湛江一中 2023 届高三卓越班　　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——立体几何复习 4——几何法求空间角

一、知识要点：直线与平面所成的角

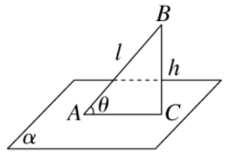
1、定义：直线和平面所成的角，是指直线与它在这个平面内的射影所成的角.

2、范围：直线和平面所成的角 θ 的取值范围是 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$

3、常用求法：

(1)定义法：①寻找过斜线上一点与平面垂直的直线，或过斜线上一点作平面的垂线，确定垂足的位置，连接垂足和斜足得到斜线在平面内的射影，②斜线与其射影所成的锐角或直角即为所求的角；③将该角归结为某个三角形的内角(一般是直角三角形)，通过解三角形(可能需要解多个三角形)求得该角或其三角函数值，

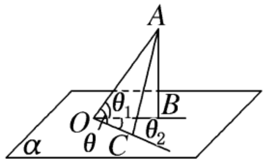
(2)体积法：如图，θ 为线面角，h 为点 B 到平面 α 的距离，l 为斜线段 AB 的长．则 $\sin\ \theta=\dfrac{h}{l}$，其中 h 可以利用等体积法求得



(3)向量法（后面将专题复习，这里略）

4、最小角定理

如图，若 OA 为平面 α 的一条斜线，O 为斜足，OB 为 OA 在平面 α 内的射影，OC 为平面 α 内的一条直线，其中 θ 为 OA 与 OC 所成的角，θ_1 为 OA 与 OB 所成的角，即线面角，θ_2 为 OB 与 OC 所成的角，那么 $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$



1.（1）日晷是中国古代用来测定时间的仪器，利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间．把地球看成一个球(球心记为 O)，地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角，点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面．在点 A 处放置一个日晷，若晷面与赤道所在平面平行，点 A 处的纬度为北纬 40°，则晷针与点 A 处的水平面所成角为____________

（2）已知 AO 为平面 α 的一条斜线，O 为斜足，OB 为 OA 在平面 α 内的射影，直线 OC 在平面 α 内，且∠AOB＝∠BOC＝45°，则∠AOC 的大小为________

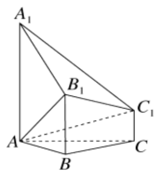
2、已知三棱锥 $S-ABC$ 中，SA、SB、SC 两两垂直，$SA=SB=SC=2$

求 SA 与底面 ABC 所成角的正弦值

3.如图，已知多面体 $ABC-A_1B_1C_1$，AA_1，BB_1，CC_1 均垂直于平面 ABC，∠ABC＝120°，A_1A＝4，CC_1＝1，AB＝BC＝BB_1＝2.

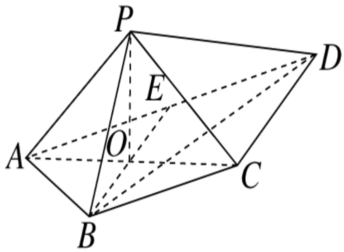
(1)证明：$AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；

(2)求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值.



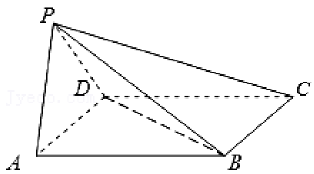
4、如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AP\perp$平面 PCD，$AD/\!/BC$，$AB\perp BC$，$AP=AB=BC=\frac{1}{2}AD$，E 为 AD 的中点，AC 与 BE 相交于点 O.①证明：$PO\perp$平面 $ABCD$；

②求直线 BC 与平面 PBD 所成角的正弦值.

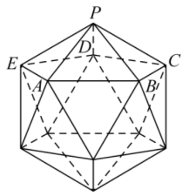


5.如图，四棱锥 P﹣ABCD 中，底面 ABCD 为平行四边形，∠BAD＝45°，AD＝1，AB= $\sqrt{2}$，△PAD 是正三角形，平面 PAD⊥平面 PBD.（1）求证：PA⊥BD；

（2）求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.

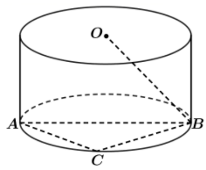


6. 许多球状病毒的空间结构可抽象为正二十面体．正二十面体的每一个面均为等边三角形，共有 12 个顶点、30 条棱．如图所示，由正二十面体的一个顶点 P 和与 P 相邻的五个顶点可构成正五棱锥 $P-ABCDE$，则 PA 与面 $ABCDE$ 所成角的余弦值约为（　　）（参考数据 $\cos 36°\approx 0.8$）



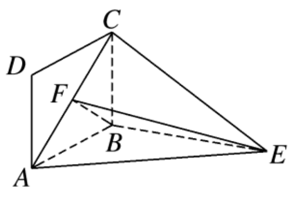
A. $\frac{5}{6}$　　B. $\frac{5}{8}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{5}{12}$

7. 如图，已知圆柱的上底面圆心为 O，高和底面圆的半径相等，AB 是底面圆的一条直径，点 C 为底面圆周上一点，且 $\angle ABC=45°$，则异面直线 AC 与 OB 所成角的余弦值为___________.



8.如图，平面 $ABCD\perp$平面 ABE，且四边形 $ABCD$ 为正方形，$AE=2AB=2$，$\angle BAE=60°$，F 为 AC 的中点．(1)求证：$AC\perp$平面 BEF；

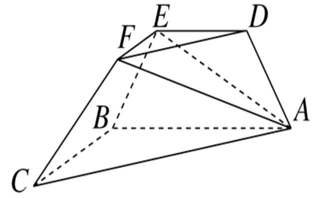
(2)求直线 AD 与平面 ACE 所成的角的正弦值.



9.如图，在三棱台 $ABC-DEF$ 中，平面 $ABED\perp$ 平面 $BCFE$，$BA\perp BC$，$BC=3$，

$BE=DE=DA=\frac{1}{2}AB=1$.(1)求证：$AE\perp$ 平面 $BCFE$；

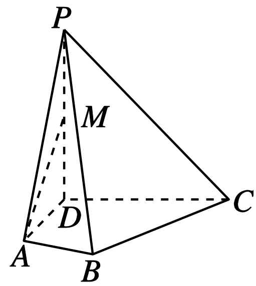
(2)求直线 DF 与平面 AEF 所成角的正弦值.



10. 如图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=DC=2AD$，$AD\perp DC$，$\angle BCD=45°$.

(1)设 PD 的中点为 M，求证：$AM//$ 平面 PBC；

(2)求 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值.

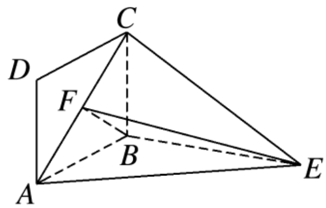


11.如图，平面 $ABCD\perp$ 平面 ABE，且四边形 $ABCD$ 为正方形，$AE=2AB=2$，

$\angle BAE=60°$，F 为 AC 的中点.

(1)求证：$AC\perp$ 平面 BEF；

(2)求直线 AD 与平面 ACE 所成的角的正弦值.



二、知识要点：

1、二面角的有关概念

(1)二面角：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角；

(2)二面角的平面角：在二面角的棱上任取一点，以该点为垂足，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所构成的角叫做二面角的平面角；

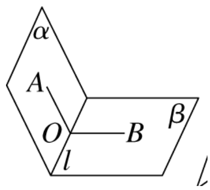
(3)范围：[0，π].

2、常用求法

(1)定义法：①寻找过二面角棱上一点，过该点在两个平面内作棱的垂线

②该点及垂线构成的角即为所求的角；

③将该角归结为某个三角形的内角，通过解三角形求得该角或其三角函数值，



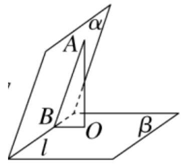
(2)三垂线法（垂联线又叫两垂一联法）：如图

①在二面角的一个面内取一点（A），过该点作另一平面的垂线

②过垂足（O）作棱的垂线（OB），连接该点与垂足的连线(AB)。

③由两垂一连形成二面角的平面角($\angle ABO$)。

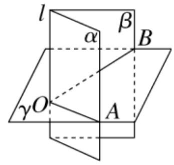
④将该角归结为某个三角形的内角（一般是直角三角形），通过解三角形求得该角或其三角函数值，从而求得该角或其三角函数值。



(3)垂面法：①寻找二面角棱的垂面。

②确定垂面与二面角两面的交线，得到二面角的平面角

③将平面角归结为某个三角形的内角，通过解三角形求得该角或其三角函数值。



(4)射影面积法（$\cos\theta=\frac{S_{射影}}{S_{斜}}$）：二面角的图形中含有可求原图形面积和该图形在另一个半平面上的射影图形面积的，都可利用射影面积公式$\cos\theta=\frac{S_{射影}}{S_{斜}}$求出二面角的大小.

(5)向量法（后面将专题复习，这里略）

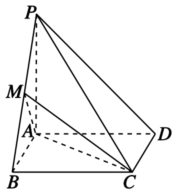
1.（1）正四面体的相邻两个面的二面角的余弦值为_______。

（2）侧棱长为 6，底面边长为 2 的正四棱锥的相邻侧面的二面角的余弦值为_________。

（3）正六棱柱相邻两个侧面所成的二面角的大小为________。

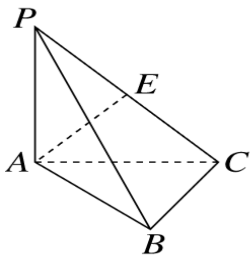
2.如图所示，在四棱锥 P -$ABCD$ 中，$ABCD$ 为平行四边形，且 $BC\perp$平面 PAB，$PA\perp AB$，M 为 PB 的中点，$PA=AD=2$.(1)求证：PD∥平面 AMC；

(2)若 $AB=1$，求二面角 B -AC -M 的余弦值.



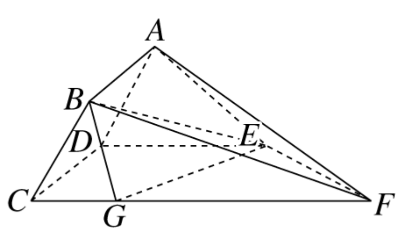
3.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧棱 $PA\perp$底面 ABC，C 点在以 AB 为直径的圆上．①若 $PA=AC$，且 E 为 PC 的中点，证明：$AE\perp PB$；

②若 $PA=AC=BC$，求二面角 $C-BP-A$ 的大小.

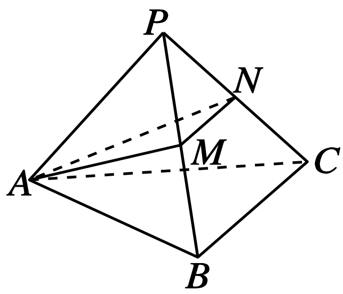


4.如图，多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为矩形，二面角 $A-CD-F$ 为 60°，DE∥CF，$CD\perp DE$，$AD=2$，$DE=DC=3$，$CF=6$.①求证：BF∥平面 ADE；

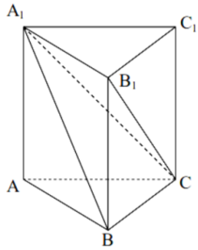
②G 为线段 CF 上的点，当$\frac{CG}{CF}=\frac{1}{4}$时，求二面角 $B-EG-D$ 的余弦值.



5.在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=PC$，底面$\triangle ABC$ 是正三角形，M，N 分别是侧棱 PB，PC 的中点．若平面 $AMN\perp$平面 PBC，求平面 AMN 与平面 ABC 所成二面角(锐角)的余弦值

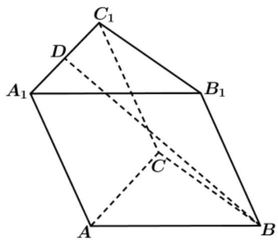


6.《九章算术》是中国古代第一部数学专著，它的出现标志着中国古代数学形成了完整的体系. 例如，堑堵指底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱，阳马指底面为矩形，一侧棱垂直于底面的四棱锥. 如图，在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，若 $AA_1=\sqrt{2},AB=2$，当阳马 $B-A_1ACC_1$ 的体积最大时，堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中异面直线 A_1C,AB 所成角的大小是（　　）



A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

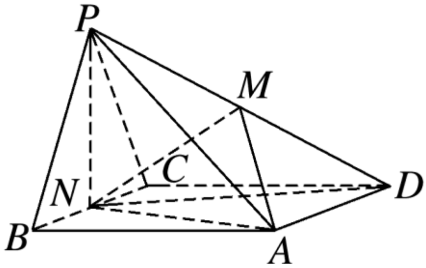
7. 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形，$AA_1=3$，$AA_1\perp AC$，D 为 A_1C_1 的中点，$BD=3\sqrt{3}$，则二面角 A_1-AC-B 的正切值为______.



8.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$\triangle PBC$ 为正三角形，M，N 分别为 PD，BC 的中点，$PN\perp AB$.

(1)求三棱锥 $P-AMN$ 的体积；

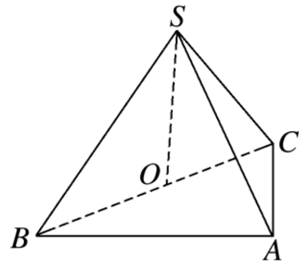
(2)求二面角 $M-AN-D$ 的正切值.



9.在三棱锥 $S-ABC$ 中，△SAB 与△SAC 均为等边三角形，$\angle BAC=90°$，O 为 BC 的中点．

(1)证明：$SO\perp$平面 ABC；

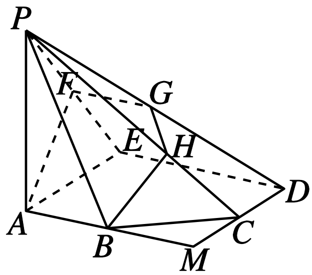
(2)求二面角 $A-SC-B$ 的余弦值．



10.如图所示，正方形 $AMDE$ 的边长为 2，B，C 分别为 AM，MD 的中点．在五棱锥 $P-ABCDE$ 中，F 为棱 PE 的中点，平面 ABF 与棱 PD，PC 分别交于点 G，H.

(1)求证：$AB\parallel FG$；

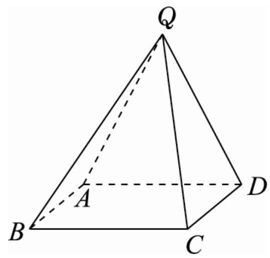
(2)若 $PA\perp$底面 $ABCDE$，且 $PA=AE$，求直线 BC 与平面 ABF 所成角的大小，并求线段 PH 的长．



11.在四棱锥 $Q-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，若 $AD=2$，$QD=QA=\sqrt{5}$，$QC=3$.

(1)证明：平面 $QAD\perp$平面 $ABCD$；

(2)求二面角 $B-QD-A$ 的平面角的余弦值．

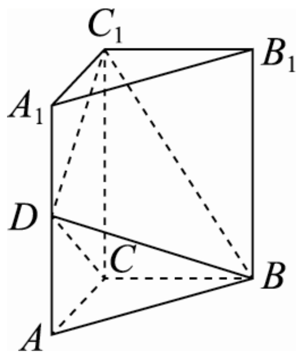


12.如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$，D 是棱 AA_1 的中点，$DC_1\perp BD$.

(1)证明：$DC_1\perp BC$；

(2)求二面角 A_1-BD-C_1 的大小；

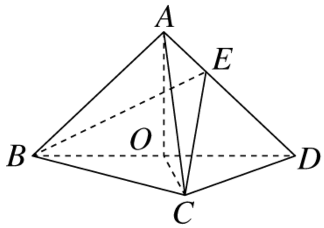
(3)求平面 BDC_1 与平面 ABC 所成二面角的余弦值．



13. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$平面 BCD，$AB=AD$，O 为 BD 的中点.

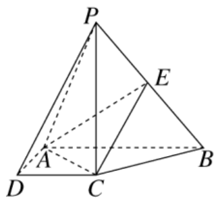
(1)证明：$OA\perp CD$；

(2)若△OCD 是边长为 1 的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，$DE=2EA$，且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45°，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.

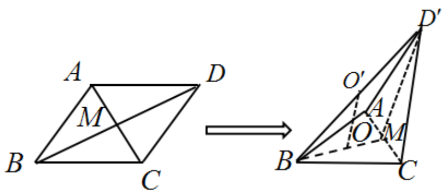


14.如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PC\perp$底面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，$AB\perp AD$，$AB\parallel CD$，$AB=2AD=2CD$，E 是 PB 的中点. (1)求证：平面 $EAC\perp$平面 PBC；

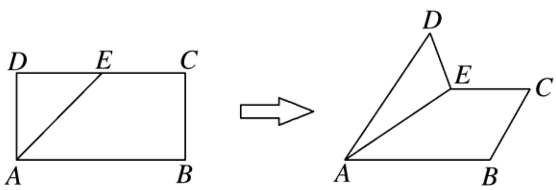
(2)若二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值.



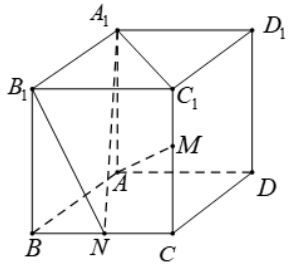
15.已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$. 现将菱形沿对角线 AC 折成空间几何体 $ABCD'$. 设空间几何体 $ABCD'$ 的外接球为球 O，若球 O 的表面积为 8π，求二面角 $B-AC-D'$ 的余弦值



16.如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，E 为 CD 的中点，将△ADE 沿 AE 折起，使得二面角 $D-AE-B$ 为 60°，求 DE 与平面 $ABCE$ 所成角的余弦值



17. 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形， $AB=1, BC=\sqrt{2}, \angle ABC=45^{\circ}$，点 M 在棱 CC_1 上，点 N 是 BC 的中点，且满足 $AM\perp B_1N$.



（1）证明：$AM\perp$ 平面 A_1B_1N；

（2）若 M 是 CC_1 的中点，求二面角 $A_1-B_1N-C_1$ 的正弦值.

18. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 $ABC, AC\perp BC, AC=BC=CC_1=4.$

（1）证明：平面 $A_1BC\perp$ 平面 AB_1C_1；

（2）若 A_1B_1 与平面 AB_1C_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，求二面角 A_1-AC-B_1 的余弦值.