高三数学一轮复习——概率解答题热点题型

【题型一】 马尔科夫链基础模型

【典例分析】

1.

解 由题意知：$\begin{cases} A_n+B_n=1\ 000 \\ A_n=0.8A_{n-1}+0.3B_{n-1} \\ B_n=0.2A_{n-1}+0.7B_{n-1} \end{cases}$ 由 $A_{n-1}+B_{n-1}=1\ 000$，得 $B_{n-1}=1\ 000-A_{n-1}$.

所以 $A_n=0.8A_{n-1}+0.3(1\ 000-A_{n-1})=0.5A_{n-1}+300$.同理，$B_n=0.2(1\ 000-B_{n-1})+0.7B_{n-1}=0.5B_{n-1}+200$.

2.（1）一人投掷两颗骰子，向上的点数之和为 4 的倍数的概率为 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

（i）因为第 1 次从小明开始，所以前 4 次投掷中小明恰好投掷 2 次的概率，

$P=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{39}{64}$.

（ii）设游戏的前 4 次中，小芳投掷的次数为 X，依题意，X 可取 0，1，2，3，

所以 $P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$，$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{21}{64}$，

$P(X=2)=\frac{39}{64}$，$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$. 所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{3}{64}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{21}{64}+2\times\frac{39}{64}+3\times\frac{3}{64}=\frac{27}{16}$.

（2）若第 1 次从小芳开始，则第 n 次由小芳投掷骰子有两种情况：

①第 $n-1$ 次由小芳投掷，第 n 次继续由小芳投掷，其概率为 $P_{n_1}=\frac{1}{4}P_{n-1}(n\geqslant 2)$；②第 $n-1$ 次由小明投掷，第 n 次由小芳投掷，其概率为 $P_{n_2}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-P_{n-1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}P_{n-1}(n\geqslant 2)$.

因为①②两种情形是互斥的，所以 $P_n=P_{n_1}+P_{n_2}=\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}P_{n-1}=-\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{3}{4}(n\geqslant 2)$，

所以 $P_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left(P_{n-1}-\frac{1}{2}\right)(n\geqslant 2)$. 因为 $P_1=1$，所以 $\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，

$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，所以 $P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，即 $P_n=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$.

3.（1）$\because X_1=2$ 或 $X_1=3$，$\therefore P\left(X_1=2\right)=\frac{2}{2+10}=\frac{1}{6}$，$P\left(X_1=3\right)=\frac{10}{2+10}=\frac{5}{6}$，

$\therefore EX_1=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$.

（2）$\because$ 当 $k=0$ 时，$P\left(X_{n+1}=2\right)=\frac{1}{6}P_0$，

当 $1\leqslant k\leqslant 10$ 时，第 $n+1$ 次取出来有 $2+k$ 个白球的可能性有两种：

第 n 次袋中有 $2+k$ 个白球，显然每次取出球后，球的总数保持不变，

即袋中有$2+k$个白球，$10-k$个黑球，第$n+1$次取出来的也是白球的概率为$\dfrac{2+k}{12}P_k$；

第n次袋中有$1+k$个白球，第$n+1$次取出来的是黑球，由于每次总数为 12 个，

故此时黑球数为$11-k$个，这种情况发生的概率为$\dfrac{11-k}{12}P_{k-1}$；∴

$P\left(X_{n+1}=2+k\right)=\dfrac{2+k}{12}P_k+\dfrac{11-k}{12}P_{k-1}(1\leqslant k\leqslant 10)$，∴综上可知，

$$P\left(X_{n+1}=2+k\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}P_0(k=0),\\ \dfrac{2+k}{12}P_k+\dfrac{11-k}{12}P_{k-1}(1\leqslant k\leqslant 10).\end{cases}$$

（3）∵第$n+1$次白球个数的数学期望分为两类情况：第n次白球个数的数学期望为EX_n，由于白球和黑球的总数为 12，第$n+1$次取出来的是白球的概率为$\dfrac{EX_n}{12}$，第$n+1$次取出来的是黑球的概率为$\dfrac{12-EX_n}{12}$，此时白球的个数为EX_n+1，∴$EX_{n+1}=\dfrac{EX_n}{12}\cdot EX_n+\dfrac{12-EX_n}{12}\cdot\left(EX_n+1\right)=\dfrac{\left(EX_n\right)^2}{12}+\left(1-\dfrac{EX_n}{12}\right)\cdot\left(EX_n+1\right)=\dfrac{11}{12}EX_n+1$

即$EX_{n+1}=\dfrac{11}{12}EX_n+1$.

【题型二】 马尔科夫链之传球模型

4.

（1）X的取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$；$P(X=1)=\dfrac{1}{3}\times1\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times1+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{16}{27}$；$P(X=2)=\dfrac{1}{3}\times1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$；

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{16}{27}$	$\dfrac{1}{9}$

所以$E(X)=0\times\dfrac{8}{27}+1\times\dfrac{16}{27}+2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{22}{27}$；

（2）①由题意可知：$a_1=0$，$a_2=\dfrac{1}{3}$；

②由题意：$n\in\mathbf{N}^*,n\geq2$时，第n次传给甲的事件是第n-1 次传球后，球不在甲手上并且第n次必传给甲的事件积，于是有$a_n=\dfrac{1}{3}(1-a_{n-1})$，即$a_n-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}(a_{n-1}-\dfrac{1}{4})$，数列$\{a_n-\dfrac{1}{4}\}$是首项为$a_n-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$，公比为$-\dfrac{1}{3}$的等比数列，

从而有$a_n-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}\cdot(-\dfrac{1}{3})^{n-1}$，所以$a_n=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cdot(-\dfrac{1}{3})^{n-1}$，

当$n\to+\infty$时，$a_n\to\dfrac{1}{4}$，所以当传球次数足够多时，球落在甲手上的概率趋向于一个常数$\dfrac{1}{4}$，又第一次从甲开始传球，而且每一次都是等可能地把球传给任何一个人，所以球落在每个人手上的概率都相等，所以球落在乙、丙、丁手上的概率为$(1-\dfrac{1}{4})\div3=\dfrac{1}{4}$，

所以随着传球次数的增多，球落在甲、乙、丙、丁每个人手上的概率相等.

5.

（I）这 150 个点球中的进球频率为$\dfrac{10+17+20+16+13+14}{150}=0.6$，则该同学踢一次点球命中的概率$p=0.6$，

由题意，ξ可能取 1，2，3，则$P\left(\xi=1\right)=0.6$，$P\left(\xi=2\right)=0.4\times0.6=0.24$，$P\left(\xi=3\right)=0.4\times0.4=0.16$，

ξ的分布列为：

ξ	1	2	3
p	0.6	0.24	0.16

即 $E(\xi)=1\times0.6+2\times0.24+3\times0.16=1.56$.

（II）（i）由题意 $P_2=0$，$P_3=\frac{1}{2}$.

（ii）第 n 次触球者是甲的概率记为 P_n，则当 $n\geq2$ 时，第 $n-1$ 次触球者是甲的概率为 P_{n-1}，

第 $n-1$ 次触球者不是甲的概率为 $1-P_{n-1}$，则 $P_n=P_{n-1}\cdot0+(1-P_{n-1})\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-P_{n-1})$，从而 $P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_{n-1}-\frac{1}{3}\right)$，

又 $P_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，$\therefore\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$是以 $\frac{2}{3}$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

则 $P_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$，$P_{19}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{18}+\frac{1}{3}>\frac{1}{3}$，$P_{20}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{19}+\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，

$P_{19}>P_{20}$，故第 19 次触球者是甲的概率大.

6.

（1）由已知可得：$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，

$\overline{y}=\frac{640+540+420+300+200}{5}=\frac{2100}{5}=420$，

又因为 $\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=5180$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\frac{5180-6300}{55-5\times3^2}=-\frac{1120}{10}=-112$，

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=420+112\times3=756$，

所以 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}=-112x+756$，

当 $y=-112x+756<10\left(x\in\mathbf{N}^*\right)$时，$x\geq7$，

所以，可以预测从第 7 月份开始该大学体重超重的人数降至 10 人以下.

（2）（i）由题知 X 的可能取值为：0，1，2；$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$；

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{18}$；

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$；

X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{2}{9}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{11}{18}+2\times\frac{2}{9}=\frac{19}{18}$.

（ii）（法一）由 $b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}$，$c_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{3}b_{n-1}$，两式相加得：$b_n+c_n=a_{n-1}+\frac{1}{3}(b_{n-1}+c_{n-1})$.

因为 $a_n=\frac{2}{3}b_{n-1}+\frac{2}{3}c_{n-1}$，所以 $b_{n-1}+c_{n-1}=\frac{3}{2}a_n$，$b_n+c_n=\frac{3}{2}a_{n+1}$，代入等式得 $\frac{3}{2}a_{n+1}=a_{n-1}+\frac{1}{2}a_n$，即 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}a_{n-1}$

所以 $a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n=a_n+\frac{2}{3}a_{n-1}=\cdots=a_2+\frac{2}{3}a_1$，因为 $a_1=0$，$a_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$，

所以 $a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n=\frac{2}{3}$，所以 $a_{n+1}-\frac{2}{5}=-\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{5}\right)$，所以数列 $\left\{a_n-\frac{2}{5}\right\}$是首项为 $-\frac{2}{5}$，公比为 $-\frac{2}{3}$ 的等比数列，

所以 $a_n-\frac{2}{5}=\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，即 $a_n=\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$，因此经过 200 次传球后 A 队员控制球的概率

$a_{200}=\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{199}\right]>\frac{2}{5}$.（法二）由题知：$c_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{3}b_{n-1}$，所以$\frac{2}{3}b_{n-1}=2c_n-a_{n-1}$，

所以$a_n=\frac{2}{3}b_{n-1}+\frac{2}{3}c_{n-1}=2c_n-a_{n-1}+\frac{2}{3}c_{n-1}$，又因为$b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}=1-a_n-c_n$，

所以$c_n=1-a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{1}{3}c_{n-1}$，所以$a_n=2c_n-a_{n-1}+\frac{2}{3}c_n-1=2-2a_n-2a_{n-1}$，

所以$a_n=-\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{2}{3}$，所以$a_n-\frac{2}{5}=-\frac{2}{3}\left(a_{n-1}-\frac{2}{5}\right)$，又因为$a_1=0$，所以$a_1-\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}\neq 0$，

所以数列$\left\{a_n-\frac{2}{5}\right\}$是首项为$-\frac{2}{5}$，公比为$-\frac{2}{3}$的等比数列，

所以$a_n-\frac{2}{5}=\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，即$a_n=\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$，

因此经过 200 次传球后 A 队员控制球的概率$a_{200}=\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{199}\right]>\frac{2}{5}$.

7.

【详解】

（1）记事件 A 为“前3次传球中，乙恰有1次接到球”，

$P(A)=\frac{1}{5}\times1\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times1+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{56}{125}$；

（2）由题意，$P_1=\frac{1}{5}$，$P_n=(1-P_{n-1})\times\frac{1}{5}$，

$\therefore P_n-\frac{1}{6}=-\frac{1}{5}\left(P_{n-1}-\frac{1}{6}\right)$，$n\geq2$，且$P_1-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$，

所以，数列$\left\{P_n-\frac{1}{6}\right\}$是以$\frac{1}{30}$为首项，以$-\frac{1}{5}$为公比的等比数列，

$\therefore P_n-\frac{1}{6}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{30}=-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}$，因此，$P_n=\frac{1}{6}\left[1-\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}\right]$.

【题型三】 游走模式

8.

（I）$P_1=\frac{2}{3}$，$P_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

（II）由题意可知，质点到达点（n,0），可分两种情形，由点（n-1,0）右移 1 个单位或由点（n-2,0）右移 2 个单位，故由条件可知：$P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}$（n≥3）

上式可变形为$P_n-P_{n-1}=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}-P_{n-1}=-\frac{1}{3}(P_{n-1}-P_{n-2})$

$\{P_n-P_{n-1}\}$是以$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列.

其首项 $P_2-P_1=\frac{7}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$

（III）由（II）知 $P_n-P_{n-1}=\frac{1}{9}(-\frac{1}{3})^{n-2}$（n≥2）

$\therefore P_n=(P_n-P_{n-1})+(P_{n-1}-P_{n-2})+\cdots+(P_2-P_1)+P_1$

$=\frac{1}{9}\left[(-\frac{1}{3})^{n-2}+(-\frac{1}{3})^{n-3}+\cdots+1\right]+\frac{2}{3}=\frac{1}{9}\left[\frac{1-(-\frac{1}{3})^{n-1}}{1+\frac{1}{3}}\right]+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n}$

9.

解：(1) $\bar{x}=250\times0.2+750\times0.35+1250\times0.25+1750\times0.1+2250\times0.05+2750\times0.05=1050$，

因为 Z 服从正态分布 $N\left(1050,660^2\right)$，所以

$P\left(390<Z\le2370\right)=P\left(\mu-\sigma<Z\le\mu+2\sigma\right)=0.9545-\dfrac{0.9545-0.6827}{2}=0.8186$.

所以 $X\sim B\left(20,0.8186\right)$，

所以 X 的数学期望为 $E\left(X\right)=20\times0.8186=16.372$.

(2)①棋子开始在第0格为必然事件，$P_0=1$.

第一次掷硬币出现正面，棋子移到第1格，其概率为 $\frac{1}{2}$，即 $P_1=\frac{1}{2}$.

棋子移到第 $n\left(2\le n\le59\right)$ 格的情况是下列两种，而且也只有两种：

棋子先到第 $n-2$ 格，又掷出反面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$；

棋子先到第 $n-1$ 格，又掷出正面，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$，

所以 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$，

即 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$，且 $P_1-P_0=-\frac{1}{2}$，

所以当 $1\le n\le59$ 时，数列 $\left\{P_n-P_{n-1}\right\}$ 是首项 $P_1-P_0=-\frac{1}{2}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

②由①知 $P_1-1=-\frac{1}{2}$，$P_2-P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$，$P_3-P_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$，$\cdots$，$P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

以上各式相加，得 $P_n-1=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

所以 $P_n=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\left(n=0,1,2,\cdots,59\right)$.

所以闯关成功的概率为 $P_{59}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{60}\right]=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{60}\right]$，

闯关失败的概率为 $P_{60}=\frac{1}{2}P_{58}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{59}\right]=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{59}\right]$.

$P_{59}-P_{60}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{60}\right]-\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{59}\right]=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{58}\right]>0$，

所以该大学生闯关成功的概率大于闯关失败的概率.

10.(1)投掷一次正方体玩具，每个数字在上底面出现都是等可能的，其概率为 $P_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

只投掷一次不可能返回到 A 点；若投掷两次质点 P 就恰好能返回到 A 点，则上底面出现的两个数字应依次为：(1,3)、(3,1)、(2,2)三种结果，其概率为 $P_2=(\frac{1}{3})^2\times3=\frac{1}{3}$；

若投掷三次质点 P 恰能返回到 A 点，则上底面出现的三个数字应依次为：(1,1,2)、(1,2,1)、(2,1,1)三种结果，其概率为 $P_3=(\frac{1}{3})^3\times3=\frac{1}{9}$；

若投掷四次质点 P 恰能返回到 A 点，则上底面出现的四个数字应依次为：(1,1,1,1)．其概率为 $P_4=(\frac{1}{3})^4=\frac{1}{81}$.

所以，质点 P 恰好返回到 A 点的概率为：$P=P_2+P_3+P_4=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}=\frac{37}{81}$. 6 分

(2)由(1)知，质点 P 转一圈恰能返回到 A 点的所有结果共有以上问题中的 7 种情况，且 ξ 的可能取值为 2,3,4,

则 $P(\xi=2)=\frac{3}{7}$，$P(\xi=3)=\frac{3}{7}$，$P(\xi=4)=\frac{1}{7}$，

所以，$E\xi=2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{3}{7}+4\times\frac{1}{7}=\frac{19}{7}$.

11.

解：（1）

$\overline{x}=0.002\times50\times205+0.004\times50\times255+0.009\times50\times305+0.004\times50\times355+0.001\times50\times405=300$（千米）.

（2）由 $X\sim N(300，50^2)$.

$\therefore P(250<X\leqslant400)=0.9545-\frac{0.9545-0.6827}{2}=0.8186$.

（3）遥控车开始在第 0 格为必然事件，$P_0=1$. 第一次掷硬币出现正面，遥控车移到第一格，其概率为$\frac{1}{2}$，即$P_1=\frac{1}{2}$.

遥控车移到第$n(2\leqslant n\leqslant49)$格的情况是下面两种，而且只有两种：

①遥控车先到第$n-2$格，又掷出反面，其概率为$\frac{1}{2}P_{n-2}$.

②遥控车先到第$n-1$格，又掷出正面，其概率为$\frac{1}{2}P_{n-1}$.

$\therefore P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$.

$\therefore P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$.

$\therefore 1\leqslant n\leqslant49$ 时，数列$\{P_n-P_{n-1}\}$是等比数列，首项为$P_1-P_0=-\frac{1}{2}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

$\therefore P_1-1=-\frac{1}{2}$，$P_2-P_1=(-\frac{1}{2})^2$，$P_3-P_2=(-\frac{1}{2})^3$，……，$P_n-P_{n-1}=(-\frac{1}{2})^n$.

$\therefore P_n=(P_n-P_{n-1})+(P_{n-1}-P_{n-2})+\ldots\ldots+(P_1-P_0)+P_0=(-\frac{1}{2})^n+(-\frac{1}{2})^{n-1}+\ldots\ldots-\frac{1}{2}+1$

$=\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n+1}}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{n+1}]\ (n=0，1，\cdots\cdots，49)$.

$\therefore$ 获胜的概率 $P_{49}=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{50}]$，

失败的概率 $P_{50}=\frac{1}{2}P_{48}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{49}]=\frac{1}{3}[1+(\frac{1}{2})^{49}]$.

$\therefore P_{49}-P_{50}=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{50}]-\frac{1}{3}[1+(\frac{1}{2})^{49}]=\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{2})^{48}]>0$.

$\therefore$ 获胜的概率大.

$\therefore$ 此方案能成功吸引顾客购买该款新能源汽车.

【题型四】 药物试验模式

11.

解：X 的所有可能取值为 $-1,0,1$. $P(X=-1)=(1-\alpha)\beta,$ $P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta),$ $P(X=1)=\alpha(1-\beta),$ 所以 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

（2）（i）由（1）得 $a=0.4,\quad b=0.5,\quad c=0.1$.

因此 $p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1}$，故 $0.1\left(p_{i+1}-p_i\right)=0.4\left(p_i-p_{i-1}\right)$，即

$p_{i+1}-p_i=4\left(p_i-p_{i-1}\right)$.

又因为 $p_1-p_0=p_1\neq0$，所以$\left\{p_{i+1}-p_i\right\}(i=0,1,2,\cdots,7)$为公比为 4，首项为 p_1 的等比数列.

（ii）由（i）可得

$p_8=p_8-p_7+p_7-p_6+\cdots+p_1-p_0+p_0=\left(p_8-p_7\right)+\left(p_7-p_6\right)+\cdots+\left(p_1-p_0\right)=\frac{4^8-1}{3}p_1$.

由于 p_8=1，故 $p_1=\frac{3}{4^8-1}$，所以

$p_4=\left(p_4-p_3\right)+\left(p_3-p_2\right)+\left(p_2-p_1\right)+\left(p_1-p_0\right)=\frac{4^4-1}{3}p_1=\frac{1}{257}$.

p_4表示最终认为甲药更有效的概率，由计算结果可以看出，在甲药治愈率为 0.5，乙药治愈率为 0.8 时，认为甲药更有效的概率为 $p_4=\frac{1}{257}\approx 0.0039$，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种试验方案合理.

12.（1）由已知得 $E\left(\xi_1\right)=k$,ξ_2 的可能取值为 $1,k+1$,所以 $P\left(\xi_2=1\right)=\left(1-p\right)^k$,$P\left(\xi_2=k+1\right)=1-\left(1-p\right)^k$,

所以 $E\left(\xi_2\right)=\left(1-p\right)^k+\left(k+1\right)\left[1-\left(1-p\right)^k\right]=k+1-k\left(1-p\right)^k$,因为 $E(\xi_1)=E(\xi_2)$,即 $k=k+1-k\left(1-p\right)^k$,

所以 $k\left(1-p\right)^k=1$,所以 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$

（2）(i)证明:因为 $x_{n+1}^2-x_n^2=(e^{\frac{1}{3}}-e^{-\frac{1}{3}})x_nx_{n+1}$,所以 $\frac{x_{n+1}^2}{x_nx_{n+1}}-\frac{x_n^2}{x_nx_{n+1}}=e^{\frac{1}{3}}-e^{-\frac{1}{3}}$,所以 $\frac{x_{n+1}}{x_n}-\frac{x_n}{x_{n+1}}=e^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}$,

所以 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=e^{\frac{1}{3}}$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=-e^{-\frac{1}{3}}$（舍去）,所以 $\left\{x_n\right\}$ 是以 1 为首项,以 $e^{\frac{1}{3}}$ 为公比的等比数列.

(ii)由(i)可知 $x_n=e^{\frac{n-1}{3}}\left(n\in N^*\right)$,则 $x_4=e$,即 $p=1-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$,由题意可知 $E(\xi_1)>E(\xi_2)$,则有 $k>k+1-k\left(1-p\right)^k$,

整理得 $\ln k-\frac{1}{3}k>0$,设 $\varphi\left(x\right)=\ln x-\frac{1}{3}x\left(x>0\right)$,则 $\varphi'\left(x\right)=\frac{3-x}{3x}$,

当 $x\in\left(0,3\right)$ 时, $\varphi'\left(x\right)>0$；当 $x\in\left(3,+\infty\right)$ 时, $\varphi'\left(x\right)<0$,故 $\varphi\left(x\right)$ 在 $\left(0,3\right)$ 上单调递增,在 $\left(3,+\infty\right)$ 上单调递减,

又 $\varphi\left(4\right)>0$, $\varphi\left(5\right)<0$,所以 k 的最大值为 4.

13.（1）由题意，被感染人数服从二项分布： $X\sim B(a,p)$，则 $P(X)=C_a^X p^X(1-p)^{a-X}$,$(0\le X\le a)$ ，

X 的数学期望 $EX=ap$.

（2）（i）第 n 天被感染人数为 $(1+ap)^{n-1}$ ，第 $n-1$ 天被感染人数为 $(1+ap)^{n-2}$ ，由题目中均值的定义可知，

$E_n=(1+ap)^{n-1}-(1+ap)^{n-2}=ap(1+ap)^{n-2}$ 则 $\frac{E_n}{E_{n-1}}=1+ap$ ，且 $E_2=ap$.$\therefore\{E_n\}$ 是以 ap 为首项，$1+ap$ 为公比的等比数列.（ii）令 $f(p)=\ln(1+p)-\frac{2}{3}p$ ，则 $f'(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{2}{3}=\frac{-2p+1}{3(p+1)}$.

$\therefore f(p)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{2},1)$ 上单调递减.

$f(p)_{\max}=f(\frac{1}{2})=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}\approx 1.1-0.7-0.3=0.1$.则当 $a=10$ ， $E_n=10p(1+10p)^{n-2}$.

$E_6{}'=10\times 0.1(1+10\times 0.1)^4$=16 . $E_6=10\times 0.5(1+10\times 0.5)^4$=6480 . $\because E_6>E_6{}'$ $\therefore$ 戴口罩很有必要.

14.

（1）平均每组 $\frac{1000}{100}=10$ 人，

设第一轮注射有 Y 只动物产生抗体，则 $Y\sim B\left(10,p\right)$,

所以 $P(Y=10)+P(Y=9)=p^{10}+10p^9(1-p)=10p^9-9p^{10}$,

所以该组试验只需第一轮注射的概率为 $10p^9-9p^{10}$.

（2）由（1）得 $P\left(X=10\right)=10p^9-9p^{10}$,

$P(X=10+k)=C_{10}^{10-k}(1-p)^k p^{10-k},k=2,3,\cdots,10$，

所以$E(X)=10P(X=10)+\sum_{k=2}^{10}(10+k)P(X=10+k)$

$=10(p^{10}+10p^9(1-p))+\sum_{k=2}^{10}(10+k)C_{10}^{10-k}(1-p)^k p^{10-k}$

$=10\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{10-k}\left(1-p\right)^k p^{10-k}+\sum_{k=0}^{10}kC_{10}^{10-k}\left(1-p\right)^k p^{10-k}-C_{10}^{9}\left(1-p\right)p^9$，

设$\xi \sim B\left(10,1-p\right)$，则$E(\xi)=\sum_{k=0}^{10}kC_{10}^{k}(1-p)^k p^{10-k}=10(1-p)$，

又$\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{10-k}(1-p)^k p^{10-k}=(1-p+p)^{10}$，

所以$E(X)=10(1-p+p)^{10}+10(1-p)-10(1-p)p^9$

$=10+10\left(1-p\right)-10\left(1-p\right)p^9=20-10p-10p^9+10p^{10}$

$=10+10\left(1-p\right)\left(1-p^9\right)$，因为$0<p<1$，所以$E\left(X\right)>10$，

又$E\left(X\right)=10+10\left(1-p\right)\left(1-p^9\right)=20-10p-10p^9+10p^{10}$

$=10\left(2-p\right)-10p^9\left(1-p\right)$，因为$0<p<1$，所以$E\left(X\right)<10\left(2-p\right)$，

所以$10<E\left(X\right)<10\left(2-p\right)$.

【题型五】 商场促销

15.（1）由题意知，每位员工首轮测试被认定为“暂定”的概率为$C_3^2p^2\left(1-p\right)+C_3^3p^3$，

每位员工再次测试被认定为“暂定”的概率为$C_3^1p\left(1-p\right)^2\left[1-\left(1-p\right)^2\right]$，

综上可知，每位员工被认定为“暂定”的概率为$f\left(p\right)=C_3^2p^2\left(1-p\right)+C_3^3p^3+C_3^1p\left(1-p\right)^2\left[1-\left(1-p\right)^2\right]$

$=-3p^5+12p^4-17p^3+9p^2$，

（2）设每位员工测试的费用为X元，则X可能的取值为$90,150$，

由题意知，$P\left(X=150\right)=C_3^1p\left(1-p\right)^2$，$P\left(X=90\right)=1-C_3^1p\left(1-p\right)^2$，所以随机变量$X$的数学期望为

$E\left(X\right)=90\times\left[1-C_3^1p\left(1-p\right)^2\right]+150\times C_3^1p\left(1-p\right)^2$（元），$p\in\left(0,1\right)$，

令$g\left(x\right)=90+180x\left(1-x\right)^2,x\in\left(0,1\right)$，则$g'\left(x\right)=180\left[\left(1-x\right)^2-2x\left(1-x\right)\right]=180\left(3x-1\right)\left(x-1\right)$，

所以当$0<x<\frac{1}{3}$时，$g'\left(x\right)>0$；当$x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$时，$g'\left(x\right)<0$；

所以函数$g\left(x\right)$在$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{3},1\right)$上单调递减，

所以$g\left(x\right)\le g\left(\frac{1}{3}\right)=90+180\times\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{350}{3}$，即$E\left(X\right)\le\frac{350}{3}$(元),

所以此方案的最高费用为$1+600\times\frac{350}{3}\times10^{-4}=8$（万元），

综上可知，若以此方案实施不会超过预算.

16.（1）由题意知，样本中的回访客户的总数是$250+100+200+700+350=1600$，

满意的客户人数$250\times0.5+100\times0.3+200\times0.6+700\times0.3+350\times0.2=555$，故所求概率为$\frac{555}{1600}=\frac{111}{320}$.

（2）$\xi=0,1,2$.设事件A为“从I型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”，

事件B为“从V型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”，且A、B为独立事件.

根据题意，$P\left(A\right)$估计为0.5，$P\left(B\right)$估计为0.2.则$P\left(\xi=0\right)=P\left(\bar{A}\bar{B}\right)=\left(1-P\left(A\right)\right)\left(1-P\left(B\right)\right)=0.5\times0.8=0.4$；

$P\left(\xi=1\right)=P\left(A\bar{B}+\bar{A}B\right)=P\left(A\bar{B}\right)+P\left(\bar{A}B\right)=P\left(A\right)\left(1-P\left(B\right)\right)+\left(1-P\left(A\right)\right)P\left(B\right)$

$=0.5\times0.8+0.5\times0.2=0.5$；$P(\xi=2)=P(AB)=P(A)P(B)=0.5\times0.2=0.1$.

ξ的分布列为

ξ	0	1	2
P	0.4	0.5	0.1

ξ的期望$E(\xi)=0\times0.4+1\times0.5+2\times0.1=0.7$

（3）由题，I 型号的平均数为 0.5,所以$D\eta_1=0.5\times(1-0.5)^2+0.5\times(0-0.5)^2=0.25$

同理$D\eta_2=0.3\times(1-0.3)^2+0.7\times(0-0.3)^2=0.21$ 同理$D\eta_3$=0.24； $D\eta_4$=0.21； $D\eta_5$=0.16

所以$D\eta_1>D\eta_3>D\eta_2=D\eta_4>D\eta_5$.

17.

（1）当日需求量$r\le X_n$时，日销售量Z_n为r；当日需求量$r>X_n$时，日销售量Z_n为X_n，故日销售量Z_n的期望值为：

当$n=1$时，每天的进货量为$X_1=16+1=17$，根据货物的日需求量的频率表得，此时的日销售量为 17 件，

$\therefore E(Z_1)=(16+1)(P_1+P_2+\cdots+P_{10})$；

当$n=2$时，每天的进货量为$X_2=16+2=18$，根据货物的日需求量的频率表得，

此时日销售量为 17 件的概率为P_1，日销售量为 18 件的概率为$P_2+P_3+\cdots+P_{10}$，

$\therefore E(Z_2)=(16+1)P_1+(16+2)(P_2+P_3+\cdots+P_{10})$；

当$n=3$时，每天的进货量为$X_3=16+3=19$，根据货物的日需求量的频率表得，

此时日销售量为 17 件的概率为P_1，日销售量为 18 件的概率为P_2，日销售量为 19 件的概率为$P_3+P_4+\cdots+P_{10}$，

$\therefore E(Z_3)=(16+1)P_1+(16+2)P_2+(16+3)(P_3+P_4+\cdots+P_{10})$；…… ，同理可得：

$E(Z_9)=(16+1)P_1+(16+2)P_2+(16+3)P_3+\cdots+(16+9)(P_9+P_{10})$；

$E(Z_{10})=(16+1)P_1+(16+2)P_2+(16+3)P_3+\cdots+(16+10)P_{10}$；

所以当$1\leqslant n\leqslant 9$时，$E(Z_n)=\sum_{i=1}^{n}(16+i)P_i+\sum_{i=n+1}^{10}(16+n)P_i$；当$n=10$时，$E(Z_{10})=\sum_{i=1}^{10}(16+i)P_i$.

（2）$E(Z_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}(16+i)P_i+\sum_{i=n+2}^{10}(16+n+1)P_i=\sum_{i=1}^{n}(16+i)P_i+\sum_{i=n+1}^{10}(16+n+1)P_i=E(Z_n)+\sum_{i=n+1}^{10}P_i$.

设每天进货量为X_n时，日利润为ξ_n，则

$E(\xi_n)=5E(Z_n)-3[(16+n)-E(Z_n)]=8E(Z_n)-3(16+n)$，

$\therefore E(\xi_{n+1})-E(\xi_n)=8[E(Z_{n+1})-E(Z_n)]-3=8(P_{n+1}+P_{n+2}+\cdots+P_{10})-3$.

由$E(\xi_{n+1})-E(\xi_n)\ge0\Rightarrow P_1+P_2+\cdots+P_n\le\frac{5}{8}$.

又$\because P_1+P_2+P_3+P_4=0.66>\frac{5}{8}$，$P_1+P_2+P_3=0.53<\frac{5}{8}$，

即$E(\xi_1)<E(\xi_2)<E(\xi_3)<E(\xi_4)>E(\xi_5)>\cdots>E(\xi_{10})$，

$\therefore E(\xi_4)$最大，$\therefore$应进货 20 件时，日利润均值最大.

【题型六】 证明概率、期望等不等式

18.

【分析】

（1）由题知，两道题都答对的概率为$\frac{1}{4}$，至少有一道不能答对的概率为$\frac{3}{4}$，故有$P(X_4=k)=\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\times\frac{1}{4}(k=1,2,3)$，

$P(X_4=4)=\left(\frac{3}{4}\right)^3$，即可求出概率分布列；

（2）（i）根据题意先考虑$Y_n=k\left(1\le k\le n-1,k\in\mathbf{N}^*\right)$时，第 k 人必答对第二题，故有故$P(Y_n=k)=p_k^{'}+p_k^{''}=k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$，

再考虑当$Y_n=n$时，故$P(Y_n=n)=p_n'+p_n''=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，于是得到其概率分布列；

（ii）由（i）求得期望$E(Y_n)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2\right)$，在考虑$E(Y_n)$的单调性，即可证明$E(Y_2)<E(Y_3)<E(Y_4)<E(Y_5)<\cdots<E(Y_n)<\cdots$成立，再用错位相减法和不等式放缩得

$E(Y_n)<\frac{7}{4}+1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{7}{4}+1+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=3$即可证明.

【详解】

（1）$P(X_4=k)=\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)^{k-1}\times\frac{1}{4}(k=1,2,3)$，$P(X_4=4)=\left(\frac{3}{4}\right)^3$，

因此X_4的分布列为

X_4	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$

（2）（i）$Y_n=k\left(1\leq k\leq n-1,k\in\mathbf{N}^*\right)$时，第$k$人必答对第二题，

若前面$k-1$人都没有一人答对第一题，其概率为$p_k'=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$，

若前面$k-1$人有一人答对第一题，其概率为$p_k''=C_{k-1}^1\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$，

故$P(Y_n=k)=p_k'+p_k''=k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

当$Y_n=n$时，

若前面$n-1$人都没有一人答对第一题，其概率为$p_n'=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

若前面$n-1$人有一人答对第一题，其概率为$p_n''=(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

故$P(Y_n=n)=p_n'+p_n''=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Y_n的分布列为：

Y_n	1	2	3	…	$n-1$	n
P	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$	…	$(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

（ii）$E(Y_n)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2\right)$.

法 1：$E(Y_{n+1})-E(Y_n)=n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}>0$，

故$E(Y_2)<E(Y_3)<E(Y_4)<E(Y_3)<\cdots<E(Y_n)<\cdots$，

求得$E(Y_2)=\frac{7}{4}$，

故$E(Y_n)=E(Y_2)+\left[E(Y_3)-E(Y_2)\right]+\left[E(Y_4)-E(Y_3)\right]+\cdots+\left[E(Y_n)-E(Y_{n-1})\right]$，

$\therefore E(Y_n)=\frac{7}{4}+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，①

$2E\left(Y_n\right)=\frac{7}{2}+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+6\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，②

②−①，$E\left(Y_n\right)<\frac{7}{4}+1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{7}{4}+1+\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}}=3$.

故$E\left(Y_2\right)<E\left(Y_3\right)<E\left(Y_4\right)<E\left(Y_5\right)<\cdots<E\left(Y_n\right)<\cdots<3$.

法 2：令$k^2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\left(ak^2+bk+c\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k-\left[a(k+1)^2+b(k+1)+c\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$，

则$k^2=2\left(ak^2+bk+c\right)-\left[ak^2+(2a+b)k+(a+b+c)\right]=ak^2+(b-2a)k+(c-a-b)$，

因此：$E\left(Y_n\right)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=6\times\frac{1}{2}-\left(n^2+2n+3\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=3-(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n<3$.

又$E\left(Y_{n+1}\right)-E\left(Y_n\right)=(n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n-(n+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}>0$，

故$E\left(Y_2\right)<E\left(Y_3\right)<E\left(Y_4\right)<E\left(Y_5\right)<\cdots<E\left(Y_n\right)<\cdots<3$.

19.

【分析】

（1）先利用导数证明函数$f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$在定义域上为增函数，再考虑当$x=1$时，$f(1)=0$，故当$x>1$时，$f(x)>0$

（2）先计算概率$P=\frac{\mathrm{A}_{100}^{20}}{100^{20}}$，再证明$\frac{\mathrm{A}_{100}^{20}}{100^{20}}=\frac{100\times99\times\ldots\times81}{100^{20}}<\left(\frac{9}{10}\right)^{19}=\frac{100}{90}\left(\frac{90}{100}\right)^{20}$，即证明$99\times98\times\ldots\times81<(90)^{19}$，最后证明$(\frac{9}{10})^{19}<\mathrm{e}^{-2}$，即证$(\frac{10}{9})^{19}>\mathrm{e}^2$，即证$19ln\frac{10}{9}>2$，即证$ln\frac{10}{9}>\frac{2}{19}$，而这个结论由（1）所得结论可得.

(1)

由已知得函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$\because f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geq0$，

$\therefore$ 函数$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，

又$\because f(1)=0$

$\therefore$ 当$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，即$f(x)>0$.

(2)

由已知条件得，抽取的 20 个号码互不相同的概率为

$p=\frac{\mathrm{A}_{100}^{20}}{100^{20}}=\frac{100\times99\times98\times\cdots\times81}{100^{20}}=\frac{99\times98\times\cdots\times81}{100^{19}}$，

$\because 99\times81=90^2-9^2<90^2$，

同理$98\times82<90^2$，$97\times83<90^2$，…，$81\times99<90^2$，

$\therefore 99\times98\times\cdots\times81<90^{19}$，

$\therefore \frac{99\times98\times\cdots\times81}{100^{19}}<\frac{90^{19}}{100^{19}}=\left(\frac{9}{10}\right)^{19}$，

再证：$\left(\frac{9}{10}\right)^{19}<\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

即证：$19\ln\frac{9}{10}<-2$，即$\ln\frac{9}{10}<-\frac{2}{19}$，$\ln\frac{9}{10}+\frac{2}{19}<0$，

由（1）得，当$x<1$时，$f(x)<0$，取$x=\frac{9}{10}$，

则$f\left(\frac{9}{10}\right)=\ln\frac{9}{10}+\frac{2}{19}<0$，证毕.

20.

【分析】

（1）分别求出每次取出的球是白球和黑球的概率，由题意知最多抽 3 次，获奖即连续两次为白球或者前两次中有一次是白球第三次也是白球，求出其概率和即可；

（2）依据取出白球次数是 $n+1$，可分为以下情况：前 n 次取出 n 次白球，第 $n+1$ 次取出的是白球，前 $n+1$ 次取出 n 次白球，第 $n+2$ 次取出的是白球，…………，前 $2n$ 次取出 n 次白球，第 $2n+1$ 次取出的是白球，分别求出对应的概率，相加可得 P_n，通过作差结合组合数性质即可得结果.

【详解】

（1）根据题意，每次取出的球是白球的概率为 $\frac{2}{5}$，取出的球是黑球的概率为 $\frac{3}{5}$，

所以 $P_1=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+C_2^1\times(\frac{2}{5})^2\times\frac{3}{5}=\frac{44}{125}$；

（2）证明：累计取出白球次数是 $n+1$ 的情况有：

前 n 次取出 n 次白球，第 $n+1$ 次取出的是白球，概率为 $C_n^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}$

前 $n+1$ 次取出 n 次白球，第 $n+2$ 次取出的是白球，概率为 $C_{n+1}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times\frac{3}{5}$

…………

前 $2n-1$ 次取出 n 次白球，第 $2n$ 次取出的是白球，概率为 $C_{2n-1}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n-1}$

前 $2n$ 次取出 n 次白球，第 $2n+1$ 次取出的是白球，概率为 $C_{2n}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^n$

则 $P_n=C_n^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}+C_{n+1}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n-1}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n-1}+$

$C_{2n}^n\times(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^n=(\frac{2}{5})^{n+1}\times[C_n^0+C_{n+1}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n-1}^{n-1}\times(\frac{3}{5})^{n-1}+C_{2n}^n\times(\frac{3}{5})^n]$

因此 $P_{n+1}-P_n=(\frac{2}{5})^{n+2}\times[C_{n+1}^0+C_{n+2}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^n+C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}]$

$-(\frac{2}{5})^{n+1}\times[C_n^0+C_{n+1}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n-1}^{n-1}\times(\frac{3}{5})^{n-1}+C_{2n}^n\times(\frac{3}{5})^n]$

$=(\frac{2}{5})^{n+1}\times\{[C_{n+1}^0+C_{n+2}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^n+C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}]$

$-[C_n^0+C_{n+2}^1\times\frac{3}{5}+\cdots+C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^n+C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^{n+1}+C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+2}]\}$

则 $P_{n+1}-P_n=(\frac{2}{5})^{n+1}\times[C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}-C_{2n+1}^n\times(\frac{3}{5})^{n+1}-C_{2n+2}^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+2}]$

$=(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}(C_{2n+2}^{n+1}-C_{2n+1}^n-\frac{3}{5}C_{2n+2}^{n+1})=(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}(C_{2n+1}^{n+1}-\frac{3}{5}C_{2n+2}^{n+1})$

因为 $C_{2n+1}^{n+1}-\frac{3}{5}C_{2n+2}^{n+1}=C_{2n+1}^{n+1}-\frac{3}{5}(C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^n)=\frac{2}{5}C_{2n+1}^{n+1}-\frac{3}{5}C_{2n+1}^n=-\frac{1}{5}C_{2n+1}^n$，

所以 $P_{n+1}-P_n=(\frac{2}{5})^{n+1}\times(\frac{3}{5})^{n+1}\times(-\frac{1}{5}C_{2n+1}^n)<0$，因此 $P_{n+1}<P_n$.

21.

【分析】

（1）设恰好经过 3 次检验就能把阳性样本全部检验出来为事件 A，由古典概型概率计算公式可得答案；

（2）由题得 $E(\xi_2)=k+1-k(1-p)^k$，$E(\xi_1)=k$，进而根据 $E(\xi_1)=E(\xi_2)$ 化简整理得 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$，再令 $t=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$（$k\geq 2$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$）得 $\ln t=\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}=-\frac{\ln k}{k}$，再令 $g(x)=-\frac{\ln x}{x}(x\geq 2)$，利用导数研究最值得 $\frac{-\ln k}{k}>-\frac{1}{e}$，进而得 $e^{\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}}>e^{-\frac{1}{e}}$，即 $\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}>e^{-\frac{1}{e}}$，进而证明 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}<1-e^{-\frac{1}{e}}$.

【详解】

解：（1）设恰好经过 3 次检验能把有抗体血液样本全部检验出来为事件 A，

所以$P\left(A\right)=\dfrac{C_2^1C_2^1A_3^3+A_3^3A_2^2}{A_5^5}=\dfrac{3}{10}$,

所以恰好经过 3 次检验就能把有抗体的血液样本全部检验出来的概率为$\dfrac{3}{10}$.

（2）由已知得$E\left(\xi_1\right)=k$,

ξ_2的所有可能取值为 1，$k+1$.

所以$P\left(\xi_2=1\right)=\left(1-p\right)^k$，$P\left(\xi_2=k+1\right)=1-\left(1-p\right)^k$,

所以$E\left(\xi_2\right)=\left(1-p\right)^k+\left(k+1\right)\left[1-\left(1-p\right)^k\right]=k+1-k\left(1-p\right)^k$,

若$E\left(\xi_1\right)=E\left(\xi_2\right)$，则$k=k+1-k\left(1-p\right)^k$,

所以$k\left(1-p\right)^k=1$，$\left(1-p\right)^k=\dfrac{1}{k}$,

所以$1-p=\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$，即$p=1-\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$,

所以p关于k的函数关系式为$p=f\left(k\right)=1-\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$（$k\geq 2$且$k\in\mathbf{N}^*$）

证明：令$t=\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$（$k\geq 2$且$k\in\mathbf{N}^*$）

所以$\ln t=\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{1}{k}=-\dfrac{\ln k}{k}$,

令$g\left(x\right)=-\dfrac{\ln x}{x}\left(x\geq 2\right)$,

$g'\left(x\right)=\dfrac{\ln x-1}{x}$,

所以$g'\left(x\right)=0$得$x=e$,

所以$x\in\left(2,e\right)$，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$单调递减，

$x\in\left(e,+\infty\right)$，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$单调递增

所以$g\left(x\right)_{\min}=g\left(e\right)=-\dfrac{1}{e}$，所以$\dfrac{-\ln x}{x}\geq-\dfrac{1}{e}$,

因为$k\geq 2$且$k\in N^*$,

所以$\dfrac{-\ln k}{k}>-\dfrac{1}{e}$，即$\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{1}{k}>-\dfrac{1}{e}$,

所以$e^{\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}}>e^{-\frac{1}{e}}$，即$\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}>e^{-\frac{1}{e}}$,

所以$p=1-\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}<1-e^{-\frac{1}{e}}$.

【题型七】 摸球与射击模型

22.

解：（1）$n=4$时，第二个袋中有 2 白 2 红，共 4 个球，从中连续取出三个球（每个取后不放回）.

第三次取出为白球的情况有：红红白，红白白，白红白，

∴第三次取出为白球的概率$P=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

（2）设选出的是第$k\left(k=1,2,3,4\right)$个袋，连续三次取球的方法数为$4\times3\times2=24$,

第三次取出的是白球的三次取球颜色有如下四种情形：

（白，白，白），取法数为$\left(4-k\right)\left(3-k\right)\left(2-k\right)$,

（白，红，白），取法数为$k\left(4-k\right)\left(3-k\right)$,

（红，白，白），取法数为$k\left(4-k\right)\left(3-k\right)$,

（红，红，白），取法数为$k\left(k-1\right)\left(4-k\right)$,

从而第三次取出的是白球的种数为：

$(4-k)(3-k)(2-k)+k(4-k)(3-k)+k(n-k)(3-k)+k(k-1)(4-k)=3\times2(n-k)$，

则在第k个袋子中第三次取出的是白球的概率 $p_k=\dfrac{4-k}{4}$，

而选到第k个袋子的概率为$\dfrac{1}{4}$，故所求概率为：

$p=\sum\limits_{k=1}^{4}p_k\cdot\dfrac{1}{4}=\sum\limits_{k=1}^{4}\cdot\dfrac{4-k}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{k=1}^{4}(4-k)=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=0}^{3}i=\dfrac{3}{8}$.

（3）设选出的是第k个袋，连续三次取球的方法数为$n(n-1)(n-2)$，

第三次取出的是白球的三次取球颜色有如下四种情形：

（白，白，白），取法数为$(n-k)(n-k-1)(n-k-2)$，

（白，红，白），取法数为$k(n-k)(n-k-1)$，

（红，白，白），取法数为$k(n-k)(n-k-1)$，

（红，红，白），取法数为$k(k-1)(n-k)$，

从而第三次取出的是白球的种数为：

$(n-k)(n-k-1)(n-k-2)+k(n-k)(n-k-1)+k(n-k)(n-k-1)+k(k-1)(n-k)$

$=(n-1)(n-2)(n-k)$，

则在第k个袋子中第三次取出的是白球的概率 $p_k=\dfrac{n-k}{n}$，

而选到第k个袋子的概率为$\dfrac{1}{n}$，故所求概率为：

$p=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k\cdot\dfrac{1}{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n-k}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(n-k)=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=0}^{n-1}i=\dfrac{n-1}{2n}$.

23.

（1）由题意，X的所有可能取值为：0，1，2，…，$k-1$，k，

因为张三每次打靶的命中率均为$p(0<p<1)$，

则$P(X=m)=p^m(1-p)(m=0,1,2,\dots,k-1)$，$P(X=k)=p^k$，

所以X的分布列为

X	0	1	2	…	$k-1$	k
P	$1-p$	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$	…	$p^{k-1}(1-p)$	p^k

所以X的数学期望为$E(X)=p(1-p)+2p^2(1-p)+3p^3(1-p)+\dots+(k-1)p^{k-1}(1-p)+kp^k$，

令$M=p+2p^2+3p^3+\dots+(k-1)p^{k-1}$①，

则$pM=p^2+2p^3+3p^4+\dots+(k-1)p^k$②，

所以①−②可得，$(1-p)M=p+p^2+p^3+\dots+p^{k-1}-(k-1)p^k=\frac{p(1-p^{k-1})}{1-p}-(k-1)p^k$，

则$E(X)=M(1-p)+kp^k=\frac{p-p^k}{1-p}-(k-1)p^k+kp^k=\frac{p-p^{k+1}}{1-p}$；

（2）（i）第n次射击后，可能包含两种情况：第n次射出空包弹或第n次射出实弹；

因为第n次射击前，剩余空包弹的期望为$E(X_{n-1})$，

若第n次射出空包弹，则此时对应的概率为$\frac{E(X_{n-1})}{6}$，因为射击后要填充一发空包弹，所以此时空包弹的数量为$E(X_{n-1})-1+1=E(X_{n-1})$；

若第n次射出实弹，则此时对应的概率为$1-\frac{E(X_{n-1})}{6}$，所以此时空包弹的数量为$E(X_{n-1})+1$；

综上，$E(X_n)=\frac{E(X_{n-1})}{6}\cdot E(X_{n-1})+\left[1-\frac{E(X_{n-1})}{6}\right][E(X_{n-1})+1]=\frac{5}{6}E(X_{n-1})+1$；

（ii）因为当$n=0$时，弹夹中有$6-m$发空包弹，则$E(X_0)=6-m$；

由（i）可知：$E(X_n)=\frac{5}{6}E(X_{n-1})+1(n\in N^*)$，则$E(X_{n+1})-6=\frac{5}{6}[E(X_n)-6](n\in N)$，所以$\{E(X_n)-6\}(n\in N)$是首项为$-m$，公比为$\dfrac{5}{6}$的等比数列，

则$E(X_n)-6=-m\left(\frac{5}{6}\right)^n$，即$E(X_n)=6-m\left(\frac{5}{6}\right)^n(n\in N)$，

因此弹巢中实弹的发数的期望为$6-E(X_n)=m\left(\frac{5}{6}\right)^n$，
为使弹巢中实弹的发数的数学期望小于1，只需$m\left(\frac{5}{6}\right)^n<1$，则$m<\left(\frac{6}{5}\right)^n$，所以$\log_{\frac{6}{5}}m<n$，
为使$\log_{\frac{6}{5}}m<n$恒成立，只需$\left(\log_{\frac{6}{5}}m\right)_{\max}<n$，
而$\left(\log_{\frac{6}{5}}m\right)_{\max}=\log_{\frac{6}{5}}6=\frac{\lg 6}{\lg\frac{6}{5}}=\frac{\lg 6}{\lg 6-\lg 5}=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 2+\lg 3-1+\lg 2}=\frac{\lg 2+\lg 3}{2\lg 2+\lg 3-1}=\frac{0.301+0.477}{0.602+0.477-1}\approx 9.848$，
又$n\in N$，所以最小的射击次数$n_0=10$.

24.

（1）一次摸奖从$n+5$个球中任选两个，有C_{n+5}^2种，它们等可能，其中两球不同色有$C_n^1C_5^1$种，一次摸奖中奖的概率$p_n=\frac{C_n^1C_5^1}{C_{n+5}^2}=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$；

（2）根据（1）的结果，即可求出三次摸奖（每次摸奖后球放回）恰好有 1 次中奖的概率；

（3）设每次摸奖中奖的概率为p，则三次摸奖（每次摸奖后放回），恰有一次中奖的概率$P=C_3^1(1-p_n)^2p_n=3(p_n{}^3-2p_n{}^2+p_n)\quad(0<p_n<1)$，知在$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上$p$为增函数，在$\left(\frac{1}{3},1\right)$上$p$为减函数，当$p=\frac{1}{3}$时$p$取得最大值，又$\frac{10n}{(n+5)(n+4)}=\frac{1}{3}$，解得$n$的值.

【详解】

（1）一次摸奖是从$(n+5)$个球中同时选两个球，有C_{n+5}^2种方法，它们是等可能的，其中两球不同色有$C_5^1C_n^1$种方法，所以一次摸奖就中奖的概率$P(n)=\frac{C_5^1C_n^1}{C_{n+5}^2}=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}(n\geqslant 5,n\in N)$.

（2）当$n=5$时，$P(5)=\frac{5}{9}$，由于摸奖是有放回的，因此三次摸奖可看作三次独立重复试验，三次摸奖恰有一次中奖的概率为$C_3^1\times\frac{5}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{80}{243}$.

（3）记（1）中的$P(n)=t=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}(n\geqslant 5,n\in N)$，

$\because P(n+1)-P(n)=\frac{10(n+1)}{(n+6)(n+5)}-\frac{10n}{(n+5)(n+4)}=\frac{10(4-n)}{(n+4)(n+5)(n+6)}<0$，

$\therefore P(n+1)<P(n)\leqslant P(5)=\frac{5}{9}$，即$0<t\leqslant\frac{5}{9}$.

$\because P=C_3^1\cdot t\cdot(1-t)^2=3t^3-6t^2+3t$，$F'(t)=9t^2-12t+3=3(3t-1)(t-1)$，

在$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{3},\frac{5}{9}\right]$上单调递减，

∴当$t=\frac{1}{3}$时，P取得最大值．由$t=\frac{10n}{(n+5)(n+4)}=\frac{1}{3}$，解得$n=20$或$n=1$（舍去），

∴当$n=20$时，三次摸奖（每次摸奖后放回），恰有一次中奖的概率P最大.

强化训练

1.1.

（1）$P_2(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P_2(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P_2(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P_3(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P_3(B)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，$P_3(C)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

综上，

棋子位置 掷骰子次数	A	B	C
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

（2）随机变量 X_4 的可能数值为 1，$-\frac{1}{2}$.

综合（1）得

$P\left(X_4=1\right)=\left(P_3(B)+P_3(C)\right)\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，

$P\left(X_4=-\frac{1}{2}\right)=\left(P_3(A)+P_3(C)\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(P_3(A)+P_3(B)\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$，

故随机变量 X_4 的分布列为

X_4	1	$-\frac{1}{2}$
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$E\left(X_4\right)=1\times\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{1}{16}$.

（3）易知 $b_n=c_n$，因此，$b_{n-1}=c_{n-1}(n\geq 2)$

而当 $n\geq 2$ 时，$b_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+c_{n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+b_{n-1}\right)$，

又 $a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=1$，

即 $2b_n+b_{n-1}=1$.

因此 $b_n=\frac{1}{2}\left(1-2b_{n-1}+b_{n-1}\right)=-\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}(n\geq 2)$，

故 $b_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}\left(b_{n-1}-\frac{1}{3}\right)(n\geq 2)$

即数列 $\left\{b_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $b_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

所以 $b_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

又 $a_n=1-2b_n=1-2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

故 $a_{2020}=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}\right]$.

2.

解：（1）$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,

$\bar{y}=\frac{20+50+100+150+180}{5}=100$

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=1\times 20+2\times 50+3\times 100+4\times 150+5\times 180=1920$

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$,

故 $\hat{b}=\frac{1920-5\times 3\times 100}{55-5\times 9}=42$,　　从而 $a=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=100-42\times 3=-26$,

所以所求线性回归方程为 $y=42x-26$，

令 $42x-26>300, x\in N^*$，解得 $x\geq 8$.

故预计到 2022 年该公司的网购人数能超过 300 万人

（2）遥控车开始在第 0 格为必然事件，$P_0=1$，第一次掷骰子出现奇数，遥控车移到第一格，其概率为 $\frac{1}{2}$,即 $P_1=\frac{1}{2}$.

遥控车移到第n（$2\leqslant n\leqslant 19$）格的情况是下列两种，而且也只有两种.

①遥控车先到第$n-2$格，又掷出奇数，其概率为$\frac{1}{2}P_{n-2}$

②遥控车先到第$n-1$格，又掷出偶数，其概率为$\frac{1}{2}P_{n-1}$

所以$P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$，$\therefore P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-P_{n-2})$

$\therefore$当$1\leqslant n\leqslant 19$时，数列$\{P_n-P_{n-1}\}$是公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列

$\therefore P_1-1=-\frac{1}{2},P_2-P_1=(-\frac{1}{2})^2,P_3-P_2=(-\frac{1}{2})^3,\cdots P_n-P_{n-1}=(-\frac{1}{2})^n$

以上各式相加，得$P_n-1=(-\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^3+\cdots+(-\frac{1}{2})^n=(-\frac{1}{3})\left[1-(-\frac{1}{2})^n\right]$

$\therefore P_n=\frac{2}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^{n+1}\right]$（$n=0,1,2,\cdots,19$），

$\therefore$获胜的概率$P_{19}=\frac{2}{3}\left[1-(-\frac{1}{2})^{20}\right]$

失败的概率$P_{20}=\frac{1}{2}P_{18}=\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^{19}\right]$

$\therefore$设参与游戏一次的顾客获得优惠券金额为X元，$X=200$或500

$\therefore$X 的期望$EX=500\times\frac{2}{3}\left[1-(\frac{1}{2})^{20}\right]+200\times\frac{1}{3}\left[1+(\frac{1}{2})^{19}\right]=100\left[4-(\frac{1}{2})^{19}\right]$

$\therefore$参与游戏一次的顾客获得优惠券金额的期望值为$100\left[4-(\frac{1}{2})^{19}\right]$，约 400 元.

3.

(1)若第k（$k<n$）次是第一次取到红球，第n次是第二次取到红球

则对应地有：$P=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k-1}\cdot\frac{1}{10}$

则第n次取球时 2 个红球都被取出的所有可能情况的概率和为：

$$\left(\frac{4}{5}\right)^0\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{10}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-3}\cdot\frac{1}{10}+\cdots+\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k-1}\cdot\frac{1}{10}+\cdots$$
$$+\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^0\cdot\frac{1}{10}$$

利用等比数列求和公式即可得：

$$\left(\frac{4}{5}\right)^0\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{5}\left(\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right)$$

(2)由题意可知，X的可能取值依次是2，3，…，9，10

特别地，当$X=10$时，对应的$P\left(X=10\right)=1-\left(P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)+\cdots+P\left(X=9\right)\right)$

由参考数据可得：$P\left(X=10\right)\approx 1-\frac{1}{5}\times 1.8\approx 0.64$

X对应的数学期望为：

$E\left(X\right)=\frac{1}{5}\left(2\cdot\frac{9}{10}+3\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots+9\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{9-1}-\left(2\cdot\frac{4}{5}+3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cdots+9\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{9-1}\right)\right)+10\times 0.64$由参考数据可得：

$E\left(X\right)\approx\frac{1}{5}\times 10.79+10\times 0.64\approx 8.6$

4.

解析：（1）因为上代父本、母本的遗传性状都是Aa，故子代的遗传性状有：AA，Aa，aA，aa，共 4 种，故AA，Aa（或aA），aa的概率分别是$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$.

（2）由题可得，$u_1=p^2$，$v_1=2pq$，$w_1=q^2$；

（3）由（2）知，$u_{n+1}=p_n^2$，$v_{n+1}=2p_nq_n$，$w_{n+1}=q_n^2$，

$\therefore q_{n+1}=\dfrac{v_{n+1}/2}{1-w_{n+1}}=\dfrac{p_nq_n}{1-q_n^2}=\dfrac{p_nq_n}{(1-q_n)(1+q_n)}=\dfrac{q_n}{1+q_n}$，

则$\dfrac{1}{q_{n+1}}=1+\dfrac{1}{q_n}$，$\therefore\left\{\dfrac{1}{q_n}\right\}$是公差为1的等差数列：

$\dfrac{1}{q_n}=\dfrac{1}{q_1}+(n-1)$，其中$q_1=\dfrac{\frac{v_1}{2}}{1-w_1}=\dfrac{pq}{1-q^2}=\dfrac{q}{1+q}$，

$\therefore\dfrac{1}{q_n}=\dfrac{1}{q}+n$，$q_n=\dfrac{q}{1+nq}$，于是$w_{n+1}=q_n^2=\left(\dfrac{q}{1+nq}\right)^2$，

$p_n=1-q_n=\dfrac{p+nq}{1+nq}$，$u_{n+1}=p_n^2=\left(\dfrac{p+nq}{1+nq}\right)^2$，$v_{n+1}=2p_nq_n=2\cdot\dfrac{p(p+nq)}{(1+nq)^2}$，

对于$w_{n+1}=\left(\dfrac{q}{1+nq}\right)^2$，$n$越大，$w_{n+1}$越小，所以这种实验长期进行下去，$w_n$越来越小，而$w_n$是子代中$aa$所占的比例，也即性状$aa$会渐渐消失.

5.

【详解】

（1）$A\to B\to C\to A;A\to C\to B\to A$，

所以$P_3(A)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

$A\to B\to A\to B;A\to C\to A\to B;A\to B\to C\to B;$

所以$P_3(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

$A\to B\to A\to C;A\to C\to A\to C;A\to C\to B\to C;$

所以$P_3(C)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

（2）$\because b_n=c_n$，即$b_{n-1}=c_{n-1}$，$n\geq 2$，

又$b_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+c_{n-1})$，

$\therefore n\geq 2$时$b_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+c_{n-1})=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})$

又$\because a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=1$，可得$2b_n+b_{n-1}=1$

由$b_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}b_{n-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(b_{n-1}-\dfrac{1}{3}\right)$

可得数列$\left\{b_n-\dfrac{1}{3}\right\}$是首项为$\dfrac{1}{6}$公比为$-\dfrac{1}{2}$的等比数列

$b_n-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，即$b_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

又$a_n=1-2b_n=1-2\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\dfrac{1}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

故$a_8=\dfrac{43}{128}$

6.（1）设恰好经过2次检验能把阳性样本全部检验出来为事件A，则$P(A)=\dfrac{A_2^2}{A_4^2}=\dfrac{1}{6}$，

所以，恰好经过2次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率为$\dfrac{1}{6}$；

（2）(i）由已知得$E\xi_1=k$，ξ_2的所有可能取值为1、$k+1$，$P(\xi_2=1)=(1-p)^k$，$P(\xi=k+1)=1-(1-p)^k$，

$\therefore E(\xi_2)=1\times(1-p)^k+(k+1)\left[1-(1-p)^k\right]=k+1-k(1-p)^k$，

由 $E\xi_1=E\xi_2$，得 $k=k+1-k(1-p)^k$，化简得 $p=f(k)=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$；

（ii）由题意知 $E\xi_1>E\xi_2$，则 $\frac{1}{k}<(1-p)^k$，$\because p=1-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$，即 $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}>\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$，$\therefore \ln k>\frac{k}{4}$，

构造函数 $g(x)=\ln x-\frac{x}{4}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4}=\frac{4-x}{4x}$，

当 $0<x<4$ 时，$g'(x)>0$，此时函数 $y=g(x)$ 单调递增；当 $x>4$ 时，$g'(x)<0$，此时函数 $y=g(x)$ 单调递减.

$\because g(8)=\ln 8-2=3\ln 2-2>0$， $g(9)=\ln 9-\frac{9}{4}=2\ln 3-2.25<0$，所以 k 的最大值为 8.

7.

(1)

X 的所有可能取值为 0，10，40

$P(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$， $P(X=10)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$

$P(X=40)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$.

∴ X 的分布列如下：

X	0	10	40
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{25}$

$E(X)=0\times\frac{4}{25}+10\times\frac{3}{5}+40\times\frac{6}{25}=\frac{78}{5}$；

(2)

根据题意得：第 $k-1$ 题回答正确的概率为 a_{k-1}，则 $a_k=a_{k-1}\cdot\frac{2}{5}+(1-a_{k-1})\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}a_{k-1}+\frac{3}{5}$，所以

$a_k-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}a_{k-1}+\frac{1}{10}=-\frac{1}{5}\left(a_{k-1}-\frac{1}{2}\right)$，而 $a_1=\frac{3}{5}$，∴ $\left\{a_k-\frac{1}{2}\right\}$ 成首项为 $\frac{1}{10}$，公比为 $-\frac{1}{5}$ 的等比数列，所以

$a_k-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$，故 $a_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$.

8.

解：（1）记恰好经过 3 次检验就能把阳性样本全部检验出来为 A 事件，

则 $P(A)=\frac{A_3^3+C_2^1A_2^2C_3^1}{A_5^3}=\frac{3}{10}$.

（2）①根据题意，可知 $E(\xi_1)=k$，ξ_2 的可能值为 1，$k+1$，

则 $P(\xi_2=1)=(1-p)^k$，$P(\xi_2=k+1)=1-(1-p)^k$，

所以 $E(\xi_2)=(1-p)^k+(k+1)(1-(1-p)^k)=k+1-k(1-p)^k$，

由 $E(\xi_1)=E(\xi_2)$，得 $k=k+1-k(1-p)^k$，

所以 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$（$k\in N^*$ 且 $k\geq 2$）.

②由于 $p=1-e^{-\frac{1}{4}}$，则 $E(\xi_2)=k+1-ke^{-\frac{k}{4}}$，

所以$k+1-ke^{-\frac{k}{4}}<k$，即$\ln k-\frac{k}{4}>0$，
设$f(x)=\ln x-\frac{x}{4}$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4}=\frac{4-x}{4x}$，$x>0$，
当$x\in(0,4)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,4)$上单调递增，
当$x\in(4,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(4,+\infty)$上单调递减，
$f(8)=\ln 8-2=3\ln 2-2>0$，$f(9)=\ln 9-\frac{9}{4}=2\ln 3-\frac{9}{4}<0$，
所以k的最大值为8.
9.
（1）①甲在第一次中奖的概率为$p_1=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$，
乙在第二次中奖的概率为$p_2=\frac{10}{15}\times\frac{8}{13}=\frac{16}{39}$.
②设甲参加抽奖活动的次数为X，则$X=1,2,3$，
$P(X=1)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$；$P(X=2)=\frac{10}{15}\times\frac{8}{13}=\frac{16}{39}$；$P(X=3)=\frac{10}{15}\times\frac{5}{13}\times 1=\frac{10}{39}$，

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{39}$	$\frac{10}{39}$

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{16}{39}+3\times\frac{10}{39}=\frac{25}{13}$.
（2）证明：丙在第奇数次中奖的概率为$\frac{1}{5}$，在第偶数次中奖的概率为$\frac{1}{4}$.
设丙参加抽奖活动的次数为Y，“丙中奖”为事件A，则$P(A)=1-\left(\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\right)^n=1-\left(\frac{3}{5}\right)^n$，
令$m\le n,m\in N^*$，则丙在第$2m-1$次中奖的概率$P(Y=2m-1)=\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\times\frac{1}{5}$
在第$2m$次中奖的概率$P(Y=2m)=\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\times\frac{1}{5}$，
即$P(Y=2m-1)=P(Y=2m)=\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\times\frac{1}{5}$，
在丙中奖的条件下，在第$2m-1$，$2m$次中奖的概率为$\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}}{P(A)}$，
则丙参加活动次数的均值为
$E(Y)=\frac{1}{5P(A)}\left[(1+2)+\frac{3}{5}(3+4)+\left(\frac{3}{5}\right)^2(5+6)+\cdots+\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}(2n-1+2n)\right]$，
设$S=3+7\times\frac{3}{5}+11\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+(4n-1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$，
则$\frac{3}{5}S=3\times\frac{3}{5}+7\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+(4n-5)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+(4n-1)\left(\frac{3}{5}\right)^n$，
$\therefore\frac{2}{5}S=3+4\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]-(4n-1)\left(\frac{3}{5}\right)^n$，
$S=\frac{45}{2}-\frac{12n+27}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$，
所以$E(Y)=\frac{\frac{45}{2}-\frac{12n+27}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}}{5\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}=\frac{\frac{45}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)-10n\left(\frac{3}{5}\right)^n}{5\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)}=\frac{9}{2}-\frac{2n\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}<\frac{9}{2}$.