湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数的极值和最值解答（1）

一、证明函数有极值或极值点，求函数的极值或最值

1.（1）递减区间是$(0,\sqrt{-a})$，单调递增区间是$(\sqrt{-a},+\infty)$，极小值$\dfrac{-a+a\ln(-a)}{2}$

（2）由（1）知，$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的最小值为$\dfrac{-a+a\ln(-a)}{2}$.

因为$f(x)$存在零点，所以$\dfrac{-a+a\ln(-a)}{2}\le 0$，从而$a\le -e$，$\sqrt{-a}\ge\sqrt{e}$.

当$a=-e$时，$f(x)$在区间$(0,\sqrt{e})$上单调递减，且$f(\sqrt{e})=0$，所以$x=\sqrt{e}$是$f(x)$在区间$\left(0,\sqrt{e}\right]$上的唯一零点.

当$a<-e$时，$f(x)$在区间$(0,\sqrt{e})$上单调递减，且$f(1)=\dfrac{1}{2}>0,f(\sqrt{e})=\dfrac{e+a}{2}<0$，所以$f(x)$在$(0,\sqrt{e}]$上仅有一个零点.

综上可知，若$f(x)$存在零点，则$f(x)$在区间$(0,\sqrt{e}]$上仅有一个零点.

（3）设$g(x)=f(x)-\dfrac{a}{2}x^2-x=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-x$，$g'(x)=\dfrac{a}{x}+(1-a)x-1=\dfrac{1-a}{x}(x-\dfrac{a}{1-a})(x-1)$.

①若$a>1$，则$g(1)=\dfrac{1-a}{2}-1=\dfrac{-1-a}{2}<\dfrac{a}{a-1}$，符合题意.

②若$a\le\dfrac{1}{2}$，则$\dfrac{a}{1-a}\le 1$，故当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.

所以，存在$x_0\ge 1$，使得$f(x)-\dfrac{a}{2}x^2-x<\dfrac{a}{a-1}$的充要条件为$g(1)=\dfrac{1-a}{2}-1=\dfrac{-1-a}{2}<\dfrac{a}{a-1}$，解得$-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$.

③若$\dfrac{1}{2}<a<1$，则$\dfrac{a}{1-a}>1$，故当$x\in(1,\dfrac{a}{1-a})$时，$g'(x)<0$；当$x\in(\dfrac{a}{1-a},+\infty)$时，$g'(x)>0$.

$g(x)$在$(1,\dfrac{a}{1-a})$上单调递减，在$(\dfrac{a}{1-a},+\infty)$上单调递增.

所以，存在$x_0\ge 1$，使得$f(x)-\dfrac{a}{2}x^2-x<\dfrac{a}{a-1}$的充要条件为$g(\dfrac{a}{1-a})<\dfrac{a}{a-1}$，

而$g(\dfrac{a}{1-a})=a\ln(\dfrac{a}{1-a})+\dfrac{a^2}{2(1-a)}+\dfrac{a}{a-1}>\dfrac{a}{a-1}$，所以不合题意.

综上，a的取值范围是$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)\cup(1,+\infty)$.

2.（1）$f'(x)=\sqrt{3}-2\cos x$，令$f'(x)=0$，得$\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故在区间$[0,\pi]$上，$f'(x)$的唯一零点是$x=\dfrac{\pi}{6}$，

当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

故在区间$[0,\pi]$上，$f(x)$的最小值为$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}+\sqrt{3}-2$.

（2）要证：当$x>0$时，$g(x)>f(x)$,即$2\sqrt{3}x-5\sin x-\sqrt{3}\cos x+3>\sqrt{3}x-2\sin x+\sqrt{3}-1$，

即证：当$x>0$时，$\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3}>0$.

令$\varphi(x)=\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3}$，则$\varphi(x)=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4-\sqrt{3}$

分析：当$x\in(\pi,+\infty)$时，$\varphi(x)=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+4-\sqrt{3}>\sqrt{3}\pi-2\sqrt{3}+4-\sqrt{3}>0$，

故只需研究$\varphi(x)$在$(0,\pi]$上的最小值：$\varphi'(x)=\sqrt{3}-3\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in(0,\pi]$时

由$\varphi'(x)<0$，得$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，所以$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$；由$\varphi'(x)>0$，得$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{1}{2},1\right]$，所以$x\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right]$.

所以$\varphi(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{\pi}{6},\pi\right]$上单调递增，所以$\varphi(x)\geq\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+4-\sqrt{3}=1+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\sqrt{3}>0$，

所以$x\in(0,\pi]$时，$\varphi(x)>0$，

综上，$x>0$时，$\varphi(x)>0$，即$g(x)>f(x)$.

3.（1）由题意得$f'(x)=a^x\ln a-e^{-x}$，所以$f''(x)=a^x(\ln a)^2+e^{-x}>0$，所以函数$f'(x)$单调递增，

由$f'(x)=0$，得$(ae)^x\ln a=1,(ae)^x=\frac{1}{\ln a}$.

因为$a>1$，所以$\frac{1}{\ln a}>0$，所以$x=\log_{ae}\frac{1}{\ln a}$.

当$x>\log_{ae}\frac{1}{\ln a}$时，$f'(x)>0,f(x)$单调递增；当$x<\log_{ae}\frac{1}{\ln a}$时，$f'(x)<0,f(x)$单调递减.

因此，当$x=\log_{ae}\frac{1}{\ln a}$时函数$f(x)$有极值.

（2）由（1）知，函数$f(x)$的极值点x_0（即函数$f'(x)$的零点）唯一，

因为$f'(-1)=\frac{\ln a}{a}-e$．令$g(a)=\frac{\ln a}{a}$，则$g'(a)=\frac{1-\ln a}{a^2}=0$，得$a=e$.

当$a>e$时，$g'(a)<0,g(a)$单调递减；当$0<a<e$时，$g'(a)>0,g(a)$单调递增，所以$g(a)\leq g(e)=\frac{1}{e}$，所以$f'(-1)=\frac{\ln a}{a}-e<0$．而$f'(0)=\ln a-1$，当$a=2$时，$f'(0)<0$，当$a\geq3$时，$f'(0)>0$.

又$f'(1)=a\ln a-\frac{1}{e}$．因为a为正整数且$a\geq2$时，所以$a\ln a\geq2\ln2>1>\frac{1}{e}$.

当$a\geq2$时，$f'(1)>0$．即对任意正整数$a>1$，都有$f'(-1)<0$，$f'(1)>0$，所以$x_0\in(-1,1)$恒成立，

且存在$a=2$，使$x_0\in(0,1)$，也存在$a=3$，使$x_0\in(-1,0)$．所以$n-m$的最小值为2.

4.（1）由$f(x)=e^x-ax$，则$f'(x)=e^x-a$，

因为$x\in[0,1]$，则$e^{x}\in\left[1,e\right]$，

当$a\le 1$时，$f'(x)=e^{x}-a\ge 0$，函数在$[0,1]$上单调递增；当$1<a<e$时，令$f'(x)=e^{x}-a\ge 0$，解得$x\ge \ln a$，

令$f'(x)=e^{x}-a<0$，解得$x<\ln a$，即函数在$\left[\ln a,1\right]$上单调递增，在$\left[0,\ln a\right)$上单调递减；

当$a\ge e$时，$f'(x)=e^{x}-a\le 0$，函数在$[0,1]$上单调递减；

（2）$g(x)=f(x)+\ln(x+1)-\cos x=e^{x}-ax-\cos x+\ln\left(x+1\right)$，$g'\left(x\right)=e^{x}-a+\sin x+\dfrac{1}{x+1}$，

显然$x=0$是函数$g(x)$的极小值点的必要条件为$g'\left(0\right)=2-a=0$，即$a=2$，

此时$g'\left(x\right)=e^{x}+\sin x+\dfrac{1}{x+1}-2$，显然当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，

$g'\left(x\right)=e^{x}+\sin x+\dfrac{1}{x+1}-2>1+x+\sin x+\dfrac{1}{x+1}-2>\sin x>0$，

当$x\in\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$时，$\left(1+x\right)\left(1-x+\dfrac{3}{2}x^{2}\right)=1+\dfrac{x^{2}}{2}\left(3x+1\right)>1$，

故$\dfrac{1}{x+1}<1-x+\dfrac{3}{2}x^{2}$，令$m\left(x\right)=\left(1+x+\dfrac{x^{2}}{2}\right)e^{-x}$，

则$m'\left(x\right)=-\dfrac{x^{2}}{2}e^{-x}\le 0$，故$m\left(x\right)$是减函数，故当$x<0$时，$m\left(x\right)>m\left(0\right)=1$，即$e^{x}<1+x+\dfrac{x^{2}}{2}$，

令$h\left(x\right)=\sin x-\dfrac{1}{2}x$，则$h'\left(x\right)=\cos x-\dfrac{1}{2}$，

当$-1<x<0$时，$h'\left(x\right)>\cos 1-\dfrac{1}{2}>0$，故$h\left(x\right)$在$\left(-1,0\right)$上单调递增，

故当$-1<x<0$时，$h\left(x\right)<h\left(0\right)=0$，即$\sin x<\dfrac{1}{2}x$，

故当$x\in\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$时，$g'\left(x\right)=e^{x}+\sin x+\dfrac{1}{x+1}-2\le\left(1+x+\dfrac{x^{2}}{2}\right)+\left(1-x+\dfrac{3x^{2}}{2}\right)-2+\dfrac{x}{2}=2x^{2}+\dfrac{x}{2}<0$，

因此，当$a=2$时，$x=0$是$g\left(x\right)$的极小值点，即充分性也成立，

综上，存在$a=2$，使得$g\left(x\right)$在$x=0$处取得极小值.

5.（1）$f\left(x\right)$的定义域为$\left(-1,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=ax+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{ax^{2}+ax+1}{x+1}\left(a>0\right)$，

令$m\left(x\right)=ax^{2}+ax+1$，则$\Delta=a^{2}-4a=a\left(a-4\right)$；

①当$\Delta\le 0$，即$0<a\le 4$时，$m\left(x\right)\ge 0$，则$f'\left(x\right)\ge 0$，$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上单调递增，无极值点；

②当$\Delta>0$，即$a>4$时，令$m(x)=0$，解得$x_1=\dfrac{-a-\sqrt{a(a-4)}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-a+\sqrt{a(a-4)}}{2a}$

$\because x_1+1=\dfrac{a-\sqrt{a(a-4)}}{2a}=\dfrac{\sqrt{a^2}-\sqrt{a^2-4a}}{2a}>0$，$\therefore x_1>-1$，则$x_2>x_1>-1$；

当$x\in(-1,x_1)$和$(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)<0$；

$\therefore f(x)$在$(-1,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减，

$\therefore f(x)$的极大值点为$x=\dfrac{-a-\sqrt{a(a-4)}}{2a}$，极小值点为$x=\dfrac{-a+\sqrt{a(a-4)}}{2a}$.

综上所述：当$0<a\le 4$时，$f(x)$无极值点；当$a>4$时，$f(x)$的极大值点为$x=\dfrac{-a-\sqrt{a(a-4)}}{2a}$，极小值点为$x=\dfrac{-a+\sqrt{a(a-4)}}{2a}$.

（2）记$h(x)=f(x)-g(x)$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$h(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+\ln(x+1)-\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore h'(x)=ax+\dfrac{1}{x+1}-\cos x$. 记$F(x)=h'(x)$，则$F'(x)=a-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\sin x$.

①当$a\ge 1$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$F'(x)>0$，$\therefore F(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上为增函数，又$F(0)=0$，

$\therefore h(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上为增函数，又$h(0)=0$，$\therefore$当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$f(x)-g(x)>0$.

②当$0<a<1$时，$\because F'(0)=a-1<0$，$F'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a+1-\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)^2}>0$，

$\therefore$存在$x=t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得$F'(t)=0$，

$\therefore$当$x\in(0,t)$时，，$F'(x)<0$，此时$F(x)$在$(0,t)$上为减函数，

又$F(0)=0$. $\therefore$当$x\in(0,t)$时，$F(x)<0$，即$h'(x)<0$，

$\therefore$当$x\in(0,t)$时，$h(x)$为减函数，又$h(0)=0$，$\therefore h(x)<0$不满足题意；

综上所述：a的取值范围为$[1,+\infty)$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数的极值和最值解答（2）

6.（1）$g'(x)=\frac{1}{x}$，函数$h(x)=\frac{e^x}{x}$，定义域为$(0,+\infty)$，且$h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，令$h'(x)=0$得$x=1$.

当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，

即函数$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$h(x)_{\min}=h(1)=e$.

（2）设曲线$y=e^x$与切线的切点横坐标为x_1，曲线$y=\ln x$与切线的切点横坐标为$x_2\left(x_1\neq x_2,x_2>0\right)$.

因为$\left(e^x\right)'=e^x$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以$e^{x_1}=\frac{1}{x_2}=\frac{e^{x_1}-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

由$e^{x_1}=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_1=-\ln x_2$，将其代入$\frac{1}{x_2}=\frac{e^{x_1}-\ln x_2}{x_1-x_2}$得$\frac{1}{x_2}=\frac{\frac{1}{x_2}-\ln x_2}{-\ln x_2-x_2}$，

整理得$x_2\ln x_2-\ln x_2-x_2-1=0$．记$x=x_2>0$，令$r(x)=x\ln x-\ln x-x-1$，

则$r'(x)=\ln x-\frac{1}{x}$，$r'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

且$r'(1)=-1<0$，$r'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$，所以$r'(x)=0$在$(1,2)$上有唯一的解，设为$x_0$，

则函数$r(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，故$r(x)$有极小值.

又$\ln x_0=\frac{1}{x_0}$，所以$r(x_0)=x_0\ln x_0-\ln x_0-x_0-1=x_0\cdot\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}-x_0-1=-\left(\frac{1}{x_0}+x_0\right)<0$.

因为$r\left(\frac{1}{e^2}\right)=1-\frac{3}{e^2}>0$，$r\left(e^2\right)=e^2-3>0$，

所以$r(x)=x\ln x-\ln x-x-1=0$有两个正数根，再由$e^{x_1}=\frac{1}{x_2}$，可得两个对应的x_1的值.

故曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$有 2 条公切线.

二、判断函数极值点个数

7.(1)当$a=1$时，$f(x)=\frac{x}{e^x}+\ln x-x$定义域为$(0,+\infty)$，$f(1)=\frac{1}{e}-1$.

因为$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+\frac{1}{x}-1$，所以$f'(1)=\frac{1-1}{e}+1-1=0$.所以$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为：$y=\frac{1}{e}-1$.

(2)函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}+a\left(\ln x-x\right)\left(a\in\mathbf{R}\right)$ 定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^{x}}+a\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{1-x}{x}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}+a\right)$.

令 $g\left(x\right)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}+a,\left(x>0\right)$，$g'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^{x}}$.令 $g'\left(x\right)>0$，得 $0<x<1$；令 $g'\left(x\right)<0$，得 $x>1$；

所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单减.

所以 $g\left(x\right)_{\max}=g\left(1\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+a$，所以 $a<g\left(x\right)\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}+a$

①当 $a\ge0$ 时，$\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}+\dfrac{a}{x}>0$，令 $f'\left(x\right)>0$，得 $0<x<1$；令 $f'\left(x\right)<0$，得 $x>1$；

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单减.此时 $f\left(x\right)$ 有且只有一个极值点.

②当 $a\le-\dfrac{1}{e}$ 时，$g\left(x\right)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}+a\le0$，令 $f'\left(x\right)>0$，得 $x>1$；令 $f'\left(x\right)<0$，得 $0<x<1$；

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单增.此时 $f\left(x\right)$ 有且只有一个极值点.

③当 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<0$ 时，方程 $g\left(x\right)=0$ 有两个相异正根 x_1,x_2，不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

则当 $0<x<x_1$ 时，有 $f'\left(x\right)<0$；当 $x_1<x<1$ 时，有 $f'\left(x\right)>0$；当 $1<x<x_2$ 时，有；$f'\left(x\right)<0$；当 $x>x_2$ 时，有；$f'\left(x\right)>0$；

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_1\right)$ 上单减，在 $\left(x_1,1\right)$ 上单增，在 $\left(1,x_2\right)$ 上单减，在 $\left(x_2,+\infty\right)$ 上单增，此时 $f\left(x\right)$ 有三个极值点.

综上所述：当 $a\ge0$ 或 $a\le-\dfrac{1}{e}$ 时，$f\left(x\right)$ 有且只有一个极值点；当 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<0$ 时，$f\left(x\right)$ 有三个极值点.

8.(1)证明：当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-x^{2}-2,f'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}-2x$.

当 $x>0$ 时，$f''\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}-2>0$，.所以函数 $f'\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，故 $f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=0$，

故函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增.

(2)解：当 $a=0$ 时，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2$ 单调递增，无极值点，

当 $a\ne0$ 时，$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2ax$，令 $\mathrm{e}^{x}-2ax=0\Rightarrow2a=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$，令 $h\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$，则 $h'\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}\left(x-1\right)}{x^{2}}$，

当 $x<0$ 时，$h\left(x\right)<0$，且 $h'\left(x\right)<0$，当 $a<0$ 时，方程 $2a=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$ 有唯一小于零的零点，故函数 $g\left(x\right)$ 存在一个极值点；

当 $0<x<1$ 时，$h'\left(x\right)<0$，当 $x>1$ 时，$h'\left(x\right)>0$，

故函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，$h\left(1\right)=\mathrm{e}$ 为函数 $h\left(x\right)$ 极小值，

所以当 $0<a<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，方程 $2a=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$ 无解，函数 $g\left(x\right)$ 无极值点；

当 $a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，方程 $2a=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$ 有一个解，

但当 $0<x<1$ 时，$\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}>2a,g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2ax>0$，当 $x>1$ 时，$\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}>2a,g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-2ax>0$，故函数 $g\left(x\right)$ 无极值点.

当$a>\frac{e}{2}$时，方程$2a=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$有两解，函数$g(x)$存在一个极大值点和一个极小值点.

综上，当$a<0$时，函数$g(x)$存在一个极值点，

当$0\leqslant a\leqslant\frac{\mathrm{e}}{2}$时，函数$g(x)$无极值点，

当$a>\frac{e}{2}$时，函数$g(x)$存在一个极大值点和一个极小值点.

9.（1）由$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-kx-1$得：$f'(x)=e^x-x-k$

$\because f(x)$在R上是增函数，$\therefore f'(x)\geq 0$在R上恒成立，即：$k\leq e^x-x$在R上恒成立

设$g(x)=e^x-x$，则$g'(x)=e^x-1$

当$x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)<0$；当$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)>0$

即$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减；在$(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore g(x)_{\min}=g(0)=1$，$\therefore k\leq 1$

即k的取值范围为：$(-\infty,1]$.

（2）由（Ⅰ）知：当$k\in(-\infty,1]$时，$f(x)$在R上是增函数，此时$f(x)$无极值；

当$k\in(1,+\infty)$时，令$f'(x)=0$，即$g(x)=k$

$\because x\to-\infty$时，$g(x)\to+\infty$；$g(0)=1$；$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$

$\therefore g(x)=k$有两个根，设两根为x_1，x_2且$x_1<0<x_2$

可知：$x\in(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$；$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)<0$

即$f(x)$在$(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上单调递增；在(x_1,x_2)上单调递减

$\therefore f(x)$在$x=x_1$处取得极大值$f(x_1)$；在$x=x_2$处取得极小值$f(x_2)$

综上所述：当$k\in(-\infty,1]$时，$f(x)$无极值；当$k\in(1,+\infty)$时，$f(x)$存在一个极大值和一个极小值

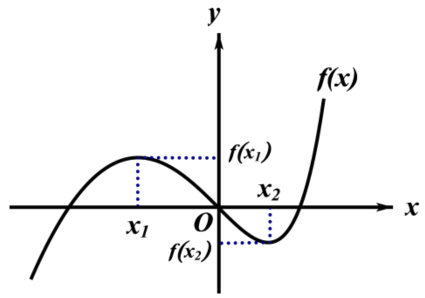
（3）由（Ⅱ）知，$f(x)$有两个极值点x_1，x_2，则$k\in(1,+\infty)$，且$x_1<0<x_2$

$\therefore f'(x_1)=e^{x_1}-x_1-k=0$；$f'(x_2)=e^{x_2}-x_2-k=0$

又$f(x_1)=e^{x_1}-\frac{1}{2}x_1^2-kx_1-1=e^{x_1}-\frac{1}{2}x_1^2-(e^{x_1}-x_1)x_1-1=(1-x_1)e^{x_1}+\frac{1}{2}x_1^2-1$

$f(x_2)=(1-x_2)e^{x_2}+\frac{1}{2}x_2^2-1$

令$h(x)=(1-x)e^x+\frac{1}{2}x^2-1$，则$h'(x)=x(1-e^x)$



则 $h'(x)\le 0$ 在 R 上恒成立，即 $h(x)$ 在 R 上单调递减

又 $h(0)=0$，$\therefore x\in(-\infty,0)$ 时，$h(x)>0$；$x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)<0$

$\because x_1<0<x_2$，$\therefore f(x_1)=h(x_1)>0$，$f(x_2)=h(x_2)<0$

当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$

可得 $f(x)$ 大致图象如右：

$\therefore f(x)$ 有三个零点.

三、已知函数有极值或最值，求参数或表达式取值范围

10.【分析】(1) 若 $f(x)$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个极值点，则 $f'(x)=0$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个不相等的变号根，等价于 $e^x-ax=0$ 在 $x\in(0,2)$ 上有两个不相等的变号根. 令 $g(x)=e^x-ax$，分类讨论 $g(x)$ 有两个变号根时 a 的范围；(2) 化简原式可得 $h(x)=|\ln x|-\dfrac{x}{e^{2x}}-b, x\in(0,+\infty)$，分别讨论 $x\in(1,+\infty)$ 和 $x\in(0,1)$ 时 $h(x)$ 的单调性，可得 $h(x)$ 的最小值，分类讨论最小值与 0 的关系，结合 $h(x)$ 的单调性可以得到零点个数.

【解析】(1) 由题意可求得 $f'(x)=\dfrac{a(2x-x^2)}{e^x}+x-2=\dfrac{(x-2)(e^x-ax)}{e^x}$，

因为 $f(x)$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个极值点，所以 $f'(x)=0$ 在 $x\in(0,2)$ 内有两个不相等的变号根，即 $e^x-ax=0$ 在 $x\in(0,2)$ 上有两个不相等的变号根.

设 $g(x)=e^x-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$x\in(0,2), g'(x)=e^x-a>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，不符合条件.

②当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=e^x-a=0$ 得 $x=\ln a$，当 $\ln a\geqslant 2$，即 $a\geqslant e^2$ 时，$x\in(0,2), g'(x)=e^x-a<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，不符合条件；

当 $\ln a\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$x\in(0,2), g'(x)=e^x-a>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，不符合条件；

当 $0<\ln a<2$，即 $1<a<e^2$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上单调递减，$(\ln a,2)$ 上单调递增，

若要 $e^x-ax=0$ 在 $x\in(0,2)$ 上有两个不相等的变号根，则 $\begin{cases} g(0)>0, \\ g(2)>0, \\ g(\ln a)<0, \\ 0<\ln a<2, \end{cases}$，解得 $e<a<\dfrac{e^2}{2}$. 综上所述，$e<a<\dfrac{e^2}{2}$.

（2）设 $h(x)=|\ln x|-\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x^2+2x\right]\dfrac{1}{xe^x}-b=|\ln x|-\dfrac{x}{e^{2x}}-b,x\in(0,+\infty)$，

令 $y=\dfrac{x}{e^{2x}}$，则 $y'=\dfrac{1-2x}{e^{2x}}$，所以 $y=\dfrac{x}{e^{2x}}$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x>0$，则 $h(x)=\ln x-\dfrac{x}{e^{2x}}-b$，所以 $h'(x)=e^{-2x}\left(\dfrac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)$.

因为 $2x-1>0,\dfrac{e^{2x}}{x}>0$，所以 $h'(x)>0$，因此 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x<0$，则 $h(x)=-\ln x-\dfrac{x}{e^{2x}}-b$，所以 $h'(x)=e^{-2x}\left(-\dfrac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)$.

因为 $e^{2x}\in\left(1,e^2\right),e^{2x}>1,0<x<1,\therefore\dfrac{e^{2x}}{x}>1,$ 即 $-\dfrac{e^{2x}}{x}<-1,$，又 $2x-1<1$，所以 $h'(x)=e^{-2x}\left(-\dfrac{e^{2x}}{x}+2x-1\right)<0$，

因此 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

综合（i）（ii）可知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=-e^{-2}-b$，

当 $h(1)=-e^{-2}-b>0$，即 $b<-e^{-2}$ 时，$h(x)$ 没有零点，故关于 x 的方程根的个数为 0，

当 $h(1)=-e^{-2}-b=0$，即 $b=-e^{-2}$ 时，$h(x)$ 只有一个零点，故关于 x 的方程根的个数为 1，

当 $h(1)=-e^{-2}-b<0$，即 $b>-e^{-2}$ 时，

①当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)=\ln x-\dfrac{x}{e^{2x}}-b>\ln x-\left(\dfrac{1}{e^2}+b\right)>\ln x-1-b$，要使 $h(x)>0$，可令 $\ln x-1-b>0$，

即 $x\in\left(e^{1+b},+\infty\right)$；

②当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)=-\ln x-\dfrac{x}{e^{2x}}-b\geqslant-\ln x-\left(\dfrac{1}{2}e^{-1}+b\right)>-\ln x-1-b$，要使 $h(x)>0$，

可令 $-\ln x-1-b>0$，即 $x\in\left(0,e^{-1-b}\right)$，

所以当 $b>-e^{-2}$ 时，$h(x)$ 有两个零点，故关于 x 的方程根的个数为 2，

综上所述：当 $b=-e^{-2}$ 时，关于 x 的方程根的个数为 0；

当$b=-e^{-2}$时，关于x的方程根的个数为1；

当$b>-e^{-2}$时，关于x的方程根的个数为2.

11．解：（1）$\because$函数$f(x)=x(lnx+3ax+2)-3ax+4$，$\therefore f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

$\therefore f'(x)=lnx+3ax+2+x(\frac{1}{x}+3a)-3a=lnx+6ax+3-3a$，

$\because f(x)$在$[1,+\infty)$上是减函数，$\therefore f'(x)=lnx+6ax+3-3a\leqslant 0$在$[1,+\infty)$内恒成立，

$\therefore 3a\leqslant\frac{3+lnx}{1-2x}$在$[1,+\infty)$内恒成立，设$g(x)=\frac{3+lnx}{1-2x}$，则$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}+4+2lnx}{(1-2x)^{2}}$，

$\because x\geqslant 1$，$\therefore g'(x)>0$，$\therefore g(x)$在$[1,+\infty)$内单调递增，$\therefore g(x)_{min}=g$（1）$=-3\geqslant 3a$，$\therefore a\leqslant -1$.

（2）由（1）可得f（1）$=6$，又$f(x)$的最大值为6，则f'（1）$=0$，$\therefore 3a+3=0$，$a=-1$.

下面证明：当$a=-1$时，$f(x)\leqslant 6$，即$x(lnx-3x+2)+3x-2\leqslant 0$，也即$lnx-3x-\frac{2}{x}+5\leqslant 0$，

设$h(x)=lnx-3x-\frac{2}{x}+5(x>0)$，$\therefore h'(x)=\frac{(3x+2)(1-x)}{x^{2}}$，

$\therefore h(x)$在$(0,1)$内单调递增，在$(1,+\infty)$内单调递减，$\therefore h(x)_{max}=h$（1）$=0$，

$\therefore lnx-3x-\frac{2}{x}+5\leqslant 0$在$(0,+\infty)$内恒成立，$\therefore a=-1$.

12．】解：（1）$f'(x)=\frac{1-x+ae^{x}}{e^{x}}$，设$g(x)=1-x+ae^{x}$，由题意知：$g(x)\geqslant 0$在$R$上恒成立，即$a\geqslant\frac{x-1}{e^{x}}$恒成立.

设$\phi(x)=\frac{x-1}{e^{x}},\phi'(x)=\frac{2-x}{e^{x}}$，因此$\phi(x)$在$(-\infty,2)$上是单调增加的，

在$(2,+\infty)$上是单调减少的，$\phi(x)_{max}=\phi(2)=\frac{1}{e^{2}}$，故$a\geqslant\frac{1}{e^{2}}$.

（2）证明：$f'(x)=\frac{1-x+ae^{x}}{e^{x}},g(x)=1-x+ae^{x},g'(x)=-1-ae^{x}$，

因为$a\in(-1,0)$，$g'(x)<0$，故函数$g(x)$在R上是单调递减.

又$g(0)=1+a>0$，g（1）$=ae<0$，故必$\exists x_{0}\in(0,1)$，使得$g(x_{0})=0$，

即$ae^{x_{0}}=x_{0}-1(*)$，因为$e^{x}>0$，所以$x_{0}<1$.

当$x\in(-\infty,x_{0})$时，$g(x)>0$，则$f'(x)>0$；

当$x\in(x_{0},+\infty)$时，$g(x)<0$，则$f'(x)<0$.

因此，函数$f(x)$的增区间为$(-\infty,x_{0})$，减区间为$(x_{0},+\infty)$.

$f(x)_{max}=f(x_{0})=\frac{x_{0}}{e^{x_{0}}}+ax_{0}+b=2b,b=\frac{x_{0}}{e^{x_{0}}}+ax_{0}\frac{b}{a}=\frac{x_{0}}{ae^{x_{0}}}+x_{0}$，

由$(*)$式得，$\frac{b}{a}=\frac{x_{0}}{x_{0}-1}+x_{0}=\frac{x_{0}^{2}}{x_{0}-1}<0$

因为$a\in(-1,0)$，故$b>0$.

法二：（2）$f'(x)=\dfrac{1-x+ae^x}{e^x},g(x)=1-x+ae^x,g'(x)=-1-ae^x$，

因为$a\in(-1,0)$，$g'(x)<0$，故函数$g(x)$在R上是单调递减.

又$g(0)=1+a>0$，g（1）$=ae<0$，故必$\exists x_0\in(0,1)$，使得$g(x_0)=0$，

即$ae^{x_0}=x_0-1(*)$，因为$e^x>0$，所以$x_0<1$.

当$x\in(-\infty,x_0)$时，$g(x)>0$，则$f'(x)>0$；

当$x\in(x_0$，$+\infty)$时，$g(x)<0$，则$f'(x)<0$.

因此，函数$f(x)$的增区间为$(-\infty,x_0)$，减区间为$(x_0$，$+\infty)$.

$f(x)_{max}=f(x_0)=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}+ax_0+b=2b,b=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}+ax_0$

由$ae^{x_0}=x_0-1$得：$a=\dfrac{x_0-1}{e^{x_0}}\in(-1,0)$，即$\dfrac{x_0-1}{e^{x_0}}<0$且$\dfrac{x_0-1}{e^{x_0}}>-1$，

因为$e^x>0$，所以$\begin{cases}x_0-1<0\\x_0+e^{x_0}>1\end{cases}$，解得：$0<x_0<1$，又$b=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}+ax_0=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}+x_0(\dfrac{x_0-1}{e^{x_0}})=\dfrac{{x_0}^2}{e^{x_0}}$，

令$h(x)=\dfrac{x^2}{e^x},x\in(0,1),h'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}>0$，所以$b>h(0)=0$，

即$b>0$成立.

13.解：（Ⅰ）求导可得$f'(x)=\dfrac{ax^2+a-2}{(ax+1)(1+x)^2}$，$\because x\geqslant0$，$a>0$，$\therefore ax+1>0$.

①当$a\geqslant2$时，在区间$(0,+\infty)$上，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$的单调增区间为$(0,+\infty)$.

②当$0<a<2$时，由$f'(x)>0$解得$x>\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$，由$f'(x)<0$解得$x<\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$，

$\therefore f(x)$的单调减区间为$(0,\sqrt{\dfrac{2-a}{a}})$，单调增区间为$(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}},+\infty)$.

（Ⅱ）当$a\geqslant2$，由（Ⅰ）①知，$f(x)$的最小值为$f(0)=1$；

当$0<a<2$时，由（Ⅰ）②知，$f(x)$在$x=\sqrt{\dfrac{2-a}{a}}$处取得最小值$f(\sqrt{\dfrac{2-a}{a}})<f(0)=1$，

综上可知，若$f(x)$的最小值为1，则a的取值范围是$[2$，$+\infty)$.

14.解：（1）因为$f(x)=e^x[ax^2-(4a+1)x+4a+3]$，所以$f'(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x=(ax-1)(x-2)e^x$，

当$a>\dfrac{1}{2}$时，令$f'(x)>0$，得：$x<\dfrac{1}{a}$或$x>2$；

当$a<\dfrac{1}{2}$时，令$f'(x)>0$，得：$x<2$或$x>\dfrac{1}{a}$；

当$a=\dfrac{1}{2}$时，$f'(x)\geqslant0$恒成立.

综上，当$a>\dfrac{1}{2}$时，单调递增区间是$(-\infty,\dfrac{1}{a})$，$(2,+\infty)$；

当$0<a<\dfrac{1}{2}$时，单调递增区间是$(-\infty,2)$，$(\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 R 上单调递增.

（2） $f'(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x=(ax-1)(x-2)e^x$，

由（1）得，若 $a>\frac{1}{2}$， $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值；

$0<a\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $x=2$ 不是 $f(x)$ 的极小值点.

$a=0$ 时，由 $f'(x)=(-1)(x-2)e^x>0$ 得 $x<2$，由 $f'(x)=(-1)(x-2)e^x<0$ 得 $x>2$，所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点；

$a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，得：$\frac{1}{a}<x<2$ 由令 $f'(x)<0$，得：$x<\frac{1}{a}$ 或 $x>2$，所以 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

15.解：（1）由 $f'(x)=lnx-2ax+2a$，

可得 $g(x)=lnx-2ax+2a$， $x\in(0,+\infty)$，

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-2a=\frac{1-2ax}{x}$，

当 $a\leqslant0$， $x\in(0,+\infty)$ 时， $g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增；

当 $a>0$， $x\in(0,\frac{1}{2a})$ 时， $g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增，

$x\in(\frac{1}{2a}$， $+\infty)$ 时， $g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减.

所以当 $a\leqslant0$ 时， $g(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$；

当 $a>0$ 时， $g(x)$ 的单调增区间为 $(0,\frac{1}{2a})$，单调减区间为 $(\frac{1}{2a}$， $+\infty)$.

（2）由 $f'(x)=lnx-2ax+2a$，则 f'（1）$=0$，

①当 $a\leqslant0$ 时，由（1）知， $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，不符合题意；

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时， $\frac{1}{2a}>1$，由（1）知 $f'(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2a})$ 内单调递增，

可得当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$，当 $x\in(1,\frac{1}{2a})$ 时， $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，在 $(1,\frac{1}{2a})$ 内单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，不合题意；

③当 $a=\frac{1}{2}$ 时， $\frac{1}{2a}=1$， $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f'(x)\leqslant0$， $f(x)$ 单调递减，不合题意；

④当 $a>\frac{1}{2}$ 时， $0<\frac{1}{2a}<1$， $f'(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2a})$ 上递增，在 $(\frac{1}{2a}$， $+\infty)$ 递减，

当 $x\in(\frac{1}{2a}$， $1)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极大值，符合题意；

综上可知，实数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}$， $+\infty)$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数的极值和最值解答（4）

16.解：（1）证明：由题知 $f'(x)=2ax+\dfrac{2}{1+x}-2\cos x, f'(0)=0$，令 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=2[a-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\sin x]$，

若 $a\geqslant 1$，当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)=2[a-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\sin x]\geqslant 2[1-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\sin x]>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，$\therefore h(x)>h(0)=0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，$\therefore f(x)>f(0)=0$；

（2）①若 $a\geqslant 1$，由（1）知，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，因此 $x=0$ 不可能是 $f(x)$ 的极大值点；

②若 $0<a<1$，令 $\varphi(x)=h'(x)=2[a-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\sin x]$，$\because$ 当 $x\in(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\varphi'(x)=2\cos x+\dfrac{4}{(1+x)^3}>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 即 $h'(x)$ 在 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，

又 $\because$ $\varphi(0)=h'(0)=2(a-1)<0,\varphi(\dfrac{\pi}{2})=h'(\dfrac{\pi}{2})=2[a+1-\dfrac{1}{(1+\dfrac{\pi}{2})^2}]>0$，$\therefore$ 存在 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $h'(\alpha)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-1,\alpha)$ 时，$h'(x)<h'(\alpha)=0$，$\therefore h(x)=f'(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 上单调递减，$f(0)=h(0)=0$，
$\therefore$ 当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,\alpha)$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,\alpha)$ 上单调递减，
综上，当 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点时，$0<a<1$．

17（1）$\because$ $f'\left(x\right)=e^x-x^2-2ax$，若函数 $f\left(x\right)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的凸函数，则 $f''\left(x\right)=e^x-2x-2a>0$，即 $2a<e^x-2x$，

令 $y=e^x-2x$，$y'=e^x-2$，则当 $x=\ln 2$ 时，$y'=0$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(-\infty,\ln 2\right)$ 时，$y'<0$；当 $x\in\left(\ln 2,+\infty\right)$ 时，$y'>0$；

$\therefore$ 当 $x\in\left(-\infty,\ln 2\right)$ 时，$y=e^x-2x$ 单调递减；当 $x\in\left(\ln 2,+\infty\right)$ 时，$y=e^x-2x$ 单调递增，

$\therefore y_{\min}=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2$，$\therefore 2a<2-2\ln 2$，解得 $a<1-\ln 2$，$\therefore a$ 的取值范围为 $\left(-\infty,1-\ln 2\right)$．

（2）$\because y=f\left(x\right)-x=e^x-\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-x-1$，$\therefore y'=e^x-x^2-2ax-1$，

$\because y=f\left(x\right)-x$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上有极值，$\therefore g\left(x\right)=e^x-x^2-2ax-1$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 有变号零点，

$g'\left(x\right)=e^x-2x-2a$，令 $m\left(x\right)=e^x-2x-2a$，则 $m'\left(x\right)=e^x-2$，

$\because x>1$，$\therefore m'\left(x\right)>0$，$\therefore m\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，$\therefore g'\left(x\right)=m\left(x\right)>m\left(1\right)=e-2-2a$；

①当 $e-2a-2\geq 0$，即 $a>\dfrac{e-2}{2}$ 时，$g'\left(x\right)\geq 0$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore g\left(x\right)>g\left(1\right)=e-2-2a\geq 0$．即 $g\left(x\right)>0$，$\therefore g\left(x\right)=e^x-x^2-2ax-1$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 无零点，不合题意；

②当 $e-2a-2<0$，即 $a>\dfrac{e-2}{2}$ 时，则 $\exists x_0\in\left(1,+\infty\right)$，使得 $m\left(x_0\right)=0$，

当 $x\in\left(1,x_0\right)$ 时，，$m\left(x\right)<m\left(x_0\right)=0$，$\therefore g\left(x\right)$ 单调递减，

又 $g\left(1\right)=e-2-2a<0$，当 $x\in\left(1,x_0\right)$ 时，$g\left(x\right)<0$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $x\in\left(1,x_0\right)$ 上无零点；

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$m\left(x\right)>m\left(x_0\right)=0$，$\therefore g\left(x\right)$ 单调递增，

又 $x\to+\infty$ 时，$g\left(x\right)\to+\infty$，$\therefore g\left(x\right)$ 在 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 上有零点，且在零点左右两侧 $g\left(x\right)$ 符号相反，即该零点为 $g\left(x\right)$ 的变号零点，

$\therefore y=f\left(x\right)-x$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上有极值；

综上所述：a 的取值范围为 $\left(\dfrac{e-2}{2},+\infty\right)$.

18.（1）定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-(a+2)+\dfrac{2a}{x}=\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{x}=\dfrac{(x-2)(x-a)}{x}$，

当 $a=2$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $0<a<2$ 时，$0<x<a$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$a<x<2$ 时，$f'(x)<0$，
$f(x)$ 的增区间是 $(0,a)$，$(2,+\infty)$，减区间是 $(a,2)$，
当 $a>2$ 时，$0<x<2$ 或 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，$2<x<a$ 时，$f'(x)<0$，
$f(x)$ 的增区间是 $(0,2)$，$(a,+\infty)$，减区间是 $(2,a)$.
（2）由（1）$1\leq a<2$，$M=f(a)$，$N=f(2)$，$2<a\leq 4$ 时，$M=f(2),N=f(a)$，

所以 $\left|M-N\right|=\left|f(a)-f(2)\right|=\left|\dfrac{1}{2}a^2-2-(a+2)(a-2)+2a(\ln a-\ln 2)\right|=\left|-\dfrac{1}{2}a^2+2+2a\ln\dfrac{a}{2}\right|$，

设 $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2+2x\ln\dfrac{x}{2}$，$1\leq x\leq 4$，

$g'(x)=-x+2\ln\dfrac{x}{2}+2$，$g'(2)=0$，

设 $h(x)=g'(x)=-x+2\ln\dfrac{x}{2}+2$，$h'(x)=-1+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2-x}{x}$，

$1\leq x<2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增，$2<x\leq 4$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减，

所以 $x\in[1,4]$ 时，$h(x)\leq h(2)=0$，即 $g'(x)\leq 0$，所以 $g(x)$ 在 $[1,4]$ 上单调递减，

又 $\boldsymbol{g}(2)=0$，$g(1)=\dfrac{3}{2}-2\ln 2\approx\dfrac{3}{2}-2\times 0.7=0.1$，$g(4)=-6+8\ln 2\approx -6+8\times 0.7=-0.4$，

所以 $\left|g(x)\right|$ 的值域是 $[0,6-8\ln 2]$，

所以 $1\leq a\leq 4$ 且 $a\neq 2$ 时，$0<\left|M-N\right|\leq 6-8\ln 2$.

即 $\left|M-N\right|$ 的取值范围是 $(0,6-8\ln 2]$.

四、与极值有关的综合问题

19.（1）解：$f'(x)=(x-1)e^x-a(x-1)=(x-1)(\ e^x-a)$，
当 $a\leq 0$ 时，则当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=\ln a$，

若 $a=e$，则 $f'(x)=(x-1)(e^x-e)\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

②若 $0<a<e$，则 $\ln a<1$，故当 $x\in(-\infty,\ln a)$，$(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in(\ln a,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln a,1)$ 上单调递减，

③若 $a>e$，则 $\ln a>1$，故当 $x\in(-\infty,1)$，$(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in(1,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,\ln a)$ 上单调递减，

综上所述，当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增；

当 $a=e$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增；

当 $0<a<e$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$，$(1,+\infty)$ 上递增，在 $(\ln a,1)$ 上递减；

当 $a>e$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$，$(\ln a,+\infty)$ 上递增，在 $(1,\ln a)$ 上递减；

（2）证明：$F(x)=f(x)-g(x)=xe^x-m\left(x+\ln x\right)$，$\left(x>0\right)$，

则 $F'\left(x\right)=\left(x+1\right)e^x-m\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+1\right)\left(e^x-\dfrac{m}{x}\right)$，

当 $m\leq 0$ 时，$F'\left(x\right)>0$，则函数 $F\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，故函数无极值点，舍去，

当 $m>0$ 时，令 $h\left(x\right)=e^x-\dfrac{m}{x}$，

因为函数 $y=e^x,y=-\dfrac{m}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，

所以函数 $h\left(x\right)=e^x-\dfrac{m}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递增，

取 b 满足 $0<b<\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{m}{2}\right\}$，则 $e^b<\sqrt{e}$，$-\dfrac{m}{b}<-2$，

所以 $h\left(b\right)=e^b-\dfrac{m}{b}<\sqrt{e}-2<0$，又 $h\left(m\right)=e^m-1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(b,a\right)$，使得 $h\left(x\right)=e^x-\dfrac{m}{x}=0$，即 $F'\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(e^x-\dfrac{m}{x}\right)=0$，

此时 $m=x_0e^{x_0}$，

当 $0<x<x_0$ 时，$F'\left(x\right)<0$，当 $x>x_0$ 时，$F'\left(x\right)>0$，

所以函数 $F\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上递增，

所以 x_0 是函数 $F(x)$ 的极值点，

即若 x_0 是函数 $F(x)$ 的极值点，$m>0$，

$F\left(x\right)_{\min}=F(x_0)=x_0e^{x_0}-m\left(x_0+\ln x_0\right)=x_0e^{x_0}\left(1-x_0-\ln x_0\right)$，

因为 $F\left(x_0\right)>0$，所以 $x_0e^{x_0}\left(1-x_0-\ln x_0\right)>0$，令 $\varphi\left(x\right)=1-x-\ln x$，则 $\varphi'\left(x\right)=-1-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{x+1}{x}<0$，

所以 $\varphi\left(x\right)=1-x-\ln x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上递减，又 $\varphi\left(1\right)=0$，所以 $0<x_0<1$，

令 $t\left(x\right)=e^x-\left(x+1\right),0<x<1$，则 $t'\left(x\right)=e^x-1$，

当 $0<x<1$ 时，$t'\left(x\right)=e^x-1>0$，则 $t\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上递增，所以 $t\left(x\right)>t\left(0\right)=0$，所以 $e^x>x+1$，

令 $m\left(x\right)=1-x-\ln x-\left(2-2x\right)=x-\ln x-1,0<x<1$，则 $m'\left(x\right)=x-\ln x-1=\dfrac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$m'\left(x\right)<0$，所以函数 $m\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上递减，所以 $m\left(x\right)>m\left(1\right)=0$，所以 $1-x-\ln x>2-2x$，

所以 $F(x_0)=x_0e^{x_0}\left(1-x_0-\ln x_0\right)>x_0\left(1+x_0\right)\left(2-2x_0\right)=-2x_0^{\ 3}+2x_0$，即 $F(x_0)>-2x_0^3+2x_0$，

所以 $F(x)>-2x_0^3+2x_0$.

20.【解析】（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2a+\dfrac{2a-1}{x^2}=-\dfrac{2ax-x-(2a-1)}{x^2}=-\dfrac{(x-1)(2ax+2a-1)}{x^2}$，

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增.

②当 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时，由 $f'(x)=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=\dfrac{1}{2a}-1$，此时 $\dfrac{1}{2a}-1>1>0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$，$[\dfrac{1}{2a}-1$，$+\infty)$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in[1$，$\dfrac{1}{2a}-1)$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

综上所述，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $[1$，$+\infty)$ 上单调递增，

当 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$，$[\dfrac{1}{2a}-1$，$+\infty)$ 时，单调递减，在 $\in[1$，$\dfrac{1}{2a}-1)$，单调递增.

（2）$\because$ $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{2a-1}{x}+f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2ax+lnx+1$，$\therefore g'(x)=x-2a+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-2ax+1}{x}$，当 $|a|>1$ 时，即 $a>1$ 或 $a<-1$ 时，令 $g'(x)=0$，则 $x^2-2ax+1=0$ 的两个根为 x_1，x_2，

$\because$ 函数 $g(x)$ 的极大值点为 x_1，$\therefore 0<x_1<x_2$，

又 $x_1x_2=1$，$x_1+x_2=2a$，$\therefore a>1$，$0<x_1<1$，

由 $g'(x_1)=0$，可得 $x_1^2-2ax_1+1=0$，则 $a=\dfrac{x_1^2+1}{2x_1}$，$\therefore x_1lnx_1-ax_1^2=x_1lnx_1-\dfrac{x_1^3+x_1}{2}=-\dfrac{1}{2}x_1^3-\dfrac{1}{2}x_1+x_1lnx_1$，$0<x_1<1$，

令 $h(x)=-\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x+xlnx$，$0<x<1$，$\therefore h'(x)=-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{1}{2}+lnx$，$\therefore h''(x)=-3x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-3x^2}{x}$，$x\in(0,1)$，

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$h''(x)>0$，当 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 时，$h''(x)<0$，

$\therefore h'(x)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$1)$ 上单调递减，$\therefore h'(x)\leqslant h'(\dfrac{\sqrt{3}}{3})=-ln\sqrt{3}<0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)>h$（1）$=-1$，故 $x_1lnx_1-ax_1^2>-1$.