

# 高三数学限时训练 10——指数函数与对数函数

学号：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

## 一、单选题

1. 已知函数  $y = \log_a(x+3) - 1$  (其中  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图象恒过定点 A, 若点 A 也在函数  $f(x) = 3^x + b$  的图象上, 则  $f(\log_9 4)$  的值为( ) A.  $\frac{8}{9}$  B.  $\frac{7}{9}$  C.  $\frac{5}{9}$  D.  $\frac{2}{9}$

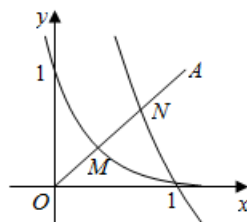
2. 已知  $2^a = 6^b = 10$ , 则  $3, ab, a+b$  的大小关系是( )

3. 如图, 点 O 为坐标原点, 点 A(1, 1), 若函数  $y = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 及  $\log_b x$  ( $b > 0$ , 且  $b \neq 1$ ) 的图象与线段 OA 分别交于点 M, N, 且 M, N 恰好是线段 OA 的两个三等分点, 则 a, b 满足( )

- A.  $a < b < 1$  B.  $b < a < 1$   
C.  $b > a > 1$  D.  $a > b > 1$

4. 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 则( )

- A.  $f(2^{-\frac{3}{4}}) < f(\log_{\frac{1}{4}} 6) < f(\log_4 \frac{1}{5})$  B.  $f(2^{-\frac{3}{4}}) < f(\log_4 \frac{1}{5}) < f(\log_{\frac{1}{4}} 6)$   
C.  $f(\log_{\frac{1}{4}} 6) < f(2^{-\frac{3}{4}}) < f(\log_4 \frac{1}{5})$  D.  $f(\log_{\frac{1}{4}} 6) < f(\log_4 \frac{1}{5}) < f(2^{-\frac{3}{4}})$



5. 科赫曲线是一种外形像雪花的几何曲线, 一段科赫曲线可以通过下列操作步骤构造得到: 任画一条线段, 然后把它分成三等分, 以中间一段为边向外作正三角形, 并把中间一段去掉, 这样, 原来的一条线段就变成了由 4 条小线段构成的折线, 称为“一次构造”; 用同样的方法把每一条小线段重复上述步骤, 得到由 16 条更小的线段构成的折线, 称为“二次构造”; ...; 如此进行“n 次构造”, 就可以得到一条科赫曲线. 若要在构造过程中使得到的折线的长度大于初始线段的 100 倍, 则至少需要构造的次数是( ) (取  $\lg 3 \approx 0.4771$ ,  $\lg 2 \approx 0.3010$ )



- A. 16 B. 17 C. 24 D. 25

6. 我国于 2021 年 5 月成功研制出目前国际上超导量子比特数量最多的量子计算原型机“祖冲之号”, 操控的超导量子比特为 62 个. 已知 1 个超导量子比特共有“ $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ”2 种叠加态, 2 个超导量子比特共有“ $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$ ,  $|11\rangle$ ”4 种叠加态, 3 个超导量子比特共有“ $|000\rangle$ ,  $|001\rangle$ ,  $|010\rangle$ ,  $|011\rangle$ ,  $|100\rangle$ ,  $|101\rangle$ ,  $|110\rangle$ ,  $|111\rangle$ ”8 种叠加态, ...; 只要增加 1 个超导量子比特, 其叠加态的种数就呈指数级增长. 设 62 个超导量子比特共有 N 种叠加态, 则 N 是一个\_\_\_\_\_位的数. (参考数据:  $\lg 2 \approx 0.3010$ ) ( )

- A. 18 B. 19 C. 62 D. 63

7. 给出下列四个命题:

- ① 函数  $f(x) = 2a^{2x-1} - 1$  的图象过定点  $(\frac{1}{2}, -1)$ ;  
② 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x(x+1)$ . 若  $f(a) = -2$ , 则实数  $a = -1$  或  $2$ ;  
③ 若  $\log_a \frac{1}{2} > 1$ , 则 a 的取值范围是  $(\frac{1}{2}, 1)$ ;  
④ 对于函数  $f(x) = \ln x$ , 其定义域内任意  $x_1 \neq x_2$ , 都满足  $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ .

其中所有正确命题的个数是( ) A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

8. 已知  $m > 1$ ,  $n > 1$ , 且  $\ln m - \ln n = 2n - m$ , 下列结论正确的是( )

- ①  $(\frac{1}{2})^m < (\frac{1}{2})^n$ ; ②  $\frac{n}{m} > \frac{n+1}{m+1}$ ; ③  $\log_n 2021 > \log_m 2021$ ; ④  $m - \frac{1}{n} > n - \frac{1}{m}$ .

A. ①④

B. ②③

C. ①②

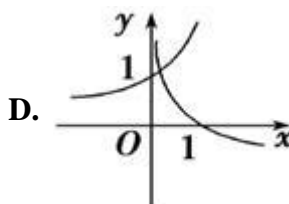
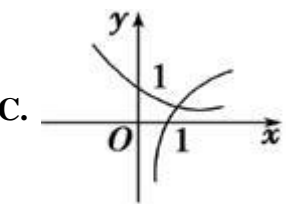
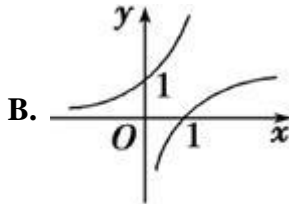
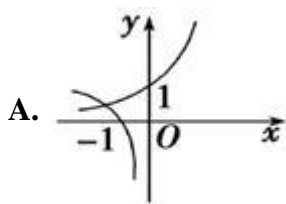
D. ②④

9. 已知关于  $x$  的不等式  $\log_a x > 4^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的解集为  $\{x | 0 < x < \frac{1}{2}\}$ , 则  $a =$  ( )

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B.  $\frac{1}{2}$ C.  $\frac{1}{4}$ 

D. 2

10. 已知  $\lg m + \lg n = 0$  ( $m > 0$  且  $m \neq 1$ ,  $n > 0$  且  $n \neq 1$ ), 则函数  $f(x) = m^x$  与函数  $g(x) = -\log_n x$  的图象可能是 ( )



## 二、填空题

11. 下列说法中正确的有\_\_\_\_\_ (把你认为正确的序号全部写上)

(1)  $[(-2)^2]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ ; (2) 已知  $\log_a \frac{3}{4} < 1$ , 则  $a > \frac{3}{4}$ ;

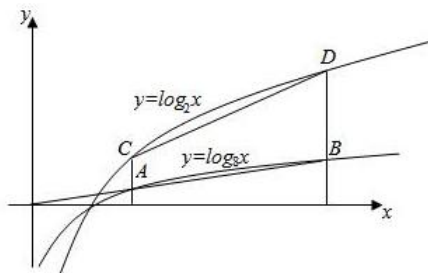
(3) 函数  $y = 3^x$  的图象与函数  $y = -3^{-x}$  的图象关于原点对称;

(4) 函数  $y = \lg(-x^2 + x)$  的递增区间为  $(-\infty, \frac{1}{2}]$ .

12. 有浓度为 90% 的溶液 100 g, 从中倒出 10 g 后再倒入 10 g 水称为一次操作, 要使浓度低于 10%, 这种操作至少应进行的次数为 (参考数据:  $\lg 2 = 0.3010$ ,  $\lg 3 = 0.4771$ )\_\_\_\_\_.

13. 函数  $f(x) = a^x + \log_a(x+1)$  在  $[0, 1]$  上的最大值和最小值之和为  $a$ , 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 如图, 已知过原点  $O$  的直线与函数  $y = \log_8 x$  的图象交于  $A, B$  两点, 分别过  $A, B$  作  $y$  轴的平行线与函数  $y = \log_2 x$  图象交于  $C, D$  两点, 若  $BC \parallel x$  轴, 则四边形  $ABCD$  的面积为\_\_\_\_\_.



15. 设  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ), 其图象经过点  $(\frac{1}{2}, \sqrt{10})$ , 又  $g(x)$  的图象与  $f(x)$  的图象关于直线  $y = x$  对称. 若  $g(x)$  在区间  $[\sqrt{10}, c]$  上的值域为  $[m, n]$ , 且  $n - m = \frac{3}{2}$ , 则  $c$  的值是\_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $g(x) = (a+1)^{x-2} + 1$  ( $a > 0$ ) 的图像恒过定点  $A$ , 且点  $A$  又在函数  $f(x) = \log_{\sqrt{3}}(x+a)$  的图像上.

① 不等式  $g(x) > 6$  的解集是\_\_\_\_\_;

② 若  $h(x) = \frac{3g(x) - \frac{11}{4}}{g(x) - \frac{3}{4}}$ , 则  $h(1 - \sqrt{2}) + h(\frac{1}{1+\sqrt{2}})$  的值为\_\_\_\_\_.