湛江一中2023届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——概率解答题——概率与数列

1．2022年2月6日，中国女足在两球落后的情况下，以3比2逆转击败韩国女足，成功夺得亚洲杯冠军，在之前的半决赛中，中国女足通过点球大战6:5惊险战胜日本女足，其中门将朱钰两度扑出日本队员的点球，表现神勇．

(1)扑点球的难度一般比较大，假设罚点球的球员会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门，门将也会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向来扑点球，而且门将即使方向判断正确也有$\frac{1}{2}$的可能性扑不到球．不考虑其它因素，在一次点球大战中，求门将在前三次扑出点球的个数X的分布列和期望；

(2)好成绩的取得离不开平时的努力训练，甲、乙、丙、丁4名女足队员在某次传接球的训练中，球从甲脚下开始，等可能地随机传向另外3人中的1人，接球者接到球后再等可能地随机传向另外3人中的1人，如此不停地传下去，假设传出的球都能接住．记第n次传球之前球在甲脚下的概率为p_n，易知$p_1=1,p_2=0$．

①试证明$\left\{p_n-\frac{1}{4}\right\}$为等比数列；

②设第n次传球之前球在乙脚下的概率为q_n，比较p_{10}与q_{10}的大小．

2．2022年4月23日是第27个“世界读书日”，某校组织“读书使青春展翅，知识让生命飞翔”主题知识竞赛，规定参赛同学每答对一题得2分，答错得1分，不限制答题次数.已知小明能正确回答每题的概率都为$\frac{1}{2}$，且每次回答问题是相互独立的，记小明得n分的概率为$p(n)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求$p(2)$，$p(3)$的值；

(2)求$p(n)$.

3．某商城玩具柜台五一期间促销，购买甲、乙系列的盲盒，并且集齐所有的产品就可以赠送节日送礼，现有甲、乙两个系列盲盒，每个甲系列盲盒可以开出玩偶A_1，A_2，A_3中的一个，每个乙系列盲盒可以开出玩偶B_1，B_2中的一个.

（1）记事件E_n：一次性购买n个甲系列盲盒后集齐玩偶A_1，A_2，A_3玩偶；事件F_n：一次性购买n个乙系列盲盒后集齐B_1，B_2玩偶；求概率$P\left(E_5\right)$及$P\left(F_4\right)$；

（2）某礼品店限量出售甲、乙两个系列的盲盒，每个消费者每天只有一次购买机会，且购买时，只能选择其中一个系列的一个盲盒.通过统计发现：第一次购买盲盒的消费者购买甲系列的概率为$\frac{2}{3}$，购买乙系列的概率为$\frac{1}{3}$；而前一次购买甲系列的消费者下一次购买甲系列的概率为$\frac{1}{4}$，购买乙系列的概率为$\frac{3}{4}$，前一次购买乙系列的消费者下一次购买甲系列的概率为$\frac{1}{2}$，购买乙系列的概率为$\frac{1}{2}$；如此往复，记某人第n次购买甲系列的概率为Q_n.

①求$\left\{Q_n\right\}$的通项公式；

②若每天购买盲盒的人数约为100，且这100人都已购买过很多次这两个系列的盲盒，试估计该礼品店每天应准备甲、乙两个系列的盲盒各多少个.

4．当前，全国上下正处在新冠肺炎疫情“外防输入，内防反弹”的关键时期，为深入贯彻落实习近平总书记关于疫情防控的重要指示要求，始终把师生生命安全和身体健康放在第一位．结合全国第32个爱国卫生月要求，学校某班组织开展了“战疫有我，爱卫同行”防控疫情知识竞赛活动，抽取四位同学，分成甲、乙两组，每组两人，进行对战答题．规则如下：每次每位同学给出6道题目，其中有道是送分题(即每位同学至少答对1题)．若每次每组答对的题数之和为3的倍数，原答题组的人再继续答题；若答对的题数之和不是3的倍数，就由对方组接着答题．假设每位同学每次答题之间相互独立，无论答对几道题概率都一样，且每次答题顺序不作考虑，第一次由甲组开始答题．求：

(1)若第n次由甲组答题的概率为P_n，求P_n；

(2)前4次答题中甲组恰好答题2次的概率为多少？

5．有人玩掷硬币走跳棋的游戏，已知硬币出现正反面为等可能性事件，棋盘上标有第0站，第1站，第2站，……，第100站.一枚棋子开始在第0站，棋手每掷一次硬币，棋子向前跳动一次，若掷出正面，棋向前跳一站（从k到$k+1$），若掷出反面，棋向前跳两站（从k到$k+2$），直到棋子跳到第99站（胜利大本营）或跳到第100站（失败集中营）时，该游戏结束.设棋子跳到第n站概率为P_n.

（1）求P_0，P_1，P_2的值；

（2）求证：$P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}\left(P_{n-1}-P_{n-2}\right)$，其中$n\in\mathbf{N}$，$2\leqslant n\leqslant 99$；

（3）求P_{99}及P_{100}的值.

6．某游戏棋盘上标有第0、1、2、⋯、100站，棋子开始位于第0站，选手抛掷均匀硬币进行游戏，若掷出正面，棋子向前跳出一站；若掷出反面，棋子向前跳出两站，直到跳到第99站或第100站时，游戏结束.设游戏过程中棋子出现在第n站的概率为P_n.

（1）当游戏开始时，若抛掷均匀硬币3次后，求棋子所走站数之和X的分布列与数学期望；

（2）证明：$P_{n+1}-P_n=-\frac{1}{2}\left(P_n-P_{n-1}\right)\left(1\le n\le 98\right)$；

（3）若最终棋子落在第99站，则记选手落败，若最终棋子落在第100站，则记选手获胜.请分析这个游戏是否公平.