湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列放缩（1）

此类问题往往从通项公式入手，若需要放缩也是考虑对通项公式进行变形；在放缩时，对通项公式的变形要向可求和数列的通项公式靠拢，常见的是向可裂项相消的数列与等比数列进行靠拢。

一、放缩路径的选择

若放缩后求和发现放“过”了，即实现不了所证的目标，通常有两条路径选择：第一个方法是微调：看能否使数列中的前几项不动，其余项放缩，从而减小放缩的程度，使之符合所证不等式；第二个方法就是选择放缩程度更小的方式再进行尝试.

（1）括号内放缩

①$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$（$n\geq 2$）；

②$\frac{2^n}{(2^n-1)^2}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^n-1)}<\frac{2^n}{(2^n-1)(2^n-2)}=\frac{2^{n-1}}{(2^n-1)(2^{n-1}-1)}=\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}(n\geq 2)$

可更一般化为：$\frac{a^n}{(a^n-1)^2}=\frac{a^n}{(a^n-1)(a^n-1)}<\frac{a^n}{(a^n-1)(a^n-a)}=\frac{a^{n-1}}{(a^n-1)(a^{n-1}-1)}=\frac{1}{a-1}(\frac{1}{a^{n-1}-1}-\frac{1}{a^n-1})$

$(n\geq 2,a\geq 2,n,a\in N^*)$

（2）括号外放缩

①$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})$（$n\geq 2$）

②$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

③$\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{1}{4n(n-1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$（$n\geq 2$）

④$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

⑤$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-2}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-2}$（$n\in N^*,n\geq 2$）

⑥$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$

⑦$\frac{1}{2^n-1}=\frac{2^{n+1}-1}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}<\frac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{2}{2^n-1}-\frac{2}{2^{n+1}-1}$

$\frac{1}{3^n-1}=\frac{3^{n+1}-1}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}<\frac{3^{n+1}}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\frac{3}{2}(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1})$

⑧$a^{n-1}\geq 1$（$a>1$），底数a的取值，根据题目具体调整即可

$\frac{1}{3^n-1}<\frac{1}{3^n-3^{n-1}}=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$（$n\geq 2$），$\frac{1}{a^n-b}\leq\frac{1}{a^{n-1}(a-b)}$（$a>b\geq 1$），$\frac{1}{a^n-b^n}\leq\frac{1}{a^{n-1}(a-b)}$（$a>b\geq 1$）

3）二项式定理

①由于$2^n-1=(1+1)^n-1=(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)-1>C_n^1+C_n^2=\frac{n(n+1)}{2}$ $(n\geq 3)$

于是 $\frac{1}{2^n-1}<\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ (n\geq 3)$

② $2^n>2n+1\ (n\geq 3)$ ， $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n>C_n^0+2C_n^1=2n+1$；

$2^n\geq n^2+n+2\ (n\geq 5)$， $2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+C_n^n\geq 2C_n^0+2C_n^1+2C_n^2=n^2+n+2$.

（4）糖水不等式

若 $b>a>0$， $m>0$，则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$；若 $b>a>m>0$，则 $\frac{a-m}{b-m}<\frac{a}{b}$.

解释：b 克不饱和糖水里含有 a 克糖，再往糖水里加入 m 克糖，则糖水变甜.

如， $\frac{1}{3^n-1}<\frac{1+1}{3^n-1+1}=\frac{2}{3^n}$ （ $n\geq 1$ ）.

二、放缩精度的控制

在利用“放缩法”证明不等式问题时，最容易掉入的坑就是放缩过度. 为了避免放缩过度，我们往往需要多次尝试探路，才可能试探到合适的放缩途径，这样会费时费力. 如何提前预判，做到恰到好处的放缩就尤为关键. 当出现放缩过度的情况时，可调整放缩的起点，从第 k （ $2\leq k\leq 4$ ）项开始放缩.

1. 裂项放缩

对于放缩后，再裂项相消求和类型，通过放缩后的裂项公式的首项或前几项的和即可判断放缩的精度是否满足题设要求. 常见的题目无非是从第一项开始放缩、从第二项开始放缩或者从第三项开始放缩这三种. 比如

（1） $\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，从第一项开始放缩，放缩的精度为 $s_n<2\cdot\frac{1}{2-1}=2$.

（2） $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})(n\geq 2)$，从第二项开始放缩，放缩的精度为 $S_n<1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-1}=\frac{3}{2}$；

保留前两项，从第三项开始放缩，放缩的精度为 $S_n<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3-1}=\frac{3}{2}$.

（3） $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\geq 2)$，从第二项开始放缩，放缩的精度为 $s_n<1+\frac{1}{2-1}=2$；保留前两项，从第三项开始放缩，放缩的精度为 $S_n<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3-1}=\frac{7}{4}$.

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$， $a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$.

（1）证明数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列；（2）设 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，证明： $\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+\cdots+\frac{1}{b_n^2}<2$.

【例 2】设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=4$，$a_4=S_3$，数列$\{b_n\}$满足：对任意$n\in\mathbf{N}^*,S_n+b_n,S_{n+1}+b_n,S_{n+2}+b_n$成等比数列.（1）求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式；（2）记$C_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}},n\in\mathbf{N}^*$，证明：$C_1+C_2+\cdots+C_n<2\sqrt{n},n\in\mathbf{N}^*$.

【例 3】设数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n. 已知$a_1=1,\dfrac{2S_n}{n}=a_{n+1}-\dfrac{1}{3}n^2-n-\dfrac{2}{3},n\in N^*$.

（1）求a_2的值；（2）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；（3）证明：对一切正整数n，有$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{7}{4}$.

【例 4】数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和记为S_n，$a_1=2$，$a_{n+1}=S_n+n$，等差数列$\left\{b_n\right\}$的各项为正，其前n项和为T_n，且$T_3=9$，又a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3成等比数列.

（1）求$\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$的通项公式；（2）求证：当$n\geq 2$时，$\dfrac{1}{{b_1}^2}+\dfrac{1}{{b_2}^2}+\cdots+\dfrac{1}{{b_n}^2}<\dfrac{5}{4}$.

【练习 1】已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=\dfrac{1}{2},a_n+2S_nS_{n-1}=0\left(n\geq 2\right)$.

（1）数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是否为等差数列，并证明你的结论；（2）求$S_n$和$a_n$；（3）求证：${S_1}^2+{S_2}^2+\cdots+{S_n}^2<\dfrac{1}{2}$.

【练习 2】在数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$中$a_1=2$，$b_1=4$，且a_n,b_n,a_{n+1}成等差数列，b_n,a_{n+1},b_{n+1}成等比数列.

（1）a_2,a_3,a_4及b_2,b_3,b_4，由此猜测数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式，并证明你的结论；

（2）证明：$\dfrac{1}{a_1+b_1}+\dfrac{1}{a_2+b_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n+b_n}<\dfrac{5}{12}$.

【练习 3】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.记数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则（　　）

A. $\dfrac{3}{2}<S_{100}<3$　　B. $3<S_{100}<4$　　C. $4<S_{100}<\dfrac{9}{2}$　　D. $\dfrac{9}{2}<S_{100}<5$

【练习 4】已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n=a_{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}a_{n+1}^2$．则下列正确的是(　　)

A．$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　B．数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是递减数列

C．数列$\{a_{n+1}+a_n\}$是递增数列　　D．$a_{n+1}>\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

2. 等比放缩

含有$\dfrac{1}{a^n-1}$的数列，可放缩为等比数列，也可以放缩后进行裂项.

①等比数列前n项和的极限

构造等比数列$\{b_n\}$，其首项为b_1，公比为q. 等比数列$\{b_n\}$的前项和$T_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

当$q\in(0,1)$时，则数列$\{T_n\}$中的项T_n会趋向某一定值，有$\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\dfrac{b_1}{1-q}$，也称数列$\{T_n\}$收敛于$\dfrac{b_1}{1-q}$.

②证明$a_1+a_2+\cdots+a_n<m$（m为常数）型数列不等式的思路：

当待证不等式的一端为常数时，我们只需将另一端对应的数列通项进行恰当的放缩，变成等比数列，再通过求和达到证明的目的.

$a_1+a_2+\cdots+a_n<b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}<\dfrac{b_1}{1-q}\le m$（$m$为常数），其中$\{b_n\}$为递缩等比数列.

通过逆向思维，我们可以由$m=\dfrac{b_1}{1-q}$出发操作，先尝试对q进行适当的赋值，其中$q\in(0,1)$，再确定出b_1，从而求出b_n，构造出数列$\{b_n\}$，再证明$a_n<b_n$即可. 上述中构造的$\{b_n\}$并非唯一，因为q是任取的.一般找底数大的，因为这样赋值，数列的收敛性会越好，精度就会越高，能更好地避免放缩过度.为了变形化简方便，我们通常取a_n中幂的底数.

湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——数列讲义——数列放缩（2）

③ $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a^2-b^2}+\Lambda+\frac{1}{a^n-b^n}<m$（$a>b\ge1$）型精度公式

构造等比数列$\{c_n\}$，其首项为c_1，公比为q.

要使$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a^2-b^2}+\Lambda+\frac{1}{a^n-b^n}<c_1+c_2+\Lambda+c_n\le m$成立，我们令$q=\frac{1}{a}$，且$m=\frac{c_1}{1-q}$，则$c_1=(1-q)m=(1-\frac{1}{a})m$，于是$c_n=(1-\frac{1}{a})m(\frac{1}{a})^{n-1}=\frac{(a-1)m}{a^n}$

即有$\frac{1}{a^n-b^n}\le c_n=\frac{(a-1)m}{a^n}$成立，只需$\frac{a^n}{a^n-b^n}\le(a-1)m$成立，只需$\frac{a^n-b^n+b^n}{a^n-b^n}\le(a-1)m$，只需$\frac{b^n}{a^n-b^n}\le(a-1)m-1$，只需$\frac{1}{(\frac{a}{b})^n-1}\le(a-1)m-1$，故$(\frac{a}{b})^n-1\ge\frac{1}{(a-1)m-1}$，于是我们可以得到

$(\frac{a}{b})^n\ge1+\frac{1}{(a-1)m-1}$.

令$f(n)=(\frac{a}{b})^n$，当$a>b\ge1$时，$f(n)$单调递增，只需上式中$n=1$时成立即可，即有$\frac{a}{b}\ge1+\frac{1}{(a-1)m-1}$，化简得$m\ge\frac{a}{(a-b)(a-1)}$.

同样地，我们也可以得到$n\ge2$情形下的精度公式.

综上所述，对于$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a^2-b^2}+\Lambda+\frac{1}{a^n-b^n}<m$（$a>b\ge1$）型放缩，我们可以得到下面的放缩精度公式：

$$\varepsilon=\begin{cases}\frac{a}{(a-b)(a-1)}\le m,n=1\\ \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a^k-b^k}+\frac{a}{(a^n-b^n)(a-1)}\le m,n\ge2\end{cases}$$

通过精度公式我们可以提前预知放缩的精度，不仅能快速判断到底从第几项开始放缩，而且还能根据需要调节放缩的精度.

下面举例说明如何具体利用精度判别式判断到底从第几项开始放缩.

【例 5】求证：$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\cdots+\frac{1}{2^n-1}<2$（$n\in N^*$）.

【例 6】求证：$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\cdots+\frac{1}{2^n-1}<\frac{5}{3}$（$n\in N^*$）.

【例 7】设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$（$n\in N^*$），

且a_1，a_2+5，a_3成等差数列.

(1)求a_1的值；(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式. (3)证明：对一切正整数n，有$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

【例 8】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$.

（1）证明$\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；（2）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

【练习 1】已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_n=a_n^2+a_n(n\in N^*)$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（Ⅱ）记$b_n=2^{a_n}-1$，证明：当$n\in N^*$时，$2n+1\leqslant\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_{n+1}}{b_n}<2n+2$.

【练习 2】在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{n+1}{2n}\cdot a_n$.

（1）证明：数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是等比数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\frac{a_n}{4n-a_n}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，求证：$T_n<2$.

【练习 3】）已知正项数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(a_n+1)$，$n\in N_+$．

证明：(1) $a_{n+1}<a_n$；(2) $a_n-2a_{n+1}<a_n\cdot a_{n+1}$；(3) $\frac{1}{2^n}<a_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$．

【练习 4】已知等比数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=-\frac{1}{2}$，前n项的和为S_n，且S_7、S_9、S_8成等差数列. 设$b_n=\frac{{a_n}^2}{1-a_n}$，数列$\left\{b_n\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n<\frac{1}{3}$.

【练习 5】在数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1$，$a_2=\frac{10}{3}$，$a_{n+1}-\frac{10}{3}a_n+a_{n-1}=0\ (n\ge 2,n\in N^*)$.

（1）若数列$\left\{a_{n+1}+\lambda a_n\right\}$是等比数列，求实数$\lambda$；

（2）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（3）设$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，求证：$S_n<\frac{3}{2}$.

【练习 6】设 $a_n=\dfrac{3}{4^n+2}$，证明 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1-\dfrac{1}{4^n}$.

【练习 7】已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2}, a_n^2=a_{n-1}a_n+a_{n-1}(n\geqslant 2), S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,

求证:对于任意正整数 n，都有 $\dfrac{S_n}{n}\leqslant\dfrac{n}{2}$.

【练习 8】已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3, a_2=5$，其前 n 项和 S_n 满足 $S_n+S_{n-2}=2S_{n-1}+2^{n-1}$ $(n\geqslant 3)$. 令 $b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$.

⑴ 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

⑵ 若 $f(x)=2^{x-1}$，求证: $T_n=b_1f(1)+b_2f(2)+\cdots+b_nf(n)<\dfrac{1}{6}(n\geqslant 1)$.

模型一、类等比放缩

对于通项里含有指数的代数式, 可以优先考虑放缩为等比数列求和. 对于求证 $\sum_{i=1}^{n} a_i < M$ $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i > M\right.$ 类似), 我们采用等比放缩时通常有两个方向.

(1) 通项放缩. 将 a_i 放缩到 b_i, 其中数列 $\{b_n\}$ 是一个等比数列 (通常 $b_1 > 0$, 公比 $0 < q < 1$), 则 $\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} < \frac{b_1}{1-q}$, 通常 M 就是 $\frac{b_1}{1-q}$, 若精度要求更高, 需要从第二项, 乃至第三项等开始放缩.

(2) 公比放缩. 当放缩时若容易找到等比数列 $\{b_n\}$ 的通项, 我们亦可以对 $\{a_n\}$ 进行放缩, 即研究 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{f(n+1)}{f(n)}\right)_{\max} \leqslant q$, 故 $S_n \leqslant \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} < \frac{a_1}{1-q}$.

例 1. 设 $a_n = \frac{3}{4^n+2}$, 证明 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1 - \frac{1}{4^n}$.

解法一: (通项放缩) 由 $a_n = \frac{3}{4^n+2} < \frac{3}{4^n}$, 得 $\sum_{i=1}^{n} a_i < \frac{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4^n}$.

解法二: (公比放缩) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^n+2}{4^{n+1}+2} = \frac{4^n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{4^{n+1}+2} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{2}}{4^{n+1}+2}$

记 $f(n) = \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{2}}{4^{n+1}+2}$, 显然 $f(n)$ 为单调递减数列,

故 $f(n) = \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{1}{3}$ 恒成立.

又 $a_1 = \frac{1}{2}$, 得 $\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

而 $\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) - \left(1-\frac{1}{4^n}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{3\left(3^{n-1}-4^{n-1}\right)}{4^n \cdot 3^n} < 0$, 故 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < 1 - \frac{1}{4^n}$ 得证.

模型二、类等差放缩

类等差型数列是指数列 $\{a_n\}$ 从第二项起

满足 $a_n - a_{n-1} \geqslant d$ (或 $a_n - a_{n-1} \leqslant d$). 显然对应地可以得到 $a_n \geqslant a_1 + (n-1)d$ (或 $a_n \leqslant$

$a_1+(n-1)d$);$S_n \geqslant \frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$(或$S_n \leqslant \frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$).

例 2．已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}, a_n^2=a_{n-1}a_n+a_{n-1}(n \geqslant 2), S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和,求证:对于任意正整数$n$,都有$\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{n}{2}$.

解析:$a_n^2=a_{n-1}\left(a_n+1\right) \Rightarrow a_{n-1}=\frac{a_n^2}{a_n+1}$,

故$a_n-a_{n-1}=\frac{a_n\left(1+a_n\right)-a_n^2}{1+a_n}=\frac{a_n}{1+a_n}<1$.

又$a_1=\frac{1}{2}$,得$a_n \leqslant \frac{1}{2}+(n-1)=n-\frac{1}{2}$,所以$S_n \leqslant \frac{\left(\frac{1}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)n}{2}$,即$\frac{S_n}{n} \leqslant \frac{n}{2}$.

模型三、裂项求和放缩裂项相消求和是高考数列考题中较为常规与热门的技巧之一,其本质是构造相邻“同构式”的作差形式,通过反复“累加”以达到化简的目的.

例 3．已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=3, a_2=5$,其前n项和S_n满足$S_n+S_{n-2}=2S_{n-1}+2^{n-1}\ (n \geqslant 3)$.令$b_n=\frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$f(x)=2^{x-1}$,求证:$T_n=b_1 f(1)+b_2 f(2)+\cdots+b_n f(n)<\frac{1}{6}(n \geqslant 1)$.

解析:$(1) S_n-S_{n-1}=S_{n-1}-S_{n-2}+2^{n-1}$,即$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}(n \geqslant 3)$,

所以$a_n=\left(a_n-a_{n-1}\right)+\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)+\mathrm{L}\ +\left(a_3-a_2\right)+a_2=$

$2^{n-1}+2^{n-2}+\mathrm{L}\ +2^2+5=2^n+1(n \geqslant 3)$.

检验知,当$n=1,2$时,结论也成立.故$a_n=2^n+1(n \geqslant 1)$.

裂项相消求和是高考数列考题中较为常规与热门的技巧之一,其本质是构造相邻“同构式”的作差形式,通过反复“累加”以达到化简的目的.

在证明数列大题时,我们可以应用同向不等式的可加性达到证明的目的,即要证$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$,只需证$a_i \leqslant b_i$.应用此方法可以回避许多数列无法直接求和,或者通过放缩“精度”不好控制的问题.该方法形式上是通过分析法,执果索因,逆向逐步推导原命题的充分条件,逻辑上连贯自然.当然,由于$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$,并不一定是$a_i \leqslant b_i$的必要条件,所以由“末知”推向的“已知”末必一定是正确的.

例 4．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2,前n项和为S_n,且S_1, S_2, S_4成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）设正项数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n^2=1+\dfrac{2}{S_{n+1}}$，求证 $b_1+b_2+\cdots+b_n<n+1-\dfrac{1}{n+1}$.

解析: (1) 令 $a_n=2n+k$（k 为常数), 则 $S_1=2+k, S_2=6+2k, S_4=20+4k$.

由 $S_2^2=S_1\cdot S_4$, 解得 $k=-1$, 所以 $a_n=2n-1$.

(2) 原题即证 $(b_1-1)+(b_2-1)+\cdots+$

$(b_n-1)<1-\dfrac{1}{n+1}$.

记 $c_n=b_n-1, d_n=\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)-$

$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n(n+1)}$, 即证 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i<\sum\limits_{i=1}^{n}d_i$.

由 (1) 知 $S_n=n^2$, 故 $b_n^2=1+\dfrac{2}{(n+1)^2}$, $c_n=\sqrt{1+\dfrac{2}{(n+1)^2}}-1$, 所以只需证 $c_n<d_n$,

即证 $\sqrt{1+\dfrac{2}{(n+1)^2}}-1<\dfrac{1}{n(n+1)}$.

$$\sqrt{1+\frac{2}{(n+1)^2}}-1=\frac{\frac{2}{(n+1)^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{(n+1)^2}}+1}<\frac{\frac{2}{(n+1)^2}}{2}=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{2}{n(n+1)},$$

故原命题得证.