高三数学一轮复习——概率解答题——概率与数列

1．（1）解析 1：分布列与期望

依题意可得，门将每次可以扑出点球的概率为 $p=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，

门将在前三次扑出点球的个数 X 可能的取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=C_3^0\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$，$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{1}{6}\right)^1\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{72}$，

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{5}{72}$，$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}$，$X$ 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

期望 $E(X)=0\times\frac{125}{216}+1\times\frac{25}{72}+2\times\frac{5}{72}+3\times\frac{1}{216}=\frac{1}{2}$.

（1）解析 2：二项分布

依题意可得，门将每次可以扑出点球的概率为 $p=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，门将在前三次扑出点球的个数 X 可能的取值为 0，1，2，3，易知 $X\sim B\left(3,\frac{1}{6}\right)$，$P(X=k)=C_3^k\times\left(\frac{1}{6}\right)^k\times\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$．$X$ 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

期望 $E(X)=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

（2）

解析：递推求解

①第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n，则当 $n\geq2$ 时，第 $n-1$ 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_{n-1}，

第 $n-1$ 次传球之前球不在甲脚下的概率为 $1-p_{n-1}$，则 $p_n=p_{n-1}\cdot0+(1-p_{n-1})\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}$，

从而 $p_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{4}\right)$，又 $p_1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$\therefore\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$ 是以 $\frac{3}{4}$ 为首项．公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列.

②由①可知 $p_n=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$，$p_{10}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^9+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$，$q_{10}=\frac{1}{3}(1-p_{10})>\frac{1}{4}$，故 $p_{10}<q_{10}$.

2．(1)解：得 2 分即回答 1 题正确或者回答 2 题都错误，所以 $p(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，

得 3 分即回答 2 题 1 题正确，1 题错误或者回答 3 题都错误，所以 $p(3)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$；

(2)

解：因为小明得$n+1$分有两种情况，一种是小明在得n分的情况下又答 1 题错误；

另一种是小明在得$n-1$分的情况下又答 1 题正确.

所以$p(n+1)=\frac{1}{2}p(n)+\frac{1}{2}p(n-1)$，即$p(n+1)-p(n)=-\frac{1}{2}\left[p(n)-p(n-1)\right]$，

因为$p(2)-p(1)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq 0$，所以$\frac{p(n+1)-p(n)}{p(n)-p(n-1)}=-\frac{1}{2}$，

因此$\{p(n+1)-p(n)\}$是以$\frac{1}{4}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，所以$p(n+1)-p(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，

当$n\geqslant 2$时，$p(n)=\left[p(n)-p(n-1)\right]+\left[p(n-1)-p(n-2)\right]+\cdots+\left[p(2)-p(1)\right]+p(1)$，

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，又$p(1)=\frac{1}{2}$符合上式，

所以$p(n)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$.

3．解：（1）若一次性购买5个甲系列盲盒，得到玩偶的情况总数为3^5，集齐A_1，A_2，A_3玩偶，则有两种情况：

①其中一个玩偶3个，其他两个玩偶各1个，则有$C_3^1C_5^3A_2^2$种结果；

②若其中两个玩偶各 2 个，另外两个玩偶 1 个，则共有$C_3^1C_5^1C_4^2$种结果，

故$P(E_5)=\frac{C_3^1C_5^3A_2^2+C_3^1C_5^1C_4^2}{3^5}=\frac{60+90}{243}=\frac{150}{243}=\frac{50}{81}$；

若一次性购买4个乙系列盲盒，全部为B_1与全部为B_2的概率相等，均为$\frac{1}{2^4}$， 故$P(F_4)=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^4}=\frac{7}{8}$；

（2）①由题可知：$Q_1=\frac{2}{3}$，

当$n\geq 2$时，$Q_n=\frac{1}{4}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(1-Q_{n-1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}Q_{n-1}$，则$Q_n-\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}\left(Q_{n-1}-\frac{2}{5}\right)$，$Q_1-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$，即$\left\{Q_n-\frac{2}{5}\right\}$是以$\frac{4}{15}$为首项，以$-\frac{1}{4}$为公比的等比数列.所以$Q_n-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，即$Q_n=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$；

②因为每天购买盲盒的100人都已购买过很多次，所以对于每一个人来说，某一天来购买盲盒时，可看作$n\to+\infty$，所以，其购买甲系列的概率近似于$\frac{2}{5}$，

假设用ξ表示一天中购买甲系列盲盒的人数，则$\xi\sim B\left(100,\frac{2}{5}\right)$，

所以$E\xi=100\times\frac{2}{5}=40$，即购买甲系列的人数的期望为40，

所以礼品店应准备甲系列盲盒40个，乙系列盲盒60个.

4．(1)答对的题数之和为3的倍数分别为$1+2$，$2+4$，$1+5$，$4+5$，$3+3$，$6+6$，$3+6$，其概率为$\frac{5\times 2+2}{36}=\frac{1}{3}$，

则答对的题数之和不是3的倍数的概率为$\frac{2}{3}$，

第$(n+1)$次由甲组答题，是第n次由甲组答题，第$(n+1)$次继续由甲组答题的事件与第n次由乙组答题，第$(n+1)$次

由甲组答题的事件和，它们互斥，又各次答题相互独立，

所以第n次由甲组答题，第$(n+1)$次继续由甲组答题的概率为$\frac{1}{3}P_n$，

第n次由乙组答题，第$(n+1)$次由甲组答题的概率为$\frac{2}{3}(1-P_n)$，

因此$P_{n+1}=\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}(1-P_n)=-\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}(n\in N^*)$，则$P_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}(P_n-\frac{1}{2})$

因为第一次由甲组开始，则$P_1=1$，所以$\{P_n-\frac{1}{2}\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列，

所以$P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{3})^{n-1}$，即$P_n=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{2}$

(2)由于第1次由甲组答题，则只要第2次、第3次、第4次这3次中再由甲组答题一次即可，由(1)可知$P_2=\frac{1}{3}$，$P_3=\frac{5}{9}$，

$P_4=\frac{13}{27}$，所以所求概率$P=P_1P_2(1-P_3)(1-P_4)+P_1(1-P_2)P_3(1-P_4)+P_1(1-P_2)(1-P_3)P_4$

$=\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{5}{9})\cdot(1-\frac{13}{27})+(1-\frac{1}{3})\cdot\frac{5}{9}\cdot(1-\frac{13}{27})+(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{5}{9})\cdot\frac{13}{27}=\frac{100}{243}$.

所以$P=\frac{100}{243}$.

5．（1）棋子开始在第 0 站为必然事件，$\therefore P_0=1$.

第一次掷硬币出现正面，棋子跳到第 1 站，其概率为$\frac{1}{2}$，$\therefore P_1=\frac{1}{2}$.

棋子跳到第 2 站应从如下两方面考虑：

①前两次掷硬币都出现正面，其概率为$\frac{1}{4}$；②第一次掷硬币出现反面，其概率为$\frac{1}{2}$.

$\therefore P_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

（2）证明：棋子跳到第n（$2\leqslant n\leqslant 99$）站的情况是下列两种，而且也只有两种：

①棋子先到第$n-2$站，又掷出反面，其概率为$\frac{1}{2}P_{n-2}$；

②棋子先到第$n-1$站，又掷出正面，其概率为$\frac{1}{2}P_{n-1}$.

$\therefore P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$.

$\therefore P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}\left(P_{n-1}-P_{n-2}\right)$.

（3）由（2）知，当$1\leqslant n\leqslant 9$时，数列$\left\{P_n-P_{n-1}\right\}$是首项为$P_1-P_0=-\frac{1}{2}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

$\therefore P_1-1=-\frac{1}{2}$，$P_2-P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$，$P_3-P_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$，…，$P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

以上各式相加，得$P_n-1=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

$\therefore P_n=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right](0\leqslant n\leqslant 99).\therefore P_{99}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right]$，

$P_{100}=\frac{1}{2}P_{98}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{99}\right]=\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{99}\right]$.

6．（1）由题意可知，随机变量 X 的可能取值有 3 、 4 、 5 、 6 ，

$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$， $P(X=4)=C_3^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，

$P(X=5)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$， $P(X=6)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

所以，随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以， $E(X)=3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8}=\frac{9}{2}$ ；

（2）依题意，当 $1\le n\le 98$ 时，棋子要到第 $(n+1)$ 站，有两种情况：

由第 n 站跳 1 站得到，其概率为 $\frac{1}{2}P_n$ ；

可以由第 $(n-1)$ 站跳 2 站得到，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$.

所以， $P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}P_{n-1}$.

同时减去 P_n 得 $P_{n+1}-P_n=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_n-P_{n-1})(1\le n\le 98)$ ；

（3）依照（2）的分析，棋子落到第 99 站的概率为 $P_{99}=\frac{1}{2}P_{98}+\frac{1}{2}P_{97}$ ，

由于若跳到第 99 站时，自动停止游戏，故有 $P_{100}=\frac{1}{2}P_{98}$.

所以 $P_{100}<P_{99}$ ，即最终棋子落在第 99 站的概率大于落在第 100 站的概率，游戏不公平.