湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——极值点偏移问题答案 1

基本方法——极值点偏移 1：纯偏移

1.

(Ⅰ)解：$f'(x)=(1-x)e^{-x}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内是增函数，在 $(1,+\infty)$ 内是减函数.

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)$，且 $f(1)=\frac{1}{e}$.

(Ⅱ)证明：由题意可知 $g(x)=f(2-x)$，得 $g(x)=(2-x)e^{x-2}$.

令 $F(x)=f(x)-g(x)$，

即 $F(x)=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$.

于是 $F'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)e^{-x}$.

当 $x>1$ 时，$2x-2>0$，从而 $e^{2x-2}-1>0$.

又 $e^{-x}>0$，所以 $F'(x)>0$.

从而函数 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数.

又 $F(1)=e^{-1}-e^{-1}=0$，

所以 $x>1$ 时，有 $F(x)>F(1)=0$，

即 $f(x)>g(x)$.

(Ⅲ)证明：(1)若 $(x_1-1)(x_2-1)=0$，

由(Ⅰ)及 $f(x_1)=f(x_2)$，

得 $x_1=x_2=1$. 与 $x_1\neq x_2$ 矛盾.

(2)若 $(x_1-1)(x_2-1)>0$，

由(Ⅰ)及 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $x_1=x_2$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾.

根据(1)，(2)得 $(x_1-1)(x_2-1)<0$.

不妨设 $x_1<1$，$x_2>1$.

由(Ⅱ)可知，$f(x_2)>g(x_2)$，$g(x_2)=f(2-x_2)$，

所以 $f(x_2)>f(2-x_2)$，从而 $f(x_1)>f(2-x_2)$.

因为 $x_2>1$，所以 $2-x_2<1$.

又由(Ⅰ)可知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 内是增函数，

所以 $x_1>2-x_2$，即 $x_1+x_2>2$.

2.

（1）由已知得f'（x）=ex-2x-1，令φ（x）=f'（x），则φ'（x）=ex-2，

由φ'（x）=ex-2>0得x>ln2，由p'（x）=ex-2<0，得x<ln 2，

∴函数y=f'（x）在区间（-∞，ln2）上单调递减，在（ln 2，+∞）上单调递增．

（2）若f（x）≥-x2+ax+b-1恒成立，

即h（x）=f（x）+x2-ax-b+1=ex-（a+1）x-b≥0恒成立∵h'（x）=ex-（a+1），

当a+1>0时，h（x）>0恒成立，则b≤0，（a+1）b=0；

当a+1>0时，h'（x）=ex-（a+1）为增函数，由h'（x）=0得x=ln（a+1），

故f'（x）>0⇔x>ln（a+1），f'（x）<0⇔x<ln（a+1）．

当x=ln（a+1）时，h（x）取最小值h（ln（a+1））=a+1-（a+1）ln（a+1）-b．

依题意有h（ln（a+1））=a+1-（a+1）ln（a+1）-b≥0，

即b≤a+1-（a+1）ln（a+1），∵a+1>0，∴（a+1）b≤（a+1）2-（a+1）2ln（a+1），

令u（x）=x2-x2lnx（x>0），则u'（x）=2x-2xlnx-x=x（1-2lnx），$u'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{e}$，$u'(x)<0\Leftrightarrow x>\sqrt{e}$，

∴当$x=\sqrt{e}$，u（x）取最大值$u(\sqrt{e})=\frac{e}{2}$，

故当$a+1=\sqrt{e}$，$b=\frac{\sqrt{e}}{2}$时，（a+1）b取最大值$\frac{e}{2}$.

综上，若$f(x)\geq\frac{1}{2}x^2+ax+b$，则（a+1）b的最大值为$\frac{e}{2}$.

（3）x1+x2<2ln2

法一：证明如下：设x>ln2，∴2ln2-x<ln2，f'（2ln2-x）e（2ln2-x）-2（2ln2-x）-1=$\frac{4}{e^x}$+2x-4ln2-1.

令g（x）=f'（x）-f'（2ln2-x）=$e^x-\frac{4}{e^x}$-4x+4ln2(x≥ln2)，

∴g'（x）=ex+4e-x-4≥0，当且仅当x=ln2时，等号成立，

∴g（x）=f'（x）-f'（2ln2-x）在（ln2，+∞）上单调递增，

又g（ln2）=0，∴当x>ln2时，g（x）=f'（x）-f'（2ln2-x）>g（ln2）=0，

即f'（x）>f'（2ln2-x），不妨设x1<ln2<x2，∴$f'(x_2)>f'(2\ln 2-x_2)$，

又∵$f'(x_1)=f'(x_2)$，∴$f'(x_1)>f'(2\ln 2-x_2)$，

由于x2>ln2，∴2ln2-x2<ln2，

∵x1<ln2，由（1）知函数y=f'（x）在区间（-∞，ln2）上单调递减，

∴x1<2ln2-x2，即x1+x2<2ln2.

法二：x1+x2<2ln2.

证明：令$x_1<\ln 2<x_2$∵$f'(x_1)=f'(x_2)$，∴

$e^{x_1}-2x_1-1=e^{x_2}-2x_2-1$，∴$2=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$，

记$t=\frac{x_2-x_1}{2}$，(t>0)，则由（1）知

$\varphi'(\frac{x_1+x_2}{2})=e^{\frac{x_1+x_3}{2}}-\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{e^{\frac{\pi+x_2}{2}}}{2t}(2t-(e^t-e^{-t}))$，

设g（t）=2t-（et-e-t），（t>0），则g'（t）=2-（et+e-t）<0，

∴g（t）在t∈（0，+∞）上单调递减，故g（t）<g（0）=0，而$\frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2t}>0$，∴$\varphi'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$，∴$e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<2$，∴x1+x2<2ln2.

3.【解析】:（Ⅰ） $f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$.

①设 $a=0$，则 $f(x)=(x-2)e^x$， $f(x)$ 只有一个零点.

②设 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

又 $f(1)=-e$， $f(2)=a$，取 b 满足 $b<0$ 且 $b<\ln\frac{a}{2}$，则 $f(b)>\frac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2=a(b^2-\frac{3}{2}b)>0$，

故 $f(x)$ 存在两个零点.

③设 $a<0$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

若 $a\ge-\frac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)\le1$，故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增. 又当 $x\le1$ 时 $f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

若 $a<-\frac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$，故当 $x\in(1,\ln(-2a))$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 因此 $f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 单调递减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 单调递增. 又当 $x\le1$ 时， $f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

（Ⅱ）不妨设 $x_1<x_2$，由（Ⅰ）知 $x_1\in(-\infty,1),x_2\in(1,+\infty)$， $2-x_2\in(-\infty,1)$， $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，所以 $x_1+x_2<2$ 等价于 $f(x_1)>f(2-x_2)$，即 $f(2-x_2)<0$.

由于 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$，而 $f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$，所以

$f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$.

设 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$，则 $g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)$.

所以当 $x>1$ 时， $g'(x)<0$，而 $g(1)=0$，故当 $x>1$ 时， $g(x)<0$.

从而 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$，故 $x_1+x_2<2$.

4.（1）易得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

对函数 $f(x)$ 求导得： $f'(x)=\frac{1}{x}-ax$.

当 $a\le0$ 时， $f'(x)>0$ 恒成立，即可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 时， $f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 时， $f'(x)<0$，

故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

（2）当 $a=1$ 时， $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+1$， $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-x=\dfrac{1-x^2}{x}$，

此时 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减.

$f\left(x\right)_{极大值}=f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}>0$，又 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)<0$， $f\left(e\right)<0$，

不妨设 $x_1<x_2$，则有 $0<x_1<1<x_2$，令 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(2-x\right)$， $x\in\left(0,1\right)$，

$F'\left(x\right)=f'\left(x\right)+f'\left(2-x\right)=\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{1-\left(2-x\right)^2}{2-x}=\dfrac{2\left(1-x\right)^2}{x\left(2-x\right)}$.

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时， $F'\left(x\right)>0$， $F\left(x\right)$ 单调递增，

$\because x_1\in\left(0,1\right)$， $\therefore F\left(x_1\right)=f\left(x_1\right)-f\left(2-x_1\right)<F\left(1\right)=0$， $\therefore f\left(x_1\right)<f\left(2-x_1\right)$，

又 $\because f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$， $\therefore f\left(x_2\right)<f\left(2-x_1\right)$，

$\because x_2>1$， $2-x_1>1$， $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$.

5.（1）由 $f(x)=(x-2)\ln x+x-1$，有 $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1$

$\therefore$ $f'(1)=0$，而 $f(1)=0$，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=0$

（2）由（1）得 $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1=\ln x+2-\dfrac{2}{x}$，令 $g(x)=\ln x+2-\dfrac{2}{x},x>0$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $g(x)=\ln x+2-\dfrac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $g(1)=0$，知当 $0<x<1$ 时， $f'(x)<0$；当 $x>1$ 时， $f'(x)>0$，

$\therefore$ 当函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值.

$\because$ $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right),x_1\ne x_2,x_1,x_2\in R$，不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

令 $h(x)=f(x)-f(2-x),\quad 0<x<1$，

则 $h'(x)=f'(x)+f'(2-x)=\ln x+2-\dfrac{2}{x}+\ln(2-x)+2-\dfrac{2}{2-x}=\ln x(2-x)+4-\dfrac{4}{x(2-x)}$

因为$0<x<1$，所以$0<x(2-x)<1$，即有$\ln x(2-x)<0, 4-\dfrac{4}{x(2-x)}<0$，

$\therefore h'(x)<0$，即函数$h(x)=f(x)-f(2-x)$在$(0,1)$上单调递减，而$h(1)=f(1)-f(1)=0$，

所以$h(x)>h(1)=0$在$(0,1)$上恒成立，即$f(x)>f(2-x)$在$(0,1)$上恒成立，有$f\left(x_1\right)>f\left(2-x_1\right)$在$(0,1)$上恒成立，又$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，所以$f\left(x_2\right)>f\left(2-x_1\right)$，

因为$0<x_1<1<x_2$且$2-x_1>1$，而函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$x_2>2-x_1$，即$x_1+x_2>2$，而$x_0=1$，所以$x_1+x_2>2x_0$得证.

6（1）$f'(x)=e^x-a$，

$a\le 0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在R递增；

$a>0$时，令$f'(x)>0$，解得：$x>\ln a$，令$f'(x)<0$，解得：$x<\ln a$，

故$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$递减，在$(\ln a,+\infty)$递增；

（2）函数的$f(x)$的导数$f'(x)=e^x-a$，若$a\le 0$，则$f'(x)=e^x-a>0$，还是单调递增，

则不满足条件，则$a>0$由$f'(x)>0$得$x>\ln a$，由$f'(x)<0$得$x<\ln a$，

即当$x=\ln a$时，还是$f(x)$取得极小值同时也是最小值$f(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a=a(1-\ln a)$

$\because f(x)=a$有两个根，$\therefore a(1-\ln a)<0$，即$1-\ln a<0$，则$\ln a>1$，即$a>e$

要证$x_1+x_2<2\ln a$，则只需要$x_2<2\ln a-x_1$又$x_2>\ln a$，则只需要证明$f\left(x_2\right)<f\left(2\ln a-x_1\right)$，

即证$f\left(2\ln a-x_1\right)>f\left(x_2\right)=0=f\left(x_1\right)$，

令$g(x)=f(2\ln a-x)-f(x)$，$(x<\ln a)$，则$g(x)=e^{2\ln a-x}-a(2\ln a-x)-e^x+ax$，

$g'\left(x\right)=-a^2e^{-x}+a-e^x+a=-\dfrac{\left(e^x-a\right)^2}{e^x}\le 0$，即$g(x)$在$(-\infty,\ln a]$上单调递减，

即$g(x)>g(\ln a)=0$则命题成立.

7（1）因为$f\left(x\right)=\dfrac{a}{x}-\ln x$，所以$f'\left(x\right)=-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{a+x}{x^2}$.

①当$a\ge 0$时，$f'\left(x\right)<0$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，故$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减.

②当$a<0$时，由$f'\left(x\right)>0$得$0<x<-a$；由$f'\left(x\right)<0$得$x>-a$.

即 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-a\right)$ 上单调递增，在 $\left(-a,+\infty\right)$ 上单调递减，

综上，当 $a\geq 0$ 时， $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减；

当 $a<0$ 时， $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-a\right)$ 上单调递增，在 $\left(-a,+\infty\right)$ 上单调递减.

湛江一中卓越班 2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——极值点偏移问题答案 2

（2）证明：因为 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=2$，所以 $\dfrac{a}{x_1}-\ln x_1-2=0$， $\dfrac{a}{x_2}-\ln x_2-2=0$，

即 $x_1\ln x_1+2x_1-a=x_2\ln x_2+2x_2-a=0$.

设 $g\left(x\right)=x\ln x+2x-a$，则 $g'\left(x\right)=\ln x+3$，

故 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e^3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{e^3},+\infty\right)$ 上单调递增.

由题意不妨设 $0<x_1<\dfrac{1}{e^3}<x_2$，欲证 $x_1+x_2>\dfrac{2}{e^3}$，只需证 $x_2>\dfrac{2}{e^3}-x_1$.

又 x_2， $\dfrac{2}{e^3}-x_1\in\left(\dfrac{1}{e^3},+\infty\right)$， $g\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{1}{e^3},+\infty\right)$ 上单调递增. 故只需证 $g\left(x_2\right)>g\left(\dfrac{2}{e^3}-x_1\right)$.

因为 $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，所以只需证 $g\left(x_1\right)>g\left(\dfrac{2}{e^3}-x_1\right)$ 对任意的 $x_1\in\left(0,\dfrac{1}{e^3}\right)$ 恒成立即可，

即 $x_1\ln x_1+2x_1-a>\left(\dfrac{2}{e^3}-x_1\right)\ln\left(\dfrac{2}{e^3}-x_1\right)+2\left(\dfrac{2}{e^3}-x_1\right)-a$.

整理得 $x_1\ln x_1+2x_1>\left(\dfrac{2}{e^3}-x_1\right)\ln\left(\dfrac{2}{e^3}-x_1\right)+\dfrac{4}{e^3}-2x_1$，即 $x_1\ln x_1-\left(\dfrac{2}{e^3}-x_1\right)\ln\left(\dfrac{2}{e^3}-x_1\right)+4x_1-\dfrac{4}{e^3}>0$.

设 $h\left(x\right)=x\ln x-\left(\dfrac{2}{e^3}-x\right)\ln\left(\dfrac{2}{e^3}-x\right)+4x-\dfrac{4}{e^3}$， $x\in\left(0,\dfrac{1}{e^3}\right)$，

则 $h'\left(x\right)=\ln x+\ln\left(\dfrac{2}{e^3}-x\right)+6=\ln\left(\dfrac{2x}{e^3}-x^2\right)+6$.

因为 $0<x<\dfrac{1}{e^3}$，所以 $0<\dfrac{2x}{e^3}-x^2<\dfrac{1}{e^6}$，所以 $h'\left(x\right)=\ln\left(\dfrac{2x}{e^3}-x^2\right)+6<0$，所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e^3}\right)$ 上单调递减，

则 $h\left(x\right)>h\left(\frac{1}{\mathrm{e}^3}\right)=0$. 所以 $x_1+x_2>\frac{2}{\mathrm{e}^3}$ 成立.

极值点偏移 2：非纯偏移（转化）

8.（1）$f\left(x\right)$ 有两个零点 $\Leftrightarrow a=\frac{\ln x}{x}$ 有两个相异实根.

令 $G\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，则 $G'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

由 $G'\left(x\right)>0$ 得：$0<x<e$，由 $G'\left(x\right)<0$ 得：$x>e$，

$\therefore G\left(x\right)$ 在 $\left(0,e\right)$ 单调递增，在 $\left(e,+\infty\right)$ 单调递减，$\therefore G\left(x\right)_{\max}=G\left(e\right)=\frac{1}{e}$，

又 $\because G\left(1\right)=0$，$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$G\left(x\right)<0$；当 $x>1$ 时，$G\left(x\right)>0$

当 $x\to+\infty$ 时，$G\left(x\right)\to 0$，

$\therefore$ $f\left(x\right)$ 有两个零点时，实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

（2）不妨设 $x_1<x_2$，由题意得 $\begin{cases} ax_1=\ln x_1 \\ ax_2=\ln x_2 \end{cases}$，

$\therefore a\left(x_1+x_2\right)=\ln x_1+\ln x_2$ ，$a\left(x_2-x_1\right)=\ln x_2-\ln x_1$，$\therefore a=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

要证：$x_1\cdot x_2>e^2$，只需证 $\ln x_1+\ln x_2>2$.

$$\ln x_1+\ln x_2=a\left(x_1+x_2\right)=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x_1+x_2\right)=\left(\frac{\frac{x_2}{x_1}+1}{\frac{x_2}{x_1}-1}\right)\cdot\ln\frac{x_2}{x_1},$$

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$，$t>1$，只需证 $\left(\frac{t+1}{t-1}\right)\ln t>2$

$\because t>1$，$\therefore\frac{t+1}{t-1}>0$，$\therefore$ 只需证：$\ln t>\frac{2\left(t-1\right)}{\left(t+1\right)}$.

令 $F\left(t\right)=\ln t-\frac{2\left(t-1\right)}{\left(t+1\right)}\left(t>1\right)$，$\therefore F'\left(t\right)=\frac{1}{t}-\frac{4}{\left(t+1\right)^2}=\frac{\left(t-1\right)^2}{t\left(t+1\right)^2}>0$，

$\therefore F\left(t\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 递增，$\therefore F\left(t\right)>F\left(1\right)=0$，$\therefore\ln t>\frac{2\left(t-1\right)}{\left(t+1\right)}$ 成立.

综上所述，$x_1\cdot x_2>e^2$ 成立.

【解法二】欲证 $x_1x_2>\mathrm{e}^2$，需证 $\ln x_1+\ln x_2>2$．若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， x_2，即函数 $f'(x)$ 有两个零点．又 $f'(x)=\ln x-mx$，所以，x_1，x_2 是方程 $f'(x)=0$ 的两个不同实根．显然 $m>0$，否则，函数 $f'(x)$ 为单调函数，不符合题意．

由 $\begin{cases}\ln x_1-mx_1=0\\ \ln x_2-mx_2=0\end{cases}\Rightarrow \ln x_1+\ln x_2=m(x_1+x_2)$，

即只需证明 $m(x_1+x_2)>2$ 即可．即只需证明 $x_1+x_2>\dfrac{2}{m}$．来源：微信公众号 中学数学研讨部落

设 $g(x)=f'(x)-f'\left(\dfrac{2}{m}-x\right)\left(x\in\left(0,\dfrac{1}{m}\right)\right)$，$g'(x)=\dfrac{2(mx-1)^2}{x(2-mx)}>0$，故 $g(x)$ 在

$\left(0,\dfrac{1}{m}\right)\uparrow$，即 $g(x)<g\left(\dfrac{1}{m}\right)=0$，故 $f'(x)<f'\left(\dfrac{2}{m}-x\right)$．

由于 $f''(x)=\dfrac{1}{x}-m=\dfrac{1-mx}{x}$，故 $f'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{m}\right)\uparrow$，$\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)\downarrow$．

设 $x_1<\dfrac{1}{m}<x_2$，令 $x=x_1$，则 $f'(x_2)=f'(x_1)<f'\left(\dfrac{2}{m}-x_1\right)$，

9.（1）对函数求导可得 $f'(x)=ae^{ax}-a=a(e^{ax}-1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$

①当 $a>0$ 时，若 $x>0$，则 $e^{ax}>1$，即 $f'(x)>0$；若 $x<0$，则 $e^{ax}<1$，即 $f'(x)<0$．

②当 $a<0$ 时，若 $x>0$，则 $e^{ax}<1$，即 $f'(x)>0$；若 $x<0$，则 $e^{ax}>1$，即 $f'(x)<0$．

综上，$f(x)$ 的单调递增区间是 $[0,+\infty)$，单调递减区间是 $(-\infty,0)$．

（2）证明：由（1）知，$f(x)$ 有两个零点时，$x_1<0<x_2$，$f(0)=e^0-a(0+2)<0$，$\therefore a>\dfrac{1}{2}$．

令 $e^{ax_1}=t_1$，$e^{ax_2}=t_2$，则 $ax_1=\ln t_1, ax_2=\ln t_2$

$\therefore t_1$，t_2 为方程 $t-\ln t-2a=0$ 的两个根．

令 $g(t)=t-\ln t-2a$，则 t_1，t_2 为 $g(t)$ 的两个零点，$0<t_1<1<t_2$．

$g(2-t_1)-g(t_2)=g(2-t_1)-g(t_1)=2-t_1-\ln(2-t_1)-2a-(t_1-\ln t_1-2a)=2-2t_1-\ln(2-t_1)+\ln t_1$

令 $\mathrm{h}(\mathrm{t}_1)=2-2\mathrm{t}_1-\ln(2-\mathrm{t}_1)+\ln\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_1\in(0,1)$，则

$$h'(t_1)=-2+\frac{1}{2-t_1}+\frac{1}{t_1}=\frac{-2(2-t_1)t_1+t_1+(2-t_1)}{(2-t_1)t_1}=\frac{2(t_1-1)^2}{(2-t_1)t_1}>0.$$

$\therefore h(t_1)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$\therefore h(t_1)<h(1)=0$

$\therefore g(2-t_1)-g(t_2)<0$，即 $g(2-t_1)<g(t_2)$.

$\because g'(t)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$，$\therefore$当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$g(t)$ 单调递增.

$\because (2-t_1)\in(1,+\infty)$，$t_2\in(1,+\infty)$，$\therefore 2-t_1<t_2$，$\therefore t_1+t_2>2$，$\therefore e^{ax_1}+e^{ax_2}>2$.

10.（1）$f'(x)=\dfrac{(x-2)\left(e^{x-1}-x\right)}{x^3}(x>0)$，令 $g(x)=e^{x-1}-x(x>0)$，$g(x)=e^{x-1}-1$，

因为 $x>0$，$e^{x-1}>\dfrac{1}{e}$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)\geq g(1)=e^0-1=0$，

所以当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

$f(x)$ 的单调递减区间 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$.

（2）（i）$f(x)=\dfrac{(x-2)\left(e^{x-1}-ax\right)}{x^3}(x>0)$，

要使 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上有两个极值点 x_1,x_2，则 $g(x)=e^{x-1}-ax$ 在 $(0,2)$ 上有两个不同的零点，

①$a\leq 1$ 时，由（1）知，$g(x)=e^{x-1}-ax\geq e^{x-1}-x$，

令 $S(x)=e^{x-1}-x$，故 $S'(x)=e^{x-1}-1>0$，所以 $S(x)$ 在 $(0,2)$ 上为增函数，

所以 $S(x)>S(0)=0$，故 $g(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上无零点，舍.

②当 $a\geq e$ 时，$\because x\in(0,2)$，$e^{x-1}\in\left(\dfrac{1}{e},e\right)$，$g'(x)=e^{x-1}-a<0$，

则 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，故 $g(x)$ 最多只有一个零点，不合题意，舍去.

③当 $1<a<e$ 时，由（1）知所以 $g(x)$ 在 $(0,\ln a+1)$ 上单调递减，在 $(\ln a+1,2)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(\ln a+1)=-a\ln a$，即要使 $\begin{cases} g(0)=\dfrac{1}{e}>0 \\ g(\ln a+1)=-a\ln a<0 \\ g(2)=e-2a>0 \end{cases}$，解得 $1<a<\dfrac{e}{2}$，

综上所述，a 的取值范围为 $1<a<\dfrac{e}{2}$.

（ii）由（i）知，$g(x_1)=g(x_2)=0$，$0<x_1<\ln a+1<x_2<2$，

即$\begin{cases}e^{x_1-1}=ax_1\\e^{x_2-1}=ax_2\end{cases}$，故$\begin{cases}x_1-1=\ln a+\ln x_1\\x_2-1=\ln a+\ln x_2\end{cases}$，所以$x_1+x_2-2-2\ln a=\ln(x_1x_2)$，

要证$x_1x_2<1$，只要证$x_1+x_2-2-2\ln a<0$，就要证$x_2<2+2\ln a-x_1$，

由上可知$g(x)$ 在$(\ln a+1,+\infty)$上单调递增，所以只要证$g(x_2)<g(2+2\ln a-x_1)$，而$g(x_2)=g(x_1)$，

所以只要证$g(x_1)<g(2+2\ln a-x_1)$，（*）

令$h(x)=g(x)-g(2+2\ln a-x)(0<x<\ln a+1)$，即$h(x)=\frac{1}{e}\left(e^x-e^{2+2\ln a-x}\right)-2ax+2a(1+\ln a)$，

所以$h'(x)=\frac{1}{e}\left(e^x+e^{2+2\ln a-x}\right)-2a\geq\frac{1}{e}\cdot 2\sqrt{e^x\cdot e^{2+2\ln a-x}}-2a=0$，故$h(x)$在$(0,\ln a+1)$上单调递增，

所以当$x\in(0,\ln a+1)$时，$h(x)<h(1+\ln a)=0$，即$g(x)-g(2+2\ln a-x)<0$，

$g(x_1)-g(2+2\ln a-x_1)<0$，即（*）式成立，所以$x_1x_2<1$得证.

11.

【解答】解：（1）$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$ $(x>0)$，

①当$a\leqslant 0$时，由于$x>0$，故$ax-1<0$，$f'(x)<0$，

所以，$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$，

②当$a>0$时，由$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{a}$，

在区间$(0,\frac{1}{a})$上，$f'(x)<0$，在区间$(\frac{1}{a}，+\infty)$上，$f'(x)>0$.

所以，函数$f(x)$的单调递减区间为$(0,\frac{1}{a})$，

单调递增区间为$(\frac{1}{a}，+\infty)$，

综上，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$；

当$a>0$时，函数$f(x)$的单调递减区间为$(0,\frac{1}{a})$，单调递增区间为$(\frac{1}{a}，+\infty)$.

（2）函数$f(x)$有两个零点分别为x_1，x_2，不妨设$x_1<x_2$，

则 $lnx_1-ax_1=0$，$lnx_2-ax_2=0$，

$lnx_2-lnx_1=a(x_2-x_1)$，

要证：$\frac{1}{lnx_1}+\frac{1}{lnx_2}>2$，

只需证：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2a$，只需证：$\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}>a$，

只需证：$\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}>\frac{lnx_2-lnx_1}{x_2-x_1}$，

只需证：$\frac{x_2{}^2-x_1{}^2}{2x_1x_2}>ln\frac{x_2}{x_1}$，

只需证：$ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{1}{2}(\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2})$，

令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$，即证 $lnt<\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$

设 $\varphi(t)=lnt-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$，

则 $\varphi'(t)=\frac{2t-t^2-1}{2t^2}<0$，

即函数 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

则 $\varphi(t)<\varphi$（1）$=0$，

即得 $\frac{1}{lnx_1}+\frac{1}{lnx_2}>2$.

12.（Ⅰ）因为 $f'(x)=1-\frac{2\ln x}{x}-\frac{a}{x}$，所以 $g(x)=xf'(x)=x-2\ln x-a$，$x\in(0,+\infty)$

则 $g'(x)=\frac{x-2}{x}$，

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	负	0	正
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $g(x)$ 单调递减区间为 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$

极小值为 $g(2)=2-2\ln 2-a$，无极大值.

（Ⅱ）（i）$h(x)=x-a\ln x$ 有两个零点.

因为 $h'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$

①当 $a\le 0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，不可能有两个零点；

②当 $a>0$ 时，令 $h'(x)<0$，得 $0<x<a$，$h(x)$ 单调递减；

令 $h'(x)>0$，得 $x>a$，$h(x)$ 单调递增. 所以 $h(x)_{\min}=h(a)=a-a\ln a$

要使 $h(x)$ 有两个零点，即使 $h(a)<0$，得 $a>e$，

又因为 $h(1)=1>0$，$h(e)=e-a<0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 存在唯一一个零点，且 $a>e$，$h(\mathrm{e}^a)=\mathrm{e}^a-a^2>0$，

所以$h\left(x\right)$在$\left(e,e^{a}\right)$上存在唯一一个零点，符合题意.

综上，当$a>e$时，函数$h\left(x\right)$有两个零点.

法二：$h\left(x\right)=x-a\ln x$有两个零点.

等价于$x\neq1$时，$a=\dfrac{x}{\ln x}$有两个实根，（1）

令$F\left(x\right)=\dfrac{x}{\ln x}$，$F'\left(x\right)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^{2}x}$

当$x\in\left(0,1\right)$时，$F'\left(x\right)<0$，$F\left(x\right)$单调递减，且$F\left(x\right)<0$；

当$x\in\left(1,e\right)$时，$F'\left(x\right)<0$，$F\left(x\right)$单调递减；

当$x\in\left(e,+\infty\right)$时，$F'\left(x\right)>0$，$F\left(x\right)$单调递增；

$F\left(e\right)=e$，$x\to1^{+}$，$F\left(x\right)\to+\infty$；$x\to+\infty$，$F\left(x\right)\to+\infty$.

要使（1）有两个实数根，即使$a>F\left(e\right)=e$，

综上，当$a>e$时，函数$h\left(x\right)$有两个零点.

（ii）$x\mathrm{e}^{x}-a\left(\ln x+x\right)=x\mathrm{e}^{x}-a\ln\left(x\mathrm{e}^{x}\right)\left(x>0\right)$有两个实根，令$t=x\mathrm{e}^{x}$，

$g\left(t\right)=t-a\ln t$有两个零点t_1，t_2，$t_1=x_1\mathrm{e}^{x_1}$，$t_2=x_2\mathrm{e}^{x_2}$，

所以$\begin{cases}t_1-a\ln t_1=0\\t_2-a\ln t_2=0\end{cases}$，所以$a\left(\ln t_2-\ln t_1\right)=t_2-t_1$（1）；$a\left(\ln t_2+\ln t_1\right)=t_2+t_1$ （2）

要证$e^{x_1+x_2}>\dfrac{e^{2}}{x_1x_2}$，只需证$\left(x_1e^{x_1}\right)\cdot\left(x_2e^{x_2}\right)>e^{2}$，即证$\ln\left(x_1e^{x_1}\right)+\ln\left(x_2e^{x_2}\right)>2$，

所以只需证$\ln t_1+\ln t_2>2$.

由（1）（2）可得$\ln t_2+\ln t_1=\dfrac{t_2+t_1}{t_2-t_1}\left(\ln t_2-\ln t_1\right)=\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}$，只需证$\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}>2$.

设$0<t_1<t_2$，令$t=\dfrac{t_2}{t_1}$，则$t>1$，所以只需证$\ln t>2\dfrac{t-1}{t+1}$，即证$\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>0$

令$h\left(t\right)=\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2$，$t>1$，则$h'\left(t\right)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{\left(t+1\right)^{2}}=\dfrac{\left(t-1\right)^{2}}{t\left(t+1\right)^{2}}>0$，

$h(t)>h(1)=0$，即当$t>1$时，$\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>0$成立.

所以$\ln t_1+\ln t_2>2$，即$\left(x_1e^{x_1}\right)\cdot\left(x_2e^{x_2}\right)>e^2$，即$x_1x_2>\dfrac{e^2}{e^{x_1+x_2}}$.

13（1） $f'(x)=(x-1)e^x+a\left(x^2-x\right)=(x-1)\left(e^x+ax\right)$

$\because f'(0)\neq 0$，$\therefore f'(x)=x(x-1)\left(\dfrac{e^x}{x}+a\right)$，

$f(x)$的极值点的个数即为$f'(x)=0$的变号方程根的个数

令$g(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，故$g(x)$在（0，1）上单调递减（1，+∞）上单调递增，在（－∞，0）上单调递减，且当$x<0$时，$g(x)<0$．即$g(x)=\dfrac{e^x}{x}\in(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$

根据$y=-a$与$y=g(x)$的交点个数可得：

当$a>0$时，$f(x)$有2个极值点，当$-e\leqslant a\leqslant 0$时，$f(x)$只有1个极值点，

当$a<-e$时，$f(x)$有3个极值点.

（2）证明：因为$f(x)$有3个极值点x_1，x_2，x_3（其中$x_1<x_2<x_3$），所以$e^{x_1}=-ax_1$，$e^{x_3}=-ax_3$且$x_2=1$，即得$\dfrac{e^{x_1}}{x_1}=\dfrac{e^{x_3}}{x_3}$，

要证$x_1x_3<x_2^2$，即$x_1x_3<1$，

由$\dfrac{e^{x_1}}{x_1}=\dfrac{e^{x_3}}{x_3}$，得$\dfrac{x_3}{x_1}=\dfrac{e^{x_3}}{e^{x_1}}=e^{x_3-x_1}$，设$\dfrac{x_3}{x_1}=k$，$k>1$，$e^{x_3-x_1}=k$，所以$x_3-x_1=\ln k$，

联立$\begin{cases}x_3-x_1=lnk\\ \dfrac{x_3}{x_1}=k\end{cases}$，得$\begin{cases}x_1=\dfrac{lnk}{k-1},\\ x_3=\dfrac{klnk}{k-1},\end{cases}$所以$x_1x_3=\dfrac{k(lnk)^2}{(k-1)^2}$，所以要证$x_1x_3<1$，只需$\dfrac{k(lnk)^2}{(k-1)^2}<1$，$k>1$，

则有$(lnk)^2<\dfrac{(k-1)^2}{k}$，即$lnk<\dfrac{k-1}{\sqrt{k}}=\sqrt{k}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}$，则需证明$lnk-\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k}}<0$.

令$\sqrt{k}=t$，$t>1$，即需证明$h(t)=lnt^2-t+\dfrac{1}{t}<0$．因为$h'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{-t^2+2t-1}{t^2}=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}<0$恒成立，

所以$h(t)$在$t\in(1,+\infty)$上是单调递减函数，则有$h(t)<h(1)=ln1-1+\dfrac{1}{1}=0$，

即$h(t)=lnt^2-t+\dfrac{1}{t}<0$成立，所以$x_1x_3<1$，即$x_1x_3<x_2^2$得以证明.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——极值点偏移问题答案 4

极值点偏移 3：非纯偏移（不等式解法）

14. 设 $f(x_1)=f(x_2)=c$，则 $\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=c$， $\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=c$，$(x_1\neq x_2)$ 两边取对数

$\ln x_1-x_1=\ln c$ ①；$\ln x_2-x_2=\ln c$ ②

①-②得：$\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$

根据对数平均值不等式：$\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$，$\therefore x_1+x_2>2$.

15.

【解析】：(I) $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)=-\dfrac{(2x+1)(ax-1)}{x}$.

(i) 若 $a\le 0$，则$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$ 单调增加.

(ii) 若 $a>0$，则由$f'(x)=0$得$x=\dfrac{1}{a}$，且当 $x\in(0,\dfrac{1}{a})$时，$f'(x)>0$，当$x>\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$ 单调增加，在$(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调减少.

(II) 设函数 $g(x)=f(\dfrac{1}{a}+x)-f(\dfrac{1}{a}-x)$，则

$$g(x)=\ln(1+ax)-\ln(1-ax)-2ax,$$
$$g'(x)=\frac{a}{1+ax}+\frac{a}{1-ax}-2a=\frac{2a^3x^2}{1-a^2x^2}.$$

当$0<x<\dfrac{1}{a}$时，$g'(x)>0$，而$g(0)=0$，所以$g(x)>0$.

故当$0<x<\dfrac{1}{a}$时，$f(\dfrac{1}{a}+x)>f(\dfrac{1}{a}-x)$.

(III) 由 (I) 可得，当 $a\le 0$时，函数$y=f(x)$ 的图像与 x 轴至多有一个交点，

故 $a>0$，从而 $f(x)$ 的最大值为 $f(\dfrac{1}{a})$，且$f(\dfrac{1}{a})>0$.

不妨设$A(x_1,0),B(x_2,0),0<x_1<x_2$,则$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$. $\therefore \frac{2}{a}-x_1>\frac{2}{a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

由（II）得$f(\frac{2}{a}-x_1)=f(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-x_1)>f(x_1)=0$. 从而$x_2>\frac{2}{a}-x_1$,于是$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{a}$.

由（I）知，$f'(x_0)<0$.

【解法二】：设$A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，$x_1<x_2$，则$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，

$\ln x_1-ax_1^2+(2-a)x_1=0$ ①；$\ln x_2-ax_2^2+(2-a)x_2=0$ ②

①-②得：$\ln x_1-\ln x_2-a(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(2-a)(x_1-x_2)=0$，

化简得：$\frac{1}{a(x_1+x_2)-(2-a)}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>0$ ③

而根据对数平均值不等式：$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

③等式代换到上述不等式$\frac{1}{a(x_1+x_2)-(2-a)}<\frac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow\frac{1}{2ax_0-(2-a)}<x_0$ ④

根据：$2ax_0-(2-a)x_0>0$（由③得出）∴④式变为：$2ax_0^2-(2-a)x_0-1>0\Rightarrow(2x_0+1)(ax_0-1)>0$

$\because (2x_0+1)>0$，$\therefore x_0>\frac{1}{a}$，$\therefore x_0$在函数单减区间中，即：$\therefore f'(x_0)<0$.

17

【解析】：证法 1：首先易知$a>0$，且$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上↗，在$\left(\frac{1}{a}\infty\right)$上↘，不妨设$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，

$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0\Leftrightarrow a\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-1>0\Leftrightarrow x_1+x_2>\frac{2}{a}$，构造函数$F(x)=f(x)-f\left(\frac{2}{a}-x\right)$可证.

证法 2：由题意得$\begin{cases}\ln x_1-ax_1^2+(2-a)x_1=0\\ \ln x_2-ax_2^2+(2-a)x_2=0\end{cases}$，两式相减得

$\ln x_1-\ln x_2-a(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(2-a)(x_1-x_2)=0$，

$\ln x_1-\ln x_2=(x_1-x_2)(a(x_1+x_2)+a-2)$，

$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\frac{1}{a(x_1+x_2)+a-2}>0$，

所以$\frac{1}{a(x_1+x_2)+a-1}<\frac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow a(x_1+x_2)^2+(a-2)(x_1+x_2)-2>0$

$\Rightarrow \left(a\left(x_1+x_2\right)-2\right)\left(x_1+x_2+1\right)>0 \Rightarrow x_1+x_2>\dfrac{2}{a} \Rightarrow f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

18.【解析】：由 $x_1\ln x_1=m$， $x_2\ln x_2=m$，可得： $x_1=\dfrac{m}{\ln x_1}$ ①， $x_2=\dfrac{m}{\ln x_2}$ ②

①−②得： $x_1-x_2=m(\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\ln x_1\ln x_2}) \Rightarrow \dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\dfrac{-m}{\ln x_1\ln x_2}$ ③

①+②得： $x_1+x_2=\dfrac{m(\ln x_2+\ln x_1)}{\ln x_1\ln x_2}$ ④

根据对数平均值不等式： $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{-m}{\ln x_1-\ln x_2}(x_1\neq x_2)$

利用③④式可得： $\dfrac{m(\ln x_1+\ln x_2)}{2\ln x_1\ln x_2}>\dfrac{-m}{\ln x_1\ln x_2}$

由题于 $y=m$ 与 $y=x\ln x$ 交于不同两点，易得出则 $m<0$

∴上式简化为: $\ln(x_1\cdot x_2)<-2=\ln e^{-2}$，∴ $0<x_1x_2<\dfrac{1}{e^2}$.

19.（Ⅰ）因为 $f\left(x\right)=e^x-ax+a,a\in R$，所以 $f'\left(x\right)=e^x-a$.

若 $a\le 0$，则 $f'\left(x\right)>0$，则函数 $f\left(x\right)$ 是单调增函数， $f\left(x\right)$ 的图像与 x 轴至多有一个交点，这与题设矛盾.

所以 $a>0$，令 $f'\left(x\right)=0$，则 $x=\ln a$.

当 $x<\ln a$ 时， $f'\left(x\right)<0$， $f\left(x\right)$ 是单调减函数； $x>\ln a$ 时， $f'\left(x\right)>0$， $f\left(x\right)$ 是单调增函数；

于是当 $x=\ln a$ 时， $f\left(x\right)$ 取得极小值.

因为函数 $f\left(x\right)=e^x-ax+a\left(a\in R\right)$ 的图像与 x 轴交于两点 $A\left(x_1,0\right)$， $B\left(x_2,0\right)\left(x_1<x_2\right)$，

所以 $f\left(\ln a\right)=a\left(2-\ln a\right)<0$，即 $a>e^2$.

此时，存在 $1<\ln a$， $f\left(1\right)=e>0$；存在 $3\ln a>\ln a$，又 $a>\ln a$

$$f\left(3\ln a\right)=a^3-3a\ln a+a>a^3-3a^2+a=a\left[\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]>0,$$

又 $f\left(x\right)$ 在 R 上连续，故 $a>e^2$.

（Ⅱ）证明：因为$\begin{cases} e^{x_1}-ax_1+a=0 \\ e^{x_2}-ax_2+a=0 \end{cases}$，两式相减得$a=\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$.

记$\dfrac{x_2-x_1}{2}=s\left(s>0\right)$，

则$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{x_2-x_1}\left[x_2-x_1-\left(e^{\frac{x_2-x_1}{2}}-e^{-\frac{x_2-x_1}{2}}\right)\right]=\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}\left[2s-\left(e^s-e^{-s}\right)\right]$，

设$g\left(s\right)=2s-\left(e^s-e^{-s}\right)$，因为$s>0$，所以$e^s>1, e^{-s}>0$，$e^s+e^{-s}\geq 2\sqrt{e^s\cdot e^{-s}}=2$，当且仅当$e^s=e^{-s}$时，即

$e^s=e^{-s}=1, s=0$，而$s>0$，所以$e^s+e^{-s}>2$，

则$g'\left(s\right)=2-\left(e^s+e^{-s}\right)<0$，所以$g\left(s\right)$是单调减函数，

则有$g\left(s\right)<g\left(0\right)=0$，而$\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}>0$，所以$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

（Ⅲ）【解法一】根据题意：$e^{x_1}-ax_1+a=0$，$e^{x_2}-ax_2+a=0$移项取对数得：

$x_1=\ln(x_1-1)+\ln a$ ①；$x_2=\ln(x_2-1)+\ln a$ ②

①-②得：$x_1-x_2=\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)$，即：$\dfrac{(x_1-1)-(x_2-1)}{\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)}=1$

根据对数平均值不等式：$\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}<\dfrac{(x_1-1)-(x_2-1)}{\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)}=1$

$\therefore (x_1-1)(x_2-1)<1 \Rightarrow \ln(x_1-1)(x_2-1)<0$，①+②得：$x_1+x_2=2\ln a+\ln(x_1-1)(x_2-1)<2\ln a$

根据均值不等式：$\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln a$

$\because$函数$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$单调递减，$\therefore f'(\sqrt{x_1x_2})<0$.

高三数学压轴解答题——函数导数——极值点偏移问题答案 5

极值点偏移基本类型 1——加法类型

1．解：（1）$\because$ 函数 $f(x)=x-lnx-a$ $\therefore$ $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 为减函数，
当 x 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 为增函数，
故当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=x-lnx-a$ 取最小值 $1-a$，

若函数 $f(x)=x-lnx-a$ 有两个不同的零点 x_1， x_2．

则 $1-a<0$，即 $a>1$；

证明：（2）若函数 $f(x)=x-lnx-a$ 有两个不同的零点 x_1， x_2．不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

则 $x_1-lnx_1=a$，且 $x_2-lnx_2=a$，

若证 $x_1+x_2>a+1$．即证 $x_2>1-lnx_1$，

构造函数 $g(x)=f(x)-f(1-lnx)$， $0<x<1$，

所以 $g(x)=x-lnx-(1-lnx)+ln(1-lnx)=x-1+ln(1-lnx)$，所以 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x(1-lnx)}$， $0<x<1$，

令 $h(x)=x(1-lnx)$，则 $h'(x)=-lnx>0$，所以 $h(x)$ 单调递增，
所以 $0<h(x)<h$（1）$=1$，所以 $g'(x)<0$，所以 $g(x)>g$（1）$=0$，

即 $f(x)>f(1-lnx)$， $0<x<1$，又 $0<x_1<1<x_2$，所以 $f(x_2)=f(x_1)>f(1-lnx_1)$

因为 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_2>1-lnx_1$，故原不等式得证．

2．解：（1） $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}(x>0)$，

当 $0<x<1$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，
当 $x>1$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增；
要使函数 $f(x)=x-lnx-a$ 有两个相异零点，必有 f （1）$=1-a<0$，$\therefore a>1$，

当 $a>1$ 时，$\because e^{-a}<1$，且 $f(e^{-a})=e^{-a}>0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有一个零点

$\because e^{a}>1$， $f(e^{a})=e^{a}-2a>0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有一个零点，

$\therefore a$ 的取值范围为 $(1,+\infty)$．

（2）由（1）知， $0<x_1<1<x_2$，$\because x_1-lnx_1-a=0$，$\therefore a=x_1-lnx_1$，

要证 $x_1+x_2<\dfrac{4a+2}{3}$， $x_2<\dfrac{4a+2}{3}-x_1=\dfrac{4(x_1-lnx_1)+2}{3}-x_1=\dfrac{x_1-4lnx_1+2}{3}$，

故构造函数 $g(x)=\dfrac{x-4lnx+2}{3}$， $(0<x<1)$，

则 $g'(x)=\dfrac{x-4}{3x}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减， $g(x)>g$（1）$=1$．$\therefore x_2>1$， $\dfrac{x_1-4lnx_1+2}{3}>1$，

构造函数 $h(x)=f(x)-f(\frac{x-4lnx+2}{3})$，$(0<x<1)$ $h'(x)=\frac{2x+1}{3x}+\frac{1}{x-4lnx+2}\cdot\frac{x-4}{x}$，

下面证明 $h'(x)>0$，即证明 $lnx-\frac{(x+5)(x-1)}{4x+2}<0$，

构造函数 $H(x)=lnx-\frac{(x+5)(x-1)}{4x+2}$，$(0<x<1)$．$H'(x)=\frac{(1-x)^3}{(2x+1)^2x}>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，

因此 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，从而 $H(x)<H$（1）$=0$，

$\therefore h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，$\therefore h(x)<h$（1）$=0$，$\therefore$ $f(x_1)<f(\frac{x_1-4lnx_1+2}{3})$ $\therefore f(x_2)<f(\frac{x_1-4lnx_1+2}{3})$，

$\because x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore$ $x_2<\frac{x_1-4lnx_1+2}{3}$，即 $x_1+x_2<\frac{4a+2}{3}$．

3．解：(1) $f(0)=-b=-1$，所以 $b=1$．又 $f'(x)=2x-2+\frac{a(1-x)}{e^x}$，

则 $f'(0)=-2+a$，所以 $-2+a=-1$，得 $a=1$．

（2）当 $b=1$ 时．$f(x)=x^2-2x+\frac{ax}{e^x}-1$，则 $f'(x)=2x-2+\frac{a(1-x)}{e^x}=(x-1)(2-\frac{a}{e^x})$•

已知 $a<0$，所以 $2-\frac{a}{e^x}>0$，故 $f'(x)=0$ 得 $x=1$．

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．
所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减．在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．

又 f（1）$=-2+\frac{a}{e}<0$，$f(-1)=2-ae>0$，

当 $-1\leqslant a<0$ 时，$3a\geqslant-3$，$2e^3+3a\geqslant2e^3-3>0$，所以 f（3）$=2+\frac{3a}{e^3}=\frac{2e^3+2a}{e^3}>0$；

当 $a<-1$，$-e^3a>e^3\Rightarrow ln(-e^3a)>lne^3=3>1$．不妨设 $ln(-e^3a)=t>3$，

则 $f(t)=t^2-2t+\frac{at}{e^{ln(-e^3a)}}-1=t^2-2t+\frac{at}{-e^3a}-1=t^2-(2+\frac{1}{e^3})t-1$．

二次函数 $g(t)=t^2-(2+\frac{1}{e^3})t-1$ 的对称轴为 $t=\frac{2+\frac{1}{e^3}}{2}<3$

所以 $f(t)>g$（3）$=9-6-\frac{3}{e^3}-1=2-\frac{3}{e^3}>0$，

由零点存在性定理，函数 $f(x)$ 存在两个零点 x_1，x_2，设 $x_1<1<x_2$，

由 $x_1+x_2>2$，得 $x_2>2-x_1>1>x_1$，

由函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，只需证 $f(x_2)>f(2-x_1)$ 即可．又 $f(x_1)=f(x_2)=0$，

所以只需证 $f(x_1)>f(2-x_1)$ 即可．

$f(x_1)=x_1^2-2x_1+\frac{ax_1}{e^{x_1}}-1$，$f(2-x_1)=(2-x_1)^2-2(2-x_1)+\frac{a(2-x_1)}{e^{2-x_1}}-1$，

只需证 $x_1^2-2x_1+\frac{ax_1}{e^{x_1}}=(2-x_1)^2-2(2-x_1)+\frac{a(2-x_1)}{e^{2-x_1}}$，

化简得 $\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{2-x_1}{e^{2-x_1}}$，$\frac{x_1}{e^{x_1}}-\frac{2-x_1}{e^{2-x_1}}=\frac{x_1e^{2-x_1}-(2-x_1)e^{x_1}}{e^{x_1}e^{2-x_1}}$

设 $h(x)=xe^{2-x}-(2-x)e^{x}$，则 $h'(x)=(1-x)(e^{2-x}-e^{x})$．

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$h'(x)>0$．而 h（1）$=0$，

故当 $x<1$ 时，$h(x)<0$．而 $e^{x_1}e^{2-x_1}>0$ 恒成立．故 $f(x_1)>f(2-x_1)$，即 $f(x_2)>f(2-x_1)$，则 $x_2>2-x_1$，

即 $x_1+x_2>2$，成立．

4.解：（Ⅰ）因为 $f'(x)=\frac{n}{x^2}-\frac{1}{x}$，且切线与直线 $x-y=0$ 平行，可得 f'（1）$=n-1=1$，所以 $n=2$；

（Ⅱ）证明：当 $n=1$ 时，$f(x)=m-\frac{1}{x}-lnx$，由题意知 $\begin{cases}m-\frac{1}{x_1}-lnx_1=0① \\ m-\frac{1}{x_2}-lnx_2=0②\end{cases}$，

②—①得：$lnx_2-lnx_1=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$，即 $ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{x_2}$，③，令 $t=\frac{x_2}{x_1}$，则 $x_2=tx_1$，且 $t>1$，

又因为 $x_1+x_2=x_1+tx_1=(1+t)x_1$，由③知：$lnt=\frac{t-1}{tx_1}$，所以 $x_1=\frac{t-1}{tlnt}(t>1)$，

要证 $x_1+x_2>2$，只需证 $(1+t)\frac{t-1}{tlnt}>2$，即证 $\frac{t^2-1}{t}>2lnt$，即 $t-\frac{1}{t}-2lnt>0$，

令 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2lnt(t>1)$，则 $h'(t)=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$，所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增且 h（1）$=0$，

所以当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$h(t)>0$，即 $x_1+x_2>2$．

5.解：(1）当 $a=0$ 时，$f(x)=-\frac{1}{x}-lnx$，$x\in(\frac{1}{e},e)$，$\therefore f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$ 得，$x=1$，

$\therefore$ 当 $x\in(\frac{1}{e},1)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,e)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$f(x)_{极大值}=f$（1）$=-1<0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e},e)$ 上恒小于 0，所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}$，$e)$ 上无零点．

（2）令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)=-\frac{1}{x}-lnx+a$，则 $\varphi'(x)=\frac{1-x}{x^2}$，令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=1$．

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

故 $\varphi(x)_{max}=\varphi$（1）$=a-1$，

①当 $a-1=0$，即 $a=1$ 时，因最大值点唯一，故符合题设；
②当 $a-1<0$，即 $a<1$ 时，$\varphi(x)<0$ 恒成立，不符合题设；

③当 $a-1>0$，即 $a>1$ 时，一方面，$\exists e^{a}>1$，$\varphi(e^{a})=-\frac{1}{e^{a}}<0$；另一方面，$\exists e^{-a}<1$，$\varphi(e^{-a})\leqslant 2a-ea<0$（易证：$e^{x}\geqslant ex$），

于是，$\varphi(x)$ 有两零点，不合题设．
综上所述，a 的取值集合为 $\{1\}$．

（3）证明：先证 $x_1+x_2>2$，

依题设，有 $a=\frac{1}{x_1}+lnx_1=\frac{1}{x_2}+lnx_2$，于是 $\frac{x_2-x_1}{x_2x_1}=ln\frac{x_2}{x_1}$，记 $\frac{x_2}{x_1}=t$，$t>1$，则 $lnt=\frac{t-1}{tx_1}$，故 $x_1=\frac{t-1}{tlnt}$，

于是 $x_1+x_2=x_1(t+1)=\frac{t^2-1}{tlnt}$；$x_1+x_2-2=\frac{2(\frac{t^2-1}{2t}-lnt)}{lnt}$，记函数 $g(x)=\frac{x^2-1}{2x}-lnx$，$x>1$，

因 $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{2x^2}>0$，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

于是，$t>1$时，$g(t)>g$（1）$=0$，又 $lnt>0$，所以，$x_1+x_2>2$，

再证 $x_1+x_2<3e^{a-1}-1$，

$f(x)=0\Leftrightarrow h(x)=ax-1-xlnx=0$，故 x_1，x_2 也是 $h(x)=0$ 的两个零点，

由 $h'(x)=a-1-lnx=0$，得 $x=e^{a-1}$（记 $p=e^{a-1}$），

仿（1）知，p 是 $h(x)$ 的唯一最大值点，故有 $\begin{cases}h(p)>0\\x_1<p<x_2\end{cases}$，

作函数 $m(x)=lnx-\frac{2(x-p)}{x+p}-lnp$，则 $m'(x)=\frac{(x-p)^2}{x(x+p)^2}\geqslant 0$，故 $m(x)$ 单调递增，

当 $x>p$ 时，$m(x)>m(p)=0$；当 $0<x<p$ 时，$m(x)<0$，

于是，$ax_1-1=x_1lnx_1<\frac{2x_1(x_1-p)}{x_1+p}+x1lnp$，

整理，得 $(2+lnp-a)x_1^2-(2p+ap-plnp-1)x_1+p>0$，即 $x_1^2-(3e^{a-1}-1)x_1+e^{a-1}>0$，

同理 $x_2^2-(3e^{a-1}-1)x_2+e^{a-1}<0$，

故 $x_2^2-(3e^{a-1}-1)x_2+e^{a-1}<x_1^2-(3e^{a-1}-1)x_1+e^{a-1}$，即 $(x_2+x_1)(x_2-x_1)<(3e^{a-1}-1)(x_2-x_1)$，

于是 $x_1+x_2<3e^{a-1}-1$，

综上，$2<x_1+x_2<3e^{a-1}-1$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——极值点偏移问题答案6

极值点偏移基本类型2——减法型解答

1．解：（1）$f'(x)=lnx+1-ax(x>0)$，

$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，$\therefore f'(x)\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore a\geqslant \dfrac{lnx+1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{lnx+1}{x}$，$g'(x)=-\dfrac{lnx}{x^2}$，$\therefore x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，$\therefore g(x)_{max}=g$（1）$=1$，$\therefore a\geqslant 1$；

（2）由题意得 f'（1）$=-a+1=\dfrac{1}{2}$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$，$\therefore f(x)=xlnx-\dfrac{1}{4}x^2+1$，$f'(x)=lnx+1-\dfrac{1}{2}x$，

$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}(x>0)$，令 $f''(x)>0$，解得：$x<2$，

令 $f''(x)<0$，解得：$x>2$，故 $f'(x)$ 在 $(0,2)$ 递增，$f'(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 递减，

又$\because f'$（2）$=ln2>0$，$f'(\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{2e}<0$，$f'(e^2)=3-\dfrac{1}{2}e^2<0$，

故 $f'(x)$ 分别在 $(\dfrac{1}{e}$，$2)$ 和 $(2,e^2)$ 有零点 x_1，x_2，（不妨设 $x_1<x_2$），

$\therefore 0<x<x_1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

$x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

$x>x_2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

故 $f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{e}$，$2)$ 和 $(2,e^2)$ 有 2 个极值点 x_1，x_2，

而 $f'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}-ln2>0$，$f'(\dfrac{1}{e})<0$，$\therefore$ $\dfrac{1}{e}<x_1<\dfrac{1}{2}$，

f'（4）$=ln4-1>0$，$f'(e^2)<0$，$\therefore 4<x_2<e^2$，

$\therefore -1<lnx_1<-ln2$，$2ln2<lnx_2<2$，$\therefore 3ln2<lnx_2-lnx_1<3$，

故原命题成立．

2．（1）解：令 $h(x)=f(x)-g(x)=lnx-a(x-1)h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{x-1}{x}$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减，又 $h(x)$ 在 $[1$，$+\infty)$ 上连续，

所以当 $x>1$ 时，$h(x)<h$（1）$=0$，即当 $x>1$ 时，$f(x)<g(x)$；

（2）证明：① $F(x)=f(x)-g(x)e^x=lnx-a(x-1)e^x$，得 $F'(x)=\dfrac{1-ax^2e^x}{x}$，

令 $G(x)=1-ax^2e^x$，由 $0<a<\dfrac{1}{e}$，可知$G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，又 G（1）$=1-ae>0$，

且 $G(ln\frac{1}{a})=1-a(ln\frac{1}{a})^2\frac{1}{a}=1-(ln\frac{1}{a})^2\frac{1}{a}<0$.

故 $G(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一解，从而 $F'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解，

不妨设为 x_0，则 $1<x_0<ln\frac{1}{a}$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$F'(x)=\frac{G(x)}{x}>\frac{G(x_0)}{x}=0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)=\frac{G(x)}{x}<\frac{G(x_0)}{x}=0$，所以 $F(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递减，

因此 x_0 是 $F(x)$ 的唯一极值点.

由（1）知 $lnx<x-1$．从而 $F(ln\frac{1}{a})=lnln\frac{1}{a}-a(ln\frac{1}{a}-1)e^{ln\frac{1}{a}}=lnln\frac{1}{a}-ln\frac{1}{a}+1=h(ln\frac{1}{a})<0$，

又因为 $F(x_0)>F$（1）$=0$，所以 $F(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内有唯一零点.

又 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内有唯一零点 1，从而 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内恰有两个零点.

②由题意，$\begin{cases}F'(x)=0\\F(x_1)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}ax_0^2e^{x_0}=1\\lnx_1=a(x_1-1)e^{x_1}\end{cases}$，从而 $lnx_1=\frac{x_1-1}{x_0^2}e^{x_1-x_0}$，即 $e^{x_1-x_0}=\frac{x_0^2lnx_1}{x_1-1}$.

因为当 $x>1$ 时，$lnx<x-1$，又 $x_1>x_0>1$，故 $e^{x_1-x_0}<\frac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$，

两边取对数，得 $lne^{x_1-x_0}<lnx_0^2$，于是 $x_1-x_0<2lnx_0<2(x_0-1)$，整理得 $3x_0-x_1>2$.

3.（1）解：$f'(x)=a(lnx+1)-\frac{a+1}{x}$，$f''(x)=\frac{a}{x}+\frac{a+1}{x^2}=\frac{ax+(a+1)}{x^2}$.

若 $-1<a<0$，则当 $0<x<-\frac{a+1}{a}$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增；当 $x>-\frac{a+1}{a}$ 时，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减.

若 $a\geqslant0$，则当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增.

故当 $-1<a<0$ 时，在 $(0,-\frac{a+1}{a})$ 上 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；在 $(0-\frac{a+1}{a},+\infty)$ 上单调递减．当 $a\geqslant0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)$ 单调递增.

（2）证明：令 $g(x)=f(x)+x-\frac{3}{e}$，则 $g'(x)=f'(x)+1$.

由（1）知，在 $(0,+\infty)$ 上，$g'(x)$ 单调递增.

又 g'（1）$=f'$（1）$+1=0$，所以在 $(0,1)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；在 $(1,+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

又 $g(\frac{1}{e})=-\frac{a}{e}+(a+1)+\frac{1}{e}-\frac{3}{e}=a(1-\frac{1}{e})+(1-\frac{2}{e})>0$，$g(1)=1-\frac{3}{e}<0$，$g(e)=ae-(a+1)+e-\frac{3}{e}=a(e-1)+(e-1-\frac{3}{e})>0$，

所以 $x_1>\frac{1}{e}$，$x_2<e$，故 $x_1+e>x_2+\frac{1}{e}$.

4.【解答】解：（1）$f'(x)=mlnx+mx\times\frac{1}{x}-\frac{m+1}{x}=mlnx+m-\frac{m+1}{x}$，设 $h(x)=mlnx+m-\frac{m+1}{x}$，

$h'(x)=\frac{m}{x}+\frac{m+1}{x^2}=\frac{mx+m+1}{x^2}$，

当 $m\geqslant0$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $-1<m<0$ 时， $f'(x)$ 在 $(0,-\frac{m+1}{m})$ 单调递增，在 $(-\frac{m+1}{m}$， $+\infty)$ 单调递减；

当 $m\leqslant -1$ 时， $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

（2）证明：设 $F(x)=f(x)-g(x)=mxlnx-(m+1)lnx+x-\frac{3}{e}$，

$F'(x)=mlnx+m-\frac{x+1}{x}+1=\varphi(x)$，由于 $m>0$， $x>0$

$\varphi'(x)=\frac{m}{x}+\frac{m+1}{x^2}>0$ 恒成立，

知函数 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数且 F'（1）$=0$，

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	递减	极小值	递增

F（1）$=1-\frac{3}{e}=\frac{e-3}{e}<0$，

$F(\frac{1}{e})=m\frac{e-1}{e}+\frac{e-2}{e}>0$， F（e）$=m(e-1)+\frac{e(e-1)-3}{e}>0$，

知 $F(x)$ 在区间 $(\frac{1}{e}$， $1)$ 以及 $(1,e)$ 内各有一个零点，即为 $x_1\in(\frac{1}{e}$， $1)$， $x_2\in(1,e)$，

知 $x_2-x_1<e-\frac{1}{e}$，即 $x_2+\frac{1}{e}<x_1+e$.

5.】解：（1） $\because f(x)+g(x)=10^x$ ① $\therefore f(-x)+g(-x)=10^{-x}$，

$\because f(x)$ 为奇函数， $g(x)$ 为偶函数 $\therefore f(-x)=-f(x)$， $g(-x)=g(x)$

$\therefore -f(x)+g(x)=10^{-x}$ ②

由①，②解得 $f(x)=\frac{1}{2}(10^x-\frac{1}{10x})$， $g(x)=\frac{1}{2}(10^x+\frac{1}{10^x})$.

（2）解法一： $g(x_1)+g(x_2)=\frac{1}{2}(10^{x_1}+\frac{1}{10^{x_1}})+\frac{1}{2}(10^{x_2}+\frac{1}{10^{x_2}})$

$$=\frac{1}{2}(10^{x_1}+10^{x_2})+\frac{1}{2}(\frac{1}{10^{x_1}}+\frac{1}{10^{x_2}})\geqslant\frac{1}{2}\bullet2\sqrt{10^{x_1}\times10^{x_2}}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{1}{10^{x_1}}\bullet\frac{1}{10^{x_2}}}=10^{\frac{x_1+x_2}{2}}+\frac{1}{10^{\frac{x_1+x_2}{2}}}=2g(\frac{x_1+x_2}{2})$$

（法二）$\because g(x_1)+g(x_2)-2g(\frac{x_1+x_2}{2})=\frac{1}{2}(10^{x_1}+10^{x_2})+\frac{1}{2}(\frac{1}{10^{x_1}}+\frac{1}{10^{x_2}})-(10^{\frac{x_1+x_2}{2}}+\frac{1}{10^{\frac{x_1+x_2}{2}}})$

$$=\frac{(10^{x_1+x_2}+1)\bullet(10^{x_1}+10^{x_2})}{2\bullet10^{x_1+x_2}}-\frac{10^{x_1}+10^{x_2}+1}{10^{\frac{x_1+x_2}{2}}}=\frac{(10^{x_1+x_2}+1)(10^{x_1}+10^{x_2}-2\bullet10^{\frac{x_1+x_2}{2}})}{2\bullet10^{xx_1+x_2}}\geqslant\frac{(10^{x_{1+x_2}}+1)(2\sqrt{10^{x_1}\bullet10^{x_2}}-2\bullet10^{\frac{x_1+x_2}{2}})}{2\bullet10^{x_1+x_2}}=0$$

$\therefore g(x_1)+g(x_2)\geqslant2g(\frac{x_1+x_2}{2})$

（3））$\because f(x)=\frac{1}{2}(10^x-\frac{1}{10^x})$， $g(x)=\frac{1}{2}(10^x+\frac{1}{10^x})$. $\therefore f(x_1-x_2)=\frac{1}{2}(10^{x_1-x_2}-\frac{1}{10^{x_1-x_2}})$

$$=\frac{1}{2}(\frac{10^{x_1}}{10^{x_2}}-\frac{10^{x_2}}{10^{x_1}})=\frac{1}{4}(10^{x_1+x_2}+\frac{10^{x_1}}{10^{x_2}}-\frac{10^{x_2}}{10^{x_1}}-\frac{1}{10^{x_1+x_2}})-\frac{1}{4}(10^{x_1+x_2}-\frac{10^{x_1}}{10^{x_2}}+\frac{10^{x_2}}{10^{x_1}}-\frac{1}{10^{x_1+x_2}})$$

$=\frac{1}{4}(10^{x_1}-\frac{1}{10^{x_1}})(10^{x_2}+\frac{1}{10^{x_2}})-\frac{1}{4}(10^{x_1}+\frac{1}{10^{x_1}})(10^{x_2}-\frac{1}{10^{x_2}})$ $=f(x_1)g(x_2)-g(x_1)f(x_2)$

同理可得，$g(x_1+x_2)=\frac{1}{2}(10^{x_1+x_2})+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{10^{x_1+x_2}}=g(x_1)g(x_2)-f(x_1)f(x_2)$.

6.（1）解：当 $a=1$时，$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-x^2-x$，

$g(x)=f(x)+x^2=\frac{1}{2}e^{2x}-x$，$g'(x)=e^{2x}-1$，

令 $g'(x)>0$，可得 $x>0$，令 $g'(x)<0$，可得 $x<0$，

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$.

（2）证明：函数 $f(x)=\frac{1}{2}ae^{2x}-x^2-ax$ 的定义域为 R，$f'(x)=ae^{2x}-2x-a$，

令 $h(x)=f'(x)=ae^{2x}-2x-a$，

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，所以 x_1，x_2 是函数 $h(x)$ 的两个零点，$h(x_1)=h(x_2)=0$，

$h'(x)=2ae^{2x}-2$，令 $h'(x)>0$，可得 $x>\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，令 $h'(x)<0$，可得 $x<\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}ln\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，$+\infty)$ 上单调递增，所以 $x_1<\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，$x_2>\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}$，

由 $0<a<\frac{4}{e^4-1}$，可得 $\frac{1}{2}ln\frac{1}{a}>\frac{1}{2}ln\frac{e^4-1}{4}>0$，

因为 $h(0)=0$，所以 $x_1=0$，所以要证 $x_2-x_1>2$，即证 $x_2>2$，只需证 h（2）<0，

因为 $0<a<\frac{4}{e^4-1}$，所以 h（2）$=ae^4-4-a=a(e^4-1)-4<\frac{4}{e^4-1}(e^4-1)-4<4-4=0$，

所以 $x_2-x_1>2$，得证.

极值点偏移基本类型 3——乘积型解答

1．解：（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

②当 $a>0$时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{a}$，

则当 $0<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 单调递增；

当 $\frac{1}{a}<x$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 单调递减.

（2）(i) 法 1：函数 $f(x)$ 有两个零点即方程 $lnx-ax=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个不同根，

转化为函数 $y=lnx$ 与函数 $y=ax$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同交点，如图：

可见，若令过原点且切于函数 $y=lnx$ 图象的直线斜率为 k，

只须 $0<a<k$，

设切点 $A(x_0,\ lnx_0)$，所以 $k=y'|_{x=x_0}=x_0=\frac{1}{x_0}$，又 $k=\frac{lnx_0}{x_0}$，所以 $\frac{1}{x_0}=\frac{lnx_0}{x_0}$，解得 $x_0=e$，

于是 $k=\frac{1}{e}$，所以 $0<a<\frac{1}{e}$，

法 2：由（1）当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，不可能有两个零点，

$\therefore a>0$，

此时 $f(x)_{max}=f(\frac{1}{a})=ln\frac{1}{a}-1$，

需 $ln\frac{1}{a}-1>0$ 解得 $0<a<\frac{1}{e}$，

从而 $\frac{1}{a}>e$，$\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a}$

又 $f(\frac{1}{e})=-1-\frac{e}{a}<0$ 故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 有一个零点；$f(\frac{1}{a^2})=ln\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}=2ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}$，

设 $g(x)=2lnx-x$，$x>e$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}-1<0$

故 $g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 单调递减 $\therefore f(\frac{1}{a^2})=g(\frac{1}{a})<g(e)=2-e<0$ $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 有一个零点故 a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{e})$.

(ii) 原不等式 $x_1x_2>e^2\Leftrightarrow lnx_1+lnx_2>2$，不妨设 $x_1>x_2>0$，

$\because f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$，$\therefore lnx_1-ax_1=0$，$lnx_2-ax_2=0$，

$\therefore lnx_1+lnx_2=a(x_1+x_2)$，$lnx_1-lnx_2=a(x_1-x_2)$，

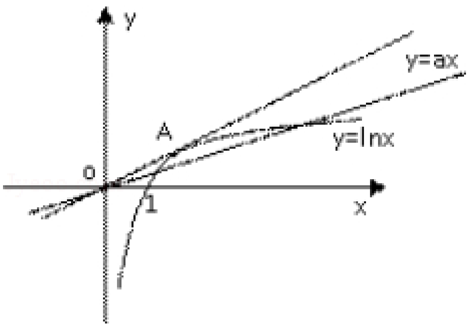
$\therefore lnx_1+lnx_2>2\Leftrightarrow a(x_1+x_2)>2\Leftrightarrow\frac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}\Leftrightarrow ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$，

令 $\frac{x_1}{x_2}=t$，则 $t>1$，于是 $ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}>\frac{2(t-1)}{t+1}$，设函数 $g(t)=lnt-\frac{2(t-1)}{t+1}\ (t>1)$，

求导得：$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

故函数 $g(t)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的增函数，

$\therefore g(t)>g$（1）$=0$，即不等式 $lnt>\frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立，故所证不等式 $x_1x_2>e^2$ 成立.



2．解：（Ⅰ）有题意 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{b}{x^2}=\frac{x-b}{x^2}(x>0)$，

当 $b\leqslant 0$ 时， $f'(x)\geqslant 0$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，此时显然不成立，

当 $b>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=b$，

此时 $f(x)$ 在 $(0,b)$ 上单减，在 $(b,+\infty)$ 上单增，

$\therefore M=f$ （b） $=lnb+1-a\geqslant 0$，即 $lnb\geqslant a-1$，所以 $b\geqslant e^{a-1}$， $e^{a-1}-b\leqslant 0$.

所以 $e^{a-1}-b+1$ 的最大值为 1.

（Ⅱ）证明：当 $e^{a-1}-b+1$ 取得最大值时， $a-1=lnb$， $F(b)=\frac{a-1}{b}-m=\frac{lnb}{b}-m$，

$\because F(x)$ 的两个零点为 x_1， x_2，则 $\frac{lnx_1}{x_1}-m=0;\frac{lnx_2}{x_2}-m=0$，即 $lnx_1=mx_1$， $lnx_2=mx_2$，

不等式 $x_1\cdot x_2{}^2>e^3$ 恒成立等价于 $lnx_1+2lnx_2=mx_1+2mx_2=m(x_1+2x_2)>3$，

两式相减得 $ln\frac{x_1}{x_2}=m(x_1-x_2)\Rightarrow m=\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，

带入上式得 $(x_1+2x_2)\cdot\frac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>3\Leftrightarrow ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{3(x_1-x_2)}{x_1+2x_2}=\frac{3(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+2}$，

令 $\frac{x_1}{x_2}=t(0<t<1)$，则 $g(t)=lnt-\frac{3(t-1)}{t+2},(0<t<1)$， $g'(t)=\frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2}>0$，

所以函数 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增， $\therefore g(t)<g$ （1） $=0$，得证.

3．解：(1）由题意可得， $h(x)=xe^x-alnx-ax=xe^x-aln(xe^x)=0$ 有 2 个零点，

令 $t(x)=xe^x$，则 $t'(x)=(x+1)e^x>0$ 在 $x>0$ 时恒成立，故 $t(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)$ 有 2 个零点可转化为 $g(t)=t-alnt$ 有 2 个零点，

因为 $g'(t)=1-\frac{a}{t}$，

$a\leqslant 0$ 时， $g'(t)>0$， $g(t)$ 单调递增，不可能有 2 个零点，

当 $a>0$ 时，由 $g'(t)>0$ 可得 $t>1$，$g(t)$ 单调递增；$g'(t)<0$ 可得 $0<t<a$，$g(t)$ 单调递减，$g(t)_{min}=g$（a）$=a-alna$，

若 $0<a<e$，则 g（a）>0，此时 $g(t)>0$ 恒成立，没有零点，

若 $a=e$，则 g（a）$=0$，有一个零点，

若 $a>e$，则 g（a）<0，

因为 g（1）$=1>0$，$g(e^a)e^a-a^2>0$，所以 $g(t)$ 在 $(1,e)$，(e,e^a) 上各有 1 个零点，符合题意，

综上，a 的范围 $(e,+\infty)$；

（2）证明：要证 $x_1x_2>\dfrac{e^2}{e^{x_1+x_2}}$，只要证 $x_1x_2e^{x_1+x_2}>e^2$，即证 $ln(x_1e^{x_1})+ln(x_2e^{x_2})>2$，

由（1）可知，$t_1=x_1e^{x_1}$，$t_2=x_2e^{x_2}$，所以 $a(lnt_2-lnt_1)=t_2-t_1$，$a(lnt_2+lnt_1)=t_2+t_1$，

所以 $lnt_1+lnt_2=\dfrac{t_2+t_1}{t_2-t_1}(lnt_2-lnt_1)=\dfrac{(\dfrac{t_2}{t_1}+1)ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}$，只要证 $\dfrac{(\dfrac{t_2}{t_1}+1)ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}>2$，

设 $0<t_1<t_2$，令 $t=\dfrac{t_2}{t_1}$，$t>1$，所以只要证 $lnt>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$ 即证 $lnt+\dfrac{4}{t+1}-2>0$，

令 $h(t)=lnt+\dfrac{4}{t+1}-2$，$t>1$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，$\therefore h(t)>h$（1）$=0$，

即当 $t>1$ 时，$)=lnt+\dfrac{4}{t+1}-2>0$，所以 $lnt_1+lnt_2>2$ 即 $(x_1e^{x_1})\bullet(x_2e^{x_2})>e^2$，故 $x_1x_2>\dfrac{e^2}{e^{x_1+x_2}}$．

4.（1）解：$f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-a$，$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，

$\therefore f'$（1）$=2-a=0$，解得 $a=2$．

（2）解：$x\in[1,\ e]$，不等式 $f(x)\leqslant tx-(a-1)lnx$ 化为：$\dfrac{1}{2}x-a(1-\dfrac{lnx}{x})\leqslant t$，

$\because$ 存在 $t\in[-1,\ 1]$，使不等式 $f(x)\leqslant tx-(a-1)lnx$ 对于 $x\in[1,\ e]$ 恒成立，

$\therefore \dfrac{1}{2}x-a(1-\dfrac{lnx}{x})\leqslant 1$，化为：$a\geqslant\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2-x}{x-lnx}=g(x)$．$g'(x)=\dfrac{(x-1)(\dfrac{1}{2}x+1-lnx)}{(x-lnx)^2}$，

令 $h(x)=\dfrac{1}{2}x+1-lnx$，$h'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{2x}>0$，$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $x\in[1,\ e]$ 上单调递增，

$h(x)\geqslant h$（1）$=\dfrac{1}{2}+1-0>0$．

$\therefore g'(x)\geqslant 0$，因此函数 $g(x)$ 在 $x\in[1,\ e]$ 上单调递增．$\therefore a\geqslant g$（e）$=\dfrac{e^2-2e}{2e-2}$．

$\therefore a$ 的取值范围是 $[\dfrac{e^2-2e}{2e-2},+\infty)$．

（3）证明：方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，即 $ax-lnx=0$，$x>0$．

令 $h(x)=ax-lnx$， $h'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{a(x-\frac{1}{a})}{x}$.

可得：函数 $h(x)$ 在 $x>\frac{1}{a}$ 时单调递增，在 $0<x<\frac{1}{a}$ 时单调递减.

$\therefore x=\frac{1}{a}$ 时，函数 $h(x)$ 取得极大值即最大值.

$h(\frac{1}{a})=1+lna$.

方程 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 有两个不等的实数根 x_1 、 x_2 .

$\therefore lnx_1+lnx_2=a(x_1+x_2)=ln(x_1x_2)$ ，要证明： $x_1x_2>e^2$. 只要证明： $a(x_1+x_2)>2$ 即可.

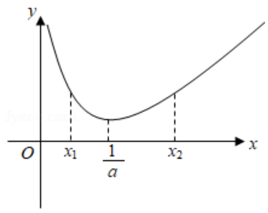
不妨设 $0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$ ，则 $\frac{2}{a}-x_1>\frac{1}{a}$ ，由于函数 $h(x)$ 在 $x>\frac{1}{a}$ 时单调递增，

因此只要证明： $ln(\frac{2}{a}-x_1)-a(\frac{2}{a}-x_1)>0$ 即可得出 $x_2>\frac{2}{a}-x_1$ ，

设函数 $g(x)=ln(\frac{2}{a}-x)-a(\frac{2}{a}-x)-(lnx-ax)$ ， $g'(x)=\frac{1}{x-\frac{2}{a}}+2a-\frac{1}{x}=\frac{2(ax-1)^2}{x(ax-2)}$.

可得在 $(0,\frac{2}{a})$ 上 $g'(x)<0$ ，且 $g(\frac{1}{a})=0$. $\therefore 0<x_1<\frac{1}{a}$ ， $g(x_1)>0$ ，即 $ln(\frac{2}{a}-x_1)-a(\frac{2}{a}-x_1)-(lnx_1-ax_1)>0$ ，

即 $ln(\frac{2}{a}-x_1)-a(\frac{2}{a}-x_1)>0$. $\therefore x_2>\frac{2}{a}-x_1$ ， $\therefore x_1x_2>e^2$.



5.

解：（Ⅰ） $f'(x)=x+1-(1+lnx)=x-lnx(x>0)$ ，令 $g(x)=x-lnx$ ，由 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}(x>0)$ ，

可得 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减， $(1,+\infty)$ 上单调递增， $\therefore f'(x)=g(x)\geqslant g$ （1） $=1>0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增　…（4 分）

（Ⅱ）依题意， $\begin{cases} x_1-lnx_1=m \\ x_2-lnx_2=m \end{cases}$ ，相减得 $x_1-x_2=ln\frac{x_2}{x_1}$ ，

令 $\frac{x_2}{x_1}=t(t>1)$ ，则有 $x_1=\frac{lnt}{t-1}$ ， $x_2=\frac{tlnt}{t-1}$ ，

欲证 $x_1x_2{}^2<2$ 成立，只需证 $\frac{lnt}{t-1}\bullet\frac{t^2(lnt)^2}{(t-1)^2}<2$ 成立，即证 $(lnt)^3<\frac{2(t-1)^3}{t^2}$ 成立，即证 $lnt<\frac{2^{\frac{1}{3}}(t-1)}{t^{\frac{2}{3}}}$ 成立，

令 $t^{\frac{1}{3}}=x(x>1)$，只需证 $2^{\frac{1}{3}}(x-\frac{1}{x^2})-3lnx>0$ 成立，令 $F(x)=2^{\frac{1}{3}}(x-\frac{1}{x^2})-3lnx(x>1)$，

即证 $x>1$ 时，$F(x)>0$ 成立 $F'(x)=2^{\frac{1}{3}}(1+\frac{2}{x^3})-\frac{3}{x}=\frac{2^{\frac{1}{3}}(x^3+2)-3x^2}{x^3}$，

令 $h(x)=2^{\frac{1}{3}}(x^3+2)-3x^2(x>1)$，则 $h'(x)=2^{\frac{1}{3}}(3x^2)-6x=3x(2^{\frac{1}{3}}x-2)(x>1)$，

可得 $h(x)$ 在 $(1,2^{\frac{2}{3}})$ 内递减，在 $(2^{\frac{2}{3}},+\infty)$ 内递增，$\therefore$ $h(x)\geqslant h(2^{\frac{2}{3}})=0$，$\therefore F'(x)\geqslant 0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore F(x)>F$ （1） $=0$ 成立，故原不等式成立.

6．解：（1）由 $g(x)=x+mlnx$，$\therefore$ $g'(x)=1+\frac{m}{x}=\frac{x+m}{x}(x>0)$，

当 $m\geqslant 0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，无极值，

当 $m<0$，$0<x<-m$，$g'(x)<0$；$x>-m$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,-m)$ 上为减函数，在 $(-m,+\infty)$ 上为增函数，

$\therefore x=-m$，$g(x)$ 有极小值 $-m+mln(-m)$，无极大值，

综上知：当 $m\geqslant 0$，$g(x)$ 无极值，

当 $m<0$，$g(x)$ 有极小值 $-m+mln(-m)$，无极大值.

（2）证明：$h(x)=x-a\sin x$，$\therefore h'(x)=1-a\cos x$，$\because -1\leqslant\cos x\leqslant 1$，$\therefore 0<a<1$，$h'(x)=1-a\cos x\geqslant 0$，

所以，当 $0<a<1$，$h(x)=x-a\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，恒有 $h(x)>h(0)=0$，即 $x>a\sin x$ 成立；

当 $m\geqslant 0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

当 $0<a<1$，$h(x)=x-a\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

这时，$y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以不可能存在 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，

满足当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)=f(x_2)$，

所以有 $m<0$.

设 $0<x_1<x_2$，$f(x_1)=f(x_2)$ 得：$x_1-a\sin x_1+mlnx_1=x_2-a\sin x_2+mlnx_2$，

$\therefore -m(lnx_2-lnx_1)=(x_2-x_1)-a(\sin x_2-\sin x_1)$①，

$\because x_1-\sin x_1<x_2-\sin x_2$， $\therefore -a(\sin x_2-\sin x_1)>-a(x_2-x_1)$②，

由①②式可得： $-m(lnx_2-lnx_1)>(x_2-x_1)-a(x_2-x_1)$，即 $-m(lnx_2-lnx_1)>(1-a)(x_2-x_1)$，

又 $lnx_1<lnx_2$， $lnx_2-lnx_1>0$， $\therefore\ -m>(1-a)\times\dfrac{x_2-x_1}{lnx_2-lnx_1}>0$③，

要证 $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{m}{a-1}$④，所以由③式知，只需证明： $\dfrac{x_2-x_1}{lnx_2-lnx_1}>\sqrt{x_1x_2}$，即证 $\dfrac{\frac{x_2}{x_1}-1}{ln\frac{x_2}{x_1}}>\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}$，

设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，只需证 $\dfrac{t-1}{lnt}>\sqrt{t}$，即证： $\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}-lnt>0(t>1)$，令 $h(t)=\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}-lnt(t>1)$，

由 $h'(t)=\dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}>0(t>1)$， $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数， $\therefore h(t)>h$（1） $=0$， $\therefore\ \dfrac{x_2-x_1}{lnx_2-lnx_1}>\sqrt{x_1x_2}$ 成立，

所以由③知， $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{m}{a-1}$ 成立.

极值点偏移基本类型 4——商型解答

1．证明： $f'(x)=1-\dfrac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}$，由 $f'(x)>0$，得 $x<alna$，由 $f'(x)<0$，得 $x>alna$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,alna)$ 上单调递增，在 $(alna,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)$ 在 $x=alna$ 处取得极大值，且为最大值等于 $f(alna)=alna-a$.

由函数 $f(x)=x-e^{\frac{x}{a}}(a>0)$ 有两个相异零点 x_1、 x_2，可得 $alna-a>0$，

即 $a>e$.

$\because f$（a） $=a-e>0$， $\therefore x_1<a<alna<x_2$， $\therefore\ x_2-x_1>alna-a=-aln\dfrac{e}{a}$，

即 $x_1-x_2<aln\dfrac{e}{a}$，则 $\dfrac{1}{a}(x_1-x_2)<ln\dfrac{e}{a}$，

$\because\ x_1=e^{\frac{x_1}{a}}$， $x_2=e^{\frac{x_2}{a}}$， $\therefore\ \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{e^{\frac{x_1}{a}}}{e^{\frac{x^2}{a}}}=e^{\frac{1}{a}(x_1-x_2)}<e^{ln\frac{e}{a}}=\dfrac{e}{a}$.

2．解：（1）当 $a=\dfrac{5}{2}$ 时， $f(x)=lnx-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{1}{2}x^2$， $x>0$，

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{5}{2}+x=\frac{(x-\frac{1}{2})(x-2)}{x},$$

令 $f'(x)>0$，可得 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 或 $x>2$，令 $f'(x)<0$，可得 $\dfrac{1}{2}<x<2$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2})$， $(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\dfrac{1}{2}$， $2)$ 上单调递减.

（2） $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a+x=\dfrac{x^2-ax+1}{x}$，

因为 x_1， $x_2(x_1>x_2)$ 为函数 $f(x)$ 的两个极值点，

所以 x_1， x_2 是方程 $x^2-ax+1=0$ 的两个根，

所以 $x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$， $x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$， 可得 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}}=\dfrac{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}{2}$，

因为 $a\geqslant\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$，所以 $y=a^2$ 为增函数， $y=a$ 为增函数且大于 0， $y=\sqrt{a^2-4}$ 为增函数且大于 0，

所以 $y=\dfrac{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}{2}$ 为增函数，所以 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}{2}\geqslant\dfrac{\frac{16}{3}-2+\frac{8}{3}}{2}=3$，

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}(t\geqslant3)$，则 $y=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{2(t-1)}{t+1}-lnt$，

令 $g(t)=\dfrac{2(t-1)}{t+1}-lnt=2-\dfrac{4}{t+1}-lnt$，

$g'(t)=\dfrac{4}{(t+1)^2}-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$，所以 $g(t)$ 在 $[3$， $+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(t)$ 的最大值为 g（3） $=1-ln3$．

3.（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=-ae^{-x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{e^x-ax}{xe^x}$，

当 $a\leqslant0$ 时， $f'(x)>0$ 恒成立， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $0<a\leqslant e$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $e^x-ax=0$，设 $g(x)=e^x-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$，

易知，当 $0<x<lna$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，当 $x>lna$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g(lna)=e^{lna}-alna=a(1-lna)\geqslant0$，

$\therefore f'(x)\geqslant0$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

综上，当 $a\leqslant e$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

（2）依题意， $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，则 $\begin{cases}e^{x_1}-ax_1=0\\e^{x_2}-ax_2=0\end{cases}$，两式相除得， $e^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}$，设 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，

则 $t>1$， $x_2=tx_1$， $e^{(t-1)x_1}=t$， $\therefore$ $x_1=\dfrac{lnt}{t-1}$， $x_2=\dfrac{tlnt}{t-1}$， $\therefore$ $x_1+x_2=\dfrac{(t+1)lnt}{t-1}$，

设 $h(t)=\dfrac{(t+1)lnt}{t-1}(t>1)$，则 $h'(t)=\dfrac{t-\frac{1}{t}-21nt}{(t-1)^2}$，

设 $\varphi(t)=t-\dfrac{1}{t}-2lnt$，则 $\varphi'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}>0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

则 $\varphi(t)>\varphi$（1） $=0$， $\therefore h'(t)>0$，则 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

又 $x_1+x_2\leqslant 2e-\frac{1}{2e}-2ln2e$，且 $h(2e)=\frac{(2e+1)\cdot ln2e}{2e-1}$ $\therefore h(t)\leqslant h(2e)$，

$\therefore t\in(1，\ 2e]$，即 $\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值为 $2e$．

4.解：（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=-ae^{-x}+\frac{1}{x}=\frac{e^x-ax}{xe^x}$，

当 $a\leqslant 0$ 时， $f'(x)>0$ 恒成立， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a\leqslant e$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $e^x-ax=0$，设 $g(x)=e^x-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$，

易知，当 $0<x<lna$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减，当 $x>lna$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g(lna)=e^{lna}-alna=a(1-lna)\geqslant 0$， $\therefore f'(x)\geqslant 0$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

综上，当 $a\leqslant e$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（2）依题意，$f'(x_1)=f'(x_2)=0$，则 $\begin{cases}e^{x_1}-ax_1=0\\ e^{x_2}-ax_2=0\end{cases}$，两式相除得，$e^{x_2-x_1}=\frac{x_2}{x_1}$，设 $\frac{x_2}{x_1}=t$，则 $t>1$，$x_2=tx_1$，$e^{(t-1)x_1}=t$，

$\therefore\ x_1=\frac{lnt}{t-1},x_2=\frac{tlnt}{t-1}$， $\therefore\ x_1+x_2=\frac{(t+1)lnt}{t-1}$， 设 $h(t)=\frac{(t+1)lnt}{t-1}(t>1)$， 则 $h'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2lnt}{(t-1)^2}$，

设 $\varphi(t)=t-\frac{1}{t}-2lnt(t>1)$， 则 $\varphi'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$，

$\therefore\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，则 $\varphi(t)>\varphi$（1）$=0$，

$\therefore h'(t)>0$，则 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

又 $x_1+x_2\leqslant 2ln3$，即 $h(t)\leqslant 2ln3$， h（3）$=2ln3$， $\therefore t\in(1，\ 3]$，即 $\frac{x_2}{x_1}$ 的最大值为 3．

5．解：（1） $f(x)=lnx$， $g(x)=x^2f(x)=x^2lnx$， $x\in(0,+\infty)$， $g'(x)=x(2lnx+1)$，

令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$；令 $g'(x)>0$，解得 $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$．

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的单调递减区间 $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$，单调递增区间为 $(\frac{1}{\sqrt{e}}，\ +\infty)$．

（2）证明： $\forall x_1$， $x_2\in[1，\ +\infty)$，要证明 $f(x_1x_2)\leqslant(x_1+x_2)(1-\frac{1}{x_1x_2})$．

即证明： $lnx_1+lnx_2\leqslant x_1+x_2-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$．即证明： $lnx_1-x_1+\frac{1}{x_1}+lnx_2-x_2+\frac{1}{x_2}\leqslant 0$．

令 $h(x)=lnx-x+\frac{1}{x}$， $x\in[1，\ +\infty)$， h（1）$=0$． $h'(x)=\frac{1}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-(x^2-x+1)}{x^2}<0$，

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $x\in[1，\ +\infty)$ 上单调递减，$\therefore h(x)\leqslant h$（1）$=0$， $\therefore h(x_1)+h(x_2)\leqslant 0$，

即： $\forall x_1$， $x_2\in[1，\ +\infty)$， $f(x_1x_2)\leqslant(x_1+x_2)(1-\frac{1}{x_1x_2})$ 成立．

6．解：（1） $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$， $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$，

令 $h(x)=-x^2+ax-1$，$\triangle=a^2-4$，

若 $-2\leqslant a\leqslant 2$，则$\triangle\leqslant 0$， $h(x)\leqslant 0$恒成立，即 $f'(x)\leqslant 0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

若 $a>2$，令 $h(x)=0$，解得： $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}>0$， $x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}>0$，

故 $x\in(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$时， $h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，

$x\in(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$， $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$时， $h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，

$x\in(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$， $+\infty)$时， $h(x)<0$， $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 递减，在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$， $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 递增，在 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$， $+\infty)$ 递减，

$a<-2$时，令 $h(x)=0$，解得： $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<0$， $x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}<0$，

故 $x\in(0,+\infty)$时， $h(x)<0$，即 $f'(x)<0$， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，

综上： $a\leqslant 2$时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

$a>2$时， $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 递减，在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$， $\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 递增，在 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$， $+\infty)$ 递减．

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1， x_2，且 $x_1<x_2$，

则 $x_1+x_2=a$， $x_1x_2=1(x_2>1)$，由 $a<\dfrac{5}{2}$，可得 $1<x_2<2$，

则 $\dfrac{f(x_2)}{x_1}+\dfrac{f(x_1)}{x_2}=2-x_2^2-\dfrac{1}{x_2^2}+(x_2^2-\dfrac{1}{x_2^2})lnx_2$，

令 $g(x)=2-x^2-\dfrac{1}{x^2}+(x^2-\dfrac{1}{x^2})lnx(1<x<2)$，

$g'(x)=-x+\dfrac{1}{x^3}+2(x+\dfrac{1}{x^3})lnx=\dfrac{1-x^4}{x^3}+2\dfrac{1+x^4}{x^3}lnx=\dfrac{1+x^4}{x^3}(\dfrac{1-x^4}{1+x^4}+2lnx)$，

令 $h\left(x\right)=\dfrac{1-x^4}{1+x^4}+2lnx$，且 $h(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $(1,2)$ 上符号一致，

$h'(x)=\dfrac{-8x^3}{(1+x^4)^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{-8x^4+2(1+x^4)^2}{(1+x^4)^2x}=\dfrac{2(1-x^4)^2}{(1+x^4)^2x}\geqslant 0$，

所以 $h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)>h$（1）$=0$，即 $g'(x)>0$，

所以 $g\left(x\right)$单调递增,所以$g\left(x\right)\in\left(0,\dfrac{15}{4}ln2-\dfrac{9}{4}\right)$，故 $\dfrac{f(x_2)}{x_1}+\dfrac{f(x_1)}{x_2}$ 的取值范围是 $(0,\dfrac{15}{4}ln2-\dfrac{9}{4})$．

7．解：（1）$\because f(x)=x-ae^{x}$，$\therefore$求导可得 $f'(x)=1-ae^{x}$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=1-ae^{x}>0$，即 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$，

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=1-ae^{x}=0$，则 $x=-lna$，

当 $x\in(-\infty,-lna)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，
当 $x\in(-lna,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-lna)$，单调递减区间为 $(-lna,+\infty)$，

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$，$a>0$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-lna)$，单调递减区间为 $(-lna,+\infty)$．

（2）$\because f(x)=x-ae^{x}$，$\therefore f'(x)=1-ae^{x}$，

下面分两种情况讨论：
① $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 R 上恒成立，$\therefore f(x)$ 在 R 上是增函数，不合题意，
② $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=-lna$，当 x 变化时，$f'(x)$、$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-lna)$	$-lna$	$(-lna,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	递增	极大值 $-lna-1$	递减

$\therefore f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-lna)$，减区间是 $(-lna,+\infty)$，

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 有两个零点等价于如下条件同时成立：

① $f(-lna)>0$，

②存在 $s_{1}\in(-\infty,-lna)$，满足 $f(s_{1})<0$，

③存在 $s_{2}\in(-lna,+\infty)$，满足 $f(s_{2})<0$，

由 $f(-lna)>0$，即 $-lna-1>0$，解得 $0<a<e^{-1}$，

取 $s_{1}=0$，满足 $s_{1}\in(-\infty,-lna)$，且 $f(s_{1})=-a<0$，

取 $s_{2}=\dfrac{2}{a}+ln\dfrac{2}{a}$，满足 $s_{2}\in(-lna,+\infty)$，且 $f(s_{2})=(\dfrac{2}{a}-e^{\frac{2}{a}})+(ln\dfrac{2}{a}-e^{\frac{2}{a}})<0$，$\therefore a$ 的取值范围是 $(0,e^{-1})$．

(ii) 证明：$\because f(x)=x-ae^{x}$，$\therefore a=\dfrac{x}{e^{x}}$，

设 $g(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$，求导可得 $g'(x)=\dfrac{1-x}{e^{x}}$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

当 $x\in(-\infty$，$0]$ 时，$g(x)\leqslant 0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，

由已知 x_{1}，x_{2} 满足 $a=g(x_{1})$，$a=g(x_{2})$，

$\because a\in(0,\dfrac{1}{e})$，及 $g(x)$ 的单调性，$\therefore x_{1}\in(0,1)$，$x_{2}\in(1,+\infty)$，

对于任意 $a_{1},a_{2}\in(0,\dfrac{1}{e})$，设 $a_{1}>a_{2}$，$g(m_{1})=g(m_{2})=a_{1}$，其中 $0<m_{1}<1<m_{2}$，

$g(n_{1})=g(n_{2})=a_{2}$，其中 $0<n_{1}<1<n_{2}$，$\because g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

又$\because a_1>a_2$，即$g(m_1)>g(n_1)$，同理可得$m_2<n_2$，

$\because m_1>n_1>0$，$\therefore \frac{m_2}{m_1}<\frac{n_2}{m_1}<\frac{n_2}{n_1}$，故$\frac{x_2}{x_1}$随着$a$的减小而增大．即得证．

极值点偏移基本类型 5:平方型解答

1．

证明：(1) $f'(x)=xlnx-ax^2+x=lnx+1-2ax+1=lnx-2ax+2$，

f'（1）$=2-2a$，又f（1）$=1-a$，

$\therefore$曲线$y=f(x)$在点$(1$，f（1）$)$处的切线方程为$y-(1-a)=(2-2a)(x-1)$，

即$y=2(1-a)(x-\frac{1}{2})$，当$x=\frac{1}{2}$时，$y=0$，故直线l过定点$(\frac{1}{2}$，$0)$；

（2）$\because x_1$，x_2是$f(x)$的两个零点，且$x_2>2x_1$，

$\therefore \begin{cases}x_1lnx_1-ax_1^2+x_1=0\\x_2lnx_2-ax_2^2+x_0=0\end{cases}$，可得$\begin{cases}lnx_1+1=ax_1\\lnx_2+1=ax_2\end{cases}$，$\therefore \frac{lnx_1+1}{x_1}=\frac{lnx_2+1}{x_2}=\frac{ln(x_1x_2)+2}{x_1+x_2}=\frac{lnx_2-lnx_1}{x_2-x_1}$，

令$t=\frac{x_2}{x_1}(t>2)$，$\therefore lnx_1x_2+2=\frac{(x_1+x_2)ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{(t+1)lnt}{t-1}$，构造函数$g(t)=\frac{(t+1)lnt}{t-1}$，$g'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2lnt}{(t-1)^2}$，

令$h(t)=t-\frac{1}{t}-2lnt$，则$h'(t)=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$，则$h(t)$在$(2,+\infty)$上单调递增，

而h（2）$=2-\frac{1}{2}-2ln2=\frac{3}{2}-2ln2>0$，$\therefore g'(t)>0$，则$g(t)$在$(2,+\infty)$上单调递增，

$\therefore g(t)>g$（2）$=3ln2$，可得$ln(x_1x_2)+2>3ln2$，则$ln(x_1x_2)>ln\frac{8}{e^2}$，

即$x_1x_2>\frac{8}{e^2}$，则$\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\sqrt{2x_1x_2}>\frac{4}{e}$．

2．解：$(I)\,f'(x)=e^{-ax}-ax\cdot e^{-ax}=e^{-ax}(1-ax)$，

$\because a\in R$，$\therefore a<0$时，$f'(x)=e^{-ax}(1-ax)>0\Rightarrow x>\frac{1}{a}$，

$f'(x)=e^{-ax}(1-ax)<0\Rightarrow x<\frac{1}{a}$，

$\therefore a<0$时，增区间为：$[\frac{1}{a},+\infty)$，减区间为：$(-\infty,\frac{1}{a})$；

$a=0$时，$f'(x)=e^{-ax}(1-ax)=1>0$，

$\therefore a=0$时，增区间为：$(-\infty,+\infty)$；$a>0$时，$f'(x)=e^{-ax}(1-ax)>0\Rightarrow x<\frac{1}{a}$，$f'(x)=e^{-ax}(1-ax)<0\Rightarrow x>\frac{1}{a}$，

$\therefore a>0$时，增区间为：$(-\infty,\frac{1}{a}]$，减区间为：$(\frac{1}{a},+\infty)$；

综上：$a<0$时，增区间为：$[\frac{1}{a},+\infty)$，减区间为：$(-\infty,\frac{1}{a})$；

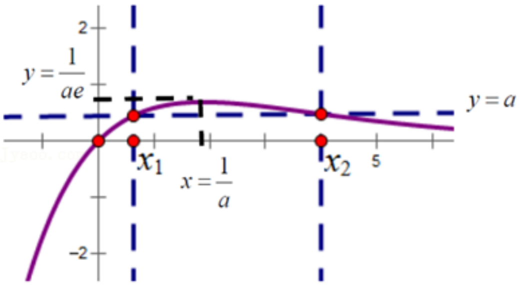
$a=0$时，增区间为：$(-\infty,+\infty)$；

$a>0$时，增区间为：$(-\infty,\frac{1}{a}]$，减区间为：$(\frac{1}{a},+\infty)$；

（Ⅱ）证法一：由（1）知，$a>0$时，增区间为：$(-\infty,\frac{1}{a}]$，减区间为：$(\frac{1}{a},+\infty)$；

且$x>\frac{1}{a}$时，$f(x)>0$，$f_{极大值}(x)=f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{ae}$，

函数 $y=f(x)$ 的大致图像如下图所示：



因为 $a>0$时，函数 $y=f(x)-a$ 有两个零点x_1，x_2，所以 $a<\frac{1}{ae}$，即 $a^2<\frac{1}{e}$，

不妨设$x_1<x_2$，则$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，

先证：$x_1+x_2>\frac{2}{a}$，即证：$x_1>\frac{2}{a}-x_2$，

因为$x_1<\frac{1}{a}$，所以 $\frac{2}{a}-x_2<\frac{1}{a}$，又 $y=f(x)$ 在$(-\infty,\frac{1}{a})$单调递增，所以即证：$f(x_1)>f(\frac{2}{a}-x_2)$

又 $f(x_1)=f(x_2)$，所以即证：$f(x_2)>f(\frac{2}{a}-x_2)$，$x_2>\frac{1}{a}$，

令函数$F(x)=f(x)-f(\frac{2}{a}-x)$，$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$，

则$F'(x)=e^{-ax}(1-ax)+e^{-2+ax}[1-a(\frac{2}{a}-x)]=(1-ax)[e^{-ax}-e^{-2+ax}]$，

因为$x>\frac{1}{a}$，所以$-ax<ax-2$，$1-ax<0$，故 $F'(x)=(1-ax)[e^{-ax}-e^{-2+ax}]>0$，

函数$F(x)=f(x)-f(\frac{2}{a}-x)$在$(\frac{1}{a},+\infty)$单调递增，所以$F(x)>F(\frac{1}{a})=0$，

因为$x_2>\frac{1}{a}$，所以，$f(x_2)>f(\frac{2}{a}-x_2)$，即$x_1+x_2>\frac{2}{a}$，

所以$x_1^2+x_2^2>\frac{(x_1+x_2)^2}{2}>\frac{2}{a^2}>2e$．

（Ⅱ）证法二：因为$a>0$时，函数 $y=f(x)-a$ 有两个零点x_1，x_2，

则两个零点必为正实数，$f(x)-a=0\Rightarrow e^{lnx-ax}=e^{lna}(x>0)$，

问题等价于 $lnx-ax=lna$ 有两个正实数解；

令 $g(x)=lnx-ax-lna(x>0)$

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-a(x>0)$，$g(x)$在$(0,\frac{1}{a})$单调递增，在$(\frac{1}{a},+\infty)$单调递减，且$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，

令$G(x)=g(x)-g(\frac{2}{a}-x)$，$x\in(\frac{1}{a},+\infty)$，

则 $G'(x)=\dfrac{1}{x}-a+\dfrac{1}{\dfrac{2}{a}-x}-a=\dfrac{2}{x(2-ax)}-2a>\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}}-2a=0$，所以 $G(x)$ 在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调递增，$G(x)>G(\dfrac{1}{a})=0$，

又 $x_2>\dfrac{1}{a}$，故 $g(x_2)>g(\dfrac{2}{a}-x_2)$，$x_2\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$，又 $g(x_1)=g(x_2)$，所以 $g(x_1)>g(\dfrac{2}{a}-x_2)$，

又 $0<x_1<\dfrac{1}{a}<x_2$，所以 x_1，$\dfrac{2}{a}-x_2\in(0,\dfrac{1}{a})$，

又 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 单调递增，所以 $x_1+x_2>\dfrac{2}{a}$，所以 $x_1^2+x_2^2>\dfrac{(x_1+x_2)^2}{2}>\dfrac{2}{a^2}>2e$．

3．解：（1）函数 $f(x)=\dfrac{lnx+1}{ax}(x>0)$，则 $f'(x)=-\dfrac{lnx}{ax^2}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，

若 $a>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；
当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，
所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；
若 $a<0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减；
当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，
所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.
综上所述，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；
当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

（2）证明：因为 $(ex_1)^{x_2}=(ex_2)^{x_1}$，两边取对数，可得 $x_2ln(ex_1)=x_1ln(ex_2)$，

即 $x_2(lnx_1+1)=x_1(lnx_2+1)$，所以 $\dfrac{lnx_1+1}{x_1}=\dfrac{lnx_2+1}{x_2}$，

此时当 $a=1$ 时，存在且 $x_1>0$，$x_2>0$，$x_1\neq x_2$，满足 $f(x_1)=f(x_2)$；

由（1）可知，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

不妨设 $x_1<x_2$，所以 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，

①若 $x_2\in[2，+\infty)$，则 $x_1^2+x_2^2>x_2^2\geqslant4>2$ 成立；

②若 $x_2\in(1,2)$，则 $2-x_2\in(0,1)$，

记 $g(x)=f(x)-f(2-x)=\dfrac{lnx}{x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{ln(2-x)}{2-x}-\dfrac{1}{2-x}$，$0<x<1$，

则 $g'(x)=-\dfrac{lnx}{x^2}-\dfrac{ln(2-x)}{(2-x)^2}>-\dfrac{lnx}{x^2}-\dfrac{ln(2-x)}{x^2}=-\dfrac{ln[-(x-1)^2+1]}{x^2}>0$，
所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，
则 $g(x)<g$（1）$=0$，即 $f(x)<f(2-x)$，

所以 $f(2-x_2)>f(x_1)=f(x_2)$，

因为 $x_1\in(0,1)$，所以 $2-x_1>1$，

又 $x_2>1$， $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $2-x_1<x_2$，即 $x_1+x_2>2$，

又 $x_1^{\,2}+1\geqslant 2\sqrt{x_1^{\,2}\cdot 1}=2x_1$， $x_2^{\,2}+1\geqslant 2\sqrt{x_2^{\,2}}=2x_2$，

以上两式左右分别相加，可得 $x_1^{\,2}+1+x_2^{\,2}+1\geqslant 2(x_1+x_2)$，

即 $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\geqslant 2(x_1+x_2)-2>2$，

综合①②可得， $x_1^2+x_2^{\,2}>2$.

4．解：（1） $f(x)=\dfrac{lnx}{mx^2}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\dfrac{1-2lnx}{mx^3}$，

当 $m>0$ 时， $f'(x)>0\Rightarrow 0<x<\sqrt{e}$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，

$f'(x)<0\Rightarrow x>\sqrt{e}$，此时 $f(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，

当 $m<0$ 时， $f'(x)>0\Rightarrow x>\sqrt{e}$，此时 $f(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递增，

$f'(x)<0\Rightarrow 0<x<\sqrt{e}$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递减；

综上可知：当 $m>0$ 时， $f(x)$ 的增区间是 $(0,\sqrt{e})$，减区间是 $(\sqrt{e},+\infty)$；

当 $m<0$ 时， $f(x)$ 的增区间是 $(\sqrt{e},+\infty)$，减区间是 $(0,\sqrt{e})$.

（2）证明：由 $m=2$， $f(x)=\dfrac{lnx}{2x^2}$， $(x_1^2\cdot f(x_1)-x_2^2\cdot f(x_2))\cdot(x_1^2+x_2^2)=\dfrac{1}{2}(lnx_1-lnx_2)\cdot(x_1^2+x_2^2)$，

由于 $x_1>x_2>0$，所以 $x_1x_2-x_2^2>0$．设 $t=\dfrac{x_1}{x_2}>1$，

故： $(x_1^2\cdot f(x_1)-x_2^2\cdot f(x_2))\cdot(x_1^2+x_2^2)>x_1x_2-x_2^2\Leftrightarrow lnx_1-lnx_2>\dfrac{2(x_1x_2-x_2^2)}{x_1^2+x_2^2}$

$\Leftrightarrow ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{2(\dfrac{x_1}{x_2}-1)}{1+(\dfrac{x_1}{x_2})^2}\Leftrightarrow lnt>\dfrac{2(t-1)}{1+t^2}(t>1)\Leftrightarrow lnt-\dfrac{2(t-1)}{1+t^2}>0(t>1)$，

令 $\varphi(t)=lnt-\dfrac{2(t-1)}{1+t^2}$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{(t^2-1)(t^2+2t-1)}{t(t^2+1)^2}$，

由于 $t>1$，故 $\varphi'(t)=\dfrac{(t^2-1)(t^2+2t-1)}{t(t^2+1)^2}>0$，

则 $\varphi(t)=lnt-\dfrac{2(t-1)}{1+t^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $\varphi(t)>\varphi$（1） $=0$，

即：所证不等式 $(x_1^2\cdot f(x_1)-x_2^2\cdot f(x_2))\cdot(x_1^2+x_2^2)>x_1x_2-x_2^2$ 成立.

5．解：（1）设 $g(x)=f(2x-1)=ln(2x-1)-(2x-1)^2+1$，

$\therefore g'(x)=\dfrac{2}{2x-1}-4(2x-1)$， $\therefore g'$（1）$=-2$，且 g（1）$=0$，

$\therefore$切线方程： $y=-2(x-1)$.

（2）(i) 函数 $f(x)=lnx-ax^2+1$， $\therefore$ $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax$，

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)$单调，至多一个零点；

若 $a>0$，则 $f'(x)=\dfrac{1-2ax^2}{x}$， $\therefore f(x)$在$(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}})$上是增函数，$(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty)$上是减函数，

$\therefore$ $f(\dfrac{1}{\sqrt{2a}})=-\dfrac{1}{2}ln(2a)+\dfrac{1}{2}>0$， $\therefore$.

(ii) 证明：函数 $y=f(x)$有两个零点x_1， x_2，且$x_1<x_2$，

由极值点可得$x_1+x_2>\dfrac{2}{\sqrt{e}}$， $\therefore$ $x_2^2-x_1<x_2^2+x_2-\dfrac{2}{\sqrt{e}}<x_2^2+x_2-1$，

只需证$x_2^2+x_2<\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}$，即证$x_2<\dfrac{1}{a}$，即证 $f(x_2)>f(\dfrac{1}{a})$，即证$0>f(\dfrac{1}{a})$，即证$ln\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{a}-1$成立.

6．（1） $f(x)$的定义域为R， $f'(x)=e^x-a$，

当 $a\leqslant 0$时， $f'(x)>0$，所以 $f(x)$在R上单调递增；
当 $a>0$时，由 $f'(x)=0$，得 $x=lna$，
当$x\in(-\infty,lna)$时， $f'(x)<0$；当$x\in(lna,+\infty)$时， $f'(x)>0$.
所以 $f(x)$在$(-\infty,lna)$上单调递减，在$(lna,+\infty)$上单调递增.
综上所述，当 $a\leqslant 0$时， $f(x)$在R上单调递增；
当 $a>0$时， $f(x)$在$(-\infty,lna)$上单调递减，在$(lna,+\infty)$上单调递增.
（2）由题意$g'(x_0)=0$得 $a=e^{x_0}-\dfrac{1}{{x_0}^2}$，不妨设$x_1<x_2$，

由$g(x_1)=g(x_2)$，得$e^{x_1}-ax_1+a+\dfrac{1}{x_1}=e^{x_2}-ax_2+a+\dfrac{1}{x_2}$，

即$\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}=a+\dfrac{1}{x_1x_2}$，且 $a=e^{x_0}-\dfrac{1}{{x_0}^2}$，所以$\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}-\dfrac{1}{x_1x_2}=e^{x_0}-\dfrac{1}{{x_0}^2}$，

要证$x_1x_2<{x_0}^2$，即证$\sqrt{x_1x_2}<x_0$，

显然$h(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}$在$(0,+\infty)$上是增函数，故只需证$h(\sqrt{x_1x_2})<h(x_0)$，即证$e^{\sqrt{x_1x_2}}-\dfrac{1}{x_1x_2}<e^{x_0}-\dfrac{1}{{x_0}^2}$，

即证$e^{\sqrt{x_1x_2}}-\dfrac{1}{x_1x_2}<\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}-\dfrac{1}{x_1x_2}$，即证$e^{\sqrt{x_1x_2}}<\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$，

又由于 $\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，故只需证 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$，即证 $x_2-x_1<e^{\frac{x_2-x_1}{2}}-e^{\frac{x_1-x_2}{2}}$，

令 $e^{\frac{x_2-x_1}{2}}=t(t>1)$，则 $x_2-x_1=2lnt$，所以即证 $2lnt<t-\frac{1}{t}$.

令 $\varphi(t)=2lnt-t+\frac{1}{t}(t>1)$，则 $\varphi'(t)=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为减函数，

从而 $\varphi(t)<\varphi$（1）$=0$，即有 $2lnt<t-\frac{1}{t}$，从而 $x_1x_2<x_0{}^2$ 成立.

7. 解：（Ⅰ）当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f'(x)=-\sin x+x$，设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=-\cos x+1\geqslant 0$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恒成立，$\therefore g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，又 $g(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递减，在 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

$\because f(0)=1, f(-\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{8}$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,\frac{\pi^2}{8}]$；

（Ⅱ）$\because f(-x)=\cos(-x)-a(-x)^2=\cos x-ax^2=f(x)$，$\therefore f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上为偶函数，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点等价于函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点，

设 $h(x)=f'(x)=-\sin x-2ax$，则 $h'(x)=-\cos x-2a$，

①当 $a\geqslant 0$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，则 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，

$\therefore h(x)\leqslant h(0)=0$，则 $f'(x)\leqslant 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，无极小值；

②当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，则 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(0)=0$，则 $f'(x)\geqslant 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，无极小值；

③当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $h'(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上单调递减，在 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$\because h(0)=0$，

$\therefore h(x_0)<0$，又 $h(\frac{\pi}{2})=-1-a$，

(i) 当 $-1-a\pi\leqslant 0$，即 $-\frac{1}{\pi}\leqslant a<0$ 时，$h(\frac{\pi}{2})\leqslant 0$，

$\therefore f'(x)\leqslant 0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，无极小值；

(ii) 当 $-1-a\pi>0$，即 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{\pi}$ 时，$h(\frac{\pi}{2})>0$，则存在 $t\in(x_0,\frac{\pi}{2})$，使得 $h(t)=-\sin t-2at=0(*)$，

且当 $x\in(0,t)$ 时， $h'(x)<0$，当 $x\in(t,\dfrac{\pi}{2})$ 时， $h'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,t)$ 上单调递减，在 $(t,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，

$\therefore$函数 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点 $x_2=t$，此时 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，

$\therefore$当函数 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上恰有两个极小值点时 a 的取值范围为 $(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{\pi})$；

$\because x_1+x_2=0$，

若 $f(x_2-x_1)=1+\dfrac{1}{9}(x_2-x_1)^2$，则 $\cos 2x_2-4ax_2{}^2=1+\dfrac{4}{9}x_2{}^2$，

由(*)知， $\sin x_2=-2ax_2$， $\therefore\ 1-8a^2x_2{}^2-4ax_2{}^2=1+\dfrac{4}{9}x_2{}^2$，整理可得 $x_2{}^2(3a+1)(6a+1)=0$，

又 $x_2\ne 0,a\in(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{\pi})$， $\therefore\ a=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$存在 $a=-\dfrac{1}{3}$，使得 $f(x_2-x_1)=1+\dfrac{1}{9}(x_2-x_1)^2$ 成立.

8．解：（1） $h(x)=f(x)+g(x)=lnx+x^2-ax(x>0)(a>0)$， $h'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-a=\dfrac{2x^2-ax+1}{x}$，

令 $2x^2-ax+1=0$，$\triangle=a^2-8$，

当 $0<a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，$\triangle\leqslant 0$， $h'(x)\geqslant 0$，无极值点，

当 $a>2\sqrt{2}$ 时，令 $2x^2-ax+1=0$，解得： $x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-8}}{4}$，

当 $x\in(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4})$， $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$， $+\infty)$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 递增，

$x\in(\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$， $\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4})$ 时， $h'(x)<0$， $h(x)$ 递减，

故 $h(x)$ 极大值点是 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$，极小值点是 $\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$；

综上： $0<a\leqslant 2\sqrt{2}$ 时， $h(x)$ 无极值点，

$a>2\sqrt{2}$ 时， $h(x)$ 极大值点是 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4}$，极小值点是 $\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$；

（2）由 $f(x)-\dfrac{g(x)}{x^3}+\dfrac{1}{x}=lnx-\dfrac{x^2-ax}{x^3}+\dfrac{1}{x}=0$，即 $lnx+\dfrac{a}{x^2}=0$，

令 $k(x)=lnx+\frac{a}{x^2}(x>0,a>0)$，

$k'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{x^3}=\frac{x^2-2a}{x^3}$，令 $k'(x)=0$，得 $x=\sqrt{2a}$，

当 $0<x<\sqrt{2a}$ 时，$k'(x)<0$，当 $x>\sqrt{2a}$ 时，$k'(x)>0$，

$\therefore k(x)$ 在 $(0,\sqrt{2a})$ 递减，在 $(\sqrt{2a}$，$+\infty)$ 上递增，

又$\because k(x)$ 有 2 个零点，

$\therefore k(\sqrt{2a})<0$，即 $ln\sqrt{2a}+\frac{a}{2a}<0$，解得：$0<a<\frac{1}{2e}$，

且 $\begin{cases} lnx_1+\frac{a}{x_1^{\ 2}}=0 \\ lnx_2+\frac{a}{x_2^{\ 2}}=0 \end{cases}$，两式相减得：$lnx_2-lnx_1=\frac{a}{x_1^{\ 2}}-\frac{a}{x_2^{\ 2}}$，

设 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，$\therefore lnt=\frac{a}{x_1^{\ 2}}-\frac{a}{t^2x_1^{\ 2}}$，$\therefore x_1^{\ 2}=\frac{a}{lnt}(1-\frac{1}{t^2})$，要证明 $x_1^2+x_2^2>4a$，

即证明 $(1+t^2)x_1^{\ 2}>4a$，$(1+t^2)\frac{a}{lnt}(1-\frac{1}{t^2})>4a$，$\therefore(1+t^2)\frac{1}{lnt^2}(1-\frac{1}{t^2})>2$，

即证明 $2lnt^2-t^2+\frac{1}{t^2}<0(t>1)$，令 $q(x)=2lnx-x+\frac{1}{x}(x>1)$，$q'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$，

$\therefore q(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore q(x)<q$（1）$=0$，$\therefore 2lnx-x+\frac{1}{x}<0$ 即 $x_1^2+x_2^2>4a$．

极值点偏移基本类型 6——拐点偏移

1．【解答】解：（1）$f'(x)=\frac{1}{a}(x+\frac{1}{x})-(1+\frac{1}{a^2})$，$(x>0)$

$\because f'(x)=\frac{1}{a}(x+\frac{1}{x})-(1+\frac{1}{a^2})$，在 $(0,1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，

且 $f'(x)_{min}=f(1)=-(\frac{1}{a}-1)^2\leqslant 0$

$\therefore$当 $a=1$时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，此时函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a\neq 1$时，$f'(x)=0$ 的根为 $\frac{1}{a}$，a

$\therefore 0<a<1$时，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$，$(\frac{1}{a}$，$+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,\frac{1}{a})$ 单调递减；

$a>1$时，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{a}$，$a)$ 单调递减；

证明：（2）$g(x)=2lnx+x^2-5x$，$x>0$．

由 $g(x_1)+g(x_2)=4$，即 $2lnx_1+x_1^{\ 2}+x_1+2lnx_2+x_2^{\ 2}+x_2-4=0$，

从而 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-4=2x_1x_2-2ln(x_1x_2)$，…（8 分）

令 $t=x_1x_2$，则由 $G(t)=t-lnt$ 得：$G'(t)=1-\frac{1}{t}$

可知，$G(t)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore G(t)\geqslant G$（1）$=1$，…（10 分）

$\therefore (x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-4\geqslant 2$，$\therefore (x_1+x_2+3)(x_1+x_2-2)\geqslant 0$，

又$\because x_1>0$，$x_2>0$，$\therefore x_1+x_2\geqslant 2$.

2．解：（Ⅰ）因为 $f(x)=lnx+2x-ax^2$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+2-2ax$，

因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，所以 f'（1）$=1+2-2a=0$，解得：$a=\frac{3}{2}$.

验证：当 $a=\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}+2-3x=-\frac{(3x+1)(x-1)}{x}\ (x>0)$，

易得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值.

（Ⅱ）因为 $g(x)=f(x)+(a-4)x=lnx-ax^2+(a-2)x$，所以 $g'(x)=-\frac{(ax+1)(2x-1)}{x}\ (x>0)$，

①若 $a\geqslant 0$，则当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增；

当 $x\in(\frac{1}{2}，+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{2}，+\infty)$ 上单调递减.

②若 $a<0$，$g'(x)=-\frac{a(x+\frac{1}{a})(2x-1)}{x}\ (x>0)$，

当 $a<-2$ 时，易得函数 $g(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{2}，+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{a}，\frac{1}{2})$ 上单调递减；

当 $a=-2$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $-2<a<0$ 时，易得函数 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 和 $(-\frac{1}{a}，+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{2}，-\frac{1}{a})$ 上单调递减.

（Ⅲ）证明：当 $a=-2$ 时，$f(x)=lnx+2x+2x^2$，

因为 $f(x_1)+f(x_2)+3x_1x_2=x_1+x_2$，所以 $lnx_1+2x_1+2x_1^2+lnx_2+2x_2+2x_2^2+3x_1x_2=x_1+x_2$，

即 $lnx_1x_2+2(x_1^2+x_2^2)+(x_1+x_2)+3x_1x_2=0$，所以 $2(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1x_2-lnx_1x_2$，

令 $t=x_1x_2$，$\varphi(t)=t-lnt(t>0)$，则 $\varphi'(t)=\frac{t-1}{t}(t>0)$，

当 $t\in(0,1)$ 时，$\varphi'(t)<0$，所以函数 $\varphi(t)=t-lnt(t>0)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)>0$，所以函数 $\varphi(t)=t-lnt(t>0)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $\varphi(t)$ 在 $t=1$ 时，取得最小值，最小值为 1.

所以 $2(x1+x2)2+(x_1+x_2)\geqslant 1$，即 $2(x1+x2)2+(x_1+x_2)-1\geqslant 0$，所以 $x_1+x_2\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $x_1+x_2\leqslant -1$，

因为 x_1，x_2 为正实数，所以当 $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ 时，$x_1x_2=1$，

此时不存在 x_1，x_2 满足条件，

所以$x_1+x_2>\frac{1}{2}$.

3.【解答】解:(1)因为 f (1) $=0$,所以$ln1-\frac{1}{2}a+1=0$,解得$a=2$,

所以$f(x)=lnx-x^2+x$, $f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}=\frac{(2x+1)(-x+1)}{x}$,

令$f'(x)<0$,得$x>1$,所以$f(x)$的单调递减区间为$(1,+\infty)$.

(2)证明: $a=-2$时,所以$f(x)=lnx+x^2+x$,

所以$f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2=lnx_1+x_1^2+x_1+lnx_2+x_2^2+x_1x_2+x_2=(x_1+x_2)^2+x_1+x_2+lnx_1x_2-x_1x_2$,

令$g(x)=lnx-x$,则$g'(x)=\frac{1}{x}-1$,所以$0<x<1$时, $g'(x)>0$, $g(x)$单调递增,

$x>1$时, $g'(x)<0$, $g(x)$单调递减,所以$g(x)_{max}=g$ (1) $=-1$,

所以$f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2\leqslant(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-1$,即$(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)-1\geqslant0$,

因为x_1, x_2是正实数,所以$x_1+x_2\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4.解:(Ⅰ) $f(x)=lnx-\frac{1}{2}x^2$, $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}(x>0)$

由$f'(x)>0$,得$1-x^2>0$,又$x>0$,

所以$0<x<1$,所以$f(x)$的单增区间为$(0,1)$.

(Ⅱ)方法一:令$G(x)=F(x)-(mx-1)=lnx-\frac{1}{2}mx^2+(1-m)x+1$,

所以$G'(x)=\frac{1}{x}-mx+(1-m)=\frac{-mx^2+(1-m)x+1}{x}$.

当$m\leqslant0$时,因为$x>0$,所以$G'(x)>0$.所以$G(x)$在$(0,+\infty)$上是递增函数,

又因为$G(1)=ln1-\frac{1}{2}m\times1^2+(1-m)+1=-\frac{3}{2}m+2>0$,

所以关于x的不等式$G(x)\leqslant mx-1$不能恒成立.

当$m>0$时, $G'(x)=\frac{-mx^3+(1-m)x+1}{x}=\frac{m(x-\frac{1}{m})(x+1)}{x}$.

令$G'(x)=0$,得$x=\frac{1}{m}$,所以当$x\in(0,\frac{1}{m})$时, $G'(x)>0$;当$x\in(\frac{1}{m},+\infty)$时, $G'(x)<0$.

因此函数$G(x)$在$x\in(0,\frac{1}{m})$是增函数,在$x\in(\frac{1}{m},+\infty)$是减函数.

故函数$G(x)$的最大值为$G(\frac{1}{m})=ln\frac{1}{m}-\frac{1}{2}m\times(\frac{1}{m})^2+(1-m)\times\frac{1}{m}+1=\frac{1}{2m}-lnm$.

令$h(m)=\frac{1}{2m}-lnm$,因为$h(1)=\frac{1}{2}>0$, $h(2)=\frac{1}{4}-ln2<0$,

又因为$h(m)$在$m\in(0,+\infty)$上是减函数,

所以当$m\geqslant2$时, $h(m)<0$.所以整数m的最小值为2.

方法二:(2)由$F(x)\leqslant mx-1$恒成立,

高三数学压轴解答题——函数导数——极值点偏移问题答案 4

得 $lnx-\frac{1}{2}mx^2+x\leqslant mx-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立．问题等价于 $m\geqslant\frac{lnx+x+1}{\frac{1}{2}x^2+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立．

令 $h(x)=\frac{lnx+x+1}{\frac{1}{2}x^2+x}$，只要 $m\geqslant h(x)_{max}$．因为 $h'(x)=\frac{(x+1)(-\frac{1}{2}x-lnx)}{(\frac{1}{2}x^2+x)^2}$，令 $h'(x)=0$，得 $-\frac{1}{2}x-lnx=0$．

设 $\varphi(x)=-\frac{1}{2}x-lnx$，因为 $\varphi'(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不妨设 $-\frac{1}{2}x-lnx=0$ 的根为 x_0．

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(x_0，+\infty)$ 时，$h'(x)<0$．

所以 $h(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上是增函数；在 $x\in(x_0，+\infty)$ 上是减函数．所以 $h(x)_{max}=h(x_0)=\frac{lnx_0+x_0+1}{\frac{1}{2}x_0^2+x_0}=\frac{1+\frac{1}{2}x_0}{x_0(1+\frac{1}{2}x_0)}=\frac{1}{x_0}$．

因为 $\varphi(\frac{1}{2})=ln2-\frac{1}{4}>0$，$\varphi(1)=-\frac{1}{2}<0$ 所以 $\frac{1}{2}<x_0<1$．此时 $1<\frac{1}{x_0}<2$，$g(x)_{max}\in(1,2)$．
所以 $m\geqslant 2$，即整数 m 的最小值为 2．

（Ⅲ）当 $m=-2$ 时，$F(x)=lnx+x^2+x$，$x>0$，

由 $F(x_1)+F(x_2)+x_1x_2=0$，即 $lnx_1+x_1^2+x_1+lnx_2+x_2^2+x_2+x_1x_2=0$，从而 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1\bullet x_2-ln(x_1\bullet x_2)$

令 $t=x_1\bullet x_2$，则由 $\varphi(t)=t-lnt$ 得，$\varphi'(t)=\frac{t-1}{t}$，可知 $\varphi'(t)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增．

所以 $\varphi(t)\geqslant\varphi$（1）$=1$，所以 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geqslant 1$，即 $(x_1+x_2)\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 成立．

5．解：（1）函数 $f(x)=lnx-x^2+x$ 的导数为 $f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}$，

由 $f'(x)<0$，得 $2x^2-x-1>0$，又 $x>0$，所以 $x>1$．所以 $f(x)$ 的单调减区间为 $(1,+\infty)$；

（2）关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant(\frac{a}{2}-1)x^2+ax-1$ 恒成立，即为 $f(x)-[(\frac{a}{2}-1)x^2+ax-1]\leqslant 0$ 恒成立，

令 $g(x)=f(x)-[(\frac{a}{2}-1)x^2+ax-1]=lnx-\frac{1}{2}ax^2+(1-a)x+1$，$g(x)_{max}\leqslant 0$，

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-ax+1-a=\frac{-ax^2+(1-a)x+1}{x}$，由 $-ax^2+(1-a)x+1=(-ax+1)(x+1)$，

由于 $x>0$，$a\leqslant 0$，$g(x)$ 递增，无最大值，故不成立；

则 $a>0$，由 $x>\frac{1}{a}$，$g(x)$ 递减，

$0 < x < \frac{1}{a}$， $g(x)$ 递增，

可得 $x=\frac{1}{a}$ 处 $g(x)$ 取得极大值，且为最大值 $-lna-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}+\frac{1-a}{a}+1=-lna+\frac{1}{a}$，即有 $-lna+\frac{1}{a}\leqslant 0$，

则 $alna\geqslant 1$ 恒成立，可得整数 a 的最小值为 2；

（3）证明：由正实数 x_1， x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)+2(x_1^2+x_2^2)+x_1x_2=0$，

即 $lnx_1+x_1^2+x_1+lnx_2+x_2^2+x_2+x_1x_2=0$，从而 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)=x_1\cdot x_2-ln(x_1\cdot x_2)$.

令 $t=x_1\cdot x_2$，则由 $\varphi(t)=t-lnt$ 得， $\varphi'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$，

可知， $\varphi(t)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $\varphi(t)\geqslant\varphi$ （1） $=1$，所以 $(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)\geqslant 1$，又 $x_1+x_2>0$，因此 $x_1+x_2\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 成立.

6．解：（1）因为 $f(x)=ae^{2x}+e^x+x$，所以 $f'(x)=2ae^{2x}+e^x+1$，

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值，所以 $f'(0)=2a+1+1=0$，解得 $a=-1$.

验证：当 $a=-1$ 时， $f'(x)=-(2e^x+1)(e^x-1)$，易得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

（2）因为 $g(x)=f(x)-(a+3)e^x=ae^{2x}-(a+2)e^x+x$，

所以 $g'(x)=2ae^{2x}-(a+2)e^x+1=2ae^{2x}-(a+2)e^x+1=(ae^x-1)(2e^x-1)$

①若 $a\leqslant 0$，则当 $x\in(-\infty,-ln2)$ 时， $g'(x)>0$，
所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-ln2)$ 上单调递增；当 $x\in(-ln2,+\infty)$ 时， $g'(x)<0$，
$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(-ln2,+\infty)$ 上单调递减.

②若 $a>0$， $g'(x)=(ae^x-1)(2e^x-1)$，

当 $a>2$ 时，易得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-lna)$ 和 $(-ln2,+\infty)$ 上单调递增，
在 $(-lna,-ln2)$ 上单调递减；
当 $a=2$ 时， $g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；
当 $0<a<2$ 时，易得函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-ln2)$ 和 $(-lna,+\infty)$ 上单调递增，
在 $(-ln2,-lna)$ 上单调递减；…………（8 分）
（3）证明：当 $a=2$ 时，

因为 $f(x_1)+f(x_2)+3e^{x_1}e^{x_2}=0$，所以 $2e^{2x_1}+e^{x_1}+x_1+2e^{2x_2}+e^{x_2}+x_2+3e^{x_1}e^{x_2}=0$，

所以 $2(e^{x_1}+e^{x_2})^2+(e^{x_1}+e^{x_2})=e^{x_1}e^{x_2}-x_1-x_2=e^{x_1+x_2}-(x_1+x_2)$.

令 $t=x_1+x_2$， $\varphi(t)=e^t-t$，则 $\varphi'(t)=e^t-1=0$，

当 $t\in(-\infty,0)$ 时， $\varphi'(t)<0$，所以函数 $\varphi(t)=e^t-t$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

当 $t\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)>0$，所以函数 $\varphi(t)=e^t-t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

所以函数 $\varphi(t)=e^t-t$ 在 $t=0$ 时，取得最小值，最小值为 1．…………（10 分）

所以 $2(e^{x_1}+e^{x_2})^2+(e^{x_1}+e^{x_2})\geqslant 1$，即 $2(e^{x_1}+e^{x_2})^2+(e^{x_1}+e^{x_2})-1\geqslant 0$，

所以当 $x_1+x_2=t=0$ 时，$e^{x_1}+e^{x_2}\geqslant 2\sqrt{e^{x_1+x_2}}=2>\dfrac{1}{2}$ 此时不存在 x_1，x_2 满足等号成立条件，

所以 $e^{x_1}+e^{x_2}>\dfrac{1}{2}$．

7．解：（1）易知 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)(x^2-a)}{x^2}$，

①若 $a\leqslant 0$，由 $f'(x)>0$，解得：$x>1$，故函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增，

②若 $0<a<1$，令 $f'(x)>0$，解得：$0<x<\sqrt{a}$，或 $x>1$，

令 $f'(x)<0$，解得：$\sqrt{a}<x<1$，故 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 递增，在 $(\sqrt{a}$，$1)$ 递减，在 $(1,+\infty)$ 递增，

③若 $a=1$，则 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)^2(x+1)}{x^2}\geqslant 0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，

④若 $a>1$，令 $f'(x)>0$，解得：$0<x<1$ 或 $x>\sqrt{a}$，

令 $f'(x)<0$，解得：$1<x<\sqrt{a}$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,\sqrt{a})$ 递减，在 $(\sqrt{a}$，$+\infty)$ 递增，

综上，若 $a\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增；若 $0<a<1$，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$，$(1,+\infty)$ 递增；若 $a=1$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增；若 $a>1$，$f(x)$ 在 $(0,1)$，$(\sqrt{a}$，$+\infty)$ 递增；

（2）$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，$\therefore a=1$，即 $f(x)=e^x(x-\dfrac{1}{x}-2)$，

注意到 f（1）$=-2e$，故 $f(x_1)+f(x_2)=-4e=2f$（1），即证 $-4e-f(x_1)\geqslant f(2-x_1)$，即证 $f(x_1)+f(2-x_1)\leqslant -4e$，

令 $h(x)=f(x)+f(2-x)$，$0<x\leqslant 1$，

只需证明 $h(x)\leqslant h$（1），故 $h'(x)=f'(x)+f'(2-x)=e^{2-x}(x-1)^2[\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{(3-x)}{(2-x)^2}]$，

下面证明 $h'(x)\geqslant 0$，即证 $\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{3-x}{(2-x)^2}\geqslant 0$，由熟知的不等式 $e^x\geqslant 1+x$ 可知 $e^{2x-2}=(e^{x-1})^2\geqslant(1+x-1)^2=x^2$，

当 $0<x\leqslant 1$ 时，即 $\dfrac{e^{2x-2}}{x^2}\geqslant 1$，故 $\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{3-x}{(2-x)^2}\geqslant x+1-\dfrac{3-x}{(x-2)^2}=\dfrac{x^3-3x^2+x+1}{(x-2)^2}$，

易知当 $0<x\leqslant 1$ 时，$x^2-2x-1<0$，故 $x^3-3x^2+x+1=(x-1)(x^2-2x-1)\geqslant 0$，

故 $\dfrac{e^{2x-2}(x+1)}{x^2}-\dfrac{3-x}{(2-x)^2}\geqslant 0$，故 $h'(x)\geqslant 0$，即 $h(x)$ 递增，即 $h(x)\leqslant h$（1），从而 $x_1+x_2\geqslant 2$．

8．解：（1）函数 $f(x)=x^2-4x+5-\dfrac{a}{e^x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增函数，$\therefore$ 在 $x\in R$ 上，$f'(x)=2x-4+\dfrac{a}{e^x}\geqslant 0$ 恒成立，

即：$a\geqslant(4-2x)e^x$；$\therefore$ 设 $h(x)=(4-2x)e^x$，$x\in R$；则 $h'(x)=(2-2x)e^x$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,1)$ 时 $h'(x)>0$， $h(x)$ 在 $x\in(-\infty,1)$ 上为增函数，
$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $h'(x)<0$， $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上为减函数，

$\therefore h(x)_{max}=h$（1）$=2e$，

$\because a\geqslant[(4-2x)e^x]_{max}$， $\therefore a\geqslant 2e$，即 $a\in[2e$， $+\infty)$；

（2）方法一：因为 $g(x)=e^x(x^2-4x+5)-a$，所以 $g'(x)=e^x(x-1)^2\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为增函数，

因为 $g(x_1)+g(x_2)=2g(m)$，即 $g(x_1)-g(m)=g(m)-g(x_2)$，所以 $g(x_1)-g(m)$ 和 $g(m)-g(x_2)$ 同号，

不妨设 $x_1<m<x_2$， $h(x)=g(2m-x)+g(x)-2g(m)(x>m\geqslant 1)$， ……（8 分）

所以 $h'(x)=-e^{2m-x}(2m-x-1)^2+e^x(x-1)^2$，因为 $e^{2m-x}<e^x$， $(2m-x-1)^2-(x-1)^2=(2m-2)(2m-2x)\leqslant 0$，
所以 $h'(x)>0$， $h(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h(x)>h(m)=0$， $h(x_2)=g(2m-x_2)+g(x_2)-2g(m)>0$，

所以 $g(2m-x_2)>2g(m)-g(x_2)=g(x_1)$，所以 $2m-x_2>x_1$，即 $x_1+x_2<2m$；

方法二：$\because g(x)=e^x f(x)=(x^2-4x+5)e^x-ag(x_1)+g(x_2)=2g(m)$， $m\in[1$， $+\infty)$，

$\therefore (x_1^2-4x_1+5)e^{x_1}-a+(x_2^2-4x_2+5)e^{x_2}-a=2(m^2-4m+5)e^m-2a$，

$\therefore (x_1^2-4x_1+5)e^{x_1}+(x_2^2-4x_2+5)e^{x_2}=2(m^2-4m+5)e^m$， $\therefore$ 设 $\varphi(x)=(x^2-4x+5)e^x x\in R$，

则 $\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=2\varphi(m)$， $\therefore \varphi'(x)=(x-1)^2e^x\geqslant 0$， $\varphi(x)$ 在 $x\in R$ 上递增且 φ'（1）$=0$； ……（6 分）

令 $x_1\in(-\infty,m)$， $x_2\in(m,+\infty)$， 设 $F(x)=\varphi(m+x)+\varphi(m-x)$， $x\in(0,+\infty)$； ……（8 分）

$\therefore F'(x)=(m+x-1)^2e^{m+x}-(m-x-1)^2e^{m-x}$；

$\because x>0$， $\therefore e^{m+x}>e^{m-x}>0$，且 $(m+x-1)^2-(m-x-1)^2=(2m-2)2x\geqslant 0$，
$\therefore F'(x)>0$， $F(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上递增， $\therefore F(x)>F(0)=2\varphi(m)$，
$\therefore \varphi(m+x)+\varphi(m-x)>2\varphi(m)x\in(0$， $+\infty)$； ……（10 分）

令 $x=m-x_1$， $\therefore \varphi(m+m-x_1)+\varphi(m-m+x_1)>2\varphi(m)$，即： $\varphi(2m-x_1)+\varphi(x_1)>2\varphi(m)$，

又 $\because \varphi(x_1)+\varphi(x_2)=2\varphi(m)$， $\therefore \varphi(2m-x_1)+2\varphi(m)-\varphi(x_2)>2\varphi(m)$，即： $\varphi(2m-x_1)>\varphi(x_2)$，

$\because \varphi(x)$ 在 $x\in R$ 上递增， $\therefore 2m-x_1>x_2$，即： $x_1+x_2<2m$． ……（12 分）