湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量不等式证明方法（1）

一、双变量不等式证明方法 1——整体换元法

若两个变量不存在确定的关系，可以将两个变量之间的关系看成一个整体（比如$\frac{x_1}{x_2}$，x_1x_2，

二、双变量不等式证明方法 2——消参减元法

若两个变量存在确定的关系，可以利用其中一个变量替换另一个变量，直接消元，将两个变量

三、极值点偏移问题的一般解法：

1.对称构造法

2.比(差)值代换法

3.对数均值不等式法

（1）定义：两个正数a和b的对数平均值$L\left(a,b\right)=\begin{cases}\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}, & a\neq b\\ a\ , & a=b\end{cases}$.

（2）对数平均值不等式链为：$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le L\left(a,b\right)\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

（3）对数平均值不等式链的指数形式为：$\dfrac{2}{\frac{1}{e^a}+\frac{1}{e^b}}\le e^{\frac{a+b}{2}}\le\dfrac{e^a-e^b}{a-b}\le\dfrac{e^a+e^b}{2}\le\sqrt{\dfrac{e^{2a}+e^{2b}}{2}}$ ，其中$a\neq b$.

（取等条件：当且仅当$a=b$时，等号成立）

四、例题

1.（1）求证：当 $n>m>0$ 时，$\ln n-\ln m>\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}$.

解析　（1）要证 $\ln n-\ln m>\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$，即证 $\ln\frac{n}{m}>\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$，只需证 $\ln\frac{n}{m}-\frac{m}{n}+\frac{n}{m}>0$.

令$\frac{n}{m}=x$，构造函数 $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}+x(x\ge1)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+1$.

因为 $x\in[1，+\infty)$，所以 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+1>0$，故 $g(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增.

又由 $n>m>0$，得$\frac{n}{m}>1$，所以 $g\left(\frac{n}{m}\right)>g(1)=0$，即 $\ln\frac{n}{m}-\frac{m}{n}+\frac{n}{m}>0$ 成立，所以命题得证.

（2）设斜率为 k 的直线与 $f(x)=\ln x$ 的图像交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)(x_1<x_2)$，求证：$\dfrac{1}{x_2}<k<\dfrac{1}{x_1}$.

解析　（2）依题意得 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，故所证不等式等价于：

$\dfrac{1}{x_2}<\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}<\dfrac{1}{x_1}\Rightarrow\dfrac{x_2-x_1}{x_2}<\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{x_2-x_1}{x_1}\Leftrightarrow1-\dfrac{x_1}{x_2}<\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{x_2}{x_1}-1$.

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}, (t>1)$，则只需证：$1-\dfrac{1}{t}<\ln t<t-1$.

先证右边不等式：$\ln t<t-1 \Leftrightarrow \ln t-t+1<0$，

令 $h(t)=\ln t-t+1$，$h'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$，$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，$\therefore h(t)<h(1)=0$.

即 $\ln t-t+1<0$．对于左边不等式：$1-\frac{1}{t}<\ln t \Leftrightarrow \ln t+\frac{1}{t}-1>0$．

令 $p(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，则 $p'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$，$\therefore p(t)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 单调递增，$\therefore p(t)>p(1)=0$.

（3）已知函数 $f(x)=x\ln x$．设 $A(x_1,\ f(x_1)),\ B(x_2,\ f(x_2))$，且 $x_1\neq x_2$，证明：$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<f'(\frac{x_1+x_2}{2})$．

解析　（3）不妨设 $x_1<x_2$，$k_{AB}<f'(\frac{x_1+x_2}{2}) \Leftrightarrow \frac{x_2\ln x_2-x_1\ln x_1}{x_2-x_1}<\ln\frac{x_1+x_2}{2}+1$．

$x_2\ln x_2-x_1\ln x_1<x_2\ln\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\ln\frac{x_1+x_2}{2}+x_2-x_1$，

$x_2\ln\frac{2x_2}{x_1+x_2}<x_1\ln\frac{2x_1}{x_1+x_2}+x_2-x_1$，（观察两边同时除以 x_1，即可构造出关于 $\frac{x_2}{x_1}$ 的不等式）

两边同除以 x_1 得，$\frac{x_2}{x_1}\ln\frac{2\cdot\frac{x_2}{x_1}}{1_1+\frac{x_2}{x_1}}<\ln\frac{2}{1+\frac{x_2}{x_1}}+\frac{x_2}{x_1}-1$，

令 $\frac{x_2}{x_1}=t$，则 $t>1$，即证：$t\ln\frac{2t}{1+t}<\ln\frac{2}{1+t}+t-1$．令 $g(t)=t\ln\frac{2t}{1+t}-\ln\frac{2}{1+t}-t+1$，

$g'(t)=\ln\frac{2t}{1+t}+t\cdot\frac{1+t}{2t}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}+\frac{1+t}{2}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}-1=\ln\frac{2t}{1+t}+\frac{1-t}{1+t}=\ln(1+\frac{t-1}{t+1})-\frac{t-1}{t+1}$．

令 $\frac{t-1}{t+1}=m(m>0)$，$h(m)=\ln(1+m)-m$，（再次利用整体换元）

$h'(m)=\frac{1}{1+m}-1=-\frac{m}{1+m}<0$，$h(m)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，所以 $h(m)<h(0)=0$.

即 $\ln(1+m)<m$，即 $g'(t)=\ln(1+\frac{t-1}{t+1})-\frac{t-1}{t+1}<0$ 恒成立，$\therefore g(t)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上是减函数，

所以 $g(t)<g(1)=0$．$\therefore t\ln\frac{2t}{1+t}<\ln\frac{2}{1+t}+t-1$ 得证．所以 $k_{AB}<f'(\frac{x_1+x_2}{2})$ 成立.

（4）若 $a\geq 1$，$b>0$，试证明：$\frac{1}{a+b}<\ln\frac{a+b}{b}<\frac{a}{b}$.

解析　（4）$\ln\frac{a+b}{b}<\frac{a}{b}$ 等价于 $\ln\frac{a+b}{b}-\frac{a}{b}=\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)-\frac{a}{b}<0$．……

又因为 $b>0$，$a\geq 1$，所以 $\frac{a}{a+b}\geq\frac{1}{a+b}$，

所以 $\frac{1}{a+b}<\ln\frac{a+b}{b}$，只需证：$\frac{a}{a+b}<\ln\frac{a+b}{b}$．…………

（5）已知函数 $f(x)=\ln x+x^2+x$，$a\in\mathbf{R}$．若正实数 x_1，x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$，证明：$x_1+x_2\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解析　（5）由 $f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=0$，得 $\ln x_1+x_1^2+x_1+\ln x_2+x_2^2+x_2+x_1x_2=0$，
从而 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1x_2-\ln(x_1x_2)$，

令 $t=x_1x_2$，则由 $\varphi(t)=t-\ln t$，得 $\varphi'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$，

易知 $\varphi(t)$ 在区间 $(0，1)$ 上单调递减，在区间 $(1，+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(t)\geq\varphi(1)=1$，所以$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geq1$，

因为 $x_1>0$，$x_2>0$，所以 $x_1+x_2\geq\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$成立．

（6）已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}(a>0)$．证明：当 $a\geq\dfrac{2}{e}$，$b>1$ 时，$f(\ln b)>\dfrac{1}{b}$．

解析　（6）要证 $f(\ln b)>\dfrac{1}{b}$，即证 $\ln(\ln b)+\dfrac{a}{\ln b}>\dfrac{1}{b}$，因为 $b>1$，所以 $\ln b>0$，即证$(\ln b)\ln(\ln b)+a>\dfrac{\ln b}{b}$，

令 $t=\ln b$，$t>0$，即证 $t\ln t+a>te^{-t}$．令 $h(x)=x\ln x+a$，则 $h'(x)=\ln x+1$．

当 $0<x<\dfrac{1}{e}$时，$h'(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{e}$时，$h'(x)>0$．

所以 $h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增．所以 $h(x)_{\min}=h\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}+a$．

于是，当 $a\geq\dfrac{2}{e}$时，$h(x)\geq-\dfrac{1}{e}+a\geq\dfrac{1}{e}$．①

令 $\varphi(x)=xe^{-x}$，则 $\varphi'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$．当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<0$．

所以函数 $\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=\dfrac{1}{e}$．

于是当 $x>0$ 时，$\varphi(x)\leq\dfrac{1}{e}$．②

显然不等式①②中的等号不能同时成立，

故当 $x>0$，$a\geq\dfrac{2}{e}$时，$h(x)>\varphi(x)$，即 $x\ln x+a>xe^{-x}$．所以 $f(\ln b)>\dfrac{1}{b}$．

另：（同构思想＋参数放缩）

当 $a\geq\dfrac{2}{e}$，$b>1$ 时，$f(\ln b)>\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow(\ln b)\ln(\ln b)+a>\dfrac{\ln b}{b}\Leftrightarrow(\ln b)\ln(\ln b)+\dfrac{1}{b}\ln\dfrac{1}{b}+a>0$．

2.（1）若 $a\leq-2$，函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$．

证明：对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)|\geq4|x_1-x_2|$．

解析　（1）不妨假设 $x_1\geq x_2$，由于 $a\leq-2$，易证 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减．

所以$|f(x_1)-f(x_2)|\geq4|x_1-x_2|$等价于 $f(x_2)-f(x_1)\geq4x_1-4x_2$，即 $f(x_2)+4x_2\geq f(x_1)+4x_1$．

令 $g(x)=f(x)+4x$，则 $g'(x)=\dfrac{a+1}{x}+2ax+4=\dfrac{2ax^2+4x+a+1}{x}$，

于是 $g'(x)\leq\dfrac{-4x^2+4x-1}{x}=\dfrac{-(2x-1)^2}{x}\leq0$．

从而 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，故 $g(x_1)\leq g(x_2)$，即 $f(x_2)+4x_2\geq f(x_1)+4x_1$，

故当 $a\leq-2$ 时，对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)|\geq4|x_1-x_2|$．

（2）若函数 $f(x)=ax^2-x-\ln\dfrac{1}{x}$在定义域内有两个极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)+f(x_2)<2\ln2-3$．

解析　（2）$\because f'(x)=2ax-1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-x+1}{x}$，

$\therefore$由题意知方程 $2ax^2-x+1=0$ 在$(0,+\infty)$上有两个不等实根 x_1，x_2，

$\therefore\Delta=1-8a>0$，$x_1+x_2=\dfrac{1}{2a}>0$，$x_1x_2=\dfrac{1}{2a}>0$，$\therefore0<a<\dfrac{1}{8}$．

$f(x_1)+f(x_2)=ax_1^2+ax_2^2-(x_1+x_2)+\ln x_1+\ln x_2=a(x_1^2+x_2^2)-(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)$

$=a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=\ln\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{4a}-1$，

令 $t=\dfrac{1}{2a}$，$g(t)=\ln t-\dfrac{t}{2}-1$，则 $t\in(4,+\infty)$，$g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-t}{2t}<0$，

$\therefore g(t)$在$(4,+\infty)$上单调递减．$\therefore g(t)<\ln4-3=2\ln2-3$，即 $f(x_1)+f(x_2)<2\ln2-3$．

（3）若函数 $f(x)=\left(x^2-a\right)e^x$，$a\in\mathbf{R}$ 有两个不同的极值点 x_1,x_2，求证：$f(x_1)f(x_2)<4e^{-2}$．

解析 （3）$f'(x)=e^x\left(x^2+2x-a\right)$．由题意：$x_1,x_2$ 是 $f'(x)=0$ 的两不等实根，

此时$\triangle=4+4a>0$，解得：$a>-1$，且：$x_1+x_2=-2,\ x_1\cdot x_2=-a$，

$\therefore f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)=e^{x_1}\left(x_1^2-a\right)\cdot e^{x_2}\left(x_2^2-a\right)=e^{x_1+x_2}\left[x_1^2x_2^2-a\left(x_1^2+x_2^2\right)+a^2\right]=e^{-2}\left[a^2-a\left(4+2a\right)+a^2\right]=-4ae^{-2}$，

因为$a>-1$，所以$-4ae^{-2}<4e^{-2}$，所以 $f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)<4e^{-2}$．

（4）设函数 $f(x)=\ln x+x^2-ax(a\in\mathbf{R})$ 存在两个极值点，x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，若 $0<x_1<\dfrac{1}{2}$，

求证：$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>\dfrac{3}{4}-\ln 2$．

解析 （4）$\because f(x)=\ln x+x^2-ax$，$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}x-a=\dfrac{2x^2-ax+1}{x},\ x>0$，

由题意：x_1,x_2 是 $f'(x)=0$ 的两不等实根，得：$x_1+x_2=\dfrac{a}{2},\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{2}$，则 $x_2=\dfrac{1}{2x_1}$，

$$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\ln x_1+x_1^2-ax_1-\ln x_2-x_2^2+ax_2=\ln\frac{x_1}{x_2}+\left[x_1+x_2-2\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)\right]=\ln 2+2\ln x_1-x_1^2+\frac{1}{4x_1^2}$$

令 $g\left(x_1\right)=\ln 2+2\ln x_1-x_1^2+\dfrac{1}{4x_1^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{2}{x_1}-2x_1-\dfrac{1}{2_1^2}=-\dfrac{\left(2x_1^2-1\right)^2}{2x_1^2}$，

$\because 0<x_1<\dfrac{1}{2}$，$\therefore g'\left(x_1\right)<0$，$\therefore g\left(x_1\right)$ 在 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

$\therefore g\left(x_1\right)>g\left(\dfrac{1}{2}\right)$，而 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}-\ln 2$，即 $g\left(x_1\right)>\dfrac{3}{4}-\ln 2$，$\therefore f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)>\dfrac{3}{4}-\ln 2$．

（5）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$ 存在两个极值点 x_1，x_2，证明：$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$．

解析 （5）$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{a}{x}=-\dfrac{x^2-ax+1}{x^2}$.

由题意：x_1,x_2 是 $f'(x)=0$ 的两不等实根，得：$a>2$ 且 $x_1x_2=1$.

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2>1$.

由于$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{x_1x_2}-1+a\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\dfrac{-2\ln x_2}{\dfrac{1}{x_2}-x_2}$,

所以$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 等价于$\dfrac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.

设函数 $g(x)=\dfrac{1}{x}-x+2\ln x$，由(1)知，$g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，又 $g(1)=0$，

从而当 $x\in(1，+\infty)$时，$g(x)<0$．所以$\dfrac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，即$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

3.已知函数 $f(x)=\ln x-ax$ 有两个零点 x_1，x_2．求证：$x_1x_2>e^2$.

解析 法一：对称化构造法①

由 x_1，x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个不同实根得 $a=\dfrac{\ln x}{x}$，令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g(x_1)=g(x_2)$，

由于 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，因此，$g(x)$在$(1，e)$上单调递增，在$(e，+\infty)$上单调递减，

设 $1<x_1<e<x_2$，需证明 $x_1x_2>e^2$，只需证明 $x_1>\dfrac{e^2}{x_2}\in(1，e)$，只需证明 $f(x_1)>f(\dfrac{e^2}{x_2})$，

即 $f(x_2)>f(\frac{e^2}{x_2})$，即 $f(x_2)-f(\frac{e^2}{x_2})>0$．令 $h(x)=f(x)-f(\frac{e^2}{x})(x\in(1,\ e))$，$h'(x)=\frac{(1-\ln x)(e^2-x^2)}{x^2e^2}>0$．

故 $h(x)$在$(1,\ e)$上单调递增，故 $h(x)<h(0)=0$．即 $f(x)<f(\frac{e^2}{x})$，令 $x=x_1$，则 $f(x_2)=f(x_1)<f(\frac{e^2}{x_1})$

因为 x_2，$\frac{e^2}{x_1}\in(e,\ +\infty)$，$f(x)$在$(e,\ +\infty)$上单调递减，所以 $x_1>\frac{e^2}{x_2}$，即 $x_1x_2>e^2$．

对称化构造法②

由题意，函数 $f(x)$有两个零点 x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$，即 $f(x_1)=f(x_2)=0$，

易知 $\ln x_1$，$\ln x_2$ 是方程 $x=ae^x$ 的两根．

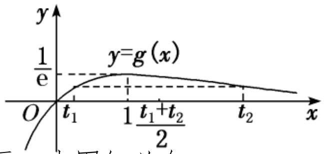
令 $t_1=\ln x_1$，$t_2=\ln x_2$．设 $g(x)=xe^{-x}$，则 $g(t_1)=g(t_2)$，从而 $x_1x_2>e^2\Leftrightarrow\ln x_1+\ln x_2>2\Leftrightarrow t_1+t_2>2$．

下证：$t_1+t_2>2$．

$g'(x)=(1-x)e^{-x}$，易得 $g(x)$在$(-\infty,\ 1)$上单调递增，在$(1,\ +\infty)$上单调递减，

所以函数 $g(x)$在 $x=1$ 处取得极大值 $g(1)=\frac{1}{e}$．

当 $x\to-\infty$时，$g(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to0$ 且 $g(x)>0$．



由 $g(t_1)=g(t_2)$，$t_1\neq t_2$，不妨设 $t_1<t_2$，作出函数 $g(x)$的图象如图所示，由图知必有 $0<t_1<1<t_2$，

令 $F(x)=g(1+x)-g(1-x)$，$x\in(0,\ 1]$，则 $F'(x)=g'(1+x)-g'(1-x)=\frac{x}{e^{x+1}}(e^{2x}-1)>0$，

所以 $F(x)$在$(0,\ 1]$上单调递增，所以 $F(x)>F(0)=0$ 对任意的 $x\in(0,\ 1]$恒成立，

即 $g(1+x)>g(1-x)$对任意的 $x\in(0,\ 1]$恒成立．

由 $0<t_1<1<t_2$，得 $1-t_1\in(0,\ 1]$，所以 $g[1+(1-t_1)]=g(2-t_1)>g[1-(1-t_1)]=g(t_1)=g(t_2)$，

即 $g(2-t_1)>g(t_2)$，又 $2-t_1\in(1,\ +\infty)$，$t_2\in(1,\ +\infty)$，且 $g(x)$在$(1,\ +\infty)$上单调递减，

所以 $2-t_1<t_2$，即 $t_1+t_2>2$．

总结提升　**上述解题过程就是解决极值点偏移问题的最基本的方法，共有四个解题要点：**

(1)求函数 $g(x)$的极值点 x_0；

(2)构造函数 $F(x)=g(x_0+x)-g(x_0-x)$；

(3)确定函数 $F(x)$的单调性；

(4)结合 $F(0)=0$，确定 $g(x_0+x)$与 $g(x_0-x)$的大小关系．

其口诀为：极值偏离对称轴，构造函数觅行踪，四个步骤环相扣，两次单调紧跟随．

法二：比值换元法①：

不妨设 $x_1>x_2>0$，因为 $\ln x_1-ax_1=0$，$\ln x_2-ax_2=0$，

所以 $\ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)$，$\ln x_1-\ln x_2=a(x_1-x_2)$，所以$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=a$，

欲证 $x_1x_2>e^2$，即证 $\ln x_1+\ln x_2>2$．因为 $\ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)$，所以即证 $a>\frac{2}{x_1+x_2}$，

所以原问题等价于证明$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$（**对数均值不等式**），即 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}(t>1)$，则不等式变为 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$．令 $h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$t>1$，

所以 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以 $h(t)$在$(1,\ +\infty)$上单调递增，

所以 $h(t)>h(1)=\ln1-0=0$，即 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0(t>1)$，因此原不等式 $x_1x_2>e^2$ 得证．

比值换元法②：

由题知 $a=\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}$，则$\frac{\ln x_2}{\ln x_1}=\frac{x_2}{x_1}$，设 $x_1<x_2$，$t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，则 $x_2=tx_1$，

所以$\frac{\ln tx_1}{\ln x_1}=t$，即$\frac{\ln t+\ln x_1}{\ln x_1}=t$，解得 $\ln x_1=\frac{\ln t}{t-1}$，$\ln x_2=\ln tx_1=\ln t+\ln x_1=\ln t+\frac{\ln t}{t-1}=\frac{t\ln t}{t-1}$.

由 $x_1x_2>e^2$，得 $\ln x_1+\ln x_2>2$，所以$\frac{t+1}{t-1}\ln t>2$，所以 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$，

令 $h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$t>1$，所以 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以 $h(t)$在$(1，+\infty)$上递增，

所以 $h(t)>h(1)=\ln1-0=0$，即 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0(t>1)$，因此原不等式 $x_1x_2>e^2$ 得证.

总结提升　用比值换元法求解本题的关键点有两个：一个是消参，把极值点转化为导函数零点之后，需要利用两个变量把参数表示出来，这是解决问题的基础，若只用一个极值点表示参数，

如得到 $a=\frac{\ln x_1}{x_1}$之后，代入第二个方程，则无法建立两个极值点的关系，本题中利用两个

方程相加(减)之后再消参，巧妙地把两个极值点与参数之间的关系建立起来；二是消“变”，即减少变量的个数，只有把方程转化为一个“变量”的式子后，才能建立与之相应的函数，转化为函数问题求解．本题利用参数 a 的值相等建立方程，进而利用对数运算的性质，将方程转化为关于$\frac{x_1}{x_2}$的方程，通过建立函数模型求解该问题，这体现了对数学建模等核心素养的考查．该方法的基本思路是直接消掉参数 a，再结合所证问题，巧妙

引入变量 $c=\frac{x_1}{x_2}$，从而构造相应的函数．其解题要点为：

(1)联立消参：利用方程 $f(x_1)=f(x_2)$消掉解析式中的参数 a.

(2)抓商构元：令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，消掉变量 x_1，x_2，构造关于 t 的函数 $h(t)$.

(3)用导求解：利用导数求解函数 $h(t)$的最小值，从而可证得结论.

法三：差值换元法

由题意，函数 $f(x)$有两个零点 x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$，即 $f(x_1)=f(x_2)=0$，

易知 $\ln x_1$，$\ln x_2$ 是方程 $x=ae^x$ 的两根.

设 $t_1=\ln x_1$，$t_2=\ln x_2$，设 $g(x)=xe^{-x}$，则 $g(t_1)=g(t_2)$，从而 $x_1x_2>e^2\Leftrightarrow\ln x_1+\ln x_2>2\Leftrightarrow t_1+t_2>2$.

下证：$t_1+t_2>2$.

由 $g(t_1)=g(t_2)$，得 $t_1e^{-t_1}=t_2e^{-t_2}$，化简得 $e^{t_2-t_1}=\frac{t_2}{t_1}$，①

不妨设 $t_2>t_1$，由法二知，$0<t_1<1<t_2$．令 $s=t_2-t_1$，则 $s>0$，$t_2=s+t_1$，代入①式，

得 $e^s=\frac{s+t_1}{t_1}$，解得 $t_1=\frac{s}{e^s-1}$．则 $t_1+t_2=2t_1+s=\frac{2s}{e^s-1}+s$，

故要证 $t_1+t_2>2$，即证$\frac{2s}{e^s-1}+s>2$，

又 $e^s-1>0$，故要证$\frac{2s}{e^s-1}+s>2$，即证 $2s+(s-2)(e^s-1)>0$，②

令 $G(s)=2s+(s-2)(e^s-1)(s>0)$，则 $G'(s)=(s-1)e^s+1$，$G''(s)=se^s>0$，

故 $G'(s)$在$(0，+\infty)$上单调递增，所以 $G'(s)>G'(0)=0$，从而 $G(s)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

所以 $G(s)>G(0)=0$，所以②式成立，故 $t_1+t_2>2$.

总结提升　该方法的关键是巧妙引入变量 s，然后利用等量关系，把 t_1，t_2 消掉，从而构造相应的函数，转化所证问题．其解题要点为：

(1)取差构元：记 $s=t_2-t_1$，则 $t_2=t_1+s$，利用该式消掉 t_2.

(2)巧解消参：利用 $g(t_1)=g(t_2)$，构造方程，解之，利用 s 表示 t_1.

(3)构造函数：依据消参之后所得不等式的形式，构造关于 s 的函数 $G(s)$.

(4)转化求解：利用导数研究函数 $G(s)$的单调性和最小值，从而证得结论.

函数的极值点偏移问题，其实质是导数的应用问题，解题的策略是把含双变量的等式或不等式转化为仅含一个变量的等式或不等式进行求解，解题时要抓住三个关键量：极值点、根差、根商.

4.若函数 $f(x)=x-ae^x+b(a>0，b\in\mathbf{R})$有两个不同的零点 $x_1，x_2$，证明：$x_1+x_2<-2\ln a$.

解析 由题知$\begin{cases}x_1-ae^{x_1}+b=0,\\x_2-ae^{x_2}+b=0,\end{cases}$ 两式相减得 $x_1-x_2=a(e^{x_1}-e^{x_2})$，即 $a=\dfrac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}$.

故要证 $x_1+x_2<-2\ln a$，只需证 $x_1+x_2<-2\ln\dfrac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}$，即证 $e^{x_1+x_2}<\left(\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}\right)^2$，

即证$(x_1-x_2)^2<e^{x_1-x_2}-2+e^{x_2-x_1}$．不妨设 $x_1<x_2$，令 $x_2-x_1=t>0$，则需证 $t^2<e^{-t}-2+e^t$.

设 $g(t)=t^2-e^{-t}+2-e^t$，则 $g'(t)=2t+e^{-t}-e^t$．设 $h(t)=2t+e^{-t}-e^t$，则 $h'(t)=2-e^{-t}-e^t<0$，

∴$h(t)$在$(0，+\infty)$上单调递减，∴$h(t)<h(0)=0$，即 $g'(t)<0$，

∴$g(t)$在$(0，+\infty)$上单调递减，∴$g(t)<g(0)=0$，故原不等式成立.

5.若 $f(x)=-\dfrac{a}{2}e^{2x}+(x-1)e^x(a\in\mathbf{R})$ 有两个极值点 x_1、 $x_2(x_1<x_2)$，证明： $x_1+2x_2>3$.

解析 $\because f(x)=-\dfrac{a}{2}e^{2x}+(x-1)e^x$， $\therefore f'(x)=-ae^{2x}+xe^x=e^x(-ae^x+x)$，

由题意知 $f'(x)=0$ 有 2 个不相等的实数根，即 $ae^x=x$ 有 2 个不相等的实数根 x_1，x_2，由$\begin{cases}ae^{x_1}=x_1\\ae^{x_2}=x_2\end{cases}$，得 $a=\dfrac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}$，

故 $x_1+2x_2>3\Leftrightarrow 3<ae^{x_1}+2ae^{x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}(e^{x_1}+2e^{x_2})=\dfrac{x_1-x_2}{e^{x_1-x_2}-1}(e^{x_1-x_2}+2)$，

令 $t=x_1-x_2$，则 $t<0$， $3<x_1+2x_2\Leftrightarrow 3<\dfrac{t}{e^t-1}(e^t+2)$， $t<0$，

故不等式只要 $(3-t)e^t-2t-3>0$ 在 $t<0$ 时成立，

令 $h(t)=(3-t)e^t-2t-3(t<0)$， $\because h'(t)=(2-t)e^t-2(t<0)$， $h''(t)=(1-t)e^t>0$，

故 $h'(t)$ 在 $t<0$ 上递增，即 $h'(t)<h'(0)=0$，故 $h(t)$ 在 $t<0$ 上递减，即 $h(t)>h(0)=0$，故原不等式成立.

6.已知函数 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-ax$ 有两个极值点 $x_1，x_2$(e 为自然对数的底数)．求证：$f(x_1)+f(x_2)>2$.

解析 由于 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-ax$，则 $f'(x)=e^x-x-a$，

设 $g(x)=f'(x)=e^x-x-a$，则 $g'(x)=e^x-1$，令 $g'(x)=e^x-1=0$，解得 $x=0$.

所以当 $x\in(-\infty，0)$时，$g'(x)<0$；当 $x\in(0，+\infty)$时，$g'(x)>0$.

所以当 $g(x)_{\min}=1-a<0$ 即 $a>1$ 时，且当 $x\to-\infty$时，$g(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$.

由题意，$x_1，x_2$是 $g(x)=f'(x)=e^x-x-a$ 的两个零点，且 $g(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减.

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1<0<x_2$.

下面先证 $x_1<-x_2<0$，只需证 $g(-x_2)<g(x_1)=0$，由于 $g(x_2)=e^{x_2}-x_2-a=0$，得 $a=e^{x_2}-x_2$，

所以 $g(-x_2)=e^{-x_2}+x_2-a=e^{-x_2}-e^{x_2}+2x_2$.

设 $h(x)=e^{-x}-e^x+2x(x>0)$，则 $h'(x)=-\dfrac{1}{e^x}-e^x+2<0$，所以 $h(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

所以 $h(x)<h(0)=0$，$h(x_2)=g(-x_2)<0$，所以 $x_1<-x_2<0$.

由于函数 $f(x)$在$(x_1，0)$上也单调递减，所以 $f(x_1)>f(-x_2)$.

要证 $f(x_1)+f(x_2)>2$，只需证 $f(-x_2)+f(x_2)>2$，即证 $e^{x_2}+e^{-x_2}-x_2^{\,2}-2>0$.

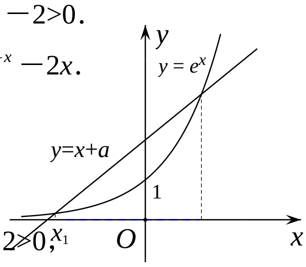
设函数 $k(x)=e^x+e^{-x}-x^2-2$，$x\in(0，+\infty)$，则 $k'(x)=e^x-e^{-x}-2x$.

设 $r(x)=k'(x)=e^x-e^{-x}-2x$，则 $r'(x)=e^x+e^{-x}-2>0$，

所以 $r(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，$r(x)>r(0)=0$，即 $k'(x)>0$.

所以 $k(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，$k(x)>k(0)=0$.

故当 $x\in(0，+\infty)$时，$e^x+e^{-x}-x^2-2>0$，则 $e^{x_2}+e^{-x_2}-x_2^{\,2}-2>0$，



所以 $f(-x_2)+f(x_2)>2$，亦即 $f(x_1)+f(x_2)>2$.

7.若函数 $f(x)=a-\dfrac{1}{x}-\ln x(a\in R)$有两零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求证：$2<x_1+x_2<3e^{a-1}-1$.

解析 先证 $x_1+x_2>2$.

法一 利用通法证明 $f(x)=a-\dfrac{1}{x}-\ln x$ 的极值点 $x=1$ 向左偏移，即 $1<\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

法二 直接换元法化单变元：依题设，有 $a=\dfrac{1}{x_1}+\ln x_1=\dfrac{1}{x_2}+\ln x_2$，于是$\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}=\ln\dfrac{x_2}{x_1}$，

记$\dfrac{x_2}{x_1}=t(t>1)$，则 $\ln t=\dfrac{t-1}{tx_1}$，故 $x_1=\dfrac{t-1}{t\ln t}$. 于是 $x_1+x_2=x_1(t+1)=\dfrac{t^2-1}{t\ln t}$，$x_1+x_2-2=\dfrac{2(\dfrac{t^2-1}{2t}-\ln t)}{\ln t}$.

记函数 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}-\ln x(x>1)$. 因 $g'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2x^2}>0$，

故 $g(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增；于是 $t>1$ 时，$g(t)>g(1)=0$. 又 $\ln t>0$，所以，$x_1+x_2>2$.

再证 $x_1+x_2<3e^{a-1}-1$.

因 $f(x)=0\Leftrightarrow h(x)=ax-1-x\ln x=0$，故 x_1，x_2 也是 $h(x)$的两零点.

由 $h'(x)=a-1-\ln x=0$，得 $x=e^{a-1}$，且 $x<e^{a-1}$，$h'(x)>0$，$x>e^{a-1}$，$h'(x)<0$.

利用通法证明 $h(x)=ax-1-x\ln x$ 的极值点 $x=e^{a-1}$ 向右偏移，

所以$\dfrac{x_1+x_2}{2}<e^{a-1}$ 即 $x_1+x_2<2e^{a-1}$，由 $x_1+x_2>2$ 即$\dfrac{x_1+x_2}{2}>1$ 得：

$1+(x_1+x_2)<\dfrac{x_1+x_2}{2}+(x_1+x_2)=\dfrac{3(x_1+x_2)}{2}<\dfrac{3}{2}2e^{a-1}=3e^{a-1}\Rightarrow x_1+x_2<3e^{a-1}-1$.

8.已知函数 $f(x)=(e-x)lnx(e$ 为自然对数的底数）．若方程 $f(x)=m(m\neq 0)$ 有两个实数根 x_1，x_2，

求证：$|x_1-x_2|<e-1-\dfrac{em}{e-1}$．

解析 因为 $f'(x)=\dfrac{e}{x}-lnx-1$，所以 $f''(x)=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{x^2}<0$，所以 $f'(x)=\dfrac{e}{x}-lnx-1$ 单调递减.

令 $g(x)=(e-1)(x-1)$，$h(x)=-x+e$，下面证 $f(x)\leqslant g(x)$，即 $(e-x)lnx\leqslant(e-1)(x-1)$.

记 $m(x)=(e-1)(x-1)-(e-x)lnx$，则 $m'(x)=lnx-\dfrac{e}{x}+e$，$m''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{e}{x^2}>0$，

所以 $m'(x)$ 单调递增，且 m'（1）$=0$，故 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

所以 $m(x)\geqslant m$（1）$=0$，即 $(e-x)lnx\leqslant(e-1)(x-1)$，

同法可证 $f(x)\leqslant h(x)$，即 $(e-x)lnx\leqslant -x+e$．不妨设 $g(x_3)=f(x_1)=f(x_2)=h(x_4)=m$，

因为 $g(x_1)>f(x_1)=m=g(x_3)$，且 $g(x)=(e-1)(x-1)$ 为增函数，所以 $x_1>x_3$，

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量不等式证明方法（3）

由 $g(x_3)=)=(e-1)(x_3-1)=m$，得 $x_3=\dfrac{m}{e-1}+1$，同理，$x_4>x_2$，$x_4=e-m$，

所以 $\dfrac{m}{e-1}+1=x_3<x_1<x_2<x_4=e-m$，

所以，$|x_1-x_2|<e-m-(\dfrac{m}{e-1}+1)=e-1-\dfrac{em}{e-1}$，所以，$|x_1-x_2|<e-1-\dfrac{em}{e-1}$．

9.已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\ln x$.

（1）若函数 $f(x)$在$\left(e，+\infty\right)$内有极值，求实数 a 的取值范围；

（2）在（1）的条件下，对任意 $t\in(1，+\infty)$，$s\in(0，1)$，求证：$f(t)-f(s)>e+2-\dfrac{1}{e}$.

解析　（1）由定义域为$(0，1)\cup(1，+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-(a+2)x+1}{x(x-1)^2}$，

设 $h(x)=x^2-(a+2)x+1$，要使 $y=f(x)$在$\left(e，+\infty\right)$上有极值，则 $x^2-(a+2)x+1=0$ 有两个不同的实根 x_1，x_2，

$\therefore \varDelta=(a+2)^2-4>0$，$\therefore a>0$ 或 $a<-4$，①

且至少有一根在区间$\left(e，+\infty\right)$上，又$\because x_1 x_2=1$，$\therefore$只有一根在区间$(e，+\infty)$上，不妨设 $x_2>e$，

$\therefore 0<x_1<\dfrac{1}{e}<e<x_2$，又 $h(0)=1$，$\therefore$只需 $h\left(\dfrac{1}{e}\right)<0$，即$\dfrac{1}{e^2}-(a+2)\dfrac{1}{e}+1<0$，$\therefore a>e+\dfrac{1}{e}-2$，②

联立①②可得 $a>e+\dfrac{1}{e}-2$．即实数 a 的取值范围是$\left(e+\dfrac{1}{e}-2，+\infty\right)$.

（2）由（1）知，当 $x\in\left(1，x_2\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$递减，当 $x\in\left(x_2，+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$递增，

$\therefore f(x)$在$(1，+\infty)$上有最小值 $f(x_2)$，即$\forall t\in(1，+\infty)$，都有 $f(t)\geq f(x_2)$，

又当 $x\in\left(0，x_1\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当 $x\in\left(x_1，1\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

$\therefore f(x)$在$(0，1)$上有最大值 $f(x_1)$，即对$\forall s\in(0，1)$，都有 $f(s)\leq f(x_1)$，

又$\because x_1+x_2=2+a$，$x_1x_2=1$，$x_1\in\left(0，\dfrac{1}{e}\right)$，$x_2\in\left(e，+\infty\right)$，

$\therefore f(t)-f(s)\geq f(x_2)-f(x_1)=\ln x_2+\dfrac{a}{x_2-1}-\ln x_1-\dfrac{a}{x_1-1}=\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{a}{x_2-1}-\dfrac{a}{x_1-1}=\ln x_2^2+x_2-\dfrac{1}{x_2}(x_2>e)$，

设 $k(x)=\ln x^2+x-\dfrac{1}{x}=2\ln x+x-\dfrac{1}{x}(x>e)$，则 $k'(x)=\dfrac{2}{x}+1+\dfrac{1}{x^2}>0(x>e)$，$\therefore k(x)$在$\left(e，+\infty\right)$上单调递增，

$\therefore k(x)>k(e)=2+e-\dfrac{1}{e}$，$\therefore f(t)-f(s)>e+2-\dfrac{1}{e}$.

10.已知函数 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2-ax$ **（$a\in\mathbf{R}$）．如果函数** $g(x)=f(x)-(a-\dfrac{1}{2})x^2$ **恰有两个不同的极值点** x_1, x_2，

证明： $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln 2a$.

解析　依题意可得：$g(x)=f(x)-(a-\dfrac{1}{2}x^2)=e^x-ax^2-ax$，$g'(x)=e^x-2ax-a$.

$\because x_1, x_2$ 是极值点，$\begin{cases}g'(x_1)=0\\g'(x_2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{x_1}-2ax_1-a=0\\e^{x_2}-2ax_2-a=0\end{cases}$，两式相减可得：$2a=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$.

所证不等式等价于：$\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}\Leftrightarrow e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$，

不妨设 $x_1>x_2$，两边同除以 e^{x_2} 可得：$e^{\frac{x_1-x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_1-x_2}-1}{x_1-x_2}$

（观察指数幂的特点以及分式的分母，化不同为相同，同除以 e^{x_2} 使得多项呈 x_1-x_2 的形式）

从而考虑换元减少变量个数．令 $t=x_1-x_2$ $t\in(0,\ +\infty)$．所证不等式只需证明：$e^{\frac{t}{2}}<\dfrac{e^t-1}{t}\Leftrightarrow te^{\frac{t}{2}}-e^t+1<0$，

设 $p(x)=te^{\frac{t}{2}}-e^t+1$，$p'(x)=-e^{\frac{t}{2}}(e^{\frac{t}{2}}-(\dfrac{t}{2}+1))$ 由 $e^x\ge x+1$ 可得：$e^{\frac{t}{2}}-(\dfrac{t}{2}+1)\ge 0$，$\therefore p'(x)\le 0$，

$\therefore p(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$p(t)<p(0)=0$，$\therefore$ 原不等式成立即 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln 2a$

11.已知 $f(x)=\ln x$，$g(x)=x^2-ax(a>0)$．若 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 是方程 $f(x)-\dfrac{g(x)}{x^3}+\dfrac{1}{x}=0$ 的两个不同的正实根，证明：$x_1^2+x_2^2>4a$．

解析　由 $f(x)-\dfrac{g(x)}{x^3}+\dfrac{1}{x}=\ln x-\dfrac{x^2-ax}{x^3}+\dfrac{1}{x}=0$，即 $\ln x+\dfrac{a}{x^2}=0$，

令 $k(x)=\ln x+\dfrac{a}{x^2}(x>0,\ a>0)$，$k'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{x^2-2a}{x^3}$，令 $k'(x)=0$，得 $x=\sqrt{2a}$，

当 $0<x<\sqrt{2a}$ 时，$k'(x)<0$，当 $x>\sqrt{2a}$ 时，$k'(x)>0$，

$\therefore k(x)$ 在 $(0,\ \sqrt{2a})$ 递减，在 $(\sqrt{2a}$，$+\infty)$ 上递增，又$\because k(x)$ 有 2 个零点，

$\therefore k(\sqrt{2a})<0$，即 $\ln\sqrt{2a}+\dfrac{a}{2a}<0$，解得，$0<a<\dfrac{1}{2e}$，且 $\begin{cases}\ln x_1+\dfrac{a}{{x_1}^2}=0\\ \ln x_2+\dfrac{a}{{x_2}^2}=0\end{cases}$，

两式相减得：$\ln x_2-\ln x_1=\dfrac{a}{{x_1}^2}-\dfrac{a}{{x_2}^2}$，设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}(t>1)$，$\therefore \ln t=\dfrac{a}{{x_1}^2}-\dfrac{a}{t^2{x_1}^2}$，$\therefore {x_1}^2=\dfrac{a}{\ln t}(1-\dfrac{1}{t^2})$，

要证明 $x_1^2+x_2^2>4a$，即证明 $(1+t^2){x_1}^2>4a$，$(1+t^2)\dfrac{a}{\ln t}(1-\dfrac{1}{t^2})>4a$，

$\therefore(1+t^2)\dfrac{1}{\ln t^2}(1-\dfrac{1}{t^2})>2$，即证明 $2\ln t^2-t^2+\dfrac{1}{t^2}<0(t>1)$，

令 $q(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}(x>1)$，$q'(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}<0$，$\therefore q(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递减，

$\therefore q(x)<q(1)=0$，$\therefore 2\ln x-x+\dfrac{1}{x}<0$，即 $x_1^2+x_2^2>4a$．

12.已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{b}{x}-a\ (a\in R，b\in R)$有最小值 M，且 $M\ge 0$．当 $e^{a-1}-b+1$ 取得最大值时，设 $F(b)=\dfrac{a-1}{b}-m(m\in R)$．若 $F(x)$有两个零点为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1{x_2}^2>e^3$．

解析　由题意 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{b}{x^2}=\dfrac{x-b}{x^2}(x>0)$，

当 $b\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，此时显然不成立，

当 $b>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=b$，此时 $f(x)$ 在 $(0,b)$ 上单减，在 $(b,+\infty)$ 上单增，

$\therefore M=f(b)=lnb+1-a\geqslant 0$，即 $lnb\geqslant a-1$，所以 $b\geqslant e^{a-1}$，$e^{a-1}-b\leqslant 0$．

所以 $e^{a-1}-b+1$ 的最大值为 1，且 $a-1=lnb$，$F(b)=\frac{a-1}{b}-m=\frac{lnb}{b}-m$，.

$\because F(x)$ 的两个零点为 x_1，x_2，则 $\frac{lnx_1}{x_1}-m=0;\frac{lnx_2}{x_2}-m=0$，即 $lnx_1=mx_1$，$lnx_2=mx_2$，

不等式 $x_1\cdot x_2{}^2>e^3$ 恒成立等价于 $lnx_1+2lnx_2=mx_1+2mx_2=m(x_1+2x_2)>3$，

两式相减得 $ln\frac{x_1}{x_2}=m(x_1-x_2)\Rightarrow m=\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，带入上式得 $(x_1+2x_2)\cdot\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>3\Leftrightarrow ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{3(x_1-x_2)}{x_1+2x_2}=\frac{3(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+2}$，

令 $\frac{x_1}{x_2}=t(0<t<1)$，则 $g(t)=lnt-\frac{3(t-1)}{t+2},(0<t<1)$，$g'(t)=\frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2}>0$，

所以函数 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$\therefore g(t)<g(1)=0$，得证.

13.已知 $f(x)=\ln x-x$．若方程 $f(x)=m(m<-2)$有两个相异实根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_1x_2^2<2$．

解析 由题意可知，方程 $f(x)=m(m<-2)$的两个相异实根 x_1，x_2 满足 $\ln x-x-m=0$，

且 $0<x_1<1<x_2$，即 $\ln x_1-x_1-m=\ln x_2-x_2-m=0$．

由题意，可知 $\ln x_1-x_1=m<-2<\ln 2-2$，

又由(1)可知，$f(x)=\ln x-x$ 在$(1，+\infty)$上单调递减，故 $x_2>2$．

令 $g(x)=\ln x-x-m$，则 $g(x)-g\left(\frac{2}{x^2}\right)=-x+\frac{2}{x^2}+3\ln x-\ln 2$．

令 $h(t)=-t+\frac{2}{t^2}+3\ln t-\ln 2(t>2)$，则 $h'(t)=-\frac{(t-2)^2(t+1)}{t^3}$．

当 $t>2$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$单调递减，所以 $h(t)<h(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}<0$，所以 $g(x)<g\left(\frac{2}{x^2}\right)$．

因为 $x_2>2$ 且 $g(x_1)=g(x_2)$，所以 $h(x_2)=g(x_2)-g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)=g(x_1)-g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)<0$，即 $g(x_1)<g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)$．

因为 $g(x)$在$(0，1)$上单调递增，所以 $x_1<\frac{2}{x_2^2}$，故 $x_1x_2^2<2$．

14.已知函数 $f(x)=\lambda\ln x-e^{-x}(\lambda\in\mathbf{R})$.

（1）若函数 $f(x)$是单调函数，求 λ 的取值范围；

（2）求证：当 $0<x_1<x_2$ 时，$e^{1-x_2}-e^{1-x_1}>1-\frac{x_2}{x_1}$．

解析 （1）函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$\because f(x)=\lambda\ln x-e^{-x}$，$\therefore f'(x)=\frac{\lambda}{x}+e^{-x}=\frac{\lambda+xe^{-x}}{x}$，

$\because$函数 $f(x)$是单调函数，$\therefore f'(x)\le 0$ 或 $f'(x)\ge 0$ 在$(0，+\infty)$上恒成立，

令 $\varphi(x)=\lambda-\frac{x}{e^x}$，则 $\varphi'(x)=\frac{x-1}{e^x}$，当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，

则 $\varphi(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，

$\therefore\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=\lambda-\frac{1}{e}$，又 $\varphi(0)=\lambda$，$x\to+\infty$时，$\varphi(x)<\lambda$，

$\therefore\lambda\le-\frac{1}{e}$或 $\lambda\ge 0$．综上，λ 的取值范围是$\left(-\infty，-\frac{1}{e}\right]\cup[0，+\infty)$.

（2）由（1）可知，当 $\lambda=-\frac{1}{e}$时，$f(x)=-\frac{1}{e}\ln x-e^{-x}$ 在$(0，+\infty)$上单调递减，

$\because 0<x_1<x_2$，$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，即$-\frac{1}{e}\ln x_1-e^{-x_1}>-\frac{1}{e}\ln x_2-e^{-x_2}$，$\therefore e^{1-x_2}-e^{1-x_1}>\ln x_1-\ln x_2$.

要证 $e^{1-x_2}-e^{1-x_1}>1-\frac{x_2}{x_1}$，只需证 $\ln x_1-\ln x_2>1-\frac{x_2}{x_1}$，即证 $\ln\frac{x_1}{x_2}>1-\frac{x_2}{x_1}$，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，$t\in(0，1)$，则只需证 $\ln t>1-\frac{1}{t}$，令 $h(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$，

当 $0<t<1$ 时，$h'(t)<0$，

$\therefore h(t)$在$(0，1)$上单调递减，又 $h(1)=0$，$\therefore h(t)>0$，即 $\ln t>1-\frac{1}{t}$，故原不等式得证．

15.已知函数 $f(x)=4x-x^4$，$x\in R$．

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，求证：对于任意的实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

（3）若方程 $f(x)=a(a$ 为实数）有两个实数根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，求证：$x_2-x_1\leqslant-\frac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$．

解析　（1）由 $f(x)=4x-x^4$，可得 $f'(x)=4-4x^3$．

当 $f'(x)>0$，即 $x<1$时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $f'(x)<0$，即 $x>1$时，函数 $f(x)$ 单调递减．

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为$(-\infty,1)$，单调递减区间为$(1,+\infty)$．

（2）证明：设点 p 的坐标为$(x_0，0)$，则 $x_0=4^{\frac{1}{3}}$，$f'(x_0)=-12$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)$，即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$，

令函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，即 $F(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)$，则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$．

$\because F'(x_0)=0$，$\therefore$当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$F'(x)>0$；当 $x\in(x_0，+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0，+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$对于任意实数 x，$F(x)\leqslant F(x_0)=0$，即对任意实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

（3）证明：由（2）知，$g(x)=-12(x-4^{\frac{1}{3}})$，设方程 $g(x)=a$ 的根为 x_2'，可得 $x_2'=-\frac{a}{12}+4^{\frac{1}{3}}$．

$\because g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，又由（II）知 $g(x_2)\geqslant f(x_2)=a=g(x_2')$，因此 $x_2\leqslant x_2'$．

类似地，设曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=h(x)$，可得 $h(x)=4x$，

对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)-h(x)=-x^4\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant h(x)$．

设方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1'，可得 $x_1'=\frac{a}{4}$，

$\because h(x)=4x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(x_1')=a=f(x_1)\leqslant h(x_1)$，因此 $x_1'\leqslant x_1$，

由此可得 $x_2-x_1\leqslant x_2'-x_1'=-\frac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$．