# 湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——概率解答题——概率的最值问题 1

1．某种植户对一块地上的$n$（$n\in\mathbf{N}^*$）个坑进行播种，每个坑播 3 粒种子，每粒种子发芽的概率均为$\frac{1}{2}$，且每粒种子是否发芽相互独立.如果每个坑内至少有两粒种子发芽，则不需要进行补种，否则需要补种.

（1）当$n$取何值时，有 3 个坑要补种的概率最大？最大概率为多少？

（2）当$n=4$时，用$X$表示要补种的坑的个数，求$X$的分布列.

2．甲、乙两队进行一轮篮球比赛，比赛采用“5 局 3 胜制”（即有一支球队先胜 3 局即获胜，比赛结束）．在每一局比赛中，都不会出现平局，甲每局获胜的概率都为$p\left(0<p<1\right)$.

(1)若$p=\frac{1}{2}$，比赛结束时，设甲获胜局数为$X$，求其分布列和期望$E\left(X\right)$；

(2)若整轮比赛下来，甲队只胜一场的概率为$f\left(p\right)$，求$f\left(p\right)$的最大值.

3．国家对待疫情的态度和采取的举措令人敬佩，展示了负责任大国的担当，其中疫情防控的措施之一为：要求与新冠肺炎确诊患者的密切接触者集中医学观察 14 天，在医学观察期结束后发现密切接触者中 60 岁以上的老年人感染病毒的比例较大.对某市 200 个不同年龄段的结束医学观察的密切接触者样本进行感染病毒情况统计，得到下面的列联表：

| 年龄/人数 | 感染病毒 | 未感染病毒 |
| --- | --- | --- |
| 60 岁以上 | 30 | 60 |
| 60 岁及 60 岁以下 | 20 | 90 |

(1)是否有 95%的把握认为密切接触者感染病毒与年龄有关；
(2)以样本中结束医学现察的密切接触者感染病毒的频率估计概率，现从某市所有结束医学观察的密切接触者中随机抽取 4 人进行感染病毒人数统计，求其中至少有 3 人感染病毒的概率；
(3)某市现有一个中风险小区，政府决定对小区内所有住户进行排查，在排查期间，发现一户 4 口之家与确诊患者有过密切接触，这种情况下医护人员要对其家庭成员逐一进行“核酸”检测，每名成员进行检测后即告知结果，若检测结果呈阳性，则该家庭被确定为“感染高危家庭”.设该家庭每个成员检测呈阳性的概率均为 $p\left(0<p<1\right)$ 且相互独立，该家庭至少检测了 3 名成员才能确定为“感染高危家庭”的概率为 $f\left(p\right)$，当 $p=m$ 时，$f\left(p\right)$ 最大，求 $m$ 的值.

附：$\chi^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$

| $P\left(\chi^2\geq k_0\right)$ | 0.1 | 0.05 | 0.010 |
| --- | --- | --- | --- |
| $k_0$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 |

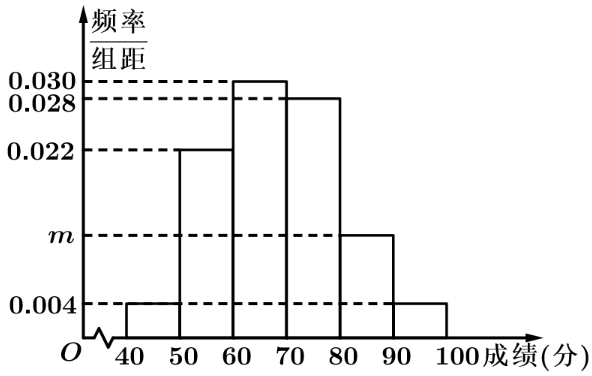
4．一个口袋中有除颜色外其他均相同的 2 个白球和 $n$ 个红球（$n\geq 2$，且 $n\in\mathbf{N}^*$），每次从袋中摸出 2 个球（每次摸球后把这 2 个球放回袋中），若摸出的 2 个球颜色相同，则为中奖，否则为不中奖.设一次摸球中奖的概率为 $p$.
（1）试用含 $n$ 的代数式表示一次摸球中奖的概率 $p$；
（2）若 $n=3$，求三次摸球恰有一次中奖的概率；
（3）记三次摸球恰有一次中奖的概率为 $f\left(p\right)$，当 $n$ 为何值时，$f\left(p\right)$ 取得最大值？

5．2021 年 7 月 18 日第 30 届全国中学生生物学竞赛在浙江省萧山中学隆重举行．为做好本次考试的评价工作，将本次成绩转化为百分制，现从中随机抽取了 50 名学生的成绩，经统计，这批学生的成绩全部介于 40 至 100 之间，将数据按照$[40，50)$，$[50，60)$，$[60，70)$，$[70，80)$，$[80，90)$，$[90，100]$分成 6 组，制成了如图所示的频率分布直方图．

(1)求频率分布直方图中$m$的值，并估计这 50 名学生成绩的中位数；

(2)在这 50 名学生中用分层抽样的方法从成绩在$[70，80)$，$[80，90)$，$[90，100]$的三组中抽取了 11 人，再从这 11 人中随机抽取 3 人，记$\xi$为 3 人中成绩在$[80，90)$的人数，求$\xi$的分布列和数学期望；

(3)转化为百分制后，规定成绩在$[90，100]$的为 A 等级，成绩在$[70，90)$的为$B$等级，其它为$C$等级．以样本估计总体，用频率代替概率，从所有参加生物学竞赛的同学中随机抽取 100 人，其中获得$B$等级的人数设为$\eta$，记$B$等级的人数为$k$的概率为$P(\eta=k)$，写出$P(\eta=k)$的表达式，并求出当$k$为何值时，$P(\eta=k)$最大？




6．某校开展“学习新中国史”的主题学习活动.为了调查学生对新中国史的了解情况，需要对学生进行答题测试，答题测试的规则如下：每位参与测试的学生最多有两次答题机会，每次答一题，第一次答对，答题测试过关，得 5 分，停止答题测试；第一次答错，继续第二次答题，若答对，答题测试过关，得 3 分；若两次均答错，答题测试不过关，得 0 分.某班有 12 位学生参与答题测试，假设每位学生第一次和第二次答题答对的概率分别为 $m$，0.5，两次答题是否答对互不影响，每位学生答题测试过关的概率为 $P$.

(1)若$m=0.5$，求每一位参与答题测试的学生所得分数的数学期望；

(2)设该班恰有 9 人答题测试过关的概率为$f\left(p\right)$，当$f\left(p\right)$取最大值时，求$p$，$m$.

7．某班科技活动小组在学校科技创新活动中，设计了一种班级电子显示屏的屏幕保护画面，采用班级活动照片组成的抽象符号"*Y*"和"*C*"随机地反复出现，每秒钟变化一次，每次变化只出现"*Y*"和"*C*"之一，并通过程序后台设置，使出现"*Y*"的概率为 $p$，出现"*C*"的概率为 $q$.这种屏保引起了某数学小组的关注，他们用数学的方法对这种屏保的变化特点展开研究，通过在一定时长里出现"*Y*"、"*C*"的频数估计出 $p$ 与 $q$ 的值；并在开始观察后，将第 $k$ 次出现"*Y*"，记为 $a_k=1$；若出现"*C*"，则记为 $a_k=-1$，同时令 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，并提出以下问题：

(1)当 $p=\dfrac{3}{4}$，$q=\dfrac{1}{4}$ 时，求 $S_3$ 的分布列及数学期望；

(2)当 $S_8=2$ 且 $S_i\geq 0$（$i=1$，2，3，4）的概率最大时，求 $p$，$q$.

8．在传染病学中，通常把从致病刺激物侵入机体或者对机体发生作用起，到机体出现反应或开始呈现该疾病对应的相关症状时止的这一阶段称为潜伏期．一研究团队统计了某地区 1000 名患者的相关信息，得到如下表格：

| 潜伏期（单位：天） | $[0,2]$ | $(2,4]$ | $(4,6]$ | $(6,8]$ | $(8,10]$ | $(10,12]$ | $(12,14]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 85 | 205 | 310 | 250 | 130 | 15 | 5 |

（1）求这 1000 名患者的潜伏期的样本平均值 $\bar{x}$（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（2）该传染病的潜伏期受诸多因素的影响，为研究潜伏期与患者年龄的关系，以潜伏期是否超过 6 天为标准进行分层抽样，从上述 1000 名患者中抽取 200 人，得到如下列联表请将列联表补充完整，并根据列联表判断是否有 95% 的把握认为潜伏期与息者年龄有关；

| | 潜伏期$\leq 6$天 | 潜伏期$>6$天 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 50 岁以上（含 50） | | | 100 |
| 50 岁以下 | 55 | | |
| 总计 | | | 200 |

（3）以这 1000 名患者的潜伏期超过 6 天的频率，代替该地区 1 名患者潜伏期超过 6 天发生的概率，每名患者的潜伏期是否超过 6 天相互独立．为了深入研究，该研究团队随机调查了 20 名患者，其中潜伏期超过 6 天的人数最有可能（即概率最大）是多少？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$ .

| $P\left(K^2\geq k_0\right)$ | 0.05 | 0.025 | 0.010 |
|---|---|---|---|
| $k_0$ | 3.841 | 5.024 | 6.635 |

# 湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

# 高三数学一轮复习——概率解答题——概率的最值问题 2

9．第 13 届女排世界杯于 2019 年 9 月 14 日在日本举行，共有 12 支参赛队伍，本次比赛启用了新的排球用球，*MIKSA-V*200*W*，已知这种球的质量指标 $\xi$（单位：*g*）服从正态分布 $N$（270，$5^2$）.比赛赛制采取单循环方式，即每支球队进行 11 场比赛（采取 5 局 3 胜制），最后靠积分取得最后冠军，积分规则如下：比赛中以 3：0 或 3：1 取胜的球队积 3 分，负队积 0 分；而在比赛中以 3：2 取胜的球队积 2 分，负队积 1 分.已知第 10 轮中国队对抗塞尔维亚队，设每局比赛中国队取胜的概率为 $p(0<p<1)$

（1）若比赛准备了 1000 个排球，请估计质量指标在（260，265]内的排球个数（计算结果取整数）.

（2）第 10 轮比赛中，记中国队 3：1 取胜的概率为 $f(p)$.

（i）求出 $f(p)$ 的最大值点 $p_0$；

（ii）若以 $p_0$ 作为 $p$ 的值，记第 10 轮比赛中，中国队所得积分为 $X$，求 $X$ 的分布列及数学期望.

参考数据：若 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $p(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx0.6826$， $p(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx0.9544$

10．新型冠状病毒的传染主要是人与人之间进行传播，感染人群年龄大多数是50岁以上人群.该病毒进入人体后有潜伏期.潜伏期是指病原体侵入人体至最早出现临床症状的这段时间.潜伏期越长，感染到他人的可能性越高.现对 400个病例的潜伏期(单位：天)进行调查，统计发现潜伏期平均数为7.2，方差为$2.25^2$.如果认为超过8天的潜伏期属于“长潜伏期”，按照年龄统计样本，得到下面的列联表：

| 年龄/人数 | 长期潜伏 | 非长期潜伏 |
|---|---|---|
| 50 岁以上 | 60 | 220 |
| 50 岁及 50 岁以下 | 40 | 80 |

（1）是否有95%的把握认为“长期潜伏”与年龄有关；

（2）假设潜伏期 $X$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 $\mu$ 近似为样本平均数 $\bar{x}$， $\sigma^2$ 近似为样本方差 $s^2$.

（i）现在很多省市对入境旅客一律要求隔离14天，请用概率的知识解释其合理性；

（ii）以题目中的样本频率估计概率，设1000个病例中恰有 $k\left(k\in\boldsymbol{N}^*\right)$ 个属于“长期潜伏”的概率是 $p(k)$，当 $k$ 为何值时， $p(k)$ 取得最大值.附： $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

| $P\left(\chi^2\ge k_0\right)$ | 0.1 | 0.05 | 0.010 |
|---|---|---|---|
| $k_0$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 |

若$\xi \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$P\left(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma\right)=0.6826$，$P\left(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma\right)=0.9544$，$P\left(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma\right)=0.9974$.

11．某乡村中学教师资源薄弱，多数教师都在超负荷工作，为了体现按劳分配的原则，鼓励教师在力所能及的范围内多带课，学校计划把绩效工资根据教师每周代课的节数进行重新分配．每周课时量（仅是上课节数，不包括班主任工作）在区间$[7,12]$内为满工作量；在$(12,16]$内为超工作量；$(16,30]$为严重超工作量．为了了解本校教师的代课情况，通过简单随机抽样，获得了$10$名教师的代课情况统计表如下：

| 教师编号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 代课量（节） | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 20 |

（1）在计算教师一周总的课时津贴时（备注：本校全体教师的课时都不小于7节课），课时量介于$[7,12]$内部分，按$4$元/节计算课时津贴；课时量介于$(12,16]$内部分，按$6$元/节计算课时津贴；课时量介于$(16,30]$ 内部分，按$9$元/节计算课时津贴，试求教师一周总的课时津贴$y$与总的课时量$x$之间的函数关系；

（2）现要在这$10$名教师中任意选取$3$名，求取到超工作量（课时节数在$(12,16]$内）的教师人数的分布列与期望；

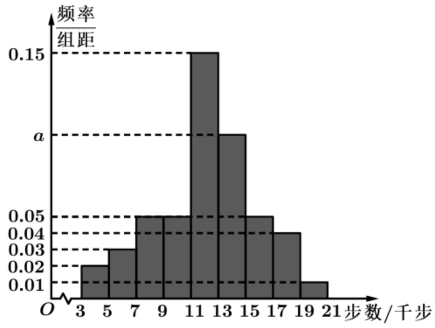
（3）用抽到的$10$名教师样本估计全校教师的代课情况，用频率代替概率．现在从全校教师中随机抽取$10$名教师，若抽到$k$名教师周代课量为满工作量（课时节数在$[7,12]$内）的可能性最大，求$k$的值．

12．为实现有效利用扶贫资金，增加贫困村民的收入，扶贫工作组结合某贫困村水质优良的特点，决定利用扶贫资金从外地购买甲、乙、丙三种鱼苗在鱼塘中进行养殖试验，试验后选择其中一种进行大面积养殖，已知鱼苗甲的自然成活率为$2p-1$，鱼苗乙、丙的自然成活率均为$p$，且甲、乙、丙三种鱼苗是否成活相互独立．

（1）试验时从甲、乙、丙三种鱼苗中各取一尾，记自然成活的尾数为$x$，求$x$的分布列．

（2）试验后发现乙种鱼苗较好，扶贫工作组决定购买$n$尾乙种鱼苗进行大面积养殖，若将（1）中满足数学期望$E(x)$不超过 2.6 的$p$的最大值作为乙种鱼苗成活的概率，养殖后发现乙种鱼苗有个别因不能适应环境而不能自然成活，对这些因不适应环境而不能自然成活的 80%鱼苗采取增氧、换鱼塘等措施，采取措施后成活的概率为 62.5%．若每尾乙种鱼苗最终成活后可获利 100 元，不成活则亏损 20 元，若扶贫工作组的扶贫目标是获利不小于 376 万元，问需至少购买多少尾乙种鱼苗？

13．随着智能手机的普及，手机计步软件迅速流行开来，这类软件能自动记载用户每日健步的步数．某市大型企业为了了解其员工每日健步走的情况，从正常上班的员工中随机抽取了 2000 人，统计了他们手机计步软件上同一天健步的步数（单位：千步，假设每天健步的步数均在 3 千步至 21 千步之间）．将样本数据分成$[3,5)$，$[5,7)$，$[7,9)$，$[9,11)$，$[11,13)$，$[13,15)$，$[15,17)$，$[17,19)$，$[19,21]$九组，绘制成如图所示的频率分布直方图，并用样本的频率分布估计总体的频率分布．




（1）求图中 $a$ 的值；

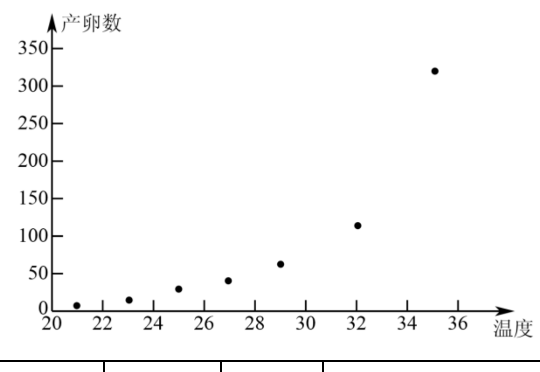
（2）设该企业正常上班的员工健步步数（单位：千步）近似服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中近似为样本的平均数（各区间数据用中点值近似计算），取$\sigma=3.64$，若该企业恰有 10 万人正常上班的员工，试估计这些员工中日健步步数 $Z$ 位于区间$[4.88,15.8]$范围内的人数；

（3）现从该企业员工中随机抽取 20 人，其中有 $k$ 名员工的日健步步数在 13 千步至 15 千步内的概率为$P(X=k)$，其中$k=0,1,2,\cdots,20$，当$P(X=k)$最大时，求 $k$ 的值．

参考数据：若随机变量$\xi$服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$P(\mu-\sigma<\xi\le\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<\xi\le\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，$P(\mu-3\sigma<\xi\le\mu+3\sigma)\approx 0.9973$．

14．美国白蛾，又叫秋幕毛虫，网幕毛虫，原产北美洲，广泛分布于美国和加拿大南部，1979 年由朝鲜传入我国辽宁省丹东市．2016 年，美国白蛾跨过淮河，向长江以南扩散趋势明显，现已传播至我国华北地区部分省市，并仍然呈扩散蔓延的趋势，严重危害果树、林木、农作物及野生植物等 300 多种植物……经调查研究发现，每只白蛾的平均产卵数 $y$ 和平均温度 $x$ 有关.为防治灾害，现收集了以往某地的 7 组数据，得到下面的散点图及一些统计量的值.

| 均温度 $x$℃ | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 32 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均产卵数 $y$/个 | 7 | 11 | 21 | 24 | 66 | 115 | 325 |




| $\overline{x}$ | $\overline{y}$ | $\overline{z}$ | $\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(z_i-\overline{z})$ | $\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 27.429 | 81.286 | 3.612 | 40.182 | 147.714 |

$z_i = \ln y_i$， $\overline{z} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} z_i$.

(1)根据散点图判断， $y = m + nx$ 与 $y = t\mathrm{e}^{rx}$ （其中 $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$为自然对数的底数）哪一个更适宜作为平均产卵数 $y$ 关于平均温度 $x$ 的经验回归模型？(给出判断即可，不必说明理由)

(2)求出 $y$ 关于 $x$ 的经验回归方程.(结果精确到小数点后第三位)

(3)根据以往统计，该地每年平均温度达到27?C以上时白蛾会对果树、林木、农作物等造成严重伤害，需要人工防治，其他情况均不需要人工防治，记该地每年平均温度达到27?C以上的概率为 $p(0<p<1)$.

①记该地今后 $n\left(n\geqslant 3, n \in \mathrm{N}^*\right)$ 年恰好需要 2 次人工防治的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 取得最大值时对应的概率 $p_0$；

②根据①中的结论，当 $f(p)$ 取最大值时，记该地今后 8 年需要人工防治的次数为 $X$，求 $X$ 的均值和方差.

附：对于一组数据 $(x_1, z_1)$， $(x_2, z_2)$， …， $(x_n, z_n)$，其经验回归方程 $\hat{z} = \hat{a} + \hat{b}x$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(z_i - \overline{z})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}，\quad \hat{a} = \overline{z} - \hat{b}\overline{x}.$$

15．某景区内有一项“投球”游戏，游戏规则如下：

游客投球目标为由近及远设置的 $A$，$B$，$C$ 三个空桶，每次投一个球，投进桶内即成功，游客每投一个球交费 10 元，投进 $A$ 桶，奖励游客面值 20 元的景区消费券；投进 $B$ 桶，奖励游客面值 60 元的景区消费券；投进 $C$ 桶，奖励游客面值 90 元的景区消费券；

投不进则没有奖励．游客各次投球是否投进相互独立．

(1)向 $A$ 桶投球 3 次，每次投进的概率为 $p$，记投进 2 次的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 $p_0$；

(2)游客甲投进 $A$，$B$，$C$ 三桶的概率分别为 $\frac{1}{2}p_0, \frac{3}{10}p_0, \frac{3}{20}p_0$，若他投球一次，他应该选择向哪个桶投球更有利？说明理由.

## 湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——概率解答题——概率的最值问题 3

16．2022 年春季，新一轮新冠疫情在全国范围内蔓延开来，严重影响了国家的经济发展和人民的正常生活.某城市为打赢这场疫情防控阻击战，政府投入大量人力物力，党员干部冲锋在前坚守岗位，普通群众配合政策居家隔离.在全市人民的共同努力下，该城市以最快的速度实现复工复产，人民生活回到了正常轨道.疫情的出现让人们认识到身体健康的重要性，健身达人刘畊宏带动了一股年轻人的健身热潮，人们纷纷争做“刘畊宏男孩”、“刘畊宏女孩”.但是对于中老年人来说，步行是最简单有效的运动方式.某研究团队统计了该地区 1000 位居民的日行步数，得到如下表格；

| 日行步数（单位：千） | $[0,2]$ | $(2,4]$ | $(4,6]$ | $(6,8]$ | $(8,10]$ | $(10,12]$ | $(12,14]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 20 | 60 | 170 | 200 | 300 | 200 | 50 |

(1)为研究日行步数与居民年龄的关系，以日行步数是否超过 8 千为标准进行分层抽样，从上述 1000 位居民中抽取 200 人，得到如下 $2\times2$ 列联表，请将下表补充完整，并根据下表判断是否有 95%的把握认为日行步数与居民年龄有关：

| | 日行步数$\leq 8$千 | 日行步数$>8$千 | 总计 |
|---|---|---|---|
| 40 岁以上 | | | 100 |
| 40 岁以下（含 40 岁） | 50 | | |
| 总计 | | | 200 |

(2)以这 1000 位居民日行步数超过 8 千的频率，来代替该地区每位居民日行步数超过 8 千的概率，且每位居民日行步数是否超过 8 千相互独立，若该团队随机调查 20 位居民，设其中恰有 $x$ 位居民日行步数超过 8 千的概率是 $P$，求当 $x$ 取多少时 $P$ 最大？（不必求此时的 $P$ 值）

附：

| $P\left(K^2\geq k_0\right)$ | 0.05 | 0.025 | 0.010 |
|---|---|---|---|
| $k_0$ | 3.841 | 5.024 | 6.635 |

$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，其中 $n=a+b+c+d$ .

17．葫芦岛市矿产资源丰富，拥有煤、钼、锌、铅等 51 种矿种，采矿业历史悠久，是葫芦岛市重要产业之一．某选矿场要对即将交付客户的一批 200 袋钼矿进行品位（即纯度）检验，如检验出品位不达标，则更换为达标产品，检验时；先从这批产品中抽 20 袋做检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有钼矿做检验，设每袋钼矿品位不达标的概率都为 $p\left(0<p<1\right)$，且每袋钼矿品位是否达标相互独立．

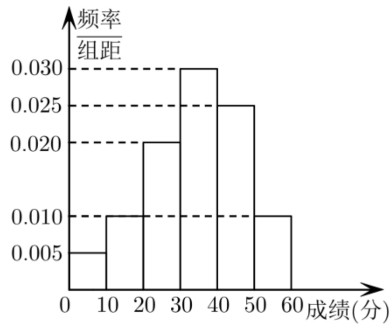
(1)若 20 袋钼矿中恰有 2 袋不达标的概率为 $f\left(p\right)$，求 $f\left(p\right)$ 的最大值点 $p_0$；

(2)已知每袋钼矿的检验成本为 10 元，若品位不达标钼矿不慎出场，对于每袋不达标钼矿要赔付客户 110 元．现对这批钼矿检验了 20 袋，结果恰有两袋品位不达标．

①若剩余钼矿不再做检验，以（1）中确定的 $p_0$ 作为 $p$ 的值．这批钼矿的检验成本与赔偿费用的和记作 $\xi$，求 $E\left(\xi\right)$；

②以①中检验成本与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对余下的所有钼矿进行检验？

18．北京冬奥会已于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日顺利举行，这是中国继北京奥运会.南京青奥会后，第三次举办的奥运赛事，为助力冬奥，进一步增强群众的法治意识.提高群众奥运法律知识水平和文明素质，让法治精神携手冬奥走进千家万户.某市有关部门在该市市民中开展了“迎接冬奥 法治同行”主题法治宣传教育活动.该活动采取线上线下相结合的方式，线上有“知识大闯关”冬奥法律知识普及类趣味答题，线下有“冬奥普法”知识讲座，实现“冬奥+普法”的全新模式.其中线上“知识大闯关”答题环节共计 30 个题目，每个题目 2 分，满分 60 分，现在从参与作答“知识大闯关”题目的市民中随机抽取 1000 名市民，将他们的作答成绩分成 6 组：$[0,10),[10,20),[20,30),[30,40),[40,50),[50,60]$.并绘制了如图所示的频率分布直方图.




(1)请估计被抽取的 1000 名市民作答成货的平均数和中位数；

(2)视频率为概率.现从所有参与“知识大闯关”活动的市民中随机取 20 名，调查其掌握各类冬奥法律知识的情况.记 $k$ 名市民的成绩在 $[40,60]$ 的概率为 $P(X=k)$，$k=0,1,2$，…，20.请估计这 20 名市民的作答成绩在 $[40,60]$ 的人数为多少时 $P(X=k)$ 最大？并说明理由.

19．某学习网按学生数学成绩的水平由高到低分成甲、乙两档，进行研究分析，假设学生做对每道题相互独立，其中甲、乙档学生做对每道题的概率分别为 $p$，$\frac{5}{8}p$，现从甲、乙两档各抽取一名学生成为一个学习互助组合.

(1)现从甲档中选取一名学生，该生 5 道题做对 4 道题的概率为 $f\left(p\right)$，求出 $f\left(p\right)$ 的最大值点 $p_0$；

(2)若以 $p_0$ 作为 $p$ 的值，

①求每一个互助组合做对题的概率；

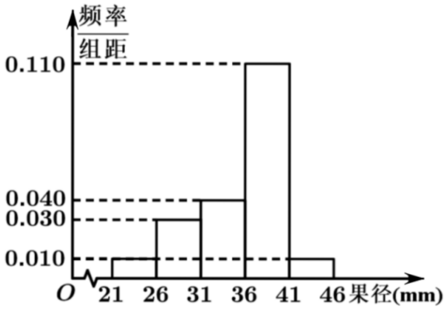
②现选取 $n$ 个组合，记做对题的组数为随机变量 $X$，当 $X=90$ 时，$P\left(X\right)$ 取得最大值，求相应的 $n$ 和 $E\left(X\right)$.

20．某电视台举办“读经典”知识挑战赛，初赛环节，每位选手先从 $A$，$B$，$C$ 三类问题中选择一类.该类题库随机提出一个问题，该选手若回答错误则被淘汰，若回答正确则需从余下两类问题中选择一类继续回答.该类题库随机提出一个问题，该选手若回答正确则取得复赛资格，本轮比赛结束：否则该选手需要回答由最后一类题库随机提出的两个问题，两个问题均回答正确该选才可取得复赛资格，否则被淘汰.已知选手甲能正确回答 $A$，$B$ 两类问题的概率均为 $\frac{3}{4}$，能正确回答 $C$ 类问题的概率为 $\frac{2}{3}$，每题是否回答正确与回答顺序无关，且各题回答正确与否相互独立.

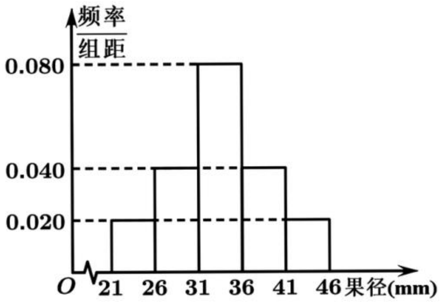
(1)已知选手甲先选择 $A$ 类问题且回答正确，接下来他等可能地选择 $B$，$C$ 中的一类问题继续回答，求他能取得复赛资格的概率；

(2)为使取得复赛资格的概率最大，选手甲应如何选择各类问题的回答顺序?请说明理由.

21．某种水果按照果径大小分为四类：标准果、优质果、精品果、礼品果．一般的，果径越大售价越高．为帮助果农创收，提高水果的果径，某科研小组设计了一套方案，并在两片果园中进行对比实验．其中实验园采用实验方案，对照园未采用．实验周期结束后，分别在两片果园中各随机选取 100 个果实，按果径分成 5 组进行统计：[21，26)，[26，31)，[31，36)，[36，41)，[41，46]（单位：mm）．统计后分别制成如下的频率分布直方图，并规定果径达到 36mm 及以上的为“大果”．




实验园果径




对照园果径

(1)估计实验园的“大果”率；

(2)现采用分层抽样的方法从对照园选取的 100 个果实中抽取 10 个，再从这 10 个果实中随机抽取 3 个，记“大果”个数为 $X$，求 $X$ 的分布列和数学期望的；

(3)以频率估计概率，从对照园这批果实中随机抽取 $n(n \geq 2)$ 个，设其中恰有 2 个“大果”的概率为 $P(n)$，当 $P(n)$ 最大时，写出 $n$ 的值（只需写出结论）．

# 湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

# 高三数学一轮复习——概率解答题——概率的最值问题 4

22．新冠病毒奥密克戎变异株在全球快速蔓延，并引发香港新一波疫情发.2022 年 3 月 3 日当天新增 55353 例新冠确诊病例，创单日新增病例新高.截止 3 月 3 日，香港累计病例逾 39 万例.专家再次提醒：新型冠状病毒是一种传染性极强且危及人们生命安全的严重病毒，新冠防控不可掉以轻心.在新冠防控的过程中，我们把与携带新型冠状病毒者（称之为患者）有过密切接触的人群称为密切关联者.已知每位密切关联者通过核酸检测被确诊为阳性的概率为 $4p\left(0<p<1\right)$.一旦被确诊为阳性后立即将其隔离.某患者在隔离前每天有 $K$ 位密切关联者与之接触（假设这 $K$ 个人不与其他患者接触），其中被感染的人数为 $X\left(0\le X\le K\right)$

(1)求一天内被感染人数 $X=k$ 的概率的表达式和 $X$ 的数学期望；

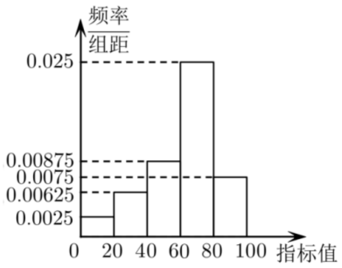
(2)该病毒在进入人体后有 14 天的潜伏期，若在这 14 天内患者无任何症状，则为病毒传播的最佳时间，设每位患者在不知自己患病的情况下，第二天又与 $K$ 位密切关联者接触.从某一名患者感染新型冠状病毒的第 1 天开始算起，第 $n$ 天新增患者的数学期望记为 $E_n\left(n\ge 2\right)$.

①当 $K=20$，$p=\dfrac{1}{2}$，求 $E_6$ 的值；

②试分析每位密切关联者佩戴口罩后与患者接触能否降低患病的概率，经大量临床数据验证佩戴口罩后被感染患病的概率 $p_1$ 满足关系式 $p_1=\ln\sqrt{1+p}-\dfrac{1}{3}p$.当 $p_1$ 取得最大值时，计算 $p_1$ 所对应的 $E_6{}'$，并和 $p$ 所对应的 $E_6$ 做对比，然后根据计算结果说明佩戴口罩的必要性.（$K=20$）

（参考数据：$\ln2\approx0.7$，$\ln3\approx1.1$，$\ln5\approx1.6$，$\dfrac{1}{3}\approx0.3$，$\dfrac{2}{3}\approx0.7$ 计算结果保留整数）

23．为了检测某种抗病毒疫苗的免疫效果，需要进行动物与人体试验.研究人员将疫苗注射到 200 只小白鼠体内，一段时间后测量小白鼠的某项指标值，按$[0,20)$，$[20,40)$，$[40,60)$，$[60,80)$，$[80,100]$分组，绘制频率分布直方图如图所示.试验发现小白鼠体内产生抗体的共有 160 只，其中该项指标值不小于 60 的有 110 只.假设小白鼠注射疫苗后是否产生抗体相互独立.




（1）填写下面的$2\times2$列联表，并根据列联表及$\alpha=0.05$的独立性检验，判断能否认为注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于 60 有关.

单位：只

<table>
<tr><td rowspan="2">抗体</td><td colspan="2">指标值</td><td rowspan="2">合计</td></tr>
<tr><td>小于 60</td><td>不小于 60</td></tr>
<tr><td>有抗体</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>没有抗体</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>合计</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

（2）为检验疫苗二次接种的免疫抗体性，对第一次注射疫苗后没有产生抗体的 40 只小白鼠进行第二次注射疫苗，结果又有 20 只小白鼠产生抗体.

（i）用频率估计概率，求一只小白鼠注射 2 次疫苗后产生抗体的概率$p$；

（ii）以（i）中确定的概率$p$作为人体注射 2 次疫苗后产生抗体的概率，进行人体接种试验，记$n$个人注射 2 次疫苗后产生抗体的数量为随机变量$X$.试验后统计数据显示，当$X=90$时，$P(X)$取最大值，求参加人体接种试验的人数$n$及$E(X)$.

24．为落实立德树人根本任务，坚持五育并举全面推进素质教育，某学校举行了乒乓球比赛，其中参加男子乒乓球决赛的 12 名队员来自 3 个不同校区，三个校区的队员人数分别是 3，4，5.本次决赛的比赛赛制采取单循环方式，即每名队员进行 11 场比赛（每场比赛都采取 5 局 3 胜制），最后根据积分选出最后的冠军.积分规则如下：比赛中以$3:0$或$3:1$取胜的队员积 3 分，失败的队员积 0 分；而在比赛中以$3:2$取胜的队员积 2 分，失败的队员的队员积 1 分.已知第 10 轮张三对抗李四，设每局比赛张三取胜的概率均为$p(0<p<1)$.

（1）比赛结束后冠亚军(没有并列)恰好来自不同校区的概率是多少？

（2）第 10 轮比赛中，记张三$3:1$取胜的概率为$f(p)$.

①求出$f(p)$的最大值点$p_0$；②若以$p_0$作为$p$的值，这轮比赛张三所得积分为$X$，求$X$的分布列及期望.

25．我省2021年起全面实施新高考方案.在6门选择性考试科目中，物理、历史两门学科采用原始分计分；思想政治、地理、化学、生物采用等级转换赋分，将每科考生的原始分从高到低划分为A，$B$，$C$，$D$，$E$共5个等级，各等级人数所占比例分别为15%、35%、35%、13%和2%，并按给定的公式进行转换赋分.某市组织了高三年级期初统一考试，并尝试对生物学科的原始分进行了等级转换赋分.

（1）某校生物学科获得A等级的共有10名学生，其原始分及转换分如下表：

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 原始分 | 98 | 96 | 95 | 92 | 90 | 88 | 85 | 83 |
| 转换分 | 100 | 99 | 97 | 95 | 94 | 91 | 88 | 86 |
| 人数 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 |

现从这10名学生中随机抽取3人，设这3人中生物转换分不低于95分的人数为$X$，求$X$的分布列和数学期望；

（2）该市此次高三学生的生物学科原始分$Y$服从正态分布$N(75,36)$.现随机抽取了该市100名高三学生的生物学科的原始分，学生的原始分相互独立，记$\xi$为被抽到的原始分不低于81分的学生人数，求$P(\xi=k)$取得最大值时$k$的值.

附：若$Z\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$则$P\left(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma\right)=0.7$，$P\left(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma\right)=0.95$.

26．一支担负勘探任务的队伍有若干个勘探小组和两类勘探人员，甲类人员应用某种新型勘探技术的精准率为0.6，乙类人员应用这种勘探技术的精准率为$a\left(0<a<0.4\right)$.每个勘探小组配备1名甲类人员与2名乙类人员，假设在执行任务中每位人员均有一次应用这种技术的机会且互不影响，记在执行任务中每个勘探小组能精准应用这种新型技术的人员数量为$\xi$.

（1）证明：在$\xi$各个取值对应的概率中，概率$P\left(\xi=1\right)$的值最大；

（2）在特殊的勘探任务中，每次只能派一个勘探小组出发，工作时间不超过半小时，如果半小时内无法完成任务，则重新派另一组出发.现在有三个勘探小组$A_i(i=1,2,3)$可派出，若小组$A_i$能完成特殊任务的概率$t$；

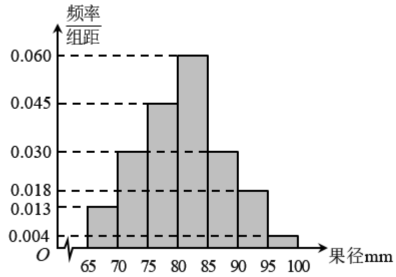
$t_i=P\left(\xi=i\right)\left(i=1,2,3\right)$，且各个小组能否完成任务相互独立.试分析以怎样的先后顺序派出勘探小组，可使在特殊勘探时所需派出的小组个数的均值达到最小.

27．在“十三五”期间，我国的扶贫工作进入了“精准扶贫”阶段．到2020年底，全国830个贫困县全部脱贫摘帽，最后4335万贫困人口全部脱贫，这是我国脱贫攻坚史上的一大壮举．重庆市奉节县作为国家贫困县之一，于2019年4月顺利脱贫摘帽．因地制宜发展特色产业，是奉节脱贫攻坚的重要抓手．奉节县规划发展了以高山烟叶、药材、反季节蔬菜；中山油橄榄、养殖；低山脐橙等为主的产业格局，各类特色农产品已经成为了当地村民的摇钱树．尤其是奉节脐橙，因“果皮中厚、脆而易剥，肉质细嫩化渣、无核少络，酸甜适度，汁多爽口，余味清香”而闻名．为了防止返贫，巩固脱贫攻坚成果，各职能部门对脐橙种植、销售、运输、改良等各方面给予大力支持．已知脐橙分类标准：果径80mm~85mm为一级果，果径75mm~80mm为二级果，果径70~75mm或85mm以上为三级果．某农产品研究所从种植园采摘的大量奉节脐橙中随机抽取1000个，测量这些脐橙的果径（单位：mm），得到如图所示的频率分布直方图.

（1）试估计这1000个奉节脐橙的果径的中位数；

（2）在这1000个脐橙中，按分层抽样的方法在果径70~85mm中抽出9个脐橙，为进一步测量其他指标，在抽取的9个脐橙中再抽出3个，求抽到的一级果个数$X$的分布列与数学期望；

（3）以样本估计总体，用频率代替概率，某顾客从种植园的这批脐橙中随机购买100个，其中一级果的个数为$Y$，记一级果的个数为k的概率为$P(Y=k)$，写出$P(Y=k)$的表达式，并求出当$k$为何值时，$P(Y=k)$最大？




28．我国某芯片企业使用新技术对一款芯片进行试产，设试产该款芯片的次品率为 $p$（$0<p<1$），且各个芯片的生产互不影响．

(1)试产该款芯片共有两道工序，且互不影响，其次品率依次为，$p_1=\dfrac{1}{33}, p_2=\dfrac{1}{34}$．①求 $p$；

②现对该款试产的芯片进行自动智能检测，自动智能检测为次品（注：合格品不会被误检成次品）的芯片会被自动淘汰，然后再进行人工抽检已知自动智能检测显示该款芯片的合格率为 96%，求人工抽检时，抽检的一个芯片是合格品的概率．

(2)视 $p$ 为概率，记从试产的芯片中随机抽取 $n$ 个恰含 $m$（$n>m$）个次品的概率为 $f(p)$，求证：$f(p)$ 在 $p=\dfrac{m}{n}$ 时取得最大值．

29．某地区出现了一种病毒性传染病疫情，该病毒是一种人传人，不易被人们直接发现，潜伏时间长，传染性极强的病毒.我们把与该病毒感染者有过密切接触的人群称为密切接触者，一旦发现感染者，社区会立即对其进行流行病学调查，找到其密切接触者进行隔离观察.通过病毒指标检测，每位密切接触者为阳性的概率为 $1-p(0<p<1)$，且每位密切接触者病毒指标是否为阳性相互独立.调查发现某位感染者共有 10 位密切接触者，将这 10 位密切接触者隔离之后立即进行病毒指标检测.检测方式既可以采用逐个检测，又可以采用“$k$ 合 1 检测法”.“$k$ 合 1 检测法”是将 $k$ 个样本混合在一起检测，混合样本中只要发现阳性，则该组中各个样本必须再逐个检测；若混合样本为阴性，则可认为该混合样本中每个人都是阴性.

(1)若逐个检测，发现恰有 2 个人样本检测结果为阳性的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 $p_0$；

(2)若采用“ 5 合 1 检测法”，总检测次数为 $X$，求随机变量 $X$ 的分布列及数学期望 $E(X)$；

(3)若采用“10 合 1 检测法”，总检测次数 $Y$ 的数学期望为 $E(Y)$，以（1）中确定的 $p_0$ 作为 $p$ 的值，试比较 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 的大小(精确到 0.1).附：$2^{15}=32768$.

30．学习强国中有两项竞赛答题活动，一项为“双人对战”，另一项为“四人赛”．活动规则如下：一天内参与“双人对战”活动，仅首局比赛可获得积分，获胜得 2 分，失败得 1 分；一天内参与“四人赛”活动，仅前两局比赛可获得积分，首局获胜得 3 分，次局获胜得 2 分，失败均得 1 分．已知李明参加“双人对战”活动时，每局比赛获胜的概率为 $\dfrac{1}{2}$；参加“四人赛”活动（每天两局）时，第一局和第二局比赛获胜的概率分别为 $p$，$\dfrac{1}{3}$．李明周一到周五每天都参加了“双人对战”活动和“四人赛”活动（每天两局），各局比赛互不影响．

(1)求李明这 5 天参加“双人对战”活动的总得分 $X$ 的分布列和数学期望；

(2)设李明在这 5 天的“四人赛”活动（每天两局）中，恰有 3 天每天得分不低于 3 分的概率为 $f(p)$．求 $p$ 为何值时，$f(p)$ 取得最大值．