湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数零点（2）

隐零点

导函数零点按能否求精确解可以分为两类：一类是数值上能精确求解的，称之为“显零点”；另一类是能够判断其存在但无法直接求值的，称之为“隐零点”. 对于隐零点问题，由于涉及灵活的代数变形、整体代换、构造函数、不等式应用等技巧，对学生综合能力的要求较高，成为考查的热点. 。

类型一　导函数隐零点中的(整体)代换

1.设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的零点的个数；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

2.已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}a(x+1)^2$，$a\in\mathbf{R}$ 恰好有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$.

(1)求证：存在实数 $m\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $0<a<m$；

(2)求证：$-\frac{5}{4}<f(x_1)<-\frac{1}{e}$.

类型二　导函数零点的设而不求技巧

3. 已知函数 $f(x)=e^{x+a}-\ln x$(其中 e＝2.718 28…是自然对数的底数).求证：当 $a>1-\frac{1}{e}$时，$f(x)>e+1$.

4. 已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$.

证明：(1)$f(x)$存在唯一的极值点；

(2)$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

5.已知函数 $f(x)=ax+x\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$在区间$[e，+\infty)$上为增函数，求 a 的取值范围；

(2)当 $a=1$ 且 $k\in\mathbf{Z}$ 时，不等式 $k(x-1)<f(x)$在 $x\in(1，+\infty)$上恒成立，求 k 的最大值.

6.记 $f'(x)$，$g'(x)$分别为函数 $f(x)$，$g(x)$的导函数.若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，满足 $f(x_0)=g(x_0)$且 $f'(x_0)=g'(x_0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$与 $g(x)$的一个“S 点”.

(1)证明：函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x^2+2x-2$ 不存在“S 点”；

(2)若函数 $f(x)=ax^2-1$ 与 $g(x)=\ln x$ 存在“S 点”，求实数 a 的值；

(3)已知函数 $f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\dfrac{be^x}{x}$.对任意 $a>0$，判断是否存在 $b>0$，使函数 $f(x)$与 $g(x)$在区间$(0，+\infty)$内存在“S 点”，并说明理由.

7.已知函数 $f(x)=x-\ln x-\dfrac{e^x}{x}$.

(1)求 $f(x)$的最大值；

(2)若 $f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^x-bx\geqslant 1$ 恒成立，求实数 b 的取值范围.

8.已知函数 $f(x)=xe^x-a(x+\ln x)$.

(1)讨论 $f(x)$极值点的个数；

(2)若 x_0 是 $f(x)$的一个极小值点，且 $f(x_0)>0$，证明：$f(x_0)>2(x_0-x_0^3)$.

最值函数的零点问题

1．已知函数 $f(x)=lnx-x^2+ax$，$g(x)=e^x-e$，其中 $a>0$．

（Ⅰ）证明：$lnx\leqslant x-1$；

（Ⅱ）若 $a=2$，证明 $f(x)<\dfrac{5}{4}$；

（Ⅲ）用 $max\{m，n\}$ 表示 m 和 n 中的较大值，设函数 $h(x)=max\{f(x)，g(x)\}$，讨论函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点的个数．

2．已知函数 $f(x)=(x-4)e^{x-3}-\dfrac{1}{2}x^2+3x-\dfrac{7}{2}$，$g(x)=ae^x+\cos x$，其中 $a\in R$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性，并求不等式 $f(x)>0$ 的解集；

（2）若 $a=1$，证明：当 $x>0$ 时，$g(x)>2$；

（3）用 $max\{m，n\}$ 表示 m，n 中的最大值，设函数 $h(x)=max\{f(x)，g(x)\}$，若 $h(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围．

3．已知函数 $f(x)=x^2-x-xlnx$，$g(x)=x^3-3ax+e$．

（1）证明 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立；

（2）用 $max\{m，n\}$ 表示 m，n 中的最大值．已知函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}-x+2$，记函数 $\varphi(x)=max\{h(x)，g(x)\}$，若函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个零点，求实数 a 的取值范围．

4．已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{4}{3}$， $g(x)=e^x-ax(x\in R)$.

（1）若 $f(x)$ 在区间 $[a-5$， $a-1]$ 上的最大值为 $\frac{4}{3}$，求实数 a 的取值范围；

（2）设 $h(x)=\frac{3}{2}f(x)-x+1$， $F(x)=\begin{cases}h(x),h(x)\leqslant g(x)\\g(x),h(x)>g(x)\end{cases}$，记 x_1， x_2， $\ldots x_n$ 为 $F(x)$ 从小到大的零点，当 $a\geqslant e^3$ 时，讨论 $F(x)$ 的零点个数及大小.

零点差问题解答

5．已知函数 $f(x)=(x^3+3x^2+ax+b)e^{-x}$.

（1）如 $a=b=-3$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,\alpha)$， $(2,\beta)$ 单调增加，在 $(\alpha,2)$， $(\beta,+\infty)$ 单调减少，证明： $\beta-\alpha>6$.

6．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ae^{2x}-x^2-ax$， $a\in R$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $g(x)=f(x)+x^2$ 的单调区间；

（2）当 $0<a<\frac{4}{e^4-1}$，时，函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， $x_2(x_1<x_2)$，证明： $x_2-x_1>2$.

7．已知函数 $f(x)=lnx-ax$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 x_1， x_2， $(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个零点．证明：

（ⅰ） $x_1+x_2>\frac{2}{a}$；

（ⅱ） $x_2-x_1>\frac{2\sqrt{1-ea}}{a}$.

8．已知函数 $f(x)=ax+lnx$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 x_1， $x_2(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个零点．证明：

（ⅰ） $x_1+x_2>-\frac{2}{a}$；

（ⅱ） $x_2-x_1>-\frac{2\sqrt{1+ea}}{a}$.

同构法解零点问题

9．已知函数 $f(x)=\frac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在零点，求实数 a 的取值范围

10．已知 $f(x)=xlnx+\frac{a}{2}x^2+1$．

（**1**）若函数 $g(x)=f(x)+x\cos x-\sin x-xlnx-1$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上有 **1** 个零点，求实数 a 的取值范围．

（**2**）若关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1$ 有两个不同的实数解，求 a 的取值范围．

11．已知函数 $f(x)=e^{2x+a}-\frac{1}{2}lnx+\frac{a}{2}$．

（**1**）若函数 $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，求 a 的取值范围；

（**2**）若函数 $y=f(x)$ 在定义域内没有零点，求 a 的取值范围．

12．已知函数 $f(x)=e^{x-1}-mx^2(m\in R)$．

（**1**）选择下列两个条件之一：① $m=\frac{1}{2}$；② $m=1$；判断 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 是否存在极小值点，并说明理由；

（**2**）已知 $m>0$，设函数 $g(x)=f(x)+mxln(mx)$．若 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点，求实数 m 的取值范围．

最值函数的零点问题

4．已知函数 $f(x)=lnx-x^{2}+ax$， $g(x)=e^{x}-e$，其中 $a>0$．

（Ⅰ）证明：$lnx\leqslant x-1$；

（Ⅱ）若 $a=2$，证明 $f(x)<\dfrac{5}{4}$；

（Ⅲ）用 $max\{m$， $n\}$ 表示 m 和 n 中的较大值，设函数 $h(x)=max\{f(x)$， $g(x)\}$，讨论函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点的个数．

【解答】（Ⅰ）证明：设函数 $\varphi(x)=lnx-x+1$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1,x>0$．

令 $\varphi'(x)=0$ 得 $x=1$，则在 $(0,1)$ 上， $\varphi'(x)>0$， $\varphi(x)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 上， $\varphi'(x)<0$， $\varphi(x)$ 递减．

所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi$ （1） $=0$，即 $lnx\leqslant x-1$．

（Ⅱ）证明：当 $a=2$ 时， $f(x)=lnx-x^{2}+2x\leqslant x-1-x^{2}+2x=-(x-\dfrac{3}{2})^{2}+\dfrac{5}{4}\leqslant\dfrac{5}{4}$，

前面的“$\leqslant$”仅当 $x=1$ 时取等号后面的“$\leqslant$”仅当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时取等号，不能同时取到．

所以 $f(x)<\dfrac{5}{4}$．

（Ⅲ）解：在区间 $(1,+\infty)$ 上， $g(x)>0$，所以 $h(x)=max\{f(x)$， $g(x)\}\geqslant g(x)>0$，

所以 $h(x)=max\{f(x)$， $g(x)\}\geqslant g(x)>0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上不可能有零点．

下面只考虑区间 $(0,1))$ 上和 $x=1$ 处的情况．

由题意 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x+a=\dfrac{-2x^{2}+ax+1}{x}$．

令 $f'(x_{0})=0$ 可得 $x_{0}=\dfrac{a+\sqrt{a^{2}+8}}{4}$ （负值舍去）．

在 $(0,x_{0})$ 上 $f'(x)>0$， $f(x)$ 递增，在 $(x_{0}$， $+\infty)$ 上 $f'(x)<0$， $f(x)$ 递减， $f(x)_{max}=f(x_{0})$．

①当 $a=1$ 时， $x_{0}=1$，所以 $f(x)_{max}=f$ （1） $=0$．

因为在区间 $(0,1)$ 上， $g(x)<0$，且 g （1） $=0$，所以此时 $h(x)$ 存在唯一的零点 $x=1$．

②当$0<a<1$时，$x_0=\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}<1$．因为$f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-2x_0+a=0$，所以$a=2x_0-\dfrac{1}{x_0}$．

所以$f(x_0)=lnx_0-x_0^2+x_0(2x_0-\dfrac{1}{x_0})=lnx_0+x_0^2-1<ln1+1^2-1=0$．

于是$f(x)<0$恒成立．

结合函数$g(x)$的性质，可知此时$h(x)$存在唯一的零点$x=1$．

③当$a>1$时，$x_0=\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}>1$，所以$f(x)$在$(0,1)$上递增．

又因为f（1）$=a-1>0$，$f(\dfrac{1}{2a})=ln\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2a}-1-\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{2}=-(\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}<0$，

所以$f(x)$在区间$(0,1)$上存在唯一的零点$x=x_1$．

结合函数$g(x)$的性质，可知$x=x_1$是$h(x)$唯一的零点．

综上所述：当$0<a\leqslant 1$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一的零点$x=1$；

当$a>1$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$上也有1个零点．

5．已知函数$f(x)=(x-4)e^{x-3}-\dfrac{1}{2}x^2+3x-\dfrac{7}{2}$，$g(x)=ae^x+\cos x$，其中$a\in R$．

（1）讨论函数$f(x)$的单调性，并求不等式$f(x)>0$的解集；

（2）若$a=1$，证明：当$x>0$时，$g(x)>2$；

（3）用$max\{m，n\}$表示m，n中的最大值，设函数$h(x)=max\{f(x)，g(x)\}$，若$h(x)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，求实数a的取值范围．

【解答】解：（1）$f'(x)=(x-3)e^{x-3}-x+3=(x-3)(e^{x-3}-1)$，（1分）

当$x>3$时，$x-3>0$，$e^{x-3}-1>0$，$\therefore f'(x)>0$，

当$x<3$时，$x-3<0$，$e^{x-3}-1<0$，$\therefore f'(x)>0$，

当$x=3$时，$f'(x)=0$，（2分）

所以当$x\in R$时，$f'(x)\geqslant 0$，即$f(x)$在R上是增函数；（3分）

又f（3）$=0$，所以$f(x)>0$的解集为$(3,+\infty)$．（4分）

（2）$g'(x)=e^x-\sin x$．（5分）

由$x>0$，得$e^x>1$，$\sin x\in[-1，1]$，（6分）

则$g'(x)=e^x-\sin x>0$，即$g(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数．（7分）

故$g(x)>g(0)=2$，即$g(x)>2$．（8分）

（3）由（1）知，

当$x\geqslant 3$时，$f(x)\geqslant 0$恒成立，故$h(x)\geqslant 0$恒成立；

当$x<3$时，$f(x)<0$，因为$h(x)=max\{f(x)，g(x)\}$，要使得$h(x)\geqslant 0$恒成立，

只要$g(x)\geqslant 0$在$(0,3)$上恒成立即可．（9分）

由$g(x)=ae^x+\cos x\geqslant 0$，得$a\geqslant -\dfrac{\cos x}{e^x}$．

设函数$r(x)=-\dfrac{\cos x}{e^x}$，$x\in[0，3]$，

则 $r'(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^{x}}$．（10 分）

令 $r'(x)=0$，得 $x=\dfrac{3}{4}\pi$．

随着 x 变化，$r'(x)$ 与 $r(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(0,\dfrac{3\pi}{4})$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$(\dfrac{3\pi}{4},3)$
$r'(x)$	+	0	−
$r(x)$	单调递增	极大值	单调递减

所以 $r(x)$ 在 $(0,\dfrac{3\pi}{4})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{3\pi}{4}$， $3)$ 上单调递减．（11 分）

$r(x)$ 在 $(0,3)$ 上唯一的一个极大值，即极大值 $r(\dfrac{3\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$，故 $a\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$．

综上所述，所求实数 a 的取值范围为 $[\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$， $+\infty)$．（12 分）

6．已知函数 $f(x)=x^{2}-x-xlnx$， $g(x)=x^{3}-3ax+e$．

（1）证明 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立；

（2）用 $max\{m$， $n\}$ 表示 m， n 中的最大值．已知函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}-x+2$，记函数 $\varphi(x)=max\{h(x)$， $g(x)\}$，若函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 2 个零点，求实数 a 的取值范围．

【解答】（1）证明：由题得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

则 $x^{2}-x-xlnx\geqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立等价于 $x-1-lnx\geqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，．……（1 分）

记 $\phi(x)=x-1-lnx$，则 $\phi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，．……………………………………………………（2 分）

当 $\phi'(x)<0$ 时， $0<x<1$； $\phi'(x)>0$ 时， $x>1$，

故 $\phi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减， $(1,+\infty)$ 上单调递增，．……………………………………………（3 分）

所以 $\phi(x)\geqslant\phi$（1）$=0$，即 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立．………………………………………………………（4 分）

（2）解：由题得 $h(x)=1-lnx$，

①当 $0<x<e$ 时， $\varphi(x)\geqslant h(x)>0$，此时无零点．………………………………………………（5 分）

②当 $x=e$ 时， h（e）$=0$， g（e）$=e^{3}-3ae+e$

a．当 g（e）$=e^{3}-3ae+e\leqslant 0$，即 $a\geqslant\dfrac{e^{2}+1}{3}$ 时， $x=e$ 是 $\varphi(x)$ 的一个零点；

b．当 g（e）$=e^{3}-3ae+e>0$，即 $a<\dfrac{e^{2}+1}{3}$ 时， $x=e$ 不是 $\varphi(x)$ 的一个零点;．……………………….（6 分）

③当 $x>e$ 时， $h(x)<0$ 恒成立，因此只需考虑 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上的零点情况．

由 $g'(x)=3x^{2}-3a$

a．当 $a\leqslant e^{2}$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，且 g（e）$=e^{3}-3ae+e$，

当 $a<\dfrac{e^{2}+1}{3}$ 时， g（e）>0，则 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上无零点，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点；

当 $a=\dfrac{e^{2}+1}{3}$ 时， g（e）$=0$，则 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上无零点，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 1 个零点；

当 $\frac{e^2+1}{3}<a\leqslant e^2$ 时，由 g（e）<0，$g(2e)=8e^3-6ae+e\geqslant 8e^3-6e^3+e>0$，得 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上仅有一个零点，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点；

所以 $\frac{e^2+1}{3}<a\leqslant e^2$，. ……………………………………………………………………………（9 分）

b．当 $a>e^2$ 时，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\pm\sqrt{a}$，

由 $g'(x)<0$ 时，$e<x<\sqrt{a}$；当 $g'(x)>0$ 时 $x>\sqrt{a}$，$g'(x)<0$，

故 $g(x)$ 在 $(e,\sqrt{a})$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增；

由 g（e）<0，$g(2a)=8a^3-6a^2+e\geqslant 2a^2+e>0$，得 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上仅有一个零点，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点；

所以 $a>e^2$，. ……………………………………………………………………………………（11 分）

综上所述，$a>\frac{e^2+1}{3}$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有两个零点．………………………………………（12 分）

7．已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{4}{3}$，$g(x)=e^x-ax(x\in R)$．

（1）若 $f(x)$ 在区间 $[a-5$，$a-1]$ 上的最大值为 $\frac{4}{3}$，求实数 a 的取值范围；

（2）设 $h(x)=\frac{3}{2}f(x)-x+1$，$F(x)=\begin{cases}h(x),h(x)\leqslant g(x)\\ g(x),h(x)>g(x)\end{cases}$，记 x_1，x_2，$\ldots x_n$ 为 $F(x)$ 从小到大的零点，当 $a\geqslant e^3$ 时，讨论 $F(x)$ 的零点个数及大小．

【解答】解：（1）$\because f'(x)=2x^2-4x=2x(x-2)$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 上单调递减，

$f(x)$ 的极大值为 $f(0)=\frac{4}{3}$，$f(x)$ 的极小值为 f（2）$=-\frac{4}{3}$，

又 f（3）$=\frac{4}{3}$，$\therefore$ 若 $f(x)$ 在区间 $[a-5$，$a-1]$ 上的最大值为 $\frac{4}{3}$，

则 $\begin{cases}a-5\leqslant 0\\ 0\leqslant a-1\leqslant 3\end{cases}$，解得 $1\leqslant a\leqslant 4$；

（2）$h(x)=\frac{3}{2}f(x)-x+1=x^3-3x^2-x+3=(x+1)(x-1)(x-3)$，

当 $x\leqslant -1$ 时，$g(x)=e^x-ax>0$，此时 $F(x)=h(x)$，

$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty$，$-1]$ 上有一个零点，$x_1=-1$；

当 $x>-1$ 时，$g'(x)=e^x-a$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,lna)$ 上单调递减，在 $(lna,+\infty)$ 上单调递增，

又 $a\geqslant e^3$，$\therefore lna\geqslant 3$，

由于 $g(0)=1>0$，g（1）$=e-a<0$，$x\in(-1,1)$ 时，$f(x)>0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点 x_2；

又 $g(lna)=a(1-lna)<0$，

令 $k(x)=x-lnx(x\geqslant e^3)$ ， $k'(x)=\dfrac{x-1}{x}>0$ ，

$\therefore k(x)$ 在 $[e^3$ ， $+\infty)$ 上单调递增， $k(x)=x-lnx\geqslant k(e^3)=e^3-3>0$ ，

$\therefore a>lna$ ， g （a） $=e^a-a^2$.

再令 $\varphi(x)=e^x-x^2(x\geqslant 2)$ ， $\varphi'=e^x-2x$ ， $\varphi''(x)=e^x-2>0$ ，

$\therefore \varphi'$ 在 $[2$ ， $+\infty)$ 上单调递增，从而 $\varphi'(x)>\varphi'$ （2） $=e^2-4>0$ ，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[2$ ， $+\infty)$ 上单调递增， $\varphi(x)>\varphi$ （2） $=e^2-4>0$ ，则 g （a） >0 .

$\therefore F(x)$ 在 (lna,a) 上有一个零点 x_3 ，

综上所述，当 $a\geqslant e^3$ 时， $F(x)$ 有三个零点 $x_1=-1$ ， $0<x_2<1$ ， $lna<x_3<a$.

且 $x_1<x_2<x_3$.

零点差问题解答

1．已知函数 $f(x)=(x^3+3x^2+ax+b)e^{-x}$.

（1）如 $a=b=-3$，求 $f(x)$ 的单调区间；
（2）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,\alpha)$ ， $(2,\beta)$ 单调增加，在 $(\alpha,2)$ ， $(\beta,+\infty)$ 单调减少，证明： $\beta-\alpha>6$.

【解答】解：（Ⅰ）当 $a=b=-3$ 时， $f(x)=(x^3+3x^2-3x-3)e^{-x}$ ，

故 $f'(x)=-(x^3+3x^2-3x-3)e^{-x}+(3x^2+6x-3)e^{-x}=-e^{-x}(x^3-9x)=-x(x-3)(x+3)e^{-x}$

当 $x<-3$ 或 $0<x<3$ 时， $f'(x)>0$ ；
当 $-3<x<0$ 或 $x>3$ 时， $f'(x)<0$.
从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ ， $(0,3)$ 单调增加，在 $(-3,0)$ ， $(3,+\infty)$ 单调减少；

（Ⅱ） $f'(x)=-(x^3+3x^2+ax+b)e^{-x}+(3x^2+6x+a)e^{-x}=-e^{-x}[x^3+(a-6)x+b-a]$.

由条件得： f' （2） $=0$ ，即 $2^3+2(a-6)+b-a=0$ ，故 $b=4-a$ ，

从而 $f'(x)=-e^{-x}[x^3+(a-6)x+4-2a]$.

因为 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ ，

所以 $x^3+(a-6)x+4-2a=(x-2)(x-\alpha)(x-\beta)=(x-2)(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)$.

将右边展开，与左边比较系数得， $\alpha+\beta=-2$ ， $\alpha\beta=a-2$.

故 $\beta-\alpha=\sqrt{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{12-4a}$.，

又 $(\beta-2)(\alpha-2)<0$ ，即 $\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4<0$ ．由此可得 $a<-6$.
于是 $\beta-\alpha>6$.

2．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ae^{2x}-x^2-ax$ ， $a\in R$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $g(x)=f(x)+x^2$ 的单调区间；

（2）当$0<a<\dfrac{4}{e^4-1}$，时，函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， $x_2(x_1<x_2)$，证明： $x_2-x_1>2$.

【解答】（1）解：当 $a=1$时， $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-x^2-x$，

$g(x)=f(x)+x^2=\dfrac{1}{2}e^{2x}-x$， $g'(x)=e^{2x}-1$，

令 $g'(x)>0$，可得 $x>0$，令 $g'(x)<0$，可得 $x<0$，

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$.

（2）证明：函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ae^{2x}-x^2-ax$ 的定义域为 R， $f'(x)=ae^{2x}-2x-a$，

令 $h(x)=f'(x)=ae^{2x}-2x-a$，

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， $x_2(x_1<x_2)$，

所以 x_1， x_2 是函数 $h(x)$ 的两个零点，

$h(x_1)=h(x_2)=0$，

$h'(x)=2ae^{2x}-2$，令 $h'(x)>0$，可得 $x>\dfrac{1}{2}ln\dfrac{1}{a}$，令 $h'(x)<0$，可得 $x<\dfrac{1}{2}ln\dfrac{1}{a}$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2}ln\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{2}ln\dfrac{1}{a}$， $+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_1<\dfrac{1}{2}ln\dfrac{1}{a}$， $x_2>\dfrac{1}{2}ln\dfrac{1}{a}$，

由 $0<a<\dfrac{4}{e^4-1}$，可得 $\dfrac{1}{2}ln\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{2}ln\dfrac{e^4-1}{4}>0$，

因为 $h(0)=0$，所以 $x_1=0$，

所以要证 $x_2-x_1>2$，即证 $x_2>2$，只需证 h（2）<0，

因为 $0<a<\dfrac{4}{e^4-1}$，

所以 h（2）$=ae^4-4-a=a(e^4-1)-4<\dfrac{4}{e^4-1}(e^4-1)-4<4-4=0$，

所以 $x_2-x_1>2$，得证.

3．已知函数 $f(x)=lnx-ax$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 x_1， x_2，$(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个零点．证明：

（i） $x_1+x_2>\dfrac{2}{a}$；

（ii） $x_2-x_1>\dfrac{2\sqrt{1-ea}}{a}$.

【解答】解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}$，

当 $a\leqslant 0$ 时， $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，令 $g(x)=1-ax$，

所以在 $(0,\frac{1}{a})$ 上，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在 $(\frac{1}{a}$，$+\infty)$ 上，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，在 $(0,\frac{1}{a})$ 上 $f(x)$ 单调递增，在 $(\frac{1}{a}$，$+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递减.

（2）证明：(i) 由（1）可知，要使由函数 $f(x)$ 有两个零点，需 $a>0$，且 $f(x)_{max}=f(\frac{1}{a})>0$，则 $0<a<\frac{1}{e}$，

又 $x_1<x_2$，故 $0<x_1<\frac{1}{a},x_2>\frac{1}{a}$，则 $\frac{2}{a}-x_1>\frac{1}{a}$，

令 $g(x)=f(\frac{2}{a}-x)-f(x)(0<x<\frac{1}{a})$，则 $g'(x)=-\frac{1}{\frac{2}{a}-x}+a-\frac{1}{x}+a=\frac{-2(ax-1)^2}{ax(\frac{2}{a}-x)}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单减，

$\therefore g(x_1)>g(\frac{1}{a})=0$，

又 $f(x_1)=0$，

$\therefore f(\frac{2}{a}-x_1)=ln(\frac{2}{a}-x_1)-a(\frac{2}{a}-x_1)-f(x_1)=g(x_1)>0$，

又 $f(x_2)=0$，

$\therefore x_2>\frac{2}{a}-x_1$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$；

(ii) 要证 $x_2-x_1>\frac{2\sqrt{1-ea}}{a}$，由（1）可知，只需证 $x_1+x_2+x_2-x_1>\frac{2}{a}+\frac{2\sqrt{1-ea}}{a}$，即证 $x_2>\frac{1+\sqrt{1-ea}}{a}>\frac{1}{a}$，

又 $f(x_2)=lnx_2-ax_2=0$，

$\therefore$ 只需证 $f(\frac{1+\sqrt{1-ea}}{a})>0$，即证 $ln\frac{1+\sqrt{1-ea}}{a}-(1+\sqrt{1-ea})>0$，

令 $t=1+\sqrt{1-ea}$，则 $a=\frac{1-(t-1)^2}{e}$，$\because$ $0<a<\frac{1}{e}$，$\therefore 1<t<2$，

所以上述不等式等价于 $ln\frac{et}{1-(t-1)^2}-t>0$，即 $ln\frac{e}{2-t}-t>0$，亦即 $ln(2-t)+t<1$，

令 $\varphi(t)=ln(2-t)+t$，则 $\varphi'(t)=-\frac{1}{2-t}+1=\frac{1-t}{2-t}<0(t\in(1,2))$，

$\therefore\varphi(t)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，即 $\varphi(t)<\varphi$（1）$=1$，即得证.

4．已知函数 $f(x)=ax+lnx$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个零点．证明：

（ⅰ）$x_1+x_2>-\frac{2}{a}$；

（ⅱ）$x_2-x_1>-\frac{2\sqrt{1+ea}}{a}$.

【解答】解：（1）由题意可知，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

因为 $f(x)=ax+lnx$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+a=\frac{1+ax}{x}$，

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，当 $0<x<-\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，

当 $x>-\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，则 $f'(x)$ 单调递减.

综上所述，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{a}$，$+\infty)$ 上单调递减.

（2）证明：(i) 原不等式等价于 $\frac{x_1+x_2}{2}>-\frac{1}{a}$，

因为 $-ax_1=lnx_1$①，$-ax_2=lnx_2$②，

由②$-$①，可得 $-a(x_2-x_1)=lnx_2-lnx_1$，故 $-a=\frac{lnx_2-lnx_1}{x_2-x_1}$，

则 $\frac{x_1+x_2}{2}>-\frac{1}{a}$ 等价于 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{x_2-x_1}{lnx_2-lnx_1}$，

因为 $x_2>x_1>0$，所以 $lnx_2-lnx_1>0$，

即证明 $lnx_2-lnx_1>\frac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}$③，

等价于证明 $ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{1+\frac{x_2}{x_1}}>0$，

令 $t=\frac{x_1}{x_1}(t>1)$，设 $g(t)=lnt-\frac{2(t-1)}{1+t}(t>1)$，即证明 $g(t)>0$，

因为 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(1+t)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

则 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(t)>g$（1）$=0$，

因此 $x_1+x_2>-\frac{2}{a}$；

(ii) 设 $h(x)=\frac{lnx}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $-a=h(x)$ 有两个不相等的实数根，且 h（e）$=\frac{1}{e}$，

则 $0<-a<\frac{1}{e}$ 且 $1<x_1<e<x_2$，

因为 $lnx<1-x$ 对于 $x\in(0$，$1)\cup(1$，$+\infty)$ 恒成立，

则 $ln\frac{1}{x}>1-x$ 对于 $x\in(0,1)$ 恒成立，

所以 $-ax_1-1=lnx_1-1=ln\frac{x_1}{e}>1-\frac{e}{x_1}$，

因为 $x_1>0$，所以 $-ax_1{}^2-2x_1+e>0$，

又因为 $a<0$，$\triangle=4+4ae>0$，

所以 $x_1<-\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{1+ea}}{a}$ 或 $x_1>-\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{1+ea}}{a}$，

因为 $0<x_1<e$ 且 $-\frac{1}{e}<a<0$，所以 $x_1<-\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{1+ea}}{a}$，

因为 $\frac{x_1+x_2}{2}>-\frac{1}{a}$，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}-x_1>-\frac{1}{a}-(-\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{1+ea}}{a})$，

所以 $x_2-x_1>-\frac{2\sqrt{1+ea}}{a}$.

5．设函数 $f(x)=lnx-a(x-1)e^x$，其中 $a\in R$ 且 $0<a<\frac{1}{4}$.

（1）证明 $f(x)$ 恰有两个零点；

（2）设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，x_1 为 $f(x)$ 的零点，且 $x_1>x_0$，证明：$3x_0-x_1>2$.

【解答】证明：（1）由已知条件得 $f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}$，

令 $g(x)=1-ax^2e^x$，由 $0<a<\frac{1}{4}<\frac{1}{e}$，可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，

又 g （1） $=1-ae>0$，且 $g(ln\frac{1}{a})=1-a(ln\frac{1}{a})^2\bullet\frac{1}{a}=1-(ln\frac{1}{a})^2<0$，

故 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，

从而 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，不妨设为 x_0 .

则 $1<x_0<ln\frac{1}{a}$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g(x_0)}{x}=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递增；

当 $x\in(x_0，+\infty)$ 时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g(x_0)}{x}=0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0，+\infty)$ 内单调递减.

所以 x_0 是 $f(x)$ 的唯一极值点.

令 $h(x)=lnx-x+1$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，

从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h$ （1） $=0$，所以 $lnx<x-1$，

从而 $f(ln\frac{1}{a})=ln(ln\frac{1}{a})-a(ln\frac{1}{a}-1)e^{ln\frac{1}{a}}=ln(ln\frac{1}{a})-ln\frac{1}{a}+1=h(ln\frac{1}{a})<0$.

又因为 $f(x_0)>f$ （1） $=0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0，+\infty)$ 内有唯一零点，

又因为 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内有唯一零点 1，从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点.

（2）由题意，$\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f(x_1)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}ax_0{}^2\bullet e^{x_0}=1\\ lnx_1=a(x_1-1)e^{x_1}\end{cases}$，从而 $lnx_1=\frac{x_1-1}{x_0{}^2}e^{x_1-x_0}$，

即 $e^{x_1-x_0}=\frac{x_0{}^2lnx_1}{x_1-1}$，因为 $x>1$ 时，$lnx<x-1$，又 $x_1>x_0>1$，故 $e^{x_1-x_0}<\frac{x_0{}^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0{}^2$.

两边取对数，得 $lne^{x_1-x_0}<lnx_0{}^2$，

于是，$x_1-x_0<2lnx_0<2(x_0-1)$，整理得 $3x_0-x_1>2$.

同构法解零点问题

1．已知函数 $f(x)=\frac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在零点，求实数 a 的取值范围

【解答】解：方法一：由 $f(x)=\frac{ax}{e^{x-1}}+x-ln(ax)-2(a>0)$ 可得 $f'(x)=\frac{x-1}{e^{x-1}}(\frac{e^{x-1}}{x}-a)$，

设 $y=\frac{e^{x-1}}{x}-a$，$x>0$，$a>0$，则 $y'=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}$，令 $y'=0\Rightarrow x=1$，$\therefore y$ 在 $x\in(0,1)$ 单调递减，在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $y_{min}=y$（1）$=1-a$．

①当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)_{min}=f$（1）$=a-1-lna>0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内无零点；

②当 $a=1$ 时，f（1）$=a-1-lna=0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点；

③当 $a>1$ 时，令 $f'(x)=\frac{x-1}{e^{x-1}}(\frac{e^{x-1}}{x}-a)=0$，解得 $x=x_1$ 或 1 或 x_2，且 $0<x_1<1<x_2$，

此时 $f(x)$ 在 $x\in(0,x_1)$ 单减，$x\in(x_1$，$1)$ 单增，$x\in(1,x_2)$ 单减，$x\in(x_2$，$+\infty)$ 单增，

当 $x=x_1$ 或 x_2 时，$f(x)_{极小值}=0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有两个零点；

综合①②③知 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点 $\Rightarrow a\geqslant 1$．

方法二：由题意可得

$e^{-x+1+ln(ax)}=ln(ax)-x+2$，即 $e^{-x+1+ln(ax)}-[-x+1+ln(ax)]-1=0$，

因为 $e^x\geqslant x+1$ 当 $x=0$ 时等号成立，

所以 $-x+1+ln(ax)=0$，即 $ax=e^{x-1}$，

$a=\frac{e^{x-1}}{x}$，令 $g(x)=\frac{e^{x-1}}{x}$，$g'(x)=\frac{1}{e}\times\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，

易知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，在 $(1,+\infty)$ 上单增，所以 $g(x)\geqslant g$（1）$=1$，

又 x 趋近于 0 和正无穷时，$g(x)$ 趋近于正无穷，

所以 $a\geqslant 1$．

3．已知 $f(x)=xlnx+\frac{a}{2}x^2+1$．

（1）若函数 $g(x)=f(x)+x\cos x-\sin x-xlnx-1$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上有 1 个零点，求实数 a 的取值范围．

（2）若关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1$ 有两个不同的实数解，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1）$g(x)=\frac{a}{2}x^2+x\cos x-\sin x$，$x\in(0$，$\frac{\pi}{2}]$，

所以 $g'(x)=x(a-\sin x)$，

当 $a\geqslant 1$ 时，$a?\sin x\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上无零点；

当 $0<a<1$ 时，$\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $\sin x_0=a$，

所以 $g(x)$ 在 $(x_0$，$\frac{\pi}{2}]$ 单调递减，在 $(0,x_0)$ 单调递增，

又因为 $g(0)=0$，$g(\frac{\pi}{2})=\frac{a\pi^2}{8}-1$，

所以若 $\frac{a\pi^2}{8}-1>0$，即 $a>\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上无零点，

若 $\frac{a\pi^2}{8}$?1$\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上有一个零点，

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)=a-x\sin x<0$，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上无零点，

综上当 $0<a\leqslant\frac{8}{\pi^2}$ 时，$g(x)$ 在 $(0$，$\frac{\pi}{2}]$ 上有一个零点；

（2）由 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1(x>0)$，

即 $xe^{x-a}=xlnx+ax$，即 $e^{x-a}=lnx+a$，

则有 $e^{x-a}+(x-a)=x+lnx$，

令 $h(x)=x+lnx$，$x>0$，则 $h(e^{x-a})=e^{x-a}+(x-a)$，

$h'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

所以 $e^{x-a}=x$，则有 $x-a=lnx$，即 $a=x-lnx$，$x>0$，

因为关于 x 的方程 $xe^{x-a}=f(x)-\frac{a}{2}x^2+ax-1$ 有两个不同的实数解，

则方程 $a=x-lnx$，$x>0$ 有两个不同的实数解，

令 $\varphi(x)=x-lnx$，则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，

所以函数 $\varphi(x)=x-lnx$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

所以 $\varphi(x)_{min}=\varphi$（1）$=1$，

当 $x\to 0$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，

所以 $\{a\mid a>1\}$．

5．已知函数 $f(x)=e^{2x+a}-\frac{1}{2}lnx+\frac{a}{2}$．

（1）若函数 $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $y=f(x)$ 在定义域内没有零点，求 a 的取值范围．

【解答】解：（1）因为函数 $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递减，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上恒成立，

由 $f(x)=e^{2x+a}-\frac{1}{2}lnx+\frac{a}{2}$，$x>0$，

可得 $f'(x)=2e^{2x+a}-\frac{1}{2x}=\frac{4xe^{2x+a}-1}{2x}$，

由于 $x>0$，则 $4xe^{2x+a}-1\leqslant 0$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上恒成立，

令 $F(x)=4xe^{2x+a}-1$，$F'(x)=(8x+4)e^{2x+a}>0$，

故 $F(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，

所以只需 $F(\frac{1}{2})\leqslant 0$ 即可，$F(\frac{1}{2})=2e^{1+a}-1\leqslant 0$，

所以 $a\leqslant -1-ln2$，

所以 a 的取值范围是 $(-\infty$，$-1-ln2]$．

（2）$f(x)=e^{2x+a}-\frac{1}{2}lnx+\frac{a}{2}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2e^{2x+a}-\frac{1}{2x}$，令 $g(x)=2e^{2x+a}$，$h(x)=\frac{1}{2x}$，

当 $x>0$ 时，$g(x)$ 单调递增，$g(x)\in(2e^{a}$，$+\infty)$，$h(x)\in(0$，$+\infty)$，

故存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $2e^{2x_0+a}-\frac{1}{2x_0}=0$，

即 $4e^{2x_0+a}=\frac{1}{x_0}$ ①，两边取对数得 $ln4+2x_0+a=-lnx_0$ ②，

而 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0$，$+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)_{min}=f(x_0)>0$，故 $e^{2x_0+a}-\frac{1}{2}lnx_0+\frac{a}{2}>0$，

将①②代入上式得 $\frac{1}{4x_0}+\frac{ln4+2x_0+a}{2}+\frac{a}{2}>0$，化简得 $a>-\frac{1}{4x_0}-x_0-ln2$，

因为 $\frac{1}{4x_0}+x_0\geqslant 1$，当且仅当 $\frac{1}{4x_0}=x_0$，即 $x_0=\frac{1}{2}$ 时取等号，

所以 $-\frac{1}{4x_0}-x_0-ln2\leqslant -1-ln2$，

故 $a>-1-ln2$，

即 a 的取值范围是 $(-1-ln2,+\infty)$．

6．已知函数 $f(x)=e^{x-1}-mx^2(m\in R)$．

（1）选择下列两个条件之一：① $m=\frac{1}{2}$；② $m=1$；判断 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 是否存在极小值点，并说明理由；

（2）已知 $m>0$，设函数 $g(x)=f(x)+mxln(mx)$．若 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点，求实数 m 的取值范围．

【解答】解：（1）若选①：$m=\frac{1}{2}$，则函数 $f(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2$，

所以 $f'(x)=e^{x-1}-x$，$f''(x)=e^{x-1}-1$，

因为 $f''(x)$ 单调递增，且 f''（1）$=0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f'(x)\geqslant f'$（1）$=0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以不存在极小值点；

若选②：$m=1$，则 $f(x)=e^{x-1}-x^2$，

所以 $f'(x)=e^{x-1}-2x$，$f''(x)=e^{x-1}-2$，

由 $f''(x)$ 单调递增，且 $f''(1+ln2)=0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(0,1+ln2)$ 上单调递减，在 $(1+ln2,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f'(x)\geqslant f'(1+ln2)=-2ln2<0$，

又 f'（4）$=e^3-8>0$，

所以存在极小值点 $x_0\in(1+ln2,4)$．

（2）令 $g(x)=0$，则 $e^{x-1}-mx^2+mxln(mx)=0$，

又 $mx>0$，

所以 $\frac{e^{x-1}}{mx}-x+ln(mx)=\frac{e^{x-1}}{e^{ln(mx)}}-x+ln(mx)=e^{x-ln(mx)-1}-[x-ln(mx)]=0$，

令 $t=x-ln(mx)$，

故 $e^{t-1}-t=0$ 有解，

设 $h(t)=e^{t-1}-t$，

则 $h'(t)=e^{t-1}-1$，令 $h'(t)=0$，解得 $t=1$，

所以 $h(t)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 h（1）$=0$，

所以 $h(t)=e^{t-1}-t$ 有唯一的零点 $t=1$，

若 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点，

即 $1=x-ln(mx)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

整理可得 $1+lnm=x-lnx$，

令 $l(x)=x-lnx$，

则 $l'(x)=1-\frac{1}{x}$，令 $l'(x)=0$，解得 $x=1$，

所以 $l(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $l(x)\geqslant l$（1）$=1$，

所以 $1+lnm\geqslant 1$，

解得 $m\geqslant 1$，

所以 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$．

隐零点

导函数零点按能否求精确解可以分为两类：一类是数值上能精确求解的，称之为“显零点”；另一类是能够判断其存在但无法直接求值的，称之为“隐零点”. 对于隐零点问题，由于涉及灵活的代数变形、整体代换、构造函数、不等式应用等技巧，对学生综合能力的要求较高，成为考查的热点.

类型一　导函数隐零点中的(整体)代换

1.设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的零点的个数；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

(1)解　$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$.由 $f'(x)=0$ 得 $2xe^{2x}=a$.令 $g(x)=2xe^{2x}$，$g'(x)=(4x+2)e^{2x}>0(x\geqslant 0)$，从而 $g(x)$在$[0，+\infty)$上单调递增，所以 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$.

故当 $a>0$ 时，方程 $g(x)=a$ 有一个根，即 $f'(x)$存在唯一零点；

当 $a\leqslant 0$ 时，方程 $g(x)=a$ 没有根，即 $f'(x)$没有零点.

(2)证明　由(1)可设 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上的唯一零点为 x_0，当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)$.

由 $2e2x_0-\frac{a}{x_0}=0$ 得 $e2x_0=\frac{a}{2x_0}$，又 $x_0=\frac{a}{2e2x_0}$，得 $\ln x_0=\ln\frac{a}{2e2x_0}=\ln\frac{a}{2}-2x_0$，所以 $f(x_0)=e2x_0-a\ln x_0=\frac{a}{2x_0}-a\left(\ln\frac{a}{2}-2x_0\right)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{2x_0}\cdot 2ax_0}+a\ln\frac{2}{a}=2a+a\ln\frac{2}{a}$.当且仅当 $x_0=\frac{1}{2}$时取等号.

故当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

2.已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}a(x+1)^2$，$a\in\mathbf{R}$ 恰好有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$.

(1)求证：存在实数 $m\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $0<a<m$；

(2)求证：$-\frac{5}{4}<f(x_1)<-\frac{1}{e}$.

证明　(1)$f'(x)=\ln x+1-a(x+1)$，$x>0$，

结合题意，$\ln x+1-a(x+1)=0$，

即 $\ln x+1=a(x+1)$存在 2 个不同正根，

先考虑 $y=a(x+1)$与 $y=\ln x+1$ 相切，记切点横坐标为 x_0，

则$\begin{cases}a(x_0+1)=\ln x_0+1,\\ a=\frac{1}{x_0},\end{cases}$解得$\begin{cases}ax_0=1,\\ x_0\ln x_0=1,\end{cases}$

记 $g(x)=x\ln x-1$，$x>0$，

则 $g'(x)=1+\ln x$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{e}$，

故 $y=g(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，

且 $g(1)=-1<0$，$g(2)=\ln 4-1>0$，

故存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使得 $x_0\ln x_0=1$ 成立，

取 $m=\frac{1}{x_0}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

则 $0<a<m$ 时，$f(x)$恰有 2 个极值点，得证.

(2)由(1)知，$f'(x_1)=\ln x_1+1-a(x_1+1)$，且$\frac{1}{e}<x_1<x_0<2$，

故 $a=\frac{\ln x_1+1}{x_1+1}$，代入 $f(x_1)$，

得 $f(x_1)=\frac{1}{2}(x_1\ln x_1-x_1-\ln x_1-1)$，

设 $h(x)=\frac{1}{2}(x\ln x-x-\ln x-1)$，$\frac{1}{e}<x<2$，

$h'(x)=\frac{1}{2}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$，

由 $h'(x_0)=0$，得 $\ln x_0=\frac{1}{x_0}$，即 $x_0\ln x_0=1$，

则 $x\in\left(\frac{1}{e},x_0\right)$时，$h'(x)<0$，$x\in(x_0,2)$，$h'(x)>0$，

故 $h(x)$在$\left(\frac{1}{e},x_0\right)$上单调递减，在$(x_0,2)$上单调递增，

$h(x)>h(x_0)=\frac{1}{2}(x_0\ln x_0-\ln x_0-x_0-1)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x_0}-x_0-1\right)=-\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，

$\because x_0\in(1,2)$，$\therefore x_0+\frac{1}{x_0}\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$，

$\therefore h(x_0)\in\left(-\frac{5}{4},-1\right)$，

故 $h(x)>-\frac{5}{4}$，即 $f(x_1)>-\frac{5}{4}$，

而 $h(x)<h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}>h(2)=\frac{1}{2}(\ln 2-3)$，

故 $-\frac{5}{4}<f(x_1)<-\frac{1}{e}$.

类型二　导函数零点的设而不求技巧

3. 已知函数 $f(x)=e^{x+a}-\ln x$(其中 e＝2.718 28…是自然对数的底数).求证：当 $a>1-\frac{1}{e}$时，$f(x)>e+1$.

证明　$\because f'(x)=e^{x+a}-\frac{1}{x}(x>0)$，

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^{x+a}+\frac{1}{x^2}>0$，

∴$g(x)$是增函数.

∵$e^{x+a}>e^a$，又由 $e^a>\frac{1}{x}\Rightarrow x>e^{-a}$，

∴当 $x>e^{-a}$ 时，$f'(x)>0$；

若 $0<x<1\Rightarrow e^{x+a}<e^{a+1}$，由 $e^{a+1}<\frac{1}{x}\Rightarrow x<e^{-a-1}$，

∴当 $0<x<\min\{1，e^{-a-1}\}$时，$f'(x)<0$，

故 $f'(x)=0$ 仅有一解，记为 x_0，则当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$递减；

当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$递增；

∴$f(x)_{\min}=f(x_0)=ex_0+a-\ln x_0$，

而 $f'(x_0)=ex_0+a-\frac{1}{x_0}=0\Rightarrow ex_0+a=\frac{1}{x_0}\Rightarrow a=-\ln x_0-x_0$，

记 $h(x)=\ln x+x$，

则 $f(x_0)=\frac{1}{x_0}-\ln x_0=h\left(\frac{1}{x_0}\right)$，

$a>1-\frac{1}{e}\Leftrightarrow -a<\frac{1}{e}-1\Leftrightarrow h(x_0)<h\left(\frac{1}{e}\right)$，

而 $h(x)$显然是增函数，

∴$0<x_0<\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{1}{x_0}>e$，

∴$h\left(\frac{1}{x_0}\right)>h(e)=e+1$.

综上，当 $a>1-\frac{1}{e}$时，$f(x)>e+1$.

4. 已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$.

证明：(1)$f(x)$存在唯一的极值点；

(2)$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

证明　(1)$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$.

$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\frac{1}{x}$.

记 $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$，

所以 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

又 $f'(1)=-1<0$，$f'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{\ln 4-1}{2}>0$，

故存在唯一 $x_0\in(1，2)$，使得 $f'(x_0)=0$.

又当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

因此，$f(x)$存在唯一的极值点.

(2)由(1)知 $f(x_0)<f(1)=-2$，又 $f(e^2)=e^2-3>0$，

所以 $f(x)=0$ 在$(x_0，+\infty)$内存在唯一根 $x=\alpha$.

由 $\alpha>x_0>1$ 得$\frac{1}{\alpha}<1<x_0$.

又 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，

故$\frac{1}{\alpha}$是 $f(x)=0$ 在$(0，x_0)$的唯一根.

综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

3.已知函数 $f(x)=ax+x\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若函数 $f(x)$在区间$[e，+\infty)$上为增函数，求 a 的取值范围；

(2)当 $a=1$ 且 $k\in\mathbf{Z}$ 时，不等式 $k(x-1)<f(x)$在 $x\in(1，+\infty)$上恒成立，求 k 的最大值.

解　(1)∵函数 $f(x)$在区间$[e，+\infty)$上为增函数，

∴$f'(x)=a+\ln x+1\geqslant 0$ 在区间$[e，+\infty)$上恒成立，

∴$a\geqslant(-\ln x-1)_{\max}=-2$.

∴a 的取值范围是$[-2，+\infty)$.

(2)当 $a=1$ 时，$f(x)=x+x\ln x$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，不等式 $k(x-1)<f(x)$在 $x\in(1，+\infty)$上恒成立，

∴$k<\left(\frac{x+x\ln x}{x-1}\right)_{\min}$.

令 $g(x)=\dfrac{x+x\ln x}{x-1}$，则 $g'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，

令 $h(x)=x-\ln x-2(x>1)$.

则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$，

$\therefore h(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增.

$\because h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2-2\ln 2>0$，

$\therefore$存在 $x_0\in(3，4)$，使 $h(x_0)=0$，

即当 $1<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，

当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，

$g(x)$在$(1，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增.

令 $h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，即 $\ln x_0=x_0-2$，

$g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1}=\dfrac{x_0(1+x_0-2)}{x_0-1}=x_0\in(3，4)$.

$k<g(x)_{\min}=x_0\in(3，4)$，且 $k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore k_{\max}=3$.

4.记 $f'(x)$，$g'(x)$分别为函数 $f(x)$，$g(x)$的导函数.若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，满足 $f(x_0)=g(x_0)$且 $f'(x_0)=g'(x_0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$与 $g(x)$的一个“S 点”.

(1)证明：函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x^2+2x-2$ 不存在“S 点”；

(2)若函数 $f(x)=ax^2-1$ 与 $g(x)=\ln x$ 存在“S 点”，求实数 a 的值；

(3)已知函数 $f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\dfrac{be^x}{x}$.对任意 $a>0$，判断是否存在 $b>0$，使函数 $f(x)$与 $g(x)$在区间$(0，+\infty)$内存在“S 点”，并说明理由.

(1)证明　函数 $f(x)=x$，$g(x)=x^2+2x-2$，

则 $f'(x)=1$，$g'(x)=2x+2$.

由 $f(x)=g(x)$且 $f'(x)=g'(x)$，得

$\begin{cases}x=x^2+2x-2，\\1=2x+2，\end{cases}$ 此方程组无解.

因此，$f(x)$与 $g(x)$不存在“S 点”.

(2)解　函数 $f(x)=ax^2-1$，$g(x)=\ln x$，

则 $f'(x)=2ax$，$g'(x)=\frac{1}{x}$.

设 x_0 为 $f(x)$与 $g(x)$的“S 点”，由 $f(x_0)=g(x_0)$且 $f'(x_0)=g'(x_0)$，得$\begin{cases}ax_0^2-1=\ln x_0, \\ 2ax_0=\frac{1}{x_0},\end{cases}$

即$\begin{cases}ax_0^2-1=\ln x_0, \\ 2ax_0^2=1,\end{cases}$ (*)

得 $\ln x_0=-\frac{1}{2}$，即 $x_0=e^{-\frac{1}{2}}$，则 $a=\frac{1}{2(e^{-\frac{1}{2}})^2}=\frac{e}{2}$.

当 $a=\frac{e}{2}$时，$x_0=e^{-\frac{1}{2}}$满足方程组(*)，即 x_0 为 $f(x)$与 $g(x)$的“S 点”.

因此，a 的值为$\frac{e}{2}$.

(3)解　对任意 $a>0$，设 $h(x)=x^3-3x^2-ax+a$.

因为 $h(0)=a>0$，$h(1)=1-3-a+a=-2<0$，且 $h(x)$的图象是不间断的.

所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $h(x_0)=0$.

令 $b=\frac{2x_0^3}{ex_0(1-x_0)}$，则 $b>0$.

函数 $f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\frac{be^x}{x}$.

则 $f'(x)=-2x$，$g'(x)=\frac{be^x(x-1)}{x^2}$.

由 $f(x)=g(x)$且 $f'(x)=g'(x)$，

得$\begin{cases}-x^2+a=\frac{be^x}{x}, \\ -2x=\frac{be^x(x-1)}{x^2},\end{cases}$

即$\begin{cases}-x^2+a=\dfrac{2x_0^3}{\mathrm{e}x_0(1-x_0)}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^x}{x},\\ -2x=\dfrac{2x_0^3}{\mathrm{e}x_0(1-x_0)}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2},\end{cases}$ (**)

此时，x_0满足方程组(**)，即x_0是函数$f(x)$与$g(x)$在区间(0，1)内的一个“S点”．因此，对任意$a>0$，存在$b>0$，使函数$f(x)$与$g(x)$在区间$(0，+\infty)$内存在“S点”．

【典例1】 (2021徐州模拟)已知函数$f(x)=x-\ln x-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

(1)求$f(x)$的最大值；

(2)若$f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x-bx\geqslant 1$恒成立，求实数$b$的取值范围.

解 (1)$f(x)=x-\ln x-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，定义域为$(0，+\infty)$，

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x-\mathrm{e}^x)}{x^2}$.

令$g(x)=x-\mathrm{e}^x(x>0)$，则$g'(x)=1-\mathrm{e}^x<0$，

所以$g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

故$g(x)<g(0)=-1<0$，

当$x\in(0，1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在(0，1)上单调递增；

当$x\in(1，+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(1，+\infty)$上单调递减.

所以$f(x)_{\max}=f(1)=1-\mathrm{e}$.

(2)$f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x-bx\geqslant 1$，

$\Leftrightarrow -\ln x+x-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}+x\mathrm{e}^x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-bx\geqslant 1$，

$\Leftrightarrow \dfrac{x\mathrm{e}^x-\ln x-1+x}{x}\geqslant b$恒成立，

令$\varphi(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x-\ln x-1+x}{x}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{x^2\mathrm{e}^x+\ln x}{x^2}$.

令$h(x)=x^2\mathrm{e}^x+\ln x$，则$h(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，$x\to 0$，$h(x)\to -\infty$，且$h(1)=\mathrm{e}>0$，

所以$h(x)$在(0，1)上存在零点x_0，

即$h(x_0)=x_0^2\mathrm{e}x_0+\ln x_0=0$，

$x_0^2\mathrm{e}x_0+\ln x_0=0\Leftrightarrow x_0\mathrm{e}x_0=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)(\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{x0}})$，

由于$y=x\mathrm{e}^x$在$(0，+\infty)$上单调递增，

故$x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}=-\ln x_0$，即$\mathrm{e}x_0=\dfrac{1}{x_0}$，

所以$\varphi(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，

$\varphi(x)_{\min}=\varphi(x_0)=\dfrac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1+x_0}{x_0}$

$=\dfrac{1+x_0-1+x_0}{x_0}=2$，

因此 $b\leqslant 2$，即实数 b 的取值范围是$(-\infty，2]$.

点津突破 1.虚设函数 $h(x)$的零点 x_0，利用特殊点处函数值、零点存在性定理、函数的单调性、函数的图象等，判断零点存在，并通过数值估算零点 x_0 所在区间(0，1).

2.把函数零点处函数值为 0 作为条件回代，使得 $h(x_0)=0$，从而 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，化简消参，用单调性计算 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(x_0)=2$.

【典例 2】 已知函数 $f(x)=xe^x-a(x+\ln x)$.

(1)讨论 $f(x)$极值点的个数；

(2)若 x_0 是 $f(x)$的一个极小值点，且 $f(x_0)>0$，证明：$f(x_0)>2(x_0-x_0^3)$.

(1)解 $f'(x)=(x+1)e^x-a\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(x+1)\left(e^x-\dfrac{a}{x}\right)=\dfrac{(x+1)(xe^x-a)}{x}$，$x\in(0，+\infty)$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$上为增函数，不存在极值点；

②当 $a>0$ 时，令 $h(x)=xe^x-a$，$h'(x)=(x+1)e^x>0$，

显然函数 $h(x)$在$(0，+\infty)$上是增函数，

又因为当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to -a<0$，$h(a)=a(e^a-1)>0$，

必存在 $x_0>0$，使 $h(x_0)=0$.

当 $x\in(0，x_0)$时，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

所以，$x=x_0$ 是 $f(x)$的极小值点.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$无极值点，当 $a>0$ 时，$f(x)$有一个极值点.

(2)证明 由(1)得，$f'(x_0)=0$，即 $x_0e^{x_0}=a$，

$f(x_0)=x_0e^{x_0}-a(x_0+\ln x_0)=x_0e^{x_0}(1-x_0-\ln x_0)$，

因为 $f(x_0)>0$，所以 $1-x_0-\ln x_0>0$，

令 $g(x)=1-x-\ln x$，$g'(x)=-1-\dfrac{1}{x}<0$，

$g(x)$在$(0，+\infty)$上是减函数，且 $g(1)=0$，

由 $g(x)>g(1)$得 $x<1$，所以 $x_0\in(0，1)$，

设 $\varphi(x)=\ln x-x+1$，$x\in(0，1)$，

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

当 $x\in(0，1)$时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$为增函数，

$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，即 $\varphi(x)<0$，

即 $\ln x<x-1$，所以 $-\ln x>1-x$，

所以 $\ln(x+1)<x$，所以 $e^x>x+1>0$，则 $ex_0>x_0+1$.

因为 $x_0\in(0，1)$，所以 $1-x_0-\ln x_0>1-x_0+1-x_0=2(1-x_0)>0$.

相乘得 $ex_0(1-x_0-\ln x_0)>(x_0+1)(2-2x_0)$，

所以 $f(x_0)=x_0ex_0(1-x_0-\ln x_0)$

$>2x_0(x_0+1)(1-x_0)=2x_0(1-x_0^2)=2(x_0-x_0^3)$.

故 $f(x_0)>2(x_0-x_0^3)$成立.

点津突破　1.满足 $f'(x_0)=0$ 的 x_0 是 $y=f(x)$取得极值的必要不充分条件，因此以零点 x_0 为分界点，要判定 $f'(x)$的正负.

2.求解该类题目，虚设零点，将零点方程适当变形，必要时要将零点的范围适当缩小.本题第(2)问运用两个重要不等式 $e^x\geqslant x+1>0$ 及 $x-1\geqslant\ln x$ 和不等式的性质，思维能力要求较高.

[跟踪演练]

1.已知函数 $f(x)=2x+x\ln x(x>1)$，若不等式 $f(x)>t(x-1)+1$ 恒成立，求正整数 t 的最大值.

解　不等式 $f(x)>t(x-1)+1$ 化为 $2x+x\ln x-1>t(x-1)$，

由于 $x>1$，得 $t<\dfrac{2x+x\ln x-1}{x-1}(x>1)$恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{2x+x\ln x-1}{x-1}(x>1)$，

则由题意知 $t<g(x)_{\min}$，$x\in(1，+\infty)$.

$g'(x)=\dfrac{x-2-\ln x}{(x-1)^2}$，$x\in(1，+\infty)$，

再令 $h(x)=x-2-\ln x(x>1)$，

则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$，所以 $h(x)$在$(1，+\infty)$上为增函数.

又 $h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2-\ln 4>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(3，4)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $x_0-2=\ln x_0$，

当 $x\in(1，x_0)$时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(1，x_0)$上单调递减；

当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$在$(x_0，+\infty)$上单调递增，

可知 $g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{2x_0+x_0\ln x_0-1}{x_0-1}$

$=\frac{2x_0+x_0(x_0-2)-1}{x_0-1}=x_0+1$,

所以 $t<x_0+1$.

又 $3<x_0<4$，知 $4<x_0+1<5$.

因为 t 为正整数，所以 t 的最大值为 4.

2.已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性，并证明 $f(x)$有且仅有两个零点；

(2)设 x_0 是 $f(x)$的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0，\ln x_0)$处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

(1)**解**　$f(x)$的定义域为$(0，1)\cup(1，+\infty)$.

因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$，

所以 $f(x)$在$(0，1)$，$(1，+\infty)$上单调递增.

因为 $f(e)=1-\frac{e+1}{e-1}=\frac{-2}{e-1}<0$，$f(e^2)=2-\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{e^2-3}{e^2-1}>0$，

所以 $f(x)$在$(1，+\infty)$上有唯一零点 $x_1(e<x_1<e^2)$，

即 $f(x_1)=0$.

又 $0<\frac{1}{x_1}<1$，$f\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\frac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，

故 $f(x)$在$(0，1)$上有唯一零点$\frac{1}{x_1}$.

综上，$f(x)$有且仅有两个零点.

(2)**证明**　因为 $e^{-\ln x_0}=\frac{1}{x_0}$,

所以点 $B\left(-\ln x_0，\frac{1}{x_0}\right)$在曲线 $y=e^x$ 上.

由题设知 $f(x_0)=0$，即 $\ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$,

故直线 AB 的斜率 $k=\frac{\frac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\frac{\frac{1}{x_0}-\frac{x_0+1}{x_0-1}}{-\frac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\frac{1}{x_0}$.

又曲线 $y=e^x$ 在点 $B\left(-\ln x_0，\frac{1}{x_0}\right)$处切线的斜率是$\frac{1}{x_0}$, 曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$处切线的斜率也是$\frac{1}{x_0}$,

所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0，\ln x_0)$处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.