湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列求和（1）

1．公式法

（1）等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为：$S_n=$ ＿＿＿＿＿＿ $=$ ＿＿＿＿＿＿，推导方法为＿＿＿＿.

（2）等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为：$S_n=$＿＿＿＿＿＿＿，推导方法为＿＿＿＿＿＿＿.

（3）一些常见的数列的前 n 项和：

①$\sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=$＿＿＿＿＿＿＿；$\sum\limits_{k=1}^{n}2k=2+4+6+\cdots+2n=$＿＿＿＿＿＿＿.

②$\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\cdots+(2n-1)=$＿＿＿＿＿＿＿；③$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=$＿＿＿＿＿＿＿；

④$\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=$＿＿＿＿＿＿＿.

2．几种数列求和的常用方法

（1）分组转化求和法：一个数列的通项公式是由若干个等差或等比或可求和的数列组成的，则求和时可用分组求和法，分别求和后相加减.（可以分为 m 组）

（2）裂项相消法：把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得前 n 项和.

（3）错位相减法：如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么求这个数列的前 n 项和即可用错位相减法求解.

（4）倒序相加法：如果一个数列$\{a_n\}$与首末两端等“距离”的两项的和相等或等于同一个常数，那么求这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法求解.

一、　分组转化求和

【例 1】（2021•新高考I卷）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1，n为奇数\\a_n+2，n为偶数\end{cases}$.

（1）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；（2）求$\{a_n\}$的前 20 项和.

【例 2】已知数列$\{a_n\}$的前n项和是S_n，且$S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）令$b_n=\log_2 a_n$，求数列$\{(-1)^n b_n^2\}$前$2n$项的和T.

【例 3】已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2n^2-n$，$n\in N^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）若$b_n=(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n

【解题总结】

1．分组转化求和

数列求和应从通项入手，若无通项，则先求通项，然后通过对通项变形，转化为等差数列或等比数列或可求前 n 项和的数列求和.

2．分组转化法求和的常见类型

求 $\{a_n\}$ 的和：

- $a_n=b_n\pm c_n$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 为等差或等比数列
- $a_n=\begin{cases} b_n, n\text{为奇数}, \\ c_n, n\text{为偶数}, \end{cases}$ $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 为等差或等比数列

→ 分组求和

【训练 1】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=1-5+9-13+17+\cdots+(-1)^{n-1}(4n-3)$，则 $S_{15}+S_{22}-S_{31}$ 的值是（　　）

A．13　　B．76　　C．46　　D．-76

【训练 2】已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_2=3$，$b_3=9$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$ 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为________；设 $c_n=a_n+b_n$，则数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为________.

【训练 3】已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，它的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=\dfrac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$，并且 a_2，a_4，a_9 成等比数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；（2）设 $b_n=(-1)^{n+1}a_na_{n+1}$，T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，求 T_{2n}.

二 、倒序相加法

【例 1】（1）函数 $f(x)=\dfrac{3^x}{1+3^x}(x\in R)$，正项等比数列 $\{a_n\}$，满足 $a_{50}=1$，则 $f(\ln a_1)+f(\ln a_2)+\cdots+f(\ln a_{99})=$____

（2）若函数 $f(x)=x^3-3x^2+\dfrac{e^{x-1}-e^{1-x}}{2}$，$a_n=f(\dfrac{n}{2021})$ 则 $a_1+a_2+\cdots+a_{4041}=$______.

【训练 1】已知函数 $f(x)=x+3\sin(x-\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{2}$，则 $f(\dfrac{1}{2019})+f(\dfrac{2}{2019})+\cdots+f(\dfrac{2018}{2019})=$ ________；

【训练 2】设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}+\log_2\dfrac{x}{1-x}$，定义 $S_n=f(\dfrac{1}{n})+f(\dfrac{2}{n})+...+f(\dfrac{n-1}{n})$，其中 $n\in N^*,n\geq 2$，$S_n=$________. ___

【训练 3】已知 $F\left(x\right)=f(x+\dfrac{1}{2})-2$ 是 R 上的奇函数，$a_n=f(0)+f(\dfrac{1}{n})+\cdots+f(\dfrac{n-1}{n})+f(1)$，$n\in\mathbf{N}^*$ 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_________.

三、裂项相消法求和

类型一　常见的等差数列与裂项相消：

① $a_n=\dfrac{1}{(An+B)(An+A+B)}=\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{1}{An+B}-\dfrac{1}{A(n+1)+B}\right)$　（接龙型）　，

$$S_n=\frac{1}{A}\left(\frac{1}{A+B}-\frac{1}{A(n+1)+B}\right)=\frac{n}{(A+B)[A(n+1)+B]}$$

② $a_n=\dfrac{1}{(An+B)(An+2A+B)}=\dfrac{1}{2A}\left(\dfrac{1}{An+B}-\dfrac{1}{A(n+2)+B}\right)$ （隔项型）

$$S_n=\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{A+B}+\frac{1}{2A+B}-\frac{1}{A(n+1)+B}-\frac{1}{A(n+2)+B}\right)$$

③ $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{An+B}+\sqrt{A(n+1)+B}}=\dfrac{1}{A}\left(\sqrt{A(n+1)+B}-\sqrt{An+B}\right)$ （根式型），$S_n=\dfrac{1}{A}\left(\sqrt{A(n+1)+B}-\sqrt{A+B}\right)$

类型二　特殊等差数列与裂项相消：

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}(2An+A+2B)}{(An+B)[A(n+1)+B]}=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{An+B}+\frac{1}{A(n+1)+B}\right)$$

$$S_n=\left(\frac{1}{A+B}+\frac{1}{2A+B}\right)-\left(\frac{1}{2A+B}+\frac{1}{3A+B}\right)+\Lambda+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{An+B}+\frac{1}{A(n+1)+B}\right)=\frac{1}{A+B}+\frac{(-1)^{n-1}}{A(n+1)+B}$$

类型三　带有等比数列的裂项相消：

$a_n=\dfrac{q^n}{(q^n+m)(q^{n+1}+m)}=\dfrac{1}{q-1}\left(\dfrac{1}{q^n+m}-\dfrac{1}{q^{n+1}+m}\right)$（其中 $m\in R$， $q\neq 1$）

$$S_n=\frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{q+m}-\frac{1}{q^2+m}+\frac{1}{q^2+m}-\frac{1}{q^3+m}+\Lambda+\frac{1}{q^n+m}-\frac{1}{q^{n+1}+m}\right)=\frac{1}{q-1}\left(\frac{1}{q+m}-\frac{1}{q^{n+1}+m}\right)$$

类型四　平方式递推与裂项相消：递推关系：

$a_{n+1}=a_n^{\ 2}+a_n$ $a_{n+1}=\dfrac{a_n^{\ 2}}{m}+a_n$ $a_{n+1}=a_n^{\ 2}-a_n+1$ $a_{n+1}=\dfrac{a_n^{\ 2}}{2m}+\dfrac{m}{2}$

① $a_{n+1}=a_n(a_n+1)\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_n+1}\Rightarrow\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i+1}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$

② $a_{n+1}=\dfrac{a_n^{\ 2}}{m}+a_n\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}}{m}=\dfrac{a_n}{m}\left(\dfrac{a_n}{m}+1\right)\Rightarrow\dfrac{1}{a_n+m}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i+m}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$

③ $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n}\Rightarrow\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}=\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$

④ $a_{n+1}=\dfrac{a_n^{\ 2}}{2m}+\dfrac{m}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}-m}=\dfrac{2m}{(a_n-m)(a_n+m)}\Rightarrow\dfrac{1}{a_n+m}=\dfrac{1}{a_n-m}-\dfrac{1}{a_{n+1}-m}\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i+m}=\dfrac{1}{a_1-m}-\dfrac{1}{a_{n+1}-m}$

注意：平方式递推，通常题目的设置求和部分的分母会给出裂项相消的方向，通常紧扣分母即可，无需记忆，太多的变形式子.

类型五　等差三连项型与裂项相消：

① $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$ ② $a_n=\dfrac{An+B}{n(n+1)(n+2)}=\left[\dfrac{An+\frac{B}{2}}{n(n+1)}-\dfrac{A(n+1)+\frac{B}{2}}{(n+1)(n+2)}\right]$

类型六　阶乘型与裂项相消：$a_n=\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

类型七　等差与等比混合型：① $a_n=\dfrac{q^n[1+(1-q)n]}{n(n+1)}=\dfrac{q^n}{n}-\dfrac{q^{n+1}}{n+1}$ ；② $a_n=\dfrac{q^n[k+(1-q^k)n]}{n(n+k)}=\dfrac{q^n}{n}-\dfrac{q^{n+k}}{n+k}$

注意：通常采用反推法，就是从右边往左边推导，具体情况将会在例题中说明.

具体化，常见的裂项技巧：

①$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$；$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$；$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$；

②$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$；$\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$；

③$\frac{n+2}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2(n+1)-n}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)2^n}$；$\frac{2^n}{(2^n+m)\bullet(2^{n+1}+m)}=\frac{1}{2^n+m}-\frac{1}{2^{n+1}+m}$；$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$；

④$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}}=\frac{\sqrt{n+k}-\sqrt{n}}{k}$

⑤$\frac{\sin 1^\circ}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}=\tan(n+1)^\circ-\tan n^\circ$；$\{a_n\}$是公差为$d$的等差数列$\tan a_n\cdot\tan a_{n+1}=\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{\tan d}-1$

⑥$\{a_n\}$是公差为d的等差数列$\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$，

⑦$\frac{(a-1)a^n}{(a^n+b)(a^{n+1}+b)}=\frac{1}{a^n+b}-\frac{1}{a^{n+1}+b}$；⑧$\log_m\frac{a_{n+1}}{a_n}=\log_m a_{n+1}-\log_m a_n$

【例 1】设数列$\{a_n\}$是首项为$a_1>0$，公差$d>0$的等差数列，求：$S_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$；

$T_n=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_n)}$.

【例 2】（已知数列$\{a_n\}$，若$a_1+2a_2+\ldots+na_n=2n$，则数列$\{a_na_{n+1}\}$前n项和为________.

【例 3】已知数列$\{a_n\}$中，$a_2a_6=64$，且$\log_2 a_n$，$\frac{1}{2}\log_2 a_{n+1}$，$1(n\in N^*)$成等差数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$.

湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列求和（2）

【例 4】已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n{}^2+a_n$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$[\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2011}+1}]$的值等于______________

【例 5】在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$2a_{n+1}=a_n^2+1$，$n\in N^*$，设$b_n=\frac{2a_n-1}{a_n+1}$，若数列$\{b_n\}$的前 2018 项和$S_{2018}>t$，则整数t的最大值为_________.

【例 6】求和：$S_n=\frac{3}{(1\times 2)^2}+\frac{5}{(2\times 3)^2}+\cdots+\frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$.

【例 7】求和：$S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$

【例 8】求和：$\frac{4}{1\times 2\times 3}+\frac{5}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}$.

【例 9】求和：$\frac{3}{1\times 3},\frac{7}{2\times 4}\times 3,\frac{11}{3\times 5}\times 3^2,\cdots,\frac{4n-1}{n\times(n+2)}\times 3^{n-1}$.

【例 10】已知函数$f(x)=\frac{2x+3}{3x}$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,\ a_{n+1}=f\left(\frac{1}{a_n}\right)$.（1）求数列$\{a_n\}$的通项；

（2）令$T_n=a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-a_4a_5+\cdots+a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_{2n+1}$，求$T_n$

（3）令$b_n=\frac{1}{a_{n-1}a_n}(n\geq 2),b_1=3,S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，若$S_n<\frac{m-2000}{2}$对于任意的$n\in N^*$都成立，求最小正整数$m$的值.

【例 11】记 S_n 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\{\dfrac{S_n}{a_n}\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

（1）求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；（2）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

【例 12】已知函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象过点 $(4，2)$，令 $a_n=\dfrac{1}{f(n+1)+f(n)}(n\in N^*)$．记数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2020}=$（　　）A．$\sqrt{2019}-1$　　B．$\sqrt{2020}-1$　　C．$\sqrt{2021}-1$　　D．$\sqrt{2021}+1$

【例 13】已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_n>0$，S_n 是数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，且 $a_n+\dfrac{2}{a_n}=2S_n$．

（1）求 S_2，S_3，并求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式 a_n；

（2）设 $b_n=\dfrac{1}{S_n+S_{n+2}}$，数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，若 $2\sqrt{2}T_n-k\geq 0$ 对任意的正整数 n 都成立，求实数 k 的取值范围.

【解题总结】

裂项相消法求和：

1．基本步骤

裂项 → 观察数列的通项，将通项拆成两项之差的形式

⇓

累加 → 将数列裂项后的各项相加

⇓

消项 → 将中间可以消去的项相互抵消，将剩余的有限项相加，得到数列的前n项和

2．裂项原则

一般是前边裂几项，后边就裂几项，直到发现被消去项的规律为止.

3．消项规律

消项后前边剩几项，后边就剩几项，前边剩第几项，后边就剩倒数第几项.

.

四、错位相减法求和

类型一、等差乘等比数列求和，令 $c_n=\left(An+B\right)\cdot q^n$，可以用错位相减法

$T_n=(A+B)q+(2A+B)q^2+(3A+B)q^3+...+(An+B)q^n$　①

$qT_n=(A+B)q^2+(2A+B)q^3+(3A+B)q^4+...+(An+B)q^{n+1}$　②

①−②得：$(1-q)T_n=(A+B)q-(An+B)q^{n+1}+A(q^2+q^3+...+q^n)$．

整理得：$T_n=\left(\dfrac{An}{q-1}+\dfrac{B}{q-1}-\dfrac{A}{(q-1)^2}\right)q^{n-1}-\left(\dfrac{B}{q-1}-\dfrac{A}{(q-1)^2}\right)q$．口诀：加 1 去 n，$q-1$值入，楼上楼下.

类型二　$c_n=n^2\cdot q^n$ 可以用错位相减法（两次）

【例 1】（2021• 浙江卷）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=-\frac{9}{4}$，且$4S_{n+1}=3S_n-9(n\in N^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$3b_n+(n-4)a_n=0(n\in N^*)$，记$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，若$T_n\leqslant\lambda b_n$对任意$n\in N^*$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围.

【例 2】（2019•天津卷）设$\left\{a_n\right\}$是等差数列，$\left\{b_n\right\}$是等比数列，公比大于 0,已知$a_1=b_1=3$，$b_2=a_3$，$b_3=4a_2+3$.

（1）求$\left\{a_n\right\}$和$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

（2）设数列$\{c_n\}$满足$c_n=\begin{cases}1, & n\text{为奇数}\\ b_{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数}\end{cases}$. 求$a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_{2n}c_{2n}(n\in N^*)$.

（3）求数列$\{\frac{a_n}{3b_n}\}$的前n项和T_n.

【例 3】（2015• 湖北卷）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的公比为q. 已知$b_1=a_1$，$b_2=2$，$q=d$，$S_{10}=100$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）当$d>1$时，记$c_n=\frac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

【例 4】已知等差数列的首项 $a_1=1$，公差 $d>0$，前 n 项和为 S_n .

（1）若 S_1,S_2,S_4 成等比数列，求数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n ；

（2）若 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}>\frac{2020}{2021}$ 对一切 $n\in N^*$ 恒成立，求 d 的取值范围.

【例 5】设数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots\cdots+2^{n-1}a_n=\frac{n}{2}(n\in N^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项；

（2）设 $b_n=\frac{n}{a_n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【解题总结】

错位相减法求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

（1）适用条件

若 $\{a_n\}$ 是公差为 $d(d\neq 0)$ 的等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比数列，求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

（2）基本步骤

展开 $S_n=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_{n-1}\cdot b_{n-1}+a_n\cdot b_n$ ①

乘公比 $qS_n=a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_3+\cdots+a_{n-1}\cdot b_n+a_n\cdot b_{n+1}$ ②

错位相减

①-②:得 $(1-q)S_n=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_{n-1}\cdot b_{n-1}+a_n\cdot b_n$

$-(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_3+\cdots+a_{n-1}\cdot b_n+a_n\cdot b_{n+1})$

$=a_1\cdot b_1+d(b_2+b_3+\cdots+b_n)-a_n\cdot b_{n+1}$ ③

求和 $S_n=\dfrac{a_1\cdot b_1+d(b_2+b_3+\cdots+b_n)-a_n\cdot b_{n+1}}{1-q}$

（3）注意事项

①在写出 S_n 与 qS_n 的表达式时，应特别注意将两式“错位对齐”，以便下一步准确写出 S_n-qS_n ；

②作差后，应注意减式中所剩各项的符号要变号.