湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数题——恒（能）成立、有解问题（3）

一、不等式恒成立之端点不成立问题

1．已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-ax$．

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）设函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\dfrac{1}{2}x^{2}-\dfrac{1}{2}a^{2}$，若 $x\geq 0$ 时，$g\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2．已知函数 $f\left(x\right)=ax\cos x-2\sin x$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

（1）当 $a=2$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\pi\right)$ 上的单调性；

（2）若对任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 都有 $f\left(x\right)<3x$，求实数 a 的取值范围.

3．已知函数 $f(x)=\dfrac{3a-\ln x^{3}}{x}$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的单调性；

（2）若 $a=-1$，求证：$f(x)>-3x-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

4．已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln(x+1)}{x}$．

（1）函数 $f(x)$在区间(0，+∞)上是增函数还是减函数？证明你的结论；

（2）若当 $x>0$ 时，$f(x)>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立，求正整数 k 的最大值.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{1+ln(x+1)}{x}\ \therefore f'(x)=\dfrac{1}{x^{2}}[\dfrac{x}{x+1}-1-ln(x+1)]=-\dfrac{1}{x^{2}}[\dfrac{1}{x+1}+ln(x+1)]$．

二、不等式恒成立之端点恒成立问题

5．（知函数 $f\left(x\right)=\sin x+\mathrm{e}^{x}+ax$.

（1）若 $a=0$，求函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的零点个数；

（2）当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时都有 $f\left(x\right)\geq 1$，求实数 a 的取值范围.

6．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax+1$，$a\in\mathrm{R}$．

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的最大值；

（2）若关于 x 的不等式 $f\left(x\right)+\dfrac{e^{x-1}}{x}+a-2\geq 0$ 对任意的实数 $x\geq 1$ 恒成立，其中 e 为自然对数的底数，求 a 的取值范围.

7．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2+x+1-\mathrm{e}^x$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$的单调性；

（2）若对任意的 $x\geq 0$，都有 $f\left(x\right)\leq ax^2-\frac{1}{2}x^3$成立，求实数 a 的取值范围.

8.．已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)+\cos x+mx$.

（1）若 $x=0$为 $f\left(x\right)$的极值点，求实数 m；

（2）若 $f\left(x\right)\leqslant 1$在 $\left(-1,0\right]$上恒成立，求实数 m 的范围.

三、不等式恒成立之双变量最值问题

9．已知函数 $f(x)=\ln x$， $g(x)=ax^2+bx+1$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=0$时，直线 $y=g(x)$与函数$y=f(x)$的图象相切，求 b 的值；

（2）当 $a\neq 0$时，若对任意 $x>0$，都有 $f(x)\leq g(x)$恒成立，求 $\frac{b}{a}$的最小值.

10． 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+(1+x)^a+\frac{a}{1+x}-a-2, g(x)=bx^2+x$，其中 $a\in\mathbf{R}$， $b\in\mathbf{R}$.($e=2.718281828\cdots$为自然对数的底数)

（1）求 $f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（2）若 $a\geq 4$时， $f(x)\geq g(x)$在 $(0,+\infty)$上恒成立.当 b 取得最大值时，求$M=\frac{b+12}{a}$的最小值.

11.已知函数 $f\left(x\right)=e^{ax}\sin x$.

（1）若 $f\left(x\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（2）设 $a\geq 1$，若$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，恒有 $f\left(x\right)\leq bx$成立，求 $b-e^2a$的最小值.

12.已知函数 $f\left(x\right)=\ln x$.

（1）设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-ax+1$，讨论 $g\left(x\right)$的单调性；

（2）若不等式 $f\left(x\right)\leq\left(a-e\right)x+b$恒成立，其中 e为自然对数的底数，求 $\frac{b}{a}$的最小值.

13.已知函数 $f\left(x\right)=\left(a+1\right)x-\ln x(a,b\in R)$.

（1）若 $x\in\left(0,+\infty\right)$时， $f\left(x\right)\leq 0$有解，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $f\left(x\right)\geq b$恒成立，求 $b-a^2-a$的最大值.

四、不等式恒成立之 max，min 问题

14．已知 e 是自然对数的底数，函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$ 与 $F(x)=f(x)-x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域都是 $(0,+\infty)$.

（1）求函数 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）求证：函数 $F(x)$ 只有一个零点 x_0，且 $x_0\in(1,2)$；

（3）用 $\min\{m,n\}$ 表示 m，n 的最小值，设 $x>0$，$g(x)=\min\{f(x),x-\dfrac{1}{x}\}$，若函数 $h(x)=g(x)-cx^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，求实数 c 的取值范围.

15．已知函数 $f(x)=x\ln x$.

（1）若函数 $g(x)=f'(x)+ax^2-(a+2)x(a>0)$，试研究函数 $g(x)$ 的极值情况；

（2）记函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{e^x}$ 在区间 $(1,2)$ 内的零点为 x_0，记 $m(x)=\min\left\{f(x),\dfrac{x}{e^x}\right\}$，若 $m(x)=n(n\in R)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有两个不等实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1+x_2>2x_0$.

16．已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$，$g(x)=ax-\sin x-\ln(x+1)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）证明：当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)\geqslant0$；当 $x<1$ 时，$f(x)<0$；

（2）用 $\max\{m，n\}$ 表示 m,n 中的最大值，记 $F(x)=\max\{f(x)，g(x)\}$.是否存在实数 a，对任意的 $x\in R$，$F(x)\geqslant0$ 恒成立.若存在，求出 a；若不存在，请说明理由.

17．记 $\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最大值，如 $\max\left\{3,\sqrt{10}\right\}=\sqrt{10}$.已知函数 $f\left(x\right)=\max\left\{x^2-1,2\ln x\right\}$，

$g\left(x\right)=\max\left\{x+\ln x,-x^2+\left(a^2-\dfrac{1}{2}\right)x+2a^2+4a\right\}$.

（1）设 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-1\right)^2$，求函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right]$ 上的零点个数；

（2）试探讨是否存在实数 $a\in\left(-2,+\infty\right)$，使得 $g\left(x\right)<\dfrac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in\left(a+2,+\infty\right)$ 恒成立？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，说明理由.

五、同构法解零点问题与恒成立问题

18 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在零点，求实数 a 的取值范围

19．已知函数 $f(x)=ae^{x}-ln(x+2)+lna-2$，

（1）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，求 a 的值及函数的单调区间.

（2）请在下列两问中选择一问作答，答题前请标好选择．如果多写按第一个计分.

①若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

②若 $f(x)$ 仅有两个零点，求 a 的取值范围.

20.已知 $f(x)=xlnx+\dfrac{a}{2}x^{2}+1$.

（1）若函数 $g(x)=f(x)+x\cos x-\sin x-xlnx-1$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上有 1 个零点，求实数 a 的取值范围.

（2）若关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\dfrac{a}{2}x^{2}+ax-1$ 有两个不同的实数解，求 a 的取值范围.

21．已知函数 $f(x)=ae^{x}-ln(x+1)+lna-1$.

（1）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）若函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点，求 a 的取值范围.

22 已知函数 $f(x)=e^{x-1}-mx^{2}(m\in R)$.

（1）选择下列两个条件之一：① $m=\dfrac{1}{2}$；② $m=1$；判断 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 是否存在极小值点，并说明理由；

（2）已知 $m>0$，设函数 $g(x)=f(x)+mxln(mx)$．若 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点，求实数 m 的取值范围.

23.若对任意 $x>0$，恒有 $a\left(e^{ax}+1\right)\geqslant 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$，求实数 a 的最小值

24.已知函数 $f(x)=e^{x}-a\ln(ax-a)+a(a>0)$，若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

25.对任意 $x>0$，不等式 $2ae^{2x}-\ln x+\ln a\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的最小值

26.已知函数 $f(x)=ae^{x}-\ln x-1$ 证明:当 $a\geq\dfrac{1}{e}$ 时，$f\left(x\right)\geq 0$.

27．已知函数 $f\left(x\right)=x\left(e^{2x}-a\right)$，若 $f\left(x\right)\geq 1+x+\ln x$，求 a 的取值范围.

不等式恒成立之端点不成立问题

1．已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-ax$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）设函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2}a^{2}$ ，若 $x\geq 0$ 时， $g\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

（1）

$f\left(x\right)=e^{x}-ax$,

$f'\left(x\right)=e^{x}-a$.

当 $a\leq 0$ 时， $f'\left(x\right)>0$ ， $f\left(x\right)=e^{x}-ax$ 在 R 上单调递增.

当 $a>0$ 时，令 $f'\left(x\right)=e^{x}-a=0$ ，得 $x=\ln a$.

$x<\ln a$ 时， $f'\left(x\right)<0$ ， $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln a\right)$ 上单调递减，

$x>\ln a$ 时， $f'\left(x\right)>0$ ， $f\left(x\right)$ 在 $\left(\ln a,+\infty\right)$ 上单调递增，

故当 $a\leq 0$ 时， $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 R；

当 $a>0$ 时， $f\left(x\right)$ 的单调递减区间是 $\left(-\infty,\ln a\right)$ ，单调递增区间是 $\left(\ln a,+\infty\right)$.

（2） $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2}a^{2}=e^{x}-ax-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{2}a^{2}$ ，

$g'\left(x\right)=e^{x}-x-a$ ， $g''\left(x\right)=e^{x}-1$ ，

$\because$ $x\geq 0$ ， $\therefore$ $g''\left(x\right)=e^{x}-1\geq 0$ ， $g'\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增， $g'\left(x\right)_{\min}=g'\left(0\right)=1-a$.

当$1-a\geq 0$，即$a\leq 1$时，$g'(x)_{\min}=1-a\geqslant 0$，$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

则$g(x)_{\min}=g(0)=1-\frac{1}{2}a^{2}\geqslant 0$，$-\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}$，故$-\sqrt{2}\leq a\leq 1$.

当$1-a<0$，即$a>1$时，$g'(x)_{\min}=1-a<0$，

$\exists x_0>0$，$g'(x_0)=e^{x_0}-x_0-a=0$，即$a=e^{x_0}-x_0$或$e^{x_0}=a+x_0$，

$0<x<x_0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，

$x>x_0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

则$g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{2}(x_0+a)^{2}=e^{x_0}-\frac{1}{2}\left(e^{x_0}\right)^{2}=\frac{1}{2}e^{x_0}\left(2-e^{x_0}\right)\geqslant 0$，$e^{x_0}\leqslant 2$，$\therefore 0<x_0\leq\ln 2$.

令函数$h(x)=e^{x}-x$，且$0<x\leq\ln 2$，$h'(x)=e^{x}-1\geq 0$，$h(x)=e^{x}-x$在$(0,\ln 2]$上单调递增，$1<h(x)\leqslant 2-\ln 2$，

$\because a=e^{x_0}-x_0$（$0<x\leq\ln 2$），$\therefore 1<a\leq 2-\ln 2$.

综上，实数a的取值范围是$-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2-\ln 2$.

2．已知函数$f(x)=ax\cos x-2\sin x$，其中$a\in\mathbf{R}$.

（1）当$a=2$时，讨论$f(x)$在$(0,2\pi)$上的单调性；

（2）若对任意$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$都有$f(x)<3x$，求实数$a$的取值范围.

（1）当$a=2$时，$f(x)=2x\cos x-2\sin x$，则$f'(x)=-2x\sin x$，令$f'(x)=0$，当$x\in(0,2\pi)$时，解得$x=\pi$，故当$x\in(0,\pi)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(\pi,2\pi)$时，$f'(x)>0$.

所以，$f(x)$在$(0,\pi)$上单调递减，在$(\pi,2\pi)$上单调递增.

（2）令$g(x)=3x+2\sin x-ax\cos x$，则$g'(x)=3+(2-a)\cos x+ax\sin x$.

当$a\leqslant 0$时，$ax\cos x\leqslant 0$，所以$g(x)>g(0)=0$.

当$0<a\leqslant 5$时，$g'(x)\geqslant 3-3\cos x+ax\sin x>0$，故$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

又$g(0)=0$，故$g(x)>g(0)=0$.

当$a>5$时，令$h(x)=g'(x)=3+(2-a)\cos x+ax\sin x$，则$h'(x)=(2a-2)\sin x+ax\cos x>0$，故$h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.$h(0)=5-a<0,h\left(\frac{\pi}{2}\right)=3+\frac{a\pi}{2}>0.$

故存在$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得$h(x_0)=0$，且当$x\in(0,x_0)$时$h(x)<0$，即$g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，所以当$x\in(0,x_0)$时，$g(x)<g(0)=0$，故不符合 .

综上所述，a 的取值范围为$\{a \mid a \le 5\}$.

3．已知函数 $f(x)=\dfrac{3a-\ln x^3}{x}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 在$[1,2]$上的单调性；

（2）若 $a=-1$，求证：$f(x)>-3x-2$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.

（1）由 $f(x)=\dfrac{3a-\ln x^3}{x}$ 得 $f'(x)=\dfrac{-3-3a+\ln x^3}{x^2}=\dfrac{-3-3a+3\ln x}{x^2}=\dfrac{3\left(\ln x-(a+1)\right)}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$ 得 $\ln x=a+1$，$x=e^{a+1}$，

当 $e^{a+1}\ge 2$ 时，$a\ge -1+\ln 2$，$f'(x)\le 0$ 对$[1,2]$恒成立，$f(x)$ 在$[1,2]$单减；

当 $e^{a+1}\le 1$ 时，$a\le -1$，$f'(x)\ge 0$ 对$[1,2]$恒成立，$f(x)$ 在$[1,2]$单增；

当 $1<e^{a+1}<2$ 时，$a\in(-1,-1+\ln 2)$，当 $x\in\left(1,e^{a+1}\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减；当 $a\in\left(e^{a+1},2\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增；

综上所述，当 $a\ge -1+\ln 2$，$f(x)$ 在$[1,2]$单减；当 $a\le -1$，$f(x)$ 在$[1,2]$单增；当 $a\in(-1,-1+\ln 2)$，当 $x\in\left(1,e^{a+1}\right)$，$f(x)$ 单减；当 $a\in\left(e^{a+1},2\right)$，$f(x)$ 单增；

（2）若 $a=-1$，则 $f(x)=\dfrac{-3-3\ln x}{x}$，$f(x)>-3x-2$ 在$(0,+\infty)$上恒成立$\Leftrightarrow -3-3\ln x>-3x^2-2x$，即 $3\ln x+3-3x^2-2x<0$

对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

令 $h(x)=3\ln x+3-3x^2-2x$，则 $h'(x)=\dfrac{3}{x}-6x-2=\dfrac{-6x^2-2x+3}{x}$，

令 $h'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}}{6}\approx 0.56$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{19}}{6}\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单增；当 $x\in\left(\dfrac{-1+\sqrt{19}}{6},+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单减，

所以 $h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{-1+\sqrt{19}}{6}\right)$，令 $M=\dfrac{-1+\sqrt{19}}{6}$，则 $3\ln M<0$，又 $-6M^2-2M+3=0$，即 $3-2M=6M^2$，故

$h(M)=3\ln M+3-3M^2-2M=3\left(\ln M+M^2\right)$，

构造函数 $g(x)=\ln x+x^2$，

又 $\ln x\le x-1$，设 $t(x)=\ln x-x+1$，$t'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，当 $x\in(0,1)$，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单增，当 $x\in(1,+\infty)$，$t'(x)<0$，

$t(x)$ 单减，故 $t(x)\le t(1)=0$（得证），

所以 $g(x)=\ln x+x^2\le x^2+x-1$，$0.56\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right)$，令 $m(x)=x^2+x-1$，$m(x)$ 在$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right)$单增，$m\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4},m\left(\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{1}{25}$，所以

$g(M)<m(M)<0$，

所以 $f(x)>-3x-2$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.

4．已知函数 $f(x)=\dfrac{1+\ln(x+1)}{x}$.

（1）函数 $f(x)$在区间$(0，+\infty)$上是增函数还是减函数？证明你的结论；

（2）若当 $x>0$ 时，$f(x)>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立，求正整数 k 的最大值.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{1+ln(x+1)}{x}$ $\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x^2}[\dfrac{x}{x+1}-1-ln(x+1)]=-\dfrac{1}{x^2}[\dfrac{1}{x+1}+ln(x+1)]$.

由 $x>0$，$x^2>0$，$\dfrac{1}{x+1}>0$，$ln(x+1)>0$，得 $f'(x)<0$.

因此函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)>\dfrac{k}{x+1}$ 恒成立.

即 $h(x)=\dfrac{(x+1)[1+ln(x+1)]}{x}>k$ 对 $x>0$ 恒成立.

即 $h(x)(x>0)$ 的最小值大于 k .

由 $h'(x)=\dfrac{x-1-ln(x+1)}{x^2}$，记 $\Phi(x)=x-1-ln(x+1)$. $(x>0)$ 则 $\Phi'(x)=\dfrac{x}{x+1}>0$，

$\therefore \Phi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续递增.

又 Φ（2）$=1-ln3<0$，Φ（3）$=2-2ln2>0$，

$\therefore \Phi(x)=0$ 存在惟一实根 a，且满足：$a\in(2,3)$，$a=1+ln(a+1)$，

由 $x>a$ 时，$\Phi(x)>0$，$h'(x)>0$；$0<x<a$ 时，$\Phi(x)<0$，$h'(x)<0$ 知：

$h(x)(x>0)$ 的最小值为 h（a）$=\dfrac{(a+1)[1+ln(a+1)]}{a}=a+1\in(3,4)$.

因此正整数 k 的最大值为 3.

10．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}-ax+a\ln x$.

（1）若 $a=1$，求 $f\left(x\right)$ 的极值点；

（2）若 $f\left(x\right)\geq 0$，求 a 的取值范围.

（1）

解：由题意，函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}-ax+a\ln x$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=1$ 时，函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}-x+\ln x$，

可得 $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}-1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}-\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{(x-1)(e^x-x)}{x^2}$，

令 $g(x)=e^x-x, x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=e^x-1>0$，

所以 $g\left(x\right)$ 是增函数，所以 $g\left(x\right)>g\left(0\right)>0$，

由 $f'\left(x\right)=0$，可得 $x=1$，

当 $x>1$ 时，$f'\left(x\right)>0$；当 $0<x<1$ 时，$f'\left(x\right)<0$，

所以当 $x=1$ 时，函数取得极小值，

所以 $f\left(x\right)$ 的极小值点为1，无极大值点.

（2）解：由 $f\left(x\right)\geq 0$，可得 $e^{x-\ln x}\geqslant a(x-\ln x)$，

令 $t=x-\ln x, x\in(0,+\infty)$，则 $e^{t}\geq at$，且 $t'=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，令 $t'=0$，可得 $x=1$，

当 $x>1$ 时，$t'>0$；当 $0<x<1$ 时，$t'<0$，所以当 $x=1$ 时，$t_{\min}=1$，所以 $t\in[1,+\infty)$，

所以 $a\leq\dfrac{e^{t}}{t}$，令 $m(t)=\dfrac{e^{t}}{t}, t\in[1,+\infty)$，则 $m'(t)=\dfrac{e^{t}(t-1)}{t^{2}}\geq 0$，

所以 $m(t)_{\min}=m(1)=e$，所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,e]$.

11．已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+2ax$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若对任意的 $x\in\left(0,+\infty\right)$，都有 $f\left(x\right)+1\leq x\mathrm{e}^{3x}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

（1）由已知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2a=\dfrac{2ax+1}{x}(x>0)$

当 $a\geq 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，此时函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2a}$，

若 $0<x<-\dfrac{1}{2a}$，$f'(x)>0$，若 $x>-\dfrac{1}{2a}$，$f'(x)<0$，

此时函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减；

综合得：当 $a\geq 0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减；

（2）$f\left(x\right)+1\leq x\mathrm{e}^{3x}$，即 $\ln x+2ax+1\leq x\mathrm{e}^{3x}\ \therefore 2a\leq\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$ 对任意的 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，

令 $g\left(x\right)=\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$ 则 $g'\left(x\right)=3\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}+\dfrac{1}{x^{2}}=3\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{\ln x}{x^{2}}=\dfrac{3x^{2}\mathrm{e}^{3x}+\ln x}{x^{2}}$

令 $h\left(x\right)=3x^{2}\mathrm{e}^{3x}+\ln x$，则 $h'(x)=6x\mathrm{e}^{3x}+9x^{2}\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{1}{x}=3x\mathrm{e}^{3x}(2+3x)+\dfrac{1}{x}>0\ \therefore h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

又 $h\left(1\right)=3\mathrm{e}^{3}+\ln 1=3\mathrm{e}^{3}>0$，$h\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}+\ln\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}-3\ln 3\right)=\dfrac{1}{3}\left(\ln\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\ln 3^{3}\right)<0$，$\therefore\exists x_{0}\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$，使 $h\left(x_{0}\right)=0$，

$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(0,x_{0}\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_{0},+\infty\right)$ 上单调递增，

由 $h\left(x_{0}\right)=0$ 得 $3{x_{0}}^{2}\mathrm{e}^{3x_{0}}+\ln x_{0}=0\ \therefore 3x_{0}\mathrm{e}^{3x_{0}}=-\dfrac{\ln x_{0}}{x_{0}}=\ln\dfrac{1}{x_{0}}\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{x_{0}}}$，

设 $t\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x}$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，$t'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{x}=\left(1+x\right)\mathrm{e}^{x}>0$ 即 $t\left(x\right)=x\mathrm{e}^{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore$ 由 $3x_0e^{3x_0}=\ln\frac{1}{x_0}e^{\ln\frac{1}{x_0}}$ 得 $t\left(3x_0\right)=t\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)$， $\therefore 3x_0=\ln\frac{1}{x_0}$， 即有 $e^{3x_0}=\frac{1}{x_0},\frac{\ln x_0}{x_0}=-3$

$\therefore g\left(x\right)_{\min}=g\left(x_0\right)=e^{3x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}=3$， $\therefore 2a\le 3 \therefore a\le\frac{3}{2}$.

12．设函数 $f(x)=xe^x-a(x+1)^2$，其中 $a\in$R.

（1）讨论函数 $f(x)$的单调区间；

（2）若 $f(x)\geq e\ln x$ 恒成立，求 a 的取值范围.

（1） $f'(x)=e^x+xe^x-2a(x+1)=(x+1)(e^x-2a)$

①当 $a\leq 0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$，

当 $x<-1$ 时， $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x>-1$ 时， $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

②当 $a=\frac{1}{2e}$， $f'(x)\geq 0$，$f(x)$在 R 上单调递增；

③当 $0<a<\frac{1}{2e}$ 时，即当 $x<\ln 2a$ 时， $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当 $\ln 2a<x<-1$ 时， $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x>-1$ 时， $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

④当 $a>\frac{1}{2e}$ 时，

当 $x<-1$ 时， $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当 $-1<x<\ln 2a$ 时， $f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x>\ln 2a$ 时， $f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

综上所述：

① $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在 $\left(-\infty,-1\right)$ 单调递减，在 $\left(-1,+\infty\right)$ 单调递增；

② $0<a<\frac{1}{2e}$ 时，$f(x)$在 $\left(-\infty,\ln 2a\right),\left(-1,+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(\ln 2a,-1\right)$ 单调递减；

③ $a=\frac{1}{2e}$ 时，$f(x)$在 R 上单调递增；

④ $a>\frac{1}{2e}$ 时，$f(x)$在 $\left(-\infty,-1\right),\left(\ln 2a,+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(-1,\ln 2a\right)$ 单调递减 .

（2）$f(x)\geq e\ln x$ 恒成立 $a\leqslant\frac{xe^x-e\ln x}{(x+1)^2}=g\left(x\right)$，$x>0$， $g'\left(x\right)=\frac{\left[e^x(x+1)^2-\frac{e\left(x+1\right)}{x}-2xe^x+2e\ln x\right]}{\left(x+1\right)}$，$g'\left(1\right)=0$，

令 $h\left(x\right)=e^x(x+1)^2-\frac{e\left(x+1\right)}{x}-2xe^x+2e\ln x$，

$h'(x)=e^x\left[(x+1)^2+2(x+1)\right]+\dfrac{e}{x^2}-2e^x(x+1)+\dfrac{2e}{x}=e^x(x+1)^2+\dfrac{e(1+2x)}{x^2}>0$，

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，即$0<x<1$时，$h(x)<h(1)=0$，$x>1$时，$h(x)>0$

$\therefore g(x)$在$(0,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增$\therefore a\leqslant g(1)=\dfrac{e}{4}$.

不等式恒成立之端点恒成立问题

5.（知函数 $f(x)=\sin x+e^x+ax$.

（1）若 $a=0$，求函数 $f(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上的零点个数；

（2）当 $x\in[0,+\infty)$时都有 $f(x)\geq 1$，求实数 a 的取值范围.

（1）因为 $a=0$，所以 $f(x)=\sin x+e^x$， $f'(x)=\cos x+e^x$，

因为 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$在 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上是单调增函数，

又因为$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+e^{-\frac{\pi}{2}}=-1+e^{-\frac{\pi}{2}}<0$， $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+e^{\frac{\pi}{2}}=1+e^{\frac{\pi}{2}}>0$，

所以 $f(x)$在 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上只有一个零点.

（2）

因为 $f(x)=\sin x+e^x+ax$，所以 $f'(x)=\cos x+e^x+a$，

令$h(x)=\cos x+e^x+a$， $h'(x)=e^x-\sin x$，因为 $x\in[0,+\infty)$， $e^x\geq 1$

所以$h'(x)>0$， $h(x)$为增函数，$h(x)\geq h(0)=2+a$，

当 $2+a\geq 0$时，即 $a\geq -2$时，$h(x)\geq h(0)=2+a\geq 0$，即 $f'(x)\geq 0$，

所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数， $f(x)\geqslant f(0)=1$，

所以 $a\geq -2$时满足 $x\in[0,+\infty)$时都有 $f(x)\geq 1$；

当 $2+a<0$时，即 $a<-2$时，$h(0)=2+a<0$，

又$h(\ln(2-a))=\cos(\ln(2-a))+e^{\ln(2-a)}+a=\cos(\ln(2-a))+2>0$，

所以$\exists x_0\in(0,\ln(2-a))$，使$h(x_0)=0$，

所以 $x\in(0,x_0)$时$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$， $f(x)$为减函数， $f(x)<f(0)=1$，与 $f(x)\geq 1$矛盾，所以 $a<-2$不成立，

综上实数 a 的取值范围是$[-2,+\infty)$

6．已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$， $a\in\mathrm{R}$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的最大值；

（2）若关于 x 的不等式 $f\left(x\right)+\dfrac{e^{x-1}}{x}+a-2\geq 0$ 对任意的实数 $x\geq 1$ 恒成立，其中 e 为自然对数的底数，求 a 的取值范围.

（1）

当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=\ln x-x+1$，$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-1$，令 $f'\left(x\right)=0\Rightarrow x=1$，

且当 $0<x<1$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)\boxed{\nearrow}$；当 $x>1$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)\boxed{\searrow}$，

$\therefore f\left(x\right)_{\max}=f\left(1\right)=0$.

（2）

$\ln x-ax+1+\dfrac{e^{x-1}}{x}+a-2\geq 0$ 对任意的 $x\geq 1$ 恒成立，

即 $a\left(x-1\right)\leq e^{x-1-\ln x}+\ln x-1$ 对 $\forall x\geq 1$ 恒成立，

当 $x=1$ 时，显然成立.

当 $x>1$ 时，$a\leq\left(\dfrac{e^{x-1-\ln x}+\ln x-1}{x-1}\right)_{\min}$，

由 $\dfrac{e^{x-\ln x-1}+\ln x-1}{x-1}\geq\dfrac{x-\ln x+\ln x-1}{x-1}=1$，

当且仅当 $x-\ln x-1=0$，$x=1$ 时取“=”，$\therefore$ 取不到“=”，即 $\dfrac{e^{x-1-\ln x}+\ln x-1}{x-1}>1$，

$\therefore a\leq 1$，a 的取值范围为 $\left(-\infty,1\right]$.

7．已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^{2}+x+1-\mathrm{e}^{x}$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若对任意的 $x\geq 0$，都有 $f\left(x\right)\leq ax^{2}-\dfrac{1}{2}x^{3}$ 成立，求实数 a 的取值范围.

（1）

$x\in\mathrm{R}$，由题意得 $f'\left(x\right)=x+1-\mathrm{e}^{x}$，$f'\left(0\right)=0$，

设 $g\left(x\right)=f'\left(x\right)=x+1-\mathrm{e}^{x}$，则 $g'\left(x\right)=1-\mathrm{e}^{x}$，

易知当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，

$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，$\therefore g\left(x\right)=f'\left(x\right)\leq g\left(0\right)=0$，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递减.

（2）

当 $x=0$ 时， $f(0)=0$，满足题意；

当 $x>0$ 时，由题已知 $a-\frac{1}{2}\geq\left(\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}\right)_{\max}$.

设 $h(x)=\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$， $x>0$，

则 $h'(x)=\frac{\left(\frac{3}{2}x^2+1-e^x\right)\cdot x^2-2x\cdot\left(\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x\right)}{x^4}$

$=\frac{\frac{1}{2}x^3-x-2-(x-2)\cdot e^x}{x^3}=\frac{(x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)-(x-2)\cdot e^x}{x^3}$

$=\frac{(x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+x+1-e^x\right)}{x^3}$,

由（1）可知，当 $x>0$ 时， $f(x)<f(0)=0$，即 $\frac{1}{2}x^2+x+1-e^x<0$，∴当 $x\in(0,2)$ 时， $h'(x)>0$，当 $x\in(0,2)$ 时，

$h'(x)<0$，

即 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

∴ $h(x)_{\max}=h(2)=\frac{7-e^2}{4}$，

∴ $a-\frac{1}{2}\geq\frac{7-e^2}{4}$，即 $a\geq\frac{9-e^2}{4}$.

综上可知，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{9-e^2}{4},+\infty\right)$.

（1）若函数 $f(x)$ 的图象在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -2，求 x_0；

（2）当 $x>1$ 时，关于 x 的不等式 $a(x-1)<f(x)$ 恒成立，求满足条件的示数 a 的最大整数值.

（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+2=\ln x+3$，

则在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率为 $\ln x_0+3$，又 $f(x_0)=x_0\ln x_0+2x_0-1$，

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为： $y-(x_0\ln x_0+2x_0-1)=(\ln x_0+3)(x-x_0)$，

即 $(\ln x_0+3)x-y-x_0-1=0$，所以 $y=(\ln x_0+3)x-x_0-1$，

因为其在 y 轴上的截距为 $-x_0-1$，所以 $-x_0-1=-2$，解得 $x_0=1$.

（2）

$a(x-1)<f(x)$ 即 $a(x-1)<x\ln x+2x-1$，

又 $x>1$，所以 $x-1>0$，可得 $a<\dfrac{x\ln x+2x-1}{x-1}$ 对于 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

当 $x>1$ 时，令 $g(x)=\dfrac{x\ln x+2x-1}{x-1}$，则 $g'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$.

再令 $h(x)=x-\ln x-2$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$，

所以 $h(x)=x-\ln x-2$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

又 $h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2(1-\ln 2)>0$，

所以 $\exists x_0\in(3,4)$ 使 $h(x_0)=0$，即 $\exists x_0\in(3,4)$，使 $x_0-2=\ln x_0$，

当 $1<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0\ln x_0+2x_0-1}{x_0-1}=\dfrac{x_0(x_0-2)+2x_0-1}{x_0-1}=x_0+1$，

所以 $a<x_0+1$，又因为 $x_0+1\in(4,5)$，所以实数 a 的最大整数值是 4.

8.. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+\cos x+mx$.

（1）若 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，求实数 m；

（2）若 $f(x)\leqslant 1$ 在 $(-1,0]$ 上恒成立，求实数 m 的范围.

（1）

解：因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\sin x+m$，

令 $f'(0)=0$，则 $\dfrac{1}{0+1}-\sin 0+m=0$，

所以 $m=-1$.

即 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\sin x-1(x>-1)$，

当 $-1<x<0$ 时，设 $g(x)=f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\sin x-1$，

所以 $g'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\cos x<0$，

故 $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，

所以 $f'(x)>f'(0)=0$，

当 $0<x<\pi$ 时，$\frac{1}{x+1}<1$，$-\sin x<0$，

所以 $f'(x)<0$.

终上所述，$m=-1$ 时，$x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点成立，

所以 $m=-1$.

（2）

解：由（1）知 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\sin x+m$，

当 $-1<x<0$ 时，$\because f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，

$\therefore f'(x)>f'(0)=1+m$，

① $m\geq-1$ 时，$\because f'(x)>f'(0)=1+m\geq 0$，

$f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递增，

所以 $f(x)\leq f(0)=1$，

② $m<-1$ 时，因为 $f'(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递减，

$f'(0)<0$；$f'\left(-\frac{1}{m}-1\right)=-\sin\left(-\frac{1}{m}-1\right)>0$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in(-1,0)$ 使 $f'(x_0)=0$，

即 $x\in(x_0,0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

当 $x\in(x_0,0)$ 时，$f(x)>f(0)=1$，与 $f(x)\leqslant 1$ 矛盾.

综上：$m\geq-1$ 时，$f(x)\leqslant 1$ 在 $(-1,0]$ 上恒成立.

所以实数 m 的范围是 $[-1,+\infty)$.

12．已知曲线 $f(x)=m+\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=h(x)$，且 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=0$.

（1）求函数 $g(x)=\frac{h(x)}{e^x}$ 的极值；

（2）若 $x\geq 0$ 时，不等式 $e^x-ax^2-h(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解：（1）由 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=m+\ln\frac{1}{e^2}=m-2=0$，得 $m=2$，

$f(x)=2+\ln x$， $f(1)=2+\ln x=2$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}$， $f'(1)=1$，

切线方程为 $y=x+1$，所以 $h(x)=x+1$，

所以 $g(x)=\frac{x+1}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{-x}{e^x}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

所以函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，极大值为 $g(0)=1$，无极小值.

（2）令 $t(x)=e^x-ax^2-x-1$， $t'(x)=e^x-2ax-1$， $x\geq 0$， $e^x-1\geq 0$，

1.当 $a\leq 0$ 时， $t'(x)\geq 0$，所以 $t(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $t(x)\geq t(0)=0$，即 $a\leq 0$ 符合题意；

2.当 $a>0$ 时，设 $u(x)=t'(x)$， $u'(x)=e^x-2a$，

①当 $0<a\leq\frac{1}{2}$， $2a\leq 1$， $u'(x)\geq 0$，

所以 $t'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增， $t'(x)\geq t'(0)=0$，

所以 $t(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $t(x)\geq t(0)=0$，所以 $0<a\leq\frac{1}{2}$ 符合题意；

②当 $a>\frac{1}{2}$ 时， $u'(x)=e^x-2a=0$， $x=\ln 2a>0$，所以 $t'(x)$ 在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上递增，

在 $(0,\ln 2a)$ 上递减， $t'(0)=0$，所以当 $x\in(0,\ln 2a)$， $t'(x)<0$，

所以 $t(x)$ 在 $[0,\ln 2a)$ 上单调递减， $t(0)=0$，所以 $x\in(0,\ln 2a)$， $t(x)<0$，舍去.

综上： $a\leq\frac{1}{2}$.

14．已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2-x+a$ 的图象在点 $A(1,f(1))$ 处的切线在 y 轴上截距为 2.

（1）求 a 的值；

（2）对任意 $x>2$，不等式 $k(x-2)+2-2x-x^2<f(x)$ 恒成立，求自然数 k 的最大值.

【详解】

（1） $f(1)=\frac{a}{2}-1$， $f'(x)=\ln x-ax$， $f'(1)=-a$，

函数 $f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2-x+a$ 的图象在点 $A(1,f(1))$ 处的切线方程为：

$y-\left(\frac{a}{2}-1\right)=-a(x-1)$，

因为切线在 y 轴上的截距为 2，所以 $x=0$ 时， $y=2$，

即 $2-\left(\frac{a}{2}-1\right)=-a(0-1)$， $a=2$.

（2） $f(x)=x\ln x-x^2-x+2$，

不等式 $k(x-2)+2-2x-x^2<f(x)$ 等价于 $k(x-2)<x\ln x+x$，

当 $x>2$ 时，不等式化为 $k<\frac{x\ln x+x}{x-2}$ 恒成立，

令 $h(x)=\frac{x\ln x+x}{x-2}$，由题意 $k<h(e^2)=\frac{3e^2}{e^2-2}$，

又 $\frac{3e^2}{e^2-2}\in(4,5)$，因此整数 k 的最大值可以为 4.

下面证明 $k=4$ 符合题意.

令 $g(t)=\ln t-1+\frac{1}{t}$， $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}$，

$0<t<1$ 时， $g'(t)<0$， $t>1$ 时， $g'(t)>0$，

$g(t)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

$g(t)_{\min}=g(1)=0$，

所以 $g(t)\geq 0$，即 $\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$ 对任意的正实数 x 都成立.

因为有 $\ln\frac{x}{e^2}\geq 1-\frac{e^2}{x}$，整理有 $\ln x\geq 3-\frac{e^2}{x}$.

$$h(x)=\frac{x\ln x+x}{x-2}\geq\frac{x\left(3-\frac{e^2}{x}\right)+x}{x-2}=4+\frac{8-e^2}{x-2}>4.$$

17．已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-kx-1$， $x\geq 0$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若关于 x 的不等式 $f(x)+\frac{e^x}{x+1}\geqslant 0$ 对任意 $x\geq 0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

【详解】

（1） $f(x)=\ln(x+1)-kx-1$， $x\geq 0$， $f'(x)=\frac{1}{x+1}-k=\frac{1-k-kx}{x+1}$.

①若 $k\leq 0$，则 $f'(x)>0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

②若 $0<k<1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{k}-1>0$.

x	$\left(0,\frac{1}{k}-1\right)$	$\frac{1}{k}-1$	$\left(\frac{1}{k}-1,+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−

$f(x)$	$\nearrow$	极大值 $f\left(\frac{1}{k}-1\right)$	$\searrow$

③若 $k\geq 1$，则 $f'(x)\leq 0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

综上所述，若 $k\leq 0$， $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增；若 $0<k<1$， $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{k}-1\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{k}-1,+\infty\right)$ 上单调递减；若 $k\geq 1$， $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

（2）令 $g(x)=f(x)+\frac{e^x}{x+1}$，故 $g(x)=\ln(x+1)-kx+\frac{e^x}{x+1}-1$， $x\geq 0$

所以 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-k+\frac{xe^x}{(x+1)^2}$，令 $h(x)=g'(x)=\frac{1}{x+1}-k+\frac{xe^x}{(x+1)^2}$，

$$h'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}=\frac{(x^2+1)e^x-(x+1)}{(x+1)^3},$$

下面证明 $e^x\geq x+1$，其中 $x\geq 0$.

令 $\varphi(x)=e^x-x-1$， $x\geq 0$，则 $\varphi'(x)=e^{x-1}\geqslant 0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$，

所以当 $x\geq 0$ 时， $e^x\geq x+1$.

所以 $h'(x)=\frac{(x^2+1)e^x-(x+1)}{(x+1)^3}\geq\frac{(x+1)(x^2+1)-(x+1)}{(x+1)^3}=\frac{x^2}{(x+1)^2}\geq 0$，

所以 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g'(x)\geqslant g'(0)=1-k$.

①若 $1-k\geq 0$，即 $k\leq 1$，则 $g'(x)\geqslant g'(0)=1-k\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)\geq g(0)=0$ 对 $\forall x>0$ 恒成立，所以 $k\leq 1$ 符合题意.

②若 $1-k<0$，即 $k>1$，此时 $g'(0)=1-k<0$，

$$g'(4k)=\frac{1}{4k+1}-k+\frac{4ke^{4k}}{(4k^2+1)^2}>\frac{4ke^{4k}}{(4k^2+1)^2}-k=k\cdot\left[\frac{e^{4k}}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2}-1\right]=k\left[\left(\frac{e^{2k}}{2k+\frac{1}{2}}\right)^2-1\right],$$

且据 $k>1$ 及 $e^x\geq x+1$ 可得 $e^{2k}\geqslant 2k+1>2k+\frac{1}{2}$，故 $\left(\frac{e^{2k}}{2k+\frac{1}{2}}\right)^2>1$，

所以 $g'(4k)>0$.

又 $g'(x)$ 的图象在 $[0,+\infty)$ 上不间断，所以存在 $x_0\in(0,4k)$，使得 $g'(x)=0$，

且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

所以 $g(x_0)<g(0)=0$，其中 $x_0\in(0,4k)$，与题意矛盾，

所以 $k>1$ 不符题意，舍去.
综上所述，实数 k 的取值范围是 $k\le 1$.

不等式恒成立之双变量最值问题答案

9．已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=ax^2+bx+1$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=0$ 时，直线 $y=g(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象相切，求 b 的值；

（2）当 $a\ne 0$ 时，若对任意 $x>0$，都有 $f(x)\le g(x)$ 恒成立，求 $\frac{b}{a}$ 的最小值.

.

【详解】

（1）当 $a=0$ 时，直线 $g(x)=bx+1$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象相切于 $P(x_0,y_0)$，

因为 $f(x)=\ln x$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}$，

则 $\frac{1}{x_0}=b$ 且 $bx_0+1=\ln x_0$，即 $b\bullet\frac{1}{b}+1=\ln\frac{1}{b}$，解得：$b=\frac{1}{e^2}$.

（2）若对任意 $x>0$，都有 $f(x)\le g(x)$ 恒成立，得 $\ln x-1\le ax^2+bx$.
假设 $a<0$，则当 $x>e$ 时，$\ln x-1>0$，

而当 $x>\max\left\{0,-\frac{b}{a}\right\}$ 时，$ax^2+bx<0$.

取 $x_0=\max\left\{e,-\frac{b}{a}\right\}$，则当 $x>x_0$ 时，$\ln x-1>0$，

而 $ax^2+bx<0$，矛盾；故 $a>0$.

当 $x=e$ 时，由 $f(e)\le g(e)$，得 $ae^2+be\ge 0$，即 $\frac{b}{a}\ge -e$.

下证：$\frac{b}{a}$ 能取到 $-e$.

当 $a=\frac{1}{e^2},b=-\frac{1}{e}$ 时，$\frac{b}{a}=-e$.

记 $F(x)=\ln x-\frac{x}{e}(x>0)$，则 $F'(x)=\frac{e-x}{ex}$，

令 $F'(x)>0$，得 $0<x<e$；令 $F'(x)<0$，得 $x>e$；

所以 $F(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F(x)\le F(e)=0$，即 $\ln x\le\frac{x}{e}$.

所以 $f(x)-g(x)=\ln x-\frac{x^2}{e^2}+\frac{x}{e}-1\le-\frac{x^2}{e^2}+\frac{x}{e}-1=-\left(\frac{x}{e}-1\right)^2\le 0$.

即对任意 $x>0$，$f(x)\le g(x)$ 恒成立，

故 $\dfrac{b}{a}$ 的最小值为 $-e$.

10．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+(1+x)^a+\dfrac{a}{1+x}-a-2, g(x)=bx^2+x$，其中 $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$.($e=2.718281828\cdots$ 为自然对数的底数)

（1）求 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）若 $a\geq 4$ 时， $f(x)\geq g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.当 b 取得最大值时，求 $M=\dfrac{b+12}{a}$ 的最小值.

【详解】

解：（1）由 $f(x)=e^x+(1+x)^a+\dfrac{a}{1+x}-a-2$ ，得 $f^{'}(x)=e^x+a(1+x)^{a-1}-\dfrac{a}{(1+x)^2}$ ，

所以 $f^{'}(0)=e^0+a(1+0)^{a-1}-\dfrac{a}{(1+0)^2}=1+a-a=1$，

因为 $f(0)=e^0+(1+0)^a+\dfrac{a}{1+0}-a-2=1+1+a-a-2=0$ ，

所以 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$， 即 $x-y=0$，

（2） $f(x)-g(x)=e^x+(1+x)^a+\dfrac{a}{1+x}-a-2-bx^2-x$ ，

令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(0)=0$，所以 $h^{'}(x)\geq 0$

$h^{'}(x)=e^x+a(1+x)^{a-1}-\dfrac{a}{(1+x)^2}-2bx-1$， $h^{'}(0)=e^0+a(1+0)^{a-1}-\dfrac{a}{(1+0)^2}-1=0$,

所以 $h^{''}(0)\geq 0$， $h^{''}(x)=e^x+a(a-1)(1+x)^{a-2}+\dfrac{2a}{(1+x)^2}-2b$,

所以 $h^{''}(0)=e^0+a(a-1)(1+0)^{a-2}+\dfrac{2a}{(1+0)^2}-2b=a^2+a+1-2b\geq 0$,

所以 $b\leq\dfrac{a^2+a+1}{2}$，所以 $b_{\max}=\dfrac{a^2+a+1}{2}$,

所以 $M=\dfrac{b+12}{a}=\dfrac{a^2+a+25}{2a}=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{25}{a}+1)$,

令 $\varphi(a)=a+\dfrac{25}{a}+1(a\geq 4)$，则 $\varphi^{'}(a)=1-\dfrac{25}{a^2}$，当 $4\leq a<5$ 时，$\varphi^{'}(a)<0$，当 $a>5$ 时，$\varphi^{'}(a)>0$，所以 $\varphi(a)$ 在 $[4,5)$ 上单调递减，在 $(5,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(a)_{\min}=\varphi(5)=5+\dfrac{25}{5}+1=11$，此时 $M=\dfrac{11}{2}$,

综上，$M=\dfrac{b+12}{a}$ 的最小值为 $\dfrac{11}{2}$

11.已知函数 $f\left(x\right)=e^{ax}\sin x$.

（1）若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（2）设 $a\geq 1$，若 $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，恒有 $f\left(x\right)\leq bx$ 成立，求 $b-e^2a$ 的最小值.

【详解】

解：（1）由 $f\left(x\right)=e^{ax}\sin x$，得 $f\,'\left(x\right)=e^{ax}\left(a\sin x+\cos x\right)$,

由 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，可得 $f'(x)\ge 0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上恒成立，

即 $a\sin x+\cos x\ge 0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上恒成立，

当 $x=0$ 时，$a\in R$；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$，则 $a\ge -\frac{1}{\tan x}$，∴ $a\ge -1$，

∴ a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

（2）设 $g(x)=f(x)-bx=e^{ax}\sin x-bx$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $g'(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)-b$.

设 $h(x)=e^{ax}(a\sin x+\cos x)-b$，则 $h'(x)=e^{ax}\left[\left(a^2-1\right)\sin x+2a\cos x\right]\ge 0$，

∴ $h(x)$ 单调递增，即 $g'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

∴ $g'(x)\in\left[1-b,ae^{\frac{\pi}{2}a}-b\right]$.

当 $b\le 1$ 时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，∴ $g(x)\ge g(0)=0$，不符合题意；

当 $b\ge ae^{\frac{\pi}{2}a}$ 时，$g'(x)\le 0$，$g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，$g(x)\le g(0)=0$，符合题意；

当 $1<b<ae^{\frac{\pi}{2}a}$ 时，由于 $g'(x)$ 为一个单调递增的函数，

而 $g'(0)=1-b<0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=ae^{\frac{\pi}{2}a}-b>0$，

由零点存在性定理，必存在一个零点 x_0，使得 $g'(x_0)=0$，

从而 $g(x)$ 在 $x\in[0,x_0]$ 上单调递减，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

因此只需 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)\le 0$，∴ $e^{\frac{\pi}{2}a}\le\frac{\pi}{2}b$，

∴ $b\ge\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}$，从而 $\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}\le b<ae^{\frac{\pi}{2}a}$，

综上，b 的取值范围为 $\left[\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a},+\infty\right)$，

因此 $b-e^2a\ge\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2a$.

设 $G(a)=\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2a$，则 $G'(a)=e^{\frac{\pi}{2}a}-e^2$，

令 $G'(a)=0$，则 $a=\frac{4}{\pi}>1$，

∴ $G(a)$ 在 $\left[1,\frac{4}{\pi}\right]$ 上单调递减，在 $\left(\frac{4}{\pi},+\infty\right)$ 上单调递增，

从而$G\left(a\right)\geq G\left(\frac{4}{\pi}\right)=-\frac{2e^2}{\pi}$，

$\therefore$ $b-e^2a$ 的最小值为 $-\frac{2e^2}{\pi}$.

12.已知函数 $f\left(x\right)=\ln x$.

（1）设 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-ax+1$，讨论 $g\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若不等式 $f\left(x\right)\leq\left(a-e\right)x+b$ 恒成立，其中 e 为自然对数的底数，求 $\frac{b}{a}$ 的最小值.

试题解析：

（1）函数定义域为$\left(0,+\infty\right)$，由题意得 $g\left(x\right)=\ln x-ax+1$，则 $g'\left(x\right)=\frac{1}{x}-a$，

①当 $a\leq 0$ 时， $g'\left(x\right)>0$，则 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，令 $g'\left(x\right)=0$，解得 $x=\frac{1}{a}$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时， $g'\left(x\right)>0$， $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时， $g'\left(x\right)<0$， $g\left(x\right)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

（2）设函数 $F\left(x\right)=\ln x-\left(a-e\right)x-b$，其中 e 为自然对数的底数，

$\therefore F'\left(x\right)=\frac{1}{x}+e-a$， $x>0$，

当 $a\leq e$ 时， $F'\left(x\right)>0$， $F\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数，$\therefore F\left(x\right)\leq 0$ 不可能恒成立，

当 $a>e$ 时，由 $F'\left(x\right)=\frac{1}{x}+e-a=0$，得 $x=\frac{1}{a-e}$，

$\because$ 不等式 $F\left(x\right)\leq 0$ 恒成立，$\therefore$ $F\left(x\right)_{\max}\leq 0$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a-e}\right)$ 时， $F'\left(x\right)>0$， $F\left(x\right)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{a-e},+\infty\right)$ 时， $F'\left(x\right)<0$， $F\left(x\right)$ 单调递减，

$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{a-e}$ 时， $F\left(x\right)$ 取最大值， $F\left(\frac{1}{a-e}\right)=-\ln\left(a-e\right)-b-1\leq 0$，

$\therefore$ 满足 $\ln\left(a-e\right)+b+1\geq 0$ 即可，$\therefore$ $b\geq -1-\ln\left(a-e\right)$，

$\therefore$ $\frac{b}{a}\geq\frac{-1-\ln\left(a-e\right)}{a}\left(a>e\right)$，

令 $G\left(x\right)=\frac{-1-\ln\left(x-e\right)}{x}$， $x>e$，

$$G'\left(x\right)=\frac{-\frac{x}{x-e}+1+\ln\left(x-e\right)}{x^2}=\frac{\left(x-e\right)\ln\left(x-e\right)-e}{\left(x-e\right)x^2}.$$

令$H\left(x\right)=\left(x-e\right)\ln\left(x-e\right)-e$，$H'\left(x\right)=\ln\left(x-e\right)+1$，

由$H'\left(x\right)=0$，得$x=e+\dfrac{1}{e}$，

当$x\in\left(e+\dfrac{1}{e},+\infty\right)$时，$H'\left(x\right)>0$，$H\left(x\right)$是增函数，

当$x\in\left(e,e+\dfrac{1}{e}\right)$时，$H'\left(x\right)<0$，$H\left(x\right)$是减函数，

∴当$x=e+\dfrac{1}{e}$时，$H\left(x\right)$取最小值$H\left(e+\dfrac{1}{e}\right)=-e-\dfrac{1}{e}$，

∵$x\to e$时，$H\left(x\right)\to 0$，$x>2e$时，$H\left(x\right)>0$，$H\left(2e\right)=0$，

∴当$x\in\left(e,2e\right)$时，$G'\left(x\right)<0$，$G\left(x\right)$是减函数，

当$x\in\left(2e,+\infty\right)$时，$G'\left(x\right)>0$，$G\left(x\right)$是增函数，

∴$x=2e$时，$G\left(x\right)$取最小值，$G\left(2e\right)=\dfrac{-1-1}{2e}=-\dfrac{1}{e}$，

∴$\dfrac{b}{a}$的最小值为$-\dfrac{1}{e}$.

6.已知e为自然对数的底数，函数$f\left(x\right)=e^x$，$g\left(x\right)=mx+n$（$m,n\in\mathbf{R}$）.

（1）若$m+n=0$，且$f\left(x\right)$的图象与$g\left(x\right)$的图象相切，求m的值；

（2）若$f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立，求$m+n$的最大值.

【详解】

（1）因为$f\left(x\right)$的图象与$g\left(x\right)$的图象相切，设切点为$\left(x_0,y_0\right)$，

又$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x$，所以$\begin{cases}m=\mathrm{e}^{x_0}\\ y_0=\mathrm{e}^{x_0}\\ y_0=mx_0-m\end{cases}$，解得$x_0=2$，$m=\mathrm{e}^2$.

所以$m=\mathrm{e}^2$；

（2）因为$f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$等价于$\mathrm{e}^x-mx-n\geq 0$，令$\varphi\left(x\right)=\mathrm{e}^x-mx-n$，

当$m<0$时，$\varphi\left(x\right)=\mathrm{e}^x-mx-n$在$R$上为增函数，且当$x\to-\infty$时，$\mathrm{e}^x-mx-n\to-\infty$，所以$m<0$不满足题意；

当$m=0$时，$\mathrm{e}^x-n\geq 0$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立，
所以$n\leq 0$，故$m+n\leq 0$，此时$m+n$的最大值为0；

当$m>0$时，因为$\varphi'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-m$，由$\varphi'\left(x\right)=0$，得$x=\ln m$，

又当$x>\ln m$时，$\varphi'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-m>0$，当$x<\ln m$时，$\varphi'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-m<0$，

所以$\varphi\left(x\right)$在$\left(\ln m,+\infty\right)$上为增函数，在$\left(-\infty,\ln m\right)$上为减函数，

所以当 $x=\ln m$ 时，$\varphi(x)$ 有最小值 $\varphi(\ln m)=m-m\ln m-n$，

所以 $m-m\ln m-n\geq 0$，即 $n\leq m-m\ln m$，

所以 $m+n\leq 2m-m\ln m$，

令 $H(m)=2m-m\ln m$（$m>0$），则 $H'(m)=1-\ln m$，

所以当 $0<m<\mathrm{e}$ 时，$H(m)$ 为增函数，当 $m>\mathrm{e}$ 时，$H(m)$ 为减函数，

所以 $H(m)_{\max}=H(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，故 $m+n\leq \mathrm{e}$，所以 $m+n$ 的最大值为 e；

综上所述，$m+n$ 的最大值为 e.

13.已知函数 $f(x)=(a+1)x-\ln x(a,b\in R)$.

（1）若 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\leq 0$ 有解，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)\geq b$ 恒成立，求 $b-a^2-a$ 的最大值.

【详解】

（1）由题意，函数 $f(x)=(a+1)x-\ln x(a,b\in R)$，

因为 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\leq 0$，可得 $f(x)=(a+1)x-\ln x\leq 0$，即 $a+1\leq\dfrac{\ln x}{x}$，

设函数 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，可得 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $h'(x)>0$，即 $1-\ln x>0$，解得 $0<x<e$；

令 $h'(x)<0$，即 $1-\ln x<0$，解得 $x>e$，

所以函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0,e)$，同理可求得单调递减区间为 $(e,+\infty)$.

所以 $h(x)_{max}=h(e)=\dfrac{1}{e}$，所以 $a+1\leq\dfrac{1}{e}$，解得所以 $a\leq\dfrac{1}{e}-1$，

即实数 a 的取值范围 $(-\infty,\dfrac{1}{e}-1]$.

（2）由函数 $f(x)=(a+1)x-\ln x(a,b\in R)$，可得 $f'(x)=a+1-\dfrac{1}{x},x>0$，

若 $a+1\leq 0$，即 $a\leq -1$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减，

又由 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，与题意不符.

若 $a+1>0$，即 $a>-1$ 时，令 $f'(x)>0$，即 $a+1>\dfrac{1}{x}$，解得 $x>\dfrac{1}{a+1}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{a+1},+\infty\right)$ 内单调递增，在区间 $\left(0,\dfrac{1}{a+1}\right)$ 内单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{a+1}\right)=(a+1)\cdot\dfrac{1}{a+1}-\ln\dfrac{1}{a+1}=1-\ln\dfrac{1}{a+1}=1+\ln(a+1)$

所以 $b\le 1+\ln(a+1)$，所以 $b-a^2-a\le 1+\ln(a+1)-a^2-a$，

设 $g(x)=1+\ln(x+1)-x^2-x,x>-1$，

所以 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-2x-1=\dfrac{1-(x+1)(2x+1)}{x+1}=\dfrac{-2x^2-3x}{x+1}$

令 $g'(x)>0$，即 $2x^2+3x<0$，解得 $-\dfrac{3}{2}<x<0,$

又因为 $x>-1$，所以 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 内单调递增，在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(0)=1+\ln 1-0-0=1$，

所以当 $a=0,b=1$ 时，$b-a^2-a$ 有最大值为 1.

9.已知函数 $f(x)=x^2+x-\ln(ax+b)$，$a\in R$，$a\neq 0$.

(1)当 $a=1$，$b=0$ 时，求证：$f(x)>\dfrac{5}{4}$；

(2)若 $f(x)\ge x^2$ 恒成立，求 ab 的最大值.

【详解】

(1)证明：当 $a=1$，$b=0$ 时，$f(x)=x^2+x-\ln x$，$x>0$，

所以 $f'(x)=2x+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2x-1)(x+1)}{x}$，$x>0$，

所以当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 上递减，在 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上递增，

所以当且仅当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}+\ln 2$，

因为 $f(\dfrac{1}{2})-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{2}+\ln 2=\dfrac{1}{2}(\ln 4-1)>0$，所以 $f(x)>\dfrac{5}{4}$；

(2)依题意：$f(x)\ge x^2\Leftrightarrow x^2+x-\ln(ax+b)\ge x^2\Leftrightarrow \ln(ax+b)-x\le 0$，

令 $h(x)=\ln(ax+b)-x$，则有 $h(x)\leqslant 0$ 恒成立，

当 $a<0$ 时，对任意的实数 b，当 $x<0$ 且 $x<\dfrac{1-b}{a}$ 时，即 $ax+b>1$，$h(x)>0$，矛盾；

所以 $a>0$，$h'(x)=\dfrac{a}{ax+b}-1=\dfrac{-a(x-\frac{a-b}{a})}{ax+b}$，而 $ax+b>0$，

当 $-\dfrac{b}{a}<x<\dfrac{a-b}{a}$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>\dfrac{a-b}{a}$ 时，$h'(x)<0$，

从而 $h(x)$ 在 $(-\dfrac{b}{a},\dfrac{a-b}{a})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{a-b}{a},+\infty)$ 单调递减，

故 $h(x)$ 在 $x=\dfrac{a-b}{a}$ 时有最大值 $h(\dfrac{a-b}{a})=\ln a-\dfrac{a-b}{a}$，

因此 $h(x)\le 0\Leftrightarrow \ln a-\dfrac{a-b}{a}\le 0\Leftrightarrow b\le a-a\ln a$，所以 $ab\le a^2-a^2\ln a=a^2-\dfrac{1}{2}a^2\ln a^2$，

设$t=a^2>0,\varphi(t)=t-\frac{1}{2}t\ln t$，则$\varphi'(t)=\frac{1}{2}(1-\ln t)$，

$0<t<e$时$\varphi'(t)>0$，$t>e$时$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，

所以$\varphi(t)=t-\frac{1}{2}t\ln t$在$t=e$时，$\varphi(t)$取最大值$\varphi(e)=e-\frac{1}{2}e\ln e=\frac{e}{2}$，当且仅当$a^2=e$，即$a=\sqrt{e},b=\frac{\sqrt{e}}{2}$时取“=”，

故ab的最大值为$\frac{e}{2}$.

10.已知函数$f(x)=ke^x-x-1$，$k\in\mathrm{R}$.

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）设关于x的不等式$f(x)\le xe^x-e^x+m$对任意$x\in[0,1]$恒成立时k的最大值为n，其中$m\in[1,2]$求$m+n$的取值范围.

【答案】(1）答案见解析；(2）$\left[2,\frac{4}{e}+2\right]$.

【分析】

（1）求导函数，判断导函数的符号，确定原函数单调区间;

（2）变量分离，构造新函数并求导，然后分类讨论得解.

【详解】

解：(1）$f'(x)=ke^x-1$

当$k\le 0$时，$f'\ x\ <0$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$时为减函数

当$k>0$时，令$f'\ x\ =0$，解得$x=\ln\frac{1}{k}$，

当$x\in\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$时$f'\ x\ <0$，$x\in\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'\ x\ >0$，

所以$f(x)$在$\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$为减函数，$\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$为增函数.

（2）因为x的不等式$f(x)\le xe^x-e^x+m$对$\forall x\in[0,1]$恒成立，

所以$k\le x-1+\frac{m+x+1}{e^x}$，对$\forall x\in[0,1]$恒成立，

令$g(x)=x-1+\frac{m+x+1}{e^x}$，

即$g'(x)=\frac{e^x-x-m}{e^x}$，

令$p(x)=e^x-x-m$，即$p'(x)=e^x-1\ge 0$，

所以$p(x)$在$x\in[0,1]$上递增；

①当$p(0)\ge 0$，即$m\le 1$时，

因为$m\in[1,2]$，所以$m=1$，

当 $x\in[0,1]$， $p(x)\ge 0$，即 $g'(x)\ge 0$，所以 $g(x)$在 $(0,1)$ 上递增，

所以$n=g(x)_{\min}=g(0)=1$，

故 $n+m=2$；

②当 $p(1)\le 0$ 即 $m\in[\mathrm{e}-1,2]$时，

因为 $x\in[0,1]$， $p(x)\le 0$，即 $g'(x)\le 0$，

所以 $g(x)$在 $x\in[0,1]$上递减，所以$n=g(x)_{\min}=g(1)=\frac{m+2}{\mathrm{e}}$，

故$n+m=\frac{m+2}{\mathrm{e}}+m\in\left[\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{4}{\mathrm{e}}+2\right]$；

③当 $p(0)p(1)<0$，即$m\in(1,\mathrm{e}-1)$时，

因为 $p(x)=e^x-x-m$在 $(0,1)$ 上递增，

所以存在唯一实数 $x_0\in(0,1)$，使得 $p(x_0)=0$，即$m=e^{x_0}-x_0$，

则当 $x\in(0,x_0)$时， $p(x)<0$，即 $g'(x)<0$；

当 $x\in(x_0,1)$时， $p(x)>0$，即 $g'(x)>0$，

故 $g(x)$在$(0,x_0)$上单减，$(x_0,1)$上单增，

所以$n=g(x)_{\min}=g(x_0)=x_0-1+\frac{m+x_0+1}{e^{x_0}}=x_0+\frac{1}{e^{x_0}}$，

所以$n+m=x_0+\frac{1}{e^{x_0}}+m=x_0+\frac{1}{e^{x_0}}+ex_0-x_0=e^{x_0}+\frac{1}{e^{x_0}}$，

设$u(x)=e^x+\frac{1}{e^x}\left(x\in(0,1)\right)$，则$u'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}>0$，

所以$u(x)$在 $(0,1)$ 上递增，所以$n+m\in\left(2,\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

综上所述，$n+m\in\left[2,\frac{4}{\mathrm{e}}+2\right]$.

不等式恒成立之 max，min 问题

14．已知e是自然对数的底数，函数 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$与$F(x)=f(x)-x+\frac{1}{x}$的定义域都是$(0,+\infty)$.

（1）求函数 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）求证：函数 $F(x)$只有一个零点 x_0，且$x_0\in(1,2)$；

（3）用 $\min\{m,n\}$表示 m， n的最小值，设 $x>0$， $g(x)=\min\{f(x),x-\frac{1}{x}\}$，若函数 $h(x)=g(x)-cx^2$在$(0,+\infty)$上为增函数，求实数 c 的取值范围．

【详解】（1）∵ $f'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$，

∴切线的斜率 $k=f'(1)=\frac{1}{e}$， $f(1)=\frac{1}{e}$.

∴函数 $f(x)$ 在点 $\left(1,\frac{1}{e}\right)$ 处的切线方程为 $y=\frac{1}{e}x$.

（2）证明：∵ $F(x)=f(x)-x+\frac{1}{x}$， $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$，

∴ $F(1)=\frac{1}{e}>0$， $F(2)=\frac{4}{e^2}-\frac{3}{2}<0$， $F(1)F(2)<0$，

∴ $F(x)$ 存在零点 x_0，且 $x_0\in(1,2)$.

∵ $F'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}-1-\frac{1}{x^2}$，

∴当 $x\geq 2$ 时， $F'(x)<0$；

当 $0<x<2$ 时，由 $x(2-x)\leq\left[\frac{x+(2-x)}{2}\right]^2=1$ 得

$F'(x)\leq\frac{1}{e^x}-1-\frac{1}{x^2}<1-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}<0$.

∴ $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

∴若 $x_1>0$， $x_2>0$， $x_1\neq x_2$，则 $F(x_1)\neq F(x_2)$.

∴函数 $F(x)$ 只有一个零点 x_0，且 $x_0\in(1,2)$.

（3）解： $g(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{x},0<x\leq x_0\\ \frac{x^2}{e^x}, \quad x>x_0\end{cases}$，故 $h(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{x}-cx^2,0<x\leq x_0\\ \frac{x^2}{e^x}-cx^2, \quad x>x_0\end{cases}$，

∵函数 $F(x)$ 只有一个零点 x_0，

∴ $F(x_0)=0$，即 $x_0-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$.

∴ $x_0-\frac{1}{x_0}-cx_0^2=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}-cx_0^2$.

∴ $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数 $\Leftrightarrow h'(x)\geq 0$ 在 $(0,x_0)$，$(x_0,+\infty)$ 恒成立.

当 $x>x_0$ 时 $h'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}-2cx\geq 0$，即 $c\leq\frac{2-x}{2e^x}$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上恒成立.

设 $u(x)=\frac{2-x}{2e^x}(x>x_0)$，只需 $c\leq[u(x)]_{\min}$，

$u'(x)=\frac{x-3}{2e^x}$， $u(x)$ 在 $(x_0,3)$ 单调减，在 $(3,+\infty)$ 单调增.

$u(x)$ 的最小值 $[u(x)]_{\min}=u(3)=-\frac{1}{2e^3}$， $c\leq-\frac{1}{2e^3}$.

当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-2cx$，由上述得 $c<0$，则 $h'(x)>0$ 在 $(0,x_0)$ 恒成立.

综上述，实数 c 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{2e^3}\right]$.

14．已知函数 $f(x)=x\ln x$.

（1）若函数 $g(x)=f'(x)+ax^2-(a+2)x(a>0)$，试研究函数 $g(x)$ 的极值情况；

（2）记函数 $F(x)=f(x)-\frac{x}{e^x}$ 在区间 $(1,2)$ 内的零点为 x_0，记 $m(x)=\min\left\{f(x),\frac{x}{e^x}\right\}$，若 $m(x)=n(n\in R)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有两个不等实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1+x_2>2x_0$.

【详解】

解：（1）由题意，得 $f'(x)=\ln x+1$，

故 $g(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x+1$，

故 $g'(x)=2ax-(a+2)+\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(ax-1)}{x}$，

$x>0,a>0$.

令 $g'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{a}$

①当 $0<a<2$ 时，$\frac{1}{a}>\frac{1}{2}$，

$g'(x)>0\Leftarrow 0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>\frac{1}{a}$；

$g'(x)<0\Leftarrow \frac{1}{2}<x<\frac{1}{a}$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减；

所以 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极大值 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{4}-\ln 2$，

在 $x=\frac{1}{a}$ 处取极小值 $g\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}-\ln a$.

②当 $a=2$ 时，$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$，$g'(x)\geq 0$ 恒成立，所以不存在极值；

③当 $a>2$ 时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$，$g'(x)>0\Leftarrow 0<x<\frac{1}{a}$ 或 $x>\frac{1}{2}$；

$g'(x)<0\Leftarrow \frac{1}{a}<x<\frac{1}{2}$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减；

所以 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取极大值 $g\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}-\ln a$，

在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极小值 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{4}-\ln 2$.

综上，当 $0<a<2$ 时，$g(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极大值 $-\frac{a}{4}-\ln 2$，在 $x=\frac{1}{a}$ 处取极小值 $-\frac{1}{a}-\ln a$；当 $a=2$ 时，不存在极值；$a>2$ 时，$g(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取极大值 $-\frac{1}{a}-\ln a$，在 $x=\frac{1}{2}$ 处取极小值 $-\frac{a}{4}-\ln 2$.

（2）$F(x)=x\ln x-\frac{x}{e^x}$，定义域为 $x\in(0,+\infty)$，

$F'(x)=1+\ln x+\frac{x-1}{e^x}$，而 $x\in(1,2)$，

故 $F'(x)>0$，即 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内单调递增

又 $F(1)=-\frac{1}{e}<0$，$F(2)=2\ln 2-\frac{2}{e^2}>0$，

且 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内的图象连续不断，

故根据零点存在性定理，有 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且仅有唯一零点.

所以存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $F(x_0)=f(x_0)-\frac{x_0}{e^{x_0}}=0$，

且当 $1<x<x_0$ 时，$f(x)<\frac{x}{e^x}$；

当 $x>x_0$ 时，$f(x)>\frac{x}{e^x}$，

所以 $m(x)=\begin{cases} xlnx,1<x\le x_0 \\ \frac{x}{e^x},x>x_0 \end{cases}$

当 $1<x<x_0$ 时，$m(x)=x\ln x$，

由 $m'(x)=1+\ln x>0$ 得 $m(x)$ 单调递增；

当 $x>x_0$ 时，$m(x)=\frac{x}{e^x}$，

由 $m'(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$ 得 $m(x)$ 单调递减；

若 $m(x)=n$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有两个不等实根 x_1,x_2（$x_1<x_2$）

则 $x_1\in(1,x_0),x_2\in(x_0,+\infty)$.

要证 $x_1+x_2>2x_0$，即证 $x_2>2x_0-x_1$

又 $2x_0-x_1>x_0$，而 $m(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 内单调递减，

故可证 $m(x_2)<m(2x_0-x_1)$，

又由 $m(x_1)=m(x_2)$，

即证 $m(x_1)<m(2x_0-x_1)$，

即 $x_1\ln x_1 < \dfrac{2x_0 - x_1}{e^{2x_0 - x_1}}$

记 $h(x) = x\ln x - \dfrac{2x_0 - x}{e^{2x_0 - x}}, 1 < x < x_0$，其中 $h(x_0) = 0$

记 $\phi(t) = \dfrac{t}{e^t}$，则 $\phi'(t) = \dfrac{1-t}{e^t}$，

当 $t \in (0,1)$ 时，$\phi'(t) > 0$；

当 $t \in (1,+\infty)$ 时，$\phi'(t) < 0$，

故 $\phi(t)_{\max} = \dfrac{1}{e}$

而 $\phi(t) > 0$，故 $0 < \phi(t) < \dfrac{1}{e}$，

而 $2x_0 - x > 1$，

所以 $-\dfrac{1}{e} < -\dfrac{2x_0 - x}{e^{2x_0 - x}} < 0$，

因此 $h'(x) = 1 + \ln x + \dfrac{1}{e^{2x_0 - x}} - \dfrac{2x_0 - x}{e^{2x_0 - x}} > 1 - \dfrac{1}{e} > 0$，

即 $h(x)$ 单调递增，故当 $1 < x < x_0$ 时，$h(x) < h(x_0) = 0$，

即 $x_1\ln x_1 < \dfrac{2x_0 - x_1}{e^{2x_0 - x_1}}$，故 $x_1 + x_2 > 2x_0$，得证.

16. 已知函数 $f(x) = (x-2)e^{x-1} - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$，$g(x) = ax - \sin x - \ln(x+1)$，其中 $a \in \mathbf{R}$.

（1）证明：当 $x \geqslant 1$ 时，$f(x) \geqslant 0$；当 $x < 1$ 时，$f(x) < 0$；

（2）用 $\max\{m，n\}$ 表示 m，n 中的最大值，记 $F(x) = \max\{f(x)，g(x)\}$.是否存在实数 a，对任意的 $x \in R$，$F(x) \geqslant 0$ 恒成立.若存在，求出 a；若不存在，请说明理由.

【解析】

（1）$f'(x) = (x-1)e^{x-1} - x + 1 = (x-1)(e^{x-1} - 1)$，$x \in R$，

当 $x > 1$ 时，$x - 1 > 0$，$e^{x-1} - 1 > 0$，则 $f'(x) > 0$；

当 $x < 1$ 时，$x - 1 < 0$，$e^{x-1} - 1 < 0$，则 $f'(x) > 0$，

当 $x = 1$ 时，$f'(1) = 0$.

所以当 $x \in R$ 时，$f'(x) \geq 0$，$f(x)$ 在 R 上是增函数，

又 $f(1) = 0$，

所以当 $x \geq 1$ 时，$f(x) \geq f(1) = 0$；

当 $x < 1$ 时，$f(x) < f(1) = 0$.

（2）函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

由（1）得，当 $x\geq 1$ 时，$f(x)\geq 0$，又 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}\geq f(x)$，

所以当 $x\geq 1$ 时，$F(x)\geq 0$ 恒成立．

由于当 $-1<x<1$ 时，$f(x)<0$ 恒成立，

故 $F(x)\geq 0$ 等价于：当 $-1<x<1$ 时，$g(x)\geq 0$ 恒成立．

$g'(x)=a-\cos x-\dfrac{1}{x+1}$，$g''(x)=\sin x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$．

当 $-1<x<0$ 时，$-1<\sin x<0$，$\dfrac{1}{(x+1)^2}>1$，故 $g''(x)>0$；

当 $0\leq x<1$ 时，$0\leq \sin x<1$，$\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$，故 $g''(x)>0$．

从而当 $-1<x<1$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增．

①若 $g'(1)\leq 0$，即 $a\leq \cos 1+\dfrac{1}{2}$，则当 $x\in(-1,1)$ 时，$g'(x)<g'(1)\leq 0$，$g(x)$ 单调递减，

故当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，不符合题意；

②若 $g'(1)>0$，即 $a>\cos 1+\dfrac{1}{2}$，取 $b\in\left(-1,-1+\dfrac{1}{a+1}\right)$，

则 $-1<-1+\dfrac{1}{a+1}<0$，且 $g'(b)=a-\cos b-\dfrac{1}{b+1}\leq a+1-\dfrac{1}{b+1}<0$，

故存在唯一 $x_0\in(-1,1)$，满足 $g'(x_0)=0$，当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增．

若 $x_0<0$，则当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g(x)$ 单调递增，$g(x)<g(0)$，不符合题意；

若 $x_0=0$，则 $g(x)\geq g(0)=0$，符合题意，此时由 $g'(x_0)=0$，得 $a=2$；

若 $x_0>0$，则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)$ 单调递减，$g(x)<g(0)$，不符合题意．

综上可知：存在唯一实数 $a=2$ 满足题意．

17．记 $\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最大值，如 $\max\{3,\sqrt{10}\}=\sqrt{10}$．已知函数 $f(x)=\max\{x^2-1,2\ln x\}$，

$g(x)=\max\left\{x+\ln x,-x^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)x+2a^2+4a\right\}$.

（1）设 $h(x)=f(x)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$，求函数 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上的零点个数；

（2）试探讨是否存在实数 $a\in(-2,+\infty)$，使得 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，说明理由.

【详解】

（1）设 $F(x)=x^2-1-2\ln x$，则 $F'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $x>1$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增；当 $0<x<1$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；

所 $F(x)_{\min}=F(1)=0$，所以 $F(x)\geq 0$，即 $x^2-1\geq 2\ln x$，所以 $f(x)=x^2-1$.

设 $G(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$，结合 $f(x)$ 与 $G(x)$ 在 $(0,1]$ 上的图象可知，

这两个函数的图象在 $(0,1]$ 内有两个交点，

即 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上的零点个数为 2（或由方程 $f(x)=G(x)$ 在 $(0,1]$ 内有两根可得）.

（2）假设存在实数 $a\in(-2,+\infty)$，使得 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，

则 $\begin{cases}x+\ln x<\frac{3}{2}x+4a\\-x^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)x+2a^2+4a<\frac{3}{2}x+4a\end{cases}$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，

即 $\begin{cases}\ln x-\frac{1}{2}x<4a,\\(x+2)(x-a^2)>0,\end{cases}$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，

①设 $H(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$，则 $H'(x)=\frac{2-x}{2x}$，

当 $0<x<2$ 时，$H'(x)>0$，$H(x)$ 单调递增；当 $x>2$ 时，$H'(x)<0$，$H(x)$ 单调递减.

所以 $H(x)_{\max}=H(2)=\ln 2-1$，

当 $0<a+2<2$ 即 $-2<a<0$ 时，$4a>\ln 2-1$，所以 $a>\frac{\ln 2-1}{4}$，因为 $a<0$，所以 $a\in\left(\frac{\ln 2-1}{4},0\right)$，

故当 $a\in\left(\frac{\ln 2-1}{4},0\right)$ 时，$\ln x-\frac{1}{2}x<4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立；

当 $a+2\geq 2$，即 $a\geq 0$ 时，$H(x)$ 在 $(a+2,+\infty)$ 上递减，

所以 $H(x)<H(a+2)=\ln(a+2)-\frac{1}{2}a-1$.

因为 $\left[\ln(a+2)-\frac{1}{2}a-1\right]'=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{2}\leq 0$，所以 $H(a+2)\leq H(2)=\ln 2-1<0$，

故当 $a\geq 0$ 时，$\ln x-\frac{1}{2}x<4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立.

②若 $(x+2)(x-a^2)>0$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，

则 $a+2\geq a^2$，

所以 $a\in[-1,2]$.

由①②得，$a\in\left(\frac{\ln 2-1}{4},2\right]$.

故存在实数 $a\in(-2,+\infty)$，使得 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立，且 a 的取值范围为 $\left(\frac{\ln 2-1}{4},2\right]$.

2．已知函数 $f(x)=(x-2)e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$，$g(x)=ax-\sin x-\ln(x+1)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）证明：当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 0$；当 $x<1$ 时，$f(x)<0$；

（2）用 $\max\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最大值，记 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$.是否存在实数 a，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$F(x)\geqslant 0$ 恒成立.若存在，求出 a；若不存在，请说明理由.

【详解】

（1）$f'(x)=(x-1)e^{x-1}-x+1=(x-1)(e^{x-1}-1)$，$x\in\mathbf{R}$，

当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$e^{x-1}-1>0$，则 $f'(x)>0$；
当 $x<1$ 时，$x-1<0$，$e^{x-1}-1<0$，则 $f'(x)>0$，
当 $x=1$ 时，$f'(1)=0$.
所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 在 R 上是增函数，
又 $f(1)=0$，
所以当 $x\geq 1$ 时，$f(x)\geq f(1)=0$；
当 $x<1$ 时，$f(x)<f(1)=0$.
（2）函数 $F(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，
由（1）得，当 $x\geq 1$ 时，$f(x)\geq 0$，又 $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}\geqslant f(x)$，
所以当 $x\geq 1$ 时，$F(x)\geq 0$ 恒成立.
由于当 $-1<x<1$ 时，$f(x)<0$ 恒成立，
故 $F(x)\geq 0$ 等价于：当 $-1<x<1$ 时，$g(x)\geq 0$ 恒成立.

$g'(x)=a-\cos x-\frac{1}{x+1}$，$g''(x)=\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$.

当 $-1<x<0$ 时，$-1<\sin x<0$，$\frac{1}{(x+1)^2}>1$，故 $g''(x)>0$；

当 $0\leq x<1$ 时，$0\leqslant\sin x<1$，$\frac{1}{(x+1)^2}>0$，故 $g''(x)>0$.

从而当 $-1<x<1$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增.

①若 $g'(1)\le 0$，即 $a\leqslant \cos1+\dfrac{1}{2}$，则当 $x\in(-1,1)$ 时，$g'(x)<g'(1)\leqslant 0$，$g(x)$ 单调递减，

故当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，不符合题意；

②若 $g'(1)>0$，即 $a>\cos1+\dfrac{1}{2}$，取 $b\in\left(-1,-1+\dfrac{1}{a+1}\right)$，

则 $-1<-1+\dfrac{1}{a+1}<0$，且 $g'(b)=a-\cos b-\dfrac{1}{b+1}\leqslant a+1-\dfrac{1}{b+1}<0$，

故存在唯一 $x_0\in(-1,1)$，满足 $g'(x_0)=0$，当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

若 $x_0<0$，则当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g(x)$ 单调递增，$g(x)<g(0)$，不符合题意；

若 $x_0=0$，则 $g(x)\ge g(0)=0$，符合题意，此时由 $g'(x_0)=0$，得 $a=2$；

若 $x_0>0$，则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)$ 单调递减，$g(x)<g(0)$，不符合题意.

综上可知：存在唯一实数 $a=2$ 满足题意.

同构法解零点问题与恒成立问题解答

18 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在零点，求实数 a 的取值范围

【解答】解：方法一：由 $f(x)=\dfrac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$ 可得 $f'(x)=\dfrac{x-1}{e^{x-1}}(\dfrac{e^{x-1}}{x}-a)$，

设 $y=\dfrac{e^{x-1}}{x}-a$，$x>0$，$a>0$，则 $y'=\dfrac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}$，令 $y'=0\Rightarrow x=1$，$\therefore y$ 在 $x\in(0,1)$ 单调递减，在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $y_{min}=y$（1）$=1-a$.

①当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)_{min}=f$（1）$=a-1-lna>0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内无零点；

②当 $a=1$ 时，f（1）$=a-1-lna=0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点；

③当 $a>1$ 时，令 $f'(x)=\dfrac{x-1}{e^{x-1}}(\dfrac{e^{x-1}}{x}-a)=0$，解得 $x=x_1$ 或 1 或 x_2，且 $0<x_1<1<x_2$，

此时 $f(x)$ 在 $x\in(0,x_1)$ 单减，$x\in(x_1,1)$ 单增，$x\in(1,x_2)$ 单减，$x\in(x_2,+\infty)$ 单增，

当 $x=x_1$ 或 x_2 时，$f(x)_{极小值}=0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有两个零点；

综合①②③知 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点 $\Rightarrow a\geqslant 1$.

方法二：由题意可得

$e^{-x+1+ln(ax)}=ln(ax)-x+2$，即 $e^{-x+1+ln(ax)}-[-x+1+ln(ax)]-1=0$，

因为 $e^x\geqslant x+1$ 当 $x=0$ 时等号成立，

所以 $-x+1+ln(ax)=0$，即 $ax=e^{x-1}$，

$a=\dfrac{e^{x-1}}{x}$，令 $g(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1}{e}\times\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，

易知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，在 $(1,+\infty)$ 上单增，所以 $g(x)\geqslant g$（1）$=1$，

又 x 趋近于 0 和正无穷时，$g(x)$ 趋近于正无穷，
所以 $a\geqslant 1$.

19．已知函数 $f(x)=ae^{x}-ln(x+2)+lna-2$，

（1）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，求 a 的值及函数的单调区间.
（2）请在下列两问中选择一问作答，答题前请标好选择．如果多写按第一个计分.
①若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；
②若 $f(x)$ 仅有两个零点，求 a 的取值范围.

【解答】解：（1）函数 $f(x)=ae^{x}-ln(x+2)+lna-2$，

则 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,+\infty)$，

且 $f'(x)=ae^{x}-\dfrac{1}{x+2}$，

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，

所以 $f'(0)=0$，即 $a-\dfrac{1}{2}=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$；

此时 $f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}-\dfrac{1}{x+2}$，

所以 $f'(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

则当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-2,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

（2）若选①：

因为 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $ae^{x}-ln(x+2)+lna-2\geqslant 0$ 恒成立，

整理可得 $e^{x+lna}+x+lna\geqslant ln(x+2)+x+2$ 恒成立，

即 $e^{x+lna}+x+lna\geqslant ln(x+2)+e^{ln(x+2)}$ 恒成立，

令 $h(x)=e^{x}+x$，

则 $h(x+lna)\geqslant h(ln(x+2))$ 恒成立，

因为 $h'(x)=e^{x}+1>0$ 恒成立，

则 $h(x)$ 为单调递增函数，

所以 $x+lna \geqslant ln(x+2)$ 恒成立，即 $lna \geqslant ln(x+2)-x$ 恒成立，

令 $\varphi(x)=ln(x+2)-x$， $x<-2$，

则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+2}-1=-\frac{x+1}{x+2}$，

当 $-2<x<-1$ 时， $\varphi'(x)>0$，则 $\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x>-1$ 时， $\varphi'(x)<0$，则 $\varphi(x)$ 单调递减，

所以 $\varphi(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，即最大值 $\varphi(-1)=1$，

故 $lna \geqslant -1$，解得 $a \geqslant e$，

所以 a 的取值范围为 $[e, +\infty)$；

若选②：

因为 $f(x)$ 仅有两个零点，即 $ae^{x}-ln(x+2)+lna-2=0$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有两个根，

整理可得 $e^{x+lna}+x+lna=ln(x+2)+x+2$，

即 $e^{x+lna}+x+lna=ln(x+2)+e^{ln(x+2)}$，

令 $h(x)=e^{x}+x$，

则 $h(x+lna)=h(ln(x+2))$，

因为 $h'(x)=e^{x}+1>0$ 恒成立，

则 $h(x)$ 为单调递增函数，

所以 $x+lna=ln(x+2)$，即 $lna=ln(x+2)-x$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有两个根，

令 $\varphi(x)=ln(x+2)-x$， $x<-2$，

则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+2}-1=-\frac{x+1}{x+2}$，

当 $-2<x<-1$ 时， $\varphi'(x)>0$，则 $\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x>-1$ 时， $\varphi'(x)<0$，则 $\varphi(x)$ 单调递减，

所以 $\varphi(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，即最大值 $\varphi(-1)=1$，

要想 $lna=ln(x+2)-x$ 在 $(-2,+\infty)$ 上有两个根，

只需 $lna<1$，解得 $0<a<e$，

所以 a 的取值范围为 $(0,e)$.

20.已知 $f(x)=xlnx+\frac{a}{2}x^2+1$.

（1）若函数 $g(x)=f(x)+x\cos x-\sin x-xlnx-1$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上有 1 个零点，求实数 a 的取值范围.

（2）若关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1$ 有两个不同的实数解，求 a 的取值范围.

【解答】解：（1）$g(x)=\frac{a}{2}x^2+x\cos x-\sin x$，$x\in(0$，$\frac{\pi}{2}]$，

所以 $g'(x)=x(a-\sin x)$，

当 $a\geqslant 1$ 时，$a?\sin x\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上无零点；

当 $0<a<1$ 时，$\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $\sin x_0=a$，

所以 $g(x)$ 在 $(x_0$，$\frac{\pi}{2}]$ 单调递减，在 $(0,x_0)$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$，$g(\frac{\pi}{2})=\frac{a\pi^2}{8}-1$，

所以若 $\frac{a\pi^2}{8}-1>0$，即 $a>\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上无零点，

若 $\frac{a\pi^2}{8}?1\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上有一个零点，

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)=a-x\sin x<0$，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上无零点，

综上当 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上有一个零点；

（2）由 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1(x>0)$，

即 $xe^{x-a}=xlnx+ax$，即 $e^{x-a}=lnx+a$，

则有 $e^{x-a}+(x-a)=x+lnx$，

令 $h(x)=x+lnx$，$x>0$，则 $h(e^{x-a})=e^{x-a}+(x-a)$，

$h'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

所以 $e^{x-a}=x$，则有 $x-a=lnx$，即 $a=x-lnx$，$x>0$，

因为关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1$ 有两个不同的实数解，

则方程 $a=x-lnx$，$x>0$ 有两个不同的实数解，

令 $\varphi(x)=x-lnx$，则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，

所以函数$\varphi(x)=x-lnx$在$(0,1)$上递减，在$(1,+\infty)$上递增，
所以$\varphi(x)_{min}=\varphi$（1）$=1$，
当$x\to 0$时，$\varphi(x)\to+\infty$，当$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to+\infty$，
所以$\{a\mid a>1\}$.

21．已知函数$f(x)=ae^{x}-ln(x+1)+lna-1$.

（1）若$a=1$，求函数$f(x)$的极值；
（2）若函数$f(x)$有且仅有两个零点，求a的取值范围.

【解答】解析：（1）当$a=1$时，$f(x)=e^{x}-ln(x+1)-1$，$f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+1}$，$x>-1$，
显然$f'(x)$在$(-1,+\infty)$单调递增，且$f'(0)=0$，
$\therefore$当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x>0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.
$\therefore f(x)$在$x=0$处取得极小值$f(0)=0$，无极大值.

（2）函数$f(x)$有两个零点，即$f(x)=0$有两个解，即$ae^{x}+ln(ae^{x})=ln(x+1)+(x+1)$有两个解，

设$h(t)=t+lnt$，则$h'(t)=1+\dfrac{1}{t}>0$，$h(t)$单调递增，

$\therefore ae^{x}=x+1(x>-1)$有两个解，即$a=\dfrac{x+1}{e^{x}}(x>-1)$有两个解.

令$s(x)=\dfrac{x+1}{e^{x}}(x\geqslant-1)$，则$s'(x)=-\dfrac{x}{e^{x}}$，
当$x\in(-1,0)$时，$s'(x)>0$，$s(x)$单调递增；当$x\in(0,+\infty)$时，$s'(x)<0$，$s(x)$单调递减.
$\because s(-1)=0$，$s(0)=1$，当$x>0$时$s(x)>0$，
$\therefore 0<a<1$.

5．已知函数$f(x)=e^{2x+a}-\dfrac{1}{2}lnx+\dfrac{a}{2}$.

（1）若函数$y=f(x)$在$(0,\dfrac{1}{2})$上单调递减，求a的取值范围；

（2）若函数$y=f(x)$在定义域内没有零点，求a的取值范围.

【解答】解：（1）因为函数$y=f(x)$在$(0,\dfrac{1}{2})$上单调递减，所以$f'(x)\leqslant 0$在$(0,\dfrac{1}{2})$上恒成立，

由$f(x)=e^{2x+a}-\dfrac{1}{2}lnx+\dfrac{a}{2}$，$x>0$，

可得$f'(x)=2e^{2x+a}-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{4xe^{2x+a}-1}{2x}$，

由于$x>0$，则$4xe^{2x+a}-1\leqslant 0$在$(0,\dfrac{1}{2})$上恒成立，

令$F(x)=4xe^{2x+a}-1$，$F'(x)=(8x+4)e^{2x+a}>0$，

故$F(x)$在$(0,\dfrac{1}{2})$上单调递增，

所以只需$F(\dfrac{1}{2})\leqslant 0$即可，$F(\dfrac{1}{2})=2e^{1+a}-1\leqslant 0$，

所以$a\leqslant-1-ln2$，
所以a的取值范围是$(-\infty$，$-1-ln2]$.

（2）$f(x)=e^{2x+a}-\dfrac{1}{2}lnx+\dfrac{a}{2}$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=2e^{2x+a}-\dfrac{1}{2x}$，令 $g(x)=2e^{2x+a}$，$h(x)=\dfrac{1}{2x}$，

当 $x>0$ 时，$g(x)$ 单调递增，$g(x)\in(2e^{a}$，$+\infty)$，$h(x)\in(0$，$+\infty)$，

故存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $2e^{2x_0+a}-\dfrac{1}{2x_0}=0$，

即 $4e^{2x_0+a}=\dfrac{1}{x_0}$ ①，两边取对数得 $ln4+2x_0+a=-lnx_0$ ②，

而 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0$，$+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)_{min}=f(x_0)>0$，故 $e^{2x_0+a}-\dfrac{1}{2}lnx_0+\dfrac{a}{2}>0$，

将①②代入上式得 $\dfrac{1}{4x_0}+\dfrac{ln4+2x_0+a}{2}+\dfrac{a}{2}>0$，化简得 $a>-\dfrac{1}{4x_0}-x_0-ln2$，

因为 $\dfrac{1}{4x_0}+x_0\geqslant1$，当且仅当 $\dfrac{1}{4x_0}=x_0$，即 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 时取等号，

所以 $-\dfrac{1}{4x_0}-x_0-ln2\leqslant-1-ln2$，

故 $a>-1-ln2$，

即 a 的取值范围是 $(-1-ln2,+\infty)$．

22 已知函数 $f(x)=e^{x-1}-mx^2(m\in R)$．

（1）选择下列两个条件之一：① $m=\dfrac{1}{2}$；② $m=1$；判断 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 是否存在极小值点，并说明理由；

（2）已知 $m>0$，设函数 $g(x)=f(x)+mxln(mx)$．若 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点，求实数 m 的取值范围．

【解答】解：（1）若选①：$m=\dfrac{1}{2}$，则函数 $f(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{2}x^2$，

所以 $f'(x)=e^{x-1}-x$，$f''(x)=e^{x-1}-1$，

因为 $f''(x)$ 单调递增，且 f''（1）$=0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f'(x)\geqslant f'$（1）$=0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以不存在极小值点；

若选②：$m=1$，则 $f(x)=e^{x-1}-x^2$，

所以 $f'(x)=e^{x-1}-2x$，$f''(x)=e^{x-1}-2$，

由 $f''(x)$ 单调递增，且 $f''(1+ln2)=0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,1+ln2)$ 上单调递减，在 $(1+ln2,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f'(x)\geqslant f'(1+ln2)=-2ln2<0$，

又 f'（4）$=e^3-8>0$，

所以存在极小值点 $x_0\in(1+ln2,4)$．

（2）令 $g(x)=0$，则 $e^{x-1}-mx^2+mxln(mx)=0$，

又 $mx>0$，

所以$\frac{e^{x-1}}{mx}-x+ln(mx)=\frac{e^{x-1}}{e^{ln(mx)}}-x+ln(mx)=e^{x-ln(mx)-1}-[x-ln(mx)]=0$，
令$t=x-ln(mx)$，
故$e^{t-1}-t=0$有解，

设$h(t)=e^{t-1}-t$，

则$h'(t)=e^{t-1}-1$，令$h'(t)=0$，解得$t=1$，

所以$h(t)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，
又h（1）$=0$，

所以$h(t)=e^{t-1}-t$有唯一的零点$t=1$，

若$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在零点，
即$1=x-ln(mx)$在$(0,+\infty)$上有解，
整理可得$1+lnm=x-lnx$，
令$l(x)=x-lnx$，

则$l'(x)=1-\frac{1}{x}$，令$l'(x)=0$，解得$x=1$，
所以$l(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，
故$l(x)\geqslant l$（1）$=1$，
所以$1+lnm\geqslant 1$，
解得$m\geqslant 1$，
所以m的取值范围为$[1，+\infty)$．

23.若对任意$x>0$，恒有$a\left(\mathrm{e}^{ax}+1\right)\geqslant 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x$，求实数$a$的最小值

解析 $a\left(\mathrm{e}^{ax}+1\right)\geqslant 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x \Leftrightarrow ax\left(\mathrm{e}^{ax}+1\right)\geqslant\left(x^{2}+1\right)\ln x^{2}\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{ax}+1\right)\ln\mathrm{e}^{ax}\geqslant\left(x^{2}+1\right)\ln x^{2}$，

令$f(x)=(x+1)\ln x$，则$f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$，$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}}=\frac{x-1}{x^{2}}$，

易知$f'(x)$在$\left(0,1\right)$上单调递减，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

所以$f'(x)\geqslant f'(1)=2>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增．

则$\left(e^{ax}+1\right)\ln e^{ax}\geqslant\left(x^{2}+1\right)\ln x^{2}\Leftrightarrow f\left(\mathrm{e}^{ax}\right)\geqslant f\left(x^{2}\right)$

$\Leftrightarrow\mathrm{e}^{ax}\geqslant x^{2}\Leftrightarrow ax\geqslant 2\ln x\Leftrightarrow a\geqslant\frac{2\ln x}{x}$，

令$g\left(x\right)=\frac{2\ln x}{x}$，则$g'\left(x\right)=\frac{2\left(1-\ln x\right)}{x^{2}}$

当$x\in\left(0,\mathrm{e}\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，当$x\in\left(\mathrm{e},+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)<0$

所以函数$g\left(x\right)$在$\left(0,\mathrm{e}\right)$上单调递增，在$\left(\mathrm{e},+\infty\right)$上单调递减

所以 $g\left(x\right)_{\max}=g\left(\mathrm{e}\right)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，所以 $a\geqslant\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)_{\max}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，

所以实数 a 的最小值为 $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

24.已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-a\ln(ax-a)+a(a>0)$，若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

解析 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-a\ln(ax-a)+a>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{x}>\ln a(x-1)-1\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-\ln a}-\ln a>\ln(x-1)-1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-\ln a}+x-\ln a>\mathrm{e}^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^{x}+x$，则 $g'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+1>0$，所以函数 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

则原命题又等价于
$g(x-\ln a)>g(\ln(x-1))\Leftrightarrow x-\ln a>\ln(x-1)\Leftrightarrow \ln a<x-\ln(x-1)$.

由于 $x-\ln(x-1)\geqslant x-(x-2)=2$，所以 $\ln a<2$，即得 $0<a<\mathrm{e}^{2}$.

25.对任意 $x>0$，不等式 $2a\mathrm{e}^{2x}-\ln x+\ln a\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的最小值
解析 $2a\mathrm{e}^{2x}-\ln x+\ln a\geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2a\mathrm{e}^{2x}\geqslant\ln\dfrac{x}{a}\Leftrightarrow 2x\mathrm{e}^{2x}\geqslant\dfrac{x}{a}\ln\dfrac{x}{a}(x>0)$

$\Leftrightarrow 2x+\ln 2x\geqslant\ln\dfrac{x}{a}+\ln\left(\ln\dfrac{x}{a}\right)(x>a)$.

设 $f\left(x\right)=x+\ln x$，则 $f'\left(x\right)=1+\dfrac{1}{x}>0$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增

所以由 $f(2x)\geqslant f\left(\ln\dfrac{x}{a}\right)$，得 $2x\geqslant\ln\dfrac{x}{a}$，即 $a\geqslant\dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}}$ 恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-2x}{\mathrm{e}^{2x}}$，

当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'\left(x\right)>0$，当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$

所以函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减

所以 $g\left(x\right)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，所以实数 a 的最小值为 $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

易得 $g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，所以实数 a 的最小值为 $\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

26.已知函数$f(x)=ae^x-\ln x-1$证明:当$a\geq\frac{1}{e}$时，$f\left(x\right)\geq 0$.

证明:当$a\geq\frac{1}{e}$时，$f(x)\geq\frac{e^x}{e}-\ln x-1$，所以只需证明$\frac{e^x}{e}-\ln x-1\geq 0$.

由于$\frac{e^x}{e}-\ln x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq e\ln ex\Leftrightarrow xe^x\geq ex\ln ex\Leftrightarrow xe^x\geq e^{\ln ex}\ln ex$

令$g(x)=xe^x$，由$g'(x)=e^x(x+1)>0$)知$g\left(x\right)$为增函数，又易证$x\geq lnex=\ lnx+1$，

所以$g(x)\geq g(\ln ex)$，即$xe^x\geq e^{\ln ex}\ln ex$成立.故当$a\geq\frac{1}{e}$时，$f\left(x\right)\geq 0$.

27．已知函数$f\left(x\right)=x\left(\mathrm{e}^{2x}-a\right)$，若$f\left(x\right)\geq 1+x+\ln x$，求$a$的取值范围.

解析：$f\left(x\right)\geq 1+x+\ln x\Leftrightarrow x\left(\mathrm{e}^{2x}-a\right)\geq 1+x+\ln x$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+\ln x}-1-x-\ln x\geq ax$

$\Leftrightarrow a\leq\frac{\mathrm{e}^{2x+\ln x}-1-x-\ln x}{x}$.

由于$\frac{\mathrm{e}^{2x+\ln x}-1-\ln x}{x}\geq\frac{2x+\ln x+1-1-x-\ln x}{x}=1$，

当且仅当$2x+\ln x=0$等号成立，

所以$a\leq 1$，即实数a的取值范围是$\left(-\infty,1\right]$.