湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——不等式证明（3）

一、证明不等式 1：不含参：一般在解题过程中会涉及二阶导、隐零点的处理

1. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-x-mx^{2}$，$x\in\left(0,+\infty\right)$.

（1）若 $f\left(x\right)$ 是增函数，求实数 m 的取值范围；

（2）当 $m=1$ 时，求证：$f\left(x\right)>\frac{1}{4}$.

2. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+ax+\frac{1}{x}\left(a\in R\right)$

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）当 $a=-1$ 时，$g\left(x\right)=f\left(x\right)+\left(x-2\right)e^{x}-\frac{1}{x}$，记函数 $y=g\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{1}{4},1\right]$ 上的最大值为 m，证明：$\left(m+4\right)\left(m+3\right)<0$.

3. 设 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)+\sqrt{x+1}+ax+b$（$a,b\in R$，$a,b$ 为常数），曲线 $y=f\left(x\right)$ 与直线 $y=\frac{3}{2}x$ 在 $\left(0,0\right)$ 点相切.

（1）求 a,b 的值；

（2）证明：当 $0<x<2$ 时，$f\left(x\right)<\frac{9x}{x+6}$.

4. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{\ln x+k}{e^{x}}$（$k$ 为常数，$e=2.71828\ldots$ 是自然对数的底数），曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与 x 轴平行.

（1）求 k 的值；

（2）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）设 $g\left(x\right)=\left(x^{2}+x\right)f'\left(x\right)$，其中 $f'\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$ 的导函数. 证明：对任意 $x>0$，$g\left(x\right)<1+e^{-2}$.

5. 已知 $f\left(x\right)=ax-\ln x\left(a\in R\right)$.

（1）若 $a=-1$，求证：$f\left(x\right)\geq 1-xe^{x}$；

（2）求证：$\frac{\ln x}{e^{x}}<\frac{1}{e^{2}}$.

二、证明不等式2：含参，讨论单调性

6. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-\ln\left(x+m\right)$.

（1）设 $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $m\leq 2$ 时，证明：$f\left(x\right)>0$.

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+ax^{2}-\left(2a+1\right)x+1\left(a\geq 0\right)$.

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 上的最大值；

（2）函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上存在最小值，记为 $g\left(a\right)$，求证：$g(a)<\dfrac{1}{4a}-1$.

8. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-\dfrac{1}{2}ax^{2}-x$.

（1）设 $f'\left(x\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的导函数，讨论函数 $y=f'\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a\leq 1-\dfrac{1}{e}$ 时，求证：$f\left(x\right)+x-\ln\left(x+1\right)\geq 1$.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{m\left(x^{2}+1\right)+x}{e^{x}}$.

（1）试讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $m\leq 0$，证明：$ef(x)+\ln x\leq x$.

三　证明不等式3：放缩法

10. $f\left(x\right)=a\left(x-\ln x\right)+\dfrac{2x-1}{x^2}$，$a\in R$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，证明：$f\left(x\right)>f'\left(x\right)+\dfrac{3}{2}$ 对任意的 $x\in\left[1,2\right]$ 成立.

11. 已知 $f\left(x\right)=x\ln x-x+\dfrac{a}{x}$，其中 $a\in R$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的极值点的个数；

（2）当 $n\in N^*$ 时，证明：$\ln^2 2+\ln^2\dfrac{3}{2}+\ln^2\dfrac{4}{3}+\cdots+\ln^2\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{n}{2n+4}$.

12. 设函数 $f\left(x\right)=x^2+\left(a-2\right)x-a\ln x$（$a\in R$）.

（1）若 $a=1$，求 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（3）若 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{4^2}+\cdots+\dfrac{n}{\left(n+1\right)^2}<\ln\left(n+1\right)$

13. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax+1\left(a\in R\right)$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的最大值；

（2）证明：$\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)<e$，$n\in N^*$.

14. 已知函数 $f\left(x\right)=a\ln x+x^2$，其中 $a\in R$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，证明：$f\left(x\right)\le x^2+x-1$；

（3）试比较 $\dfrac{\ln 2^2}{2^2}+\dfrac{\ln 3^2}{3^2}+\dfrac{\ln 4^2}{4^2}+\cdots+\dfrac{\ln n^2}{n^2}$ 与 $\dfrac{\left(n-1\right)\left(2n+1\right)}{2\left(n+1\right)}$（$n\in N^*$ 且 $n\ge 2$）的大小，证明你的结论.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-mx+m$，$m\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $x\in\left(1,+\infty\right)$，证明：$1<\dfrac{x-1}{\ln x}<x$；

（Ⅲ）对于任意正整数 n，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<t$，求 t 的最小正整数值.

四、证明不等式4：指数✖对数

对于形如：$f\left(x\right)=ax^{\alpha}\ln x-\dfrac{b}{e^{x}}-c$（$a,b,c\in R_{+}$）的函数，证明 $f\left(x\right)>0$ 在默认定义域上成立的解题策略：

【解法一】：①分离为两个函数：对数型函数 $g\left(x\right)=ax^{\alpha}\ln x$ 与指数型函数 $h\left(x\right)=\dfrac{b}{e^{x}}+c$

②分别求出两个函数的最值：$g\left(x\right)_{\min}$ 与 $h\left(x\right)_{\max}$，并比较大小，可得出结论.

【解法二】：去对数系数，再作差构造新函数证明.

16. 设函数 $f\left(x\right)=ae^{x}\ln x+\dfrac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=e\left(x-1\right)+2$.

（1）求 a,b；（2）证明：$f\left(x\right)>1$.

17. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+\dfrac{2a}{x}$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；（2）证明：当 $a\geq\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(x\right)>e^{-x}+\dfrac{1}{2}$. 参考数据：$e\approx2.7183$.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}\left(x\ln x+\dfrac{2}{e}\right)$.

（1）求函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-e^{x}\left(1+\dfrac{2}{e}\right)$ 的单调区间；（2）证明：$f\left(x\right)-x>0$.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x+a}{e^{x}}$ 的图象在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=x$.

（1）求实数 a 的值并判断 $f\left(x\right)$ 的单调性；（2）证明：$x\ln x>\dfrac{\ln\left(x+1\right)}{e^{x}}-\dfrac{2}{e}$.

20. 设函数 $f\left(x\right)=\ln x-e^{1-x}$，$g\left(x\right)=a\left(x^{2}-1\right)-\dfrac{1}{x}$.

（1）判断函数 $y=f\left(x\right)$ 零点的个数，并说明理由；

（2）记 $h\left(x\right)=g\left(x\right)-f\left(x\right)+\dfrac{e^{x}-ex}{xe^{x}}$，讨论 $h\left(x\right)$ 的单调性；

（3）若 $f\left(x\right)<g\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

21. 设函数 $f\left(x\right)=\ln x+\dfrac{a}{x}-x$

（1）当 $a=-2$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）当 $a=1$ 时，证明：$f\left(x\right)-\dfrac{1}{e^{x}}+x>0$ 恒成立.

一、证明不等式1：不含参：一般在解题过程中会涉及二阶导、隐零点的处理

1. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-x-mx^{2}$， $x\in\left(0,+\infty\right)$.

（1）若 $f\left(x\right)$ 是增函数，求实数 m 的取值范围；

（2）当 $m=1$ 时，求证： $f\left(x\right)>\dfrac{1}{4}$.

【答案】：（1） $m\le\dfrac{1}{2}$；（2）证明见解析.

【解析】：（1）因为 $f\left(x\right)=e^{x}-x-mx^{2}$，所以 $f'\left(x\right)=e^{x}-1-2mx,x\in\left(0,+\infty\right)$，

因为 $f\left(x\right)$ 是增函数，所以 $f'\left(x\right)\ge0$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时恒成立，

又 $f''\left(x\right)=e^{x}-2m$，可知 $y=f''\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，令 $f''\left(x\right)=0$， $x=\ln 2m$，

当 $\ln 2m\le0$ 时，即 $m\le\dfrac{1}{2}$ 时， $f''\left(x\right)\ge0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，

所以 $y=f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $f'\left(x\right)>f'\left(0\right)=0$，符合题意；

当 $\ln 2m>0$ 时，即 $m>\dfrac{1}{2}$ 时，当 $x\in\left(0,\ln 2m\right)$ 时， $f''\left(x\right)<0$，当 $x\in\left(\ln 2m,+\infty\right)$ 时， $f''\left(x\right)>0$，

所以 $y=f'\left(x\right)$ 在 $\left(0,\ln 2m\right)$ 上单调递减，在 $\ln 2m,+\infty$ 上单调递增，

所以 $f'\left(x\right)_{\min}=f'\left(\ln 2m\right)=2m-2m\ln 2m-1$，令 $2m=t\left(t>1\right)$， $g\left(t\right)=t-t\ln t-1$，

所以 $g'\left(t\right)=-\ln t$，所以 $t\in\left(1,+\infty\right)$ 时， $g'\left(t\right)<0$，

所以 $g\left(t\right)_{\max}<g\left(1\right)=0$，所以 $f'\left(x\right)_{\min}=f'\left(\ln 2m\right)=2m-2m\ln 2m-1<0$，这与 $f'\left(x\right)\ge0$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时恒成立矛盾，

综上可知：$m\le\frac{1}{2}$；

（2）当$m=1$时，$f\left(x\right)=e^{x}-x-x^{2}$，$f'\left(x\right)=e^{x}-1-2x$，$f''\left(x\right)=e^{x}-2$，且$y=f''\left(x\right)$为增函数，

令$f''\left(x\right)=e^{x}-2=0$，所以$x=\ln 2$，所以$y=f'\left(x\right)$在$\left(0,\ln 2\right)$上单调递减，在$\left(\ln 2,+\infty\right)$山单调递增，

所以$f'\left(x\right)_{\min}=f'\left(\ln 2\right)=1-2\ln 2<0$，

又因为$f'\left(0\right)=0$，$f'\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}-4=\sqrt{e^{3}}-4>\sqrt{16}-4=0$，$f'\left(1\right)=e-3<0$，

所以存在唯一$x_0\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$使得$f'\left(x_0\right)=0$，

所以当$x\in\left(0,x_0\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，当$x\in\left(x_0,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(0,x_0\right)$上单调递减，在$\left(x_0,+\infty\right)$上单调递增，且$f'\left(x_0\right)=e^{x_0}-1-2x_0=0$，

所以$f\left(x\right)_{\min}=f\left(x_0\right)=e^{x_0}-x_0-x_0^{2}=-x_0^{2}+x_0+1=-\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{5}{4}$，

又因为$x_0\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以$-\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{5}{4}>-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$，

所以$f\left(x\right)_{\min}>\frac{1}{4}$，所以$f(x)>\frac{1}{4}$成立.

2. 已知函数$f\left(x\right)=\ln x+ax+\frac{1}{x}\left(a\in R\right)$

（1）求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

（2）当$a=-1$时，$g\left(x\right)=f\left(x\right)+\left(x-2\right)e^{x}-\frac{1}{x}$，记函数$y=g\left(x\right)$在$\left[\frac{1}{4},1\right]$上的最大值为$m$，证明：$\left(m+4\right)\left(m+3\right)<0$.

【答案】:

【解析】:（1）由函数$f\left(x\right)=\ln x+ax+\frac{1}{x}$的定义域是$\left(0,+\infty\right)$，则$f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+a-\frac{1}{x^{2}}=\frac{ax^{2}+x-1}{x^{2}}$.

当$a=0$时，$f'\left(x\right)=\frac{x-1}{x^{2}}$，此时在区间$\left(0,1\right)$上，$f'\left(x\right)<0$；在区间$\left(1,+\infty\right)$上，$f'\left(x\right)>0$，

故函数$f\left(x\right)$的单调递减区间为$\left(0,1\right)$，单调递增区间为$\left(1,+\infty\right)$.

当$a<0$且$\Delta=1+4a\le 0$时，即$a\leqslant-\frac{1}{4}$时，$ax^{2}+x-1\le 0$对任意$x\in\left(0,+\infty\right)$恒成立，

即$f'\left(x\right)\le 0$对任意$x\in\left(0,+\infty\right)$恒成立，且不恒为0.

故函数$f\left(x\right)$的单调递减区间为$\left(0,+\infty\right)$；

当 $a<0$ 且 $\Delta=1+4a>0$ 时，即 $-\frac{1}{4}<a<0$ 时，方程 $ax^2+x-1=0$ 的两根依次为 $x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}$，

$x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}\left(0<x_1<x_2\right)$，

此时在区间 $\left(0,x_1\right)$，$\left(x_2,+\infty\right)$ 上，$f'(x)<0$；在区间 $\left(x_1,x_2\right)$ 上，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$，$\left(\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty\right)$，单调递增区间为

$\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a},\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$；

当 $a>0$ 时，方程 $ax^2+x-1=0$ 的两根依次为 $x_1=\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}\left(x_2<0<x_1\right)$，

此时在区间 $\left(0,x_1\right)$ 上，$f'(x)<0$；在区间 $\left(x_1,+\infty\right)$ 上，$f'(x)>0$，

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}\right)$，单调递增区间为 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a},+\infty\right)$；

（2）证明：当 $a=-1$ 时，$g(x)=f(x)+(x-2)\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}=\ln x-x+\frac{1}{x}+(x-2)\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}=(x-2)\mathrm{e}^x-x+\ln x$，

则 $g'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-1+\frac{1}{x}=(x-1)\left(\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}\right)$.

当 $\frac{1}{4}<x<1$ 时，$x-1<0$，令 $h(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$，

则 $h'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{4},1\right]$ 上单调递增.

因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=h(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-2<0$，$h(1)=\mathrm{e}-1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $h\left(x_0\right)=0$，即 $\mathrm{e}^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，即 $\ln x_0=-x_0$.

故当 $x\in\left(\frac{1}{4},x_0\right)$ 时，$h(x)<0$，此时 $g'(x)>0$；

当 $x\in\left(x_0,1\right)$ 时，$h(x)>0$，此时 $g'(x)<0$.

即 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},x_0\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,1\right)$ 上单调递减，

则 $m=g(x)_{\max}=g\left(x_0\right)=\left(x_0-2\right)\mathrm{e}^{x_0}-x_0+\ln x_0=\left(x_0-2\right)\frac{1}{x_0}-x_0-x_0=1-\frac{2}{x_0}-2x_0$.

令 $G(x)=1-\frac{2}{x}-2x$，$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，则 $G'(x)=\frac{2}{x^2}-2=\frac{2(1-x^2)}{x^2}>0$，

所以 $G(x)$ 在 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，则 $G(x)>G\left(\frac{1}{2}\right)=-4$，$G(x)<G(1)=-3$，

所以 $-4<m<-3$.

故 $(m+4)(m+3)<0$.

3. 设 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}+ax+b$（$a,b\in R$，$a,b$ 为常数），曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{3}{2}x$ 在 $(0,0)$ 点相切.

（1）求 a,b 的值；

（2）证明：当 $0<x<2$ 时，$f(x)<\frac{9x}{x+6}$.

【答案】:（1）$b=-1$，$a=0$；（2）见解析.

【解析】:（Ⅰ）由 $y=f(x)$ 过（0, 0）点，得 b=-1.

由 $y=f(x)$ 在（0, 0）点的切线斜率为 $\frac{3}{2}$，又 $y'|_{x=0}=(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+a)|_{x=0}=\frac{3}{2}+a$

得 a=0

(Ⅱ)（证法一）

由均值不等式，当 x>0 时，$2\sqrt{(x+1)\bullet 1}<x+1+1=x+2$ 故 $\sqrt{x+1}<\frac{x}{2}+1$

记 $h(x)=f(x)-\frac{9x}{x+6}$，

则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{5x}{(x+6)^2}=\frac{2+\sqrt{x+1}}{2(x+1)}-\frac{5x}{(x+6)^2}<\frac{x+6}{4(x+1)}-\frac{5x}{(x+6)^2}$

令 $g(x)=(x+6)^3-216(x+1)$，则当 0<x<2 时，$g'(x)=3(x+6)^2-216<0$

因此 $g(x)$ 在（0, 2）内是递减函数，又由 $g(0)=0$，得 $g(x)<0$，所以 $h'(x)<0$

因此 $h(x)$ 在（0, 2）内是递减函数，又由 $h(0)=0$，得 $h(x)<0$

当 0<x<2 时 $f(x)<\frac{9x}{x+6}$

（证法二）

由（Ⅰ）知 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1$ 由均值不等式，当 x>0 时，$2\sqrt{(x+1)\bullet 1}<x+1+1=x+2$ 故 $\sqrt{x+1}<\frac{x}{2}+1$

①

令 $k(x)=\ln(x+1)-x$，则 $k(0)=0$，$k'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}<0$，故 $k(x)<0$

即 $\ln(x+1)<x$　②

由①②得，当 x>0 时，$f(x)<\frac{3}{2}x$

记 $h(x)=(x+6)f(x)-9x$，则当 0<x<2 时，

$$h'(x)=f(x)+(x+6)f'(x)-9<\frac{3}{2}x+(x+6)(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}})-9$$

$$=\frac{1}{2(x+1)}[3x(x+1)+(x+6)(2+\sqrt{x+1})-18(x+1)]$$

$$<\frac{1}{2(x+1)}[3x(x+1)+(x+6)(3+\frac{x}{2})-18(x+1)]=\frac{x}{4(x+1)}(7x-18)<0$$

因此 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调递减，又 $h(0)=0$，所以 $h(x)<0$ 即 $f(x)<\frac{9x}{x+6}$.

4. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{\ln x+k}{e^{x}}$（$k$ 为常数，$e=2.71828\ldots$是自然对数的底数），曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与 x 轴平行.

（1）求 k 的值；

（2）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）设 $g\left(x\right)=\left(x^{2}+x\right)f'\left(x\right)$，其中 $f'\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$ 的导函数. 证明：对任意 $x>0$，$g\left(x\right)<1+e^{-2}$.

【答案】:（1）$k=1$；（2）$f\left(x\right)$ 的单调增为 $\left(0,1\right)$，单调减区间为 $\left(1,+\infty\right)$；（3）见解析.

【解析】: 解 (1)由 $f(x)=\frac{\ln x+k}{e^{x}}$，得 $f'(x)=\frac{1-kx-x\ln x}{xe^{x}}$，$x\in(0，+\infty)$，

由于曲线 y＝f(x)在点(1，f(1))处的切线与 x 轴平行.

所以 f′(1)＝0，因此 k＝1.

(2)由(1)得 $f'(x)=\frac{1}{xe^{x}}(1-x-x\ln x)$，$x\in(0，+\infty)$，

令 $h(x)=1-x-x\ln x$，$x\in(0，+\infty)$，

当 $x\in(0,1)$时，$h(x)>0$；当 $x\in(1，+\infty)$时，$h(x)<0$.

又 $e^{x}>0$，所以 $x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$；

$x\in(1，+\infty)$时，$f'(x)<0$.

因此 f(x)的单调递增区间为(0,1)，单调递减区间为(1，＋∞)

(3)因为 $g(x)=xf'(x)$，所以 $g(x)=\frac{1}{e^{x}}(1-x-x\ln x)$，$x\in(0，+\infty)$，

由(2)得，$h(x)=1-x-x\ln x$，

求导得 $h'(x)=-\ln x-2=-(\ln x-\ln e^{-2})$.

所以当 $x\in(0，e^{-2})$时，$h'(x)>0$，函数 h(x)单调递增；

当 $x\in(e^{-2}，+\infty)$时，$h'(x)<0$，函数 h(x)单调递减.

所以当 $x\in(0，+\infty)$时，$h(x)\le h(e^{-2})=1+e^{-2}$.

又当 x∈(0，+∞)时，0＜ $\frac{1}{e^{x}}$ ＜1，

所以当 x∈(0，+∞)时， $\frac{1}{e^{x}}$h(x)＜1＋e^{-2}，即 g(x)＜1＋e^{-2}.

综上所述结论成立

5. 已知 $f\left(x\right)=ax-\ln x\left(a\in R\right)$.

（1）若 $a=-1$，求证： $f\left(x\right)\geq 1-xe^{x}$；

（2）求证： $\dfrac{\ln x}{e^{x}}<\dfrac{1}{e^{2}}$.

【答案】:

【解析】:（1）当 $a=-1$ 时，原问题为证明 $-x-\ln x\geqslant 1-x\mathrm{e}^{x}$.

令 $h(x)=x\mathrm{e}^{x}-\ln x-x-1$，则 $h'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{(x+1)\left(x\mathrm{e}^{x}-1\right)}{x}$ （$x>0$）. 1 分

令 $g(x)=x\mathrm{e}^{x}-1$（$x\geqslant 0$），则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}>0$（$x>0$），所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
又 $g(0)=-1<0$， $g(1)=\mathrm{e}-1>0$，

所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $g\left(x_0\right)=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，所以 $x_0=-\ln x_0$. ······ .3 分

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时， $g(x)<0$，则 $h'(x)<0$；当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时， $g(x)>0$，则 $h'(x)>0$

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 上单调递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $h(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值也是最小值，

即 $h(x)_{\min}=h\left(x_0\right)=x_0\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0-x_0-1=x_0\times\dfrac{1}{x_0}+x_0-x_0-1=0$，

所以 $\forall x\in(0,+\infty)$， $h(x)\geqslant 0$，即 $-x-\ln x\geqslant 1-x\mathrm{e}^{x}$. ················ 5 分

（2）记函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x-2}-\ln x$，则原不等式可化简为 $\varphi(x)>0$，

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}\times\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x}=\mathrm{e}^{x-2}-\dfrac{1}{x}$，可知 $\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增， ········ 6 分

由 $\varphi'(1)<0$， $\varphi'(2)>0$ 知， $\varphi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点 x_1，且 $1<x_1<2$，

所以 $\varphi'\left(x_1\right)=\mathrm{e}^{x_1}-2-\dfrac{1}{x_1}=0$，即 $\mathrm{e}^{x_1-2}=\dfrac{1}{x_1}$. ···················· 8 分

当 $x\in\left(0,x_1\right)$ 时 $\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $\left(0,x_1\right)$ 上单调递减；当 $x\in\left(x_1,+\infty\right)$ 时 $\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $\left(x_1,+\infty\right)$ 上单调递增.

所以对 $\forall x\in(0,+\infty)$， $\varphi(x)\geqslant\varphi\left(x_1\right)=\mathrm{e}^{x_1-2}-\ln x_1$.

由 $\mathrm{e}^{x_1-2}=\dfrac{1}{x_1}$ 知， $x_1-2=-\ln x_1$， ················· 10 分

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi\left(x_1\right)=\dfrac{1}{x_1}+x_1-2=\dfrac{x_1^2-2x_1+1}{x_1}=\dfrac{\left(x_1-1\right)^2}{x_1}>0$. ········· 11 分

则 $\forall x\in(0,+\infty)$， $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x-2}-\ln x>0$，即 $\forall x\in(0,+\infty)$， $\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^{x}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2}}$ 恒成立. 12 分

三、证明不等式 2：含参，讨论单调性

6. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-\ln\left(x+m\right)$.

（1）设 $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $m\leq 2$ 时，证明： $f\left(x\right)>0$.

【答案】：（1） $f\left(x\right)$ 在 $(-1,0)$ 上是减函数；在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；（2）见解析.

【解析】：(1) $f'\left(x\right)=e^{x}-\dfrac{1}{x+m}$.

由 x=0 是 f(x)的极值点得 f '(0)=0，所以 m=1.

于是 f(x)=e^x－ln(x+1)，定义域为(－1，+∞)， $f'\left(x\right)=e^{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

函数 $f'\left(x\right)=e^{x}-\dfrac{1}{x+1}$ 在(－1，+∞)上单调递增，且 f '(0)=0，因此当 x∈(－1，0)时， f '(x)<0;当 x∈(0，+∞)时， f '(x)>0.

所以 f(x)在(－1，0)上单调递减，在(0，+∞)上单调递增.

(2)当 m≤2，x∈(－m，+∞)时，ln(x+m)≤ln(x+2)，故只需证明当 m=2 时， f(x)>0.

当 m=2 时，函数 $f'\left(x\right)=e^{x}-\dfrac{1}{x+2}$ 在(－2，+∞)上单调递增.

又 f '(－1)<0， f '(0)>0，故 f '(x)=0 在(－2，+∞)上有唯一实根 x_0，且 $x_0\in\left(-1,0\right)$.

当 $x\in\left(-2,x_0\right)$ 时， f '(x)<0;当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时， f '(x)>0，从而当 $x=x_0$ 时，f(x)取得最小值.

由 f '(x_0)=0 得 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+2}$， $\ln\left(x_0+2\right)=-x_0$，

故 $f\left(x\right)\geq f\left(x_0\right)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0=\dfrac{\left(x_0+1\right)^2}{x_0+2}>0$.

综上，当 m≤2 时， f(x)>0.

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+ax^2-\left(2a+1\right)x+1\left(a\geq 0\right)$.

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 上的最大值；

（2）函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上存在最小值，记为 $g\left(a\right)$，求证：$g(a)<\dfrac{1}{4a}-1$.

【答案】：（1）0；（2）证明见解析.

【解析】：（1）当 $a=0$ 时， $f(x)=\ln x-x+1$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

因为 $x\in[1,+\infty)$，所以 $f'(x)\leq 0$. 所以 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减

所以 $f(x)$ 区间 $[1,+\infty)$ 上最大值为 $f(1)=0$.

（2）由题可知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-(2a+1)=\dfrac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}=\dfrac{(2ax-1)(x-1)}{x}$.

①当 $a=0$ 时，由（1）知，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)$ 无最小值，此时不符合题意；

②当 $a\geq\dfrac{1}{2}$ 时，因为 $x\in(1,+\infty)$，所以 $2ax-1>0$. 此时函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增

所以函数 $f(x)$ 无最小值，此时亦不符合题意；

③当$0<a<\frac{1}{2}$时，此时$1<\frac{1}{2a}$.

函数$f(x)$在区间$(1,\frac{1}{2a})$上单调递减，在区间$(\frac{1}{2a},+\infty)$上单调递增

所以$f(x)_{\min}=f(\frac{1}{2a})=\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}$，即$g(a)=\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}$.

要证$g(a)<\frac{1}{4a}-1$，只需证当$0<a<\frac{1}{2}$时，$g(a)-\frac{1}{4a}+1<0$成立. 即证$\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a}+1<0,\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

设$t=\frac{1}{2a}$，$h(t)=\ln t-t+1,(t>1)$

由（1）知$h(t)<h(1)=0$，即$g(a)-\frac{1}{4a}+1<0$成立. 所以$g(a)<\frac{1}{4a}-1$.

8. 已知函数$f\left(x\right)=e^x-\frac{1}{2}ax^2-x.$

（1）设$f'\left(x\right)$是$f\left(x\right)$的导函数，讨论函数$y=f'\left(x\right)$的单调性；

（2） 当$a\le 1-\frac{1}{e}$时，求证：$f\left(x\right)+x-\ln\left(x+1\right)\ge 1.$

【答案】:（1）答案见解析;（2）证明见解析.

【解析】:（1）由已知$f'(x)=e^x-ax-1$

设$g(x)=f'(x)$，$\therefore g'(x)=e^x-a$

①当$a\le 0$时. $g'(x)=e^x-a>0$在R上恒成立，$\therefore g(x)=f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递增

②当$a>0$时. 令$g'(x)>0$得$x>\ln a$，$g'(x)<0$得$x<\ln a$

$\therefore g'(x)=f'\left(x\right)$在$(-\infty,\ln a)$上递减. 在$(\ln a,+\infty)$上递增

综上所述：当$a\le 0$时. $y=f'(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数

当$a>0$时. $y=f'(x)$在$(-\infty,\ln a)$是减函数. 在$(\ln a,+\infty)$上是增函数

（2）由（1）知. ①当$a\le 0$时. $f'(x)=e^x-ax-1$在$(-1,+\infty)$上递增

又$f'\left(0\right)=0$，$\therefore -1<x<0$时. $f'(x)<0;x>0$时，$f'(x)>0$，

则$f(x)$在$(-1,0)$上递减. 在$(0,+\infty)$上递增，$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=1$

②当$0<a\le\frac{1}{e}$时，$\ln a\le -1$

由（1）知$f'(x)$在$(-1,+\infty)$上递增. 又$f'(0)=0$，则$f(x)$在$(-1,0)$上递减. 在$(0,+\infty)$上递增

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=1$

③当$\frac{1}{e}<a\le 1-\frac{1}{e}$时. 由（1）知$f'(x)$在$(-1,\ln a)$上递减. 在$(\ln a,+\infty)$上递增

且 $f'(0)=0, f'(-1)=\frac{1}{e}+a-1\le 0$

$\therefore -1\le x<0$ 时. $f'(x)<0; x>0$ 时. $f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减. 在 $(0,+\infty)$ 在递增，则 $f(x)_{\min}=f(0)=1$

综上所述：函数 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上的最小值为1.

$\therefore f(x)\ge 1$，则要证明原不等式只须证明 $x-\ln(x+1)\ge 0$

设 $h(x)=x-\ln(x+1)(x>-1)$，$\therefore h'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

则当 $-1<x<0$ 时，$h'(x)<0$；$x>0$ 时，$h'(x)>0$

即: $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减. 在 $(0,+\infty)$ 上递增，则 $h(x)_{\min}=h(0)=0$，即 $x-\ln(x+1)\ge 0$

又 $f(x)\ge 1$，故 $f(x)+x-\ln(x+1)\ge 1$.

9. 已知函数 $f(x)=\frac{m\left(x^2+1\right)+x}{e^x}$.

（1）试讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $m\le 0$，证明：$ef\ (x)+\ln x\le x$.

【答案】:（1）答案不唯一见解析；（2）证明见解析.

【解析】:（1）因为 $f'(x)=-\frac{(x-1)(mx+1-m)}{e^x}$，

①当 $m=0$ 时，$f'(x)=-\frac{x-1}{e^x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $m>0$ 时，$f'(x)=-\frac{m(x-1)\left(x-1+\frac{1}{m}\right)}{e^x}, 1-\frac{1}{m}<1$，

当 $x\in\left(1-\frac{1}{m},1\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(-\infty,1-\frac{1}{m}\right)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(1-\frac{1}{m},1\right)$ 单调递增，在 $\left(-\infty,1-\frac{1}{m}\right),(1,+\infty)$ 单调递减；

③当 $m<0$ 时，$1-\frac{1}{m}>1$，当 $x\in\left(1,1-\frac{1}{m}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-\infty,1)\cup\left(1-\frac{1}{m},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(1,1-\frac{1}{m}\right)$ 单调递减，在 $(-\infty,1),\left(1-\frac{1}{m},+\infty\right)$ 单调递增.

（2）要证明 $ef\ (x)+\ln x\le x$，只需证明 $ef\ (x)\le x-\ln x$，

而 $x-\ln x\geq 1$，因此只需证明 $f(x)\leq \frac{1}{e}$，

当 $m=0$ 时，$f(x)=\frac{x}{e^x}$，由（1）知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=\frac{1}{e}$；

当 $m<0$ 时，$f(x)=\frac{m\left(x^2+1\right)+x}{e^x}<\frac{x}{e^x}\leq\frac{1}{e}$，

故 $ef\ (x)+\ln x\leq x$.

三　证明不等式 3：放缩法

10. $f\left(x\right)=a\left(x-\ln x\right)+\frac{2x-1}{x^2}$，$a\in R$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，证明：$f\left(x\right)>f'\left(x\right)+\frac{3}{2}$ 对任意的 $x\in\left[1,2\right]$ 成立.

【答案】:（1）见解析;（2）见解析.

【解析】:（1）$f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$；$f'\left(x\right)=a-\frac{a}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{\left(ax^2-2\right)\left(x-1\right)}{x^3}$.

当 $a\leq 0$，$x\in\left(0,1\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增；$x\in\left(1,+\infty\right)$ 时, $f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减.

当 $a>0$ 时，$f'\left(x\right)=\frac{a\left(x-1\right)}{x^3}\left(x+\sqrt{\frac{2}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$.

（1）$0<a<2$，$\sqrt{\frac{2}{a}}>1$，

当 $x\in\left(0,1\right)$ 或 $x\in\left(\sqrt{\frac{2}{a}},+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增；

当 $x\in\left(1,\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减；

（2）$a=2$ 时，$\sqrt{\frac{2}{a}}=1$，在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 内，$f'\left(x\right)\geq 0$，$f\left(x\right)$ 单调递增；

（3）$a>2$ 时，$0<\sqrt{\frac{2}{a}}<1$，

当 $x\in\left(0,\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 或 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\sqrt{\frac{2}{a}},1\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减.

综上所述，

当 $a \le 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,+\infty)$ 内单调递减；

当 $0 < a < 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,\sqrt{\frac{2}{a}})$ 内单调递减，在 $(\sqrt{\frac{2}{a}},+\infty)$ 内单调递增；

当 $a = 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增；

当 $a > 2$，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{2}{a}})$ 内单调递增，在 $(\sqrt{\frac{2}{a}},1)$ 内单调递减，在 $(1,+\infty)$ 内单调递增.

（2）由（1）知，$a = 1$ 时，

$$f(x) - f'(x) = x - \ln x + \frac{2x-1}{x^2} - \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = x - \ln x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 1，\ x \in [1,2]，$$

令 $g(x) = x - \ln x, h(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - 1$，$x \in [1,2]$.

则 $f(x) - f'(x) = g(x) + h(x)$，

由 $g'(x) = \frac{x-1}{x} \ge 0$ 可得 $g(x) \ge g(1) = 1$，当且仅当 $x = 1$ 时取得等号.

又 $h'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 6}{x^4}$，

设 $\varphi(x) = -3x^2 - 2x + 6$，则 $\varphi(x)$ 在 $x \in [1,2]$ 单调递减，

因为 $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = -10$，

所以在 $[1,2]$ 上存在 x_0 使得 $x \in (1, x_0)$ 时，$\varphi(x) > 0, x \in (x_0, 2)$ 时，$\varphi(x) < 0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递增；在 $(x_0, 2)$ 上单调递减，

由于 $h(1) = 1, h(2) = \frac{1}{2}$，因此 $h(x) \ge h(2) = \frac{1}{2}$，当且仅当 $x = 2$ 取得等号，

所以 $f(x) - f'(x) > g(1) + h(2) = \frac{3}{2}$，即 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1,2]$ 恒成立。

11. 已知 $f(x) = x\ln x - x + \frac{a}{x}$，其中 $a \in R$.

（1）讨论 $f(x)$ 的极值点的个数；

（2）当 $n \in N^*$ 时，证明：$\ln^2 2 + \ln^2 \frac{3}{2} + \ln^2 \frac{4}{3} + \cdots + \ln^2 \frac{n+1}{n} > \frac{n}{2n+4}$.

【答案】：

【解析】:（1）$f(x)$的定义域为(0，+∞)，则 $f'(x)=\ln x+1-1-\dfrac{a}{x^2}=\ln x-\dfrac{a}{x^2}$，

令 $g(x)=\ln x-\dfrac{a}{x^2}$，$x>0$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{x^2+2a}{x^3}$，……………………………………1 分

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=\ln x$，令 $f'(x)=0$，则 $x=1$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增

所以 $f(x)$在(0，+∞)上有且仅有一个极值点．……………………………………………2 分

②当 $a>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$在(0，+∞)上单调递增，

又 $g(1)=-a<0$，$g(\mathrm{e}^a)=a-\dfrac{a}{\mathrm{e}^{2a}}=a(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2a}})>0$

所以 $g(x)$在$(1，\mathrm{e}^a)$上存在唯一零点，记为 x_0，列表：

x	$(0，x_0)$	x_0	$(x_0，+\infty)$
$f'(x)$	－	0	＋
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$在(0，+∞)上有且仅有一个极值点．……………………………………………4 分

③当 $a<0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=\sqrt{-2a}$，

当 $0<x<\sqrt{-2a}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当 $x>\sqrt{-2a}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(\sqrt{-2a})=\ln\sqrt{-2a}+\dfrac{1}{2}$，

当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，$g(x)_{\min}\geqslant0$，故 $f'(x)\geqslant0$，$f(x)$在(0，+∞)上单调递增，

所以 $f(x)$在(0，+∞)上无极值点，……………………………………………………………5 分

当 $-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}<a<0$ 时，$g(x)_{\min}=g(\sqrt{-2a})=\ln\sqrt{-2a}+\dfrac{1}{2}<0$，又 $g(1)=-a>0$，

$0<-2a<\sqrt{-2a}<1$，下面证 $g(-2a)=\ln(-2a)-\dfrac{1}{4a}>0$，……………………………………6 分

令 $\varphi(a)=\ln(-2a)-\dfrac{1}{4a}(-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}<a<0)$，$\varphi'(a)=\dfrac{-2}{-2a}+\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{4a+1}{4a^2}>\dfrac{1-\frac{2}{\mathrm{e}}}{4a^2}>0$，

所以$\varphi(a)$在$(-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}，0)$上单调递增，

所以 $g(-2a)=\varphi(a)>\varphi(-\dfrac{1}{2\mathrm{e}})=\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}+\dfrac{\mathrm{e}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}}{2}-1>0$，

所以 $g(x)$在(0，+∞)上有且仅有两个零点，记为$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，列表：

x	$(0，\alpha)$	α	$(\alpha，\beta)$	β	$(\beta，+\infty)$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$在(0，+∞)上有且仅有两个极值点．……………………………………………7 分

综上所述，当 $a\leqslant -\dfrac{1}{2e}$ 时，$f(x)$无极值点；当$-\dfrac{1}{2e}<a<0$ 时，$f(x)$有两个极值点；

当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$有一个极值点．……………………………………………………8 分

（2）由（1）知，当 $a=0$ 时，$f(x)\geqslant f(1)=-1$，所以 $x\ln x\geqslant x-1$，…………………10 分

即 $\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$，所以 $\ln^2 x\geqslant (1-\dfrac{1}{x})^2$，令 $x=\dfrac{n+1}{n}$ 得

故 $\ln^2\dfrac{n+1}{n}\geqslant (\dfrac{1}{n+1})^2>\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，

$\ln^2 2+\ln^2\dfrac{3}{2}+\ln^2\dfrac{4}{3}+\cdots+\ln^2\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n}{2n+4}$．……12 分

12. 设函数 $f(x)=x^2+(a-2)x-a\ln x$（$a\in R$）.

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的极值；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）若 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{4^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)^2}<\ln(n+1)$

【答案】：（1）0，无极大值；（2）详见解析；（3）详见解析.

【解析】：（1） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，当 $a=1$ 时， $f'(x)=2x-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x}$，

若 $f'(x)>0$，则 $x>1$；若 $f'(x)<0$，则 $0<x<1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(x)_{极小值}=f(1)=0$，没有极大值.

（2） $f'(x)=2x-\dfrac{a}{x}+(a-2)=\dfrac{(2x+a)(x-1)}{x}(x>0)$，

1° 当 $a\geq 0$ 时，若 $f'(x)>0$，则 $x>1$，若 $f'(x)<0$，则 $0<x<1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

2° 当 $0<-\dfrac{a}{2}<1$，即 $-2<a<0$ 时，

若 $f'(x)>0$，则 $0<x<-\dfrac{a}{2}$ 或 $x>1$；若 $f'(x)<0$，则 $-\dfrac{a}{2}<x<1$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{a}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $(0,-\dfrac{a}{2})$，$(1,+\infty)$ 上单调递增

3° 当 $-\dfrac{a}{2}=1$，即 $a=-2$ 时， $f'(x)\geq 0$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

4° 当 $-\dfrac{a}{2}>1$，即 $a<-2$ 时，若 $f'(x)>0$，则 $0<x<1$ 或 $x>-\dfrac{a}{2}$；若 $f'(x)<0$，则 $1<x<\dfrac{a}{2}$，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $(1,-\frac{a}{2})$ 上单调递减，在 $\left(0,1\right)(-\frac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增

综上所述：1° 当 $a<-2$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $(1,-\frac{a}{2})$ 上单调递减，在 $\left(0,1\right)(-\frac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增；

2° 当 $a=-2$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

3° 当 $-2<a<0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\frac{a}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $(0,1)\left(-\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增

4° 当 $a\geq 0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增；

（3）由（1）知 $f\left(x\right)=x^{2}-x-lnx$ 在 $\left(0,1\right)$ 上为减函数，

$\therefore x\in\left(0,1\right)$ 时，$x^{2}-x-lnx>f\left(1\right)=0$，$\therefore x^{2}-x>lnx$

令 $x=\frac{n}{n+1}$，得 $x^{2}-x=-\frac{n}{\left(n+1\right)^{2}}$，$\therefore -\frac{n}{\left(n+1\right)^{2}}>ln\frac{n}{n+1}=-ln\frac{n+1}{n}$，即 $ln\frac{n+1}{n}>\frac{n}{\left(n+1\right)^{2}}$

$\therefore ln2>\frac{1}{2^{2}},ln\frac{3}{2}>\frac{2}{3^{2}},ln\frac{4}{3}>\frac{3}{4^{2}}$，…，$ln\frac{n+1}{n}>\frac{n}{\left(n+1\right)^{2}}$，

将以上各式左右两边相加得：$\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{2^{2}}+\frac{2}{3^{2}}+\frac{3}{4^{2}}+\cdots+\frac{n}{\left(n+1\right)^{2}}$，

$\therefore ln\left(n+1\right)>\frac{1}{2^{2}}+\frac{2}{3^{2}}+\frac{3}{4^{2}}+\cdots+\frac{n}{\left(n+1\right)^{2}}$.

13. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax+1\left(a\in R\right)$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值；

（2）证明：$\left(1+\frac{1}{n^{2}}\right)\left(1+\frac{2}{n^{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^{2}}\right)<e$，$n\in N^{*}$.

【答案】:

【解析】:（1）$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，因为 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，所以 $\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，1 分

当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)_{\max}=f(2)=\ln 2-2a+1$； · · · · · · 2 分

当 $a\geqslant 2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a+1$； · · · · · 3 分

当 $\frac{1}{2}<a<2$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{a}$，由 $f'(x)<0$ 得 $\frac{1}{a}<x\leqslant 2$，

所以此时 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}$. · 4 分

（2）证明：当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$，由 $f'(x)<0$ 得 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立， ········ 6 分

即 $\ln(1+x)<x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 都成立. ···················· 7 分

所以 $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$， ······· 8 分

即 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$. ·········· 9 分

由于 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times1}=1$. ··············· 10 分

所以 $\ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]<1$. ················ 11 分

所以 $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)<\mathrm{e}$. 12 分

14. 已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2$，其中 $a\in R$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，证明：$f(x)\le x^2+x-1$；

（3）试比较 $\frac{\ln 2^2}{2^2}+\frac{\ln 3^2}{3^2}+\frac{\ln 4^2}{4^2}+\cdots+\frac{\ln n^2}{n^2}$ 与 $\frac{(n-1)(2n+1)}{2(n+1)}$（$n\in N^*$ 且 $n\ge 2$）的大小，证明你的结论.

【答案】:

【解析】:（1）函数 $f(x)$ 的定义域为：$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}+2x=\frac{a+2x^2}{x}$，

①当 $a\ge 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{-\frac{a}{2}}$.

当 $0<x<\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 时，$a+2x^2<0$，所以 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$ 上单调递减；

当 $x>\sqrt{-\frac{a}{2}}$ 时，$a+2x^2>0$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\sqrt{-\frac{a}{2}},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上，当 $a\ge 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\sqrt{-\frac{a}{2}},+\infty\right)$ 上单调递增.

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+x^2$，要证明 $f(x)\le x^2+x-1$，

即证 $\ln x\le x-1$，即证：$\ln x-x+1\le 0$.

设 $g\left(x\right)=\ln x-x+1$，则 $g'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{x}$，令 $g'\left(x\right)=0$ 得，$x=1$.

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，

所以 $x=1$ 为极大值点，且 $g\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处取得最大值.

所以 $g\left(x\right)\le g\left(1\right)=0$，即 $\ln x-x+1\le 0$. 故 $f\left(x\right)\le x^2+x-1$.

（3）证明：$\ln x\le x-1$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立），即 $\dfrac{\ln x}{x}\le 1-\dfrac{1}{x}$，

则有 $\dfrac{\ln 2^2}{2^2}+\dfrac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\dfrac{\ln n^2}{n^2}<1-\dfrac{1}{2^2}+1-\dfrac{1}{3^2}+\cdots+1-\dfrac{1}{n^2}=n-1-\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)$

$<n-1-\left(\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}\right)=n-1-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=n-1-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{\left(n-1\right)\left(2n+1\right)}{2\left(n+1\right)}$，

故：$\dfrac{\ln 2^2}{2^2}+\dfrac{\ln 3^2}{3^2}+\cdots+\dfrac{\ln n^2}{n^2}=\dfrac{\left(n-1\right)\left(2n+1\right)}{2\left(n+1\right)}$.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-mx+m$，$m\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $x\in\left(1,+\infty\right)$，证明：$1<\dfrac{x-1}{\ln x}<x$；

（Ⅲ）对于任意正整数 n，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<t$，求 t 的最小正整数值.

【答案】:

【解析】:（Ⅰ）由 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-m=\dfrac{1-mx}{x}$，

若 $m\le 0$，则当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，函数 $f\left(x\right)$ 单调递增；

若 $m>0$，则当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，函数 $f\left(x\right)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，函数 $f\left(x\right)$ 单调递减，

所以当 $m\le 0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left(0,+\infty\right)$；

当 $m>0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $m=1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，最大值为 $f\left(1\right)=0$，

所以当 $x\ne 1$ 时，$\ln x<x-1$，

故当 $x\in\left(1,+\infty\right),\ln x<x-1$，$\therefore 1<\dfrac{x-1}{\ln x}$.

又$\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1$，即$\frac{x-1}{\ln x}<x$，故$1<\frac{x-1}{\ln x}<x$.

（Ⅲ）当$m=1$时，$f\left(x\right)=\ln x-x+1\le 0$，即$\ln x\le x-1$，

则有$\ln\left(x+1\right)\le x$，当且仅当$x=0$时等号成立，

$\therefore \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)<\frac{1}{2^k},k\in\mathbf{N}^*$.

一方面：$=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$，

即$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}$.

另一方面：当$n\ge 3$时$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)>\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=\frac{135}{64}>2$，

当$n\ge 3$时，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\in(2,\mathrm{e})$.

$\because t\in\mathbf{N}^*,\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<t$

$\therefore t$的最小正整数值为3.

四、证明不等式4：指数✖对数

对于形如：$f\left(x\right)=ax^{\alpha}\ln x-\frac{b}{e^x}-c$（$a,b,c\in R_+$）的函数，证明$f\left(x\right)>0$在默认定义域上成立的解题策略：

【解法一】：①分离为两个函数：对数型函数$g\left(x\right)=ax^{\alpha}\ln x$与指数型函数$h\left(x\right)=\frac{b}{e^x}+c$

②分别求出两个函数的最值：$g\left(x\right)_{\min}$与$h\left(x\right)_{\max}$，并比较大小，可得出结论.

【解法二】：去对数系数，再作差构造新函数证明.

16. 设函数$f\left(x\right)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为$y=e\left(x-1\right)+2$.

（1）求a,b；

（2）证明：$f\left(x\right)>1$.

【答案】：（1）$a=1$，$b=2$；（2）见解析.

【解析】：（1）函数$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}e^x-\frac{b}{x^2}e^{x-1}+\frac{b}{x}e^{x-1}$.

由题意可得$f(1)=2$，$f'(1)=e$. 故$a=1$，$b=2$.

（2）证明：由（1）知，$f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}$，从而$f(x)>1$等价于$x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$.

设函数$g(x)=x\ln x$，则$g'(x)=1+\ln x$.

所以当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，$g'(x)<0$；当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，从而 $g(x)$ 在 $0,+\infty$ 上的最小值为 $g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$. 故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

从而 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.

综上，当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

17. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x+\frac{2a}{x}$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a\geq\frac{1}{2}$ 时，$f\left(x\right)>e^{-x}+\frac{1}{2}$.

参考数据：$e\approx 2.7183$.

【答案】:

【解析】:（1）依题意，$f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，　　1 分

$f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{x^2}=\frac{x-2a}{x^2}$，　……………………………………………………………2 分

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为增函数；　……………………………3 分

②若 $a>0$，当 $x>2a$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 为增函数；当 $0<x<2a$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 为减函数． 4 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 为增函数；当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,2a\right)$ 上为减函数，在区间 $\left(2a,+\infty\right)$ 上为增函数．……………………………………………………………………………………………………5 分

（2）要证 $f\left(x\right)>\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}$，只要证 $\ln x+\frac{2a}{x}>\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}$，即证 $x\ln x-\frac{x}{2}+2a>x\,\mathrm{e}^{-x}$，

……………………………………………………………………………………………………7 分

下证 $x\ln x-\frac{x}{2}+2a>x\,\mathrm{e}^{-x}$，

令 $g\left(x\right)=x\ln x-\frac{x}{2}+2a$，　$g'\left(x\right)=\ln x+1-\frac{1}{2}=\ln x+\frac{1}{2}$，令 $g'\left(x\right)=0$ 得 $x=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$ 为减函数；当 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$ 为增函数，　　8 分

所以 $g\left(x\right)_{\min}=g\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}-\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}+2a=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+2a$，　…………………………………9 分

又 $a\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $g\left(x\right)\geqslant-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+2a\geqslant-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+1$．　……………………………………………10 分

令 $h\left(x\right)=x\mathrm{e}^{-x}$，则 $h'\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=\left(1-x\right)\mathrm{e}^{-x}$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'\left(x\right)>0$，$h\left(x\right)$ 为增函数；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$ 为减函数，

所以$h(x)_{\max}=h(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. ……………………………………………………………………11 分

由参考数据可知$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+1\right)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\dfrac{\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}}>0$，即$-\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}+1>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

所以$g(x)>h(x)$，即$x\ln x-\dfrac{x}{2}+2a>x\,\mathrm{e}^{-x}$，

所以$f(x)>\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………………12 分

18. 已知函数$f(x)=e^{x}\left(x\ln x+\dfrac{2}{e}\right)$.

（1）求函数$h(x)=f(x)-e^{x}\left(1+\dfrac{2}{e}\right)$的单调区间；

（2）证明：$f(x)-x>0$.

【答案】:（1）$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增；（2）证明见解析.

【解析】:（1）由题意，函数$h(x)=f(x)-\mathrm{e}^{x}\left(1+\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{x}(x\ln x-1)$，其定义域为$(0,+\infty)$，

可得$h'(x)=e^{x}(x+1)\ln x$，

令$h'(x)<0$，解得$0<x<1$；令$h'(x)>0$，解得$x>1$.

所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

（2）要证$f(x)-x>0$，即要证$e^{x}\left(x\ln x+\dfrac{2}{e}\right)>x$，即证明$x\ln x+\dfrac{2}{e}>\dfrac{x}{e^{x}}$.

令$F(x)=x\ln x+\dfrac{2}{e}(x>0)$，则$F'(x)=\ln x+1$.

由$F'(x)<0$，解得$0<x<\dfrac{1}{e}$；由$F'(x)>0$，解得$x>\dfrac{1}{e}$.

所以$F(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，$F(x)_{\min}=F\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}+\dfrac{2}{e}=\dfrac{1}{e}$.

令$G(x)=\dfrac{x}{e^{x}}(x>0)$，则$G'(x)=\dfrac{1-x}{e^{x}}$，

由$G'(x)<0$，解得$x>1$；由$G'(x)>0$，解得$0<x<1$.

所以$G(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，$G(x)_{\max}=G(1)=\dfrac{1}{e}$，

所以$F(x)\ge\frac{1}{e}\ge G(x)$，且等号不同时取得，即$x\ln x+\frac{2}{e}>\frac{x}{e^x}$成立，

所以$f\left(x\right)-x>0$.

19. 已知函数$f\left(x\right)=\frac{x+a}{e^x}$的图象在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程为$y=x$.

（1）求实数a的值并判断$f\left(x\right)$的单调性；

（2）证明：$x\ln x>\frac{\ln\left(x+1\right)}{e^x}-\frac{2}{e}$.

20.（1）解：由题意可知$f'(x)=\frac{1-x-a}{e^x}$，

因为函数$f\left(x\right)$的图像在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程为$y=x$，

所以$f'(0)=1-a=1$，即$a=0$，（2 分）

所以$f\left(x\right)=\frac{x}{e^x}$，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

令$f'(x)=0$，得$x=1$.

当$x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)>0$，函数$f\left(x\right)$单调递增；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，函数$f\left(x\right)$单调递减.（4 分）

（2）证明：令$g\left(x\right)=x\ln x$，则$g'(x)=1+\ln x$，

令$g'(x)=1+\ln x=0$，则$x=\frac{1}{e}$.

当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$，函数$g\left(x\right)$单调递减；

当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，函数$g\left(x\right)$单调递增.

所以$g\left(x\right)\ge g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

由（1）可得在区间$(0,+\infty)$内，$f\left(x\right)_{\max}=f\left(1\right)=\frac{1}{e}$，

则$\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}\le\frac{1}{e}-\frac{2}{e}=-\frac{1}{e}$，

所以$x\ln x>\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$.①（8 分）

记$h\left(x\right)=x-\ln\left(x+1\right)\left(x>0\right)$，

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)>h(0)=0$，

即 $x>\ln(x+1)$，

所以 $\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}>\frac{\ln(x+1)}{e^x}-\frac{2}{e}$.②

由①②得 $x\ln x>\frac{\ln(x+1)}{e^x}-\frac{2}{e}$.　　　　　　　　　　　　　　（12 分）

20. 设函数 $f(x)=\ln x-e^{1-x}$，$g(x)=a(x^2-1)-\frac{1}{x}$.

（1）判断函数 $y=f(x)$ 零点的个数，并说明理由；

（2）记 $h(x)=g(x)-f(x)+\frac{e^x-ex}{xe^x}$，讨论 $h(x)$ 的单调性；

（3）若 $f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】:（1）$y=f(x)$ 的零点的个数为1. 理由见解析.

（2）$a\le 0$ 时，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减；$a>0$ 时，$h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 单调递增.

（3）$a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，$f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立.

【解析】:（1）∵ $f(x)=\ln x-e^{1-x}(x>0)$，∴ $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{e}{x^x}>0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

又 $f(1)=-1<0$，$f(e)=1-e^{1-e}=1-\frac{e}{e^e}>0$，

∴函数 $y=f(x)$ 在 $(1,e)$ 内存在零点，所以 $y=f(x)$ 的零点的个数为1.

（2）由题意得 $h(x)=a(x^2-1)-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}+\frac{1}{x}-\frac{e}{e^x}\ =ax^2-a-\ln x(x>0)$，

∴ $h'(x)=2ax-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-1}{x}$.

当 $a\le 0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，由 $h'(x)=0$，解得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$（舍去负值），

所以$x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；当$x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增.

综上：当$a\le 0$时，$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；

当$a>0$时，$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$单调递减，在$\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$单调递增.

（3）由题意得$\ln x-\frac{e}{e^x}<a\left(x^2-1\right)-\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$恒成立，$\therefore a\left(x^2-1\right)-\ln x>\frac{1}{x}-\frac{e}{e^x}$在$(1,+\infty)$恒成立，

设$k(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{e^x}=\frac{e^x-ex}{xe^x}$，令$k_1(x)=e^x-ex$，则$k_1'(x)=e^x-e$，

当$x>1$时，$k_1'(x)>0$，$k_1(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，

$k_1(x)>k_1(1)=0$，即$k(x)>0$，

若$a\le 0$，由于$x>1$，故$a\left(x^2-1\right)-\ln x<0$，所以$f(x)<g(x)$不成立，

故当$f(x)<g(x)$在$(1,+\infty)$恒成立时，必有$a>0$.

当$a>0$时，设$h(x)=a\left(x^2-1\right)-\ln x$，

①当$\frac{1}{\sqrt{2a}}>1$，即$0<a<\frac{1}{2}$时，

由（2）知$x\in\left(1,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$，$h(x)$单调递减，$x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$，$h(x)$单调递增，

因此$h\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)<h(1)=0$，而$k\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)>0$，即存在$x=\frac{1}{\sqrt{2a}}>1$，使$f(x)<g(x)$，

故当$0<a<\frac{1}{2}$时，$f(x)<g(x)$不恒成立.

②当$\frac{1}{\sqrt{2a}}\le 1$，即$a\ge\frac{1}{2}$时，

设$s(x)=a\left(x^2-1\right)-\ln x-\frac{1}{x}+\frac{e}{e^x}$，则$s'(x)=2ax-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{e}{e^x}$，

由于$2ax\ge x$且$k_1(x)=e^x-ex>0$，即$\frac{e}{e^x}<\frac{1}{x}$，故$-\frac{e}{e^x}>-\frac{1}{x}$，

因此$s'(x)>x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}\ >\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}>0$，故$s(x)$在$(1,+\infty)$单调递增.

所以$s(x)>s(1)=0$时，即$a\ge\frac{1}{2}$时，$f(x)<g(x)$在$(1,+\infty)$恒成立.

综上：当$a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，$f(x)<g(x)$在$(1,+\infty)$恒成立.

21. 设函数 $f\left(x\right)=\ln x+\frac{a}{x}-x$

（1）当 $a=-2$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）当 $a=1$ 时，证明：$f\left(x\right)-\frac{1}{e^x}+x>0$ 恒成立.

【答案】：（1）$f\left(x\right)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f\left(2\right)=\ln 2-3,$ $f\left(x\right)$ 无极小值；（2）详见解析.

【解析】：（1）当 $a=-2$ 时，$f\left(x\right)=\ln x-\frac{2}{x}-x,\ f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-1=-\frac{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{x^2}$，

∴当 $x\in\left(0,2\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$；当 $x\in\left(2,+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$.

∴ $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\right)$ 上单调递增，在 $\left(2,+\infty\right)$ 上单调递减.

∴ $f\left(x\right)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f\left(2\right)=\ln 2-3,$ $f\left(x\right)$ 无极小值

（2）当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)-\frac{1}{e^x}+x=\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x}$，

下面证 $\ln x+\frac{1}{x}>\frac{1}{e^x}$，即证 $x\ln x+1>\frac{x}{e^x}$.

设 $g\left(x\right)=x\ln x+1$， 则 $g'\left(x\right)=1+\ln x$，

在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上，$g'\left(x\right)<0,g\left(x\right)$ 是减函数；在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上，$g'\left(x\right)>0,g\left(x\right)$ 是增函数.

所以 $g\left(x\right)\ge g\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{e}$.

设 $h\left(x\right)=\frac{x}{e^x}$， 则 $h'\left(x\right)=\frac{1-x}{e^x}$，

在 $\left(0,1\right)$ 上，$h'\left(x\right)>0,h\left(x\right)$ 是增函数；在 $\left(1,+\infty\right)$ 上，$h'\left(x\right)<0,h\left(x\right)$ 是减函数，

所以 $h\left(x\right)\le h\left(1\right)=\frac{1}{e}<1-\frac{1}{e}$.

所以 $h\left(x\right)<g\left(x\right)$，即 $\frac{x}{e^x}<x\ln x+1$，所以 $x\ln x+1-\frac{x}{e^x}>0$，即 $\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x}>0$，

即 $f\left(x\right)-\frac{1}{e^x}+x>0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立.