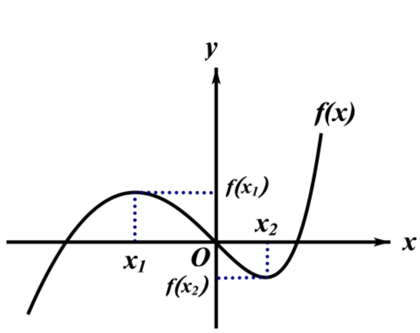
则 $h'(x)\le 0$ 在 R 上恒成立，即 $h(x)$ 在 R 上单调递减

又 $h(0)=0$，$\therefore x\in(-\infty,0)$ 时，$h(x)>0$；$x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)<0$

$\because x_1<0<x_2$，$\therefore f(x_1)=h(x_1)>0$，$f(x_2)=h(x_2)<0$

当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$

可得 $f(x)$ 大致图象如右：



$\therefore f(x)$ 有三个零点.

4.设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+a\ln x$.

（1）若 $a<0$，求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）在（1）的条件下，证明：若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点；

（3）若存在 $x_0\geq 1$，使得 $f(x)-\frac{a}{2}x^2-x<\frac{a}{a-1}(a\neq 1)$，求 a 的取值范围

【答案】

（1）递减区间是 $(0,\sqrt{-a})$，单调递增区间是 $(\sqrt{-a},+\infty)$，极小值 $\frac{-a+a\ln(-a)}{2}$

（2）证明见解析

（3）$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)\cup(1,+\infty)$

【解析】（1）

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f^{'}(x)=x+\frac{a}{x}=\frac{x^2+a}{x}$， $\because a<0$

由 $f^{'}(x)=0$ 解得 $x=\sqrt{-a}$.

$f(x)$ 与 $f^{'}(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(0,\sqrt{-a})$	$\sqrt{-a}$	$(\sqrt{-a},+\infty)$
$f^{'}(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{-a+a\ln(-a)}{2}$	↗

所以， $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\sqrt{-a})$，单调递增区间是 $(\sqrt{-a},+\infty)$；

$f(x)$ 在 $x=\sqrt{-a}$ 处取得极小值 $\frac{-a+a\ln(-a)}{2}$，无极大值.

（2）

由（1）知， $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $\frac{-a+a\ln(-a)}{2}$.

因为 $f(x)$ 存在零点，所以 $\frac{-a+a\ln(-a)}{2}\leq 0$，从而 $a\leq -e$.

当 $a=-e$ 时， $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递减，且 $f(\sqrt{e})=0$，

所以 $x=\sqrt{e}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e})$ 上的唯一零点.

当 $a<-e$ 时， $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递减，且 $f(1)=\frac{1}{2}>0, f(\sqrt{e})=\frac{e+a}{2}<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

综上可知，若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

（3）

设 $g(x)=f(x)-\frac{a}{2}x^2-x=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-x$， $g^{'}(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-1=\frac{1-a}{x}(x-\frac{a}{1-a})(x-1)$.

①若$a>1$，则$g(1)=\frac{1-a}{2}-1=\frac{-1-a}{2}<\frac{a}{a-1}$，符合题意.

②若$a\le\frac{1}{2}$，则$\frac{a}{1-a}\le 1$，故当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

所以，存在$x_0\ge 1$，使得$f(x)-\frac{a}{2}x^2-x<\frac{a}{a-1}$的充要条件为

$g(1)=\frac{1-a}{2}-1=\frac{-1-a}{2}<\frac{a}{a-1}$，解得$-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$.

③若$\frac{1}{2}<a<1$，则$\frac{a}{1-a}>1$，故当$x\in(1,\frac{a}{1-a})$时，$g'(x)<0$；

当$x\in(\frac{a}{1-a},+\infty)$时，$g'(x)>0$.

$g(x)$在$(1,\frac{a}{1-a})$上单调递减，在$(\frac{a}{1-a},+\infty)$上单调递增.

所以，存在$x_0\ge 1$，使得$f(x)-\frac{a}{2}x^2-x<\frac{a}{a-1}$的充要条件为$g(\frac{a}{1-a})<\frac{a}{a-1}$，

而$g(\frac{a}{1-a})=a\ln(\frac{a}{1-a})+\frac{a^2}{2(1-a)}+\frac{a}{a-1}>\frac{a}{a-1}$，所以不合题意.

综上，a的取值范围是$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)\cup(1,+\infty)$.

5.已知函数$f(x)=(x-2)\cdot e^x-\frac{a}{2}(x-1)^2,g(x)=m(x+\ln x)-2e^x$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$a=0$时，令$F(x)=f(x)-g(x)$，若x_0是函数$F(x)$的极值点，且$F\left(x_0\right)>0$，求证：$F(x)>-2x_0^3+2x_0$.

【解析】（1）

解：$f'(x)=(x-1)e^x-a(x-1)=(x-1)(e^x-a)$，

当$a\le 0$时，则当$x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

当$a>0$时，由$f'(x)=0$，得$x=1$或$x=\ln a$，

若$a=e$，则$f'(x)=(x-1)(e^x-e)\ge 0$，所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

②若$0<a<e$，则$\ln a<1$，故当$x\in(-\infty,\ln a)$，$(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

当$x\in(\ln a,1)$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$(\ln a,1)$上单调递减，

③若$a>e$，则$\ln a>1$，故当$x\in(-\infty,1)$，$(\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

当$x\in(1,\ln a)$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-\infty,1)$，$(\ln a,+\infty)$上单调递增，在$(1,\ln a)$上单调递减，

综上所述，当$a\le 0$时，$f(x)$在$(-\infty,1)$上递减，在$(1,+\infty)$上递增；

当$a=e$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递增；

当$0<a<e$时，$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$，$(1,+\infty)$上递增，在$(\ln a,1)$上递减；

当$a>e$时，$f(x)$在$(-\infty,1)$，$(\ln a,+\infty)$上递增，在$(1,\ln a)$上递减；

（2）

证明：$F(x)=f(x)-g(x)=xe^{x}-m\left(x+\ln x\right)$，$\left(x>0\right)$，

则 $F'\left(x\right)=\left(x+1\right)e^{x}-m\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+1\right)\left(e^{x}-\dfrac{m}{x}\right)$，

当 $m\le 0$ 时，$F'\left(x\right)>0$，则函数 $F\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，故函数无极值点，舍去，

当 $m>0$ 时，令 $h\left(x\right)=e^{x}-\dfrac{m}{x}$，

因为函数 $y=e^{x},y=-\dfrac{m}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，

所以函数 $h\left(x\right)=e^{x}-\dfrac{m}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，

取 b 满足 $0<b<\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{m}{2}\right\}$，则 $e^{b}<\sqrt{e}$，$-\dfrac{m}{b}<-2$，

所以 $h\left(b\right)=e^{b}-\dfrac{m}{b}<\sqrt{e}-2<0$，又 $h\left(m\right)=e^{m}-1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(b,a\right)$，使得 $h\left(x\right)=e^{x}-\dfrac{m}{x}=0$，即 $F'\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(e^{x}-\dfrac{m}{x}\right)=0$，

此时 $m=x_0e^{x_0}$，

当 $0<x<x_0$ 时，$F'\left(x\right)<0$，当 $x>x_0$ 时，$F'\left(x\right)>0$，

所以函数 $F\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上递增，

所以 x_0 是函数 $F(x)$ 的极值点，

即若 x_0 是函数 $F(x)$ 的极值点，$m>0$，

$F\left(x\right)_{\min}=F(x_0)=x_0e^{x_0}-m\left(x_0+\ln x_0\right)=x_0e^{x_0}\left(1-x_0-\ln x_0\right)$，

因为 $F\left(x_0\right)>0$，所以 $x_0e^{x_0}\left(1-x_0-\ln x_0\right)>0$，

令 $\varphi\left(x\right)=1-x-\ln x$，则 $\varphi'\left(x\right)=-1-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{x+1}{x}<0$，

所以 $\varphi\left(x\right)=1-x-\ln x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递减，

又 $\varphi\left(1\right)=0$，所以 $0<x_0<1$，

令 $t\left(x\right)=e^{x}-\left(x+1\right),0<x<1$，则 $t'\left(x\right)=e^{x}-1$，

当 $0<x<1$ 时，$t'\left(x\right)=e^{x}-1>0$，则 $t\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上递增，

所以 $t\left(x\right)>t\left(0\right)=0$，所以 $e^{x}>x+1$，

令 $m\left(x\right)=1-x-\ln x-\left(2-2x\right)=x-\ln x-1,0<x<1$，则 $m'\left(x\right)=x-\ln x-1=\dfrac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$m^{'}\left(x\right)<0$，所以函数 $m\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上递减，

所以 $m\left(x\right)>m\left(1\right)=0$，所以 $1-x-\ln x>2-2x$，

所以$F(x_0)=x_0e^{x_0}\left(1-x_0-\ln x_0\right)>x_0\left(1+x_0\right)\left(2-2x_0\right)=-2{x_0}^3+2x_0$，

即$F(x_0)>-2x_0^3+2x_0$，

所以$F(x)>-2x_0^3+2x_0$.

6.已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2-\left(a+2\right)x+2a\ln x$.

（1）若$a>0$，讨论函数$f\left(x\right)$的单调性；

（2）当$1\le a\le 4$且$a\ne 2$时，$f\left(x\right)$的极大值为M，$f\left(x\right)$的极小值为N，求$\left|M-N\right|$的取值范围.（参考数据：$\ln 2\approx 0.7$，$\ln 3\approx 1.1$）

【答案】

（1）答案见解析；

（2）$(0,6-8\ln 2]$.

【解析】（1）

定义域是$(0,+\infty)$，

$f'(x)=x-(a+2)+\frac{2a}{x}=\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x}=\frac{(x-2)(x-a)}{x}$，

当$a=2$时，$f'(x)\ge 0$恒成立，$f(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增；

当$0<a<2$时，$0<x<a$或$x>2$时，$f'(x)>0$，$a<x<2$时，$f'(x)<0$，

$f(x)$的增区间是$(0,a)$，$(2,+\infty)$，减区间是$(a,2)$，

当$a>2$时，$0<x<2$或$x>a$时，$f'(x)>0$，$2<x<a$时，$f'(x)<0$，

$f(x)$的增区间是$(0,2)$，$(a,+\infty)$，减区间是$(2,a)$.

（2）

由（1）$1\le a<2$，$M=f(a)$，$N=f(2)$，$2<a\le 4$时，$M=f(2),N=f(a)$，

所以$\left|M-N\right|=\left|f(a)-f(2)\right|=\left|\frac{1}{2}a^2-2-(a+2)(a-2)+2a(\ln a-\ln 2)\right|=\left|-\frac{1}{2}a^2+2+2a\ln\frac{a}{2}\right|$，

设$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2+2x\ln\frac{x}{2}$，$1\le x\le 4$，

$g'(x)=-x+2\ln\frac{x}{2}+2$，$g'(2)=0$，

设$h(x)=g'(x)=-x+2\ln\frac{x}{2}+2$，$h'(x)=-1+\frac{2}{x}=\frac{2-x}{x}$，

$1\le x<2$时，$h'(x)>0$，$h(x)$递增，$2<x\le 4$时，$h'(x)<0$，$h(x)$递减，

所以$x\in[1,4]$时，$h(x)\le h(2)=0$，即$g'(x)\le 0$，所以$g(x)$在$[1,4]$上单调递减，

又$\boldsymbol{g}(2)=0$，$g(1)=\frac{3}{2}-2\ln 2\approx\frac{3}{2}-2\times 0.7=0.1$，$g(4)=-6+8\ln 2\approx -6+8\times 0.7=-0.4$，

所以$\left|g(x)\right|$的值域是$[0,6-8\ln 2]$，

所以$1\le a\le 4$且$a\ne 2$时，$0<|M-N|\le 6-8\ln 2$．

即$|M-N|$的取值范围是$(0,6-8\ln 2]$．

7．已知函数$f(x)=\ln x-2ax-\dfrac{2a-1}{x}+1(a\in R)$．

（1）当$0\leqslant a<\dfrac{1}{4}$时，讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）设函数$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2a-1}{x}+f(x)$，当$|a|>1$时，若函数$g(x)$的极大值点为$x_1$，证明：$x_1\ln x_1-ax_1^2>-1$．

【试题来源】2021届高三数学二轮复习

【答案】（1）答案见解析；（2）证明见解析．

【分析】（1）先求出$f'(x)=-\dfrac{(x-1)(2ax+2a-1)}{x^2}$，再对$a$分类讨论得到函数$f(x)$的单调性；

（2）通过分析得到$a=\dfrac{x_1^2+1}{2x_1}$，所以$x_1lnx_1-ax_1^2=-\dfrac{1}{2}x_1^3-\dfrac{1}{2}x_1+x_1lnx_1$，$0<x_1<1$，令$h(x)=-\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x+xlnx$，$0<x<1$，再利用导数证明$h(x)>-1$即得证．

【解析】（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2a+\dfrac{2a-1}{x^2}=-\dfrac{2ax-x-(2a-1)}{x^2}=-\dfrac{(x-1)(2ax+2a-1)}{x^2}$，

①当$a=0$时，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

②当$0<a<\dfrac{1}{4}$时，由$f'(x)=0$，解得$x_1=1$，$x_2=\dfrac{1}{2a}-1$，

此时$\dfrac{1}{2a}-1>1>0$，

$\therefore$当$x\in(0,1)$，$[\dfrac{1}{2a}-1$，$+\infty)$时，$f'(x)\leqslant 0$，函数$f(x)$单调递减，

当$x\in[1$，$\dfrac{1}{2a}-1)$，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

综上所述，当$a=0$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$[1$，$+\infty)$上单调递增，

当$0<a<\dfrac{1}{4}$时，$f(x)$在$(0,1)$，$[\dfrac{1}{2a}-1$，$+\infty)$时，单调递减，在$\in[1$，$\dfrac{1}{2a}-1)$，单调递增．

（2）$\because g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2a-1}{x}+f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2ax+lnx+1$，

$\therefore g'(x)=x-2a+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-2ax+1}{x}$，当$|a|>1$时，即$a>1$或$a<-1$时，

令$g'(x)=0$，则$x^2-2ax+1=0$的两个根为x_1，x_2，

$\because$ 函数 $g(x)$ 的极大值点为 x_1， $\therefore 0<x_1<x_2$，

又 $x_1x_2=1$， $x_1+x_2=2a$， $\therefore a>1$， $0<x_1<1$，

由 $g'(x_1)=0$ ，可得 $x_1^2-2ax_1+1=0$ ，则 $a=\dfrac{x_1^2+1}{2x_1}$ ，

$\therefore x_1lnx_1-ax_1^2=x_1lnx_1-\dfrac{x_1^3+x_1}{2}=-\dfrac{1}{2}x_1^3-\dfrac{1}{2}x_1+x_1lnx_1$， $0<x_1<1$，

令 $h(x)=-\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x+xlnx$， $0<x<1$， $\therefore h'(x)=-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{1}{2}+lnx$，

$\therefore h''(x)=-3x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-3x^2}{x}$， $x\in(0,1)$，

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时， $h''(x)>0$，当 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 时， $h''(x)<0$，

$\therefore h'(x)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $1)$ 上单调递减，

$\therefore h'(x)\leqslant h'(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=-ln\sqrt{3}<0$， $\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)>h$（1） $=-1$，故 $x_1lnx_1-ax_1^2>-1$.

8．已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}x-2\sin x+\sqrt{3}-1\left(x>0\right)$， $g\left(x\right)=2\sqrt{3}x-5\sin x-\sqrt{3}\cos x+3$.

（1）求 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上的最小值；

（2）证明： $g\left(x\right)>f\left(x\right)$.

【试题来源】湘豫名校联考 2020-2021 学年高三（3 月）

【答案】（1） $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}+\sqrt{3}-2$；（2）证明见解析.

【分析】（1）求导函数 $f^{'}(x)$，由 $f^{'}(x)$ 确定单调性，得极小值也即为最小值.

（2）不等式 $g\left(x\right)>f\left(x\right)$ 化为 $\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3}>0$. 引入函数 $\varphi\left(x\right)=\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3}$ ，

由导数求得 $\varphi(x)$ 的最小值即可证明.

【解析】（1） $f'\left(x\right)=\sqrt{3}-2\cos x$ ，令 $f'\left(x\right)=0$，得 $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，

故在区间 $\left[0,\pi\right]$ 上， $f'\left(x\right)$ 的唯一零点是 $x=\dfrac{\pi}{6}$，

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时， $f'\left(x\right)<0$， $f\left(x\right)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$ 时， $f'\left(x\right)>0$， $f\left(x\right)$ 单调递增，

故在区间$[0,\pi]$上，$f(x)$的最小值为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+\sqrt{3}-2$.

（2）要证：当$x>0$时，$2\sqrt{3}x-5\sin x-\sqrt{3}\cos x+3>\sqrt{3}x-2\sin x+\sqrt{3}-1$，

即证：当$x>0$时，$\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3}>0$.

令$\varphi(x)=\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3}$，

所以$\varphi'(x)=\sqrt{3}-3\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

所以$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$时，$x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right)$，所以$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，所以$\varphi'(x)<0$，

所以$x\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right]$时，$x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{1}{2},1\right]$，所以$\varphi'(x)>0$，

所以$\varphi(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{\pi}{6},\pi\right]$上单调递增，

所以$\varphi(x)\geq\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+4-\sqrt{3}=1+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\sqrt{3}>0$，

所以$x\in(0,\pi]$时，$\varphi(x)>0$，

而$x\in(\pi,+\infty)$时，$\varphi(x)=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4-\sqrt{3}>\sqrt{3}\pi-2\sqrt{3}+4-\sqrt{3}>0$，

综上，$x>0$时，$\varphi(x)>0$，即$g(x)>f(x)$.

9．设函数$f(x)=a^x+e^{-x}\,(a>1)$.

（1）求证：$f(x)$有极值点；

（2）设$f(x)$的极值点为x_0，若对任意正整数a都有$x_0\in(m,n)$，其中$m,n\in Z$，求$n-m$的最小值.

【试题来源】江苏省盐城市、南京市2021届高三下学期第一次模拟考试

【答案】（1）证明见解析；（2）2.

【解析】（1）由题意得$f'(x)=a^x\ln a-e^{-x}$，所以$f''(x)=a^x(\ln a)^2+e^{-x}>0$，所以函数$f'(x)$单调递增，由$f'(x)=0$，得$(ae)^x\ln a=1,(ae)^x=\frac{1}{\ln a}$.

因为$a>1$，所以$\frac{1}{\ln a}>0$，所以$x=\log_{ae}\frac{1}{\ln a}$.

当$x>\log_{ae}\frac{1}{\ln a}$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增；

当$x<\log_{ae}\frac{1}{\ln a}$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减.

因此，当$x=\log_{ae}\frac{1}{\ln a}$时函数$f(x)$有极值.

（2）由（1）知，函数$f(x)$的极值点x_0（即函数$f'(x)$的零点）唯一，

因为 $f'(-1)=\frac{\ln a}{a}-e$．令 $g(a)=\frac{\ln a}{a}$，则 $g'(a)=\frac{1-\ln a}{a^2}=0$，得 $a=e$．

当 $a>e$ 时，$g'(a)<0, g(a)$ 单调递减；当 $0<a<e$ 时，$g'(a)>0, g(a)$ 单调递增，

所以 $g(a)\le g(e)=\frac{1}{e}$，所以 $f'(-1)=\frac{\ln a}{a}-e<0$．

而 $f'(0)=\ln a-1$，当 $a=2$ 时，$f'(0)<0$，当 $a\ge 3$ 时，$f'(0)>0$．

又 $f'(1)=a\ln a-\frac{1}{e}$．因为 a 为正整数且 $a\ge 2$ 时，所以 $a\ln a\ge 2\ln 2>1>\frac{1}{e}$．

当 $a\ge 2$ 时，$f'(1)>0$．

即对任意正整数 $a>1$，都有 $f'(-1)<0$，$f'(1)>0$，所以 $x_0\in(-1,1)$ 恒成立，

且存在 $a=2$，使 $x_0\in(0,1)$，也存在 $a=3$，使 $x_0\in(-1,0)$．

所以 $n-m$ 的最小值为 2．

【名师点睛】本题考查导数的应用，解题的关键是利用导数结合零点存在性定理得出 $f'(-1)<0$，$f'(1)>0$，得出 m,n 的可能值．

10．已知函数 $f(x)=e^x-ax$，其中 $a\in R$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性；

（2）若函数 $g(x)=f(x)+\ln(x+1)-\cos x$，则是否存在实数 a，使得函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值？若存在，求出 a 值；若不存在，说明理由．

【试题来源】广东省广州市天河区 2021 届高考二模

【答案】（1）答案见详解；（2）存在 $a=2$，使得 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值

【分析】（1）求出导函数，讨论 $a\le 1$、$1<a<e$ 或 $a\ge e$，结合函数的单调性与导数之间的关系进行求解即可．（2）求出 $g'(x)=e^x-a+\sin x+\frac{1}{x+1}$，根据极值的定义可得 $g'(0)=2-a=0$，得出 $a=2$，再证明充分性，利用导数证明当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，函数 $g(x)$ 单调递增；再构造函数令 $m(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$，证明当 $x\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$ 时，函数 $g(x)$ 单调递减．

【解析】（1）由 $f(x)=e^x-ax$，则 $f'(x)=e^x-a$，

因为 $x\in[0,1]$，则 $e^x\in[1,e]$，

当 $a\le 1$ 时，$f'(x)=e^x-a\ge 0$，函数在 $[0,1]$ 上单调递增；

当 $1<a<e$ 时，令 $f'(x)=e^x-a\ge 0$，解得 $x\ge \ln a$，

令 $f'(x)=e^x-a<0$，解得 $x<\ln a$，

即函数在$\left[\ln a,1\right]$上单调递增，在$\left[0,\ln a\right)$上单调递减；

当$a\geq e$时，$f'(x)=e^x-a\leq 0$，函数在$[0,1]$上单调递减；

（2）$g(x)=f(x)+\ln(x+1)-\cos x=e^x-ax-\cos x+\ln\left(x+1\right)$，

$g'\left(x\right)=e^x-a+\sin x+\dfrac{1}{x+1}$，

显然$x=0$是函数$g(x)$的极小值点的必要条件为$g'\left(0\right)=2-a=0$，即$a=2$，

此时$g'\left(x\right)=e^x+\sin x+\dfrac{1}{x+1}-2$，显然当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，

$g'\left(x\right)=e^x+\sin x+\dfrac{1}{x+1}-2>1+x+\sin x+\dfrac{1}{x+1}-2>\sin x>0$，

当$x\in\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$时，$\left(1+x\right)\left(1-x+\dfrac{3}{2}x^2\right)=1+\dfrac{x^2}{2}\left(3x+1\right)>1$，

故$\dfrac{1}{x+1}<1-x+\dfrac{3}{2}x^2$，令$m\left(x\right)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x}$，

则$m'\left(x\right)=-\dfrac{x^2}{2}e^{-x}\leq 0$，故$m\left(x\right)$是减函数，

故当$x<0$时，$m\left(x\right)>m\left(0\right)=1$，即$e^x<1+x+\dfrac{x^2}{2}$，

令$h\left(x\right)=\sin x-\dfrac{1}{2}x$，则$h'\left(x\right)=\cos x-\dfrac{1}{2}$，

当$-1<x<0$时，$h'\left(x\right)>\cos 1-\dfrac{1}{2}>0$，故$h\left(x\right)$在$\left(-1,0\right)$上单调递增，

故当$-1<x<0$时，$h\left(x\right)<h\left(0\right)=0$，即$\sin x<\dfrac{1}{2}x$，

故当$x\in\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$时，$g'\left(x\right)=e^x+\sin x+\dfrac{1}{x+1}-2$

$\leq\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)+\left(1-x+\dfrac{3x^2}{2}\right)-2+\dfrac{x}{2}=2x^2+\dfrac{x}{2}<0$，

因此，当$a=2$时，$x=0$是$g\left(x\right)$的极小值点，即充分性也成立，

综上，存在$a=2$，使得$g\left(x\right)$在$x=0$处取得极小值．

11．已知函数$f(x)=\dfrac{ax^2}{e^x}+\dfrac{1}{2}x^2-2x(a\in\mathbf{R})$（$e=2.71828\ldots$是自然对数的底数）．

（1）若 $f(x)$ 在 $x\in(0.2)$ 内有两个极值点，求实数 a 的取值范围；

（2）$a=1$ 时，讨论关于 x 的方程 $\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2+2x\right]\frac{1}{xe^x}+b=|\ln x|(b\in\mathbf{R})$ 的根的个数.

【试题来源】山西省晋中市 2021 届高三下学期二模

【答案】（1）$e<a<\frac{e^2}{2}$；（2）答案见解析.

【分析】（1）若 $f(x)$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个极值点，则 $f'(x)=0$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个不相等的变号根，等价于 $e^x-ax=0$ 在 $x\in(0,2)$ 上有两个不相等的变号根. 令 $g(x)=e^x-ax$，分类讨论 $g(x)$ 有两个变号根时 a 的范围；（2）化简原式可得 $h(x)=|\ln x|-\frac{x}{e^{2x}}-b, x\in(0,+\infty)$，分别讨论 $x\in(1,+\infty)$ 和 $x\in(0,1)$ 时 $h(x)$ 的单调性，可得 $h(x)$ 的最小值，分类讨论最小值与 0 的关系，结合 $h(x)$ 的单调性可以得到零点个数.

【解析】（1）由题意可求得 $f'(x)=\frac{a\left(2x-x^2\right)}{e^x}+x-2=\frac{(x-2)\left(e^x-ax\right)}{e^x}$，

因为 $f(x)$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个极值点，所以 $f'(x)=0$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个不相等的变号根，即 $e^x-ax=0$ 在 $x\in(0,2)$ 上有两个不相等的变号根.

设 $g(x)=e^x-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$x\in(0,2), g'(x)=e^x-a>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，不符合条件.

②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=e^x-a=0$ 得 $x=\ln a$，

当 $\ln a\geqslant 2$，即 $a\geqslant e^2$ 时，$x\in(0,2), g'(x)=e^x-a<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，不符合条件；

当 $\ln a\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$x\in(0,2), g'(x)=e^x-a>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，不符合条件；

当 $0<\ln a<2$，即 $1<a<e^2$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上单调递减，$(\ln a,2)$ 上单调递增，

若要 $e^x-ax=0$ 在 $x\in(0,2)$ 上有两个不相等的变号根，则 $\begin{cases}g(0)>0,\\g(2)>0,\\g(\ln a)<0,\\0<\ln a<2,\end{cases}$，解得 $e<a<\frac{e^2}{2}$.

综上所述，$e<a<\frac{e^2}{2}$.

（2）设 $h(x)=|\ln x|-\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2+2x\right]\frac{1}{xe^x}-b=|\ln x|-\frac{x}{e^{2x}}-b, x\in(0,+\infty)$，

令 $y=\frac{x}{e^{2x}}$，则 $y'=\frac{1-2x}{e^{2x}}$，所以 $y=\frac{x}{e^{2x}}$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

（i）当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x>0$，则 $h(x)=\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-b$，所以 $h'(x)=e^{-2x}\left(\frac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)$.

因为 $2x-1>0, \frac{e^{2x}}{x}>0$，所以 $h'(x)>0$，因此 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

（ii）当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x<0$，则 $h(x)=-\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-b$，所以 $h'(x)=e^{-2x}\left(-\frac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)$.

因为 $e^{2x}\in\left(1,e^2\right), e^{2x}>1, 0<x<1, \therefore \frac{e^{2x}}{x}>1$, 即 $-\frac{e^{2x}}{x}<-1$,，又 $2x-1<1$，所以 $h'(x)=e^{-2x}\left(-\frac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)<0$，

因此 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

综合（i）（ii）可知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=-e^{-2}-b$，

当 $h(1)=-e^{-2}-b>0$，即 $b<-e^{-2}$ 时，$h(x)$ 没有零点，故关于 x 的方程根的个数为 0，

当 $h(1)=-e^{-2}-b=0$，即 $b=-e^{-2}$ 时，$h(x)$ 只有一个零点，故关于 x 的方程根的个数为 1，

当 $h(1)=-e^{-2}-b<0$，即 $b>-e^{-2}$ 时，

①当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)=\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-b>\ln x-\left(\frac{1}{e^2}+b\right)>\ln x-1-b$，要使 $h(x)>0$，可令 $\ln x-1-b>0$，

即 $x\in\left(e^{1+b},+\infty\right)$；

②当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)=-\ln x-\frac{x}{e^{2x}}-b\geqslant-\ln x-\left(\frac{1}{2}e^{-1}+b\right)>-\ln x-1-b$，要使 $h(x)>0$，

可令 $-\ln x-1-b>0$，即 $x\in\left(0,e^{-1-b}\right)$，

所以当 $b>-e^{-2}$ 时，$h(x)$ 有两个零点，故关于 x 的方程根的个数为 2，

综上所述：当 $b=-e^{-2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 0，

当 $b=-e^{-2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 1，

当 $b>-e^{-2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 2.

12．已知函数 $f(x)=x(lnx+3ax+2)-3ax+4$．

（1）若 $f(x)$ 在$[1，+\infty)$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围．

（2）若 $f(x)$ 的最大值为 6，求实数 a 的值．

解：（1）$\because$ 函数 $f(x)=x(lnx+3ax+2)-3ax+4$，$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．

$\therefore f'(x)=lnx+3ax+2+x(\frac{1}{x}+3a)-3a=lnx+6ax+3-3a$，

$\because f(x)$ 在$[1，+\infty)$ 上是减函数，$\therefore f'(x)=lnx+6ax+3-3a\leqslant 0$ 在$[1，+\infty)$ 内恒成立，

$\therefore 3a\leqslant\frac{3+lnx}{1-2x}$ 在$[1，+\infty)$ 内恒成立，设 $g(x)=\frac{3+lnx}{1-2x}$，则 $g'(x)=\frac{\frac{1}{x}+4+2lnx}{(1-2x)^2}$，

$\because x\geqslant 1$，$\therefore g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在$[1，+\infty)$ 内单调递增，$\therefore g(x)_{min}=g$（1）$=-3\geqslant 3a$，$\therefore a\leqslant -1$．

（2）由（1）可得 f（1）$=6$，又 $f(x)$ 的最大值为 6，则 f'（1）$=0$，$\therefore 3a+3=0$，$a=-1$．

下面证明：当 $a=-1$ 时，$f(x)\leqslant 6$，即 $x(lnx-3x+2)+3x-2\leqslant 0$，也即 $lnx-3x-\frac{2}{x}+5\leqslant 0$，

设 $h(x)=lnx-3x-\frac{2}{x}+5(x>0)$，$\therefore h'(x)=\frac{(3x+2)(1-x)}{x^2}$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，$\therefore h(x)_{max}=h$（1）$=0$，

$\therefore lnx-3x-\frac{2}{x}+5\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 内恒成立，$\therefore a=-1$．

13．已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}+ax+b(a,b\in R)$．

（1）若 $f(x)$ 在 R 上是单调递增函数，求 a 的取值范围；

（2）若当 $a\in(-1,0)$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $2b$，求证：$b>0$．

【解答】解：（1）$f'(x)=\frac{1-x+ae^x}{e^x}$，设 $g(x)=1-x+ae^x$，

由题意知：$g(x)\geqslant 0$ 在 R 上恒成立，即 $a\geqslant\frac{x-1}{e^x}$ 恒成立．

设 $\phi(x)=\frac{x-1}{e^x},\phi'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，

因此 $\phi(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是单调增加的，

在 $(2,+\infty)$ 上是单调减少的，$\phi(x)_{max}=\phi(2)=\frac{1}{e^2}$，故 $a\geqslant\frac{1}{e^2}$．

（2）证明：$f'(x)=\frac{1-x+ae^x}{e^x},g(x)=1-x+ae^x,g'(x)=-1-ae^x$，

因为 $a\in(-1,0)$，$g'(x)<0$，故函数 $g(x)$ 在 R 上是单调递减．

又 $g(0)=1+a>0$，g（1）$=ae<0$，故必 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $g(x_0)=0$，

即 $ae^{x_0}=x_0-1(*)$，因为 $e^x>0$，所以 $x_0<1$．

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$；

当 $x\in(x_0，+\infty)$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$．

因此，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,x_0)$，减区间为 $(x_0，+\infty)$．

$f(x)_{max}=f(x_0)=\frac{x_0}{e^{x_0}}+ax_0+b=2b,b=\frac{x_0}{e^{x_0}}+ax_0\frac{b}{a}=\frac{x_0}{ae^{x_0}}+x_0$，

由(*)式得，$\frac{b}{a}=\frac{x_0}{x_0-1}+x_0=\frac{{x_0}^2}{x_0-1}<0$

因为$a\in(-1,0)$，故$b>0$．

法二：（2） $f'(x)=\frac{1-x+ae^x}{e^x},g(x)=1-x+ae^x,g'(x)=-1-ae^x$，
因为$a\in(-1,0)$， $g'(x)<0$，
故函数$g(x)$在R上是单调递减.
又$g(0)=1+a>0$， g（1）$=ae<0$，

故必$\exists x_0\in(0,1)$，使得$g(x_0)=0$，

即$ae^{x_0}=x_0-1(*)$，因为$e^x>0$，所以$x_0<1$．

当$x\in(-\infty,x_0)$时， $g(x)>0$，则$f'(x)>0$；

当$x\in(x_0$， $+\infty)$时， $g(x)<0$，则$f'(x)<0$．

因此，函数$f(x)$的增区间为$(-\infty,x_0)$，减区间为$(x_0$， $+\infty)$．

$f(x)_{max}=f(x_0)=\frac{x_0}{e^{x_0}}+ax_0+b=2b,b=\frac{x_0}{e^{x_0}}+ax_0$

由$ae^{x_0}=x_0-1$得： $a=\frac{x_0-1}{e^{x_0}}\in(-1,0)$，即$\frac{x_0-1}{e^{x_0}}<0$且$\frac{x_0-1}{e^{x_0}}>-1$，

因为$e^x>0$，所以$\begin{cases}x_0-1<0\\x_0+e^{x_0}>1\end{cases}$，解得： $0<x_0<1$，

又$b=\frac{x_0}{e^{x_0}}+ax_0=\frac{x_0}{e^{x_0}}+x_0(\frac{x_0-1}{e^{x_0}})=\frac{{x_0}^2}{e^{x_0}}$，
令$h(x)=\frac{x^2}{e^x},x\in(0,1),h'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}>0$，
所以$b>h(0)=0$，
即$b>0$成立.

14.已知函数$f(x)=ln(ax+1)+\frac{1-x}{1+x},x\geqslant 0$，其中$a>0$．
（Ⅰ）求$f(x)$的单调区间;
（Ⅱ）若$f(x)$的最小值为1，求a的取值范围.

解：（Ⅰ）求导函数，可得$f'(x)=\frac{ax^2+a-2}{(ax+1)(1+x)^2}$， $\because x\geqslant 0$， $a>0$， $\therefore ax+1>0$．

①当$a\geqslant 2$时，在区间$(0,+\infty)$上， $f'(x)>0$， $\therefore f(x)$的单调增区间为$(0,+\infty)$．

②当$0<a<2$时，由$f'(x)>0$解得$x>\sqrt{\frac{2-a}{a}}$，由$f'(x)<0$解得$x<\sqrt{\frac{2-a}{a}}$，

$\therefore f(x)$的单调减区间为$(0,\sqrt{\frac{2-a}{a}})$，单调增区间为$(\sqrt{\frac{2-a}{a}},+\infty)$．

（Ⅱ）当$a\geqslant 2$，由（Ⅰ）①知， $f(x)$的最小值为$f(0)=1$;

当$0<a<2$时，由（Ⅰ）②知， $f(x)$在$x=\sqrt{\frac{2-a}{a}}$处取得最小值$f(\sqrt{\frac{2-a}{a}})<f(0)=1$，

综上可知，若$f(x)$的最小值为1，则a的取值范围是$[2$， $+\infty)$．

15.设函数$f(x)=e^x[ax^2-(4a+1)x+4a+3]$．

（1）$a>0$时，求 $y=f(x)$ 的单调增区间；
（2）若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，求 a 的取值范围．

解：（1）因为 $f(x)=e^{x}[ax^{2}-(4a+1)x+4a+3]$，

所以 $f'(x)=[ax^{2}-(2a+1)x+2]e^{x}=(ax-1)(x-2)e^{x}$，（1 分）

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，令 $f'(x)>0$，得：$x<\frac{1}{a}$ 或 $x>2$（2 分）

当 $a<\frac{1}{2}$ 时，令 $f'(x)>0$，得：$x<2$ 或 $x>\frac{1}{a}$（3 分）

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立．（4 分）

综上，当 $a>\frac{1}{2}$ 时，单调递增区间是 $(-\infty,\frac{1}{a})$，$(2,+\infty)$，

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，单调递增区间是 $(-\infty,2)$，$(\frac{1}{a}$，$+\infty)$．

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增．（5 分）

（2）$f'(x)=[ax^{2}-(2a+1)x+2]e^{x}=(ax-1)(x-2)e^{x}$，

由（1）得，若 $a>\frac{1}{2}$，$f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值；（6 分）

$0<a\leqslant\frac{1}{2}$，所以 2 不是 $f(x)$ 的极小值点．（7 分）

$a=0$时，$f'(x)=(-1)(x-2)e^{x}>0$，$x<2$，$f'(x)=(-1)(x-2)e^{x}<0$，$x>2$

2 是 $f(x)$ 的极大值点（9 分）

$a<0$时，$f'(x)>0$，得：$\frac{1}{a}<x<2$，

令 $f'(x)<0$，得：$x<\frac{1}{a}$ 或 $x>2$

2 是 $f(x)$ 的极大值点（11 分）

16.设 $f(x)=xlnx-ax^{2}+(2a-1)x$，$a\in R$．

（1）令 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；
（2）已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求实数 a 的取值范围．
解：（1）由 $f'(x)=lnx-2ax+2a$，
可得 $g(x)=lnx-2ax+2a$，$x\in(0,+\infty)$，
所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-2a=\frac{1-2ax}{x}$，
当 $a\leqslant 0$，$x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增；
当 $a>0$，$x\in(0,\frac{1}{2a})$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，
$x\in(\frac{1}{2a}$，$+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减．
所以当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$；
当 $a>0$ 时，$g(x)$ 的单调增区间为 $(0,\frac{1}{2a})$，单调减区间为 $(\frac{1}{2a}$，$+\infty)$．
（2）由 $f'(x)=lnx-2ax+2a$，则 f'（1）$=0$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
则当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，
所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，不符合题意；

②当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{1}{2a}>1$，由（1）知 $f'(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2a})$ 内单调递增，

可得当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,\dfrac{1}{2a})$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，在 $(1,\dfrac{1}{2a})$ 内单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，不合题意；

③当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{1}{2a}=1$，$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 单调递减，不合题意；

④当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$0<\dfrac{1}{2a}<1$，$f'(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2a})$ 上递增，在 $(\dfrac{1}{2a}$，$+\infty)$ 递减，

当 $x\in(\dfrac{1}{2a}$，$1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，
所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值，符合题意；

综上可知，实数 a 的取值范围为 $(\dfrac{1}{2}$，$+\infty)$．

17.已知函数 $f(x)=ax^2+2ln(1+x)-2\sin x$，$a>0$．

（1）若 $a\geqslant 1$，证明：当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$f(x)>0$；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求正实数 a 的取值范围．

解：（1）证明：由题知 $f'(x)=2ax+\dfrac{2}{1+x}-2\cos x, f'(0)=0$，

令 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=2[a-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\sin x]$，

若 $a\geqslant 1$，当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)=2[a-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\sin x]\geqslant 2[1-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\sin x]>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$\therefore h(x)>h(0)=0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$\therefore f(x)>f(0)=0$；

（2）①若 $a\geqslant 1$，由（1）知，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，

因此 $x=0$ 不可能是 $f(x)$ 的极大值点；

②若 $0<a<1$，令 $\varphi(x)=h'(x)=2[a-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\sin x]$，

$\because$ 当 $x\in(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\varphi'(x)=2\cos x+\dfrac{4}{(1+x)^3}>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 即 $h'(x)$ 在 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，

又$\because$ $\varphi(0)=h'(0)=2(a-1)<0,\varphi(\frac{\pi}{2})=h'(\frac{\pi}{2})=2[a+1-\frac{1}{(1+\frac{\pi}{2})^2}]>0$，

$\therefore$存在$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得$h'(\alpha)=0$，

$\therefore$当$x\in(-1,\alpha)$时，$h'(x)<h'(\alpha)=0$，

$\therefore h(x)=f'(x)$在$(-1,\alpha)$上单调递减，$f(0)=h(0)=0$，

$\therefore$当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(0,\alpha)$时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,\alpha)$上单调递减，

综上，当$x=0$是$f(x)$的极大值点时，$0<a<1$.

18.已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{2}ax^2+\ln\left(x+1\right)\left(a>0\right)$，$g\left(x\right)=\sin x$.

（1）求$f\left(x\right)$的极值点；

（2）当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f\left(x\right)-g\left(x\right)>0$，求$a$的取值范围.

【答案】（1）答案见解析；（2）$\left[1,+\infty\right)$.

【解析】（1）$f\left(x\right)$的定义域为$\left(-1,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=ax+\frac{1}{x+1}=\frac{ax^2+ax+1}{x+1}\left(a>0\right)$，

令$m\left(x\right)=ax^2+ax+1$，则$\Delta=a^2-4a=a\left(a-4\right)$；

①当$\Delta\le0$，即$0<a\le4$时，$m\left(x\right)\ge0$，则$f'\left(x\right)\ge0$，

$\therefore$ $f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上单调递增，无极值点；

②当$\Delta>0$，即$a>4$时，令$m\left(x\right)=0$，解得$x_1=\frac{-a-\sqrt{a\left(a-4\right)}}{2a}$，$x_2=\frac{-a+\sqrt{a\left(a-4\right)}}{2a}$

$\because x_1+1=\frac{a-\sqrt{a\left(a-4\right)}}{2a}=\frac{\sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-4a}}{2a}>0$，$\therefore x_1>-1$，则$x_2>x_1>-1$；

当$x\in\left(-1,x_1\right)$和$\left(x_2,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0$；当$x\in\left(x_1,x_2\right)$时，$f'\left(x\right)<0$；

$\therefore$ $f\left(x\right)$在$\left(-1,x_1\right)$，$\left(x_2,+\infty\right)$上单调递增，在$\left(x_1,x_2\right)$上单调递减，

$\therefore$ $f\left(x\right)$的极大值点为$x=\frac{-a-\sqrt{a\left(a-4\right)}}{2a}$，极小值点为$x=\frac{-a+\sqrt{a\left(a-4\right)}}{2a}$.

综上所述：当$0<a\le4$时，$f\left(x\right)$无极值点；当$a>4$时，$f\left(x\right)$的极大值点为$x=\frac{-a-\sqrt{a\left(a-4\right)}}{2a}$，极小值点为

$x=\frac{-a+\sqrt{a\left(a-4\right)}}{2a}$.

（2）记 $h(x)=f(x)-g(x)$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $h(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+\ln(x+1)-\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore h'(x)=ax+\dfrac{1}{x+1}-\cos x$.

记 $F(x)=h'(x)$，则 $F'(x)=a-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\sin x$.

①当 $a\geq 1$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$F'(x)>0$，$\therefore F(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数，又 $F(0)=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数，又 $h(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)-g(x)>0$.

②当 $0<a<1$ 时，$\because F'(0)=a-1<0$，$F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a+1-\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)^2}>0$，

$\therefore$ 存在 $x=t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $F'(t)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,t)$ 时,，$F'(x)<0$，此时 $F(x)$ 在 $(0,t)$ 上为减函数，

又 $F(0)=0$. $\therefore$ 当 $x\in(0,t)$ 时，$F(x)<0$，即 $h'(x)<0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,t)$ 时，$h(x)$ 为减函数，又 $h(0)=0$，$\therefore h(x)<0$ 不满足题意；

综上所述：a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

19.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=\ln x$.

（1）求函数 $h(x)=f(x)\cdot g'(x)$ 的最小值（$g'(x)$ 为函数 $g(x)$ 的导函数）；

（2）试判断曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 公切线的条数.

【答案】（1）e；（2）2 条公切线.

【解析】（1）$g'(x)=\dfrac{1}{x}$，函数 $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，定义域为 $(0,+\infty)$，

且 $h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$，令 $h'(x)=0$ 得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

即函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=\mathrm{e}$.

（2）设曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与切线的切点横坐标为 x_1 ，

曲线 $y=\ln x$ 与切线的切点横坐标为 $x_2\left(x_1\neq x_2,x_2>0\right)$.

因为 $\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$ ，$\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$ ，所以 $\mathrm{e}^{x_1}=\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

由 $\mathrm{e}^{x_1}=\dfrac{1}{x_2}\Rightarrow x_1=-\ln x_2$ ，将其代入 $\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}-\ln x_2}{x_1-x_2}$ 得 $\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{\dfrac{1}{x_2}-\ln x_2}{-\ln x_2-x_2}$ ，

整理得 $x_2\ln x_2-\ln x_2-x_2-1=0$.

记 $x=x_2>0$ ，令 $r(x)=x\ln x-\ln x-x-1$ ，

则 $r'(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$ ，$r'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

且 $r'(1)=-1<0$ ，$r'(2)=\ln 2-\dfrac{1}{2}>0$ ，所以 $r'(x)=0$ 在 $(1,2)$ 上有唯一的解，设为 x_0 ，

则函数 $r(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，故 $r(x)$ 有极小值.

又 $\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}$ ，所以 $r(x_0)=x_0\ln x_0-\ln x_0-x_0-1$

$=x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}-x_0-1=-\left(\dfrac{1}{x_0}+x_0\right)<0$.

因为 $r\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=1-\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}>0$ ，$r\left(\mathrm{e}^2\right)=\mathrm{e}^2-3>0$ ，

所以 $r(x)=x\ln x-\ln x-x-1=0$ 有两个正数根，再由 $\mathrm{e}^{x_1}=\dfrac{1}{x_2}$ ，可得两个对应的 x_1 的值.

故曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有 2 条公切线.

20.记 $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$ ，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．若对 $\forall x\in D$ ，$f''(x)>0$ ，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的“凸函数”．已知函数 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-1$ ，$a\in\mathbf{R}$.

（1）若函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $y=f(x)-x$ 在 $(1,+\infty)$ 上有极值，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $\left(-\infty,1-\ln 2\right)$；(2) $\left(\dfrac{e-2}{2},+\infty\right)$.

【解析】(1) $\because f'\left(x\right)=e^{x}-x^{2}-2ax$，

若函数 $f\left(x\right)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数，则 $f''\left(x\right)=e^{x}-2x-2a>0$，即 $2a<e^{x}-2x$，

令 $y=e^{x}-2x$，$y'=e^{x}-2$，则当 $x=\ln 2$ 时，$y'=0$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(-\infty,\ln 2\right)$ 时，$y'<0$；当 $x\in\left(\ln 2,+\infty\right)$ 时，$y'>0$；

$\therefore$ 当 $x\in\left(-\infty,\ln 2\right)$ 时，$y=e^{x}-2x$ 单调递减；当 $x\in\left(\ln 2,+\infty\right)$ 时，$y=e^{x}-2x$ 单调递增，

$\therefore y_{\min}=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2$，$\therefore 2a<2-2\ln 2$，解得 $a<1-\ln 2$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $\left(-\infty,1-\ln 2\right)$.

(2) $\because y=f\left(x\right)-x=e^{x}-\dfrac{1}{3}x^{3}-ax^{2}-x-1$，$\therefore y'=e^{x}-x^{2}-2ax-1$，

$\because y=f\left(x\right)-x$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上有极值，$\therefore g\left(x\right)=e^{x}-x^{2}-2ax-1$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 有变号零点，

$g'\left(x\right)=e^{x}-2x-2a$，令 $m\left(x\right)=e^{x}-2x-2a$，则 $m'\left(x\right)=e^{x}-2$，

$\because x>1$，$\therefore m'\left(x\right)>0$，$\therefore m\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore g'\left(x\right)=m\left(x\right)>m\left(1\right)=e-2-2a$；

①当 $e-2a-2\geq 0$，即 $a>\dfrac{e-2}{2}$ 时，$g'\left(x\right)\geq 0$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore g\left(x\right)>g\left(1\right)=e-2-2a\geq 0$. 即 $g\left(x\right)>0$，

$\therefore g\left(x\right)=e^{x}-x^{2}-2ax-1$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 无零点，不合题意；

②当 $e-2a-2<0$，即 $a>\dfrac{e-2}{2}$ 时，则 $\exists x_{0}\in\left(1,+\infty\right)$，使得 $m\left(x_{0}\right)=0$，

当 $x\in\left(1,x_{0}\right)$ 时,，$m\left(x\right)<m\left(x_{0}\right)=0$，$\therefore g\left(x\right)$ 单调递减，

又 $g\left(1\right)=e-2-2a<0$，当 $x\in\left(1,x_{0}\right)$ 时，$g\left(x\right)<0$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $x\in\left(1,x_{0}\right)$ 上无零点；

当 $x\in\left(x_{0},+\infty\right)$ 时，$m\left(x\right)>m\left(x_{0}\right)=0$，$\therefore g\left(x\right)$ 单调递增，

又 $x\to+\infty$ 时，$g\left(x\right)\to+\infty$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 上有零点，且在零点左右两侧 $g\left(x\right)$ 符号相反，即该零点为 $g\left(x\right)$ 的变号零点，

$\therefore y=f\left(x\right)-x$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上有极值；

综上所述：a 的取值范围为 $\left(\dfrac{e-2}{2},+\infty\right)$.