湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题（1）

1.利用导数研究不等式恒成立问题的求解策略

（1）通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；

（2）利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题；

（3）根据恒成立或有解求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，进行求解，若参变分离不易求解问题，就要考虑利用分类讨论法和放缩法，注意恒成立与存在性问题的区别.

2.利用参变量分离法求解函数不等式恒（能）成立，可根据以下原则进行求解

（1）$\forall x \in D$，$m \le f\left(x\right) \Leftrightarrow m \le f\left(x\right)_{\min}$；

（2）$\forall x \in D$，$m \ge f\left(x\right) \Leftrightarrow m \ge f\left(x\right)_{\max}$；

（3）$\exists x \in D$，$m \le f\left(x\right) \Leftrightarrow m \le f\left(x\right)_{\max}$；

（4）$\exists x \in D$，$m \ge f\left(x\right) \Leftrightarrow m \ge f\left(x\right)_{\min}$.

3.不等式的恒成立与有解问题，可按如下规则转化

一般地，已知函数 $y = f\left(x\right)$，$x \in \left[a,b\right]$，$y = g\left(x\right)$，$x \in \left[c,d\right]$.

（1）若 $\forall x_1 \in \left[a,b\right]$，$\forall x_2 \in \left[c,d\right]$，有 $f\left(x_1\right) < g\left(x_2\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)_{\max} < g\left(x\right)_{\min}$；

（2）若 $\forall x_1 \in \left[a,b\right]$，$\exists x_2 \in \left[c,d\right]$，有 $f\left(x_1\right) < g\left(x_2\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)_{\max} < g\left(x\right)_{\max}$；

（3）若 $\exists x_1 \in \left[a,b\right]$，$\exists x_2 \in \left[c,d\right]$，有 $f\left(x_1\right) < g\left(x_2\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)_{\min} < g\left(x\right)_{\max}$；

（4）若 $\forall x_1 \in \left[a,b\right]$，$\exists x_2 \in \left[c,d\right]$，有 $f\left(x_1\right) = g\left(x_2\right)$ 成立，则 $f\left(x\right)$ 的值域是 $g\left(x\right)$ 的值域的子集.

4.不存在最值的情况，注意临界值及是否取等号

5. 恒成立问题的四种解题方法$\begin{cases}\text{函数同构}\\ \text{端点效应}\\ \text{分类讨论}\\ \text{参变量分离+洛必达}\end{cases}$

恒成立问题解题基本方法1——直接求最值

1. 已知函数 $f\left(x\right)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 $f\left(x\right)\geq 1$，求 a 的取值范围.【答案】:（1） $\dfrac{2}{e-1}$；（2） $\left[1,+\infty\right)$.

2. 已知函数 $f\left(x\right)=-a\ln x-\dfrac{e^x}{x}+ax,a\in R$.

（1）当 $a<0$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+xf\ '\left(x\right)$，若关于 x 的不等式 $g\left(x\right)\leq -e^x+\dfrac{x^2}{2}+\left(a-1\right)x$ 在 $\left[1,2\right]$ 上有解，求 a 的取值范围.

【答案】:（1） $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减；（2） $\left(-\infty,0\right]$.

3. 设函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)+a\left(x^2-x\right)$，其中 $a\in R$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 极值点的个数，并说明理由；

（2）若 $\forall x>0,f\left(x\right)\geq 0$ 成立，求 a 的取值范围.

【答案】:（Ⅰ）见解析；（Ⅱ） a 的取值范围是 $\left[0,1\right]$.

4. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2+ax+b$， $g\left(x\right)=e^x\left(cx+d\right)$. 若曲线 $y=f\left(x\right)$ 和曲线 $y=g\left(x\right)$ 都过点 $P\left(0,2\right)$，且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$.

（1）求 a,b,c,d 的值；

（2）若 $x\geq -2$ 时， $f\left(x\right)\leq kg\left(x\right)$，求 k 的取值范围.

【答案】:（1） $a=4,b=2,c=2,d=2$；（2） $\left[1,\mathrm{e}^2\right]$

5. 已知函数 $f\left(x\right)=xe^x-a\ln x-ax$.

（1）若 $a=e$，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若对任意 $x>0$ 恒有不等式 $f\left(x\right)\geq 1$ 成立，求实数 a 的值.

【答案】:（1） $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增；（2）1.

6.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+x,\quad g(x)=ax^2+3x+1$.

(1)求 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

(2)当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求 a 取值范围.

【答案】(1) $3x-y+1=0$；(2) $(-\infty,\frac{1}{2}]$.

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{k}{x}$，曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

（1）求 a,b 的值；

（2）如果当 $x>0$，且 $x\neq 1$ 时，$f\left(x\right)>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$，求 k 的取值范围.

【答案】:（1）$a=1$，$b=1$；（2）$\left(-\infty,0\right]$.

8. 设 $a\in R$，函数 $f\left(x\right)=\frac{x-a}{\left(x+a\right)^2}$.

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线与直线 $y=3x-2$ 平行，求 a 的值；

（2）若对于定义域内的任意 x_1，总存在 x_2 使得 $f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$，求 a 的取值范围.

【答案】:（1）$a=\pm 1$；（2）$[0,+\infty)$.

恒成立问题解题基本方法 2——参变分离

类型一　常规

9. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{a-1}{x}-x$，其中 $a<2$.

（1）讨论 $f(x)$ 的极值；

（2）设 $m\in\mathbf{Z}$，当 $a=1$ 时，若关于 x 的不等式 $f(x)<m-(x-2)e^x$ 在区间 $\left(0,1\right]$ 上恒成立，求 m 的最小值.

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-ax-a\right)e^x$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $a\in\left(0,2\right)$，对于任意 $x_1,x_2\in\left[-4,0\right]$，都有 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<4e^{-2}+me^a$ 恒成立，求 m 的取值范围.

【答案】:（1）见解析；（2）$m>\frac{1+e^2}{e^3}$.

类型二　参变分离后，分母含 0

11. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+ax^{2}-x$.

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)\geq \frac{1}{2}x^{3}+1$，求 a 的取值范围.

.

12. 已知函数 $f\left(x\right)=x^{2}+4x+2$，$g\left(x\right)=e^{x}\left(2x+2\right)$. 若 $x\geq -2$ 时，$f(x)\leq kg(x)$，求 k 的取值范围.

13. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^{x}-\frac{a}{2}x^{2}+ax$，$a\in R$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若不等式 $f\left(x\right)+\left(x+1\right)e^{x}+\frac{a}{2}x^{2}-2ax+a>0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

类型三 参变分离后，需多次求导

14. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{\ln x+a}{x}$.

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线为 $y=1$，求 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）若 $f\left(x\right)\leq e^{x}+\frac{2}{x}-1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】:（1）$f\left(x\right)$ 的极大值为 1，不存在极小值；（2）$a\leq 3$.

15.已知函数 $f\left(x\right)=\left(2-a\right)\left(x-1\right)-2\ln x$，$g\left(x\right)=xe^{1-x}$（$a\in R$，$e$ 为自然对数的底数）.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）对任意的 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$f\left(x\right)>0$ 恒成立，求 a 的最小值；

（3）若对任意给定的 $x_{0}\in\left(0,e\right]$，在 $\left(0,e\right]$ 上总存在两个不同的 $x_{i}\left(i=1,2\right)$，使得 $f\left(x_{i}\right)=g\left(x_{0}\right)$ 成立，求 a 的取值范围.

【答案】:（1）当 $a\geq 2$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递减区间是 $(0,+\infty)$；当 $a<2$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $(0,\frac{2}{2-a})$，单调递增区间是 $(\frac{2}{2-a},+\infty)$；（2）$a=2-4\ln 2$；（3）$(-\infty,2-\frac{3}{e-1}]$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——恒（能）成立、有解问题（2）

类型四　参变分离后，零点设而不求（隐零点）

16.已知函数 $f\left(x\right)=x\left(a+\ln x\right)$ 有极小值 $-e^{-2}$.

（1）求实数 a 的值；

（2）若 $k\in Z$，且 $k\left(x-1\right)<f\left(x\right)$ 对任意 $x>1$ 恒成立，求 k 的最大值.

【答案】:（1）$a=1$；（2）$k_{\max}=3$.

17. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x$，$h\left(x\right)=ax\left(a\in R\right)$.

（1）函数 $f\left(x\right)$ 的图象与 $h\left(x\right)$ 的图象无公共点，求实数 a 的取值范围；

（2）是否存在实数 m，使得对任意的 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，都有函数 $y=f\left(x\right)+\dfrac{m}{x}$ 的图象在 $g\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}$ 的图象的下方？若存在，请求出整数 m 的最大值；若不存在，请说明理由.

（参考数据：$\ln 2=0.6931$，$\ln 3=1.0986$，$\sqrt[3]{e}=1.3956$）

【答案】:（Ⅰ）$(\dfrac{1}{e},+\infty)$；（Ⅱ）1.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{m+\ln x}{x}$，$m\in R$，$x>1$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若 $m=4$，$k\in N^*$，且 $\dfrac{k}{x+1}<f\left(x\right)$ 恒成立，求 k 的最大值.

【答案】:（1）答案不唯一，具体见解析；（2）6.

恒成立问题解题基本方法 3——变更主元

19. 已知函数 $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+a^2\left(a,b\in R\right)$

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处有极值为 10，求 b 的值；

（2）若对于任意的 $a\in\left[-4,+\infty\right)$，$f\left(x\right)$ 在 $x\in\left[0,2\right]$ 上单调递增，求 b 的最小值.

【答案】:（1）b 的值为 -11；（2）b 的最小值为 $\dfrac{16}{3}$.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=mx\ln x$， $m\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）当 $0<m\le\frac{e^2}{2}$ 时，证明： $f\left(x\right)<e^x$.

恒成立问题解题基本方法 4——赋值法

取特值代入后，参数需存在；后运用变更主元思维求解.

21. 已知函数 $f(x)=e^x\left(x\ln x+\frac{2}{e}\right)$， $g(x)=ax$， $a\in Z$，其中 e 是自然对数的底数.

（1）求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）当 $x>0$ 时， $f(x)>g(x)$ 恒成立，求 a 的最大值.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x+\left(x+1\right)^2$（ $a\ne 0$， $x>0$ ）

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）对于任意 $x\in\left[1,+\infty\right)$ 均有 $f\left(x\right)-\frac{x^2}{a}\le 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】:（1）答案见解析;（2） $0<a\le\frac{1}{4}$.

23. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-ax\ln x+a+1(a\in\mathbf{R})$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若对于任意的 $x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$，都有 $f\left(x\right)>0$，求实数 a 的取值范围.

24. 已知函数 $f\left(x\right)=e^x$， $g\left(x\right)=\ln x$.

（Ⅰ）若函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+ag\left(x\right)$ 存在极小值，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）若 $m>0$，且 $m^2x^2f\left(x-1\right)-\left(x+1\right)g\left(x\right)-mx\ge 0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

（参考数据： $\ln 2\approx 0.69$， $e\approx 2.718$ ）.【答案】:（Ⅰ） $m\ge 1$.;（Ⅱ） $m\ge 1$.

25. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x-a}-ax$， $a\in R$.

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点，求 a 的取值范围；

（2）若对任意的 $x\in[0,+\infty)$，均有 $f(x+1)+\frac{a}{2}(x+2)\geq\sqrt{x^2+ax+1}$，求 a 的取值范围.（注：$e\approx2.71828$ 为自然对数的数）【答案】:（1）$(1,+\infty)$；（2）$(-\infty,1]$.

存在性问题与有解问题的基本方法

26．已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)已知 $\lambda>0$，若存在 $x\in(1,+\infty)$ 时，不等式 $\lambda x^2-\lambda x\geq\left(e^{\lambda x}-1\right)\ln x$ 成立，求 λ 的取值范围.

27．已知函数 $f(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x(a>0)$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

28．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax+2$（e为自然对数的底数）.

(1)若 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)设 $g(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，均存在 $x_0\in[-1,2]$，使得 $f(x)>g(x_0)$，求实数 a 的取值范围.

29．已知函数 $f(x)=x^2+(2a+2)\ln x$.

(1)当 $a=-5$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若存在 $x\in[2,\mathrm{e}]$，使得 $f(x)-x^2>2x+\frac{2a+4}{x}$ 成立，求实数 a 的取值范围.

30．已知函数 $f(x)=e^x-ax-1$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间与极值；

(2)若 $f(x)\leq x^2$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上有解，求实数 a 的取值范围.

31．已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+8$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若在区间 $[1,2)$ 内至少存在一个实数 x，使得 $f(x)<0$ 成立，求实数 a 的取值范围.

恒成立与存在性问题结合

32．已知函数$f(x)=e^{x}+e^{-x}$，其中 e 是自然对数的底数．

（1）判断并证明 $f(x)$ 的奇偶性；

（2）若关于 x 的不等式$mf(x)\le e^{-x}+m-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，求实数 m 的取值范围；

（3）已知正数 a 满足：存在$x_0\in[1,+\infty)$，使得$f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$成立，试比较e^{a-1}与a^{e-1}的大小，并证明你的结论．

33．已知函数$f(x)=\ln x+x^{2}-ax$，$a\in R$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若对任意的$a\in(1,2)$，$x_0\in[1，2]$．不等式$f(x_0)>m\ln a$恒成立，求实数m的取值范围．

34．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax$．

（1）若函数 $f\left(x\right)$在定义域上的最大值为1，求实数a的值；

（2）设函数$h(x)=(x-2)e^{x}+f(x)$，当a=1时，$h(x)\le b$对任意的$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$恒成立，求满足条件的实数$b$ 的最小整数值.

基本方法 1——直接求最值

1. 已知函数 $f\left(x\right)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 $f\left(x\right)\geq 1$，求 a 的取值范围.

【答案】:（1）$\dfrac{2}{e-1}$；（2）$\left[1,+\infty\right)$.

【解析】:（1）$\because f(x)=e^{x}-\ln x+1$，$\therefore f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x}$，$\therefore k=f'(1)=e-1$.

$\because f(1)=e+1$，$\therefore$ 切点坐标为 $\left(1,1+e\right)$,

$\therefore$ 函数 f(x) 在点(1, f(1) 处的切线方程为 $y-e-1=(e-1)(x-1)$, 即 $y=\left(e-1\right)x+2$,

$\therefore$ 切线与坐标轴交点坐标分别为 $(0,2),(\dfrac{-2}{e-1},0)$,

$\therefore$ 所求三角形面积为 $\dfrac{1}{2}\times 2\times\left|\dfrac{-2}{e-1}\right|=\dfrac{2}{e-1}$；

（2）$\because f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$,

$\therefore f'(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，且 $a>0$.

设 $g(x)=f'(x)$, 则 $g'(x)=ae^{x-1}+\dfrac{1}{x^{2}}>0,$

$\therefore$ g(x) 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $a=1$ 时，$f'(1)=0$, $\therefore f\left(x\right)_{min}=f\left(1\right)=1$, $\therefore f\left(x\right)\geq 1$ 成立.

当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{a}<1$，$\therefore e^{\frac{1}{a}-1}<1$，$\therefore f'(\dfrac{1}{a})f'(1)=a(e^{\frac{1}{a}-1}-1)(a-1)<0$,

$\therefore$ 存在唯一 $x_0>0$，使得 $f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0}=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$,

$\therefore ae^{x_0-1}=\dfrac{1}{x_0}$，$\therefore \ln a+x_0-1=-\ln x_0$,

因此 $f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a=\dfrac{1}{x_0}+\ln a+x_0-1+\ln a\geq 2\ln a-1+2\sqrt{\dfrac{1}{x_0}\cdot x_0}=2\ln a+1>1$,

$\therefore f\left(x\right)>1,\ \therefore f\left(x\right)\geq 1$ 恒成立；

当 $0<a<1$ 时，$f(1)=a+\ln a<a<1,\ \therefore f(1)<1,\ f(x)\geq 1$ 不是恒成立.

综上所述，实数a的取值范围是$[1,+\infty)$.

2. 已知函数$f(x)=-a\ln x-\dfrac{e^x}{x}+ax, a\in R$.

（1）当$a<0$时，讨论$f(x)$的单调性；

（2）设$g(x)=f(x)+xf'(x)$，若关于x的不等式$g(x)\le -e^x+\dfrac{x^2}{2}+(a-1)x$在$[1,2]$上有解，求$a$的取值范围.

【答案】：（1）$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；（2）$(-\infty,0]$.

【解析】：（1）由题意知，$f'(x)=-\dfrac{a}{x}-\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}+a=\dfrac{(ax-e^x)(x-1)}{x^2}$，

令$F(x)=(ax-e^x)(x-1)$，当$a<0$时，$ax-e^x<0$恒成立，

∴当$x>1$时，$F(x)<0$，即$f'(x)>0$；当$0<x<1$时，$F(x)>0$，即$f'(x)<0$；

∴函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

（2）因为$g(x)=f(x)+xf'(x)=-a\ln x-\dfrac{e^x}{x}+ax+x\left(-\dfrac{a}{x}-\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}+a\right)=-a\ln x-e^x+2ax-a$，

由题意知，存在$x_0\in[1,2]$，使得$g(x_0)\le -e^{x_0}+\dfrac{x_0^2}{2}+(a-1)x_0$成立.

即存在$x_0\in[1,2]$，使得$-a\ln x_0+(a+1)x_0-\dfrac{x_0^2}{2}-a\le 0$成立；

令$h(x)=-a\ln x+(a+1)x-\dfrac{x^2}{2}-a, x\in[1,2]$，$\therefore h'(x)=\dfrac{-a}{x}+a+1-x=-\dfrac{(x-a)(x-1)}{x}, x\in[1,2]$，

①当$a\le 1$时，对任意$x\in[1,2]$，都有$h'(x)\le 0$，∴函数$h(x)$在$[1,2]$上单调递减，

$\therefore h(x)_{\min}=h(2)=-a\ln 2+a\le 0$成立，解得$a\le 0$，$\therefore a\le 0$；

②当$1<a<2$时，令$h'(x)>0$，解得$1<x<a$；令$h'(x)<0$，解得$a<x<2$，

∴函数$h(x)$在$[1,a]$上单调递增，在$[a,2]$上单调递减，

又$h(1)=\dfrac{1}{2}$，$\therefore h(2)=-a\ln 2+a\le 0$，解得$a\le 0$，$\therefore a$无解；

③当$a\ge 2$时，对任意的$x\in[1,2]$，都有$h'(x)\ge 0$，∴函数$h(x)$在$[1,2]$上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=\dfrac{1}{2}>0$，不符合题意，舍去；

综上所述，a的取值范围为$(-\infty,0]$.

3. 设函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)+a\left(x^2-x\right)$，其中 $a\in R$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 极值点的个数，并说明理由；

（2）若 $\forall x>0, f\left(x\right)\geq 0$ 成立，求 a 的取值范围.

【答案】:（Ⅰ）见解析；（Ⅱ）a 的取值范围是 $\left[0,1\right]$.

【解析】：函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)+a\left(x^2-x\right)$ 的定义域为 $\left(-1,+\infty\right)$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{x+1}+2ax-a=\frac{2ax^2+ax+1-a}{x+1}$$

令 $g\left(x\right)=2ax^2+ax+1-a$， $x\in\left(-1,+\infty\right)$

（1）当 $a=0$ 时， $g\left(x\right)=1>0$ ， $f'\left(x\right)>0$ 在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上恒成立

所以，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上单调递增无极值；

（2）当 $a>0$ 时， $\Delta=a^2-8a\left(1-a\right)=a\left(9a-8\right)$

①当 $0<a\leq\frac{8}{9}$ 时，$\Delta\leq 0$， $g\left(x\right)\geq 0$，所以， $f'\left(x\right)\geq 0$，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上单调递增无极值；

②当 $a>\frac{8}{9}$ 时，$\Delta>0$，设方程 $2ax^2+ax+1-a=0$ 的两根为 $x_1,x_2(x_1<x_2),$

因为 $x_1+x_2=-\frac{1}{2}$，所以 $x_1<-\frac{1}{4},x_2>-\frac{1}{4}$

由 $g\left(-1\right)=1>0$ 可得：$-1<x_1<-\frac{1}{4},$

所以，当 $x\in\left(-1,x_1\right)$ 时， $g\left(x\right)>0, f'\left(x\right)>0$ ，函数 $f\left(x\right)$ 单调递增；

当 $x\in\left(x_1,x_2\right)$ 时， $g\left(x\right)<0, f'\left(x\right)<0$ ，函数 $f\left(x\right)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_2,+\infty\right)$ 时， $g\left(x\right)>0, f'\left(x\right)>0$ ，函数 $f\left(x\right)$ 单调递增；

因此函数 $f\left(x\right)$ 有两个极值点.

（3）当 $a<0$ 时，$\Delta>0$，由 $g\left(-1\right)=1>0$ 可得： $x_1<-1,$

当 $x\in\left(-1,x_2\right)$ 时， $g\left(x\right)>0, f'\left(x\right)>0$ ，函数 $f\left(x\right)$ 单调递增；

当 $x\in\left(x_2,+\infty\right)$ 时， $g\left(x\right)<0, f'\left(x\right)<0$ ，函数 $f\left(x\right)$ 单调递减；

因此函数 $f\left(x\right)$ 有一个极值点.

综上：当 $a<0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上有唯一极值点；当 $0\leq a\leq\frac{8}{9}$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,+\infty\right)$ 上无极值点；

当$a>\dfrac{8}{9}$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$上有两个极值点；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，

（1）当$0\le a\le\dfrac{8}{9}$时，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

因为$f\left(0\right)=0$，所以，$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)>0$，符合题意；

（2）当$\dfrac{8}{9}<a\le1$ 时，由$g\left(0\right)\ge0$，得$x_2\le0$，所以，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

又$f\left(0\right)=0$，所以，$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)>0$，符合题意；

（3）当$a>1$ 时，由$g\left(0\right)<0$，可得$x_2>0$，所以$x\in\left(0,x_2\right)$ 时，函数$f\left(x\right)$ 单调递减；

又$f\left(0\right)=0$，所以，当$x\in\left(0,x_2\right)$时，$f\left(x\right)<0$ 不符合题意；

（4）当$a<0$时，设$h\left(x\right)=x-\ln\left(x+1\right)$

因为$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$h'\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}>0$，所以$h\left(x\right)$ 在$\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

因此当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$h\left(x\right)>h\left(0\right)=0$，即：$\ln\left(x+1\right)<x$

可得：$f\left(x\right)<x+a\left(x^2-x\right)=ax^2+\left(1-a\right)x$

当$x>1-\dfrac{1}{a}$ 时，$ax^2+\left(1-a\right)x<0$，此时，$f\left(x\right)<0$, 不合题意.

综上所述，a的取值范围是 $0,1$.

4. 已知函数$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=e^x(cx+d)$. 若曲线$y=f(x)$和曲线$y=g(x)$都过点$P(0,2)$，且在点P处有相同的切线$y=4x+2$.

（1）求a,b,c,d的值；

（2）若$x\ge-2$时，$f(x)\le kg(x)$，求k的取值范围.

【答案】：（1）$a=4,b=2,c=2,d=2$；（2）$\left[1,\mathrm{e}^2\right]$

【解析】：（1）由已知得$f\left(0\right)=2,g\left(0\right)=2$，$f'\left(0\right)=4,g'\left(0\right)=4$

而$f'\left(x\right)=2x+a,g'\left(x\right)=e^x\left(cx+d+c\right)$，$\therefore a=4,b=2,c=2,d=2$.

（2）由（1）知，$f\left(x\right)=x^2+4x+2,g\left(x\right)=2e^x\left(x+1\right)$，

设函数$F\left(x\right)=kg\left(x\right)-f\left(x\right)=2ke^x\left(x+1\right)-x^2-4x-2,\left(x\ge-2\right)$，

$F'\left(x\right)=2ke^x\left(x+2\right)-2x-4=2\left(x+2\right)\left(ke^x-1\right)$.

由题设可得$F\left(0\right)\ge0$，即$k\ge1$，

令 $F'(x)=0$ 得 $x_1=-\ln k, x_2=-2$，

①若 $1\le k<e^2$，则 $-2<x_1\le 0$，$\therefore$ 当 $x\in(-2,x_1)$ 时，

$F'(x)<0$，当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，即 F（x）在 $x\in(-2,x_1)$ 单调递减，在 $(x_1,+\infty)$ 单调递增，故 $F(x)$ 在 $x=x_1$ 取最小值 $F(x_1)$，而 $F(x_1)=2x_1+2-x_1^{\ 2}-4x_1-2=-x_1(x_1+2)\ge 0$.

$\therefore$ 当 $x\ge -2$ 时，$F(x)\ge 0$，即 $f(x)\le kg(x)$ 恒成立.

②若 $k=e^2$，则 $F'(x)=2e^2(x+2)(e^x-e^2)$，

$\therefore$ 当 $x\ge -2$ 时，$F'(x)\ge 0$，$\therefore F(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 单调递增，

而 $F(-2)=0$，$\therefore$ 当 $x\ge -2$ 时，$F(x)\ge 0$，即 $f(x)\le kg(x)$ 恒成立，

③若 $k>e^2$，则 $F(-2)=-2ke^{-2}+2=-2e^{-2}(k-e^2)<0$，

$\therefore$ 当 $x\ge -2$ 时，$f(x)\le kg(x)$ 不可能恒成立.

综上所述，k 的取值范围为 $\left[1,e^2\right]$.

5. 已知函数 $f(x)=xe^x-a\ln x-ax$.

（1）若 $a=e$，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若对任意 $x>0$ 恒有不等式 $f(x)\ge 1$ 成立，求实数 a 的值.

【答案】:（1） $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；（2）1.

【解析】:（1） $f'(x)=e^x+xe^x-\dfrac{a}{x}-a=e^x(x+1)-\dfrac{a(x+1)}{x}=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)$

当 $a=e$ 时， $f'(x)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{e}{x}\right)$ $x>0$

当 $x>1$ 时 $e^x>\dfrac{e}{x}$， $e^x-\dfrac{e}{x}>0$ 可得 $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，

当 $0<x<1$ 时， $e^x<\dfrac{e}{x}$， $e^x-\dfrac{e}{x}<0$，可得 $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，

综上所述： $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

（2）由（1）知 $f'(x)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)$

当 $a<0$ 时， $f'(x)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)>0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 单调递增， $f(x)$ 的值域为 R，不符合题意；

当 $a=0$ 时，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$，也不符合题意.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=(x+1)\left(e^x-\frac{a}{x}\right)=0$ 可得 $e^x-\frac{a}{x}=0$，即 $e^x\cdot x-a=0$，

令 $g(x)=e^x\cdot x$，则 $g'(x)=e^x\cdot x+e^x=e^x(x+1)>0$，所以 $g(x)=e^x\cdot x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

设存在 $x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $e^{x_0}\cdot x_0=a$，两边同时取对数可得 $x_0+\ln x_0=\ln a$

则 $0<x<x_0$ 时，$e^x\cdot x<a$，$f'(x)<0$，

当 $x>x_0$ 时，$e^x\cdot x<a$，$f'(x)>0$，

所以当 $x=x_0$ 时，$f(x)_{\min}=x_0\cdot e^{x_0}-a\ln x_0-ax_0=a-a(-x_0+\ln a)-ax_0=a-a\ln a$，

故只需 $a-alna\geq 1$ 即可，

令 $h(a)=a-a\ln a\ (a>0)$，$h'(a)=1-\ln a-a\times\frac{1}{a}=-\ln a$，

由 $h'(a)>0$ 可得 $0<a<1$，由 $h'(a)<0$ 可得 $a>1$，因此 $h(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

从而 $h(a)_{max}=h(1)=1-0=1$，所以 $h(a)=a-alna\leq 1$，

又因为 $h(a)=a-alna\geq 1$，所以 $h(a)=a-alna=1$，由以上证明可知 $h(1)=1$，所以 $a=1$

故满足条件的实数 a 的值为1.

6.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x+x,\quad g(x)=ax^2+3x+1$.

(1)求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

(2)当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求 a 取值范围.

【答案】(1) $3x-y+1=0$；

(2) $(-\infty,\frac{1}{2}]$.

【解析】

【分析】

(1)根据导数的几何意义即可求解；

(2)构造函数 $m(x)=f(x)-g(x)$，研究函数 $m(x)$单调性求其最小值即可.

(1)

$f'(x)=\mathrm{e}^x+1+\cos x$，则 $f'(0)=3, f(0)=1$，

故切线方程为 $y-1=3(x-0)$，化简得 $3x-y+1=0$；

(2)

由 $f(x)\geq ax^2+2x+1$ 得 $e^x+\sin x-ax^2-2x-1\geq 0$，

令 $m(x)=e^x+\sin x-ax^2-2x-1, x\geq 0$， 即 $m(x)_{\min}\geq 0$

$m'(x)=e^x+\cos x-2ax-2$， 令 $h(x)=m'(x)$，

则 $h'(x)=e^x-\sin x-2a$， 令 $H(x)=h'(x)$，

则 $H'(x)=e^x-\cos x$，

$\because x\geq 0$， $\therefore e^x\geq 1\geq \cos x$，

$\therefore H'(x)=e^x-\cos x\geq 0$， $\therefore h'(x)$ 在[0，＋∞)上单调递增，

且 $h'(x)\geq h'(0)=1-2a$，

当 $1-2a\geq 0$， 即 $a\leq \frac{1}{2}$ 时， $h'(x)\geq h'(0)=1-2a\geq 0$， $m'(x)$ 在[0，＋∞)上单调递增， $m'(x)\geq m'(0)=0$，

$\therefore m(x)$在[0，＋∞)上单调递增， $m(x)\geq m(0)=0$， 符合题意；

当 $1-2a<0$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时， $h'(x)\geq h'(0)=1-2a<0$， $h'[\ln(2a+1)]=1-\sin[\ln(2a+1)]\geq 0$，而 $h'(x)$ 在[0，＋∞)上单调递增，

$\therefore \exists x_0\in(0,\ln(2a+1)]$， 使得 $h'(x_0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时， $h'(x)<0$， $g'(x)$ 单调递减， $m'(x)<m'(0)=0$，

$\therefore m(x)$在 $(0,x_0)$ 单调递减， $\therefore$ 此时 $m(x)<g(0)=0$， 不满足 $m(x)_{\min}\geq 0$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{2}]$.

【点睛】

本题考察的是构造新函数，利用导数研究新函数的单调性求其最小值，关键在于需多次求导，依次判断单调性和函数值正负.

7. 已知函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{k}{x}$， 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

（1）求 a,b 的值；

（2）如果当 $x>0$，且 $x\neq 1$时， $f(x)>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$， 求 k 的取值范围.

【答案】:（1） $a=1$， $b=1$；（2） $(-\infty,0]$.

【解析】:（1） $f'(x)=\frac{\alpha(\frac{x+1}{x}-\ln x)}{(x+1)^2}-\frac{b}{x^2}$

由于直线 $x+2y-3=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，且过点 $(1,1)$，故 $\begin{cases} f(1)=1, \\ f'(1)=-\frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b=1, \\ \frac{a}{2}-b=-\frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=1$.

（2）由（1）知 $\mathrm{f}(x)=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}$，所以 $f(x)-(\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x})=\frac{1}{1-x^2}(2\ln x+\frac{(k-1)(x^2-1)}{x})$.

考虑函数 $h(x)=2\ln x+\frac{(k-1)(x^2-1)}{x}$ $(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{(k-1)(x^2+1)+2x}{x^2}$.

(i)设 $k\le 0$，由 $h'(x)=\frac{k(x^2+1)-(x-1)^2}{x^2}$ 知，当 $x\ne 1$ 时，$h'(x)<0$，h(x)递减.

而 $h(1)=0$ 故当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x)>0$；

当 x∈（1，+∞）时，h（x）<0，可得 $\frac{1}{1-x^2}$h（x）>0

从而当 x>0, 且 x≠1 时，f（x）-（$\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$）>0，即 f（x）>$\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$.

（ii）设 0<k<1. 由于 $(k-1)(x^2+1)+2x=(k-1)x^2+2x+k-1$ 的图像开口向下，且 $(k-1)x^2+2x+k-1$，对称轴 x=$\frac{1}{1-k}>1$. 当 x∈（1，$\frac{1}{1-k}$）时，(k-1)（x^2+1）+2x>0, 故 h'（x）>0, 而 h（1）=0，故当 x∈（1，$\frac{1}{1-k}$）时，h（x）>0，可得 $\frac{1}{1-x^2}$h（x）<0, 与题设矛盾.

（iii）设 k≥1. 此时 $x^2+1\ge 2x$，$(k-1)(x^2+1)+2x>0\Rightarrow h'$（x）>0, 而 h（1）=0，故当 x∈（1，+∞）时，h（x）>0，可得 $\frac{1}{1-x^2}$h（x）<0, 与题设矛盾.

综合得，k 的取值范围为 $\left(-\infty,0\right]$.

8. 设 $a\in R$，函数 $f\left(x\right)=\frac{x-a}{\left(x+a\right)^2}$.

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线与直线 $y=3x-2$ 平行，求 a 的值；

（2）若对于定义域内的任意 x_1，总存在 x_2 使得 $f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$，求 a 的取值范围.

【答案】:（1）$a=\pm 1$；（2）$[0,+\infty)$.

【解析】:（1）函数 $f\left(x\right)=\frac{x-a}{\left(x+a\right)^2}$ 的导函数为 $f'\left(x\right)=\frac{3a-x}{\left(x+a\right)^3}\left(x\ne -a\right)$,

则函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线斜率为 $f'\left(0\right)=\dfrac{3}{a^{2}}$，依题意有 $\dfrac{3}{a^{2}}=3$，解得 $a=\pm1$.

（2）对于定义域内的任意 x_1，总存在 x_2 使得 $f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$，即为 $f\left(x\right)$ 在定义域内不存在最小值.

①当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$，无最小值，符合题意；

②当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)=\dfrac{3a-x}{\left(x+a\right)^{2}}$，

可得 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-a\right)$ 单调递增，在 $\left(-a,3a\right)$ 单调递增，在 $\left(3a,+\infty\right)$ 单调递减，

即有 $f\left(x\right)$ 在 $x=3a$ 取得极大值，

当 $x>a$ 时，$f\left(x\right)>0$；当 $x<a$ 时，$f\left(x\right)<0$.

取 $x_1<a,x_2\neq-a$ 即可，

当 $x_1<-a$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-a\right)$ 单调递减，且 $x_1<x_1+\dfrac{1}{2}\left|x_1+a\right|<-a$，$f\left(x_1\right)>f\left(x_1+\dfrac{1}{2}\left|x_1+a\right|\right)$，

故存在 $x_2=x_1+\dfrac{1}{2}\left|x_1+a\right|$，使得 $f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$，

同理当 $-a<x_1<a$ 时，令 $x_2=x_1-\dfrac{1}{2}\left|x_1+a\right|$ 使得 $f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$，则有当 $a>0$ 时，$f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$ 成立；

③当 $a<0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,3a\right)$ 单调递减，在 $\left(3a,-a\right)$ 单调递增，在 $\left(-a,+\infty\right)$ 单调递增，

即有 $f\left(x\right)$ 在 $x=3a$ 处取得极小值，

当 $x>a$ 时，$f\left(x\right)>0$；当 $x<a$ 时 $f\left(x\right)<0$，所以 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(3a\right)$，

当 $x_1=3a$ 时，不存在 x_2 使得 $f\left(x_2\right)<f\left(x_1\right)$ 成立，

综上可得，a 的取值范围是 $\left[0,+\infty\right)$.

基本方法 2——参变分离

类型一　常规

9. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{a-1}{x}-x$，其中 $a<2$.

（1）讨论 $f(x)$ 的极值；

（2）设 $m\in\mathbf{Z}$，当 $a=1$ 时，若关于 x 的不等式 $f(x)<m-(x-2)e^{x}$ 在区间 $\left(0,1\right]$ 上恒成立，求 m 的最小值.

【答案】:

【解析】:（1）由题得 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，

$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{a-1}{x^2}-1=-\frac{x^2-ax+(a-1)}{x^2}=-\frac{(x-1)[x-(a-1)]}{x^2}$，

当$a-1\le 0$，即$a\le 1$时，令$f'(x)>0$，得$0<x<1$，则$f(x)$在区间$(0,1)$内单调递增；令$f'(x)<0$，得$x>1$，则$f(x)$在区间$(1,+\infty)$内单调递减，

所以$f(x)$在$x=1$处取得极大值，且极大值为$f(1)=a-2$，无极小值.

当$0<a-1<1$，即$1<a<2$时，令$f'(x)=0$，得$x=1$或$x=a-1$.

当$x\in(0,a-1)\cup(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在区间$(0,a-1),(1,+\infty)$内单调递减；当$x\in(a-1,1)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在区间$(a-1,1)$内单调递增，所以$f(x)$在$x=a-1$处取得极小值，且极小值$f(a-1)=a\ln(a-1)-a+2$，在$x=1$处取得极大值，且极大值为$f(1)=a-2$.

综上所述，当$a\le 1$时，$f(x)$的极大值为$a-2$，无极小值；

当$1<a<2$时，$f(x)$的极大值为$a-2$，极小值为$a\ln(a-1)-a+2$.

（2）由$f(x)<m-(x-2)e^x$，得$m>\ln x-x+(x-2)e^x$，

设$h(x)=(x-2)e^x+\ln x-x,x\in(0,1]$，则$h'(x)=(x-1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$，

所以当$0<x\le 1$时，$x-1\le 0$.

设$u(x)=e^x-\frac{1}{x}$，则$u'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以$u(x)$在区间$(0,1)$内单调递增.

又$u\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$u(1)=e-1>0$，

所以$\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$u(x_0)=0$，即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$，

当$x\in(0,x_0)$时，$u(x)<0$，$h'(x)>0$；当$x\in(x_0,1]$时，$u(x)>0$，$h'(x)<0$，

所以函数$h(x)$在区间$(0,x_0)$内单调递增，在区间$(x_0,1]$上单调递减，

所以$h(x)_{\max}=h(x_0)=(x_0-2)e^{x_0}+\ln x_0-x_0=(x_0-2)\cdot\frac{1}{x_0}-2x_0=1-\left(\frac{2}{x_0}+2x_0\right)$.

因为函数$y=1-\left(\frac{2}{x}+2x\right)$在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内单调递增，所以$h(x_0)\in(-4,-3)$，

又$m>h(x)$对任意的$x\in(0,1]$恒成立，且$m\in\mathrm{Z}$，所以m的最小值是-3.

10. 已知函数$f(x)=(x^2-ax-a)e^x$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$a\in(0,2)$，对于任意$x_1,x_2\in[-4,0]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|<4e^{-2}+me^a$恒成立，求$m$的取值范围.

【答案】：（1）见解析；（2）$m>\frac{1+e^2}{e^3}$.

【解析】：（1）$f'(x)=(x+2)(x-a)e^x$

①若$a<-2$，则$f(x)$在$(-\infty,a)$，$(-2,+\infty)$上单调递增，在$(a,-2)$上单调递减；

②$a=-2$，则$\left(-\infty,+\infty\right)$在上单调递增；

③若$a>-2$，则$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,-2\right)$，$\left(a,+\infty\right)$上单调递增，在$\left(-2,a\right)$上单调递减；

（2）由 1 知，当$a\in\left(0,2\right)$时，$f\left(x\right)$在$\left(-4,-2\right)$上单调递增，在$\left(-2,0\right)$单调递减，

所以$f\left(x\right)_{\max}=f\left(-2\right)=\left(a+4\right)e^{-2}$，$f\left(-4\right)=\left(3a+16\right)e^{-4}>-a=f\left(0\right)$，

故$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|_{\max}=\left|f\left(-2\right)-f\left(0\right)\right|=\left(a+4\right)e^{-2}+a=a\left(e^{-2}+1\right)+4e^{-2}$，

$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<4e^{-2}+me^{a}$恒成立，即$a\left(e^{-2}+1\right)+4e^{-2}<4e^{-2}+me^{a}$恒成立，即$m>\dfrac{a}{e^{a}}\left(e^{-2}+1\right)$恒成立，

令$g\left(x\right)=\dfrac{x}{e^{x}},x\in\left(0,2\right)$，易知$g\left(x\right)$在其定义域上有最大值$g\left(1\right)=\dfrac{1}{e}$，

所以$m>\dfrac{1+e^{2}}{e^{3}}$.

类型二　参变分离后，分母含 0

11. 已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+ax^{2}-x$.

（1）当$a=1$时，讨论$f\left(x\right)$的单调性；

（2）当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)\geq\dfrac{1}{2}x^{3}+1$，求$a$的取值范围.

【答案】:（1）当$x\in\left(-\infty,0\right)$时，$f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$单调递减；当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$单调递增.（2）$\left[\dfrac{7-e^{2}}{4},+\infty\right)$.

【解析】:（1）当$a=1$时，$f\left(x\right)=e^{x}+x^{2}-x$，$f'\left(x\right)=e^{x}+2x-1$，

由于$f''\left(x\right)=e^{x}+2>0$，故$f'\left(x\right)$单调递增，注意到$f'\left(0\right)=0$，故：

当$x\in\left(-\infty,0\right)$时，$f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$单调递减；当$x\in\left(0,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$单调递增.

(2) 由$f\left(x\right)\geq\dfrac{1}{2}x^{3}+1$得，$e^{x}+ax^{2}-x\geqslant\dfrac{1}{2}x^{3}+1$，其中$x\geq 0$，

①. 当x=0 时，不等式为：$1\geq 1$，显然成立，符合题意；

②. 当$x>0$时，分离参数a得，$a\geqslant-\dfrac{e^{x}-\frac{1}{2}x^{3}-x-1}{x^{2}}$，

记$g\left(x\right)=-\dfrac{e^{x}-\frac{1}{2}x^{3}-x-1}{x^{2}}$，$g'\left(x\right)=-\dfrac{\left(x-2\right)\left(e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}-x-1\right)}{x^{3}}$，

令 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1(x\geq 0)$，则 $h'(x)=e^x-x-1$，$h''(x)=e^x-1\geq 0$，

故 $h'(x)$ 单调递增，$h'(x)\geq h'(0)=0$，故函数 $h(x)$ 单调递增，$h(x)\geq h(0)=0$，

由 $h(x)\geq 0$ 可得：$e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\geqslant 0$ 恒成立，

故当 $x\in(0,2)$ 时，$g'\ x\ >0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'\ x\ <0$，$g(x)$ 单调递减；

因此，$\left[g(x)\right]_{\max}=g(2)=\frac{7-e^2}{4}$，

综上可得，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{7-e^2}{4},+\infty\right)$.

12. 已知函数 $f(x)=x^2+4x+2$，$g(x)=e^x(2x+2)$. 若 $x\geq -2$ 时，$f(x)\leq kg(x)$，求 k 的取值范围.

【解答】由题意 $x^2+4x+2\leq 2ke^x(x+1)$，对任意的 $x\geq -2$ 恒成立

当 $x=-1$ 时，上式恒成立，故 $k\in R$；

当 $x>-1$ 时，上式化为 $k\geq\frac{x^2+4x+2}{2e^x(x+1)}$

令 $h(x)=\frac{x^2+4x+2}{2e^x(x+1)}(x>-1)$, $h'(x)=\frac{-xe^x(x+2)^2}{2e^x(x+1)^2}$，所以 $h(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值，

$k\geq h(0)=1$

当 $-2\leq x<-1$ 时，上式化为 $k\leq\frac{x^2+4x+2}{2e^x(x+1)}$，$h(x)$ 单调递增，故 $h(x)$ 在 $x=-2$ 处取得最

小值，$k\leq h(-2)=e^2$

综上，k 的取值范围为 $\left[1,e^2\right]$.□

【答案】:

【解析】:

13. 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x-\frac{a}{2}x^2+ax$，$a\in R$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若不等式 $f(x)+(x+1)e^x+\frac{a}{2}x^2-2ax+a>0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】:（1）当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $1,+\infty$ 上单调递增；

当 $0<a<e$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln a,1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $1,+\infty$ 上单调递增；

当 $a=e$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

当$a>e$时，$f\left(x\right)$在$\left(1,\ln a\right)$上单调递减，在$\left(-\infty,1\right)$和$\left(\ln a,+\infty\right)$上单调递增；

（2）$\left(1,4e^{\frac{3}{2}}\right)$.

【解析】:（1）$f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^{x}-\frac{a}{2}x^{2}+ax$，$a\in R$．$\therefore f'\left(x\right)=\left(x-1\right)e^{x}-ax+a=\left(x-1\right)\left(e^{x}-a\right)$.

①当$a\le 0$时，令$f'\ x\ <0$，得$x<1$．$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-\infty,1\right)$上单调递减；

令$f'\ x\ >0$，得$x>1$，$\therefore f\left(x\right)$在 $1,+\infty$ 上单调递增.

②当$0<a<e$时，令$f'\ x\ <0$，得$\ln a<x<1$．$\therefore f\left(x\right)$在$\left(\ln a,1\right)$上单调递减；

令$f'\ x\ >0$，得$x<\ln a$或$x>1$．$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-\infty,\ln a\right)$和 $1,+\infty$ 上单调递增.

③当$a=e$时，$f'\ x\ \ge 0$在$x\in\mathbf{R}$时恒成立，$\therefore f\left(x\right)$在$\mathbf{R}$单调递增.

④当$a>e$时，令$f'\ x\ <0$，得$1<x<\ln a$．$\therefore f\left(x\right)$在$\left(1,\ln a\right)$上单调递减；

令$f'\ x\ >0$，得$x>\ln a$或$x<1$．$\therefore f\left(x\right)$在$\left(-\infty,1\right)$和$\left(\ln a,+\infty\right)$上单调递增.

综上所述，当$a\le 0$时，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,1\right)$上单调递减，在 $1,+\infty$ 上单调递增；

当$0<a<e$时，$f\left(x\right)$在$\left(\ln a,1\right)$上单调递减，在$\left(-\infty,\ln a\right)$和 $1,+\infty$ 上单调递增；

当$a=e$时，$f\left(x\right)$在R上单调递增；

当$a>e$时，$f\left(x\right)$在$\left(1,\ln a\right)$上单调递减，在$\left(-\infty,1\right)$和$\left(\ln a,+\infty\right)$上单调递增.

（2）不等式$f\left(x\right)+\left(x+1\right)e^{x}+\frac{a}{2}x^{2}-2ax+a>0$，等价于$\left(2x-1\right)e^{x}>a\left(x-1\right)$.

①当$x=1$时，$0<e$，则$a\in\mathbf{R}$.

②当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$a<\frac{\left(2x-1\right)e^{x}}{x-1}$.

设函数$g\left(x\right)=\frac{\left(2x-1\right)e^{x}}{x-1}$，则$g'\left(x\right)=\frac{x\left(2x-3\right)e^{x}}{\left(x-1\right)^{2}}$.

当$x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$时，$g'\ x\ <0$，此时$g\left(x\right)$单调递减；当$x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$时，$g'\ x\ >0$，此时$g\left(x\right)$单调递增.

$\therefore g\left(x\right)_{\min}=g\left(\frac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$．$\therefore a<4e^{\frac{3}{2}}$.

③当$x\in\left(-\infty,1\right)$时，$a>\frac{\left(2x-1\right)e^{x}}{x-1}$.

设函数$h\left(x\right)=\frac{\left(2x-1\right)e^{x}}{x-1}$，则$h'\left(x\right)=\frac{x\left(2x-3\right)e^{x}}{\left(x-1\right)^{2}}$.

当$x\in\left(0,1\right)$时，$h'\left(x\right)<0$，此时$h\left(x\right)$单调递减；当$x\in\left(-\infty,0\right)$时，$h'\left(x\right)>0$，此时$h\left(x\right)$单调递增.

$\therefore h\left(x\right)_{\max}=h\left(0\right)=1$；$\therefore a>1$.

综上，a的取值范围为$\left(1,4e^{\frac{3}{2}}\right)$.

类型三 参变分离后，需多次求导

14. 已知函数$f\left(x\right)=\frac{\ln x+a}{x}$.

（1）若函数$f\left(x\right)$的图象在$x=1$处的切线为$y=1$，求$f\left(x\right)$的极值；

（2）若$f\left(x\right)\leq e^{x}+\frac{2}{x}-1$恒成立，求实数$a$的取值范围.

【答案】:（1）$f\left(x\right)$的极大值为1，不存在极小值；（2）$a\leq3$.

【解析】:（1）$f'\left(x\right)=\frac{1-a-\ln x}{x^{2}}$，

由题意可得：$f'\left(1\right)=\frac{1-a}{x^{2}}=0$，解得：$a=1$，此时函数$f\left(1\right)=a=1$，

函数$f\left(x\right)$的图象在$x=1$处的切线为$y=1$成立

所以$f\left(x\right)=\frac{\ln x+1}{x}$，$f'\left(x\right)=\frac{-\ln x}{x^{2}}$，

由$f'\left(x\right)>0$可得$0<x<1$，由$f'\left(x\right)<0$可得$x>1$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递增，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递减.

所以$f\left(x\right)$的极大值为$f\left(1\right)=1$，不存在极小值.

$\left(2\right)$由$f\left(x\right)\leq e^{x}+\frac{2}{x}-1$可得$\frac{\ln x+a}{x}\leq e^{x}+\frac{2}{x}-1$，分离$a$可得：$a\leq x\left(e^{x}-1\right)-\ln x+2\ \left(x>0\right)$

令$F\left(x\right)=x\left(e^{x}-1\right)-\ln x+2,x>0$，$F'\left(x\right)=e^{x}-1+xe^{x}-\frac{1}{x}=e^{x}\left(x+1\right)-\frac{x+1}{x}=\left(x+1\right)\left(e^{x}-\frac{1}{x}\right),x>0$

$h\left(x\right)=e^{x}-\frac{1}{x},x>0.$令$h'\left(x\right)=e^{x}+\frac{1}{x^{2}}>0$，所以$h\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增

$h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0,h\left(1\right)=e-1>0,$

存在唯一的 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $h\left(x_0\right)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$

当 $0<x<x_0$ 时，$h\left(x\right)<0$，即 $F'\left(x\right)<0$；当 $x>x_0$ 时，$h\left(x\right)>0$，即 $F'\left(x\right)>0$，

故 $F\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递增.

$F\left(x\right)_{\min}=x_0\left(e^{x_0}-1\right)-lnx_0+2=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0+2$，

由于 $h\left(x_0\right)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，得 $x_0e^{x_0}=1$，再对 $x_0e^{x_0}=1$ 两边取对数可得：$x_0+\ln x_0=0$

所以 $F\left(x\right)_{\min}=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0+2=1-0+2=3$，所以 $a\le 3$.

即实数 a 的取值范围 $a\le 3$

15.已知函数 $f\left(x\right)=\left(2-a\right)\left(x-1\right)-2\ln x$，$g\left(x\right)=xe^{1-x}$（$a\in R$，$e$ 为自然对数的底数）.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）对任意的 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(x\right)>0$ 恒成立，求 a 的最小值；

（3）若对任意给定的 $x_0\in\left(0,e\right]$，在 $\left(0,e\right]$ 上总存在两个不同的 $x_i\left(i=1,2\right)$，使得 $f\left(x_i\right)=g\left(x_0\right)$ 成立，求 a 的取值范围.

【答案】:（1）当 $a\ge 2$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递减区间是 $(0,+\infty)$；当 $a<2$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $(0,\dfrac{2}{2-a})$，单调递增区间是 $(\dfrac{2}{2-a},+\infty)$；（2）$a=2-4\ln 2$；（3）$(-\infty,2-\dfrac{3}{e-1}]$.

【解析】:（1）$f'\left(x\right)=2-a-\dfrac{2}{x}=\dfrac{\left(2-a\right)-2}{x}$，$x>0$.

1）当 $a\ge 2$，$f'\left(x\right)<0$；

2）当 $a<2$，令 $f'\left(x\right)=0$，$x=\dfrac{2}{2-a}$；

综上：当 $a\ge 2$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $0,+\infty$；

当 $a<2$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\dfrac{2}{2-a}\right)$，单调递增区间是 $\left(\dfrac{2}{2-a},+\infty\right)$.

（2）即对 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$a>2-\frac{2\ln x}{x-1}$ 恒成立，

令 $l(x)=2-\frac{2\ln x}{x-1}$，$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则

$l'(x)=-\frac{\frac{2}{x}(x-1)-2\ln x}{(x-1)^2}=\frac{2\ln x+\frac{2}{x}-2}{(x-1)^2}$，

再令 $m(x)=2\ln x+\frac{2}{x}-2$，$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

$m'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{-2(1-x)}{x^2}<0$，

$m(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上为减函数，于是

$m(x)>m\left(\frac{1}{2}\right)=2-2\ln 2>0$，

从而，$l'(x)>0$，于是 $l(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上为增函数，

$l(x)<l\left(\frac{1}{2}\right)=2-4\ln 2$，

故要 $a>2-\frac{2\ln x}{x-1}$ 恒成立，只要 $a\in[2-4\ln 2,+\infty)$，即 a 的最小值为 $2-4\ln 2$；

（3）$\because g(x)=xe^{1-x}$，$\therefore g'(x)=(1-x)e^{1-x}$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 内递增，在 $(1,e)$ 内递减. 又 $\because g(0)=0$，$g(1)=1$，$g(e)=e^{2-e}>0$，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 内的值域为 $(0,1]$.

由 $f(x)=(2-a)(x-1)-2\ln x$，得 $f'(x)=\frac{(2-a)x-2}{x}$.

①当 $a\geq 2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递减，不合题意；

②当 $a<2$ 时，令 $f'(x)>0$，则 $x>\frac{2}{2-a}$；令 $f'(x)<0$，则 $0<x<\frac{2}{2-a}$.

i）当 $\frac{2}{2-a}\geq e$，即 $2-\frac{2}{e}\leq a<2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递减，不合题意；

ii）当 $\frac{2}{2-a}<e$，即 $a<2-\frac{2}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{2-a}\right]$ 上单调递减，在 $\left(\frac{2}{2-a},e\right]$ 上单调递增.

令 $m(a)=f\left(\frac{2}{2-a}\right)=a-2\ln\frac{2}{2-a}$，$a<2-\frac{2}{e}$，则 $m'(a)=\frac{-a}{2-a}$，

$\therefore m(a)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $\left(0,2-\frac{e}{2}\right]$ 上单调递减；

$\therefore m(a)\leq m(0)=0$，即 $a-2\ln\frac{2}{2-a}\leq 0$ 在 $\left(-\infty,2-\frac{e}{2}\right)$ 上恒成立.

令 $t=\frac{2}{2-a}$，则 $t>0$，设 $k(t)=\ln t+\frac{1}{t}$，$t>0$，则 $k'(t)=\frac{t-1}{t^2}$，

$\therefore k(t)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，在 $1,+\infty$ 上单调递增，

$\therefore k(t)\geq k(1)=1>0$，即 $\ln t+\frac{1}{t}>0$，$\therefore \ln t>-\frac{1}{t}$，$\therefore t>e^{-\frac{1}{t}}$，即 $\frac{2}{2-a}>e^{\frac{a-2}{2}}>e^{\frac{a-3}{2}}$.

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,e^{\frac{a-3}{2}}\right)$ 时，$f(x)=(2-a)(x-1)-2\ln x>\ a-2-2\ln x>a-2-(a-3)=1$，

且 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,e\right]$ 上连续.

欲使对任意的 $x_0\in\left(0,e\right]$ 在 $\left(0,e\right]$ 上总存在两个不同的 $x_i\left(i=1,2\right)$，使 $f\left(x_i\right)=g\left(x_0\right)$ 成立，

则需满足 $f\left(e\right)\geq 1$，即 $a\leq 2-\frac{3}{e-1}$.

又 $\because 2-\frac{2}{e}-\left(2-\frac{3}{e-1}\right)=\frac{e+2}{e\left(e-1\right)}>0$，$\therefore 2-\frac{2}{e}>2-\frac{3}{e-1}$，

$\therefore a\leq 2-\frac{3}{e-1}$. 综上所述，$a\in\left(-\infty,2-\frac{3}{e-1}\right]$.

类型四　参变分离后，零点设而不求（隐零点）

16.已知函数 $f\left(x\right)=x\left(a+\ln x\right)$ 有极小值 $-e^{-2}$.

（1）求实数 a 的值；

（2）若 $k\in Z$，且 $k\left(x-1\right)<f\left(x\right)$ 对任意 $x>1$ 恒成立，求 k 的最大值.

【答案】:（1）$a=1$；（2）$k_{\max}=3$.

【解析】:（1）$f'\left(x\right)=a+1+\ln x$，令 $f'\left(x\right)>0\Rightarrow x>e^{-a-1}$，令 $f'\left(x\right)<0\Rightarrow 0<x<e^{-a-1}$，

故 $f\left(x\right)$ 的极小值为 $f\left(e^{-a-1}\right)=-e^{-a-1}=-e^{-2}$，得 $a=1$.

（2）当 $x>1$ 时，令 $g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{x-1}=\frac{x+\ln x}{x-1}$，$\therefore g'\left(x\right)=\frac{x-2-\ln x}{\left(x-1\right)^2}$，

令 $h\left(x\right)=x-2-\ln x$，$\therefore h'\left(x\right)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$，故 $y=h\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上是增函数.

由于 $h'\left(3\right)=1-\ln 3<0$，$h'\left(4\right)=2-\ln 4>0$，存在 $x_0\in\left(3,4\right)$，使得 $h'\left(x_0\right)=0$.

则 $x\in\left(1,x_0\right)$，$h'\left(x\right)<0$，知 $g\left(x\right)$ 为减函数；$x\in\left(x_0,+\infty\right)$，$h'\left(x\right)>0$，知 $g\left(x\right)$ 为增函数.

$\therefore g\left(x\right)_{\min}=g\left(x_0\right)=\frac{x_0+x_0\ln x_0}{x_0-1}=x_0$，$\therefore k<x_0$，又 $x_0\in\left(3,4\right)$，所以 $k_{\max}=3$.

17. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x$，$h\left(x\right)=ax\left(a\in R\right)$.

（1）函数 $f\left(x\right)$ 的图象与 $h\left(x\right)$ 的图象无公共点，求实数 a 的取值范围；

（2）是否存在实数 m，使得对任意的 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，都有函数 $y=f\left(x\right)+\frac{m}{x}$ 的图象在 $g\left(x\right)=\frac{e^x}{x}$ 的图象的下方？若存在，请求出整数 m 的最大值；若不存在，请说明理由.

（参考数据：$\ln 2=0.6931$，$\ln 3=1.0986$，$\sqrt[3]{e}=1.3956$）

【答案】:（Ⅰ）$(\frac{1}{e},+\infty)$；（Ⅱ）1.

【解析】:（Ⅰ）函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 无公共点，等价于方程 $\frac{\ln x}{x}=a$ 在 $(0,+\infty)$ 无解

令 $t(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $t'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 令 $t'(x)=0$, 得 $x=e$

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$t'(x)$	＋	0	－
$t(x)$	增	极大值	减

因为 $x=e$ 是唯一的极大值点，故 $t_{\max}=t(e)=\frac{1}{e}$

故要使方程 $\frac{\ln x}{x}=a$ 在 $(0,+\infty)$ 无解，当且仅当 $a>\frac{1}{e}$，故实数 a 的取值范围为 $(\frac{1}{e},+\infty)$

（Ⅱ）假设存在实数 m 满足题意，则不等式 $\ln x+\frac{m}{x}<\frac{e^x}{x}$ 对 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 恒成立.

即 $m<e^x-x\ln x$ 对 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 恒成立.

令 $r(x)=e^x-x\ln x$，则 $r'(x)=e^x-\ln x-1$，

令 $\varphi(x)=e^x-\ln x-1$，则 $\varphi'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，

$\because$ $\varphi'(x)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，$\varphi'(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，$\varphi'(1)=e-1>0$，且 $\varphi'(x)$ 的图象在 $(\frac{1}{2},1)$ 上连续，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $\varphi'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，则 $x_0=-\ln x_0$，

$\therefore$ 当 $x\in(\frac{1}{2},x_0)$ 时，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)$ 单调递增，

则 $\varphi(x)$ 取到最小值 $\varphi(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-1=x_0+\frac{1}{x_0}-1\geq 2\sqrt{x_0\cdot\frac{1}{x_0}}-1=1>0$，

$\therefore$ $r'(x)>0$，即 $r(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内单调递增.

$m\leq r(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ln 2=1.99525$，

$\therefore$ 存在实数 m 满足题意，且最大整数 m 的值为1.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{m+\ln x}{x}$，$m\in R$，$x>1$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若 $m=4$，$k\in N^{*}$，且 $\dfrac{k}{x+1}<f\left(x\right)$ 恒成立，求 k 的最大值.

【答案】:（1）答案不唯一，具体见解析;（2）6.

【解析】:（1）由 $f(x)=\dfrac{m+\ln x}{x}\ \left(x>1\right)$，得 $f^{'}(x)=\dfrac{1-m-\ln x}{x^{2}}$， $x>1$，

当 $1-m\le 0$ 时，即 $m\ge 1$ 时，$1-m-\ln x\le 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $\left(1,+\infty\right)$，无单调递增区间;

当 $1-m>0$ 时，即 $m<1$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x\in\left(1,e^{1-m}\right)$，

由 $f'(x)<0$，得 $x\in\left(e^{1-m},+\infty\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $\left(e^{1-m},+\infty\right)$，单调递增区间是 $\left(1,e^{1-m}\right]$.

综上，当 $m\ge 1$ 时， $f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $\left(1,+\infty\right)$，无单调递增区间;

当 $m<1$ 时， $f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $\left(e^{1-m},+\infty\right)$，单调递增区间是 $\left(1,e^{1-m}\right]$.

（2） $f(x)=\dfrac{4+\ln x}{x}$， $x>1$，由 $\dfrac{k}{x+1}<f(x)$，得 $k<\dfrac{(x+1)(4+\ln x)}{x}$，$x>1$，

令 $h(x)=\dfrac{(x+1)(4+\ln x)}{x}$，$x>1$，则 $h^{'}(x)=\dfrac{x-3-\ln x}{x^{2}}$， $x>1$，

令 $\varphi(x)=x-3-\ln x$， $x>1$，则 $\varphi^{'}(x)=1-\dfrac{1}{x}>0(x>1)$，

所以，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，$\varphi(4)=1-\ln 4<0$，$\varphi(5)=2-\ln 5>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(4,5)$，使 $\varphi\left(x_0\right)=0$，

且 $x\in\left(1,x_0\right)$， $\varphi^{'}(x)<0$， $h'(x)<0$， $h\left(x\right)$ 单调递减; $x\in\left(x_0,+\infty\right)$， $\varphi^{'}(x)>0$， $h'(x)>0$， $h\left(x\right)$ 单调递增，

$h_{\min}(x)=h\left(x_0\right)=\dfrac{(x_0+1)\left(4+\ln x_0\right)}{x_0}$，

$\varphi\left(x_0\right)=x_0-3-\ln x_0=0$，所以 $x_0+1=4+\ln x_0$，

所以 $h\left(x_0\right)=\dfrac{(x_0+1)^{2}}{x_0}=x_0+\dfrac{1}{x_0}+2\in\left(\dfrac{25}{4},\dfrac{36}{5}\right)$，

令 $x+\dfrac{1}{x}+2=7$，$\therefore\ x=x_0=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$， $\varphi\left(x_0\right)=\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}-\ln\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}>0$，

$\therefore\ x_0\in\left(4,\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$， $h\left(x_0\right)=x_0+\dfrac{1}{x_0}+2\in\left(\dfrac{25}{4},7\right)$，

又 $k\in Z$，$\therefore\ k\le 6$，

综上，k 的最大值为 6.

基本方法 3——变更主元

19. 已知函数 $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+a^2\left(a,b\in R\right)$

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处有极值为 10，求 b 的值；

（2）若对于任意的 $a\in\left[-4,+\infty\right)$， $f\left(x\right)$ 在 $x\in\left[0,2\right]$ 上单调递增，求 b 的最小值.

【答案】:（1） b 的值为 -11；（2） b 的最小值为 $\frac{16}{3}$.

【解析】:（1） $f'(x)=3x^2+2ax+b$，则 $\begin{cases}f'(1)=3+2a+b=0\\ f(1)=1+a+b+a^2=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=-11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3\\ b=3\end{cases}$

当 $\begin{cases}a=4\\ b=-11\end{cases}$ 时， $f'(x)=3x^2+8x-11,\quad \Delta=64+132>0$，所以函数有极值点；

当 $\begin{cases}a=-3\\ b=3\end{cases}$ 时, $f'(x)=3(x-1)^2\ge 0$，所以函数无极值点；则 b 的值为 -11.

（2）解法一： $f'(x)=3x^2+2ax+b\ge 0$ 对任意的 $a\in[-4,+\infty)$， $x\in[0,2]$ 都成立

则 $F(a)=2xa+3x^2+b\ge 0$ 对任意的 $a\in[-4,+\infty)$， $x\in[0,2]$ 都成立

$\because x\ge 0, F(a)$在$a\in[-4,+\infty)$单调递增或为常数函数

所以得 $F(a)_{\min}=F(-4)=-8x+3x^2+b\ge 0$ 对任意的 $x\in[0,2]$ 恒成立，

即 $b\ge(-3x^2+8x)_{\max}$，又 $-3x^2+8x=-3(x-\frac{4}{3})^2+\frac{16}{3}\le\frac{16}{3}$，

当 $x=\frac{4}{3}$ 时 $(-3x^2+8x)_{\max}=\frac{16}{3}$，得 $b\ge\frac{16}{3}$，所以 b 的最小值为 $\frac{16}{3}$.

解法二： $f'(x)=3x^2+2ax+b\ge 0$ 对任意的 $a\in[-4,+\infty)$， $x\in[0,2]$ 都成立

即 $b\ge -3x^2-2ax$ 对任意的 $a\in[-4,+\infty)$， $x\in[0,2]$ 都成立,

即 $b\ge(-3x^2-2ax)_{\max}$.　　令 $F(x)=-3x^2-2ax=-3(x+\frac{a}{3})^2+\frac{a^2}{3}$

①当 $a\ge 0$时, $F(x)_{\max}=0,\therefore b\ge 0$；

②当 $-4\le a<0$时, $F(x)_{\max}=\frac{a^2}{3},\therefore b\ge\frac{a^2}{3}$. 又$\because\left(\frac{a^2}{3}\right)_{MAX}=\frac{16}{3},\therefore b\ge\frac{16}{3}$.

综上， b 的最小值为 $\frac{16}{3}$.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=mx\ln x$， $m\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）当$0<m\le \dfrac{e^2}{2}$时，证明：$f\left(x\right)<e^x$.

【答案】:

【解析】:（1）函数$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，

当$m>0$时，由$f'\left(x\right)<0$，得$0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；由$f'\left(x\right)>0$，得$x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；

所以$f\left(x\right)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上单调递增；

当$m<0$时，由$f'\left(x\right)<0$，得$x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；由$f'\left(x\right)>0$，得$0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；

所以$f\left(x\right)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上单调递减；

当$m=0$时，$f\left(x\right)=0$为常量函数，不具有单调性.

（2）由$f\left(x\right)<\mathrm{e}^x$，得$mx\ln x<\mathrm{e}^x$，

①当$0<x\le 1$时，$\mathrm{e}^x>1$，$mx\ln x\le 0$，不等式显然成立；

②当$x>1$时，$x\ln x>0$，由$0<m\le \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$，得$0<mx\ln x\le \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}x\ln x$，

所以只需证：$\mathrm{e}^x>\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}x\ln x$，即证$\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}-\ln x>0$.

令$g\left(x\right)=\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}}{x}-\ln x$，则$g'\left(x\right)=\dfrac{2\mathrm{e}^{x-2}\left(x-1\right)-x}{x^2}$，$x>1$，

令$h\left(x\right)=2\mathrm{e}^{x-2}\left(x-1\right)-x$，则$h'\left(x\right)=2x\mathrm{e}^{x-2}-1$，

令$h'\left(x\right)=\varphi\left(x\right)$，则$\varphi'\left(x\right)=2\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x-2}>0$，

所以$h'\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上为增函数，

因为$h'\left(1\right)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}-1<0$，$h'\left(2\right)=3>0$，所以存在$x_0\in\left(1,2\right)$，$h'\left(x_0\right)=0$，

所以$h\left(x\right)$在$\left(1,x_0\right)$上单调递减，在$\left(x_0,+\infty\right)$上单调递增，

又因为$h\left(1\right)=-1<0$，$h\left(2\right)=0$，

当$x\in\left(1,2\right)$时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$在$\left(1,2\right)$上单调递减；当$x\in\left(2,+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$在$\left(2,+\infty\right)$上单调递增，

所以$g\left(x\right)\ge g\left(2\right)=1-\ln 2>0$，所以$g\left(x\right)>0$，所以原命题得证.

基本方法 4——赋值法

取特值代入后，参数需存在；后运用变更主元思维求解

21. 已知函数$f\left(x\right)=e^x\left(x\ln x+\dfrac{2}{e}\right)$，$g\left(x\right)=ax$，$a\in Z$，其中$e$是自然对数的底数.

（1）求函数$f\left(x\right)$在$x=1$处的切线方程；

（2）当$x>0$时，$f\left(x\right)>g\left(x\right)$恒成立，求$a$的最大值.

【答案】:

【解析】:

.【解析】(1)∵ $f'(x)=e^x\left(x\ln x+\ln x+\frac{2}{e}+1\right)$, ………………………………………………… (1 分)

∴ $f'(1)=e+2$, ∵ $f(1)=2$, ………………………………………………………………… (2 分)

∴所求切线方程为 $y-2=(e+2)(x-1)$, 即 $(e+2)x-y-e=0$. ……………………………… (4 分)

(2)由 $f(1)>g(1)$ 得 $a<2$,

现证明不等式: $e^x\left(x\ln x+\frac{2}{e}\right)>x$ 即证 $x\ln x+\frac{2}{e}>\frac{x}{e^x}$,

令 $m(x)=x\ln x+\frac{2}{e}$, $h(x)=\frac{x}{e^x}(x>0)$,

∵ $m'(x)=\ln x+1$, ∴ $0<x<\frac{1}{e}$ 时, $m'(x)<0$, $m(x)$ 递减; $x>\frac{1}{e}$ 时, $m'(x)>0$, $m(x)$ 递增.

∴ $m_{\min}(x)=m\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$. ………………………………………………………… (8 分)

∵ $h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$, ∴ $0<x<1$ 时 $h'(x)>0$, $h(x)$ 递增; $x>1$ 时 $h'(x)<0$, $h(x)$ 递减.

∴ $h_{\max}(x)=h(1)=\frac{1}{e}$. ……………………………………………………………… (10 分)

∴ $m(x)\geqslant\frac{1}{e}\geqslant h(x)$ 且等号不同时取得,

∴ $x\ln x+\frac{2}{e}>\frac{x}{e^x}$ 即 $e^x\left(x\ln x+\frac{2}{e}\right)>x$ 成立.

综上, $a_{\max}=1$. ……………………………………………………………………… (12 分)

22. 已知函数 $f(x)=a\ln x+(x+1)^2$（$a\neq 0$， $x>0$）

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间;

（2）对于任意 $x\in[1,+\infty)$ 均有 $f(x)-\frac{x^2}{a}\leq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】:（1）答案见解析;（2） $0<a\leq\frac{1}{4}$.

【解析】:（1） $f'(x)=\frac{a}{x}+2(x+1)=\frac{2x^2+2x+a}{x}$,

$a\geq 0$ 时， $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0,+\infty)$;

$a<0$ 时，令 $f'\ \ x\ =0$，解得 $x=\frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}$（$\frac{-1-\sqrt{1-2a}}{2}$ 舍去)，所以 $x\in\left(0,\frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 时， $f'(x)<0$,

$x\in\left(\frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty\right)$ 时， $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 的单调减区间是 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$，单调增区间是 $\left(\frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty\right)$;

（2）由 $f\left(1\right)-\frac{1}{a}\le 0$ 可得 $0<a\le \frac{1}{4}$，

只需证明当 $0<a\le \frac{1}{4}$ 时，$f\left(x\right)-\frac{x^2}{a}\le 0$ 恒成立，等价于 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{\left(x+1\right)^2}{a}-lnx\ge 0$，

令 $t=\frac{1}{a}$，则 $t\ge 4$，设 $g\left(t\right)=x^2t^2-\left(x+1\right)^2t-lnx$，对称轴 $t=\frac{\left(x+1\right)^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\le 2$，

故有 $g\left(t\right)\ge g\left(4\right)=16x^2-4\left(x+1\right)^2-lnx$.

记 $h\left(x\right)=16x^2-4\left(x+1\right)^2-lnx$，$h'\left(x\right)=32x-8\left(x+1\right)-\frac{1}{x}=24x-8-\frac{1}{x}\ge 24\times 1-8-\frac{1}{1}>0$，

所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 单调递增，且 $h\left(1\right)=0$. 故有 $h\left(x\right)\ge 0$，于是 $g\left(t\right)\ge 0$ 恒成立.

由此 $0<a\le \frac{1}{4}$.

23. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-ax\ln x+a+1(a\in \mathbf{R})$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程;

（2）若对于任意的 $x\in\left[1,\mathrm{e}\right]$，都有 $f\left(x\right)>0$，求实数 a 的取值范围.

【答案】:

【解析】:（1）当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=x^2-x\ln x+2$，$f'\left(x\right)=2x-\ln x-1$，

$f\left(1\right)=3$，$f'\left(1\right)=1$. ……………………………………………………………………2 分

l：$y-3=x-1$，即 $x-y+2=0$.

所以曲线 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $x-y+2=0$. ……………………………4 分

（2）$f\left(x\right)>0$ 即 $x^2-ax\ln x+a+1>0$，所以 $x-a\ln x+\frac{a+1}{x}>0$.

令 $h\left(x\right)=x-a\ln x+\frac{a+1}{x}$，$h'\left(x\right)=1-\frac{a+1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax-\left(a+1\right)}{x^2}=\frac{\left(x+1\right)\left[x-\left(a+1\right)\right]}{x^2}$. ………6 分

若不等式 $f\left(x\right)>0$，对任意 $x\in\left[1,e\right]$ 恒成立，即函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上的最小值大于零.

①当 $1+a\ge e$，即 $a\ge e-1$ 时，$h\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上单调递减，所以 $h\left(x\right)$ 的最小值为 $h\left(e\right)$，

由 $h\left(e\right)=e+\frac{1+a}{e}-a>0$ 可得 $a<\frac{e^2+1}{e-1}$，

因为 $\frac{e^2+1}{e-1}>e-1$，所以 $e-1\le a<\frac{e^2+1}{e-1}$. ……………………………………………………8 分

②当 $1+a\le 1$，即 $a\le 0$ 时，$h\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上单调递增，

所以$h\left(x\right)$最小值为$h\left(1\right)$，由$h\left(1\right)=1+1+a>0$可得$a>-2$，即$-2<a\le 0$. ………9 分

③当$1<1+a<e$，即$0<a<e-1$时，可得$h\left(x\right)$最小值为$h\left(1+a\right)$，

因为$0<\ln\left(1+a\right)<1$，所以$0<a\ln\left(1+a\right)<a$，

故$h\left(1+a\right)=2+a-a\ln\left(1+a\right)>2$. 即$0<a<e-1$，……………………………………11 分

综上可得，a的取值范围是$\left(-2,\dfrac{e^2+1}{e-1}\right)$. ……………………………………………………12 分

24. 已知函数$f\left(x\right)=e^x$，$g\left(x\right)=\ln x$.

（Ⅰ）若函数$h\left(x\right)=f\left(x\right)+ag\left(x\right)$存在极小值，求实数$a$的取值范围；

（Ⅱ）若$m>0$，且$m^2x^2f\left(x-1\right)-\left(x+1\right)g\left(x\right)-mx\ge 0$对任意$x>0$恒成立，求实数$m$的取值范围.

（参考数据：$\ln 2\approx 0.69$，$e\approx 2.718$）.

【答案】:（Ⅰ）$m\ge 1$.；（Ⅱ）$m\ge 1$.

【解析】:（Ⅰ）由题得$h\left(x\right)=e^x+a\ln x$，$h'\left(x\right)=e^x+\dfrac{a}{x}=\dfrac{xe^x+a}{x}$

又$\varphi\left(x\right)=xe^x$在$\left(0,+\infty\right)$上为单调递增函数，$\varphi\left(0\right)=0$，

故当$a\ge 0$时，$h\left(x\right)$无极值.

当$a<0$时，存在$x_0>0$，$h\left(x\right)$在$\left(0,x_0\right)$上单调递增，$\left(x_0,+\infty\right)$上单调递增，存在极小值故$a<0$.

（Ⅱ）由$m^2x^2f\left(x-1\right)-\left(x+1\right)g\left(x\right)-mx\ge 0$即$m^2x^2e^{x-1}-\left(x+1\right)\ln x-mx\ge 0$

首先，令$x=1$，得$m\ge 1$；

下面证明当$m\ge 1$时符合要求：令$t\left(m\right)=m^2x^2e^{x-1}-\left(x+1\right)\ln x-mx$.

（1）若$\dfrac{x}{2x^2e^{x-1}}=\dfrac{1}{2xe^{x-1}}\le 1$，即$xe^{x-1}\ge\dfrac{1}{2}$时，$t\left(m\right)\ge t\left(1\right)=x^2e^{x-1}-\left(x+1\right)\ln x-x$.

令$k\left(x\right)=x^2e^{x-1}-\left(x+1\right)\ln x-x$. 得$k'\left(x\right)=\left(x^2+2x\right)e^{x-1}-\dfrac{1}{x}-\ln x-2$.

$k''\left(x\right)=\left(x^2+4x+2\right)e^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\ge\left(x^4+4x+2\right)\cdot\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x^2}+2$.

显然当$x>0$时，$k'\left(0\right)>0$，从而$k'(x)$递增，又$k'\left(1\right)=0$

则$0<x<1$时，$k'(x)<0$，$k\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减；$x>1$时，$k'(x)>0$，$k\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

所以$k_{\min}\left(x\right)=k\left(1\right)=0$得证；

（2）若 $\dfrac{x}{2x^2e^{x-1}}=\dfrac{1}{2xe^{x-1}}>1$，即 $xe^{x-1}<\dfrac{1}{2}$ 时，$t(m)\geq t\left(\dfrac{1}{2xe^{x-1}}\right)=-\dfrac{4e^{x-1}(x+1)\ln x+1}{4e^{x-1}}$.

下面，只要证 $n(x)=4e^{x-1}(x+1)\ln x+1\leq 0$，其中 $xe^{x-1}<\dfrac{1}{2}$.

由 $xe^{x-1}<\dfrac{1}{2}$，且 $y=xe^{x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，记 $x_0e^{x_0-1}=\dfrac{1}{2}$，得 $x\in(0,x_0)$

又 $(1-\ln 2)e^{(1-\ln 2)-1}<\dfrac{1}{2}$，所以 $x_0>1-\ln 2$

又 $n(x)\leq 4e^{x-1}(x+1)(x-1)+1=4x^2e^{x-1}-4e^{x-1}+1<2x-4e^{x-1}+1$.

令 $p(x)=2x-4e^{x-1}+1$，则 $p'(x)=2-4e^{x-1}$.

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$p(x)$ 在 $(0,1-\ln 2)$ 上单调递增，$(1-\ln 2,x_0)$ 上单调递减，

$p(x)\leq p(1-\ln 2)=1-2\ln 2<0$，得证.

故所求实数 m 的取值范围为 $m\geq 1$.

25. 已知函数 $f(x)=e^{x-a}-ax$，$a\in R$.

（1）若函数 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围；

（2）若对任意的 $x\in[0,+\infty)$，均有 $f(x+1)+\dfrac{a}{2}(x+2)\geq\sqrt{x^2+ax+1}$，求 a 的取值范围.（注：$e\approx 2.71828$ 为自然对数的数）

【答案】:（1）$(1,+\infty)$；（2）$(-\infty,1]$.

【解析】:（1）【解法一】:（整体法）

$f'(x)=e^{x-a}-a$

当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不可能有两个零点

当 $a>0$ 时，

x	$(-\infty,a+\ln a)$	$a+\ln a$	$(a+\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

要有两个零点，需要 $f(a+\ln a)<0$，即 $a-a(a+\ln a)<0$，即 $1-a-\ln a<0$

$h(a)=1-a-\ln a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$h(1)=0$，因此 $h(a)<0$ 得到 $a>1$，此时 $a+\ln a>0$

因为 $f(0)=e^{-a}>0$，$f(a+\ln a)<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

因此 $f(x)$ 在 $(0,a+\ln a)$ 和 $(a+\ln a,+\infty)$ 内各有一个零点

因此实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

【解法二】:（分离法）

当 $a\le 0$ 时， $f(x)=e^{x-a}-ax>0$， $f(x)$ 无零点

当 $a>0$ 时， $e^{x-a}=ax$， $x-a=\ln(ax)=\ln a+\ln x$

因此 $x-\ln x=a+\ln a$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上有两个零点

令 $g(x)=x-\ln x$

由 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

$g(1)=0$，易知： $\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=+\infty$， $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

因此 $g(x)=a+\ln a$ 有两个解，需要 $a+\ln a>1$

由 $h(a)=a+\ln a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增且 $h(1)=0$，可知 $a>1$

（2）（必要性分析）

$$p(x)=f(x+1)+\frac{a}{2}(x+2)-\sqrt{x^2+ax+1}=e^{x+1-a}-\frac{a}{2}x-\sqrt{x^2+ax+1}$$

由 $p(0)=e^{1-a}-1\ge 0$ 可知 $1-a\ge 0$，得 $a\le 1$

下证明：当 $a\le 1$ 时， $p(x)\ge 0$ 对任意 $x\ge 0$ 成立

当 $x>0$ 时， e^{x+1-a} 关于 a 单调递减， $\dfrac{a}{2}x$ 关于 a 单调递增， $\sqrt{x^2+ax+1}$ 关于 a 单调递增

因此 $p(x)$ 关于 a 单调递减，则 $p(x)\ge e^x-\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}$

先证明：当 $x>0$ 时， $e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

令 $k(x)=\dfrac{1+x+\frac{1}{2}x^2}{e^x}$，由 $k'(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{e^x}<0$ 知 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

则 $k(x)<k(0)=1$，即 $1+x+\dfrac{1}{2}x^2<e^x$

因此 $e^x-\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}>1+x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}$

$$e^x-\frac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}>1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1}^2-\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)^2>0$$

因此当 $x>0$ 时， $p(x)\ge e^x-\dfrac{1}{2}x-\sqrt{x^2+x+1}>0$

综上可知，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

不等式存在性问题

25．已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)已知 $\lambda>0$，若存在 $x\in(1,+\infty)$ 时，不等式 $\lambda x^2-\lambda x\ge\left(e^{\lambda x}-1\right)\ln x$ 成立，求 λ 的取值范围.

【答案】(1)函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,1)$， $(1,+\infty)$ 上均单调递减

(2) $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$

【解析】

【分析】

（1）利用导数在函数单调性中的应用，即可得到结果；

（2）根据题意，将原不等式转化为 $\dfrac{\ln e^{\lambda x}}{e^{\lambda x-1}}\ge\dfrac{\ln x}{x-1}$，即 $f\left(e^{\lambda x}\right)\ge f(x)$；再根据（1），可知 $y=f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，将原问题转换为 $e^{\lambda x}\le x$ 在 $(1,+\infty)$，两边同取自然对数，采用分离参数法可得 $\lambda\le\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上能成立，再利用导数求出函数 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$ 的最值，即可得到结果.

(1)

解： $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$

因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$， 所以 $f'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$.

令 $g(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$， 则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{x^2}$，

所以函数 $y=g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单增；在区间 $(1,+\infty)$ 单减.

又因为 $g(1)=0$， 所以当 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 时 $g(x)<0$， $f'(x)<0$

所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,1)$， $(1,+\infty)$ 上均单调递减；

(2)

解：$\because\lambda x^2-\lambda x\ge\left(e^{\lambda x}-1\right)\ln x$

$\therefore(x-1)\ln e^{\lambda x}\ge\left(e^{\lambda x}-1\right)\ln x$

当 $\lambda>0$， $x>1$ 时 $x-1>0$，所求不等式可化为 $\dfrac{\ln e^{\lambda x}}{e^{\lambda x-1}}\ge\dfrac{\ln x}{x-1}$，

即 $f\left(e^{\lambda x}\right)\ge f(x)$，

$\because \lambda>0$ 易知 $e^{\lambda x}\in(1,+\infty)$，

由（1）知， $y=f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

故只需 $e^{\lambda x}\le x$ 在 $(1,+\infty)$ 上能成立.

两边同取自然对数，得 $\lambda x\le\ln x$，即 $\lambda\le\frac{\ln x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上能成立.

令 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(1.e)$ 时， $\varphi'(x)>0$，函数 $y=\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时， $\varphi'(x)<0$，函数 $y=\varphi(x)$ 单调递减，

$\therefore \varphi(x)_{\max}=\varphi(e)=\frac{1}{e}$，

所以 $\lambda\le\frac{1}{e}$，又 $\lambda>0$，故 λ 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{e}\right]$.

26．已知函数 $f(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x(a>0)$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $f(x)+\mathrm{e}\le 0$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1)答案见解析

(2) $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$

【解析】

【分析】

（1）求得 $f'(x)$，对 a 进行分类讨论，由此求得 $f(x)$ 的单调区间.

（2）根据（1）的结论对 a 进行分类讨论，由 $f_{\min}(x)\le-\mathrm{e}$，结合构造函数法以及导数来求得 a 的取值范围.

(1)

已知函数 $f(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2ax-(a+2)+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-(a+2)x+1}{x}=\frac{(ax-1)(2x-1)}{x}$，

①当 $0<a<2$ 时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{2}$，

x	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减；

②当 $a=2$ 时， $f'(x)=\dfrac{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{x}\geq 0$， 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

③当 $a>2$ 时， $\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$，

x	$\left(0,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大值	递减	极小值	递增

$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right),\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减.

综上所述， $0<a<2$ 时， $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减；

$a=2$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

$a>2$ 时， $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right),\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减.

(2)

若存在 $x\in[1,+\infty)$，使得 $f(x)+\mathrm{e}\leq 0$ 成立，即使得 $f_{\min}(x)\leq -\mathrm{e}$.

由（1），可知当 $a\geq 1$ 时， $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增， $f_{\min}(x)=f(1)=-2$，

不满足 $f_{\min}(x)\leq -\mathrm{e}$；

当 $0<a<1$ 时， $\frac{1}{a}>1$

x	$\left(1,\frac{1}{a}\right)$	$\frac{1}{a}$	$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	递减	极小值	递增

$f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{a}\right)=-1-\frac{1}{a}-\ln a$，所以 $-1-\frac{1}{a}-\ln a\leq -\mathrm{e}$， 即 $\ln a+\frac{1}{a}\geq \mathrm{e}-1$，

令 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}(0<x<1)$， $\therefore g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0$，

$\therefore g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

又 $\because g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}-1$，由 $\ln a+\dfrac{1}{a}\geq \mathrm{e}-1$，得 $0<a\leq\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

27．已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}(x>1)$.

(1)判断函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)已知 $\lambda>0$，若存在 $x\in(1,+\infty)$ 时使不等式 $(x-1)f\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)-\ln x\geq 0$ 成立，求 λ 的取值范围.

【答案】(1)函数 $y=f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

(2) $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}]$.

【解析】

【分析】

(1)求出函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$，判断 $f'(x)$ 的符号作答.

(2)对给定不等式作等价变形，借助(1)脱去法则“f”，分离参数构造函数，再求出函数最值作答.

(1)

函数 $f\ \ x\ =\dfrac{\ln x}{x-1}$，$x>1$，求导得：$f'(x)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$，

令 $g(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$，$x>1$，则 $g'(x)=\dfrac{1-x}{x^2}<0$，即函数 $y=g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递减，

而 $g(1)=0$，则当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<g(1)=0$，即 $f'(x)<0$，

所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

(2)

当 $x>1$ 时 $\ln x>0$，$(x-1)f\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)-\ln x\geq 0\Leftrightarrow f\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)\geq\dfrac{\ln x}{x-1}\Leftrightarrow f\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)\geq f(x)$，

因 $\lambda>0$ 且 $x>1$，则 $\mathrm{e}^{\lambda x}\in(1,+\infty)$，由(1)知，$y=f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

则存在 $x\in(1,+\infty)$，不等式 $f\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)\geq f(x)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda x}\leq x\Leftrightarrow \lambda x\leq\ln x\Leftrightarrow\lambda\leq\dfrac{\ln x}{x}$ 成立，

令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$\varphi'(x)>0$，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，

因此，函数 $\varphi(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，$\varphi(x)_{\max}=\varphi(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，于是得 $0<\lambda\leq\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

所以 λ 的取值范围是 $(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}]$.

【点睛】

关键点睛：涉及不等式恒成立问题，将给定不等式等价转化，构造函数，再利用函数的导数探讨解决问题.

28．已知函数 $f(x)=e^x-ax+2$ （e为自然对数的底数）.

(1)若 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)设 $g(x)=e^x+e^{-x}$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，均存在 $x_0\in[-1,2]$，使得 $f(x)>g(x_0)$，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增

(2) $[0，e)$

【解析】

【分析】

（1）写出 $a=2$ 时函数表达式，运用导数与函数单调性的知识进行求解即可；

（2）将存在性问题转化为最值问题，原题即求 $f(x)=e^x-ax+2>2$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立的 a 的取值范围，分类讨论 a 的范围即可求解.

(1)

若 $a=2$ 时， $f(x)=e^x-2x+2$，则 $f'(x)=e^x-2$，

令 $f'(x)=e^x-2>0$，得 $x>\ln 2$，令 $f'(x)=e^x-2<0$，得 $x<\ln 2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增.

(2)

由题意可知，即求 $f(x)>g(x_0)_{\min}$ 成立的 a 的取值范围，

因为 $g(x)=e^x+e^{-x}$， $x\in[-1,2]$，所以 $e^x\in[\frac{1}{e},e^2]$，

所以 $e^x+e^{-x}\geq 2$ （当且仅当 $x=0$ 时取等号），

即 $g(x_0)_{\min}=2$，即求 $f(x)=e^x-ax+2>2$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立的 a 的取值范围，

当 $a<0$ 时， $f'(x)=e^x-a>0$，此时 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

且有 $f(\frac{3}{a})=e^{\frac{3}{a}}-3+2=e^{\frac{3}{a}}-1<0<2$，不满足 $f(x)_{\min}>2$；

当 $a=0$ 时，易知 $f(x)>2$，显然成立；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=e^x-a>0$，得 $x>\ln a$，令 $f'(x)=e^x-a<0$，得 $x<\ln a$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a+2$，

所以 $a-a\ln a+2>2$，解得， $0\leq a<e$

所以实数 a 的取值范围为 $[0，e)$.

【点睛】

此类题目需要综合运用导数与函数之间的关系求解，对于任意或存在性问题需要转化为最值问题进行求解.

29．已知函数 $f(x)=x^2+(2a+2)\ln x$.

(1)当 $a=-5$时，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若存在 $x\in[2,e]$，使得 $f(x)-x^2>2x+\dfrac{2a+4}{x}$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1)单调递减区间为$(0,2)$，单调递增区间为$(2,+\infty)$；

(2)$\left(\dfrac{e^2-e+2}{e-1},+\infty\right)$.

【解析】

【分析】

（1）当 $a=-5$时，$f(x)=x^2-8\ln x$，得出 $f(x)$的定义域并对 $f(x)$进行求导，利用导数研究函数的单调性，即可得出 $f(x)$的单调区间；

（2）将题意等价于 $2x+\dfrac{2a+4}{x}-(2a+2)\ln x<0$ 在$[2,e]$内有解，设 $h(x)=2x+\dfrac{2a+4}{x}-(2a+2)\ln x$，即在$[2,e]$上，函数 $h(x)_{\min}<0$，对 $h(x)$进行求导，令 $h'(x)=0$，得出 $x=a+2$，分类讨论 $a+2$ 与区间$[2,e]$的关系，并利用导数研究函数 $h(x)$的单调和最小值，结合 $h(x)_{\min}<0$，从而得出实数 a 的取值范围.

(1)

解：当 $a=-5$时，$f(x)=x^2-8\ln x$，可知 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

则 $f'(x)=2x-\dfrac{8}{x}=\dfrac{2x^2-8}{x},x>0$，

可知当 $x\in(0,2)$时，$f'\ x\ <0$；当 $x\in(2,+\infty)$时，$f'\ x\ >0$；

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(0,2)$，单调递增区间为$(2,+\infty)$.

(2)

解：由题可知，存在 $x\in[2,e]$，使得 $f(x)-x^2>2x+\dfrac{2a+4}{x}$ 成立，

等价于 $2x+\dfrac{2a+4}{x}-(2a+2)\ln x<0$ 在$[2,e]$内有解，

可设 $h(x)=2x+\dfrac{2a+4}{x}-(2a+2)\ln x$，即在$[2,e]$上，函数 $h(x)_{\min}<0$，

$\therefore h'(x)=2-\dfrac{(2a+4)}{x^2}-\dfrac{(2a+2)}{x}=\dfrac{2x^2-(2a+2)x-(2a+4)}{x^2}=\dfrac{2(x+1)[x-(a+2)]}{x^2}$，

令 $h'(x)=0$，即 $(x+1)[x-(a+2)]=0$，解得：$x=a+2$ 或 $x=-1$（舍去），

当$a+2\geq \mathrm{e}$，即$a\geq \mathrm{e}-2$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$[2,\mathrm{e}]$上单调递减，

$\therefore h(x)_{\min}=h(\mathrm{e})=2\mathrm{e}+\dfrac{2a+4}{\mathrm{e}}-2a-2<0$，得$a>\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1}$，

又$\because \dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1}>\mathrm{e}-2$，所以$a>\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1}$；

当$a+2\leq 2$时，即$a\leq 0$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$[2,\mathrm{e}]$上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(2)=6+a-(2a+2)\ln 2<0$，得$a>\dfrac{6-\ln 4}{\ln 4-1}>0$，不合题意；

当$2<a+2<\mathrm{e}$，即$0<a<\mathrm{e}-2$时，

则$h(x)$在$[2,a+2]$上单调递减，在$[a+2,\mathrm{e}]$上单调递增，

$\therefore h(x)_{\min}=h(a+2)=2a+6-(2a+2)\ln(a+2)$，

$\because \ln 2<\ln(a+2)<\ln \mathrm{e}=1$，$\therefore (2a+2)\ln 2<(2a+2)\ln(2a+2)<2a+2$，

$\therefore h(a+2)=2a+6-(2a+2)\ln(a+2)>2a+6-2a-2=4$，

即$h(x)_{\min}>4$，不符合题意；

综上得，实数a的取值范围为$\left(\dfrac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}-1},+\infty\right)$.

【点睛】

思路点睛：本题考查利用导数研究函数的单调性，以及利用导数解决不等式成立的综合问题：

（1）利用导数解决单调区间问题，应先确定函数的定义域，否则，写出的单调区间易出错；利用导数解决含有参数的单调性问题，要注意分类讨论和化归思想的应用；

（2）利用导数解决不等式的综合问题的一般步骤是：构造新函数，利用导数研究的单调区间和最值，再进行相应证明.

30．已知函数$f(x)=e^x-ax-1$.

(1)当$a=1$时，求$f(x)$的单调区间与极值；

(2)若$f(x)\leq x^2$在$x\in[0,+\infty)$上有解，求实数a的取值范围.

【答案】(1)在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，函数$f(x)$有极小值0，无极大值

(2)$a\geq e-2$

【解析】

【分析】

（1）利用导数的正负判断函数的单调性，然后由极值的定义求解即可；

（2）分 $x=0$ 和 $x>0$ 两种情况分析求解，当 $x>0$ 时，不等式变形为 $a\geqslant\frac{e^x}{x}-(x+\frac{1}{x})$ 在 $x\in[0,\ +\infty)$ 上有解，构造函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}-(x+\frac{1}{x})$，利用导数研究函数 $g(x)$ 的单调性，求解 $g(x)$ 的最小值，即可得到答案.

(1)

当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$，所以 $f'(x)=e^x-1$

当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$；当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x=0$ 时函数 $f(x)$ 有极小值 $f(0)=0$，无极大值.

(2)

因为 $f(x)\le x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上有解，

所以 $e^x-x^2-ax-1\le 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上有解，

当 $x=0$ 时，不等式成立，此时 $a\in R$，

当 $x>0$ 时 $a\ge\frac{e^x}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)=\frac{(x-1)\left[e^x-(x+1)\right]}{x^2}$

由（1）知 $x>0$ 时 $f(x)>f(0)=0$，即 $e^x-(x+1)>0$，

当 $0<x<1$ 时 $g'(x)<0$；当 $x>1$ 时 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x=1$ 时，$g(x)_{\min}=e-2$，所以 $a\ge e-2$，

综上可知，实数 a 的取值范围是 $a\ge e-2$.

【点睛】

利用导数研究不等式恒成立问题或有解问题的策略为：通常构造新函数或参变量分离，利用导数研究函数的单调性，求出最值从而求得参数的取值范围.

31．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2+ax+a)$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\le\mathrm{e}^a$ 在 $[a,+\infty)$ 上有解，求实数 a 的取值范围；

(3)若曲线 $y=f(x)$ 存在两条互相垂直的切线，求实数 a 的取值范围；（只需直接写出结果）

【答案】(1)单调增区间是 $(-\infty,-2)$，$(-1,+\infty)$，单调递减区间是 $(-2,-1)$；

(2)$\left\{a \middle| a \leqslant \frac{1}{2}\right\}$;

(3)$\{a|a \neq 2，a \in R\}$.

【解析】

【分析】

(1)当 $a=1$时，$f(x)=e^x(x^2+x+1)$，求出其导数，利用导数即可解出单调区间；

(2)若关于 x 的不等式$f(x) \leqslant e^a$在$[a，+\infty)$上有解，即$x^2+ax+a \leqslant e^{a-x}$，在$[a，+\infty)$上有解，构造两个函数$r(x)=x^2+ax+a$，$t(x)=e^{a-x}$，研究两个函数的在$[a，+\infty)$上的单调性，即可转化出关于 a 的不等式，从而求得 a 的范围；

(3)由 $f(x)$ 的导数$f'(x)=e^x(x+2)(x+a)$，当$a \neq -2$时，函数$y=f'(x)$的图象与 x 轴有两个交点，故 $f(x)$ 图象上存在两条互相垂直的切线.

(1)

当 $a=1$时，$f(x)=e^x(x^2+x+1)$，

则$f'(x)=e^x(x^2+3x+2)$，

令$f'(x)>0$得$x>-1$或$x<-2$；令$f'(x)<0$得$-2<x<-1$.

∴函数 $f(x)$ 的单调增区间是$(-\infty,-2)$，$(-1,+\infty)$，单调递减区间是$(-2,-1)$；

(2)

$f(x) \leqslant e^a$，即$e^x(x^2+ax+a) \leqslant e^a$，可变为$x^2+ax+a \leqslant e^{a-x}$，

令$r(x)=x^2+ax+a$，$t(x)=e^{a-x}$，

当 $a>0$ 时，在$[a，+\infty)$上，由于$r(x)$的对称轴为负，

故$r(x)$在$[a，+\infty)$上增，$t(x)$在$[a，+\infty)$上减，

欲使$x^2+ax+a \leqslant e^{a-x}$有解，

则只须$r(a) \leqslant t(a)$，即$2a^2+a \leqslant 1$，

解得$-1 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$，故$0<a \leqslant \frac{1}{2}$;

当 $a \leqslant 0$ 时，在$[a，+\infty)$上，由于$r(x)$的对称轴为正，

故$r(x)$在$[a，+\infty)$上先减后增，$t(x)$在$[a，+\infty)$上减，

欲使$x^2+ax+a \leqslant e^{a-x}$有解，只须$r(-\frac{a}{2}) \leqslant t(-\frac{a}{2})$，

即$-\frac{a^2}{4}+a \leqslant e^{\frac{3}{2}a}$，

当 $a \leqslant 0$ 时，$-\frac{a^2}{4}+a \leqslant e^{\frac{3}{2}a}$显然成立.

综上所述，$a \leqslant \frac{1}{2}$即为符合条件的实数 a 的取值范围；

(3)

a 的取值范围是$\{a|a \neq 2，a \in R\}$.

【点睛】

本题考查导数的综合运用，利用导数研究函数的单调性，以及存在性问题求参数的范围，本题考查了转化的思想，分类讨论的思想，属于导数运用的一类典型题.

32．已知函数$f(x) = 2x^3 - ax^2 + 8$.

(1)当a=1时，求曲线$y = f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程；

(2)若在区间[1,2)内至少存在一个实数 x，使得$f(x) < 0$成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1)$4x - y + 5 = 0$；

(2)$[6, +\infty)$.

【解析】

【分析】

（1）根据题意，求得$f(1)$，$f'(1)$，利用导数的几何意义，即可写出切线方程；

（2）对$f(x) < 0$分离参数$a > 2x + \frac{8}{x^2}$，构造函数$h(x) = 2x + \frac{8}{x^2}, x \in [1,2)$，利用导数求得其单调性和最值，即可求得参数的范围.

(1)

当$a = 1$时，$f(x) = 2x^3 - x^2 + 8$，$f'(x) = 6x^2 - 2x = 2x(3x - 1)$，

又$f(1) = 9$，$f'(1) = 4$，

故$y = f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程为：$y - 9 = 4(x - 1)$，

即：$4x - y + 5 = 0$.

(2)

因为$x \in [1,2)$，若$f(x) < 0$，即$2x^3 - ax^2 + 8 < 0$，$a > 2x + \frac{8}{x^2}$.

令$h(x) = 2x + \frac{8}{x^2}, x \in [1,2)$，则$h'(x) = 2 - \frac{16}{x^3} = \frac{2(x^3-8)}{x^3}$，

当$x \in [1,2)$，$h'(x) < 0$，$h(x)$单调递减，故$h(x) > h(2) = 6$.

若在区间[1,2)内至少存在一个实数 x，使得$f(x) < 0$成立，

故$a \geq 6$,

则实数 a 的取值范围为$[6, +\infty)$.

【点睛】

本题考察导数的几何意义，以及利用导数处理不等式能成立问题；本题第二问中，对$f(x) < 0$分离参数，构造$h(x) = 2x + \frac{8}{x^2}, x \in [1,2)$是解决本题的关键，属中档题.

高考预测三：恒成立与存在性的综合问题

33．已知函数$f(x)=e^{x}+e^{-x}$，其中 e 是自然对数的底数．

（1）判断并证明 $f(x)$ 的奇偶性；

（2）若关于 x 的不等式$mf(x)\le e^{-x}+m-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，求实数 m 的取值范围；

（3）已知正数 a 满足：存在$x_0\in[1,+\infty)$，使得$f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$成立，试比较e^{a-1}与a^{e-1}的大小，并证明你的结论．

【答案】（1）$f(x)$ 为定义域上的偶函数，证明见解析；（2）$m\le-\frac{1}{3}$；（3）当$\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)<a<e$时，$e^{a-1}<a^{e-1}$；当$a=e$时，$e^{a-1}=a^{e-1}$；当$a>e$时，$e^{a-1}>a^{e-1}$；

证明见解析．

【解析】

【分析】

（1）根据函数奇偶性的定义即可证明 $f(x)$ 为定义域上的偶函数；

（2）利用参数分离法，将不等式$mf(x)\le e^{-x}+m-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，转化为即$m\le\frac{e^{-x}-1}{e^{x}+e^{-x}-1}$在（0，+∞）上恒成立，进而转化为求最值问题即可求解；

（3）构造函数，利用函数的单调性，最值与单调性之间的关系，分别进行讨论即可求解

【详解】

（1）$f(x)$ 为定义域上的偶函数．

证明：$f(x)=e^{x}+e^{-x}$的定义域为 R，

$\because f(-x)=e^{-x}+e^{x}=f(x)$，

$\therefore$ $f(x)$ 为定义域上的偶函数；

（2）若关于 x 的不等式$mf(x)\le e^{-x}+m-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，

即$m(e^{x}+e^{-x}-1)\le e^{-x}-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，

$\because$ $x>0$，$\therefore e^{x}+e^{-x}-1>0$，

即$m\le\frac{e^{-x}-1}{e^{x}+e^{-x}-1}$在（0，+∞）上恒成立，

设$t=e^{x},(t>1)$，则$m\le\frac{1-t}{t^2-t+1}$在$(1,+\infty)$上恒成立．

$\because\frac{1-t}{t^2-t+1}=-\frac{t-1}{(t-1)^2+(t-1)+1}=-\frac{1}{(t-1)+\frac{1}{t-1}+1}\ge-\frac{1}{3}$.

当且仅当$t=2$时上式等号成立．

$\therefore m\le-\frac{1}{3}$；

（3）令$g(x)=e^{x}+e^{-x}-a(-x^3+3x)$.

则$g'(x)=e^{x}-e^{-x}+3a(x^2-1)$，

当 $x>1$时，$g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在$(1,+\infty)$上单调递增，

故此时 $g(x)$ 的最小值$g(1)=e+\frac{1}{e}-2a$.

由于存在$x_0\in[1,+\infty)$，使得$f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$成立，

故$e+\frac{1}{e}-2a<0$，即$a>\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$.

令$h(x)=x-(e-1)\ln x-1$，$h'(x)=1-\frac{e-1}{x}$，

由$h'(x)=1-\frac{e-1}{x}=0$，解得$x=e-1$.

当$0<x<e-1$时，$h'(x)<0$，此时函数单调递减，

当$x>e-1$时，$h'(x)>0$，此时函数单调递增.

∴ $h(x)$ 在$(0,+\infty)$上的最小值为$h(e-1)$.

注意到$h(0)=h(1)=0$，

∴当$x\in(1,e-1)\subseteq(0,e-1)$时，$h(e-1)\le h(x)<h(1)=0$.

$x\in(e-1,e)\subseteq(e-1,+\infty)$时，$h(x)<h(e)=0$.

∴$h(x)<0$对任意$x\in(1,e)$成立.

①$a\in\left(\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right),e\right)\subseteq(1,e)$时，$h(a)<0$，即$a-1<(e-1)\ln a$，从而$e^{a-1}<a^{e-1}$；

②$a=e$时，$e^{a-1}=a^{e-1}$；

③$a\in(e,+\infty)\subseteq(e-1,+\infty)$时，$h(a)>h(e)=0$，即$a-1>(e-1)\ln a$，从而$e^{a-1}>a^{e-1}$.

综上可知：当$\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)<a<e$时，$e^{a-1}<a^{e-1}$；当$a=e$时，$e^{a-1}=a^{e-1}$；当$a>e$时，$e^{a-1}>a^{e-1}$.

34．已知函数$f(x)=\ln x+x^2-ax$，$a\in R$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若对任意的$a\in(1,2)$，$x_0\in[1，2]$．不等式$f(x_0)>m\ln a$恒成立，求实数m的取值范围.

【答案】（1）答案见解析；（2）$(-\infty，-\frac{1}{\ln 2}]$.

【解析】

【分析】

（1）求出导函数 $f'(x)$，分类讨论确定 $f'(x)$ 的正负，得单调区间；

（2）由 $f'(x)>0$ 在$[1,2]$上恒成立，得 $f(x)$ 递增，$f(x)\ge f(1)=1-a$，问题转化为对于任意的$a\in(1,2)$，不等式$1-a>m\ln a$恒成立，分离参数为$m<\frac{1-a}{\ln a}$，引入新函数$g(a)=\frac{1-a}{\ln a}(1<a<2)$，用导数求得其最小值后可得$m$的范围.

【详解】

解：（1）$f(x)=\ln x+x^2-ax$，定义域是$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-a=\frac{2x^2-ax+1}{x}$，

令$h(x)=2x^2-ax+1(x>0)$，$\triangle=a^2-8$，

①$a^2-8\leqslant 0$即$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$时，$h(x)\geqslant 0$恒成立，

即$f'(x)\geqslant 0$恒成立，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

②$a^2-8>0$即$a>2\sqrt{2}$或$a<-2\sqrt{2}$时，$h(x)=0$有 2 个不相等的实数根，

此时$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$，

$a>2\sqrt{2}$时，$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}>0$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}>0$，

故$x\in(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})$时，$h(x)>0$，即$f'(x)>0$，

$x\in(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}，\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})$时，$h(x)<0$，即$f'(x)<0$，

$x\in(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}，+\infty)$时，$h(x)>0$，即$f'(x)>0$，

故$f(x)$在$(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})$递增，在$(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}，\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})$递减，在$(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}，+\infty)$递增；

$a<-2\sqrt{2}$时，$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}<0$，$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}<0$，$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$递增，

综上：$a\leqslant 2\sqrt{2}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

$a>2\sqrt{2}$时，$f(x)$在$(0,\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})$递增，在$(\frac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}，\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})$递减，在$(\frac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}，+\infty)$递增.

（2）$\because x>0$，$\therefore\frac{1}{x}+2x\geqslant 2\sqrt{2}$，当$a\in(1,2)$时，$f'(x)>0$在$[1，2]$上恒成立，

$f(x)$在$[1，2]$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=1-a$，

故问题等价于：对于任意的$a\in(1,2)$，不等式$1-a>m\ln a$恒成立，

即$m<\frac{1-a}{\ln a}$恒成立，记$g(a)=\frac{1-a}{\ln a}(1<a<2)$，则$g'(a)=\frac{-a\ln a-1+a}{a\ln^2 a}$，

令$M(a)=-a\ln a-1+a$，则$M'(a)=-\ln a<0$，

所以$M(a)$在$(1,2)$上递减，所以$M(a)<M(1)=0$，

故$g'(a)<0$，所以$g(a)$在$a\in(1,2)$上单调递减，

所以$m\leq g(2)=-\frac{1}{\ln 2}$，

即实数m的取值范围为$(-\infty,-\frac{1}{\ln 2}]$.

【点睛】

本题考查用导数研究函数的单调性，研究不等式恒成立问题．对于含有参数的函数的单调性在确定$f'(x)$的正负时需要分类讨论，本题是根据一元二次方程的解的情况分类求解．解决不等式恒成立问题的关键是问题的转化，对于多元情形需分清主元与次元，可对多元分别讨论，如本题中先确定$f(x)$的最小值，问题转化为$f(x)_{\min}>m\ln a$，然

后a作主元，m是次元，分离参数转化为求关于a的函数的最值，得所求参数范围.

35．已知函数$f\left(x\right)=\ln x-ax$.

（1）若函数$f\left(x\right)$在定义域上的最大值为1，求实数a的值；

（2）设函数$h(x)=(x-2)e^{x}+f(x)$，当$a=1$时，$h(x)\le b$对任意的$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$恒成立，求满足条件的实数$b$的最小整数值.

【答案】（1）$a=e^{-2}$；（2）-3.

【解析】

【分析】

（1）先对函数求导，得到$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，分别讨论$a\le 0$，$a>0$两种情况，判定函数单调性，根据函数的最大值，即可求出结果；

(2)先由题意，将问题转化为：得到$b\ge(x-2)\mathrm{e}^{x}+\ln x-x$，对任意的$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$恒成立；设$g(x)=(x-2)\mathrm{e}^{x}+\ln x-x$，求出其导数，得出存在$x_0\in(\frac{1}{2},1)$，函数$y=g(x)$在区间$(\frac{1}{2},x_0)$上单调递增，在区间$(x_0,1)$上单调递减，由隐零点的整体代换的处理方法可得出答案.

【详解】

（1）由题意，函数$y=f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，

当$a\le 0$时，$f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$，函数$y=f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

此时，函数$y=f(x)$在定义域上无最大值；

当$a>0$时，令$f'(x)=\frac{1}{x}-a=0$，得$x=\dfrac{1}{a}$，

由$f'(x)>0$，得$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$，由$f'(x)<0$，得$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，

此时，函数$y=f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，单调减区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

所以当$x=\dfrac{1}{a}$时，函数$f\left(x\right)$有最大值，即$f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1=1\Rightarrow a=\frac{1}{\mathrm{e}^{2}}$，即$a=\mathrm{e}^{-2}$为所求；

（3）只需$b\ge(x-2)\mathrm{e}^{x}+\ln x-x$对任意的$x\in(\frac{1}{2},1)$恒成立即可.

构造函数$g(x)=(x-2)\mathrm{e}^{x}+\ln x-x$，

$g'(x)=(x-1)\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{x}-1=(x-1)\left(\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{x}\right)$，

$\because x\in(\frac{1}{2},1)$，$\therefore x-1<0$，且$t(x)=e^{x}-\frac{1}{x}$单调递增，

$\because t(\frac{1}{2})=e^{\frac{1}{2}}-2<0,t(1)=e-1>0$，

$\therefore$一定存在唯一的$x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$，使得$t(x_0) = 0$，即$e^{x_0} = \frac{1}{x_0}, x_0 = -\ln x_0$，

且当$\frac{1}{2} < x < x_0$时，$t(x) < 0$，即$g'(x) > 0$；

当$x_0 < x < 1$时，$t(x) > 0$，即$g'(x) < 0$.

所以，函数$y = g(x)$在区间$(\frac{1}{2}, x_0)$上单调递增，在区间$(x_0, 1)$上单调递减，

$\therefore g(x)_{\max} = g(x_0) = (x_0 - 2)e^{x_0} + \ln x_0 - x_0 = 1 - 2\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)$，$x \in (\frac{1}{2}, 1)$

则$y = 1 - 2(x_0 + \frac{1}{x_0})$在$(\frac{1}{2}, 1)$上单调递增，

所以$1 - 2(x_0 + \frac{1}{x_0}) \in (-4, -3)$，

因此b的最小整数值为-3.

36．设函数$f(x) = e^{x+1} - x, g(x) = ae^x + ma - 2x(m, a$为实数$)$，

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若存在实数a，使得$f(x) \le g(x)$对任意$x \in \mathbf{R}$恒成立，求实数m的取值范围.

【答案】（1）单调递增区间为$(-1, +\infty)$，单调递减区间为$(-\infty, -1)$；（2）$\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

【解析】

【分析】

（1）求函数导数，即可求出单调区间；

（2）原问题可转化为存在实数a，使$(e - a)e^x + x \le ma$恒成立，构造函数$F(x) = (e - a)e^x + x$，分类讨论，分离参数，转化为求函数最小值.

【详解】

（1）对函数$f(x)$求导，得$f'(x) = e^{x+1} - 1$.

令$f'(x) > 0$，得$x > -1$;令$f'(x) < 0$，得$x < -1$.

故函数$f(x)$的单调递增区间为$(-1, +\infty)$，单调递减区间为$(-\infty, -1)$.

（2）$f(x) \le g(x) \Leftrightarrow (e - a)e^x + x \le ma$.①记函数$F(x) = (e - a)e^x + x$，则$F'(x) = (e - a)e^x + 1$.

若$a \le e$，则$F'(x) > 0$恒成立，此时函数$F(x)$单调递增，而且没有上界.故不能使仕对任意$x \in \mathbf{R}$恒成立.所以$a > e$.

此时①相当于$m \ge \frac{(e-a)e^x + x}{a} = \frac{1}{a}F(x)$对任意实数$x \in \mathbf{R}$恒成立.

令$F'(x) > 0$，得$x < -\ln(a - e)$: $F'(x) < 0$，得$x > -\ln(a - e)$.

所以函数$F(x)$在$\left(-\infty, -\ln(a - e)\right)$上单调递增，在$(-\ln(a - e), +\infty)$上单调递减.

故$F(x)_{\max}=F(-\ln(a-e))=-\ln(a-e)-1$.

所以$m\geq-\frac{\ln(a-e)}{a}-\frac{1}{a}$.

所以原命题转化为存在$a>e$，使得$m\geq-\frac{\ln(a-e)}{a}-\frac{1}{a}$，

记函数$h(a)=-\frac{\ln(a-e)}{a}-\frac{1}{a},a>e$.则$m\geq h(a)_{\min}$.

$$h'(a)=-\frac{\frac{a}{a-e}-\ln(a-e)}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{-\frac{e}{a-e}+\ln(a-e)}{a^2}.$$

令$\varphi(a)=-\frac{e}{a-e}+\ln(a-e)$，显然$\varphi(a)$单调递增，$\varphi(2e)=0$，

所以当$e<a<2e$时，$\varphi(a)<0$，即$h'(a)<0,h(a)$单调递减；当$a>2e$时，$\varphi(a)>0$，即$h'(a)>0$，$h(a)$单调递增.

所以$h(a)_{\min}=h(2e)=-\frac{1}{e}$.

所以实数m的取值范围为$\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

【点睛】

关键点点睛：问题转化为$m\geq-\frac{\ln(a-e)}{a}-\frac{1}{a}$后，根据存在 a 使不等式成立，

只需$m\geq h(a)_{\min}$，这是解题的关键，然后需要根据导数求函数的最小值，属于难题.

37．已知函数$f(x)=m\ln x+kx+1(m>0)$

（1）讨论 $f(x)$的单调性；

（2）若存在实数k，使得$xf'(x)\leq e^{mx}$恒成立的m值有且只有一个，求$k+m$的值.

【答案】（1）答案见解析；（2）$k+m=\frac{e+\sqrt{e}}{2}$.

【解析】

【分析】

（1）求出函数 $f(x)$的定义域，对实数k的取值进行分类讨论，分析导数的符号变化，由此可得出函数 $f(x)$单调单调递增区间和递减区间；

（2）分析得出$e^{mx}-kx-m\geq 0$恒成立，构造函数$g(x)=e^{mx}-kx-m$，转化为$g(x)_{\min}\geq 0$，整理得出$\ln m-\ln k+1-\frac{m^2}{k}=0$，令$h(m)=\ln m-\ln k+1-\frac{m^2}{k}$，利用导数得出$h(m)_{\max}=0$，求出$k$、$m$的值，即可得解.

【详解】

（1）函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{m}{x}+k=\frac{m+kx}{x}$.

当$k\geq 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$k<0$时，令 $f'(x)=0$，解得$x=-\frac{m}{k}$，

当$x\in\left(0,-\frac{m}{k}\right)$时，$f'(x)>0$，当$x\in\left(-\frac{m}{k},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在$\left(0,-\frac{m}{k}\right)$上单调递增，在$\left(-\frac{m}{k},+\infty\right)$上单调递减.

综上所述，当$k\geq 0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$k<0$时，$f(x)$在$\left(0,-\frac{m}{k}\right)$上单调递增，在$\left(-\frac{m}{k},+\infty\right)$上单调递减；

（2）$xf'(x)\leq e^{mx}$恒成立，即$e^{mx}-kx-m\geq 0$恒成立

令$g(x)=e^{mx}-kx-m$，则$g'(x)=me^{mx}-k$.

①当$k\leq 0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

要使$g(x)\geq 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，只需$g(0)=1-m\geq 0$，

$\therefore 0<m\leq 1$，此时m不唯一，不合题意；

②当$0<k\leq m$时，令$g'(x)=0$，解得$x=\frac{\ln k-\ln m}{m}\leq 0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

要使$g(x)\geq 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，只需$g(0)=1-m\geq 0$，

$\therefore 0<m\leq 1$，此时m不唯一，不合题意；

③当$k>m$时，令$g'(x)=0$，解得$x=\frac{\ln k-\ln m}{m}>0$，

当$x\in\left(0,\frac{\ln k-\ln m}{m}\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当$x\in\left(\frac{\ln k-\ln m}{m},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g\left(\frac{\ln k-\ln m}{m}\right)=e^{\ln k-\ln m}-\frac{k}{m}(\ln k-\ln m)-m$，

要使$g(x)\geq 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，且m值唯一，只需$g\left(\frac{\ln k-\ln m}{m}\right)=0$，

整理得$\ln m-\ln k+1-\frac{m^2}{k}=0$，

令$h(m)=\ln m-\ln k+1-\frac{m^2}{k}$，则$h'(m)=\frac{k-2m^2}{mk}$，令$h'(m)=0$，解得$m=\sqrt{\frac{k}{2}}$.

当$m\in\left(0,\sqrt{\frac{k}{2}}\right)$时，$h'(m)>0$，$h(m)$单调递增，

当$m\in\left(\sqrt{\frac{k}{2}},+\infty\right)$时，$h'(m)<0$，$h(m)$单调递减.

$\therefore h(m)_{\max}=h\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)=\ln\sqrt{\frac{1}{2k}}+\frac{1}{2}$，要使$m$值唯一，只需$h(m)_{\max}=\ln\sqrt{\frac{1}{2k}}+\frac{1}{2}=0$，

解得$k=\frac{e}{2}$，$m=\frac{\sqrt{e}}{2}$，$\therefore k+m=\frac{e+\sqrt{e}}{2}$.

【点睛】

思路点睛：本题考查利用函数不等式恒成立，关键就是将问题转化为$g(x)_{\min}\geq 0$，并利用导数分析函数的单调性，

进而求解.

38．已知函数$f(x)=e^x-2x+\sin x$，$g(x)=e^x(-\sin x+\cos x+a)$.

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）$\exists x_1$、$x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得不等式$g(x_1)\geq f(x_2)$成立，求$a$的取值范围；

（3）不等式$\frac{f'(x)-m}{x}>\ln x$在$(1,+\infty)$上恒成立，求整数m的最大值.

【答案】（1）$f(x)$的减区间为$(-\infty,0)$，增区间为$(0,+\infty)$；（2）$[0,+\infty)$；（3）1.

【解析】

【分析】

（1）求得$f'(x)=e^x-2+\cos x$，分析导数的符号变化，由此可得出函数$f(x)$的增区间和减区间；

（2）求得$f(x)_{\min}=1$，由题意可知，$a\geq\sin x-\cos x+e^{-x}$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时有解，构造函数$F(x)=\sin x-\cos x+e^{-x}$，利用导数求出函数$F(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值，即可得出实数$a$的取值范围；

（3）由题意可知，$m<(e^x-2+\cos x-x\ln x)_{\min}$，构造函数$H(x)=e^x-2+\cos x-x\ln x$，其中$x>1$，利用导数求出函数$H(x)>e-2+\cos 1$，又由$e-2+\cos 1\in(1,2)$结合$m\in Z$可得出结果.

【详解】

（1）因为函数$f(x)=e^x-2x+\sin x$的定义域为R，且$f'(x)=e^x+\cos x-2$，$f'(0)=0$.

①当$x<0$时，$e^x<1$，$\cos x\leq 1$，则$f'(x)=e^x+\cos x-2<0$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,0)$上是减函数；

②当$x>0$时，设$h(x)=e^x-2+\cos x$，则$h'(x)=e^x-\sin x>e^0-\sin x\geq 0$，

所以，函数$f'(x)=e^x+\cos x-2$在$(0,+\infty)$上为增函数，

所以，当$x>0$时，$f'(x)>f'(0)=0$，所以，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数.

综上所述，函数$f(x)$的减区间为$(-\infty,0)$，增区间为$(0,+\infty)$；

（2）由（1）知，函数$f(x)_{\min}=f(0)=1$，

$\exists x_1$、$x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得不等式$g(x_1)\geq f(x_2)$成立，

等价于不等式$e^x(-\sin x+\cos x+a)\geq 1$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时有解，

即不等式$a\geq\sin x-\cos x+e^{-x}$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时有解，

设$F(x)=\sin x-\cos x+e^{-x}$，$F'(x)=\sin x+\cos x-e^{-x}$，

当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，则$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$，

而$e^{-x} \leq 1$，所以$F'(x) \geq 0$恒成立，即$F(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上 是增函数，则$F(x)_{\min} = F(0) = 0$，

因此，实数a的取值范围是$[0,+\infty)$；

（3）$\forall x > 1$，$\frac{e^2-2+\cos x-m}{x} > \ln x$恒成立，

等价于$m < (e^x - 2 + \cos x - x\ln x)_{\min}$，

令$H(x) = e^x - 2 + \cos x - x\ln x$，其中$x>1$，则$H'(x) = e^x - \sin x - \ln x - 1$，

$H''(x) = e^x - \cos x - \frac{1}{x}$，

$\because x > 1$，$\therefore e^x > e$，$\cos x \leq 1$，$\frac{1}{x} < 1$，$\therefore H''(x) > e - 2 > 0$，

$\therefore H'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$\therefore H'(x) > H'(1) = e - \sin 1 - 1 > e - 1 - 1 > 0$，

$\therefore H(x)$在$(1,+\infty)$上递增，$\therefore H(x) > H(1) = e - 2 + \cos 1$，$\therefore m \leq e - 2 + \cos 1$，

$\because e - 2 + \cos 1 \in (1,2)$，且$m \in Z$，因此整数$m$的最大值为1.

【点睛】

结论点睛：本题考查不等式的恒成立与有解问题，可按如下规则转化：

一般地，已知函数$y=f(x)$，$x \in [a,b]$，$y=g(x)$，$x \in [c,d]$.

（1）若$\forall x_1 \in [a,b]$，$\forall x_2 \in [c,d]$，有$f(x_1) < g(x_2)$成立，则$f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$；

（2）若$\forall x_1 \in [a,b]$，$\exists x_2 \in [c,d]$，有$f(x_1) < g(x_2)$成立，则$f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$；

（3）若$\exists x_1 \in [a,b]$，$\exists x_2 \in [c,d]$，有$f(x_1) < g(x_2)$成立，则$f(x)_{\min} < g(x)_{\max}$；

（4）若$\forall x_1 \in [a,b]$，$\exists x_2 \in [c,d]$，有$f(x_1) = g(x_2)$成立，则$f(x)$的值域是$g(x)$的值域的子集