湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量问题答案 1

双变量不等式基本类型 1——中点型

1.【解答】解：①函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)=-\dfrac{(2x+1)(ax-1)}{x}$，

(i) 当 $a>0$ 时，则由 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{a}$，当 $x\in(0,\dfrac{1}{a})$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 单调递增，在 $(\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 上单调递减；

(ii) 当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

②设函数 $g(x)=f(\dfrac{1}{a}+x)-f(\dfrac{1}{a}-x)$，

则 $g(x)=[ln(\dfrac{1}{a}+x)-a(\dfrac{1}{a}+x)^2+(2-a)(\dfrac{1}{a}+x)]-[ln(\dfrac{1}{a}-x)-a(\dfrac{1}{a}-x)^2+(2-a)(\dfrac{1}{a}-x)]=ln(1+ax)-ln(1-ax)-2ax$，

$g'(x)=\dfrac{a}{1+ax}+\dfrac{a}{1-ax}-2a=\dfrac{2a^3x^2}{1-a^2x^2}$，

当 $x\in(0,\dfrac{1}{a})$ 时，$g'(x)>0$，而 $g(0)=0$，$\therefore g(x)>g(0)=0$，

故当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f(\dfrac{1}{a}+x)>f(\dfrac{1}{a}-x)$；

③由①可得，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴至多有一个交点，

故 $a>0$，从而 $f(x)$ 的最大值为 $f(\dfrac{1}{a})$，且 $f(\dfrac{1}{a})>0$，

不妨设 $A(x_1$，$0)$，$B(x_2$，$0)$，$0<x_1<x_2$，则 $0<x_1<\dfrac{1}{a}<x_2$，

由②得，$f(\dfrac{2}{a}-x_1)=f(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}-x_1)>f(x_1)=f(x_2)=0$，又 $f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore \dfrac{2}{a}-x_1<x_2$，于是 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{1}{a}$，由①知，$f'(\ x_0)<0$.

2．解：（1）$f'(x)=2+\dfrac{1-2a}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{2x^2+(1-2a)x-a}{x^2}=\dfrac{(x-a)(2x+1)}{x^2}(x>0)$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

②当 $a>0$ 时，$x\in(0,a)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

$x\in(a,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增.

（2）由（1）知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$f(x)=m$ 至多一个根，不符合题意；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增，则 f'（a）$=0$.

不妨设 $0<x_1<a<x_2$，

要证 $f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})>0$，即证 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>a$，即证 $x_2+x_1>2$，即证 $x_2>2a-x_1$.

因为 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调递增，即证 $f(x_2)>f(2a-x_1)$，

因为 $f(x_2)=f(x_1)$，所以即证 $f(x_1)>f(2a-x_1)$，即证 $f(a+x)<f(a-x)$，

令 $g(x)=f(a+x)-f(a-x)=[2(a+x)+(1-2a)ln(a+x)+\dfrac{a}{a+x}]-[2(a-x)+(1-2a)ln(a-x)+\dfrac{a}{a-x}]$

$=4x+(1-2a)ln(a+x)-(1-2a)ln(a-x)+\dfrac{a}{a+x}-\dfrac{a}{a-x}$.

$g'(x)=4+\dfrac{1-2a}{a+x}+\dfrac{1-2a}{a-x}-\dfrac{a}{(a+x)^2}-\dfrac{a}{(a-x)^2}$

$=4+\dfrac{2a(1-2a)}{a^2-x^2}-\dfrac{2a(a^2+x^2)}{(a+x)^2(a-x)^2}=\dfrac{4x^2(x^2-a^2-a)}{(a+x)^2(a-x)^2}$.

当 $x\in(0,a)$，时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，又 $g(0)=f(a+0)-f(a-0)=0$，

所以 $x\in(0,a)$，时， $g(x)<g(0)=0$，即 $f(a+x)<f(a-x)$，

即 $f(x)>f(2a-x)$，

又 $x_1\in(0,a)$，所以 $f(x_1)>f(2a-x_1)$，所以 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>0$.

3．解：（1）函数 $f(x)=x^2-2ax+2lnx(a>0)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

又 $f'(x)=2x-2a+\dfrac{2}{x}=2\cdot\dfrac{x^2-ax+1}{x}(a>0,x>0)$，对于方程 $x^2-ax+1=0$，$\triangle=a^2-4(a>0)$，

①若$\triangle=a^2-4\leqslant0$，即 $0<a\leqslant2$ 时，则 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

②若$\triangle=a^2-4>0$，即 $a>2$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，或 $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

当 $x\in(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 和 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$， $+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，

当 $x\in(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$， $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 时， $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 和 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$， $+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$， $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递减.

综上所述，当 $0<a\leqslant2$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 和 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ ，$+\infty)$，单调递减区间为 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ ，$\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$；

（2）由（1）可知，当 $a>2$ 时， $x_1+x_2=a$， $x_1x_2=1(x_1<x_2)$，

又 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-b-2cx(x>0)$，故 $g'(\dfrac{x_1+x_2}{2})=\dfrac{2}{x_1+x_2}-b-c(x_1+x_2)$，

由 $g(x_1)=g(x_2)=0$，可得 $\begin{cases}lnx_1-bx_1-cx_1{}^2=0\\lnx_2-bx_2-cx_2{}^2=0\end{cases}$，两式相减，可得 $ln\dfrac{x_1}{x_2}=b(x_1-x_2)+c(x_1^2-x_2^2)$，

所以 $y=(x_1-x_2)g'(\frac{x_1+x_2}{2})=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-b(x_1-x_2)-c(x_1^2-x_2^2)=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}-ln\frac{x_1}{x_2}$，

令 $\frac{x_1}{x_2}=t\in(0,1)$，所以 $y=\frac{2(t-1)}{t+1}-lnt$，则 $y'=\frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$，所以 $y=\frac{2(t-1)}{t+1}-lnt$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

由 y 的取值范围为 $[ln3-1，+\infty)$，可得 t 的取值范围为 $(0,\frac{1}{3}]$，所以 $a^2=(x_1+x_2)^2=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+2=t+\frac{1}{t}+2\in[\frac{16}{3},+\infty)$，

又因为 $a>2$，故实数 a 的取值范围是 $[\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty)$．

4.解：（1）依题意，得 $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$，

$\because a>1$，由 $1-ax>0$，解得 $x<\frac{1}{a}$，即当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

由 $1-ax<0$，解得 $x>\frac{1}{a}$，即当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\frac{1}{a})$，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(\frac{1}{a}，+\infty)$．

（2）$\because g(x)=2f(x)+x^2=2lnx-2ax+x^2$，

$\therefore g'(x)=\frac{2(x^2-ax+1)}{x}=0$ 的两根为 x_1，x_2，即方程 $x^2-ax+1=0$ 的两根为 x_1，x_2，

$\because a\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\triangle=a^2-4>0$，$\therefore x_1+x_2=a$，$x_1x_2=1$，

$\because t=\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}$，$\therefore y=(x_1-x_2)(\frac{2}{x_1+x_2}-\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2})+\frac{2}{3}=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{2}{3}=2\cdot\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\frac{x_1}{x_2}+1}-ln\frac{x_1}{x_2}+\frac{2}{3}$，

令 $m=\frac{x_1}{x_2}(0<m<1)$，由韦达定理，得 $(x_1+x_2)^2={x_1}^2+2x_1x_2+{x_2}^2=a^2$，

$\therefore\frac{{x_1}^2+2x_1x_2+{x_2}^2}{x_1x_2}=m+\frac{1}{m}+2=a^2$，$\because a\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$\therefore m+\frac{1}{m}=a^2-2\geqslant\frac{5}{2}$，$\therefore m\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $m\geqslant2$，$\therefore 0<m\leqslant\frac{1}{2}$，

令 $h(m)=2\cdot\frac{m-1}{m+1}-lnm+\frac{2}{3}$，$\therefore h'(m)=\frac{-(m-1)^2}{m(m+1)^2}<0$，

$\therefore h(m)$ 在 $0<m\leqslant\frac{1}{2}$ 上递减，$\therefore y_{min}=h(m)_{min}=h(\frac{1}{2})=ln2$，

5. 解：（1）$f'(x)=x+\frac{1}{x}+m$，$(x>0)$，若 $f(x)$ 存在两个极值点，则 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个根，所以 $m=-(x+\frac{1}{x})$ 有两个根，即 $y=m$ 与 $y=-(x+\frac{1}{x})$，$(x>0)$ 有两个交点，$y'=-1+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+1}{x^2}$，

所以在 $(0,1)$ 上，$y'>0$，y 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上，$y'<0$，y 单调递减，

所以 $x=1$ 时，$y_{max}=-2$，所以 $m<-2$，所以 m 的取值范围为 $(-\infty,-2)$．

（2）证明：由（1）知 $a<-2$，且 $x_1+x_2=-a$，$x_1x_2=1$，

所以$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f(\dfrac{x_1+x_2}{2})=\dfrac{lnx_1+\frac{1}{2}{x_1}^2+ax_1+lnx_2+\frac{1}{2}{x_2}^2+ax_2}{2}-ln\dfrac{x_1+x_2}{2}-\dfrac{(\frac{x_1+x_2}{2})^2}{2}-a(\dfrac{x_1+x_2}{2})$

$=-ln(-\dfrac{a}{2})-\dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{8}$，所以只需证明$-ln(-\dfrac{a}{2})-1-\dfrac{a}{2}>0$，

令$t=-\dfrac{a}{2}$，故$t>1$，原不等式等价于$lnt<t-1$对$t>1$成立，令$g(t)=lnt-(t-1)$，

$g'(t)=\dfrac{1-t}{t}<0$，所以$g(t)=lnt-(t-1)$单调递减，则有$g(t)=lnt-(t-1)<g$（1）$=0$．

6．解：(1) $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{2a}{x}=-\dfrac{x^2-2ax+1}{x^2}$，

(i)若$a\leqslant 1$，则$f'(x)\leqslant 0$，当且仅当$a=1$，$x=1$时，$f'(x)=0$，

(ii)若$a>1$，令$f'(x)=0$得$x_1=a-\sqrt{a^2-1}$，$x_2=a+\sqrt{a^2-1}$，

当$x\in(0$，$a-\sqrt{a^2-1})\cup(a+\sqrt{a^2-1}$，$+\infty)$时，$f'(x)<0$，

当$x\in(a-\sqrt{a^2-1}$，$a+\sqrt{a^2-1})$时，$f'(x)>0$，

故当$a\leqslant 1$时，$f(x)$单调递减区间为$(0,+\infty)$，无单调递增区间，

当$a>1$时，$f(x)$单调递减区间为$(0,a-\sqrt{a^2-1})$，$(a+\sqrt{a^2-1}$，$+\infty)$，

单调递增区间为$(a-\sqrt{a^2-1}$，$a+\sqrt{a^2-1})$．

（2）由（1）知：$a>1$且$x_1+x_2=2a$，$x_1x_2=1$，又$g'(x)=\dfrac{1}{x}-b-2cx$，$\therefore g'(\dfrac{x_1+x_2}{2})=\dfrac{2}{x_1+x_2}-b-c(x_1+x_2)$，

由$g(x_1)=g(x_2)=0$得：$ln\dfrac{x_1}{x_2}=b(x_1-x_2)+c(x_1^2-x_2^2)$，

$\therefore y=(x_1-x_2)g'(\dfrac{x_1+x_2}{2})=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-b(x_1-x_2)-c(x_1^2-x_2^2)=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}-ln\dfrac{x_1}{x_2}$，

令$\dfrac{x_1}{x_2}=t\in(0,1)$，$\therefore y=\dfrac{2(t-1)}{t+1}-lnt$，

$\because y'=\dfrac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$，$\therefore y$在$(0,1)$上单调递减，由$y$的取值范围是$[ln3-1$，$+\infty)$，得$t$的取值范围是$(0$，$\dfrac{1}{3}]$，

$\because x_1+x_2=2a$，$\therefore(2a)^2=(x_1+x_2)^2={x_1}^2+2x_1x_2+{x_2}^2=\dfrac{{x_1}^2+2x_1x_2+{x_2}^2}{x_1x_2}=4a^2=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+2$，

$\therefore 4a^2=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+2=t+\dfrac{1}{t}+2\in[\dfrac{16}{3}$，$+\infty)$，

$\because a>1$，$\therefore$实数a的取值范围是$[\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$+\infty)$．

7解：（1）由题意得：f（1）$=e+a+b=e-2$，即$a+b=-2$，

又$f'(x)=a+e^x$，即f'（1）$=e+a=e$，则$a=0$，解得：$b=-2$，则$f(x)=e^x-2$．

令$h(x)=f(x)-x+1=e^x-x-1$，$h'(x)=e^x-1$，令$h'(x)=0$，解得：$x=0$，

则函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(0)=0$，则 $f(x)\geqslant x-1$．

（2）要证 $f(x_0)<g$（1）$<y_0$ 成立，只需证：$e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-2<k-2<\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}-4}{2}$，

即证：$e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<k<\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$，即证：$e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}<\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$，只需证：$e^{\frac{x_2-x_1}{2}}<\dfrac{e^{x_2-x_1}-1}{x_2-x_1}<\dfrac{e^{x_2-x_1}+1}{2}$，

不妨设 $t=x_2-x_1>0$，即证：$e^{\frac{t}{2}}<\dfrac{e^t-1}{t}<\dfrac{e^t+1}{2}$，要证 $e^{\frac{t}{2}}<\dfrac{e^t-1}{t}$，只需证：$e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}>t$，

令 $F(t)=e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}-t$，则 $F'(t)=\dfrac{1}{2}(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}})-1>0$，$\therefore F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

$\therefore F(t)>F(0)=0$，即 $e^{\frac{t}{2}}<\dfrac{e^t-1}{t}$ 成立；

要证 $\dfrac{e^t-1}{t}<\dfrac{e^t+1}{2}$，只需证：$\dfrac{e^t-1}{e^t+1}<\dfrac{t}{2}$，令 $G(t)=\dfrac{e^t-1}{e^t+1}-\dfrac{t}{2}$，则 $G'(t)=\dfrac{2e^t}{(e^t+1)^2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4e^t-(e^t+1)^2}{2(e^t+1)^2}=\dfrac{-(e^t-1)^2}{2(e^t+1)^2}<0$，

$\therefore G(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，$\therefore G(t)<G(0)=0$，即 $\dfrac{e^t-1}{t}<\dfrac{e^t+1}{2}$ 成立．

$\therefore e^{\frac{t}{2}}<\dfrac{e^t-1}{t}<\dfrac{e^t+1}{2}$，$t>0$ 成立．$\therefore f(x_0)<g$（1）$<y_0$ 成立．

8．解：（1）由于 $f(x)=2lnx-2mx+x^2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{2(x^2-mx+1)}{x}$．

对于方程 $x^2-mx+1=0$，其判别式$\triangle=m^2-4$．

当 $m^2-4\leqslant0$，即 $0<m\leqslant2$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增．

当 $m^2-4>0$，即 $m>2$，方程 $x^2-mx+1=0$ 恰有两个不相等是实根 $x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-4}}{2}$，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ 或 $x>\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$，此时 $f(x)$ 单调递增；

令 $f'(x)<0$，得 $\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}<x<\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$，此时 $f(x)$ 单调递减．

综上所述，当 $0<m\leqslant2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增；

当 $m>2$ 时，$f(x)$ 在 $(\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2},\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$ 内单调递减，

在 $(0,\dfrac{m-\sqrt{m^2-4}}{2})$，$(\dfrac{m+\sqrt{m^2-4}}{2},+\infty)$ 内单调递增．

（2）证明：由（1）知，$f'(x)=\dfrac{2(x^2-mx+1)}{x}$，

所以 $f'(x)$ 的两根 x_1， x_2 即为方程 $x^2-mx+1=0$ 的两根．

因为 $m\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以$\triangle=m^2-4>0$， $x_1+x_2=m$， $x_1x_2=1$．

又因为 x_1， x_2 为 $h(x)=lnx-cx^2-bx$ 的零点，

所以 $lnx_1-cx_1^2-bx_1=0$， $lnx_2-c_2^2-bx_2=0$，两式相减得 $ln\frac{x_1}{x_2}-c(x_1-x_2)(x_1+x_2)-b(x_1-x_2)=0$，

得 $b=\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}=c(x_1+x_2)$．而 $h'(x)=\frac{1}{x}-2cx-b$，

所以 $(x_1-x_2)h'(x_0)=(x_1-x_2)(\frac{1}{x_0}-2cx_0-b)$

$$=(x_1-x_2)[\frac{2}{x_1+x_2}-c(x_1+x_2)-\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}+c(x_1+x_2)]=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-ln\frac{x_1}{x_2}=2\bullet\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\frac{x_1}{x_2}+1}-ln\frac{x_1}{x_2}.$$

令 $\frac{x_1}{x_2}=t(0<t<1)$，由 $(x_1+x_2)^2=m^2$ 得 $x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=m^2$，

因为 $x_1x_2=1$，两边同时除以 x_1x_2，得 $t+\frac{1}{t}+2=m^2$，

因为 $m\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故 $t+\frac{1}{t}\geqslant\frac{5}{2}$，解得 $0<t\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $t\geqslant2$，所以 $0<t\leqslant\frac{1}{2}$．

设 $G(t)=2\bullet\frac{t-1}{t+1}-lnt$，所以 $G'(t)=\frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$，则 $y=G(t)$ 在 $(0,\frac{1}{2}]$ 上是减函数，

所以 $G(t)_{min}=G(\frac{1}{2})=-\frac{2}{3}+ln2$，即 $y=(x_1-x_2)h'(x_0)$ 的最小值为 $-\frac{2}{3}+ln2$．

所以 $(x_1-x_2)h'(x_0)\geqslant-\frac{2}{3}+ln2$．

双变量不等式基本类型 2——极值和差商积问题

1．证明：（1）当 $a=1$ 时， $f(x)=lnx-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，定义域为 $\{x\mid x>0\}$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}$， $f'(x)\leqslant0$ 在定义域上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

当 $0<x<1$ 时， $f(x)>f$ （1） $=0$，

当 $x>1$ 时， $f(x)<f$ （1） $=0$，原命题得证．

（2） $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(a+\frac{1}{x^2})=\frac{-ax^2+2x-1}{2x^2}$，若存在两个极值点，则 $\begin{cases}a>0\\ \triangle=4-4a>0\end{cases}$，解得 $0<a<1$，

由韦达定理可知， $x_1+x_2=\frac{2}{a}$， $x_1x_2=\frac{1}{a}(*)$，

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(lnx_1-lnx_2)-\frac{1}{2}a(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})}{x_1-x_2}=\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2x_1x_2}$，原命题即证：$\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}-\frac{1}{2x_1x_2}<\frac{1}{2}$，

不妨设 $x_1>x_2$，原命题即证：$ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1-x_2}{2x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{2}$，

由(*)知，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$，即证：$ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}<\frac{x_1-x_2}{2}\cdot(\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2})$，不妨令 $t=\frac{x_1}{x_2}>1$，

原命题即证：$lnt-\frac{t-1}{t+1}-\frac{t}{4}+\frac{1}{4t}<0$，记 $g(t)=lnt-\frac{t-1}{t+1}-\frac{t}{4}+\frac{1}{4t}$，$(t>1)$

则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2}{(t+1)^2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4t^2}=\frac{-(t-1)^2(t^2+1)}{4t^2(t+1)^2}$，

当 $t>1$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$g(t)<g$（1）$=0$，原命题得证．

2．

（1）解：因为 $f(x)=\frac{1}{x}-x+alnx(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$，

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{-x^2-1}{x^2}$，所以 f'（1）$=-2$，

则 $f(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=-2x+2$；

（2）解：函数的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$，

令 $g(x)=-x^2+ax-1$，且 $g(0)=-1$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)<0$ 恒成立，此时 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $a>0$ 时，判别式$\triangle=a^2-4$，

(i) 当 $0<a\leqslant 2$ 时，$\triangle\leqslant 0$，即 $g(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

(ii) 当 $a>2$ 时，令 $g(x)>0$，解得 $\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x<\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

令 $g(x)<0$，解得 $0<x<\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ 或 $x>\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递增，在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 和 $(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，$+\infty)$ 上单调递减．

综上所述，当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递增，在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 和 $(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，$+\infty)$ 上单调递减．

（3）证明：由（2）可知，$a>2$，$0<x_1<1<x_2$，$x_1x_2=1$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-x_1+alnx_1-[\frac{1}{x_2}-x_2+alnx_2]=(x_2-x_1)(1+\frac{1}{x_1x_2})+a(lnx_1-lnx_2)$

$=2(x_2-x_1)+a(lnx_1-lnx_2)$，则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-2+\frac{a(lnx_1-lnx_2)}{x_1-x_2}$，

故问题转化为证明 $\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}<1$ 即可，即证明 $lnx_1-lnx_2>x_1-x_2$，则 $lnx_1-ln\frac{1}{x_1}>x_1-\frac{1}{x_1}$，

即证 $lnx_1+lnx_1>x_1-\frac{1}{x_1}$，即证 $2lnx_1>x_1-\frac{1}{x_1}$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，

令 $h(x)=2lnx-x+\frac{1}{x}(0<x<1)$，其中 h（1）$=0$，

则 $h'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$，故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

则 $h(x)>h$（1），即 $2lnx-x+\frac{1}{x}>0$，故 $2lnx>x-\frac{1}{x}$，所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$．

3．解：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}+ax-(a+1)=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x}=\frac{(x-1)(ax-1)}{x}$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，

令 $f'(x)<0$，得 $x>1$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

②当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或 $x>\frac{1}{a}$，

令 $f'(x)<0$，得 $1<x<\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增，在 $(1,\frac{1}{a})$ 上单调递减，

③当 $a=1$ 时，则 $f'(x)\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增，

④当 $a>1$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1$，

$f'(x)>0$，得 $\frac{1}{a}<x<1$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递减，

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$，$(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增，在 $(1,\frac{1}{a})$ 上单调递减，

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a}, 1)$ 上单调递减．

（2）证明：$g(x)=f(x)+x=lnx+\frac{a}{2}x^2-ax$，则 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g'(x)=\frac{1}{x}+ax-a=\frac{ax^2-ax+1}{x}$，

若 $g(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(0<x_1<x_2)$，

则方程 $ax^2-ax+1=0$ 的判别式△ $=a^2-4a>0$，且 $x_1+x_2=1$，$x_1x_2=\frac{1}{a}>0$，

解得 $a>4$，又 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1^2<x_1x_2=\frac{1}{a}$，即 $0<x_1<\frac{1}{\sqrt{a}}$，

所以 $g(x_1)-g(x_2)=lnx_1+\frac{a}{2}x_1^2-ax_1-lnx_2-\frac{a}{2}x_2^2+ax_2=lnx_1-ln\frac{1}{ax_1}+\frac{a}{2}(x_1+x_2)(x_1-x_2)-a(x_1-x_2)$

$=lnx_1+ln(ax_1)-\frac{a}{2}(2x_1-1)=lnx_1+ln(ax_1)+\frac{a}{2}-ax_1$，

设 $h(t)=lnt+ln(at)+\frac{a}{2}-at$，其中 $t=x_1\in(0,\frac{1}{\sqrt{a}})$，$a>4$，由 $h'(t)=\frac{2}{t}-a=0$，解得 $t=\frac{2}{a}$，又 $\frac{2}{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2-\sqrt{a}}{a}<0$，

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量问题答案 3

所以 $h(t)$ 在区间 $(0,\dfrac{2}{a})$ 内单调递增，在区间 $(\dfrac{2}{a}$，$\dfrac{1}{\sqrt{a}})$ 内单调递减，

即 $h(t)$ 的最大值为 $h(\dfrac{2}{a})=2ln2-lna+\dfrac{a}{2}-2<\dfrac{a}{2}-lna$，所以 $g(x_1)-g(x_2)<\dfrac{a}{2}-lna$ 恒成立．

4．解：（Ⅰ）由 $f(x)=lnx-\dfrac{a}{x+1}$ 得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{(x+1)^2}$，（2 分）

由题 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{(x+1)^2}\geqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $a\geqslant -(x+\dfrac{1}{x}+2)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

而 $-(x+\dfrac{1}{x}+2)\leqslant -4$，所以 $a\geqslant -4$；（5 分）

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+(2+a)x+1}{x(x+1)^2}(x>0)$，由题意知 x_1，x_2 是方程 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内的两个不同实数解，

令 $g(x)=x^2+(2+a)x+1(x>0)$，注意到 $g(0)=1>0$，其对称轴为直线 $x=-2-a$，

故只需 $\begin{cases}-2-a>0\\(2+a)^2-4>0\end{cases}$，解得 $a<-4$，即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-4)$；

由 x_1，x_2 是方程 $x^2+(2+a)x+1=0$ 的两根，得 $x_1+x_2=-2-a$，$x_1x_2=1$，

因此 $f(x_1)+f(x_2)=(lnx_1-\dfrac{a}{x_1+1})+(lnx_2-\dfrac{a}{x_2+1})=ln(x_1x_2)-a\cdot\dfrac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=-a\cdot\dfrac{-2-a+2}{1-2-a+1}=-a$，（10 分）

又 $x_1+x_2=-2-a$，所以 $f(x_1)+f(x_2)-(x_1+x_2)=2>0$，即 $f(x_1)+f(x_2)>x_1+x_2$ 得证．

5．解：（1）由题得 $f'(x)=ax-2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^2-2x+1}{x}$，其中 $x>0$，

令 $g(x)=ax^2-2x+1$，$x>0$，对称轴为 $x=\dfrac{1}{a}$，$\triangle=4-4a$，

若 $a\geqslant 1$，则$\triangle\leqslant 0$，此时 $g(x)\geqslant 0$，则 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

若 $0<a<1$，则$\triangle>0$，此时 $ax^2-2x+1=0$ 在 R 上有两个根，即 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a}$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a}$，

且 $0<x_1<1<x_2$，所以当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g(x)>0$，

则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_1$，$x_2)$ 时，$g(x)<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_2$，$+\infty)$ 时，$g(x)>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

综上，当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a})$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a},\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a},+\infty)$ 上单调递增．

（2）证明：由（1）知，当 $0<a<1$ 时， $f(x)$ 有两个极值点 x_1， x_2，且 $x_1+x_2=\frac{2}{a}$， $x_1x_2=\frac{1}{a}$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}ax_1^2-2x_1+lnx_1+\frac{1}{2}ax_2^2-2x_2+lnx_2$ $=\frac{1}{2}a(x_1^2+x_2^2)-2(x_1+x_2)+(lnx_1+lnx_2)$

$=\frac{1}{2}a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-2(x_1+x_2)+ln(x_1x_2)$ $=\frac{1}{2}a[(\frac{2}{a})^2-\frac{2}{a}]-\frac{4}{a}+ln\frac{1}{a}=-lna-\frac{2}{a}-1$，

令 $h(x)=-lnx-\frac{2}{x}-1$， $0<x<1$，由于 $h'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{2-x}{x^2}$，

故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $h(x)<h$ （1） $=-3$，

所以 $h(a)=-lna-\frac{2}{a}-1<-3$，即 $f(x_1)+f(x_2)<-3$．

6．解：（1） $f(x)=lnx+mx,m\in R,f'(x)=\frac{1}{x}+m,x>0$，

$m\geqslant 0$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，

$m<0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得： $0<x<-\frac{1}{m}$，令 $f'(x)<0$，解得： $x>-\frac{1}{m}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{m})$ 递增，在 $(-\frac{1}{m}$， $+\infty)$ 递减，

综上：当 $m\geqslant 0$ 时， $f(x)$ 递增区间为 $(0,+\infty)$；

当 $m<0$ 时， $f(x)$ 递增区间为 $(0,-\frac{1}{m})$，通减区间是 $(-\frac{1}{m},+\infty)$．

（2）证明： $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2,g'(x)=\frac{x^2+mx+1}{x}$，

当 $-2\leqslant m\leqslant 2$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，无极值点，

当 $m<-2$ 或 $m>2$ 时，由 $g'(x)=0$，得 $x_1=\frac{-m-\sqrt{m^2-4}}{2},x_2=\frac{-m+\sqrt{m^2-4}}{2}$，

若 $m>2$，则 $x_1<x_2<0$， $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，无极值点，

若 $m<-2$，则 $x_1+x_2=-m$， $x_1x_2=1$，不妨设 $0<x_1<1<x_2$．

此时 $g(x)$ 有两个极值点 x_1， x_2， $g(x_1)+g(x_2)=lnx_1+mx_1+\frac{1}{2}x_1^2+lnx_2+mx_2+\frac{1}{2}x_2^2$

$=ln(x_1x_2)+m(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=-\frac{1}{2}m^2-1$，

因为 $m<-2$，故 $-\frac{1}{2}m^2-1<-3$，即 $g(x_1)+g(x_2)+3<0$．

7．解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=?\frac{a}{x^2}{}_{?}\frac{2lnx}{x}{}_{=?}\frac{2xlnx+a}{x^2}$，令 $h(x)=2xlnx+a$，则 $h'(x)=2(lnx+1)$，

令 $h'(x)>0$，解得 $x>\frac{1}{e}$，令 $h'(x)<0$，解得 $0<x<\frac{1}{e}$，

故 $h(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e}$， $+\infty)$ 上单调递增，故 $h(x)_{min}=h(\frac{1}{e})=-\frac{2}{e}+a$，

① $-\frac{2}{e}+a\geqslant 0$ 即 $a\geqslant\frac{2}{e}$ 时， $f'(x)\leqslant 0$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，

② $-\frac{2}{e}+a\leqslant 0$ 即 $a\leqslant \frac{2}{e}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增；

（Ⅱ）$f'(x)=?\frac{a}{x^2}{}_{?}\ \frac{2lnx}{x}{}_{=?}\ \frac{2xlnx+a}{x^2}$，∵ $f(x)$ 有两个极值点，x_1，$x_2(x_1<x_2)$，∴ $\begin{cases}2x_1lnx_1+a=0\\ 2x_2lnx_2+a=0\end{cases}$，

令 $g(x)=2xlnx$，则 $g'(x)=2lnx+2$，

易知，当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(\frac{1}{e}$，$+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上递减，在 $(\frac{1}{e}$，$+\infty)$ 上递增，

$\therefore g(x)_{min}=g(\frac{1}{e})=?\frac{2}{e}$，$g(0)=g$（1）$=0$，故 $?a\in(?\frac{2}{e}{}_{,0)}$，即 $a\in(0,\frac{2}{e})$，

由 $\begin{cases}2x_1lnx_1+a=0\\ 2x_2lnx_2+a=0\end{cases}$，可得 $\begin{cases}2lnx_1=-\frac{a}{x_1}\\ 2lnx_2=-\frac{a}{x_2}\end{cases}$，$\therefore 2(lnx_1+lnx_2)=?a(\frac{1}{x_{1+}}\ \frac{1}{x_2})$，则 $x_1+x_2=\frac{2x_1x_2ln(x_1x_2)}{-a}$，

$2(lnx_2?lnx_1)=a(\frac{1}{x_1}?\frac{1}{x_2})=\frac{a(x_2-x_1)}{x_1x_2}$，则 $\frac{lnx_2-lnx_1}{x_2-x_1}=\frac{a}{2x_1x_2}$，

$f(x_1)?f(x_2)=\frac{a}{x_1}?ln^2x_1?\frac{a}{x_2}+ln^2x_2$，$=ln^2x_2?ln^2x_1+2lnx_2?2lnx_1=(lnx_2?lnx_1)(lnx_1x_2+2)$，

由 $x_1<x_2$，得 $0<x_1<\frac{1}{e}<x_2<1$，下证 $x_1x_2<\frac{1}{e^2}$，即证 $x_1<\frac{1}{x_2e^2}<\frac{1}{e}$，即证 $g(x_1)>g(\frac{1}{x_2e^2})$，

∵ $g(x_1)=g(x_2)$，∴等价于证 $g(x_2)>g(\frac{1}{x_2e^2})$，

令 $G(x)=g(x)?g(\frac{1}{xe^2})=xlnx+\frac{1}{e^2x}ln(e^2x)$，$x\in(\frac{1}{e}$，$1)$，

则 $G'(x)=(lnx+1)(1?\frac{1}{x^2e^2})>0$，故 $G(x)>G(\frac{1}{e})=0$，$\therefore g(x_2)>g(\frac{1}{x_2e^2})$，即 $x_1x_2<\frac{1}{e^2}$，

令 $t=x_1x_2\in(0,\frac{1}{e^2})$，则 $\frac{1}{k}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}?e^2(x_1+x_2)+2e$

$=?\frac{a}{k}\cdot\frac{ln(x_1x_2)+2}{2x_1x_2}+e^2\cdot\frac{2x_1x_2ln(x_1x_2)}{a}+2e>?\frac{2}{ek}\cdot\frac{ln(x_1x_2)+2}{2x_1x_2}+e^2\cdot\frac{2x_1x_2ln(x_1x_2)}{a}+2e\ =?\frac{1}{k}\cdot\frac{lnt+2}{et}+e^3tlnt+2e$，

令 $h(t)=?\frac{lnt+2}{et}+e^3tlnt+2e$，则 $h'(t)=(1+lnt)(\frac{1}{et^2}+e^3)$，$\therefore h(t)$ 在 $(0,\frac{1}{e^2})$ 上递减，$\therefore h(t)\geqslant h(\frac{1}{e^2})=0$，

∴正实数 k 的最大值为 1．

8．解：（1）$f(x)=\frac{1}{2}x^2-bx+lnx$，则 $f'(x)=x-b+\frac{1}{x}=\frac{x^2-bx+1}{x}(x>0)$．

令 $\varphi(x)=x^2-bx+1$，若△ $=b^2-4\leqslant 0$，即 $-2\leqslant b\leqslant 2$ 时，则 $\varphi(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

若△ $=b^2-4>0$，则 $b<-2$ 或 $b>2$，

当 $b<-2$ 时，函数 $\varphi(x)=x^2-bx+1$ 的对称轴方程为 $x=\frac{b}{2}<-1$，$\varphi(0)=1$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，

$\varphi(x)>0$ 恒成立，即 $f'(x)>0$ 恒成立，可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $b>2$ 时，函数 $\varphi(x)=x^2-bx+1$ 的对称轴方程为 $x=\frac{b}{2}>1$，$\varphi(0)=1$，

由 $\varphi(x)=x^2-bx+1=0$，得 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$，

$\therefore$ 当 $x\in(0$，$\dfrac{b-\sqrt{b^2-4}}{2})\cup(\dfrac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}$，$+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，$f'(x)>0$，

当 $x\in(\dfrac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}$，$\dfrac{b+\sqrt{b^2-4}}{2})$ 时，$\varphi(x)<0$，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\dfrac{b-\sqrt{b^2-4}}{2})$，$(\dfrac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}$，$+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}$，$\dfrac{b+\sqrt{b^2-4}}{2})$ 上单调递减.

综上所述，当 $b\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $b>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{b-\sqrt{b^2-4}}{2})$，$(\dfrac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}$，$+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}$，$\dfrac{b+\sqrt{b^2-4}}{2})$ 上单调递减.

（2）函数 $f(x)=lnx+\dfrac{1}{2}x^2-bx$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-b=\dfrac{x^2-bx+1}{x}$，

由 $f'(x)=0$，得 $x^2-bx+1=0$，$\because x_1$，$x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $f(x)$ 的两个极值点，$\therefore x_1+x_2=b$，$x_1x_2=1$，

$\therefore x_2=\dfrac{1}{x_1}$，$b\geqslant\dfrac{5}{2}$，$x_1+x_2=x_1+\dfrac{1}{x_1}=b\geqslant\dfrac{5}{2}$，$0<x_1<x_2=\dfrac{1}{x_1}$，解得 $0<x_1\leqslant\dfrac{1}{2}$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=ln\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-b(x_1-x_2)=2lnx_1-\dfrac{1}{2}(x_1^{\,2}-\dfrac{1}{x_1^{\,2}})$，

构造函数 $F(x)=2lnx-\dfrac{1}{2}(x^2-\dfrac{1}{x^2})(x\in(0$，$\dfrac{1}{2}])$，$F'(x)=\dfrac{2}{x}-x-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{-(x^2-1)^2}{x^3}<0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(0$，$\dfrac{1}{2}]$ 上单调递减. $\therefore$ 当 $x_1=\dfrac{1}{2}$ 时，$F(x)_{min}=F(\dfrac{1}{2})=\dfrac{15}{8}?2ln2$，

故 k 的最大值为 $\dfrac{15}{8}?2ln2$.

双变量不等式基本类型 3——剪刀模型

1.（1）解：由题意可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=ax^2-2lnx-a=a(x^2-1)-2lnx$，

令 $g(x)=a(x^2-1)-2lnx$，因为函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，

则函数 $g(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，又 $g'(x)=\dfrac{2(ax^2-1)}{x}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，函数 $g(x)$ 至多有一个零点，不符合题意；

当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，可得 $x=\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量问题答案 4

所以当 $x\in(0,\sqrt{\frac{1}{a}})$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减，当 $x\in(\sqrt{\frac{1}{a}}，+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增，

又 g（1）$=0$，所以当 $\sqrt{\frac{1}{a}}=1$，即 $a=1$ 时，$g(x)$ 有唯一的零点 $x=1$，故符合题意；

当 $\sqrt{\frac{1}{a}}\neq 1$，即 $a\neq 1$ 时，$g(\sqrt{\frac{1}{a}})<g$（1）$=0$，

当 $\sqrt{\frac{1}{a}}>1$，即 $0<a<1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{a}})$ 上有唯一的零点 $x=1$，

$g(\sqrt{\frac{1}{a}})=\frac{1}{a}+2lna-a$，

设 G（a）$=\frac{1}{a}+2lna-a$，$0<a<1$，则 G'（a）$=-\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}-1<0$，所以 G（a）在 $(0,1)$ 上单调递减，

则 G（a）>0，即 $g(\frac{1}{a})>0$，

又 $\frac{1}{a}>\sqrt{\frac{1}{a}}$，所以 $g(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{1}{a}}，+\infty)$ 上有唯一的零点，此时 $g(x)$ 有两个零点，符合题意；

当 $\sqrt{\frac{1}{a}}<1$，即 $a>1$ 时，$g(x)$ 在 $(\sqrt{\frac{1}{a}}，+\infty)$ 上有唯一的零点 $x=1$，

而 $g(e^{-\frac{a}{2}})=ae^{-a}>0$，$e^{-\frac{a}{2}}=\sqrt{\frac{1}{e^a}}<\sqrt{\frac{1}{a}}$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{a}})$ 上有唯一的两点，此时 $g(x)$ 有两个零点，符合题意.

综上所述，a 的取值范围为 $(0，1)\cup(1，+\infty)$；

（2）证明：由（1）可知，当 $0<a<\frac{1}{e-1}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1=1$，$x_2>1$，因为 $g(x_2)=a({x_2}^2-1)-2lnx_2=0$，所以 $a=\frac{2lnx_2}{{x_2}^2-1}$，设 $\varphi(x)=\frac{2lnx}{x^2-1}$，$x>1$，

则 $\varphi'(x)=\frac{2x(1-\frac{1}{x^2}-2lnx)}{(x^2-1)^2}$，设 $F(x)=1-\frac{1}{x^2}-2lnx$，$x>1$，则 $F'(x)=\frac{2(1-x^2)}{x^3}<0$，

所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$F(x)<0$，即 $\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $\varphi(\sqrt{e})=\frac{1}{e-1}$，$0<a<\frac{1}{e-1}$，所以 $x_2>\sqrt{e}$，$x_2-1>\sqrt{e}-1$，故 $|x_2-x_1|>\sqrt{e}-1$.

2．解：（1）将 $x=-1$ 代入切线方程 $(e-1)x+ey+e-1=0$ 中，有 $y=0$，

所以 $f(-1)=0$，即 $f(-1)=(b-1)(\frac{1}{e}-a)=0$，又 $f'(x)=e^x(x+b+1)-a$，

所以 $f'(-1)=\frac{b}{e}-a=-\frac{e-1}{e}=-1+\frac{1}{e}$．若 $a=\frac{1}{e}$，则 $b=2-e<0$，与 $b>0$ 矛盾，故 $a=b=1$.

（2）证明：由（1）可知 $f(x)=(x+1)(e^x-1)$，令 $f(x)=0$，有 $x=-1$ 或 $x=0$，

故曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴负半轴的唯一交点 P 为 $(-1,0)$．曲线在点 $P(-1,0)$ 处的切线方程为 $y=h(x)$，

则 $h(x)=f'(-1)(x+1)$，令 $F(x)=f(x)-h(x)$，则 $F(x)=f(x)-f'(-1)(x+1)$，

所以$F'(x)=f'(x)-f'(-1)=e^{x}(x+2)-\frac{1}{e}$，$F'(-1)=0$.

当$x<-1$时，若$x\in(-\infty，-2]$，$F'(x)<0$，

若$x\in(-2,-1)$，$F''(x)=e^{x}(x+3)>0$，$F'(x)$在$x\in(-2,-1)$时单调递增，$F'(x)<F'(-1)=0$.

故$F'(x)<0$，$F(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，

当$x>-1$时，由$F''(x)=e^{x}(x+3)>0$知$F'(x)$在$x\in(-1,+\infty)$时单调递增，$F'(x)>F'(-1)=0$，$F(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增．所以$F(x)\geqslant F(-1)=0$，即$f(x)\geqslant h(x)$成立.

（3）证明：$h(x)=(\frac{1}{e}-1)(x+1)$，设$h(x)=m$的根为$x_{1'}$，则$x_{1'}=-1+\frac{me}{1-e}$，

又$h(x)$单调递减，且$m=h(x_{1'})=f(x_{1})\geqslant h(x_{1})$，所以$x_{1'}\leqslant x_{1}$，

设曲线$y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线方程为$y=t(x)$，有$t(x)=x$，

令$T(x)=f(x)-t(x)=(x+1)(e^{x}-1)-x$，$T'(x)=(x+2)e^{x}-2$，

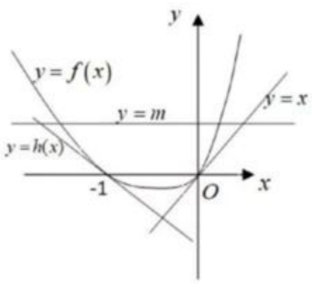
当$x\leqslant-2$时，$T'(x)=(x+2)e^{x}-2\leqslant-2<0$，

当$x>-2$时，$T''(x)=(x+3)e^{x}>0$，

故函数$T'(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增，
又$T'(0)=0$，所以当$x\in(-\infty,0)$时，$T'(x)<0$，当$x\in(0,+\infty)$时，$T'(x)>0$，
所以函数$T(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增，
所以$T(x)\geqslant T(0)=0$，即$f(x)\geqslant t(x)$，

设$t(x)=m$的根为$x_{2'}$，则$x_{2'}=m$，又函数$t(x)$单调递增，故$m=t(x_{2'})=f(x_{2})\geqslant t(x_{2})$，故$x_{2'}\geqslant x_{2}$.

又$x_{1'}\leqslant x_{1}$，所以$x_{2}-x_{1}\leqslant x_{2'}-x_{1'}=m-(-1+\frac{me}{1-e})=1+\frac{m(1-2e)}{1-e}$.



3．解：（1）将$x=-\frac{1}{2}$代入切线方程$(e-1)x+ey+\frac{e-1}{2}=0$中，得$y=0$，

所以$f(-\frac{1}{2})=0$，又$f(-\frac{1}{2})=(b-\frac{1}{2})(\frac{1}{e}-a)=0$，解得$b=\frac{1}{2}$或$a=\frac{1}{e}$，

又$f'(x)=e^{2x}(2x+2b+1)-a$，所以$f'(-\frac{1}{2})=\frac{2b}{e}-a=-\frac{e-1}{e}=-1+\frac{1}{e}$，

若$a=\frac{1}{e}$，则$b=\frac{2-e}{2}$（舍去）；所以$b=\frac{1}{2}$，则$a=1$；

（2）由（1）可知，$a=1$，$b=\frac{1}{2}$，所以$f(x)=(x+\frac{1}{2})(e^{2x}-1)$，令$f(x)=0$，有$x=-\frac{1}{2}$或$x=0$，

故曲线$y=f(x)$与x轴负半轴的唯一交点P为$(-\frac{1}{2},0)$，

曲线在点 $P(-\frac{1}{2},0)$ 处的切线方程为 $y=h(x)$，则 $h(x)=f'(-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$，

因为 $F(x)=f(x)-h(x)$，所以 $F(x)=f(x)-f'(-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$，

所以 $F'(x)=f'(x)-f'(-\frac{1}{2})=2e^{2x}(x+1)-\frac{1}{e},F'(-\frac{1}{2})=0$

若 $x\leqslant-1$， $F'(x)<0$，

若 $x\in(-1,-\frac{1}{2}),x+1\in(0,\frac{1}{2}),e^{2x}\in(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$，所以 $2(x+1)e^{2x}\in(0,\frac{1}{e}),F'(x)<0$，

若 $x\in(-\frac{1}{2},+\infty),x+1\in(\frac{1}{2},+\infty),e^{2x}\in(\frac{1}{e},+\infty),2(x+1)e^{2x}\in(\frac{1}{e},+\infty)$，$F'(x)>0$，所以 $y=F'(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F'(x)>F'(-\frac{1}{2})=0$，

$\therefore$ 函数 $y=F(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增．所以 $F(x)_{min}=F(-\frac{1}{2})=0$；

（3）证明：$h(x)=(\frac{1}{e}-1)(x+\frac{1}{2})$，设 $h(x)=m$ 的根为 $x_{1'}$，则 $x_1'=-\frac{1}{2}+\frac{me}{1-e}$，

又 $y=h(x)$ 单调递减，由（2）知 $f(x)\geqslant h(x)$ 恒成立．

又 $m=h(x_{1'})=f(x_1)\geqslant h(x_1)$，所以 $x_{1'}\leqslant x_1$，

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=t(x)$，则 $t(x)=x$，

令 $T(x)=f(x)-t(x)=(x+\frac{1}{2})(e^{2x}-1)-x,T'(x)=2(x+1)e^{2x}-2$，

当 $x\leqslant-1$ 时，$T'(x)=2(x+1)e^{2x}-2\leqslant-2<0$，

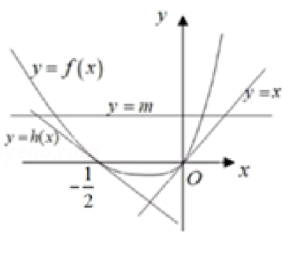
当 $x>-1$ 时，$T''(x)=2(2x+3)e^{2x}>0$，

故函数 $y=T'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，又 $T'(0)=0$，
所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$T'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$T'(x)>0$，
所以函数 $y=T(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $T(x)\geqslant T(0)=0$，即 $f(x)\geqslant t(x)$，

设 $t(x)=m$ 的根为 $x_{2'}$，则 $x_{2'}=m$，

又函数 $y=t(x)$ 单调递增，故 $m=t(x_{2'})=f(x_2)\geqslant t(x_2)$，故 $x_{2'}\geqslant x_2$．

又 $x_{1'}\leqslant x_1$，所以 $x_2-x_1\leqslant x_2'-x_1'=m-(-\frac{1}{2}+\frac{me}{1-e})=\frac{1+2m}{2}-\frac{me}{1-e}$．



4．（Ⅰ）解：$f'(x)=a-e^x$；由题意知，$f'(ln3)=a-e^{ln3}=0$；$\therefore a=3$；

（Ⅱ）证明：设曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x_0，0)$ 处切线为直线 $l:y=(3-e^{x_0})(x-x_0)$；

令 $g(x)=(3-e^{x_0})(x-x_0)$； $F(x)=f(x)-g(x)=3x-e^x+1-(3-e^{x_0})(x-x_0)$；

$\therefore F'(x)=3-e^x-(3-e^{x_0})=e^{x_0}-e^x$； $\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,\ +\infty)$ 上单调递减；

$\therefore F(x)_{max}=F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$；

$\therefore F(x)=f(x)-g(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant g(x)$，即 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

（Ⅲ）由（Ⅱ）设方程 $g(x)=m$ 的解为 x_2'；

则有 $(3-e^{x_0})(x_2'-x_0)=m$，解得 $x_2'=\dfrac{m}{3-e^{x_0}}+x_0$； 由题意知，$ln3<x_2<x_2'$；

令 $r(x)=2x-f(x)=e^x-x-1$，$(x>0)$； $r'(x)=e^x-1>0$；

$\therefore r(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；$\therefore r(x)>r(0)=0$；$\therefore y=2x$ 的图象不在 $f(x)$ 的下方；

$\because y=2x$ 与 $y=m$ 交点的横坐标为 $x_1'=\dfrac{m}{2}$；

则有 $0<x_1'<x_1<ln3$，即 $0<x_1'<x_1<ln3<x_2<x_2'$；

$\therefore x_2-x_1<x_2'-x_1'=\dfrac{m}{3-e^{x_0}}+x_0-\dfrac{m}{2}$；

$\because$ 关于 x_0 的函数 $y=\dfrac{m}{3-e^{x_0}}+x_0-\dfrac{m}{2}$ 在 $(ln3,2)$ 上单调递增；

$\therefore x_2-x_1<\dfrac{m}{3-e^2}+2-\dfrac{m}{2}<\dfrac{m}{2-7}+2-\dfrac{m}{2}=2-\dfrac{7m}{10}$.

5．解：（Ⅰ）由已知得： $f'(x)=6(1-x^5)$ 由 $f'(x)=0$ 得： $x=1$

又当 $x<1$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，
当 $x>1$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，
$\therefore$ 当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极大值，极大值为 f （1）$=5$，无极小值．…（3 分）

（Ⅱ）设 $P(x_0,\ 0)$，则 $x_0=\sqrt[5]{6}$， $f'(x_0)=-30$，

曲线 $f(x)$ 在点 P 处的切线方程为： $y=f'(x_0)(x-x_0)=-30(x-\sqrt[5]{6})$，

即曲线在点 P 处的切线方程为： $y=-30(x-\sqrt[5]{6})$…（6 分）

（Ⅲ）设 $g(x)=-30(x-\sqrt[5]{6})$，令 $F(x)=f(x)-g(x)$

即 $F(x)=f(x)+30(x-\sqrt[5]{6})$，则 $F'(x)=f'(x)+30$

由于 $f'(x)=6-6x^5$ 在 R 单调递减，故 $F'(x)$ 在 R 单调递减，又 $\because F'(x_0)=0$，$(x_0=\sqrt[5]{6})$

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时 $F'(x)>0$，当 $x\in(x_0,\ +\infty)$ 时， $F'(x)<0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,\ +\infty)$ 单调递减，

$\therefore \forall x\in R$， $F(x)\leqslant F(x_0)=0$，即 $\forall x\in R$，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量问题答案 5

设方程 $g(x)=a$ 的根为 $x_{2'}$，$\therefore x_2'=6^{\frac{1}{5}}-\dfrac{a}{30}$.

$\because g(x)$ 在 R 单调递减，且 $g(x_2)\geqslant f(x_2)=a=g(x_2')\ \therefore x_2<x_2'$，

设曲线 $y=f(x)$ 在点原点处的切线方程为：$y=h(x)$，则易得 $h(x)=6x$，

$\forall x\in R$，有 $f(x)-h(x)=-x^6\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant h(x)$，

设方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1'，则 $x_1'=\dfrac{a}{6}$，$\because h(x)$ 在 R 单调递增，且 $h(x_1')=a=f(x_1)\leqslant h(x_1)$，$\therefore x_1'\leqslant x_1$

$\therefore x_2-x_1\leqslant x_2'-x_1'=(a^{\frac{1}{5}}-\dfrac{a}{30})-\dfrac{a}{6}=a^{\frac{1}{5}}-\dfrac{a}{5}$，即 $x_2-x_1\leqslant a^{\frac{1}{5}}-\dfrac{a}{5}$.

6.（Ⅰ）解：由 $f(x)=4x-x^4$，可得 $f'(x)=4-4x^3$.

当 $f'(x)>0$，即 $x<1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；
当 $f'(x)<0$，即 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减.
$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

（Ⅱ）证明：设点 p 的坐标为 $(x_0，0)$，则 $x_0=4^{\frac{1}{3}}$，$f'(x_0)=-12$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)$，即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$，

令函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，即 $F(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)$，

则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$.

$\because F'(x_0)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$F'(x)>0$；当 $x\in(x_0，+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0，+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 对于任意实数 x，$F(x)\leqslant F(x_0)=0$，即对任意实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

（Ⅲ）证明：由（Ⅱ）知，$g(x)=-12(x-4^{\frac{1}{3}})$，设方程 $g(x)=a$ 的根为 x_2'，可得 $x_2'=-\dfrac{a}{12}+4^{\frac{1}{3}}$.

$\because g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，又由（Ⅱ）知 $g(x_2)\geqslant f(x_2)=a=g(x_2')$，因此 $x_2\leqslant x_2'$.

类似地，设曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=h(x)$，可得 $h(x)=4x$，

对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)-h(x)=-x^4\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant h(x)$.

设方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1'，可得 $x_1'=\dfrac{a}{4}$，

$\because h(x)=4x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(x_1')=a=f(x_1)\leqslant h(x_1)$，因此 $x_1'\leqslant x_1$，

由此可得 $x_2-x_1\leqslant x_2'-x_1'=-\dfrac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.

双变量不等式方法 1——主元法

1．解：（1）$\because f'(x)=1+lnx$ ，令 $f'(x)\geqslant 0$ 得：$lnx\geqslant -1=lne^{-1}$，$\because e>1$，$\therefore x\geqslant \frac{1}{e}$；

令 $f'(x)<0$ 得：$0<x<\frac{1}{e}$；

$\therefore f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}$，$+\infty)$ 上为增函数；在 $(0$，$\frac{1}{e}]$ 上为减函数

（2）由（1）知：当 $b>0$ 时，有 f（b）$\geqslant f(x)_{mix}=f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$，

$\therefore blnb\geqslant -\frac{1}{e}$，即：$lnb^{b}\geqslant ln(\frac{1}{e})^{\frac{1}{n}}$，$\therefore b^{b}\geqslant (\frac{1}{e})^{\frac{1}{n}}$．$------$（8 分）

（3）将 f（a）$+(a+b)ln2\geqslant f(a+b)-f$（b）变形为：

f（a）$+f$（b）$\geqslant f(a+b)-(a+b)ln2------$

即只证：f（a）$+f(a+b-a)\geqslant f(a+b)-(a+b)ln2$

设函数 $g(x)=f(x)+f(k-x)(k>0)------$

$\therefore g(x)=xlnx+(k-x)ln(k-x)$，$\therefore 0<x<k$

$\therefore g'(x)=lnx+1-ln(k-x)-1=ln\frac{x}{k-x}$ 令 $g'(x)>0$，得：$\frac{x}{k-x}>1\Rightarrow \frac{2x-k}{k-x}>0\Rightarrow \frac{k}{2}<x<k$．$\therefore g(x)$ 在 $[\frac{k}{2}$，$k)$ 上单调递增；在 $(0$，$\frac{k}{2}]$ 上单调递减；$\therefore g(x)$ 的最小值为：$g(\frac{k}{2})$，即总有：$g(x)\geqslant g(\frac{k}{2})$．

$g(\frac{k}{2})=f(\frac{k}{2})+f(k-\frac{k}{2})=kln\frac{k}{2}=k(lnk-2)=f(k)-kln2$ $\therefore g(x)\geqslant f(k)-kln2$，即：$f(x)+f(k-x)\geqslant f(k)-kln2$，

令 $x=a$，$k-x=b$，则 $k=a+b$ $\therefore f$（a）$+f$（b）$\geqslant f(a+b)-(a+b)ln2$，

$\therefore f$（a）$+(a+b)ln2\geqslant f(a+b)-f$（b）成立．

2.解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，其导数为 $f'(x)=a\cdot\frac{e^{x}(x-1)}{x^{2}}-\frac{x-1}{x}=\frac{e^{x}(x-1)}{x^{2}}(a-\frac{x}{e^{x}})$．

由 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$ 或 $a=\frac{x}{e^{x}}$，设 $u(x)=\frac{x}{e^{x}}$，$\because u'(x)=\frac{1-x}{e^{x}}$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$u'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$u'(x)<0$．

即 $u(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上递减，$\therefore u(x)_{极大}=u(1)=\frac{1}{e}$，

又当 $x\to 0$ 时，$u(x)\to 0$，当 $x\to +\infty$ 时，$u(x)\to 0$ 且 $u(x)>0$ 恒成立．

$\therefore$ 当 $a\leqslant 0$ 或 $a>\frac{1}{e}$ 时，方程 $a=\frac{x}{e^{x}}$ 无根，函数 $f(x)$ 只有 $x=1$ 一个极值点．

当 $a=\frac{1}{e}$ 时，方程 $a=\frac{x}{e^{x}}$ 的根也为 $x=1$，此时 $f'(x)$ 的因式 $a-\frac{x}{e^{x}}\geqslant 0$ 恒成立，

故函数 $f(x)$ 只有 $x=1$ 一个极值点．

当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，方程 $a=\frac{x}{e^{x}}$ 有两个根 x_{1}、x_{2} 且 $x_{1}\in(0,1)$，$x_{2}\in(1,+\infty)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,x_{1})$ 单调递减；$(x_{1}$，$1)$ 单调递增；$(1,x_{2})$ 单调递减；$(x_{2}$，$+\infty)$ 单调递增，此时函数 $f(x)$ 有 x_{1}、1、x_{2} 三个极值点．

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant \frac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 只有一个极值点．

（Ⅱ）依题意得 $lnx-x\leqslant kx+m$，令 $\varphi(x)=lnx-(k+1)x-m$，则对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $\varphi(x)\leqslant 0$ 成立．

$\because\ \varphi'(x)=\frac{1}{x}-(k+1)$，$\therefore$当 $k+1\leqslant 0$ 时，函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

注意到 $\varphi(e^m)=-(k+1)e^m\geqslant 0$，$\therefore$若 $x\in(e^m，+\infty)$，有 $\varphi(x)>0$ 成立，这与 $\varphi(x)\leqslant 0$ 恒成立矛盾；

当 $k+1>0$ 时，因为 $\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，且 $\varphi'(\frac{1}{k+1})=0$，

$\therefore$函数 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{k+1})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{k+1},+\infty)$ 上单调递减，$\therefore\ \varphi(x)\leqslant\varphi(\frac{1}{k+1})=-ln(k+1)-1-m$，

若对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $\varphi(x)\leqslant 0$ 成立，则只需 $-ln(k+1)-1-m\leqslant 0$ 成立，$\therefore ln(k+1)\geqslant -1-m\Rightarrow k+1\geqslant e^{-1-m}$，

当 $m>0$ 时，则 $(k+1)m$ 的最小值 $h(m)=me^{-1-m}$，

$\because\ h'(m)=e^{-1-m}(1-m)$，$\therefore$函数 $h(m)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，

$\therefore\ h(m)\leqslant\frac{1}{e^2}$，即 $(k+1)m$ 的最小值 $h(m)$ 的最大值为 $\frac{1}{e^2}$；

综上所述，$(k+1)m$ 的最小值 $h(m)$ 的最大值为 $\frac{1}{e^2}$.

3.（Ⅰ）函数 $f(x)=xlnx$，则 $f'(x)=1+lnx$，$(x>0)$

令 $f'(x)=0$，解得：$x=\frac{1}{e}$，且当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$

因此：$f(x)$ 的极小值为 $f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$

（Ⅱ）$g(x)=f(x+1)=(x+1)ln(x+1)$

令 $h(x)=(x+1)ln(x+1)-mx$，则 $h'(x)=ln(x+1)+1-m$

注意到：$h(0)=0$，若要 $h(x)\geqslant 0$，必须要求 $h'(0)\geqslant 0$，即 $1-m\geqslant 0$，亦即 $m\leqslant 1$

另一方面：当 $m\leqslant 1$ 时，$h'(x)=ln(x+1)+1-m\geqslant 0$ 恒成立；

故实数 m 的取值范围为：$m\leqslant 1$

(III) 构造函数 $F(x)=alna+xlnx-(a+x)ln\frac{a+x}{2}$，$x>a$，$F'(x)=1+lnx-ln\frac{a+x}{2}-1=ln\frac{2x}{a+x}$，

$\because x>a$，$\therefore 0<a+x<2x$，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上是单调递增的；

故 F（b）$>F$（a）$=0$，即：$f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})>0$

另一方面，构造函数 $G(x)=alna+xlnx-(a+x)ln\frac{a+x}{2}-(x-a)ln2$，

$G'(x)=ln\frac{2x}{a+x}-ln2=ln\frac{x}{a+x}<0$，$G(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上是单调递减的

故 G（b）$<G$（a）$=0$ 即：$f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})<(b-a)ln2$

综上，$0<f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})<(b-a)ln2$.

4．解：(1) $\because$函数 $f(x)=e^x-x$，$g(x)=(x+k)ln(x+k)-x$. $\therefore f'(x)=e^x-1$，$g'(x)=ln(x+k)$，

由 $k=1$，$f'(t)=g'(t)$，得 $e^t-ln(t+1)-1=0$，

令 $\varphi(t)=e^t-ln(t+1)-1$，则 $\varphi'(t)=e^t-\frac{1}{t+1}$，$\because\ \varphi''(t)=e^t+\frac{1}{(t+1)^2}>0$，$\therefore\varphi'(t)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，

又 $\varphi'(0)=0$，$\therefore$ 当 $-1<x<0$ 时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 单调递增，
当 $x>0$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单调递减，$\therefore \varphi(t)\leqslant\varphi(0)=0$，
当且仅当 $t=0$ 时等号成立，$\therefore$ 方程 $f'(t)=g'(t)$ 有且仅有唯一解 $t=0$，实数 t 的值为 0.
（2）令 $h(x)=f(x)-bx+g$（b）$-f(0)-g(0)$，$x>0$，

则 $h'(x)=e^{x}-(b+1)$，$\therefore$ 当 $x>ln(b+1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

当 $0<x<ln(b+1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，
故 $h(x)\geqslant h(ln(b+1))=f(ln(b+1))+g$（b）$-f(0)-g(0)-bln(b+1)$
$=(b+k)ln(b+k)-(x+1)ln(x+1)-klnk$，$(x>0)$，
令 $t(x)=(x+k)ln(x+k)-(x+1)ln(x+1)-klnk$，$(x>0)$，则 $t'(x)=ln(x+k)-ln(x+1)$，
(i) 若 $k>1$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$\therefore t(x)>t(0)=0$，满足题意；
(ii) 若 $k=1$ 时，$t(x)=0$，满足题意；
(iii) 若 $0<k<1$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$\therefore t(x)<t(0)=0$，不满足题意.
综上，正实数 k 的取值范围是 $[1，+\infty)$.

5．解：（1）当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 时，$f(x)=-\dfrac{3}{4}lnx+\sqrt{1+x}$，$x>0$，$f'(x)=-\dfrac{3}{4x}+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{(\sqrt{1+x}-2)(2\sqrt{1+x}+1)}{4x\sqrt{1+x}}$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,3)$，单调递增区间为 $(3,+\infty)$.

（2）由 f（1）$\leqslant\dfrac{1}{2a}$，得 $0<a\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

当 $0<a\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 时，$f(x)\leqslant\dfrac{\sqrt{x}}{2a}$，等价于 $\dfrac{\sqrt{x}}{a^{2}}-\dfrac{2\sqrt{1+x}}{a}-2lnx\geqslant 0$，

令 $t=\dfrac{1}{a}$，则 $t\geqslant 2\sqrt{2}$，设 $g(t)=t^{2}\sqrt{x}-2t\sqrt{1+x}-2lnx$，$t\geqslant 2\sqrt{2}$，则 $g(t)=\sqrt{x}(t-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}})^{2}-\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}-2lnx$，

(i) 当 $x\in[\dfrac{1}{7}，+\infty)$ 时，$\sqrt{1+\frac{1}{x}}\leqslant 2\sqrt{2}$，

则 $g(x)\geqslant g(2\sqrt{2})=8\sqrt{x}-4\sqrt{2}\sqrt{1+x}-2lnx$，记 $p(x)=4\sqrt{x}-2\sqrt{2}\sqrt{1+x}-lnx$，$x\geqslant\dfrac{1}{7}$，

则 $p'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}x-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}=\dfrac{(x-1)[1+\sqrt{x}(\sqrt{2x+2}-1)]}{x\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}$，

列表讨论：

x	$\dfrac{1}{7}$	$(\dfrac{1}{7}，1)$	1	$(1,+\infty)$
$p'(x)$		−	0	+
$P(x)$	$p(\dfrac{1}{7})$	单调递减	极小值 p（1）	单调递增

$\therefore p(x)\geqslant p$（1）$=0$，$\therefore g(t)\geqslant g(2\sqrt{2})=2p(x)=2p(x)\geqslant 0$.

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量问题答案 6

(ii) 当 $x\in[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7})$ 时，$g(t)\geqslant g(\sqrt{1+\frac{1}{x}})=\frac{-2\sqrt{x}lnx-(x+1)}{2\sqrt{x}}$，令 $q(x)=2\sqrt{x}lnx+(x+1)$，$x\in[\frac{1}{e^2}$，$\frac{1}{7}]$，

则 $q'(x)=\frac{lnx+2}{\sqrt{x}}+1>0$，故 $q(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2}$，$\frac{1}{7}]$ 上单调递增，$\therefore q(x)\leqslant q(\frac{1}{7})$，

由 (i) 得 $q(\frac{1}{7})=-\frac{2\sqrt{7}}{7}p(\frac{1}{7})<-\frac{2\sqrt{7}}{7}p$（1）$=0$，$\therefore q(x)<0$，$\therefore g(t)\geqslant g(\sqrt{1+\frac{1}{x}})=-\frac{q(x)}{2\sqrt{x}}>0$，

由 $(i)(ii)$ 知对任意 $x\in[\frac{1}{e^2}$，$+\infty)$，$t\in[2\sqrt{2}$，$+\infty)$，$g(t)\geqslant 0$，

即对任意 $x\in[\frac{1}{e^2}$，$+\infty)$，均有 $f(x)\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2a}$，

综上所述，所求的 a 的取值范围是 $(0$，$\frac{\sqrt{2}}{4}]$．

6.】解：（1）$\because a=b=c$，$\therefore f(x)=(x-a)^3$，$\because f$（4）$=8$，$\therefore(4-a)^3=8$，$\therefore 4-a=2$，解得 $a=2$．

（2）$a\neq b$，$b=c$，设 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$．令 $f(x)=(x-a)(x-b)^2=0$，解得 $x=a$，或 $x=b$．

$f'(x)=(x-b)^2+2(x-a)(x-b)=(x-b)(3x-b-2a)$．令 $f'(x)=0$，解得 $x=b$，或 $x=\frac{2a+b}{3}$．

$\because f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $A=\{-3$，1，$3\}$ 中，

若：$a=-3$，$b=1$，则 $\frac{2a+b}{3}=\frac{-6+1}{3}=-\frac{5}{3}\notin A$，舍去．

$a=1$，$b=-3$，则 $\frac{2a+b}{3}=\frac{2-3}{3}=-\frac{1}{3}\notin A$，舍去．

$a=-3$，$b=3$，则 $\frac{2a+b}{3}=\frac{-6+3}{3}=-1\notin A$，舍去．．

$a=3$，$b=1$，则 $\frac{2a+b}{3}=\frac{6+1}{3}=\frac{7}{3}\notin A$，舍去．

$a=1$，$b=3$，则 $\frac{2a+b}{3}=\frac{5}{3}\notin A$，舍去．

$a=3$，$b=-3$，则 $\frac{2a+b}{3}=\frac{6-3}{3}=1\in A$，

因此 $a=3$，$b=-3$，$\frac{2a+b}{3}=1\in A$，

可得：$f(x)=(x-3)(x+3)^2$．$f'(x)=3[x-(-3)](x-1)$．

可得 $x=1$时，函数 $f(x)$ 取得极小值，f（1）$=-2\times4^2=-32$．

（3）证明：$a=0$，$0<b\leqslant 1$，$c=1$，$f(x)=x(x-b)(x-1)$．

$f'(x)=(x-b)(x-1)+x(x-1)+x(x-b)=3x^2-(2b+2)x+b$．

$\triangle=4(b+1)^2-12b=4b^2-4b+4=4(b-\frac{1}{2})^2+3\geqslant 3$．

令 $f'(x)=3x^2-(2b+2)x+b=0$．解得：$x_1=\frac{b+1-\sqrt{b^2-b+1}}{3}\in(0,\frac{1}{3}]$，$x_2=\frac{b+1+\sqrt{b^2-b+1}}{3}$．$x_1<x_2$，

$x_1+x_2=\frac{2b+2}{3}$，$x_1x_2=\frac{b}{3}$，

可得 $x=x_1$ 时，$f(x)$ 取得极大值为 M，

$\because f'(x_1)=3x_1^2-(2b+2)x_1+b=0$，令 $x_1=t\in(0,\frac{1}{3}]$，可得：$b=\frac{3t^2-2t}{2t-1}$．

$\therefore M=f(x_1)=x_1(x_1-b)(x_1-1)=t(t-b)(t-1)=\frac{-t^4+2t^3-t^2}{2t-1}$，$M'=\frac{-6t^4+12t^3-8t^2+2t}{(2t-1)^2}$．

令 $g(t)=-6t^3+12t^2-8t+2$，$g'(t)=-18t^2+24t-8=-2(3t-2)^2<0$，

$\therefore$ 函数 $g(t)$ 在 $t\in(0,\frac{1}{3}]$ 上单调递减，$g(\frac{1}{3})=\frac{4}{9}>0$．$\therefore t\cdot g(t)>0$．$\therefore M'>0$．$\therefore$ 函数 $M(t)$ 在 $t\in(0,\frac{1}{3}]$ 上单调递增，

$\therefore M(t)\leqslant M(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$．

7．（1）$f'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{1+ax}{x^2}$，（1 分）

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，（2 分）

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0\Rightarrow 0<x<-\frac{1}{a}$，令 $f'(x)<0\Rightarrow x>-\frac{1}{a}$，（3 分）

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,-\frac{1}{a})$，单调递减区间为 $(-\frac{1}{a},+\infty)$．（4 分）

（2）$g(x)=2(x+1)+x-1+axlnx=3x+1+axlnx(x>0)$．

方法一：直接求导 $g'(x)=3+a(lnx+1)=alnx+3+a$，令 $g'(x)=0\Rightarrow x=e^{\frac{-(3+a)}{a}}$，（5 分）

$\because a>0$，令 $g'(x)>0\Rightarrow x>e^{\frac{-(3+a)}{a}}$，令 $g'(x)<0\Rightarrow 0<x<e^{\frac{-(3+a)}{a}}$，$\therefore g\left(x\right)$在$\left(0,e^{\frac{-(3+a)}{a}}\right)\downarrow,\left(e^{\frac{-(3+a)}{a}},+\infty\right)\uparrow$，（6 分）

$\therefore g(x)\geqslant g(e^{\frac{-(3+a)}{a}})$，$g(e^{\frac{-(3+a)}{a}})=3\cdot e^{\frac{-(3+a)}{a}}+1+a\cdot e^{\frac{-(3+a)}{a}}\cdot\frac{-(3+a)}{a}$，（7 分）

令 $\frac{-\left(3+a\right)}{a}=t\left(t\leqslant -4\right)$,则$g\left(t\right)=3\cdot e^t+1+\frac{-3t}{t+1}\cdot e^t\left(t\leqslant -4\right)$，（8 分）

下面证明 $3\cdot e^t+1+\frac{-3t}{t+1}\cdot e^t>0$，即证 $1+\frac{3e^t}{t+1}>0$，令 $h(t)=1+\frac{3e^t}{t+1},(t\leqslant -4)$，（9 分）

则 $h'(t)=\frac{3te^t}{(t+1)^2}<0$，$\therefore h(t)$ 在 $(-\infty,-4)$ 递减，$\therefore h(t)\geqslant h(-4)=1-\frac{1}{e^4}>0$，$\therefore 1+\frac{3e^t}{t+1}>0$，（11 分）

$\therefore$ 当 $0<a\leqslant 1$ 时，$g(x)>0$ 恒成立．（12 分）

方法二：$g(x)=3x+1+axlnx=x(3+\frac{1}{x}+alnx),(x>0)$，要证 $g(x)>0$，只需证 $3+\frac{1}{x}+alnx>0$，（5 分）

令 $h\left(x\right)=3+\frac{1}{x}+alnx$, 则 $h'\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{ax-1}{x^2}$，（6 分）

令 $h'(x)>0\Rightarrow x>\frac{1}{a}, h'(x)<0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{a}$，（7 分）

$h\left(x\right)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)\downarrow,\left(\frac{1}{a},+\infty\right)\uparrow$，$\therefore h(x)\geqslant h(\frac{1}{a}), h(\frac{1}{a})=3+a-alna$，（8 分）

证明方式1:$\because h(x)_{min}=h(\frac{1}{a})=3+a-alna$，$\because a\in(0，1]$，$\therefore lna\leqslant 0$，（9 分）

$\therefore -alna\geqslant 0$，（10 分），$\therefore 3+a-alna>0$，（11 分）

$\therefore$当 $0<a\leqslant 1$时，$g(x)>0$ 恒成立.（12 分）

证明方式 2:$\because h(\frac{1}{a})=3+a-alna=a(\frac{3}{a}+1-lna)$ 下面只需证明 $\frac{3}{a}+1-lna>0$

令 $r\left(a\right)=\frac{3}{a}+1-lna,(0<a\leqslant 1)$, 则 $r'\left(a\right)=-\frac{3}{a^2}-\frac{1}{a}<0$，

$\therefore r$（a）在 $(0,1)$ 递减，（10 分）

$\therefore r$（a）$\geqslant r$（1）$=4>0$，$\therefore \frac{3}{a}+1-lna>0$，（11 分）

$\therefore$当 $0<a\leqslant 1$时，$g(x)>0$ 恒成立.（12 分）

8．解：$(I)(i)$ 当 $k=6$ 时，$f(x)=x^3+6lnx$，故 $f'(x)=3x^2+\frac{6}{x}$，$\therefore f'$（1）$=9$，

$\because f$（1）$=1$，$\therefore$曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1$，f（1）$)$ 处的切线方程为 $y-1=9(x-1)$，即 $9x-y-8=0$.

$(ii)g(x)=f(x)-f'(x)+\frac{9}{x}=x^3+6lnx-3x^2+\frac{3}{x}$，$x>0$，$\therefore g'(x)=3x^2-6x+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2}$，

令 $g'(x)=0$，解得 $x=1$，

当 $0<x<1$，$g'(x)<0$，

当 $x>1$，$g'(x)>0$，

$\therefore$函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$x=1$是极小值点，极小值为 g（1）$=1$，无极大值

（Ⅱ）证明：由 $f(x)=x^3+klnx$，则 $f'(x)=3x^2+\frac{k}{x}$，

对任意的 x_1，$x_2\in[1，+\infty)$，且 $x_1>x_2$，令 $\frac{x_1}{x_2}=t$，$t>1$，

则 $(x_1-x_2)[f'(x_1)+f'(x_2)]-2[f(x_1)-f(x_2)]=(x_1-x_2)(3x_1^2+\frac{k}{x_1}+3x_2^2+\frac{k}{x_2})-2(x_1^3-x_2^3+kln\frac{x_1}{x_2})$，

$=x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+k(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1})-2kln\frac{x_1}{x_2}=x_2^3(t^3-3t^2+3t-1)+k(t-\frac{1}{t}-2lnt)$，①

令 $h(x)=x-\frac{1}{x}-2lnx$，$x>1$，当 $x>1$时，$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=(1-\frac{1}{x})^2>0$，$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore$当 $t>1$，$h(t)>h$（1）$=0$，即 $t-\frac{1}{t}-2lnt>0$，$\because x_2\geqslant 1$，$t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3>0$，$k\geqslant -3$，

$\therefore x_2^3(t^3-3t^2+3t-1)+k(t-\frac{1}{t}-2lnt)\geqslant t^3-3t^2+3t-1-3(t-\frac{1}{t}-2lnt)=t^3-3t^2+6lnt+\frac{3}{t}-1$，②，

由（Ⅰ）(ii) 可知当 $t\geqslant 1$ 时，$g(t)>g$（1）

即 $t^3-3t^2+6lnt+\frac{3}{t}>1$，③，

由①②③可得 $(x_1-x_2)[f'(x_1)+f'(x_2)]-2[f(x_1)-f(x_2)]>0$，

$\therefore$ 当 $k\geqslant -3$ 时，对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有 $\dfrac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

双变量不等式方法 2——消元法

1．解：（Ⅰ）$\because f(x)=-lnx-ax^2+x+1$，$\therefore f'(x)=-\dfrac{2ax^2-x+1}{x}$，令 $g(x)=2ax^2-x+1(x>0)$ 则 $\triangle=1-8a$

$\because a>0$，$\therefore$ 对称轴 $x=\dfrac{1}{4a}>0$

①当 $a\geqslant\dfrac{1}{8}$ 时，$\triangle\leqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$，$\therefore f'(x)\leqslant 0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

②当 $0<a<\dfrac{1}{8}$ 时，$\triangle>0$，方程 $2ax^2-x+1=0$ 有两个不相等的正根 x_1，x_2

不妨设 $x_1<x_2$，则当 $x\in(0,x_1)\bigcup(x_2+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x\in(x_1,x_2))$ 时，$f'(x)>0$，这时 $f(x)$ 不是单调函数.

综上，a 的取值范围是 $a\geqslant\dfrac{1}{8}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $a\in(0,\dfrac{1}{8})$，$f(x)$ 有极小值点 x_1 和极大值 x_2，且 $x_1+x_2=\dfrac{1}{2a}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{2a}$，

$f(x_1)+f(x_2)=-lnx_1-ax_1^2+x_1-lnx_2-ax_2^2+x_2+2=-(lnx_1+lnx_2)-\dfrac{1}{2}(x_1-1)-\dfrac{1}{2}(x_2-1)+(x_1+x_2)+2$

$=-ln(x_1x_2)+\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)+3=ln(2a)+\dfrac{1}{4a}+3$，令 $g(a)=ln(2a)+\dfrac{1}{4a}+3,a\in(0,\dfrac{1}{8}]$，

则当 $a\in(0,\dfrac{1}{8})$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{4a-1}{4a^2}<0$，$\therefore g$（a）在 $(0,\dfrac{1}{8})$ 单调递减，所以 $g(a)>g(\dfrac{1}{8})=5-2ln2$，

故 $f(x_1)+f(x_2)>5-2ln2$.

2．解：(1) $a=1,f(1)=-\dfrac{1}{2}$，函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+alnx(a>0)$，可得 $f'(x)=x-1+\dfrac{1}{x}$，

$\therefore f'$（1）$=1$，$\therefore$ 切线方程为 $2x-2y-3=0$；

(2) $f'(x)=x-1+\dfrac{a}{x}$ 依题意有 $f'(x)\geqslant 0$ 或 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $a\leqslant -x^2+x$ 或 $a\geqslant -x^2+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

显然 $a\leqslant -x^2+x$ 不可能恒成立，$\therefore a\geqslant -x^2+x$，解得 $a\geqslant\dfrac{1}{4}$；

(3) 由 $f'(x)=x-1+\dfrac{a}{x}$，$f'(x)=0$ 得 $x^2-x+a=0$，即 x_1，x_2 是 $f'(x)=0$ 的两根，$\therefore x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=a$，

$f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{1}{2}x_1^2-x_1+alnx_1+\dfrac{1}{2}x_2^2-x_2+alnx_2=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)-x_1x_2+alnx_1x_2=\dfrac{1}{2}-1-a+alna=-\dfrac{1}{2}-a+alna$，

由已知 $a<\dfrac{1}{4}$，$\therefore -a>-\dfrac{1}{4}lna>ln\dfrac{1}{4}=-2ln2$，$\therefore alna>-2aln2>-\dfrac{ln2}{2}$，$\therefore f(x_1)+f(x_2)>-\dfrac{3+2ln2}{4}$.

3．解：(1) $f'(x)=-\dfrac{2x^2-ax+1}{x}(x>0,a>0)$，设 $g(x)=2x^2-ax+1$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量问题答案 7

①$\triangle = a^2-8\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，$g(x)\geqslant 0$ 恒成立，$\therefore f'(x)\leqslant 0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数；

②$\triangle>0$，即 $a>2\sqrt{2}$ 时，$g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两相异实根，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是单调函数，不合题意，

综上，$0<a\leqslant 2\sqrt{2}$；

（2）由（1）知，x_1，x_2 为 $2x^2-ax+1=0$ 的两根，$x_1+x_2=\dfrac{a}{2}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x_1)+f(x_2)=ln\dfrac{1}{a^4x_1}-x_1^2+ax_1+ln\dfrac{1}{a^4x_2}-x_2^2+ax_2=ln2-8lna+\dfrac{a^2}{4}+1$.

设 h（a）$=ln2-8lna+\dfrac{a^2}{4}+1$，则 h'（a）$=\dfrac{(a+4)(a-4)}{2a}$，

$\therefore h$（a）在 $(2\sqrt{2}$，$4)$ 上单调递减，在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h$（a）$_{min}=h$（4）$=5-15ln2$，$\therefore f(x_1)+f(x_2)$ 的最小值为 $5-15ln2$.

4．解：（1）$\because f(x)=2lnx+\dfrac{1}{2}x^2-ax(x>0)$，$\therefore f'(x)=\dfrac{2}{x}+x-a=\dfrac{x^2-ax+2}{x}$，

设 $g(x)=x^2-ax+2$，$x\in(0,+\infty)$，

$\because f(x)$ 是定义域上的单调函数，函数 $g(x)$ 的图象为开口向上的抛物线，

$\therefore f'(x)\geqslant 0$ 在定义域上恒成立，即 $g(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

又二次函数图象的对称轴为 $x=\dfrac{a}{2}$，且图象过定点 $(0,2)$，

$\therefore \dfrac{a}{2}\leqslant 0$ 或 $\begin{cases}\dfrac{a}{2}>0\\ a^2-8\leqslant 0\end{cases}$，解得：$a\leqslant 2\sqrt{2}$．$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-\infty$，$2\sqrt{2}]$；

（2）由（1）知 $f(x)$ 的两个极值点 x_1，x_2 满足 $x^2-ax+2=0$，所以 $x_1\bullet x_2=2$，$x_1+x_2=a$，

不妨设 $0<x_1<\sqrt{2}<x_2$，则 $f(x)$ 在 $(x_1$，$x_2)$ 上是减函数，$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|=f(x_1)-f(x_2)=2lnx_1+\dfrac{1}{2}{x_1}^2-ax_1-(2lnx_2+\dfrac{1}{2}{x_2}^2-ax_2)$

$=\dfrac{1}{2}({x_1}^2-{x_2}^2)-(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{2}({x_2}^2-{x_1}^2)+2ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{2}{x_2}^2-\dfrac{2}{{x_2}^2}-2ln{x_2}^2+2ln2$，

令 $t={x_2}^2$，则 $t>2$，又 $|x_1-x_2|=x_2-\dfrac{2}{x_2}\leqslant 1$，即 ${x_2}^2-x_2-2\leqslant 0$，解得 $\sqrt{2}<x_2\leqslant 2$，$\therefore 2<t={x_2}^2\leqslant 4$.

设 $h(t)=\frac{1}{2}t-\frac{2}{t}-2lnt+2ln2(2<t\leqslant 4)$，则 $h'(t)=\frac{(t-2)^2}{2t^2}>0$，$\therefore h(t)$ 在 $(2，4]$ 上单调递增，

$\because h$（2）$=0$，h（4）$=\frac{3}{2}-2ln2$，$\therefore h(t)\in(0，\frac{3}{2}-2ln2]$，即 $|f(x_1)-f(x_2)|\in(0，\frac{3}{2}-2ln2]$，

所以 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 的取值范围为 $)(0，\frac{3}{2}-2ln2]$．

5．解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$，求导：$f'(x)=2x-\frac{a}{1-x}=\frac{-2x^2+2x-a}{1-x}$，$x<1$，

令 $g(x)=-2x^2+2x-a$，则△$=4-4(-2)(-a)=4-8a$，

当 $4-8a\leqslant 0$ 时，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$，则 $-2x^2+2x-a\leqslant 0$ 恒成立，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调减函数，

当 $4-8a>0$ 时，即 $a<\frac{1}{2}$，则 $-2x^2+2x-a=0$ 的两个根为 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$，

当 $x\in(-\infty,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_1，1)$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，不符合题意，

综上可知：函数 $f(x)$ 为定义域上的单调函数，则实数 a 的取值范围 $[\frac{1}{2}，+\infty)$；

（Ⅱ）证明：由函数有两个极值点，则 $f'(x)=0$，在 $x<1$ 上有两个不等的实根，

即 $-2x^2+2x-a=0$，在 $x<1$ 有两个不等式的实根，x_1，x_2，

由 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=\frac{a}{2}\end{cases}$，且 $x_1\in(0,\frac{1}{2})$，$x_2\in(\frac{1}{2}，1)$，

则 $\frac{f(x_1)}{x_2}=\frac{x_1^2-1+aln(1-x_1)}{x_2}=\frac{(x_1-1)(x_2+1)+2x_1x_2ln(1-x_1)}{x_2}=-(1+x_1)+2x_1ln(1-x_1)$，

同理可得：$\frac{f(x_2)}{x_1}=-(1+x_2)+2x_2ln(1-x_2)$，

则 $\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}=(x_2-x_1)+2x_1ln(1-x_1)-2x_2ln(1-x_2)=2x_2-1+2(1-x_2)lnx_2-2x_2ln(1-x_2)$，

令 $g(x)=2x-1+2(1-x)lnx-2xln(1-x)$，$x\in(\frac{1}{2}，1)$，

求导，$g'(x)=-2ln[x(1-x)]+\frac{2}{x}+\frac{2x}{1-x}$，$x\in(\frac{1}{2}，1)$，

由 $x\in(\frac{1}{2}，1)$，则 $\frac{2}{x}+\frac{2x}{1-x}>0$，则 $g'(x)>0$，

则 $g(x)$ 在 $x\in(\frac{1}{2}，1)$，上单调递增，则 $g(x)>g(\frac{1}{2})=0$，则 $\frac{f(x_1)}{x_2}-\frac{f(x_2)}{x_1}>0$，$\therefore\frac{f(x_1)}{x_2}>\frac{f(x_2)}{x_1}$ 成立．

6．（1）解：$g(x)=lnx+\frac{a}{x}-1$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}$

$g(x)$ 在点 $(2，g$（2））处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 平行，$\therefore g'(2)=\frac{1}{2}-\frac{a}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=4$

（2）证：由 $h(x)=lnx-\dfrac{b(x-1)}{x+1}$ 得： $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{b(x+1)-b(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2(1-b)x+1}{x(x+1)^2}$

$\because h(x)$ 在定义域上是增函数，$\therefore h'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立 $\therefore x^2+2(1-b)x+1>0$，即 $b<\dfrac{x^2+2x+1}{2x}$ 恒成立（6 分）

$\because \dfrac{x^2+2x+1}{2x}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x}+1\geqslant 2\sqrt{\dfrac{x}{2}\bullet\dfrac{1}{2x}}+1=2$ 当且仅当 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2x},x=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立

$\therefore b\leqslant 2$，即 b 的取值范围是 $(-\infty，2]$（8 分）

（3）证：不妨设 $m>n>0$，则 $\dfrac{m}{n}>1$ 要证 $\dfrac{m-n}{m+n}<|\dfrac{lnm-lnn}{2}|$，即证 $\dfrac{m-n}{m+n}<\dfrac{lnm-lnn}{2}$，即 $\dfrac{2(\frac{m}{n}-1)}{\frac{m}{n}+1}<ln\dfrac{m}{n}$（10 分）

设 $h(x)=lnx-\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$ 由（2）知 $h\ (x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，$\therefore h\ (x)>h$ （1）$=0$

故 $ln\dfrac{m}{n}-\dfrac{2(\frac{m}{n}-1)}{\frac{m}{n}+1}>0$，$\therefore \dfrac{m-n}{m+n}<|\dfrac{lnm-lnn}{2}|$ 成立（12 分）

双变量单调问题

1.解：（Ⅰ） $f'(x)=xe^x-ax$．假设函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴相切于点 $(t,0)$，

则有 $\begin{cases}f(t)=0\\f'(t)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}(t-1)e^t-\dfrac{a}{2}t^2=0\\te^t-at=0\end{cases}$．显然 $t\neq 0$，$e^t=a>0$，代入方程 $(t-1)e^t-\dfrac{a}{2}t^2=0$ 中得，$t^2-2t+2=0$．

$\because \triangle=-4<0$，$\therefore$ 方程 $t^2-2t+2=0$ 无解．故无论 a 取何值，函数 $f(x)$ 的图象都不能与 x 轴相切；

（Ⅱ）依题意，$f(x_1+x_2)-f(x_1-x_2)>(x_1-x_2)-(x_1+x_2)\Leftrightarrow f(x_1+x_2)+(x_1+x_2)>f(x_1-x_2)+(x_1-x_2)$ 恒成立．

设 $g(x)=f(x)+x$，则上式等价于 $g(x_1+x_2)>g(x_1-x_2)$，

要使 $g(x_1+x_2)>g(x_1-x_2)$ 对任意 $x_1\in R$，$x_2\in(0,+\infty)$ 恒成立，即使 $g(x)=(x-1)e^x-\dfrac{a}{2}x^2+x$ 在 R 上单调递增，

$\therefore g'(x)=xe^x-ax+1\geqslant 0$ 在 R 上恒成立．

$\because g'$ （1）$=e-a+1\geqslant 0$，则 $a\leqslant e+1$，$\therefore g'(x)\geqslant 0$ 在 R 上成立的必要条件是：$a\leqslant e+1$．

下面证明：当 $a=3$ 时，$xe^x-3x+1\geqslant 0$ 恒成立．设 $h(x)=e^x-x-1$，则 $h'(x)=e^x-1$，

当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)_{min}=0$，即 $\forall x\in R$，$e^x\geqslant x+1$．

那么，当 $x\geqslant 0$ 时，$xe^x\geqslant x^2+x$，$xe^x-3x+1\geqslant x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$；

当 $x<0$ 时，$e^x<1$，$xe^x-3x+1=x(e^x-3+\dfrac{1}{x})>0$，$\therefore xe^x-3x+1\geqslant 0$ 恒成立．

因此，a 的最大整数值为 3．

2．（1） $g(x)=x-alnx$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ， $g'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$ ，

(i) 若 $a\leqslant0$ ，则 $g'(x)\geqslant0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

(ii) 若 $a>0$ ，当 $x\in(0,a)$ 时， $g'(x)<0$ ；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时， $g'(x)>0$ ．所以 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增；

证明：（2）因为 $f(x)$ 存在两个极值点且 $a>2$ ， $f'(x)=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$ ，

所以 $f(x)$ 的两个极值点 x_1 ， x_2 满足 $x^2-ax+1=0$ ，所以 $x_1x_2=1$ ，不妨设 $x_1<x_2$ ，则 $x_2>1$ ，

则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2lnx_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$ ，

要证 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ ，只需证 $\frac{1}{x_2}-x_2+2lnx_2<0$ ，

设 $h(x)=\frac{1}{x}-x+2lnx(x>1)$ ，则 $h'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$ ，

知 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，又 h （1） $=0$ ，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h(x)<0$ ，故 $\frac{1}{x_2}-x_2+2lnx_2<0$ ，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ ，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>(a-2)(x_1-x_2)$ ．

3．解：（Ⅰ） $f(x)$ 的定义域为 $(0，+\infty)$． $f'(x)=\frac{a+1}{x}+2ax=\frac{2ax^2+a+1}{x}$ ．

当 $a\geqslant0$ 时， $f'(x)>0$ ，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $a\leqslant-1$ 时， $f'(x)<0$ ，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；

当 $-1<a<0$ 时，令 $f'(x)=0$ ，解得 $x=\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}$ ．

则当 $x\in(0,\sqrt{-\frac{a+1}{2a}})$ 时， $f'(x)>0$ ； $x\in(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}},+\infty)$ 时， $f'(x)<0$ ．

故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-\frac{a+1}{2a}})$ 单调递增，在 $(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}},+\infty)$ 单调递减.

（Ⅱ）不妨假设 $x_1\geqslant x_2$ ，而 $a<-1$ ，由（Ⅰ）知在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

从而 $\forall x_1$ ， $x_2\in(0,+\infty)$ ， $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant4|x_1-x_2|$

等价于 $\forall x_1$ ， $x_2\in(0,+\infty)$ ， $f(x_2)+4x_2\geqslant f(x_1)+4x_1$ ①

令 $g(x)=f(x)+4x$ ，则 $g'(x)=\frac{a+1}{x}+2ax+4$

①等价于 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，即 $\frac{a+1}{x}+2ax+4\leqslant0$ ．

从而 $a\leqslant\frac{-4x-1}{2x^2+1}=\frac{(2x-1)^2-4x^2-2}{2x^2+1}=\frac{(2x-1)^2}{2x^2+1}-2$

故 a 的取值范围为 $(-\infty，-2]$ ．（12 分）

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量问题答案 8

4．解：（1）当 $m=e$ 时， $f(x)=2lnx+\frac{e}{x}$ ， $f'(x)=\frac{2x-e}{x^2}$ ，

当 $x<\frac{e}{2}$ 时， $f'(x)<0$ ； $x=\frac{e}{2}$ 时， $f'(x)=0$ ；当 $x>\frac{e}{2}$ 时， $f'(x)>0$.

所以， $x=\frac{e}{2}$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $f(\frac{e}{2})=2ln\frac{e}{2}+2=4-2ln2$.

（2） $g(x)=f(x)-x=2lnx+\frac{m}{x}-x(x>0)$ ， $g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{m}{x^2}-1=\frac{-x^2+2x-m}{x^2}=\frac{-(x-1)^2+1-m}{x^2}$ ，

$1m\geqslant12$ 时， $g'(x)\leqslant03$ ， $g(x)=f(x)-x4$ 在 $(0,+\infty)5$ 单调递减.

（3）证明： $0<m<1$ 时， $1-m>0$ ， $1-\sqrt{1-m}>0$ ， $g'(x)=\frac{-(x-1+\sqrt{1-m})(x-1-\sqrt{1-m})}{x^2}$ ，

当 $0<x<1-\sqrt{1-m}$ 时， $g'(x)<0$ ；当 $1-\sqrt{1-m}\leqslant x<1+\sqrt{1-m}$ 时， $g'(x)\geqslant0$ ；

当 $x\geqslant1+\sqrt{1-m}$ 时， $g'(x)\leqslant0$.

即 $0<m<1$ 时， $g(x)=f(x)-x$ 在 $(0,1-\sqrt{1-m})$ 和 $[1+\sqrt{1-m},+\infty)$ 上单调递减，

在 $[1-\sqrt{1-m},1+\sqrt{1-m})$ 上单调递增.

由（2）知，当 $m\geqslant1$ 时， $g(x)=f(x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以，当 $m\geqslant1$ 时，对任意 $b>a>0$ ， f （b） $-b<f$ （a） $-a$ ，

即对任意 $b>a>0$ ， $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$.

5．【解答】解：（1）由题意知， $f'(x)=2\bullet\frac{x^2-ax+a+1}{x}(x>0)$ ，

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点，所以 $\frac{x^2-ax+a+1}{x}=0$ 有两个不等的正根，

即 $x^2-ax+a+1=0$ 有两个不等的正根，

所以 $\begin{cases}a^2-4(a+1)>0\\a>0\\a+1>0\end{cases}$ ，解得 $a>2+2\sqrt{2}$ ，所以 a 的取值范围是 $(2+2\sqrt{2}$ ， $+\infty)$.（6 分）

（2）证明：构造函数 $g(x)=f(x)-2x=x^2-2ax+2(a+1)ln\quad x-2x$ ，

则 $g'(x)=2x-2(a+1)+2\bullet\frac{a+1}{x}\geqslant4\sqrt{x\bullet\frac{a+1}{x}}-2(a+1)=4\sqrt{a+1}-2(a+1)=2\sqrt{a+1}(2-\sqrt{a+1})$.

由于 $-1<a<3$ ， $0<\sqrt{a+1}<2$ ，故 $g'(x)>0$ ，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

从而当 $0<x_2<x_1$ 时，有 $g(x_1)-g(x_2)>0$ ，

即 $f(x_1)-f(x_2)-2x_1+2x_2>0$，故 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$；

当 $0<x_1<x_2$ 时，同理可证 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$．

综上，对于任意的 x_1， $x_2\in(0,+\infty)$， $x_1\neq x_2$，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$…（12 分）

6．【解答】（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）当 $a=2$ 时， $f(x)=3lnx+2x^2+1$， $f'(x)=\dfrac{3}{x}+4x$．

$\therefore f$ （1）$=3$， f' （1）$=7$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $(1$， f （1）$)$ 处的切线方程为 $y=7x-4$．

（Ⅱ）$\because a\leqslant -2$， $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\dfrac{a+1}{x}+2ax=\dfrac{2ax^2+a+1}{x}<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．

不妨假设 $x_1\geqslant x_2$，那么 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$ 等价于 $f(x_2)-f(x_1)\geqslant 4x_1-4x_2$，

即 $f(x_2)+4x_2\geqslant f(x_1)+4x_1$．

令 $g(x)=f(x)+4x$，则 $g'(x)=\dfrac{a+1}{x}+2ax+4=\dfrac{2ax^2+4x+a+1}{x}$．

$\because a\leqslant -2$， $x>0$， $\therefore g'(x)\leqslant\dfrac{-4x^2+4x-1}{x}=\dfrac{-(2x-1)^2}{x}\leqslant 0$．

从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调减少，故 $g(x_1)\leqslant g(x_2)$，即 $f(x_1)+4x_1\leqslant f(x_2)+4x_2$，

故对任意 x_1， $x_2\in(0,+\infty)$， $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$．

7．【解答】解（1）由题意得 $f'(x)=\dfrac{-2-2a+4lnx}{x^3}$， $(x>0)$，

点 $(1$， f （1）$)$ 处的切线与直线 $y=-4x+1$ 平行．又 f' （1）$=-4$，即 $\dfrac{-2-2a}{1}=-4$，解得 $a=1$．

令 $f'(x)=\dfrac{-2-2a+4lnx}{x^3}=\dfrac{-4+4lnx}{x^3}=0$，解得： $x=e$，

当 $f'(x)>0$，解得： $x>e$，函数 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，

当 $f'(x)<0$，解得： $0<x<e$，函数 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)$ 在 $x=e$ 时取极小值，极小值为 $f(e)=-\dfrac{1}{e^2}$．（6 分）

（2）由 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}\right|>\dfrac{k}{x_1^2\bullet x_2^2}$，可得 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}}\right|>k$，

令 $g(\dfrac{1}{x^2})=f(x)$，则 $g(x)=x+xlnx$，其中， $x\in[e^2$， $+\infty)g'(x)=2+lnx$，

又 $x\in[e^{2}$，$+\infty)$，则 $g'(x)=2+lnx\geqslant4$，即 $|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}}|>4$，

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $(-\infty$，$4]$.（12 分）

8．解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

当 $b=2$ 时，$f(x)=alnx+x^{2}(a\neq0)$．$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2x=\dfrac{2x^{2}+a}{x}$，

①当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

$x\to0$ 时，$f(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，此时函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，$x=\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$，或 $x=-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$（舍去），

$x\in(0,\sqrt{-\dfrac{a}{2}})$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$，$+\infty)$ 时，$f'(x)>0$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-\dfrac{a}{2}})$ 单调递减，在 $(\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$，$+\infty)$ 单调递增；

要使函数 $f(x)$ 恰有一个零点，则 $f(\sqrt{-\dfrac{a}{2}})=aln\sqrt{-\dfrac{a}{2}}-\dfrac{a}{2}=0$，解得 $a=-2e$

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为：$\{a\,|\,a=-2e$，或 $a>0\}$

（2）$\because$ 对任意 x_1，$x_2\in[\dfrac{1}{e}$，$e]$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant e-2$ 成立，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant f(x)_{max}-f(x)_{min}$，

$\therefore f(x)_{max}-f(x)_{min}\leqslant e-2$ 成立

$\because a+b=0$，$b>0$ 时，$f(x)=-blnx+x^{b}$．$f'(x)=\dfrac{b(x^{b}-1)}{x}$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{e},1]$ 单调递减，在 $[1$，$e]$ 单调递增，

$f(x)_{min}=f$（1）$=1$，$f(\dfrac{1}{e})=b+e^{-b}$，f（e）$=-b+e^{b}$，

设 $g(b)=f(e)-f\left(\dfrac{1}{e}\right)=e^{b}-e^{-b}-2b,(b>0)$，$g'(b)=e^{b}+e^{-b}-2>2\sqrt{e^{b}\cdot e^{-b}}-2=0$.

$\therefore g$（b）在 $(0,+\infty)$ 递增，$\therefore g$（b）$>g(0)=0$，$\therefore$ $f(e)>f(\dfrac{1}{e})$.

可得 $f(x)_{max}=f(e)=-b+e^{b}$，$\therefore -b+e^{b}-1\leqslant e-2$，即 $e^{b}-b-e+1\leqslant0$，

设 φ（b）$=e^{b}-b-e+1$，$(b>0)$，φ'（b）$=e^{b}-1>0$ 在 $b\in(0,+\infty)$ 恒成立.

$\therefore\varphi$（b）在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 φ（1）$=0$，$\therefore$ 不等式 $e^{b}-b-e+1\leqslant0$ 的解集为 $(0$，$1]$.

$\therefore$ 实数 b 的取值范围为 $(0$，$1]$

双参数问题

1． 解：令 $y=ln(x+1)-ax-b-1$，则 $y'=\dfrac{1}{1+x}-a$，

若 $a\leqslant 0$，则 $y'>0$ 恒成立，$x>-1$ 时函数递增，无最值．

若 $a>0$，由 $y'=0$ 得：$x=\dfrac{1-a}{a}$，

当 $-1<x<\dfrac{1-a}{a}$ 时，$y'>0$，函数递增；

当 $x>\dfrac{1-a}{a}$ 时，$y'<0$，函数递减．则 $x=\dfrac{1-a}{a}$ 处取得极大值，也为最大值 $-lna+a-b-2$，

$\therefore -lna+a-b-2\leqslant 0$，$\therefore b\geqslant -lna+a-2$，

$\therefore \dfrac{b}{a}\geqslant\dfrac{-lna+a-2}{a}$，令 $t=\dfrac{-lna+a-2}{a}$，$\therefore t'=\dfrac{lna+1}{a^2}$，$\therefore (0,e^{-1})$ 上，$t'<0$，$(e^{-1}$，$+\infty)$ 上，$t'>0$，

$\therefore a=e^{-1}$，$t_{min}=1-e$．$\therefore \dfrac{b}{a}$ 的最小值为 $1-e$．

2．解：由于 $lnx+(2e-a-1)x+b+1\leqslant 0\Leftrightarrow lnx+2ex-1\leqslant(a+1)x-(b+2)$．
此不等式对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则需要保证 $a+1>0$．

令 $x=\dfrac{1}{e}$，则 $ln\dfrac{1}{e}+2-1\leqslant(a+1)\dfrac{1}{e}-b-2$ 从而 $(a+1)\dfrac{1}{e}\geqslant b+2$，从而 $\dfrac{b+2}{a+1}\leqslant\dfrac{1}{e}$．

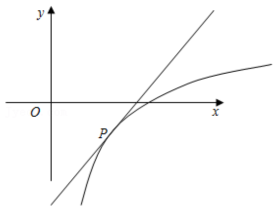
另一方面，当 $a=3e-1$，$b=1$ 时，$lnx+(2e-a-1)x+b+1\leqslant 0$ 即为 $lnx-ex+2\leqslant 0$，

设 $f(x)=lnx-ex+2(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-e=\dfrac{1-ex}{x}\geqslant 0$ 得 $0<x\leqslant\dfrac{1}{e}$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{e}]$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 上单调递减，从而 $f(x)\leqslant f(\dfrac{1}{e})=0$，

即 $a=3e-1$，$b=1$ 可使不等式恒成立，从而 $\dfrac{b+2}{a+1}$ 可取 $\dfrac{1}{e}$．

综合上述，当 $\dfrac{b+2}{a+1}$ 取最大值 $\dfrac{1}{e}$ 时，$a=3e-1$．



3．由题意可知，$f(x)\leqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，等价于 $lnx-\dfrac{e}{x}\leqslant 2m(x-\dfrac{n}{2m})$，

如图，$y=lnx-\dfrac{e}{x}$ 与 x 轴交于点 $(e,0)$，直线 $y=2m(x-\dfrac{n}{2m})$ 在曲线 $y=lnx-\dfrac{e}{x}$ 上方，

则直线 $y=2m(x-\dfrac{n}{2m})$ 与 x 轴交点小于等于 e，

即 $\dfrac{n}{2m}\leqslant e$，所以 $\dfrac{n}{m}\leqslant 2e$，$\dfrac{n}{m}$ 的最大值为 $2e$，

4．解：由题意可得 $lnx+a-ax-b-1\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，即 $ax-lnx+b+1-a\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=ax-lnx+b+1-a$，$x\in(0,+\infty)$，$h'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

$i)$ 当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(x)\leqslant 0$ 恒成立，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，
且 $x\to+\infty$，$h(x)\to-\infty$，不符合题意，

$ii)$ 当 $a>0$ 时，令 $h'(x)=0$，可得 $x=\dfrac{1}{a}$，可得 $h(x)_{min}=h(\dfrac{1}{a})=lna-a+2+b\geqslant 0$，

可得 $b\geqslant a-lna-2$，所以 $\dfrac{b}{a}\geqslant 1-\dfrac{lna}{a}-\dfrac{2}{a}(a>0)$，

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量问题答案 9

令 G（a）$=1-\frac{lna}{a}-\frac{2}{a}$，$a>0$，则 G'（a）$=\frac{1+lna}{a^2}$，$a>0$，令 G'（a）$=0$，可得 $a=\frac{1}{e}$，

$a\in(0,\frac{1}{e})$，G'（a）<0，G（a）单调递减，

$a\in[\frac{1}{e},+\infty)$，$G'$（a）$>0$，$G$（a）单调递增，所以 $a\in(0,+\infty)$，G（a）$_{min}=G(\frac{1}{e})=1-e$，

5．解：（Ⅰ）函数 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f'(x)=e^x+x-1$，

$\because f'(x)=e^x+x-1$ 在 R 上递增，且 $f'(0)=0$，$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，故 $x=0$ 为极值点：$f(0)=1$

（Ⅱ）$g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+b$，$f(x)\geqslant g(x)$，即 $e^x-x+\frac{1}{2}x^2\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$，等价于 $h(x)=e^x-x(a+1)-b\geqslant 0$，

得：$h'(x)=e^x-(a+1)$

①当 $(a+1)<0$ 时，$h'(x)$ 在 R 上单调性递增，$x\in-\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$ 与 $h(x)\geqslant 0$ 相矛盾．
②当 $(a+1)>0$ 时，$h'(x)>0$，此时 $x>ln(a+1)$，$h'(x)<0$，此时 $x<ln(a+1)$，

当 $x=ln(a+1)$ 时，$h(x)$ 取得最小值为 $h(x)_{min}=(a+1)-(a+1)ln(a+1)-b$ 即 $(a+1)-(a+1)ln(a+1)\geqslant b$

那么：$b(a+1)\leqslant(a+1)^2-(a+1)^2ln(a+1)$

令 $F(x)=(a+1)x^2-x^2lnx$，$(x>0)$，则 $F'(x)=x(1-2lnx)$ $\therefore F'(x)>0$，可得 $0<x<\sqrt{e}$，

$F'(x)<0$，可得 $x>\sqrt{e}$．当 $x=\sqrt{e}$ 时，$F(x)$ 取得最大值为 $\frac{e}{2}$．即当 $a=\sqrt{e}-1$，$b=\frac{\sqrt{e}}{2}$ 时，$b(a+1)$ 取得最大值为 $\frac{e}{2}$．

故得 $b(a+1)$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$．

6．解：（1）$f'(x)=e^x-1+x$，$f''(x)=e^x+1>0$，$\therefore f'(x)$ 单调递增，又 $f'(0)=0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

要证 $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1<0$，$x_2>0$，下证 $x_2<-x_1$，即证 $f(x_1)=f(x_2)<f(-x_1)$，

构造函数 $h(x)=f(x)-f(-x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2-(e^{-x}+x+\frac{1}{2}x^2)=e^x-e^{-x}-2x(x<0)$，

$h'(x)=e^x+e^{-x}-2$，$h''(x)=e^x-e^{-x}(x<0)<0$，

即 $h'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，而 $h'(0)=0$，$\therefore h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 为单调递增，
$\because h(0)=0$，$\therefore h(x)<0$，$(x\in(-\infty,0))$，$\therefore$ 原命题成立．

（2）$\because$ $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$，$\therefore e^x-x\geqslant ax+b$ 恒成立，令 $G(x)=e^x-x-ax$，则 $G'(x)=e^x-1-a$，
①当 $a<-1$ 时，$G(x)$ 在 R 上单调递增，且 $x\to-\infty$ 时，$G(x)\to-\infty$，不符合题意，
②当 $a=-1$ 时，$ab+b=0$，
③当 $a>-1$ 时，令 $G'(x)>0$，得 $x>ln(1+a)$，

$\therefore G(x)$ 在 $(ln(1+a)$ ， $+\infty)$ 单调递增，$(-\infty$ ， $ln(1+a))$ 单调递减， $\therefore b(a+1)\leqslant(1+a)^2-(1+a)^2ln(1+a)$ ，

令 $t=1+a>0$ ， $\varphi(t)=t^2-t^2lnt$ ， $\varphi'(t)=t(1-2lnt)$ ， $\therefore \varphi(t)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 递增， $(\sqrt{e},+\infty)$ 递减，

$\varphi(t)_{max}=\varphi(\sqrt{e})=\dfrac{e}{2}$.

7．解：（1） $f(x)=e^x-x+\dfrac{t}{2}x^2$ ， $f'(x)=e^x-1+tx$ ，所以 f'（1）$=e-1+t=e$ ，解得 $t=1$ ；

所以 $f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$ ， $f'(x)=e^x-1+x$ ，又 $f''(x)=e^x+1>1>0$ ，

故 $f'(x)=e^x-1+x$ 为 R 上的增函数，而 $f(0)=0$ ，

所以当 $x\geqslant0$ 时， $f'(x)\geqslant0$ ， $f(x)$ 在 $[0$ ， $+\infty)$ 上为增函数，

当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数，

所以 $x=0$ 时， $f(x)$ 取得极小值 1，无极大值.

（2） $f(x)\geqslant g(x)\Leftrightarrow e^x-(a+1)x-b\geqslant0$ ，令 $h(x)=e^x-(a+1)x-b$ ，则 $h'(x)=e^x-(a+1)$ ，

①当 $a+1\leqslant0$ 时， $h'(x)>0$ ，故 $y=h(x)$ 在 R 上递增，
$x\to-\infty$ 时， $h(x)\to-\infty$ 与 $h(x)\geqslant0$ 矛盾；
②当 $a+1>0$ 时，由 $h'(x)>0$ ，得： $x>ln(a+1)$ ，

由 $h'(x)<0$ ，得 $x<ln(a+1)$ ，故 $x=ln(a+1)$ 时， $h(x)_{min}=(a+1)-(a+1)ln(a+1)-b\geqslant0$ ，

即 $(a+1)-(a+1)ln(a+1)\geqslant b$ ， $\therefore (a+1)b\leqslant(a+1)^2-(a+1)^2ln(a+1)(a+1>0)$ ，

令 $F(x)=x^2-x^2lnx(x>0)$ ，则 $F'(x)=x(1-2lnx)$ ，

$\therefore F'(x)>0$ ，解得： $0<x<\sqrt{e}$ ， $F'(x)<0$ ，解得： $x>\sqrt{e}$ ， $x=\sqrt{e}$ 时， $F(x)_{max}=\dfrac{e}{2}$ ，

即当 $a=\sqrt{e}-1$ ， $b=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$ 时， $(a+1)b$ 的最大值为 $\dfrac{e}{2}$ ， $\therefore \dfrac{b(a+1)}{2}$ 的最大值为： $\dfrac{e}{4}$.

8．解：（1）由 $f'(x)=f'$（1）$e^{x-1}-f(0)+x$ ，令 $x=1$ ，得 f'（1）$=f'$（1）$-f(0)+1$ ，所以 $f(0)=1$ ；

令 $x=0$ ，得 $f(0)=f'$（1）e^{-1} ，所以 f'（1）$=e$. 所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$.

因为 $f'(x)=e^x-1+x$ 单调递增，且 $f'(0)=0$ ，所以当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$ ；当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$ ，单调递减区间为 $(-\infty,0)$.

（2） $f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}x^2+ax+b\Leftrightarrow h(x)=e^x-(a+1)x-b\geqslant0$ ， $h'(x)=e^x-(a+1)$

①当 $a+1\leqslant0$ 时， $h'(x)>0$ 恒成立，所以 $h(x)$ 在 R 上单调递增，当 $x\to-\infty$ 时， $h(x)\to-\infty$ ，与 $h(x)\geqslant0$ 矛盾.
②当 $a+1>0$ 时， $h(x)$ 在 $(-\infty$ ， $ln(a+1))$ 上递减，在 $(ln(a+1)$ ， $+\infty)$ 上递增，

所以 $h(x)_{min}=h(ln(a+1))=(a+1)-(a+1)ln(a+1)-b\geqslant0$ ，所以 $b\leqslant(a+1)-(a+1)ln(a+1)$ ，又 $a+1>0$ ，

所以 $(a+1)b\leqslant(a+1)^2-(a+1)^2ln(a+1)$，令 $F(x)=x^2-x^2lnx$，则 $F'(x)=x(1-2lnx)$

所以 $F(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上递增，$(\sqrt{e}$，$+\infty)$ 上递减，即 $F(x)_{max}=F(\sqrt{e})=\dfrac{e}{2}$.

所以当 $a=\sqrt{e}-1,b=\sqrt{e}$ 时，$(a+1)b$ 取到最大值，为 $\dfrac{e}{2}$.

9．解：（Ⅰ）函数的定义域是 R，$g'(x)=(2x+2)(x-a)$，
令 $g'(x)=0$，解得：$x=-1$ 或 $x=a$，
①$a<-1$ 时，令 $g'(x)>0$，解得：$x>-1$ 或 $x<a$，
令 $g'(x)<0$，解得：$a<x<-1$，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 递增，在 $(a,-1)$ 递减，在 $(-1,+\infty)$ 递增，
②$a=-1$ 时，$g'(x)\geqslant0$，$g(x)$ 在 R 递增，
③当 $a>-1$ 时，令 $g'(x)>0$，解得：$x>a$ 或 $x<-1$，
令 $g'(x)<0$，解得：$-1<x<a$ 故 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 递增，在 $(-1,a)$ 递减，在 $(a,+\infty)$ 递增；
（Ⅱ）$f(x)\leqslant g(x)\Leftrightarrow g(x)-f(x)\geqslant0$，设 $F(x)=g(x)-f(x)$，

则 $F'(x)=(2x+1)lnx+(x^2+x)\dfrac{1}{x}+2x^2+2(1-a)x-a=(2x+1)(lnx+x+1-a)$，

$\because x\in(0,+\infty)$，令 $F'(x)=0$，得 $lnx+x+1-a=0$，
设 $h(x)=lnx+x+1-a$，由于 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，
当 $x\to0$ 时，$h(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，

故存在唯一 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $a=x_0+lnx_0+1$，

当 $0<x<x_0$ 时，$F'(x)<0$，故 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，

当 $x>x_0$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $(x_0$，$+\infty)$ 递增，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$F(x)_{min}=F(x_0)=({x_0}^2+x_0)lnx_0+\dfrac{2}{3}{x_0}^3+(1-a){x_0}^2-ax_0+b$

$=({x_0}^2+x_0)lnx_0+\dfrac{2}{3}{x_0}^3+(-x_0-lnx_0){x_0}^2-(x_0+lnx_0+1)x_0+b=-\dfrac{1}{3}{x_0}^3-{x_0}^2-x_0+b$，

$\because f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，故 $F(x)_{min}=-\dfrac{1}{3}{x_0}^3-{x_0}^2-x_0+b\geqslant0$，即 $b\geqslant\dfrac{1}{3}{x_0}^3+{x_0}^2+x_0$，

故 $b-2a\geqslant\dfrac{1}{3}{x_0}^3+{x_0}^2+x_0-2a=\dfrac{1}{3}{x_0}^3+{x_0}^2-x_0-2lnx_0-2$，设 $h(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x-2lnx-2$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $h'(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+3x+2)}{x}$，令 $h'(x)=0$，解得：$x=1$，故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，故 $h(x)_{min}=h$（1）$=-\dfrac{5}{3}$，

故 $x_0=1$ 即 $a=1+x_0+lnx_0=2$，$b=\dfrac{1}{3}{x_0}^3+{x_0}^2+x_0=\dfrac{7}{3}$ 时，$(b-2a)_{min}=-\dfrac{5}{3}$.

10．解：(1）函数 $f(x)=ln(ax+b)-x$ 的导数为 $f'(x)=\dfrac{a}{ax+b}-1$，

可得 $y=f(x)$ 在点 $(1$，f（1）$)$ 处的切线斜率为 $\dfrac{a}{a+b}-1$，

切线方程为 $y=-2x+1$，可得 $ln(a+b)-1=-1$，$\dfrac{a}{a+b}-1=-2$，解得 $a=-1$，$b=2$；

（2）由 $y=ln(x+1)-x$ 的导数为 $y'=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}$，
当 $x>0$ 时，函数 y 递减；当 $-1<x<0$ 时，函数 y 递增；可得 y 的最大值为 0，即 $ln(x+1)\leqslant x$，
当 $a>0$ 时，$f(x)\leqslant0$ 恒成立，即 $x\geqslant ln(ax+b)$ 恒成立，只要 $ln(ax+b)\leqslant ln(x+1)$ 恒成立，

即 $a=1$，$b\leqslant 1$，可得 $ab\leqslant 1$，即 ab 的最大值为 1.

11．解：（1）当 $a=1$ 时，$F(x)=f(x)-g(x)=e^{x}+x^{2}-x-x^{2}-x-b=e^{x}-2x-b$，$\therefore F'(x)=e^{x}-2$，

令 $F'(x)=0$，解得 $x=ln2$，当 $x<ln2$ 时，$F'(x)<0$，当 $x>ln2$ 时，$F'(x)>0$，
$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,ln2)$ 上单调递减，在 $(ln2,+\infty)$ 上单调递增；

（2）$y=f(x)-g(x)=e^{x}-(a+1)x-b$，$\therefore y'=e^{x}-(a+1)$，

$\therefore$ 切线斜率 $k=y'|_{x=1}=e-(a+1)=-1$，解得 $a=e$，

当 $x=1$ 时，$y=0$，即 $e-(a+1)-b=0$，解得 $b=-1$；

（3）由 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，可得 $e^{x}+x^{2}-x\geqslant x^{2}+ax+b$，即 $e^{x}-(a+1)x-b\geqslant 0$，

令 $h(x)=e^{x}-(a+1)x-b$，则 $h'(x)=e^{x}-(a+1)$，

当 $a+1\leqslant 0$，即 $a\leqslant -1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 单调递增，
当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$，故不满足题意，

当 $a>-1$ 时，令 $h'(x)=e^{x}-(a+1)=0$，解得 $x=ln(a+1)$，

当 $x<ln(a+1)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>ln(a+1)$ 时，$h'(x)>0$，
$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty$，$ln(a+1))$ 上单调递减，在 $(ln(a+1)$，$+\infty)$ 上单调递增；

$\therefore h(x)_{min}=h(ln(a+1))=e^{ln(a+1)}-(a+1)ln(a+1)-b=a+1-b-(a+1)ln(a+1)\geqslant 0$ 恒成立，

$\therefore b\leqslant a+1-(a+1)ln(a+1)$，$\therefore a+b\leqslant 2a+1-(a+1)ln(a+1)=2(a+1)-1-(a+1)ln(a+1)$
令 $\varphi(x)=2x-1-xlnx$，$x>0$，$\therefore \varphi'(x)=1-lnx$，
令 $\varphi'(x)=1-lnx=0$，解得 $x=e$，
当 $x>e$ 时，$\varphi'(x)<0$，函数 $\varphi(x)$ 单调递减，
当 $0<x<e$ 时，$\varphi'(x)>0$，函数 $\varphi(x)$ 单调递增，

$\therefore \varphi(x)_{max}=\varphi$（e）$=2e-1-elne=e-1$，

从而当 $a=e-1$，$b=0$ 时，$a+b$ 的最大值为 $e-1$，综上 $a+b$ 的最大值为 $e-1$.