湛江一中卓越班　2023-17
高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明基本思路 1

一、单变量不等式证明方法

■单变量不含参不等式证明方法——虚设零点（隐零点问题）

（1）隐零点问题处理的基本思路：形式上虚设，运算上代换，数值上估算.

（2）隐零点问题求解步骤：

①用函数零点存在定理判定导函数零点的存在性，列出零点方程 $f'(x_0)=0$，并结合 $f'(x)$ 的单调性得零点的取值范围.

②以零点为分界点，说明导函数 $f'(x)$ 的正负，进而得到 $f(x)$ 的最值表达式.

③将零点方程适当变形，整体代入最值式子进行化简证明，有时(1)中的零点范围还可以适当缩小.

■单变量不含参不等式证明方法——切线放缩

生成方法一：利用曲线的切线进行放缩，实现以直代曲，化超越函数为一次函数

1． $y=\mathrm{e}^x$　设 $y=\mathrm{e}^x$ 上任一点 P 的横坐标为 m，则过该点的切线方程为 $y-\mathrm{e}^m=\mathrm{e}^m(x-m)$，

即 $y=\mathrm{e}^m(x+1)-m\mathrm{e}^m$，由此可得与 e^x 有关的不等式：$\mathrm{e}^x\ge \mathrm{e}^m(x+1)-m\mathrm{e}^m$，

其中 $x\in\mathbf{R}$，$m\in\mathbf{R}$，等号当且仅当 $x=m$ 时成立.

特别地，当 $m=0$ 时，有 $\mathrm{e}^x\ge 1+x$；当 $m=1$ 时，有 $\mathrm{e}^x\ge \mathrm{e}x$.

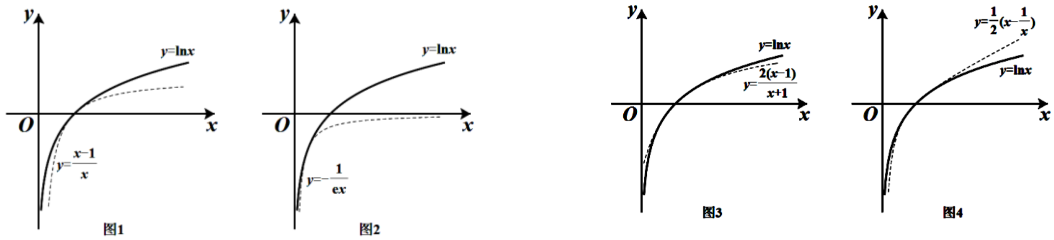
2． $y=\ln x$　设 $y=\ln x$ 上任一点 Q 的横坐标为 n，则过该点的切线方程为 $y-\ln n=\frac{1}{n}(x-n)$，

即 $y=\frac{1}{n}x-1+\ln n$，由此可得与 $\ln x$ 有关的不等式：$\ln x\le \frac{1}{n}x-1+\ln n$，

其中 $x>0$，$n>0$，等号当且仅当 $x=n$ 时成立.

特别地，当 $n=1$ 时，有 $\ln x\le x-1$；当 $n=\mathrm{e}$ 时，有 $\ln x\le \frac{1}{\mathrm{e}}x$.

生成方法二：利用曲线的相切曲线进行放缩，化超越函数为分式函数



由图1可得 $\ln x\ge \frac{x-1}{x}$；　　由图2可得 $\ln x\ge -\frac{1}{\mathrm{e}x}$；

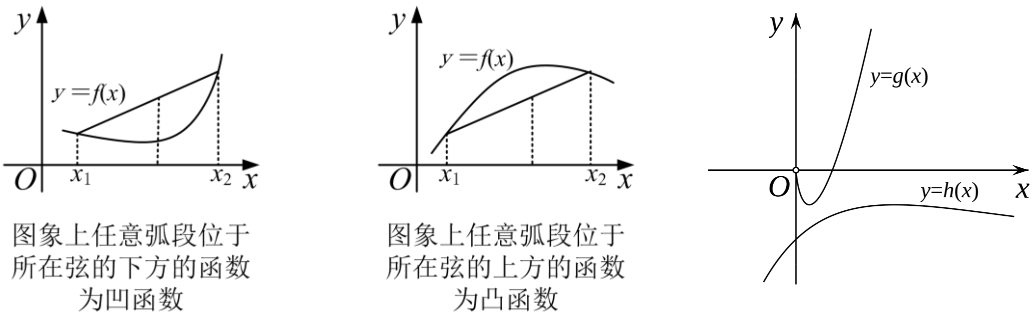
由图3可得，$\ln x\le \frac{2(x-1)}{x+1}$（$0<x\le 1$），$\ln x\ge \frac{2(x-1)}{x+1}$（$x\ge 1$）；

由图4可得，$\ln x\ge \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$（$0<x\le 1$），$\ln x\le \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$（$x\ge 1$）.

用 $x+1$ 取代 x 的位置，相应的可得到与 $\ln(x+1)$ 有关的常用不等式.

■单变量不含参不等式证明方法——凹凸反转（或公切线隔离）

（1）凹函数、凸函数的几何特征



图象上任意弧段位于所在弦的下方的函数为凹函数　　图象上任意弧段位于所在弦的上方的函数为凸函数

（2）凹函数、凸函数的导数特征

①**定理**：设函数 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的可导函数，

则 $f(x)$ 为 (a,b) 上的**凹**函数 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 为 (a,b) 上的递增函数 $\Leftrightarrow$ $f''(x)\ge 0$ 且不在 (a,b) 的任一子区间上恒为零.

②**定理**：设函数 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的可导函数，

则 $f(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 为 (a,b) 上的递减函数 $\Leftrightarrow$ $f''(x)\le 0$ 且不在 (a,b) 的任一子区间上恒为零.

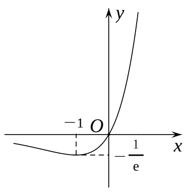
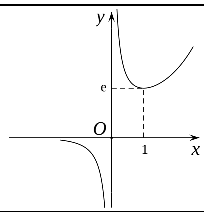
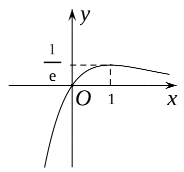
（3）凹凸反转

证明 $f(x)>0$ 时，大多数情况下都是证明 $f(x)_{min}>0$，但很多时候，$f'(x)$的零点无法求解. 此时可用设隐零点的方法，但是隐零点也不是万能的方法，如果隐零点法不行可尝试用凹凸反转.

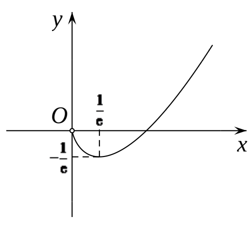
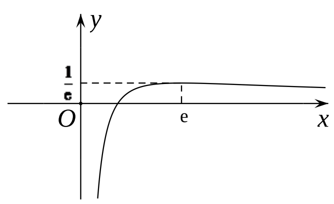
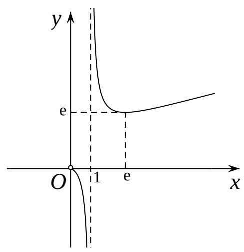
凹凸反转关键是如何分离，常见的不等式是由指数函数、对数函数、分式函数和多项式函数构成，当我们构造差值函数不易求出导函数零点时(当然可以考虑用隐零点的方法)，要考虑指、对分离(对数独行侠，指数找朋友，指对在一起，常常要分手)，即指数函数和多项式函数组合与对数函数和多项式函数组合分开，构造两个单峰函数，然后利用导数分别求两个函数的最值并进行比较. 当然我们要非常熟练掌握一些常见的指(对)数函数和多项式组合的函数的图象与最值.

（4）六大经典超越函数的图象和性质

① x 与 e^x 的组合函数的图象与性质

函数	$f(x)=xe^x$	$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$	$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$
图象			
定义域	R	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	R
值域	$\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$	$(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$	$\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$
单调性	在$(-\infty,-1)$上递减 在$(-1,+\infty)$上递增	在$(-\infty,0)$，$(0,1)$上递减 在$(1,+\infty)$上递增	在$(-\infty,1)$上递增 在$(1,+\infty)$上递减
最值	$f(x)_{min}=f(-1)=-\dfrac{1}{e}$	当 $x>0$ 时，$f(x)_{min}=f(1)=e$	$f(x)_{max}=f(1)=\dfrac{1}{e}$

② x 与 $\ln x$ 的组合函数的图象与性质

函数	$f(x)=x\ln x$	$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$	$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$
图象			
定义域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,1)\cup(1,+\infty)$
值域	$\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$	$\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right)$	$(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$
单调性	在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$上递减 在$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$上递增	在$(0,e)$上递增 在$(e,+\infty)$上递减	在$(0,1)$，$(1,e)$上递减 在$(e,+\infty)$上递增
最值	$f(x)_{min}=f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$	$f(x)_{max}=f(e)=\dfrac{1}{e}$	当 $x>0$ 时，$f(x)_{min}=f(e)=e$

■单变量含参不等式证明方法——合理消参（或变换主元）

二、典型例题

例 1.已知函数 $f(x)=xe^x-a(x+\ln x)$.

（1）讨论 $f(x)$极值点的个数；（2）若 x_0 是 $f(x)$的一个极小值点，且 $f(x_0)>0$，证明：$f(x_0)>2(x_0-x_0^3)$.

（提示：隐零点代换 ＋ 切线放缩）

例 2.设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$零点的个数；（2）求证：当 $a=2$ 时，$f(x)\geq 4$.

（提示：最值分析法（隐零点）、凹凸反转、切线放缩（找隔离直线））

例 3.已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2+x+1$.

（1）当 $a=-2$ 时，求 $f(x)$的极值点；（2）当 $a=0$ 时，证明：对任意的 $x>0$，不等式 $xe^x\geq f(x)$恒成立.

（提示：最值分析（对数独行侠）、最值分析（指数找朋友）、同构＋切线放缩）

例 4.已知函数 $f(x)=e\ln x-ax(a\in R)$.

（1）讨论 $f(x)$的单调性；（2）当 $a=e$ 时，证明：$xf(x)-e^x+2ex\leq 0$.

（提示：指对分手（凹凸反转）、同构＋切线放缩）

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明基本思路 2

例 5. 设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的零点的个数；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

（提示：最值分析法（隐零点）、变换主元（最值分析法）、同构＋切线放缩）

例 6. 设函数 $f(x)=ae^{x}\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线为 $y=e(x-1)+2$.

（1）求 a，b；（2）证明：$f(x)>1$.**（提示：指对分手（凹凸反转））**

例 7.已知 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-a\ln x-a$，其中常数 $a>0$．

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的极值；（2）求证：$\mathrm{e}^{2x-2}-\mathrm{e}^{x-1}\ln x-x\geq 0$．**（提示：凹凸反转、同构＋切线放缩）**

例 8.. 函数数列不等式

1.求证：$\ln(n+2)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n+1}$．（提示：**将和拆开之利用通项法，利用常见不等式证明**）

2.证明：$\ln\sqrt{n+1}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}(n\in N^{*})$．（提示：**将和拆开之利用通项法，利用常见不等式证明**）

3.已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+\dfrac{a}{x}-1\left(a\in R\right)$，求证：$\ln 2\cdot\ln 3\cdot\ln 4\cdot\cdots\cdot\ln n>\dfrac{1}{n}(n\geq 2,n\in N^{*})$

（提示：**积拆开之利用通项法，利用常见不等式证明**）

4. 证明：$\ln(\dfrac{5}{4})+\ln(\dfrac{10}{9})+\ln(\dfrac{17}{16})+\cdots+\ln(\dfrac{n^{2}+1}{n^{2}})<1(n\in N^{*}$，$n\geq 2)$；（提示：**利用常见不等式**放缩，求和）

5. 证明：$(1+\dfrac{1}{2^{2}})(1+\dfrac{1}{4^{2}})(1+\dfrac{1}{8^{2}})\ldots(1+\dfrac{1}{2^{2n}})<e(n\in N^{*})$（提示：取对数，**利用常见不等式**放缩，求和）

6.证明：$(1+\dfrac{1}{2^{4}})(1+\dfrac{1}{3^{4}})\cdots(1+\dfrac{1}{n^{4}})<e$．（提示：取对数，**利用常见不等式**放缩，求和）

7. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)$．

（1）求证：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<f(x)<x$；

（2）已知 e 为自然对数的底数，求证：$\forall n\in\mathbf{N}^{*}$，$\sqrt{\mathrm{e}}<\left(1+\dfrac{1}{n^{2}}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^{2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n^{2}}\right)<\mathrm{e}$．（提示：合理放缩）

例 1.（1）$f'(x)=(x+1)e^x-a\left(1+\frac{1}{x}\right)=(x+1)\left(e^x-\frac{a}{x}\right)=\frac{(x+1)(xe^x-a)}{x}$，$x\in(0，+\infty)$.

①当 $a\le0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$上为增函数，不存在极值点；

②当 $a>0$ 时，令 $h(x)=xe^x-a$，$h'(x)=(x+1)e^x>0$．显然函数 $h(x)$在$(0，+\infty)$上是增函数，

又因为当 $x\to0$ 时，$h(x)\to-a<0$，$h(a)=a(e^a-1)>0$，

∴必存在 $x_0>0$，使 $h(x_0)=0$.

且当 $x\in(0，x_0)$时，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数.

所以，$x=x_0$ 是 $f(x)$的极小值点.

综上，当 $a\le0$ 时，$f(x)$无极值点，当 $a>0$ 时，$f(x)$有一个极值点.

（2）由（1）得，$f'(x_0)=0$，即 $x_0e^{x_0}=a$，$f(x_0)=x_0e^{x_0}-a(x_0+\ln x_0)=x_0e^{x_0}(1-x_0-\ln x_0)$，

因为 $f(x_0)>0$，所以 $1-x_0-\ln x_0>0$，令 $g(x)=1-x-\ln x$，$g'(x)=-1-\frac{1}{x}<0$，

$g(x)$在$(0，+\infty)$上是减函数，且 $g(1)=0$，由 $g(x)>g(1)$得 $x<1$，所以 $x_0\in(0，1)$，

设 $\varphi(x)=\ln x-x+1$，$x\in(0，1)$，$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

当 $x\in(0，1)$时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$为增函数，

所以 $\varphi(x)<\varphi(1)=0$，即 $\varphi(x)<0$，即 $\ln x<x-1$，所以$-\ln x>1-x$，

所以 $\ln(x+1)<x$，所以 $e^x>x+1>0$，则 $e^{x_0}>x_0+1$.

因为 $x_0\in(0，1)$，所以 $1-x_0-\ln x_0>1-x_0+1-x_0=2(1-x_0)>0$.

相乘得 $e^{x_0}(1-x_0-\ln x_0)>(x_0+1)(2-2x_0)$，

所以 $f(x_0)=x_0e^{x_0}(1-x_0-\ln x_0)>2x_0(x_0+1)(1-x_0)=2x_0(1-x_0^2)=2(x_0-x_0^3)$.

故 $f(x_0)>2(x_0-x_0^3)$成立.

例 2.（1）法一：$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$.

当 $a\le0$ 时，$f'(x)>0$，$f'(x)$没有零点．当 $a>0$ 时，设 $u(x)=e^{2x}$，$v(x)=-\frac{a}{x}$，

因为 $u(x)=e^{2x}$在$(0，+\infty)$上单调递增，$v(x)=-\frac{a}{x}$在$(0，+\infty)$上单调递增，

所以 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

又因为 $f'(a)>0$，当 b 满足 $0<b<\frac{a}{4}$且 $b<\frac{1}{4}$时，$f'(b)<0$，

所以当 $a>0$ 时，$f'(x)$存在唯一零点.

法二：$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$．令方程 $f'(x)=0$，得 $a=2xe^{2x}(x>0)$.

因为函数 $g(x)=2x(x>0)$，$h(x)=e^{2x}(x>0)$均是函数值为正值的增函数，

所以由增函数的定义可证得函数 $u(x)=2xe^{2x}(x>0)$也是增函数，其值域是$(0，+\infty)$.

由此可得，当 $a\le0$ 时，$f'(x)$无零点；当 $a>0$ 时，$f'(x)$有唯一零点.

（2）**法一：（最值分析（隐零点））**

由(1)可设 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上的唯一零点为 x_0.

当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，

当且仅当 $x=x_0$ 时，$f(x)$取得最小值，最小值为 $f(x_0)$.

因为 $2e^{2x_0}-\frac{2}{x_0}=0$，$2x_0=-\ln x_0$ 所以 $f(x_0)=\frac{1}{x_0}+4x_0\geq 4$(当且仅当 $x_0=\frac{1}{2}$时等号成立).

所以当 $a=2$ 时，$f(x)\geq 4$.

法二：（凹凸反转）当 $a=2$ 时，$f(x)\geq 4 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-2\ln x}{x}\geq\frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{x}\geq\frac{2\ln x+4}{x}$.

构造函数 $g(x)=\frac{e^{2x}}{x}$，则……构造函数 $h(x)=\frac{2\ln x+4}{x}$，则……

法三：（切线放缩（找隔离直线））

当 $a=2$ 时，$f(x)\geq 4 \Leftrightarrow e^{2x}-2\ln x \Leftrightarrow e^{2x}\geq 2\ln x+4$.

证明 $e^{2x}\geq 2ex$，$2\ln x+4\leq 2ex$ 即可

（即找 $y=e^{2x}$ 和 $y=2\ln x+4$ 的隔离直线 $y=2ex$ 或者说对 $y=e^{2x}$ 进行切线放缩）

例 3（1）当 $a=-2$ 时，$f(x)=\ln x-x^2+x+1$.

$f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}=-\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$.

因为 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，所以，$x=1$.

当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数.

所以，$f(x)$的极值点为 $x=1$.

（2）**法一：（最值分析（对数独行侠））**

当 $a=0$ 时，要证对任意的 $x>0$，不等式 $xe^x\geq f(x)$恒成立，

即证 $x>0$ 时，$xe^x\geq\ln x+x+1$ 恒成立，即证 $x(e^x-1)-\ln x-1\geq 0$ 恒成立，

令 $g(x)=x(e^x-1)-\ln x-1$，$g'(x)=x(e^x+1)-\frac{1}{x}-1=\frac{(x+1)(xe^x-1)}{x}$，

再令 $h(x)=xe^x-1$，$h'(x)=(x+1)e^x>0$，$\therefore h(x)$为$(0,+\infty)$上的增函数，

又 $h(0)=-1<0$，$h(1)=e-1>0$，

$\therefore$存在唯一的 $x_0\in(0,1)$使 $h(x_0)=0$，即 $x_0e^{x_0}-1=0$，

$\therefore$当 $x\in(0,x_0)$时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数，

当 $x\in(x_0,1)$时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$为增函数，

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=x_0(e^{x_0}-1)-\ln x_0-1=x_0e^{x_0}-\ln x_0-x_0-1$，

又由 $x_0e^{x_0}-1=0$，得 $x_0e^{x_0}=1$，$-\ln x_0=x_0$.

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=1-x_0-1+x_0=0$

$\therefore$对$\forall x>0$，$g(x)\geq g(x_0)=0$，$xe^x\geq\ln x+x+1$ 恒成立，

即对任意的 $x>0$，不等式 $xe^x\geq f(x)$恒成立.

法二：（最值分析（指数找朋友））

当 $a=0$ 时，要证对任意的 $x>0$，不等式 $xe^x\geq f(x)$恒成立，

即证 $x>0$ 时，$xe^x\geq\ln x+x+1$ 恒成立，即证$\frac{\ln x+x+1}{xe^x}\leq 1$ 恒成立，

令 $g(x)=\frac{\ln x+x+1}{xe^x}$，则……

法三：（同构＋切线放缩）

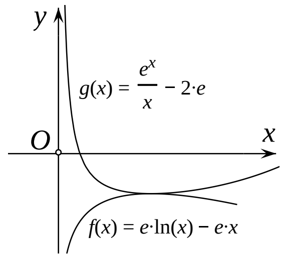
当 $a=0$ 时，要证对任意的 $x>0$，不等式 $xe^x\geq f(x)$恒成立，

即证 $x>0$ 时，$xe^x=e^{x+\ln x}\geq \ln x+x+1$ 恒成立．…….

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明基本思路 3

例 4.（1）$f'(x)=\dfrac{e}{x}-a(x>0)$，



①若 $a\leq 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

②若 $a>0$，则当 $0<x<\dfrac{e}{a}$时，$f'(x)>0$；当 $x>\dfrac{e}{a}$时，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{e}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{e}{a},+\infty\right)$上单调递减.

（2）**法一：(指对分手（凹凸反转）)**

因为 $x>0$，所以只需证 $f(x)\leq\dfrac{e^x}{x}-2e$，当 $a=e$ 时，由(1)知，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=-e$.

记 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}-2e(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，

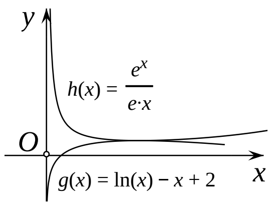
所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$递减；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-e$.

综上，当 $x>0$ 时，$f(x)\leq g(x)$，即 $f(x)\leq\dfrac{e^x}{x}-2e$，即 $xf(x)-e^x+2ex\leq 0$.

法二：(指对分手（凹凸反转）)

由题意知，即证 $ex\ln x-ex^2-e^x+2ex\leq 0$，从而等价于 $\ln x-x+2\leq\dfrac{e^x}{ex}$.



设函数 $g(x)=\ln x-x+2$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1$.

所以当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$递增；当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$递减，

从而 $g(x)$在$(0,+\infty)$上的最大值为 $g(1)=1$.

设函数 $h(x)=\dfrac{e^x}{ex}$，则 $h'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{ex^2}$.

所以当 $x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，　$h(x)$递增；当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$递减，

从而 $h(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为 $h(1)=1$.

综上，当 $x>0$ 时，$g(x)\leq h(x)$，即 $xf(x)-e^x+2ex\leq 0$.

法三：（同构＋切线放缩）

由题意即证 $ex\ln x-ex^2-e^x+2ex\leq 0\Leftrightarrow \ln x-x+2\leq\dfrac{e^x}{ex}\Leftrightarrow \ln x-x+2\leq e^{x-\ln x-1}$.

①整体代换：令 $t=x-\ln x-1\geq 0$，　……

②证明$\dfrac{e^x}{ex}=e^{x-\ln x-1}\geq x-\ln x-1+1=x-\ln x\geq 1$；$\ln x-x+2\leq x-1-x+2=1$.

法四：（同构＋切线放缩）

由题即证 $ex\ln x-ex^2-e^x+2ex\leq 0\Leftrightarrow \ln x-x+2\leq\dfrac{e^x}{ex}\Leftrightarrow e\ln x-ex+2e\leq\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}$.

①整体代换：令 $t=x-\ln x\geq 1$，　……

②证明：$\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}\geq e(x-\ln x)=e\,x-e\ln x\geq e\,x-e(x-1)=e$；

$e\ln x-ex+2e\leq e(x-1)-ex+2e=e$ 即可.

例 5.（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\dfrac{a}{x}(x>0)$．由 $f'(x)=0$ 得 $2xe^{2x}=a$.

令 $g(x)=2xe^{2x}$，$g'(x)=(4x+2)e^{2x}>0(x>0)$，$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上递增，所以 $g(x)>g(0)=0$.

当 $a>0$ 时，方程 $g(x)=a$ 有一个根，即 $f'(x)$存在唯一零点；

当 $a\le 0$ 时，方程 $g(x)=a$ 没有根，即 $f'(x)$没有零点.

（2）**法一：（最值分析法（隐零点，对数独行侠））**

由(1)可设 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上的唯一零点为 x_0，

当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，所以$[f(x)]_{\min}=f(x_0)$.

由 $2e^{2x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$ 得 $e^{2x_0}=\dfrac{a}{2x_0}$，又 $x_0=\dfrac{a}{2e^{2x_0}}$，得 $\ln x_0=\ln\dfrac{a}{2e^{2x_0}}=\ln\dfrac{a}{2}-2x_0$，

所以 $f(x_0)=e^{2x_0}-a\ln x_0=\dfrac{a}{2x_0}-a\left(\ln\dfrac{a}{2}-2x_0\right)$

$$=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{2x_0}\cdot 2ax_0}+a\ln\frac{2}{a}=2a+a\ln\frac{2}{a}.$$

故当 $a>0$ 时，$f(x)\ge 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

法二：（变换主元（最值分析法，对数独行侠））

由题意：当 $a>0$ 时，$f(x)\ge 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$，即 $e^{2x}-a\ln x\ge 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$，

即证：$\ln a+\dfrac{1}{a}e^{2x}-\ln 2-\ln x-2\ge 0$（$a>0$）

令 $h(a)=\ln a+\dfrac{1}{a}e^{2x}-\ln 2-\ln x-2$，则 $h'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{e^{2x}}{a^2}=\dfrac{a-e^{2x}}{a^2}$（$a>0$）

当 $0<a<e^{2x}$ 时，$h(a)$为减函数；当 $a>e^{2x}$ 时，$h(a)$为增函数.

所以函数 $h(a)_{\min}=h(e^{2x})=2x-\ln x-\ln 2-1$.

所以只需证明 $2x-\ln x-\ln 2-1\ge 0$ 即可. …………

法三：（同构＋切线放缩，最值分析法）

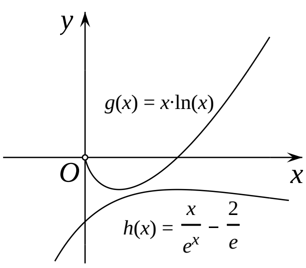
由题意：当 $a>0$ 时，$f(x)\ge 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$，即 $e^{2x}-a\ln x\ge 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$，

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}e^{2x}-\ln 2-\ln x-2+\ln a\ge 0$（$a>0$）$\Leftrightarrow e^{2x-\ln a}-\ln 2-\ln x-2+\ln a\ge 0$（$a>0$）.

而 $e^{2x-\ln a}-\ln 2-\ln x-2+\ln a\ge 2x-\ln a+1-\ln 2-\ln x-2+\ln a=2x-\ln x-1-\ln 2$.

故只需证明 $2x-\ln x-1-\ln 2\ge 0$ 即可. …………

例 6.（1）$f'(x)=ae^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{be^{x-1}(x-1)}{x^2}(x>0)$，



由于直线 $y=e(x-1)+2$ 的斜率为 e，图象过点(1，2)，

所以$\begin{cases}f(1)=2，\\f'(1)=e，\end{cases}$ 即$\begin{cases}b=2，\\ae=e，\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1，\\b=2.\end{cases}$

（2）**法一：（指对分手（凹凸反转））**

由（1）知 $f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}(x>0)$，从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$.

构造函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$，

所以当 $x\in\left(0，\dfrac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$，当 $x\in\left(\dfrac{1}{e}，+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，

故 $g(x)$在$\left(0，\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e}，+\infty\right)$上单调递增，

从而 $g(x)$在$(0，+\infty)$上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

构造函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x\in(0，1)$时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1，+\infty)$时，$h'(x)<0$；

故 $h(x)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，

从而 $h(x)$在$(0，+\infty)$上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.

综上，当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

法二：（指对分手（凹凸反转或切线放缩））

由（1）知 $f(x)=e^x\ln x+\frac{2e^{x-1}}{x}(x>0)$，从而 $f(x)>1$ 等价于 $\ln x+\frac{1}{ex}>e^{-x}-\frac{1}{ex}$.

构造函数 $g(x)=\ln x+\frac{1}{ex}$，则……，$\ln x+\frac{1}{ex}\geq 0$ ($\ln x\leq ex\Rightarrow \ln x\geq -\frac{1}{ex}$) ；

构造函数 $h(x)=e^{-x}-\frac{1}{ex}$，则……，$e^{-x}-\frac{1}{ex}\leq 0$ （$e^x\geq ex\Rightarrow e^{-x}\leq\frac{1}{ex}$ ）.

例 7.（1）当 $a=e$ 时，$f(x)=e^x-e\ln x-e$，$f'(x)=e^x-\frac{e}{x}$，$f'(1)=0$.

$f''(x)=e^x+\frac{e}{x^2}>0$，$\therefore f'(x)$在$(0,\ +\infty)$单调递增.

$\therefore x\in(0,\ 1)$时，$f'(x)<f'(1)=0$，$x\in(1,\ +\infty)$，$f'(x)>f'(1)=0$.

$\therefore f(x)$在$(0,\ 1)$单调递减，在$(1,\ +\infty)$单调递增.

$\therefore$ $f(x)$的极小值为 $f(1)=0$，无极大值.

（2）法一：（凹凸反转）

由（1）得 $e^x-e\ln x-e\geq 0\Rightarrow e^x-e\ln x\geq e$，

所证不等式：$e^{2x-2}-e^{x-1}\ln x-x\geq 0\Leftrightarrow e^x-e\ln x\geq\frac{x}{e^{x-2}}$.

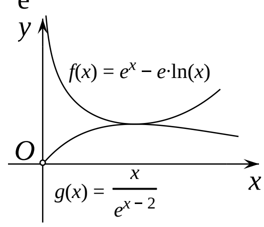
设 $g(x)=\frac{x}{e^{x-2}}=xe^{2-x}$，$g'(x)=e^{2-x}-xe^{2-x}=(1-x)e^{2-x}$，

令 $g'(x)>0$ 可解得：$x<1$.

$\therefore g(x)$在$(0,\ 1)$单调递增，在$(1,\ +\infty)$单调递减.

$\therefore g(x)_{\max}=g(1)=e$.

$\therefore e^x-e\ln x\geq e\geq g(x)$，即 $e^x-e\ln x\geq\frac{x}{e^{x-2}}$，$\therefore e^{2x-2}-e^{x-1}\ln x-x\geq 0$.



法二：（同构＋切线放缩）

要证不等式：$e^{2x-2}-e^{x-1}\ln x-x\geq 0\Leftrightarrow e^{x-1}-\ln x-\frac{x}{e^{x-1}}\geq 0$

$$\Leftrightarrow e^{x-1}-\ln x-e^{\ln x-x+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x-1}-x+1-(\ln x-x+1)-e^{\ln x-x+1}\geq 0.$$

例 8. 函数数列不等式：

1. 提示：$s_n=\ln(n+2)$，求 a_n，证明 $a_n<\dfrac{1}{n+1}$

2. 提示：$s_n=\ln\sqrt{n+1}$，求 a_n，证明 $a_n<\dfrac{1}{n}$

3. 提示：$T_n=a_1a_2\cdots a_n=\dfrac{1}{n}$，求 a_n，证明 $\ln n>a_n$

4. $\ln(\dfrac{n^2+1}{n^2})=\ln(1+\dfrac{1}{n^2})\le\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}$，

5.. $\ln(1+\dfrac{1}{2^{2n}})\le\dfrac{1}{2^{2n}}<\dfrac{1}{2^n}$

6. l$\ln(1+\dfrac{1}{n^4})\le\dfrac{1}{n^4}<\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}$

7.（1）令 $g(x)=f(x)-\dfrac{x}{x+1}=\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{(x+1)^2}>0(x>0)$，

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，所以当 $x\in(0,+\infty)$时，$g(x)>g(0)=0$，

即 $f(x)>\dfrac{x}{x+1}$成立.

令 $h(x)=f(x)-x=\ln(1+x)-x(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}<0(x>0)$，

所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，所以当 $x\in(0,+\infty)$时，$h(x)<h(0)=0$，即 $f(x)<x$ 成立.

综上所述，当 $x\in(0,+\infty)$时，$\dfrac{x}{1+x}<f(x)<x$ 成立.

（2）由（1）可知，$\ln(1+x)<x$ 对 $x\in(0,+\infty)$都成立，

所以 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)<\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2}$，

即：$\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]<\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}=\dfrac{n+1}{2n}$.

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以$\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\times1}=1$，所以 $\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]<1$，

所以 $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)<e$.

又由(1)可知，$\ln(1+x)>\dfrac{x}{x+1}$对 $x\in(0,+\infty)$都成立，

所以 $\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)>\dfrac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}}=\dfrac{k}{n^2+k}(k=1,2,\ldots,n)$，

所以 $\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]=\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$

$>\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}\ge\dfrac{1}{n^2+n}+\dfrac{2}{n^2+n}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n}=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2+n}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)\right]>\dfrac{1}{2}$，所以$\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)>\sqrt{e}$，

所以$\sqrt{e}<\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)<e$.