湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列奇偶、跳跃（1）

第 1 讲 奇偶分离法求数列的通项公式

题型一. 跳跃等差数列——形如 $a_{n+2}-a_n=d$ 类型

定义：a_{n+2} 与 a_n 不是数列 $\{a_n\}$ 中连续的项，故此我们称满足 $a_{n+2}-a_n=d$ 条件的数列 $\{a_n\}$ 为跳跃等差数列.

1. 奇偶分离法：通过对数列下标 n 进行换元，分为奇数项与偶数项两种情况分而治之.

①当 n 为奇数时，可令 $n=2k-1$（$k\in N^*$），反解得 $k=\dfrac{n+1}{2}$，于是

$a_n=a_{2k-1}=a_1+(k-1)d=a_1+(\dfrac{n+1}{2}-1)d=a_1+\dfrac{n-1}{2}d$；

②当 n 为偶数时，可令 $n=2k$（$k\in N^*$），反解得 $k=\dfrac{n}{2}$，于是 $a_n=a_{2k}=a_2+(k-1)d=a_2+(\dfrac{n}{2}-1)d=a_2+\dfrac{n-2}{2}d$.

综上所述，$a_n=\begin{cases}a_1+\dfrac{n-1}{2}d & n\text{为奇数}\\ a_2+\dfrac{n-2}{2}d & n\text{为偶数}\end{cases}$.

注意换元后，要将最后的结果还原成关于 n 的表达式.

2. 待定系数法：此类型题由于 a_1 和 a_2 作为数列奇数项和偶数项首项，会使得数列一些变形出现一些计算难度，故可以采用待定系数法来求统一的通项公式，考虑首项的因素，需要在原始的待定系数的前面加上 $(-1)^n$. 具体操作如下：令 $a_n=xn+y+z(-1)^n$，其中 $x=\dfrac{d}{2}$，代入 $n=1$ 和 $n=2$ 即可确定 y 和 z.

【例 1】数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_2=4,a_n=a_{n-2}+2(n\geq3)$，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【练习 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=10$，$a_2=5$，$a_n-a_{n+2}=2$. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【练习 2】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且对任意 $k\in N^*$，$a_{2k+1}=a_{2k}+1$，$a_{2k}=a_{2k-1}+2$，则 $a_{2020}=$__________

衍生 1 等和数列——形如 $a_{n+1}+a_n=s$ 类型

1. "等和数列"定义：在一个数列中，如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数，那么这个数列叫做等和数列，这个常数叫做该数列的公和.

2. 若 $a_{n+1}+a_n=c$（c 为常数），则数列 $\{a_n\}$ 为"等和数列"，它是一个周期数列，周期为 2，其通项分为奇数项和偶数项来讨论.

衍生 2 类等和数列——形如 $a_{n+1}+a_n=f(n)$ 类型

处理思路：等和数列、类等和数列可以归结为跳跃等差数列问题，其基本思路是生成、相减；与"差型"的生成、相加（累加法）的思路刚好相呼应. 当 $a_{n+2}+a_{n+1}=f(n)=dn+b$ 时，则 $a_{n+1}+a_n=d(n-1)+b$，两式相减得：$a_{n+2}-a_n=d$，故 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的跳跃等差数列，通过分奇偶项讨论进而将问题转化为 $\{a_{2n-1}\}$ 与 $\{a_{2n}\}$ 是等差数列，然后求通项.

【例 2】已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$， $a_n+a_{n+1}=3n-54$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【练习 1】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$， $a_{n+1}+a_n=2n+1(n\in N_+)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【练习 2】数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_{n+1}+a_n=2n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【练习 3】已知$a_{n+1}+a_n=4n-3$， $a_1=2$，求$\{a_n\}$的通项公式.

题型二. 跳跃等比数列——形如$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q$类型

1. 定义： a_{n+2}与a_n不是数列$\{a_n\}$中连续的项，故此我们称满足$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q$条件的数列$\{a_n\}$为跳跃等比数列.

2. 奇偶分离法：通过对数列下标n进行换元，分为奇数项与偶数项两种情况分而治之.

①当n为奇数时，可令$n=2k-1$（$k\in N^*$），反解得$k=\dfrac{n+1}{2}$，于是$a_n=a_{2k-1}=a_1\cdot q^{k-1}=a_1\cdot q^{\frac{n+1}{2}-1}=a_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}}$；

②当n为偶数时，可令$n=2k$（$k\in N^*$），反解得$k=\dfrac{n}{2}$，于是$a_n=a_{2k}=a_2\cdot q^{k-1}=a_2\cdot q^{\frac{n}{2}-1}=a_2\cdot q^{\frac{n-2}{2}}$.

综上所述，$a_n=\begin{cases}a_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}} & n\text{为奇数}\\ a_2\cdot q^{\frac{n-2}{2}} & n\text{为偶数}\end{cases}$.

注意换元后，要将最后的结果还原成关于n的表达式.

【例 3】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=qa_n(q\neq 1),n\in \mathrm{N}^*,a_1=1,a_2=2$，且$a_2+a_3,a_3+a_4,a_4+a_5$成等差数列. 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【练习 1】数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$且对任意$k\in N*$， $a_{2k+1}=a_{2k}+1$， $a_{2k}=2a_{2k-1}$，则$a_{2020}=$__________

衍生 1 等积数列——形如 $a_{n+1}\cdot a_n=p$ 类型

1. “等积数列”定义：在一个数列中，如果每一项与它的后一项的积都为同一个常数，那么这个数列叫做等积数列，这个常数叫做该数列的公积.

2. 若 $a_{n+1}\cdot a_n=p$（p 为常数），则数列 $\{a_n\}$ 为“等积数列”，它是一个周期数列，周期为 2，其通项分奇数项和偶数项来讨论.

衍生 2 类等积数列——形如 $a_{n+2}\cdot a_{n+1}=f(n)$ 类型

处理思路：等积数列、类等积数列可以归结为跳跃等比数列问题，其基本思路是生成、相除；与“商型”的生成、相乘（累乘法）的思路刚好相呼应. 若 $f(n)$ 为 n 的函数时，可通过逐商法得 $a_{n+1}\cdot a_n=f(n-1)$，两式相除后，通过分奇偶项讨论将问题转化为 $\{a_{2n-1}\}$ 与 $\{a_{2n}\}$ 是等比数列，然后再求通项.

1. 奇偶分离法：$a_{n+2}a_{n+1}=f(n)=q^{An+B}$，则 $a_{n+1}a_n=q^{A(n-1)+B}$，两式相除得：$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q^A$，故

$\{a_n\}$ 是公比为 q^A 的跳跃等比数列，$\therefore a_n=\begin{cases}a_1\cdot(q^A)^{\frac{n-1}{2}}=a_1\cdot q^{\frac{n-1}{2}A} & n\text{为奇数}\\ a_2\cdot(q^A)^{\frac{n-2}{2}}=a_1\cdot q^{\frac{n-2}{2}A} & n\text{为偶数}\end{cases}$.

2. 待定系数法：$a_n=q^{xn+y+z(-1)^n}$，$a_{n+1}=q^{x(n+1)+y+z(-1)^{n+1}}$，$a_n\cdot a_{n+1}=q^{2xn+x+2y}=q^{An+B}$，对比系数可得出 $x=\dfrac{A}{2}$，

$y=\dfrac{2B-A}{4}$，再跟 a_1 即可确定 z.

【例 4】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_n\cdot a_{n+1}=2^n$，求此数列的通项公式.

【练习 1】在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_n\cdot a_{n+1}=3^n$，求 a_n.

【练习 2】已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}+S_n=a_{n+1}^2$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n\cdot b_{n+1}=3^{a_n}$. $b_1=1$，求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式.

第 2 讲 奇偶分离法求数列的前 n 项和

题型一. 跳跃等差数列——形如 $a_{n+1}-a_{n-1}=d\,(n\geq 2)$ 类型

【例1】 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_2=4,a_n=a_{n-2}+2(n\geq 3)$，$S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，求 S_n.

【例 2】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}-a_n=1+(-1)^{n+1}$，则 S_{100} 的值为___

【练习 1】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=10$，$a_2=5$，$a_n-a_{n+2}=2$.（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）记数列$\{a_n\}$的前$2n$项和为S_{2n}，当S_{2n}取得最大值时，求n的值.

题型二. 分段数列

通项公式分为奇数项与偶数项两段，先分段求和，再合并.

【例 3】（2021 新高考Ⅰ卷）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n为奇数,\\ a_n+2,n为偶数.\end{cases}$

（1）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求$\{a_n\}$的前20项和.

【例 4】设首项为1的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n=\begin{cases}a_{n-1}+3,n=2k,k\in N^*\\ 2a_{n-1}+3,n=2k+1,k\in N^*\end{cases}$，若$S_m>4042$，则正整数$m$的最小值为____________

【例 5】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，$a_2=1$，$a_n=\begin{cases}2+a_{n-2},n=2k-1\\ 2a_{n-2}\quad,n=2k\end{cases}$（$k\in N^*$且$k\geq 2$），则数列$\{a_n\}$的前 10 项和为_

【练习 1】已知数列$\{a_n\}$满足$a_{2n}-a_{2n-1}=3^n-1$，$a_{2n+1}+a_{2n}=3^n+5(n\in N_+)$，则数列$\{a_n\}$的前 40 项和$S_{40}=($　　$)$

A．$\dfrac{3^{21}+197}{2}$　　B．$\dfrac{3^{20}+197}{2}$　　C．$9^{10}+98$　　D．$9^{20}+98$

【练习 2】若数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{2n+1}=2a_{2n-1}+1$，$a_{2n+2}=a_{2n}+1$，则$a_7=$______，$S_{20}=$_______.

【练习 3】设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$a_{2n}=a_n-1$，$a_{2n+1}=n-a_n$，则$S_{100}=$_____.

【练习 4】已知数列$\{a_n\}$是等差数列，设$S_n(n\in N^*)$为数列$\{a_n\}$的前n项和，数列$\{b_n\}$是等比数列，$b_n>0$，若$a_1=3$，$b_1=1$，$b_3+S_2=12$，$a_5-2b_2=a_3$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若$c_n=\begin{cases}\dfrac{2}{S_n},n为奇数\\ b_n,n为偶数\end{cases}$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列奇偶、跳跃（2）

题型三. 分奇偶后，转化为常规数列的求和

1. 类等和数列——形如 $a_{n+1}+a_n=f(n)$ 类型

并项求和法：对于 $a_n+a_{n+1}=f(n)=An+B$ 类型，我们可以将 a_n 与 a_{n+1} 并项，把 a_n+a_{n+1} 看作一个整体，容易知道数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是公差为 A 的等差数列.

1. 当 n 为偶数时，并项后生成公差为 $2A$ 的等差数列 $\{a_1+a_2,a_3+a_4,\Lambda,a_{n-1}+a_n,\Lambda\}$，代入求和公式，此时可得 $S_n=\dfrac{\left[A+B+A(n-1)+B\right]}{2}\cdot\dfrac{n}{2}=\dfrac{n(An+2B)}{4}$；

2. 当 n 为奇数时，把首项 a_1 独立出来，剩余各项并项后生成公差为 $2A$ 的等差数列 $\{a_2+a_3,a_4+a_5,\Lambda,a_{n-1}+a_n,\Lambda\}$，再代入求和公式，此时可得 $S_n=a_1+\dfrac{\left[2A+B+A(n-1)+B\right]}{2}\cdot\dfrac{n-1}{2}=a_1+\dfrac{(n-1)\left[A(n+1)+2B\right]}{4}$.（外减1内加1）

【例 6】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=m$，且对任意的 $n\in N^*$ 都有 $a_n+a_{n+1}=2n+1$，则下列三个命题中，所有真命题的序号是(　　)

①存在实数 m，使得 $\{a_n\}$ 为等差数列；②存在实数 m，使得 $\{a_n\}$ 为等比数列；③若存在 $k\in N^*$ 使得 $S_k=S_{k+1}=55$，则实数 m 唯一.

A. ①　　　B. ①②　　　C. ①③　　　D. ①②③

【例 7】已知 $a_{n+1}+a_n=4n-3$.（1）$\{a_n\}$ 为等差数列，求 a_1；（2）若 $a_1=2$，求 S_n.

【例 8】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_n+S_{n-1}=4n^2(n\geq 2,n\in N^*)$，则 $a_{100}=$____

【练习 1】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_n+S_{n-1}=4n^2(n\geq 2,n\in N^*)$，则 $S_{25}=$_______.

【练习 2】在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}+a_n=3n-54$.（1）若 $a_1+20=0$，求通项 a_n；（2）设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，试说明当 $a_1+27>0$ 时，存在自然数 n，使得 $n=m$ 时，S_n 和 $|a_{n+1}+a_n|$ 均取得最小值，并求出此时的 m 值.

2. 隔四项出规律的递推数列——形如$a_{n+1}+(-1)^n a_n=An+B$型

定理：若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=An+B$，S_n为其前n项和，则数列$\{S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8,\Lambda\}$是以$6A+2B$为首项，$8A$为公差的等差数列．

证明：$\begin{cases}a_2-a_1=\ \ A+B & (1)\\ a_3+a_2=2A+B & (2)\\ a_4-a_3=3A+B & (3)\end{cases}$ （2）－（1）＋（2）＋（3）得：$a_1+a_2+a_3+a_4=6A+2B$，同理

$\begin{cases}a_6-a_5=5A+B & (4)\\ a_7+a_6=6A+B & (5)\\ a_8-a_7=7A+B & (6)\end{cases}$ （5）－（4）＋（5）＋（6）得：$a_5+a_6+a_7+a_8=14A+2B$．

故数列$\{S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8,\Lambda\}$是以$6A+2B$为首项，$8A$为公差的等差数列．此类型题可以求出通项，但花的时间太多，显然每4项为一个整体操作更简单．一些数列含有周期性，需要列举几项，先发现规律后再简化要简单的多．

【例 9】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=0$，$a_{n+2}+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a_n=2$，则数列$\{a_n\}$的前2020项的和为________

【例 10】数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_n=2n$，则数列$\{a_n\}$的前 60 项和等于____________

【练习 1】数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n\cdot a_n=2n-1$，　则$\{a_n\}$前60项和为_______

【练习 2】数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则$\{a_n\}$的前 44 项和为_____

3. 二阶等差数列的求和公式

在数列$\{a_n\}$中，从第二项起，每一项与它的前一项的差按照前后次序排成新的数列，即

$a_2-a_1,a_3-a_2,a_4-a_3,\cdots,a_n-a_{n-1},\cdots$成为一个等差数列，则称数列$\{a_n\}$为二阶等差数列，记$d_1=a_2-a_1$，

$d_2=(a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})$（$n\ge 2$），其通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}$．若记不住公式，可设为：

$a_n=\frac{d_2}{2}n^2+bn+c$，代入$a_1$，$a_2$，待定出$b$，$c$，即可得到通项公式. 二阶等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和公式为

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d_1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)d_2}{3!}$．

【例 11】数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$，前16项和为540，则$a_1=$ _______.

【练习 1】我们把按照一定顺序排列的一列数称为数列，如 1，3，9，19，
33，…就是一个数列，如果一个数列从第二个数起，每一个数与它前一个数的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做这个等差数列的公差．如 2，4，6，8，10 就是一个等差数列，它的公差为2.如果一个数列的后一个数与前一个数的差组成的新数列是等差数列,则称这个数列为二阶等差数列.例如数列 1，3，9，19，33，…，它的后一个数与前一个数的差组成的新数列是 2，6，10，14，…，这是一个公差为 4 的等差数列，所以，数列 1，3，9，19，33，…是一个二阶等差数列．那么，请问二阶等差数列 1，3，7，13，…的第五个数应是_____，第 2021 个数是_____．

4. 递推式为 $S_n=(-1)^n a_n-q^n,n\in N^*$ 类型

可先根据阶差公式 $a_n=\begin{cases}S_1 & ,n=1\\ S_n-S_{n-1},n\ge 2\end{cases}$ 直接求出通项 a_n，再按照奇数项与偶数项分而治之地进行操作．

【例 12】设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n+\frac{1}{2^n}=(-1)^n a_n,(n\in N^*)$，则数列 $\{S_n\}$ 的前 7 项和为_____

【练习 1】设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n=(-1)^n a_n-\frac{1}{2^n},n\in N^*$，则 $S_1+S_2+\ldots+S_{100}=$______

【练习 2】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n-(-1)^n a_n=2n-6+\frac{1}{2^n}$，$(n\in N*)$ 则 $S_{100}=$___

5. 摆动数列——通项含 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n-1}$ 或 $\sin n\pi$ 或 $\cos n\pi$ 型

对于一些“摆动”型（项按一定的规律循环出现，如按“+”，“-” 或“大”，“小”等）非常规数列，求和时通常先对项数分奇偶两种情形进行讨论，再利用分组求和法、并项求和法、裂项相消求和法进行求和．

类型 1 分奇偶后，分组求和

【例 13】已知正项数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，$a_n=1-2S_n(n\in N^*)$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）设 $b_n=(-1)^n(\frac{1}{a_n}+2n)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

【例 14】已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=2a_n+n^2-3n-1$．

（1）求证：数列 $\{a_n-2n\}$ 为等比数列；（2）设 $b_n=a_n\cdot\cos n\pi$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

【练习 1】已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）设$b_n=2^{a_n}+(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和T_{2n}；

类型 2 分奇偶后，并项求和

【例 15】差数列$\{a_n\}$，S_n为其前n项和，$a_1=1$，$S_6=36$，记数列$\{(-1)^n a_n\}$的前n项和为T_n，则$T_{10}+T_{21}=$____

【例 16】已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，$a_5=14$，且a_1，a_3，a_{11}成等比数列，设$b_n=(-1)^{n+1}a_n$，数列$\{b_n\}$的前n项的和为S_n，则$S_{2021}=$________.

【例 17】已知函数$f(n)=\begin{cases}n^2,当n为奇数时\\-n^2,当n为偶数时\end{cases}$且$a_n=f(n)+f(n+1)$，则$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}$等于________

【例 18】已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$2S_n=a_n^2+a_n-2$.

（1）证明：数列$\{a_n\}$是等差数列.（2）若$b_n=(-1)^n a_n^2$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和为T_{2n}.

【练习 1】在等差数列$\{a_n\}$中，已知公差$a_1=2$，a_2是a_1与a_4的等比中项.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（Ⅱ）设$b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}$，记$T_n=-b_1+b_2-b_3+b_4-\cdots+(-1)^n b_n$，求$T_n$.

湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列奇偶、跳跃（3）

【练习 2】已知数列$\{a_n\}$是等比数列，前n项和为S_n，且$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{2}{a_3}$，$S_6=63$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；（2）若b_n是$\log_2 a_n$和$\log_2 a_{n+1}$的等差中项，求数列$\{(-1)^n b_n^2\}$的前$2n$项和T_{2n}.

【练习 3】已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，对任意$n\in N_+$，它的前n项和S_n满足$S_n=\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$，并且$a_2$，$a_4$，$a_9$成等比数列.（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）设$b_n=(-1)^{n+1}a_n a_{n+1}$，$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，求$T_{2n}$.

类型 3 分奇偶后，裂项相消求和

摆动数列裂和公式：（1）“$\frac{1}{2}$”型，裂和

① $(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，$(-1)^n\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)}=(-1)^n(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1})$，

$(-1)^{n-1}\frac{4(n+1)}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)$；② $(-1)^n\ln n(n+1)=(-1)^n[\ln(n+1)+\ln n]$.

（2）“$\frac{2}{2}$”型，先分离，再裂和　$\frac{4n^2+4n-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{4n^2-1+4n}{4n^2-1}=1+(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1})$.

【例 19】设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n=n^2+n$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）已知数列$\{b_n\}$满足$b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$T_{2n}$．

【例 20】已知数列$\{a_n\}$满足$a_n>0$，其前n项和$S_n=\dfrac{{a_n}^2+2a_n-3}{4}$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，其前$n$项和为$T_n$.若$T_{2n}>\dfrac{\lambda}{n}$对任意$n\in N^*$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围是______

【例 21】已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，前n项和为S_n，且S_1,S_2,S_4成等比数列.（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（Ⅱ）令$b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

【练习 1】已知数列$\{a_n\}$是等差数列，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，且$a_{10}=19$，$S_{10}=100$；数列$\{b_n\}$对任意$n\in N^*$，总有$b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdots b_{n-1}\cdot b_n=a_n+2$成立.（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;（Ⅱ）记$c_n=(-1)^n\dfrac{4n\cdot b_n}{(2n+1)^2}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【练习 2】已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n+2=2a_n$，等差数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，且$T_2=S_2=b_3$.（Ⅰ）求数列$\{b_n\}$的通项公式;（Ⅱ）令$c_n=\left(-1\right)^n\dfrac{4T_n-1}{b^2{}_n-1}$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和$H_{2n}$.

四、利用幂的运算$a^nb^n=(ab)^n$，避免分奇偶讨论

【例 22】正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_1a_3=\dfrac{1}{16}$，$2a_4+a_3=a_2$，则$\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{a_n}=($　　$)$

A．$\dfrac{2}{3}[1+(-2)^n]$　　B．$\dfrac{2}{3}[1-2^n]$　　C．$\dfrac{2}{3}[1+2^n]$　　D．$\dfrac{2}{3}[1-(-2)^n]$

【例 23】已知数列$\{b_n\}$的前n项和$B_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$.

（Ⅰ）求数列$\{b_n\}$的通项公式;

（Ⅱ）设数列$\{a_n\}$的通项$a_n=[b_n+(-1)^n]\cdot 2^n$，求数列$\{a_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【练习 1】已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2$，$S_5=30$，数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和为T_n，且$T_n=2^n-1$.（I）求数列$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$的通项公式;（Ⅱ）设$c_n=(-1)^n(a_nb_n+\ln S_n)$，求数列$\left\{c_n\right\}$的前$n$项和.