湖北省重点中学襄阳市第五中学2022-2023学年高三上学期12月月考
数 学 试 题

一、单选题

1．已知 i 是虚数单位，复数 $z=\frac{i^2}{1+2i}$，则复数 z 的虚部为（　）

A．$\frac{2}{5}i$　　B．$\frac{2}{5}$　　C．$-\frac{1}{5}i$　　D．$-\frac{1}{5}$

2．根据新课改要求，昆明市艺卓中学对学校的课程进行重新编排，其中对高二理科班的课程科目：语文、数学、英语、物理、化学、生物这六个科目进行重新编排（排某一天连续六节课的课程，其中每一节课是一个科目），编排课程要求如下：数学与物理不能相邻，语文与生物要相邻，则针对这六个课程不同的排课顺序共有（　）

A．144 种　　B．72 种　　C．36 种　　D．18 种

3．已知$\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\pi$，$\pi\le\beta\le\frac{3\pi}{2}$，$\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，则$\beta-\alpha=$（　）

A．$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{4}$

C．$\frac{3}{4}\pi$　　D．$\frac{5\pi}{4}$

4．已知函数 $f\left(3x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2e^{|x|}+\sin x+4}{e^{|x|}+2}$，则 $f\left(\frac{1}{2023}\right)+f\left(\frac{2}{2023}\right)+\cdots+f\left(\frac{2022}{2023}\right)=$（　）

A．404　　B．4044　　C．2022　　D．2024

5．武钢六中近期迎来校庆，学生会制作了 4 种不同的精美卡片，在学校书店的所有书本中都随机装入一张卡片，规定：如果收集齐了 4 种不同的卡片，便可获得奖品．小明一次性购买书本 6 册，那么小明获奖的概率是（　）

A．$\frac{195}{256}$　　B．$\frac{195}{512}$　　C．$\frac{103}{512}$　　D．$\frac{103}{256}$

6．已知 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为$\mathbf{R}$，若 $f(1-2x)$ 为奇函数，$f(2x-1)$ 为偶函数．设 $f'(0)=1$，则 $\sum_{k=1}^{8}f'(2k)=$（　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

7．已知$C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上、下焦点分别是$F_1$，$F_2$，若椭圆 C 上存在点 P 使得$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{1}{4}a^2$，$\overrightarrow{PF_1}^2+\overrightarrow{PF_2}^2=4a^2-3b^2$，则其离心率的值是（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8．数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$，$a_{n+1}=3a_n-a_n^2-1$，则下列说法错误的是（　）

A．若$a\ne1$且$a\ne2$，数列$\{a_n\}$单调递减

B．若存在无数个自然数n，使得$a_{n+1}=a_n$，则$a=1$

C．当$a>2$或$a<1$时，$\{a_n\}$的最小值不存在

D．当$a=3$时，$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n-2}\in\left(\frac{1}{2},1\right]$

二、多选题

9．下列命题是真命题的有（　　）

A．分层抽样调查后的样本中甲、乙、丙三种个体的比例为3：1：2，如果抽取的甲个体数为9，则样本容量为30

B．某一组样本数据为125，120，122，105，130，114，116，95，120，134，则样本数据落在区间[114.5，124.5]内的频率为0.4

C．甲、乙两队队员体重的平均数分别为60，68，人数之比为1：3，则甲、乙两队全部队员体重的平均数为67

D．一组数6，5，4，3，3，3，2，2，2，1的85%分位数为5

10．若$a>b>0$，且$a+b=1$，则（　　）

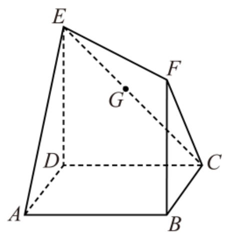
A．$a\ln b>b\ln a$

B．$\frac{2}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{2}$

C．$(a^2+1)(b^2+1)<\frac{3}{2}$

D．$\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+1}\geqslant\frac{1}{4}$

11．如图，四边形$ABCD$是边长为1的正方形，$ED\perp$平面$ABCD$，$FB\perp$平面$ABCD$，且$ED=FB=1$，G为线段EC上的动点，则下列结论中正确的是（　　）



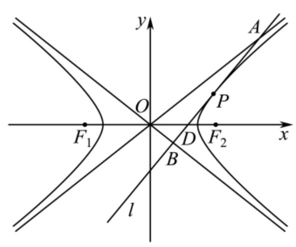
A．$EC\perp AF$

B．该几何体外接球的体积为3π

C．若G为EC中点，则$GB//$平面AEF

D．AG^2+BG^2的最小值为$\frac{11}{4}$

12．如图，过双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$右支上一点$P$作双曲线的切线$l$分别交两渐近线于$A$、$B$两点，交$x$轴于点$D$，$F_1,F_2$分别为双曲线的左、右焦点，$O$为坐标原点，则下列结论正确的是（　　）



A．$|AB|_{\min}=2\sqrt{b^2+1}$

B．$S_{\triangle OAP}=S_{\triangle OBP}$

C．$S_{\triangle AOB}=b$

D．若存在点P，使$\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{4}$，且$\overrightarrow{F_1D}=2\overrightarrow{DF_2}$，则双曲线$C$的离心率$e=2$

三、填空题

13．设$-1=a_1\le a_2\le\ldots\le a_7$，其中$a_1$，$a_3$，$a_5$，$a_7$成公差为$d$的等差数列，$a_2$，$a_4$，$a_6$成公比为3的等比数列，则$d$的最小值为______.

14．空间四边形$ABCD$的每条边和对角线长都等于 1，点E,F,G分别是AB，AD，DC的中点，则$\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{AB}$的值为__________.

15．已知F_1,F_2分别为双曲线$C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$的左、右焦点，点$P$在双曲线上，$G,I$分别为$\triangle F_1PF_2$的重心、内心，若$GI$平行于$x$轴，则$\triangle F_1PF_2$的外接圆面积为__________.

16．已知函数$f\left(x\right)=3e^{3x}+\dfrac{\ln a}{a},g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{a}$，其中$a>0$．若$f(x)\geq g(x)$恒成立，则$a$的取值范围是________.

四、解答题

17．在①$\dfrac{2c-b}{a}=\dfrac{\cos B}{\cos A}$，②$2a\cos C+c=2b$，③$a\sin A\cos C+\dfrac{1}{2}c\sin 2A=\sqrt{3}b\cos A$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答该问题.问题：锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且______.

(1)求A；

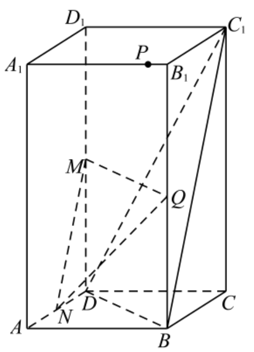
(2)求$\cos B+\cos C$的取值范围.

18．数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$na_{n+1}-\left(n+1\right)a_n=n\left(n+1\right)\left(n\in\mathrm{N}_+\right)$.

(1)证明：数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$为等差数列.

(2)若$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+2}\cdot\sqrt{a_{n+1}}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

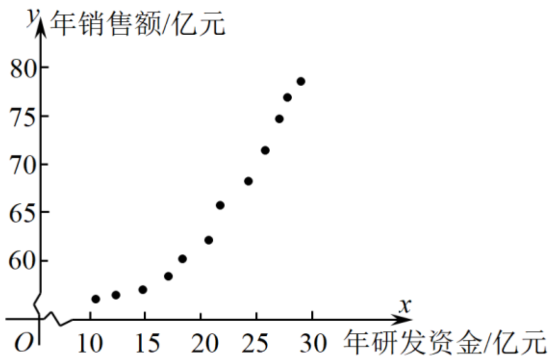
19．四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为正方形，$AA_1\perp$面$ABCD$，点M，N，Q分别为棱DD_1,AD,BB_1的中点.



(1)求证：平面MNQ∥平面BC_1D；

(2)若$AA_1=2AB$，棱A_1B_1上存在点P，使得二面角$P-MN-Q$的余弦值为$\dfrac{13\sqrt{21}}{63}$，求$\dfrac{A_1P}{A_1B_1}$的值.

20．多年来，清华大学电子工程系黄翔东教授团队致力于光谱成像芯片的研究，2022 年 6 月研制出国际首款实时超光谱成像芯片，相比已有光谱检测技术，实现了从单点光谱仪到超光谱成像芯片的跨越，为制定下一年的研发投入计划，该研发团队为需要了解年研发资金投入量 x（单位：亿元）对年销售额 y（单位：亿元）的影响，结合近 12 年的年研发资金投入量 x，和年销售额 y，的数据（$i=1$，2，⋯，12），该团队建立了两个函数模型：① $y=\alpha+\beta x^2$ ② $y=e^{\lambda x+t}$，其中 α,β,λ,t 均为常数，e 为自然对数的底数，经对历史数据的初步处理，得到散点图如图，令 $u_i=x_i^2, v_i=\ln y_i\left(i=1,2,\cdots,12\right)$，计算得如下数据：



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^{12}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{12}\left(y_i-\bar{y}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{12}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(v_i-\bar{v}\right)$
20	66	770	200	14
$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\sum_{i=1}^{12}\left(u_i-\bar{u}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{12}\left(v_i-\bar{v}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{12}\left(u_i-\bar{u}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)$
460	4.20	3125000	0.308	21500

(1)设 $\{u_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的相关系数为 r_1，$\{x_i|$ 和 $\{v_i\}$ 的相关系数为 r_2，请从相关系数的角度，选择一个拟合程度更好的模型；

(2)（i）根据（1）的选择及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程（系数精确到 0.01）；

（ii）若下一年销售额 y 需达到 80 亿元，预测下一年的研发资金投入量 x 是多少亿元？

附：①相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}$，回归直线 $\hat{y}=a+bx$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$；②参考数据：$308=77\times4,\sqrt{80}\approx8.9443,e^{4.3820}\approx80$.

21．已知圆 $(x+1)^2+y^2=16$ 的圆心为 A，点 P 是圆 A 上的动点，点 B 是抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，点 G 在线段 AP 上，且满足 $|GP|=|GB|$.

(1)求点 G 的轨迹 E 的方程；

(2)不过原点的直线 l 与（1）中轨迹 E 交于 M,N 两点，若线段 MN 的中点 Q 在抛物线 $y^2=4x$ 上，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

22．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

（2）当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\le f(x)\le x$；

（3）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|(a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 M（a），当 M（a）最小时，求 a 的值．

湖北省重点中学襄阳市第五中学2022-2023学年高三上学期12月月考

数学试题参考答案

1．B　2．A

3．C【详解】$\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\pi$，$\frac{\pi}{2}\le 2\alpha\le 2\pi$，$\sin 2\alpha=\frac{4}{5}>0$，故$\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$，故$\cos 2\alpha=-\frac{3}{5}$；

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\pi\le\beta\le\frac{3\pi}{2}$，$\frac{5}{4}\pi<\alpha+\beta<2\pi$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}<0$，故$\frac{5}{4}\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$；

$\cos\left(\beta-\alpha\right)=\cos\left[\left(\beta+\alpha\right)-2\alpha\right]=\cos\left(\beta+\alpha\right)\cos 2\alpha+\sin\left(\beta+\alpha\right)\sin 2\alpha=-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\frac{5\pi}{4}$，故$\beta-\alpha=\frac{3}{4}\pi$.故选：C

4．B【详解】$f\left(3x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2e^{|x|}+\sin x+4}{e^{|x|}+2}=2+\frac{\sin x}{e^{|x|}+2}$，$f\left(-3x+\frac{1}{2}\right)=2+\frac{\sin\left(-x\right)}{e^{|-x|}+2}=2-\frac{\sin x}{e^{|x|}+2}$，

所以$f\left(3x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-3x+\frac{1}{2}\right)=4$，以$\frac{1}{2}-x$替换$3x$得$f\left(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(1-x\right)+f\left(x\right)=4$，

令$S=f\left(\frac{1}{2023}\right)+f\left(\frac{2}{2023}\right)+\cdots+f\left(\frac{2022}{2023}\right)$，则$S=f\left(\frac{2022}{2023}\right)+f\left(\frac{2021}{2023}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2023}\right)$，

两式相加得$2S=2022\times 4, S=4044$.故选：B

5．B【详解】这6册书本中卡片总共有$4^6=4096$种可能情况，其中可以获奖的情况分为两类，

第一类是有3册书的卡片相同的获奖情况有$C_6^3A_4^4=480$种；第二类是有2册书的卡片相同的获奖情况有

$\frac{C_6^2C_4^2}{A_2^2}\times A_4^4=1080$种；所以小明获奖的概率是$\frac{480+1080}{4096}=\frac{195}{512}$，故选：B

6．B【详解】解：因为$f\left(1-2x\right)$为奇函数，所以$f\left(1+2x\right)=-f\left(1-2x\right)$，即$f\left(1+x\right)=-f\left(1-x\right)$，

两边同时求导，则有$f'\left(1+x\right)=f'\left(1-x\right)$，所以$f'\left(x\right)$的图象关于直线$x=1$对称．因为$f\left(2x-1\right)$为偶函数，

所以$f\left(-2x-1\right)=f\left(2x-1\right)$，即$f\left(-1-x\right)=f\left(-1+x\right)$，两边同时求导，则有$-f'\left(-1-x\right)=f'\left(-1+x\right)$，

所以函数$f'\left(x\right)$的图象关于点$\left(-1,0\right)$对称．所以，$f'\left(x\right)=f'\left(2-x\right)=-f'\left(x-4\right)$，$f'\left(x+8\right)=-f'\left(x+4\right)=f'\left(x\right)$，

所以，函数$f'\left(x\right)$为周期函数，且周期为8，则有$f'\left(0\right)=f'\left(2\right)=f'\left(8\right)=f'\left(10\right)=f'\left(16\right)=1$，

$f'\left(4\right)=f'\left(6\right)=f'\left(12\right)=f'\left(14\right)=-1$，所以$\sum_{k=1}^{8}f'\left(2k\right)=f'\left(2\right)+f'\left(4\right)+\cdots+f'\left(12\right)+f'\left(14\right)+f'\left(16\right)=0$.

7．C【详解】设$P\left(x_0,y_0\right)$，利用向量加法法则知$\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}$，则$\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)^2=\left(2\overrightarrow{PO}\right)^2$，

即$\overrightarrow{PF_1}^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+\overrightarrow{PF_2}^2=\frac{9}{2}a^2-3b^2=4\left|\overrightarrow{PO}\right|^2$，故$4\left(x_0^2+y_0^2\right)=\frac{9}{2}a^2-3b^2$①，

设$F_1\left(0,c\right),F_2\left(0,-c\right)$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\left(-x_0,c-y_0\right)\cdot\left(-x_0,-c-y_0\right)=x_0^2+y_0^2-c^2=\frac{1}{4}a^2$，$x_0^2+y_0^2=c^2+\frac{1}{4}a^2$②，

由①②得$4\left(c^2+\frac{1}{4}a^2\right)=\frac{9}{2}a^2-3b^2$，即$8c^2=7a^2-6b^2$，

又$b^2=a^2-c^2$，所以$8c^2=7a^2-6\left(a^2-c^2\right)$，即$2c^2=a^2$，即$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以椭圆离心率的值是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

8．B【详解】A．$a_{n+1}-a_n=2a_n-a_n^2-1=-(a_n-1)^2$， 只要$a_n\neq1$，则$a_{n+1}<a_n$，$a_{n+1}=3a_n-a_n^2-1=-(a_n-\frac{3}{2})^2+\frac{5}{4}\leq\frac{5}{4}$，

若$a_{n+1}=1$，即$3a_n-a_n^2-1=1$，则$a_n=1$或$a_n=2$，显然$n\geq2$时，$a_n\leq\frac{5}{4}$，

若$a_1=a=2$，则$a_2=1$，因此$a_2=a_3=\cdots=1$，若$a_1=a=1$，则$a_1=a_2=\cdots=1$，

所以当$a\neq1$且$a\neq2$时，对任意的$n\geq2$，$a_n\neq1$，从而$a_{n+1}-a_n<0$，$a_{n+1}<a_n$，$\{a_n\}$递减，A 正确，

B．由上面推理，$a=2$时，也有无数个正整数n，使得$a_{n+1}=a_n$，B 错；

C．由选项 A 知，$a<1$或$a>2$时，$\{a_n\}$递减，无最小值，C 正确；

D．$a_1=a=3$，$a_2=3\times3-3^2-1=-1<0$，又由以上推理知$\{a_n\}$递减，所以$a_n<0(n\geq2)$，

$n=1$时，$\frac{1}{a_1-2}=1$，$n\geq2$时，$\frac{1}{a_2-2}+\frac{1}{a_3-2}+\cdots+\frac{1}{a_n-2}<0$，则$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n-2}<1$，

所以对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n-2}\leq1$，下证$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n-2}>\frac{1}{2}$，

$n=1$时，$\frac{1}{a_1-2}=1>\frac{1}{2}$，$n\geq2$时，$a_n<0$，设$T=\frac{1}{2-a_2}+\frac{1}{2-a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2-a_n}$，

$2-a_n=3-3a_{n-1}+a_{n-1}^2>2-3a_{n-1}+a_{n-1}^2=\left(1-a_{n-1}\right)\left(2-a_{n-1}\right)>0$，

$\frac{1}{2-a_n}<\frac{1}{(1-a_{n-1})(2-a_{n-1})}=\frac{1}{1-a_{n-1}}-\frac{1}{2-a_{n-1}}$，

$\frac{1}{2-a_{n-1}}+\frac{1}{2-a_n}<\frac{1}{1-a_{n-1}}$，$\frac{1}{1-a_{n-1}}+\frac{1}{2-a_{n-2}}=\frac{1}{2-3a_{n-2}+a_{n-2}^2}+\frac{1}{2-a_{n-2}}=\frac{1}{(1-a_{n-2})(2-a_{n-2})}+\frac{1}{2-a_{n-2}}=\frac{1}{1-a_{n-2}}$，

依次类推，$T<\frac{1}{1-a_2}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n-2}=1-T>\frac{1}{2}$，

综上，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n-2}>\frac{1}{2}$，

综上，$\frac{1}{a_1-2}+\frac{1}{a_2-2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n-2}\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，D 正确．

故选：B．

9．BD

【详解】对于选项 A：根据样本的抽样比等于各层的抽样比，样本容量为$9\div\frac{3}{3+1+2}=18$，故选项 A 错误；

对于选项 B：样本数据落在区间$\left[114.5,124.5\right]$内的有 120，122，116，120 共 4 个，所以样本数据落在区间$\left[114.5,124.5\right]$内的频率为$\frac{4}{10}=0.4$，故选项 B 正确；

对于选项 C：甲、乙两队的人数之比为$1:3$，则甲队队员在所有队员中所占权重为$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$，乙队队员在所有队员中所占权重为$\frac{3}{1+3}=\frac{3}{4}$，则甲、乙两队全部队员体重的平均数为$\overline{x}=\frac{1}{4}\times60+\frac{3}{4}\times68=66$，故选项 C 错误；

对于选项 D：将该组数据从小到大排列为：1，2，2，2，3，3，3，4，5，6，由$10\times 85\% =8.5$，则该组数据的85%分位数是第 9 个数，该数为 5，故选项 D 正确.

10．BD

【详解】因为$a>b>0$，且$a+b=1$，所以$0<b<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a<1$，A 选项，构造$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，$0<x<1$，

则$f'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，因为$0<x<1$，所以$f'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$恒成立，所以$f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$在$0<x<1$上单调递增，

所以$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$，即$b\ln a>a\ln b$，A 错误；

B 选项，因为$\frac{b}{a}>0,\frac{a}{b}>0$，由基本不等式得：$\frac{2}{a}+\frac{a}{b}=\frac{2a+2b}{a}+\frac{a}{b}=2+\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2+2\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{a}{b}$，即$a=2-\sqrt{2},b=\sqrt{2}-1$时，等号成立，所以$\frac{2}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2\sqrt{2}$，B 正确；

C 选项，因为$a+b=1$，所以$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=a^2b^2+a^2+b^2+1=a^2b^2+\left(a+b\right)^2-2ab+1=a^2b^2-2ab+2$

$=\left(ab-1\right)^2+1$，其中$ab\leq\frac{\left(a+b\right)^2}{4}=\frac{1}{4}$，当且仅当$a=b$时，等号成立，

但$a>b>0$，故等号取不到，$0<ab<\frac{1}{4}$，故$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=\left(ab-1\right)^2+1\in\left(\frac{25}{16},2\right)$，C 错误；

D 选项，因为$a+b=1$，所以$\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{\left[\left(a+2\right)-2\right]^2}{a+2}+\frac{\left[\left(b+1\right)-1\right]^2}{b+1}=\left(a+2\right)+\frac{4}{a+2}-4+\left(b+1\right)+\frac{1}{b+1}-2$

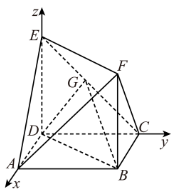
$=\frac{4}{a+2}+\frac{1}{b+1}-2$，因为$a+b=1$，所以$a+2+b+1=4$，故$\frac{a+2}{4}+\frac{b+1}{4}=1$，

其中$\frac{4}{a+2}+\frac{1}{b+1}=\left(\frac{4}{a+2}+\frac{1}{b+1}\right)\cdot\left(\frac{a+2}{4}+\frac{b+1}{4}\right)=1+\frac{1}{4}+\frac{b+1}{a+2}+\frac{a+2}{4\left(b+1\right)}\geq\frac{5}{4}+2\sqrt{\frac{b+1}{a+2}\cdot\frac{a+2}{4\left(b+1\right)}}=\frac{9}{4}$，

当且仅当$\frac{b+1}{a+2}=\frac{a+2}{4\left(b+1\right)}$，即$a=\frac{2}{3},b=\frac{1}{3}$时，等号成立，所以$\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{4}{a+2}+\frac{1}{b+1}-2\geq\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}$，D 正确.

11．ACD

【详解】由题意以D为原点，DA、DC、DE所在直线分别为x轴、y轴、z轴，



建立如图所示空间直角坐标系，

可得$D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$F(1,1,1)$，$E(0,0,1)$，

对于 A 选项：有$\overrightarrow{EC}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$，由$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC}=0+1-1=0$，可得$\overrightarrow{EC}\perp\overrightarrow{AF}$即$EC\perp AF$，所以 A 选项正确；对于 B 选项：由球的截面性质可知，球心在过正方形$ABCD$的中心的垂面上，即为矩形$BDEF$的对角线的交点，

则该球的半径$R=\frac{1}{2}\times\sqrt{AB^2+AD^2+BF^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即该几何体外接球的体积$V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$，所以 B 选项错误；

对于 C 选项：若 G 为 EC 中点，则 $G\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，即 $\overrightarrow{BG}=\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AE}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$，

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-x+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=y+z=0\end{cases}$，令 $x=1$，可得 $\vec{n}=(1,-1,1)$，

即 $\overrightarrow{BG}\cdot\vec{n}=-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$，可得 $\overrightarrow{BG}\perp\vec{n}$，又 $BG\not\subset$ 平面 AEF，则 GB // 平面 AEF，所以 C 选项正确;

对于 D 选项：由三角形 EDC 是等腰直角三角形，可设 $G(0,t,1-t)$（$0\le t\le 1$），

则 $AG^2+BG^2=\left(\sqrt{1+t^2+(1-t)^2}\right)^2+\left(\sqrt{1+(1-t)^2+(1-t)^2}\right)^2=4t^2-6t+5=4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$，

又 $0\le t\le 1$，则当 t $=\frac{3}{4}$ 时，AG^2+BG^2 取得最小值 $\frac{11}{4}$，所以 D 选项正确.

12．BCD【详解】先求双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程：不妨先探究双曲线在第一象限的部分（其他象限由对称性同理可得）.由 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $y=\sqrt{b^2x^2-b^2}$，所以 $y'=\frac{b^2x}{\sqrt{b^2x^2-b^2}}$，

则在 $P(x_0,y_0)$ 的切线斜率 $y'=\frac{b^2x_0}{\sqrt{b^2{x_0}^2-b^2}}=\frac{b^2x_0}{y_0}$， 所以在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为：$y-y_0=\frac{b^2x_0}{y_0}(x-x_0)$

又有 ${x_0}^2-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$，化简即可得切线方程为： $x_0x-\frac{y_0y}{b^2}=1$.不失一般性，设 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线在第一象限的一点，

$A(x_1,y_1)$ 是切线与渐近线在第一象限的交点，$B(x_2,y_2)$ 是切线与渐近线在第四象限的交点,

双曲线的渐近线方程是 $y=\pm bx$，联立：$\begin{cases}x_0x-\frac{y_0y}{b^2}=1\\ y=bx\end{cases}$，解得：$A(\frac{b}{bx_0-y_0},\frac{b^2}{bx_0-y_0})$，

联立：$\begin{cases}x_0x-\frac{y_0y}{b^2}=1\\ y=-bx\end{cases}$，解得：$B(\frac{b}{bx_0+y_0},\frac{-b^2}{bx_0+y_0})$，

则 $|AB|=\sqrt{(\frac{b}{bx_0-y_0}-\frac{b}{bx_0+y_0})^2+(\frac{b^2}{bx_0-y_0}+\frac{b^2}{bx_0+y_0})^2}=2\sqrt{(b^2+1){x_0}^2-1}$，

又因为 $x_0\ge 1$，所以 $|AB|\ge 2\sqrt{(b^2+1)-1}=2b$，即 $|AB|_{\min}=2b$，A 错误;

由 $\frac{\frac{b}{bx_0-y_0}+\frac{b}{bx_0+y_0}}{2}=x_0,\frac{\frac{b^2}{bx_0-y_0}+\frac{-b^2}{bx_0+y_0}}{2}=y_0$，可知 $P(x_0,y_0)$ 是 A,B 的中点，所以 $S_{\triangle OAP}=S_{\triangle OBP}$，B 正确;

易知点 D 的坐标为 $(\frac{1}{x_0},0)$，

则 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle ADO}+S_{\triangle BDO}=\frac{1}{2}\times|OD|\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\frac{1}{x_0}\times(\frac{b^2}{bx_0-y_0}+\frac{b^2}{bx_0+y_0})=b$，

当点 $P(x_0,y_0)$ 在顶点 $(1,0)$ 时，仍然满足 $S_{\triangle AOB}=b$，C 正确;

因为 $F_1(-c,0),F_2(c,0),D(\frac{1}{x_0},0)$，所以 $\overrightarrow{F_1D}=(\frac{1}{x_0}+c,0)$，$\overrightarrow{DF_2}=(c-\frac{1}{x_0},0)$，

因为$\overrightarrow{F_1D}=2\overrightarrow{DF_2}$，则$\frac{1}{x_0}+c=2(c-\frac{1}{x_0})$，解得$c=\frac{3}{x_0}$，即$x_0=\frac{3}{c}$，代入${x_0}^2-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$，得${y_0}^2=\frac{9b^2}{c^2}-b^2$，

所以$|PF_1|^2=(\frac{3}{c}+c)^2+\frac{9b^2}{c^2}-b^2=\frac{9}{c^2}+c^2+6+\frac{9b^2}{c^2}-b^2=\frac{9}{c^2}+c^2+6+\frac{9(c^2-1)}{c^2}-(c^2-1)=16$，

$|PF_2|^2=(\frac{3}{c}-c)^2+\frac{9b^2}{c^2}-b^2=\frac{9}{c^2}+c^2-6+\frac{9b^2}{c^2}-b^2=\frac{9}{c^2}+c^2-6+\frac{9(c^2-1)}{c^2}-(c^2-1)=4$，

所以$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\times|PF_1|\times|PF_2|}=\frac{16+4-4c^2}{2\times4\times2}=\frac{5-c^2}{4}=\frac{1}{4}$，所以$c^2=4$，$c=2$，所以离心率$e=\frac{c}{a}=2$，D 正确.成公比为 3 的等比数列，即$-1\le m\le d-1\le 3m\le 2d-1\le 9m\le 3d-1$，可得$\begin{cases}m+1\le d\le 3m+1\\ \frac{3m+1}{2}\le d\le\frac{9m+1}{2}\\ \frac{9m+1}{3}\le d\end{cases}$，只需$m+1\le\frac{9m+1}{2}$即可，所以$m\ge\frac{1}{7}$.当$m$取最小值$\frac{1}{7}$时，由不等式组得$d=\frac{8}{7}$，故$d$的最小值为$\frac{8}{7}$.

14．$\frac{1}{4}$##0.25

15．$\frac{256}{15}\pi$【详解】不妨设$P(x_0,y_0)$在第一象限，由于GI平行于x轴，则内切圆半径$r=\frac{1}{3}y_0$，

又 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)r=\frac{1}{2}|F_1F_2|y_0$，则$|PF_1|+|PF_2|$=12，

又$|PF_1|-|PF_2|=4$，则$|PF_1|=8,|PF_2|=4$，$|F_1F_2|=6$.

在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理得$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{11}{16}$，则$\sin\angle F_1PF_2=\frac{3\sqrt{15}}{16}$，

设$\triangle F_1PF_2$的外接圆半径为R，则$2R=\frac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}$，则$R=\frac{16}{15}\sqrt{15}$，

所以$\triangle F_1PF_2$的外接圆的面积为$\pi R^2=\frac{256}{15}\pi$.故答案为：$\frac{256}{15}\pi$.

16．$\left[\frac{1}{3\mathrm{e}},+\infty\right)$【详解】由题知，$f(x)=3\mathrm{e}^{3x}+\frac{\ln a}{a},g(x)=\frac{\ln x}{a}$，$a>0$，$f(x)\ge g(x)$恒成立，

所以$3\mathrm{e}^{3x}+\frac{\ln a}{a}\ge\frac{\ln x}{a},x>0$，所以$3\mathrm{e}^{3x}\ge\frac{\ln x}{a}-\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a}$，所以$3x\mathrm{e}^{3x}\ge\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}$，令$h(x)=x\mathrm{e}^x$，

所以$h(3x)=3x\mathrm{e}^{3x},h\left(\ln\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}$，因为$h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，当$x>0$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

所以$h(3x)\ge h(\ln\frac{x}{a})$，所以$3x\ge\ln\frac{x}{a}=\ln x-\ln a$，所以$\ln a\ge\ln x-3x$，令$p(x)=\ln x-3x$，

所以$\ln a\ge p(x)_{\max}$，因为$p'(x)=\frac{1}{x}-3,(x>0)$，当$p'(x)=0$时，$x=\frac{1}{3}$，

当$0<x<\frac{1}{3}$时，$p'(x)>0$，$p(x)$单调递增，当$x>\frac{1}{3}$时，$p'(x)<0$，$p(x)$单调递减，

所以$p(x)_{\max}=\ln\frac{1}{3}-1=\ln\frac{1}{3\mathrm{e}}$，所以$\ln a\ge\ln\frac{1}{3\mathrm{e}}$，所以$a\ge\frac{1}{3\mathrm{e}}$，

17.【详解】(1) 选① $\frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$，所以 $\frac{2\sin C-\sin B}{\sin A}=\frac{\cos B}{\cos A}$，所以 $2\sin C\cos A-\sin B\cos A=\sin A\cos B$，

整理得 $2\sin C\cos A=\sin B\cos A+\sin A\cos B=\sin(A+B)=\sin C$.

因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$.因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

选②因为 $2a\cos C+c=2b$，所以 $2\sin A\cos C+\sin C=2\sin B=2\sin\left(A+C\right)$，

所以 $2\sin A\cos C+\sin C=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C$，整理得 $\sin C=2\cos A\sin C$.

因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

选③因为 $a\sin A\cos C+\frac{1}{2}c\sin 2A=\sqrt{3}b\cos A$，所以 $\sin A\sin A\cos C+\sin C\sin A\cos A=\sqrt{3}\sin B\cos A$，

所以 $\sin A(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=\sqrt{3}\sin B\cos A$，整理得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$.

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$.因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\cos B+\cos C=\cos B-\cos\left(B+A\right)=\frac{1}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B=\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，故 $\cos B+\cos C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.

18.【详解】(1) 证明：因为 $na_{n+1}-\left(n+1\right)a_n=n\left(n+1\right)$，所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1$，又 $\frac{a_1}{1}=1$，

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列；

(2) 解：由 (1) 得 $\frac{a_n}{n}=1+\left(n-1\right)\Rightarrow a_n=n^2$，

$$b_n=\frac{1}{n^2\left(n+1\right)\left(n+2\right)^2}=\frac{n+1}{n^2\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2\left(n+1\right)^2}-\frac{1}{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)^2}\right],$$

则 $S_n=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1^2\times 2^2}-\frac{1}{2^2\times 3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2\left(n+1\right)^2}-\frac{1}{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)^2}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)^2}\right)=\frac{1}{16}-\frac{1}{4\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)^2}$.

19.【详解】(1) $\because M,Q$ 分别为棱 DD_1,BB_1 中点，$\therefore MD//BQ$，$MD=BQ$，

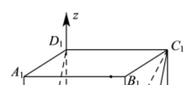
$\therefore$ 四边形 $MQBD$ 为平行四边形，$\therefore MQ//BD$，

又 $BD\subset$ 平面 BC_1D，$MQ\not\subset$ 平面 BC_1D，$\therefore MQ//$ 平面 BC_1D，$\because N$ 为棱 AD 的中点，$\therefore MN//AD_1$，

又 $AD_1//BC_1$，$\therefore MN//BC_1$，$\because BC_1\subset$ 平面 BC_1D，$MN\not\subset$ 平面 BC_1D，$\therefore MN//$ 平面 BC_1D.

又 $MN\cap MQ=M$，$MN,MQ\subset$ 平面 MNQ，$\therefore$ 平面 MNQ // 平面 BC_1D.

(2) 由题意知 DA、DC、DD_1 两两垂直，以为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 方向分别为 x,y,z 轴正方向，建立如图所示空间直



角坐标系，设$\dfrac{A_1P}{A_1B_1}=\lambda$（$0<\lambda<1$），$AB=1$，

则 $A(1,0,0),N(\dfrac{1}{2},0,0),M(0,0,1),Q(1,1,1),A(1,0,2),B_1(1,1,2)$，

故$\overrightarrow{MN}=(\dfrac{1}{2},0,-1)$，$\overrightarrow{MQ}=(1,1,0)$，设$P(x,y,z)$，则由$\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}$可得$\begin{cases}x-1=0\\y=\lambda\\z-2=0\end{cases}$，$\therefore P(1,\lambda,2)$，

则$\overrightarrow{MP}=(1,\lambda,1)$设平面$PMN$的一个法向量为$\vec{m}=(a_1,b_1,c_1)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{MP}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_1-c_1=0,\\a_1+\lambda b_1+c_1=0,\end{cases}$，

取$c_1=1$，则$\vec{m}=(2,\dfrac{-3}{\lambda},1)$，设平面$MNQ$的一个法向量为$\vec{n}=(a_2,b_2,c_2)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{MQ}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_2-c_2=0,\\a_2+b_2=0,\end{cases}$，

取$c_2=1$，则$\vec{n}=(2,-2,1)$，由题知$\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{13\sqrt{21}}{63}\Rightarrow\dfrac{\left|4+\dfrac{6}{\lambda}+1\right|}{3\times\sqrt{4+\dfrac{9}{\lambda^2}+1}}=\dfrac{13\sqrt{21}}{63}\Rightarrow 64\lambda^2-252\lambda+153=0$，

解得$\lambda=\dfrac{3}{4}$或$\dfrac{51}{16}$（与$0<\lambda<1$矛盾，舍去），故$\lambda=\dfrac{3}{4}$，即$\dfrac{A_1P}{A_1B_1}=\dfrac{3}{4}$.

20．【详解】（1）由题意进行数据分析：$r_1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{12}(u_i-\bar{u})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{12}(u_i-\bar{u})^2\sum\limits_{i=1}^{12}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{21500}{\sqrt{3125000\times200}}=\dfrac{21500}{25000}=\dfrac{43}{50}=0.86$

$$r_2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{12}(v_i-\bar{v})^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{770\times0.308}}=\dfrac{14}{77\times0.2}=\dfrac{10}{11}\approx0.91$$

则$|r_1|<|r_2|$，因此从相关系数的角度，模型$y=\mathrm{e}^{2x+1}$的拟合程度更好

（2）(i）先建立v关于x的线性回归方程.由$y=e^{\lambda x+t}$，得$\ln y=t+\lambda x$，即$v=t+\lambda x$.

由于$\lambda=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{14}{770}\approx0.018$ $t=\bar{v}-\lambda\bar{x}=4.20-0.018\times20=3.84$

所以v关于x的线性回归方程为$\hat{v}=0.02x+3.84$，所以$\ln\hat{y}=0.02x+3.84$，则$\hat{y}=\mathrm{e}^{0.02x+3.84}$.

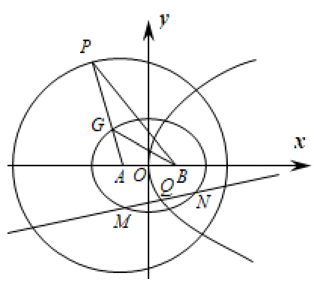
（ii）下一年销售额y需达到80亿元，即$y=80$，代入$\hat{y}=\mathrm{e}^{0.02x+3.84}$得，$80=\mathrm{e}^{0.02x+3.84}$，又$\mathrm{e}^{4.382}\approx80$

所以$0.02x+3.84=4.382$，解得$x=27.1$，所以预测下一年的研发资金投入量是27.1亿元

21．【详解】(1 易知$A(-1,0)$，$\because$点B是抛物线$y^2=4x$的焦点，$\therefore B(1,0)$，

依题意$|GA|+|GB|=|AP|=4>2=|AB|$，所以点G轨迹是一个椭圆，其焦点分别为A,B，长轴长为4，

设该椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则$2a=4,2c=2,\therefore a=2,c=1$，



$\therefore b^2=a^2-c^2=3$，故点G的轨迹E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）易知直线 1 的斜率存在，

设直线 1：$y=kx+t(t\neq 0),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),Q(x_0,y_0)$，

由$\begin{cases}y=kx+t\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$得：$(4k^2+3)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，$\because \Delta=(8kt)^2-4(3+4k^2)(4t^2-12)>0$，

即$4k^2-t^2+3>0$①又$x_1+x_2=-\dfrac{8kt}{4k^2+3}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{4t^2-12}{4k^2+3}$

故$Q\left(-\dfrac{4kt}{4k^2+3},\dfrac{3t}{4k^2+3}\right)$，将$Q\left(-\dfrac{4kt}{4k^2+3},\dfrac{3t}{4k^2+3}\right)$，代$\lambda y^2=4x$，得：$t=-\dfrac{16k(4k^2+3)}{9}$②,$(k\neq 0)$，

将②代入①，得：$16^2k^2(4k^2+3)<81,4\times16^2k^4+3\times16^2k^2-81<0$，即$k^4+\dfrac{3}{4}k^2-\left(\dfrac{9}{32}\right)^2<0$，

即$\left(k^2-\dfrac{3}{32}\right)\left(k^2+\dfrac{27}{32}\right)<0$，即$k^2-\dfrac{3}{32}<0$，$\therefore -\dfrac{\sqrt6}{8}<k<\dfrac{\sqrt6}{8}$且$k\neq 0$，

即k的取值范围为:$-\dfrac{\sqrt6}{8}<k<0$或$0<k<\dfrac{\sqrt6}{8}$.

22.【详解】(I) $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x+1$，令$f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x+1=1$得$x=0$或者$x=\dfrac{8}{3}$.

当$x=0$时，$f(0)=0$，此时切线方程为$y=x$，即$x-y=0$；

当$x=\dfrac{8}{3}$时，$f(\dfrac{8}{3})=\dfrac{8}{27}$，此时切线方程为$y=x-\dfrac{64}{27}$，即$27x-27y-64=0$；

综上可得所求切线方程为$x-y=0$和$27x-27y-64=0$.

(II)设$g(x)=f(x)-x=\dfrac{1}{4}x^3-x^2$，$g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x$，令$g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x=0$ 得$x=0$或者$x=\dfrac{8}{3}$，所以当$x\in[-2,0]$时，

$g'(x)\geq 0$，$g(x)$为增函数；当$x\in(0,\dfrac{8}{3})$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数；当$x\in[\dfrac{8}{3},4]$时，$g'(x)\geq 0$，$g(x)$为增函数；

而$g(0)=g(4)=0$，所以$g(x)\leq 0$，即$f(x)\leq x$；

同理令$h(x)=f(x)-x+6=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+6$，可求其最小值为$h(-2)=0$，所以$h(x)\geq 0$，即$f(x)\geq x-6$，综上可得

$x-6\leq f(x)\leq x$.

(III)由(II)知$-6\leq f(x)-x\leq 0$，

所以$M(a)$是$|a|,|a+6|$中的较大者，

若$|a|\geq|a+6|$，即$a\leq -3$时，$M(a)=|a|=-a\geq 3$；

若$|a|<|a+6|$，即$a>-3$时，$M(a)=|a+6|=a+6>3$；

所以当$M(a)$最小时，$M(a)=3$，此时$a=-3$.