湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数结构同构基本方法（1）

一、　预备知识

（1）当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，有 $x=a^{\log_a x}$，(2)当 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时，有 $x=\log_a a^x$；

（2）常用的切线不等式：$e^x\geq x+1$，$e^x\geq ex$，$\ln x\leq x-1$，$\ln x\leq\frac{x}{e}$；

（3）“e^x”的等价变形：　$xe^x=e^{x+\ln x}$；$\frac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}$；$\frac{x}{e^x}=e^{\ln x-x}$

（4）“lnx”的等价变形：$x+\ln x=\ln(xe^x)$；$x-\ln x=\ln\frac{e^x}{x}$；$\ln x-x=\ln\frac{x}{e^x}$.

二、整体同构利用单调性处理函数或不等式问题

1.地位均等同构处理双变量问题

含有地位同等的两个变量 x_1，x_2 或 p，q 等的不等式，对两个变量进行分类整理，如果整理（即同构）后不等式两边具有结构的一致性，往往暗示利用单调性知识处理问题（通常需要预先设定两个变量的大小）.

① $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>k\ (x_1<x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)<kx_1-kx_2\Leftrightarrow f(x_1)-kx_1<f(x_2)-kx_2\Leftrightarrow y=f(x)-kx$ 为增函数；

② $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{k}{x_1\cdot x_2}\ (x_1<x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)>\frac{k(x_1-x_2)}{x_1\cdot x_2}=\frac{k}{x_2}-\frac{k}{x_1}\Leftrightarrow f(x_1)+\frac{k}{x_1}>f(x_2)+\frac{k}{x_2}\Leftrightarrow y=f(x)+\frac{k}{x}$ 为减函数；

2.指对跨阶同构处理指对混搭问题

①积型：

$$ae^a\leq b\ln b\xrightarrow{\text{三种同构方式}}\begin{cases}\text{同　左}\quad a\cdot e^a\leq(\ln b)\cdot e^{\ln b}\xrightarrow{\text{构造函数}}f(x)=xe^x\\ \text{同　右}\quad e^a\cdot\ln e^a\leq b\cdot\ln b\xrightarrow{\text{构造函数}}f(x)=x\ln x\\ \text{取对数}\ a+\ln a\leq\ln b+\ln(\ln b)\xrightarrow{\text{构造函数}}f(x)=x+\ln x\end{cases}$$

说明：在对“积型”进行同构时，取对数是最快捷的.

②商型：

$$\frac{e^a}{a}<\frac{b}{\ln b}\xrightarrow{\text{三种同构方式}}\begin{cases}\text{同　左}\quad \frac{e^a}{a}<\frac{e^{\ln b}}{\ln b}\xrightarrow{\text{构造函数}}f(x)=\frac{e^x}{x}\\ \text{同　右}\quad \frac{e^a}{\ln e^a}<\frac{b}{\ln b}\xrightarrow{\text{构造函数}}f(x)=\frac{x}{\ln x}\\ \text{取对数}\ a-\ln a<\ln b-\ln(\ln b)\xrightarrow{\text{构造函数}}f(x)=x-\ln x\end{cases}$$

③和差：

$$e^a\pm a>b\pm\ln b\xrightarrow{\text{两种同构方式}}\begin{cases}\text{同左}\quad e^a\pm a>e^{\ln b}\pm\ln b\xrightarrow{\text{构造函数}}f(x)=e^x\pm x\\ \text{同右}\quad e^a\pm\ln e^a>b\pm\ln b\xrightarrow{\text{构造函数}}f(x)=x\pm\ln x\end{cases}$$

如：

$e^{ax}+ax>\ln(x+1)+x+1\Leftrightarrow e^{ax}+ax>e^{\ln(x+1)}+\ln(x+1)\Leftrightarrow ax>\ln(x+1)$.

3.配凑同构

① $ae^{ax}>\ln x\xrightarrow{\text{同乘 }x}axe^{ax}>x\ln x$；

② $e^x>a\ln(ax-a)-a\Leftrightarrow\frac{1}{a}e^x>\ln a(x-1)-1\Leftrightarrow e^{x-\ln a}-\ln a>\ln(x-1)-1$

$\xrightarrow{\text{同加 }x}e^{x-\ln a}+x-\ln a>\ln(x-1)+x-1=e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)\Leftrightarrow x-\ln a>\ln(x-1)$；

③ $a^x > \log_a x \Leftrightarrow e^{x\ln a} > \dfrac{\ln x}{\ln a} \Leftrightarrow (x\ln a)e^{x\ln a} > x\ln x$.

三、部分同构利用切线放缩处理最值问题

1. $xe^x = e^{x+\ln x} \ge x+\ln x+1$， $x+\ln x = \ln(xe^x) \le xe^x - 1$； $xe^x = e^{x+\ln x} \ge e(x+\ln x)$， $x+\ln x=\ln(xe^x) \le \dfrac{xe^x}{e}=xe^{x-1}$.

2. $\dfrac{e^x}{x} = e^{x-\ln x} \ge x-\ln x+1$， $x-\ln x = \ln\dfrac{e^x}{x} \le \dfrac{e^x}{x}-1$； $\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x} \ge e(x-\ln x)$， $x-\ln x=\ln\dfrac{e^x}{x} \le \dfrac{e^{x-1}}{x}$.

3. $\dfrac{x}{e^x} = e^{\ln x - x} \ge \ln x - x+1$， $\ln x - x = \ln\dfrac{x}{e^x} \le \dfrac{x}{e^x}-1$； $\dfrac{x}{e^x} = e^{\ln x - x} \ge e(\ln x - x)$， $\ln x - x = \ln\dfrac{x}{e^x} \le \dfrac{x}{e^{x+1}}$.

四、例题

1.（1）若 $0<x_1<x_2<a$，都有 $x_2\ln x_1 - x_1\ln x_2 \le x_1 - x_2$ 成立，则 a 的最大值为____________

解析：$\dfrac{\ln x_1}{x_1} - \dfrac{\ln x_2}{x_2} \le \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}$，即 $\dfrac{\ln x_1}{x_1} + \dfrac{1}{x_1} \le \dfrac{\ln x_2}{x_2} + \dfrac{1}{x_2}$，令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上为增函数，

$\therefore f'(x) \ge 0$ 在 $(0,a)$ 上恒成立，$f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为增函数，在 $(1,+\infty)$ 上为减函数，$\therefore a \le 1$，$\therefore a$ 的最大值为 1，.

（2）已知 $f(x)=a\ln(x+1)-x^2$，在区间 $(1,\ 2)$ 内任取两实数 p，q，且 $p\ne q$，不等式 $\dfrac{f(p+1)-f(q+1)}{p-q}<1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

解析：①当 $p>q$ 时，$f(p+1)-f(q+1)<(p+1)-(q+1)$ 即 $f(p+1)-(p+1)<f(q+1)-(q+1)$，

令 $g(x)=f(x+1)-(x+1)$，则 $g(p+1)<g(q+1)$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,\ 2)$ 递减，即 $g(x)=a\ln(x+2)-(x+1)^2-(x+1)$，在 $(1,2)$ 递减，$\therefore g'(x)\le 0$ 在 $(1,\ 2)$ 上恒成立，$\therefore g'(x)=\dfrac{a}{x+2}-2(x+1)-1\le 0$ 在上恒成立，

$\therefore a \le 2x^2+7x+6$ 在 $(1,\ 2)$ 上恒成立，$\therefore a \le (2x^2+7x+6)_{\min}=15$.

②当 $p<q$ 时，同理可得出 $a\ge 28$，综上所述 $a\in(-\infty,\ 15]\cup[28,\ +\infty)$

2.对下列不等式或方程进行同构变形，并写出一个同构函数.

（1） $\log_2 x - k\cdot 2^{kx} \ge 0$

解析：$\log_2 x - k\cdot 2^{kx} \ge 0 \Leftrightarrow x\log_2 x \ge kx\cdot 2^{kx} \Leftrightarrow (\log_2 x)\cdot 2^{\log_2 x} \ge kx\cdot 2^{kx}$， $f(x)=x\cdot 2^x$.

（2） $2x^3\ln x \ge me^{\frac{m}{x}}$

解析：$2x^3\ln x \ge me^{\frac{m}{x}} \Leftrightarrow x^2\ln x^2 \ge \dfrac{m}{x}e^{\frac{m}{x}} \Leftrightarrow x^2\ln x^2 \ge e^{\frac{m}{x}}\ln e^{\frac{m}{x}}$， $f(x)=x+\ln x$.

（3） $x+a\ln x+e^{-x} \ge x^a (x>1)$

解析：$x+a\ln x+e^{-x}\ge x^a \Leftrightarrow x+e^{-x} \ge x^a - \ln x^a \Leftrightarrow e^{-x}-\ln e^{-x} \ge x^a - \ln x^a$， $f(x)=x-\ln x$.

（4） $a(e^{ax}+1) \ge 2(x+\dfrac{1}{x})\ln x$

解析：$a(\mathrm{e}^{ax}+1)\geq 2(x+\dfrac{1}{x})\ln x \Leftrightarrow ax\mathrm{e}^{ax}+ax\geq 2x^2\ln x+2\ln x \Leftrightarrow ax\mathrm{e}^{ax}+ax\geq x^2\ln x^2+\ln x^2$

$$\Leftrightarrow ax\mathrm{e}^{ax}+ax\geq \ln x^2\cdot \mathrm{e}^{\ln x^2}+\ln x^2,\ f(x)=x\mathrm{e}^x+x .$$

（5） $a^x>\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$

解析：$a^x>\log_a x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x\ln a}>\dfrac{\ln x}{\ln a}\Leftrightarrow (x\ln a)\mathrm{e}^{x\ln a}>x\ln x \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (x\ln a)\mathrm{e}^{x\ln a} > (\ln x)\mathrm{e}^{\ln x} \to f(x)=x\mathrm{e}^x & (1)\\ \mathrm{e}^{x\ln a}\ln \mathrm{e}^{x\ln a} > x\ln x \to f(x)=x\ln x & (2)\\ x\ln a+\ln(x\ln a)>\ln x+\ln(\ln x)\to f(x)=x+\ln x & (3)\end{cases}$.

（6） $\mathrm{e}^{2\lambda x}-\dfrac{1}{\lambda}\ln\sqrt{x}\geq 0$

解析：$\mathrm{e}^{2\lambda x}-\dfrac{1}{\lambda}\ln\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2\lambda x}\geq \dfrac{1}{2\lambda}\ln x\Leftrightarrow 2\lambda x\mathrm{e}^{2\lambda x}\geq x\ln x\Leftrightarrow 2\lambda x\mathrm{e}^{2\lambda x}\geq (\ln x)\mathrm{e}^{\ln x}$ ，$f(x)=x\cdot \mathrm{e}^x$.

（7） $\mathrm{e}^{-x}-2x-\ln x=0$

解析：$\mathrm{e}^{-x}-2x-\ln x=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}-x=x+\ln x\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}+\ln \mathrm{e}^{-x}=x+\ln x$ ，$f(x)=x+\ln x$.

（8） $a\ln(x-1)+2(x-1)\geq ax+2\mathrm{e}^x$

解析：$a\ln(x-1)+2(x-1)\geq ax+2\mathrm{e}^x \Leftrightarrow a\ln(x-1)+2(x-1)\geq a\ln \mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x$ ，$f(x)=a\ln x+2x$.

3.(1)已知 $f(x)=m\ln(x+1)-3x-3$，若不等式 $f(x)>mx-3\mathrm{e}^x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

解析：$m\ln(x+1)-3(x+1)>mx-3\mathrm{e}^x=m\ln \mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x$(同构)，令 $g(x)=m\ln x-3x$，

由 $g(x+1)>g(\mathrm{e}^x)$，且 $1<x+1<\mathrm{e}^x$，知 $g(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 为减函数，所以 $g'(x)=\dfrac{m}{x}-3\leq 0\Rightarrow m\leq 3x\Rightarrow m\leq 3$.

（2）已知不等式 $x+a\ln x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\geq x^a$ 对任意的 $x\in(1,\ +\infty)$ 恒成立，则实数 a 的最小值为________.

解析：$x+a\ln x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\geq x^a\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\geq x^a-a\ln x=x^a-\ln x^a\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}-\ln \mathrm{e}^{-x}\geq x^a-\ln x^a$，

令 $f(x)=x-\ln x$ ，则 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$ ，易知 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上递减，在 $(1,\ +\infty)$ 上递增，

所以 $f(\mathrm{e}^{-x})\geq f(x^a)$ ，$\because x\in(1,\ +\infty)$ ，$\mathrm{e}^{-x}\in(0,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}})$.

根据选项只讨论 a＜0 的情况，当 a＜0 时，$x^a\in(0,1)$，$\therefore \mathrm{e}^{-x}\leq x^a$ ，$\therefore a\geq \dfrac{-x}{\ln x}$.

令 $h(x)=\dfrac{-x}{\ln x}$ ，则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$ ，所以 $h(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上递增，在 $(\mathrm{e},\ +\infty)$ 上递减，则 $h(x)_{\max}=h(\mathrm{e})=-\mathrm{e}$ ，即 $a\geq -\mathrm{e}$.

（3）对任意 $x>0$，不等式 $a(\mathrm{e}^{ax}+1)\geq 2(x+\dfrac{1}{x})\ln x$ 恒成立，则实数 a 的最小值为________.

解析：$a(\mathrm{e}^{ax}+1)\geq 2(x+\dfrac{1}{x})\ln x\Leftrightarrow ax(\mathrm{e}^{ax}+1)\geq (x^2+1)\ln x^2\Leftrightarrow (\mathrm{e}^{ax}+1)\ln \mathrm{e}^{ax}\geq (x^2+1)\ln x^2$(积型同构)，

令 $f(x)=(x+1)\ln x$ ，则 $f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}$ ，$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

易知 $f'(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上递减，在 $(1,\ +\infty)$ 上递增，所以 $f'(x)>f'(1)=2>0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，

则 $(e^{ax}+1)\ln e^{ax} \geq (x^2+1)\ln x^2 \Leftrightarrow f(e^{ax}) \geq f(x^2) \Leftrightarrow e^{ax} \geq x^2 \Leftrightarrow ax \geq 2\ln x \Leftrightarrow a \geq \dfrac{2\ln x}{x}$ ，

由导数法易证 $\dfrac{2\ln x}{x} \leq \dfrac{2}{e}$ ，所以 $a \geq \dfrac{2}{e}$.

（4）对任意 $x>0$，不等式 $2ae^{2x}-\ln x+\ln a \geq 0$ 恒成立，则实数 a 的最小值为________.

解析：$2ae^{2x}-\ln x+\ln a \geq 0 \Leftrightarrow 2ae^{2x} \geq \ln\dfrac{x}{a} \Leftrightarrow 2xe^{2x} \geq \dfrac{x}{a}\ln\dfrac{x}{a} \Leftrightarrow 2x+\ln 2x \geq \ln\dfrac{x}{a}+\ln(\ln\dfrac{x}{a})$ (积型)，

令 $f(x)=x+\ln x$，则 $f(x)$ 为增函数，由 $f(2x) \geq f(\ln\dfrac{x}{a})$，得 $2x \geq \ln\dfrac{x}{a}$ ，即 $a \geq \dfrac{x}{e^{2x}}$ 恒成立，令 $g(x)=\dfrac{x}{e^{2x}}$ ，

则 $g'(x)=\dfrac{1-2x}{e^{2x}}$ ，易得 $g(x)_{\max}=g(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2e}$ ，所以实数 a 的最小值为 $\dfrac{1}{2e}$.

（5）已知 $f(x)=e^x-a\ln(ax-a)-a(a>0)$，若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

解析：$f(x)=e^x-a\ln(ax-a)-a>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}e^x > \ln a(x-1)-1 \Leftrightarrow e^{x-\ln a}-\ln a > \ln(x-1)-1$

$$\Leftrightarrow e^{x-\ln a}+x-\ln a > e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)\text{ (和差型同构)，}$$

令 $g(x)=e^x+x$，显然 $g(x)$ 为增函数，则原命题等价于

$$g(x-\ln a) > g(\ln(x-1)) \Leftrightarrow x-\ln a > \ln(x-1) \Leftrightarrow \ln a < x-\ln(x-1)\text{，}$$

由于 $x-\ln(x-1) \geq x-(x-2)$，所以 $\ln a<2$，即得 $0<a<e^2$.

（6）若 $x>0$，证明：$(e^x-1)\ln(x+1)>x^2$.

解析：要证 $(e^x-1)\ln(x+1)>x^2$，即证：$\ln(x+1)>\dfrac{x^2}{e^x-1}$ 即证：$\dfrac{\ln(x+1)}{x}>\dfrac{x}{e^x-1}$

即证：$\dfrac{\ln(x+1)}{x}>\dfrac{\ln(e^x-1+1)}{e^x-1}$，

令 $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$，即证：$h(x)>h(e^x-1)$，易知：$h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，即证：$x<e^x-1$.

令 $s(x)=e^x-x-1$，$s'(x)=e^x-1>0$，$\therefore s(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore s(x)>s(0)=0$，$\therefore e^x-x-1>0$，即 $x<e^x-1$.

4.（1）已知 $f(x)=\ln x+x-xe^{x+1}$，则函数 $f(x)$ 的最大值为________.

解析：$f(x)=\ln x+x-xe^{x+1}=x+\ln x-e^{x+\ln x+1} \leq x+\ln x-(x+\ln x+2)=-2$. (当且仅当 $x+\ln x+1=0$ 取等号) .

（2）函数 $f(x)=\dfrac{x^2e^x-2\ln x}{x+1}$ 的最小值是________.

解析：$f(x)=\dfrac{x^2e^x-2\ln x}{x+1}=\dfrac{e^{x+2\ln x}-2\ln x}{x+1} \geq \dfrac{x+2\ln x+1-2\ln x}{x+1}=1$ (当且仅当 $x+2\ln x=0$ 取等号) .

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——函数结构同构基本方法（2）

（3）函数 $f(x)=(\ln x+x+1)e^{-x}-x$的最大值是________.

解析：$f(x)=(x+\ln x+1)e^{-x}-x=\dfrac{x+\ln x+1-xe^{x}}{e^{x}}=\dfrac{x+\ln x+1-e^{x+\ln x}}{e^{x}}$

$$\le\frac{x+\ln x+1-(x+\ln x+1)}{e^{x}}=0$$ (当且仅当 $x+\ln x=0$ 取等号).

（4）不等式 $xe^{x}-ax-\ln x-1\ge0$恒成立，则实数 a 的最大值是________.

解析：$xe^{x}-ax-\ln x-1\ge0$恒成立$\Leftrightarrow a\le(\dfrac{xe^{x}-\ln x-1}{x})_{\min}$

$$\Leftrightarrow\frac{xe^{x}-\ln x-1}{x}=\frac{e^{x+\ln x}-\ln x-1}{x}\ge\frac{x+\ln x+1-\ln x-1}{x}=1,$$

当且仅当 $x+\ln x=0$ 等号成立.

（5）已知 $f(x)=xe^{x}-a(x+\ln x)$有两个零点，则实数 a 的取值范围是________.

解析：$f(x)=xe^{x}-a(x+\ln x)=e^{x+\ln x}-a(x+\ln x)$，令 $t=x+\ln x,\ t\in\mathbf{R}$，显然该函数单调递增，

即 $e^{t}-at=0$ 有两个根，即 $a=\dfrac{e^{t}}{t}$ 有两个根，

令 $g(t)=\dfrac{e^{t}}{t}$，$g(t)$ 在$(-\infty,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$ 单调递增．$\therefore g(t)_{\min}=g(1)=e$，$a>e$.

（6）已知 $f(x)=x^{b}e^{x}-a\ln x-x-1(x>1)$，其中 $b>0$，若 $f(x)\ge0$ 恒成立，则实数 a 与 b 的大小关系是________.

解析：$f(x)\ge0\Leftrightarrow x^{b}e^{x}\ge a\ln x+x+1\Leftrightarrow e^{x+b\ln x}-x-1\ge a\ln x\Leftrightarrow a\le\dfrac{e^{x+b\ln x}-x-1}{\ln x}$，

由于 $\dfrac{e^{x+b\ln x}-x-1}{\ln x}\ge\dfrac{x+b\ln x+1-x-1}{\ln x}=b$，当且仅当 $x+b\ln x=0$ 等号成立，所以 $a\le b$.

（7）已知 a，b 分别满足 $ae^{a}=e^{2},\ b(\ln b-1)=e^{3}$，则 $ab=$________.

解析：$\begin{cases}ae^{a}=e^{2}\\ b(\ln b-1)=e^{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ae^{a}=e^{2}\\ \dfrac{b}{e}\ln\dfrac{b}{e}=e^{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ae^{a}=e^{2}\\ \ln\dfrac{b}{e}e^{\ln\frac{b}{e}}=e^{2}\end{cases}$，$ae^{a}=\ln\dfrac{b}{e}e^{\ln\frac{b}{e}}$，

令 $f(x)=xe^{x}$，显然该函数单调递增，即 $f(a)=f(\ln\dfrac{b}{e})$，即 $a=\ln\dfrac{b}{e}$，则 $ab=e^{3}$.

（8）已知 x_0 是函数 $f(x)=x^{2}e^{x-2}+\ln x-2$ 的零点，则 $e^{2-x_0}+\ln x_0=$________.

解析：$x^{2}e^{x-2}+\ln x-2=0\Leftrightarrow x^{2}e^{x-2}=2-\ln x\Leftrightarrow xe^{x}=\dfrac{e^{2}}{x}\ln\dfrac{e^{2}}{x}\Leftrightarrow\ln x+x=\ln(\ln(\dfrac{e^{2}}{x}))+\ln(\dfrac{e^{2}}{x})$，

所以 $\ln(\dfrac{e^{2}}{x})=x$，即 $2-\ln x=x$，或 $e^{2-x}=x$，则 $e^{2-x_0}+\ln x_0=x_0+\ln x_0=2$.

5.已知函数 $f(x)=e^{x}+m\ln x(m\in\mathbf{R})$，若对任意正数 x_1，x_2，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $f(x_1)-f(x_2)>x_1-x_2$ 成立，则实数 m 的取值范围是________.

解析：由 $f(x_1)-f(x_2)>x_1-x_2$ 得，$f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2$，令 $g(x)=f(x)-x$ ，

$\therefore g(x_1)>g(x_2)$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 单调递增，又$\because g(x)=f(x)-x=\mathrm{e}^x+mx-x$，$\therefore g'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{m}{x}-1\geq 0$，在 $(0,\ +\infty)$ 上恒成立，即 $m\geq(1-\mathrm{e}^x)x$ ，

令 $h(x)=(1-\mathrm{e}^x)x$ ，则 $h'(x)=-\mathrm{e}^x(x+1)+1<0$ ，$\therefore h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=0$ (但取不到)．$\therefore$ $m\geq 0$.

6.已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-ax$，$x\in(0,\ +\infty)$，当 $x_2>x_1$ 时，不等式 $\dfrac{f(x_1)}{x_2}-\dfrac{f(x_2)}{x_1}<0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

解析：由 $\dfrac{f(x_1)}{x_2}-\dfrac{f(x_2)}{x_1}<0$ ，得 $x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$ ，令 $g(x)=xf(x)$ ，则 $g(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，又$\because g(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$，

$\therefore g'(x)=\mathrm{e}^x-2ax\geq 0$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上恒成立，即 $a\leq\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x}$ ，

令 $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2x}$ ，则 $h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{2x^2}$ ，令 $h'(x)=0$ ，

则 $h(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

7.函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x-x-\ln x$ 的最小值为________.

解析：$f(x)=x\mathrm{e}^x-x-\ln x=\mathrm{e}^{x+\ln x}-x-\ln x\geq x+\ln x+1-x-\ln x=1$，当且仅当 $x+\ln x=0$ 等号成立．

小试牛刀 04　函数 $f(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x-\ln x}{x+1}$ 的最小值为________.

解析：$f(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x-\ln x}{x+1}=\dfrac{\mathrm{e}^{x+\ln x}-\ln x}{x+1}\geq\dfrac{x+\ln x+1-\ln x}{x+1}=1$，当且仅当 $x+\ln x=0$ 等号成立．

8.已知 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}-\ln x-1$，若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

解析：$f(x)=a\mathrm{e}^{2x}-\ln x-1\geq 0\Leftrightarrow a\geq\dfrac{\ln x+1}{\mathrm{e}^{2x}}$，

由于 $\ln x+1\leq x$，$\mathrm{e}^{2x}\geq 2\mathrm{e}x$，两者都是当且仅当 $x=1$ 等号成立，

则 $\dfrac{\ln x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\geq\dfrac{x}{2\mathrm{e}x}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ ，所以 $a\geq\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

9.已知对任意 $x>0$，不等式 $k(\mathrm{e}^{kx}+1)-(1+\dfrac{1}{x})\ln x>0$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为________.

解析：$k(\mathrm{e}^{kx}+1)-(1+\dfrac{1}{x})\ln x>0\Leftrightarrow kx(\mathrm{e}^{kx}+1)>(1+x)\ln x\Leftrightarrow kx\mathrm{e}^{kx}+kx>x\ln x+x$ ，

即 $kx\mathrm{e}^{kx}+kx>\ln x\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x$.

令 $f(x)=x\mathrm{e}^x+x$ ，则 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上递增，所以 $f(kx)>f(\ln x)$ ，所以 $kx>\ln x$ ，

则 $\therefore k>\dfrac{\ln x}{x}$ ，由导数法易证 $\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ，所以 $k>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

10.已知 $a<0$，不等式 $x^{a+1}e^{x}+a\ln x\geq 0$，对任意的实数 $x>1$ 恒成立，则实数 a 的最小值是________.

解析：$x^{a+1}e^{x}+a\ln x\geq 0\Leftrightarrow xe^{x}\geq \dfrac{-a\ln x}{x^{a}}=x^{-a}\ln x^{-a}$，即 $xe^{x}\geq \ln x^{-a}e^{\ln x^{-a}}$，

令 $f(x)=xe^{x}$，则 $f(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 单调递增，即 $f(x)\geq f(\ln x^{-a})$，即 $x\geq \ln x^{-a}$，$\therefore -a\leq \dfrac{x}{\ln x}$.

令 $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，由导数法知 $g(x)_{\min}=g(e)=e$，$\therefore a\geq -e$.

11.已知函数 $f(x)=2x^{3}\ln x-(m-x)e^{\frac{m}{x}-1}$，当 $x\geq e$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为________.

解析：$f(x)\geq 0\Leftrightarrow 2x^{3}\ln x\geq (m-x)e^{\frac{m}{x}-1}\Leftrightarrow 2x^{2}\ln x\geq (\dfrac{m}{x}-1)e^{\frac{m}{x}-1}\Leftrightarrow x^{2}\ln x^{2}\geq (\dfrac{m}{x}-1)e^{\frac{m}{x}-1}$，

即 $\ln x^{2}e^{\ln x^{2}}\geq (\dfrac{m}{x}-1)e^{\frac{m}{x}-1}$，

令 $g(x)=xe^{x}$，则 $g(x)$ 在 $[e,\ +\infty)$ 单调递增，即 $g(\ln x^{2})\geq g(\dfrac{m}{x}-1)$，

当 $m\leq 0$ 时，$\ln x^{2}e^{\ln x^{2}}\geq (\dfrac{m}{x}-1)e^{\frac{m}{x}-1}$ 恒成立，

当 $m>0$ 时，$\ln x^{2}\geq \dfrac{m}{x}-1\Rightarrow m\leq 2x\ln x+x$，

令 $h(x)=2x\ln x+x$，则 $h'(x)=2\ln x+3>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[e,\ +\infty)$ 上单调递增，$\therefore h(x)_{\min}=h(e)=3e$.

12.若关于 x 的不等式 $xe^{x}+e-a(x+\ln x+1)\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

解析：$xe^{x}+e-a(x+\ln x+1)\geq 0\Leftrightarrow xe^{x}+e\geq a(x+\ln x+1)\Leftrightarrow e^{x+\ln x}+e\geq a(x+\ln x+1)$，

当 $x+\ln x+1\leq 0$ 时，原不等式恒成立，

当 $x+\ln x+1>0$ 时，$a\leq \dfrac{e^{x+\ln x}+e}{x+\ln x+1}$，

由于 $\dfrac{e^{x+\ln x}+e}{x+\ln x+1}\geq \dfrac{e(x+\ln x)+e}{x+\ln x+1}=e$，当且仅当 $x+\ln x=1$ 等号成立，所以 $a\leq e$，故 $0<a\leq e$.