

高三数学一轮复习——概率解答题热点题型 1

【题型一】 马尔科夫链基础模型

【典例分析】

1. 某餐厅供应 1 000 名学生用餐，每星期一有 A、B 两种菜可供选择，调查资料显示星期一选 A 菜的学生中有 20% 在下周一选 B 菜，而选 B 菜的学生中有 30% 在下周一选 A 菜，用 A_n 、 B_n 分别表示在第 n 个星期选 A 菜、B 菜的学生数，试写出 A_n 与 A_{n-1} 的关系及 B_n 与 B_{n-1} 的关系.

2. 小芳、小明两人各拿两颗质地均匀的骰子做游戏，规则如下：若掷出的点数之和为 4 的倍数，则由原投掷人继续投掷；若掷出的点数之和不是 4 的倍数，则由对方接着投掷.

(1) 规定第 1 次从小明开始.

(i) 求前 4 次投掷中小明恰好投掷 2 次的概率；

(ii) 设游戏的前 4 次中，小芳投掷的次数为 X ，求随机变量 X 的分布列与期望.

(2) 若第 1 次从小芳开始，求第 n 次由小芳投掷的概率 P_n .

3. 一袋中有大小、形状相同的 2 个白球和 10 个黑球，从中任取一球. 如果取出白球，则把它放回袋中；如果取出黑球，则该球不再放回，另补一个白球放到袋中. 在重复 n 次这样的操作后，记袋中的白球个数为 X_n .

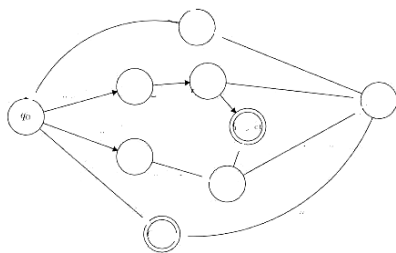
(1) 求 EX_1 ；

(2) 设 $P(X_n = 2 + k) = P_k$ ，求 $P(X_{n+1} = 2 + k) (k = 0, 1, 2, \dots, 10)$ ；

(3) 证明： $EX_{n+1} = \frac{11}{12}EX_n + 1$.

基本规律

1.马尔科夫链： 在 $n+1$ 时刻的状态，只跟第 n 刻的状态有关，与 $n-1, n-2, n-3, \dots$ 等时刻状态是“没有任何关系的”。



【题型二】 马尔科夫链之传球模型

4.现有甲、乙、丙、丁四个人相互之间传球，从甲开始传球，甲等可能地把球传给乙、丙、丁中的任何一个人，依次类推。

(1) 通过三次传球，球经过乙的次数为 X ，求 X 的分布列与期望；

(2) 设经过 n 次传球后，球落在甲手上的概率为 a_n ，

①求 a_1, a_2 ；

②求 a_n ，并简要解释随着传球次数的增多，球落在甲、乙、丙、丁每个人手上的概率相等。

5. (I) 为推广足球运动，某学校成立了足球社团，由于报名人数较多，需对报名者进行“点球测试”来决定是否录取，规则如下：踢点球一次，若踢进，则被录取；若没踢进，则继续踢，直到踢进为止，但是每人最多踢点球 3 次。足球运动被誉为“世界第一运动”，深受青少年的喜爱。

下表是某同学 6 次的训练数据，以这 150 个点球中的进球频率代表其单次点球踢进的概率。为加入足球社团，该同学进行了“点球测试”，每次点球是否踢进相互独立，他在测试中所踢的点球次数记为 ξ ，求 ξ 的分布列及数学期望；

点球数	20	30	30	25	20	25
进球数	10	17	20	16	13	14

(II) 社团中的甲、乙、丙三名成员将进行传球训练，从甲开始随机地将球传给其他两人中的任意一人，接球者再随机地将球传给其他两人中的任意一人，如此不停地传下去，且假定每次传球都能被接到。记开始传球的人为第 1 次触球者，第 n 次触球者是甲的概率记为 P_n ，即 $P_1 = 1$ 。

(i) 求 P_2, P_3 (直接写出结果即可)；

(ii) 证明：数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ 为等比数列，并判断第 19 次还是第 20 次触球者是甲的概率大。

6.中国女排，曾经十度成为世界冠军，铸就了响彻中华的女排精神.女排精神的具体表现为：扎扎实实，勤学苦练，无所畏惧，顽强拼搏，同甘共苦，团结战斗，刻苦钻研，勇攀高峰.女排精神对各行各业的劳动者起到了激励、感召和促进作用，给予全国人民巨大的鼓舞.

(1) 看过中国女排的纪录片后，某大学掀起“学习女排精神，塑造健康体魄”的年度主题活动，一段时间后，学生的身体素质明显提高，将该大学近 5 个月体重超重的人数进行统计，得到如下表格：

月份 x	1	2	3	4	5
体重超重的人数 y	640	540	420	300	200

若该大学体重超重人数 y 与月份变量 x (月份变量 x 依次为 1, 2, 3, 4, 5...) 具有线性相关关系，请预测从第几月份开始该大学体重超重的人数降至 10 人以下？

(2) 在某次排球训练课上，球恰由 A 队员控制，此后排球仅在 A 队员、B 队员和 C 队员三人中传递，已知每当球由 A 队员控制时，传给 B 队员的概率为 $\frac{1}{2}$ ，传给 C 队员的概率为 $\frac{1}{2}$ ；每当球由 B 队员控制时，传给 A 队员的概率为 $\frac{2}{3}$ ，传给 C 队员的概率为 $\frac{1}{3}$ ；每当球由 C 队员控制时，传给 A 队员的概率为 $\frac{2}{3}$ ，传给 B 队员的概率为 $\frac{1}{3}$. 记 a_n, b_n, c_n 为经过 n 次传球后球分别恰由 A 队员、B 队员、C 队员控制的概率.

(i) 若 $n=3$ ，B 队员控制球的次数为 X ，求 EX ；

(ii) 若 $a_n = \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{2}{3}c_{n-1}$ ， $b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1}$ ， $c_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1}$ ， $n \geq 2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，证明： $\left\{a_n - \frac{2}{5}\right\}$ 为等比数列，并判断经过 200 次传球后 A 队员控制球的概率与 $\frac{2}{5}$ 的大小.

附 1：回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2};$$

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

附 2：参考数据： $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 5180$ ， $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$.

7.排球队的 6 名队员进行传球训练，每位队员把球传给其他 5 人的概率相等，由甲开始传球

(1) 求前 3 次传球中，乙恰有 1 次接到球的概率；

(2) 设第 n 次传球后球在乙手中的概率为 P_n ，求 P_n .

基本规律

传球模式是经典的马尔科夫链应用。注意寻找里边的数列递关系。

【题型三】 游走模式

8.质点在 x 轴上从原点 O 出发向右运动，每次平移一个单位或两个单位，且移动一个单位的概率为 $\frac{2}{3}$ ，移动 2 个单位的概率为 $\frac{1}{3}$ ，设质点运动到点 $n,0$ 的概率为 P_n 。

(I) 求 P_1 和 P_2 ；(II) 用 P_{n-1}, P_{n-2} 表示 P_n ，并证明 $\{P_n - P_{n-1}\}$ 是等比数列； (III) 求 P_n 。

9.如今我们的互联网生活日益丰富，除了可以很方便地网购，网络外卖也开始成为不少人日常生活中重要的一部分，其中大学生更是频频使用网络外卖服务.A 市教育主管部门为掌握网络外卖在该市各大学的发展情况，在某月从该市大学生中随机调查了100人，并将这100人在本月的网络外卖的消费金额制成如下频数分布表（已知每人每月网络外卖消费金额不超过3000元）：

消费金额（单位：百元）	[0,5]	(5,10]	(10,15]	(15,20]	(20,25]	(25,30]
频数	20	35	25	10	5	5

(1) 由频数分布表可以认为，该市大学生网络外卖消费金额 Z （单位：元）近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 近似为样本平均数 \bar{x} （每组数据取区间的中点值， $\sigma = 660$ ）。现从该市任取20名大学生，记其中网络外卖消费金额恰在390元至2370元之间的人数为 X ，求 X 的数学期望；

(2) A 市某大学后勤部为鼓励大学生在食堂消费，特地给参与本次问卷调查的大学生每人发放价值100元的饭卡，并推出一档“勇闯关，送大奖”的活动.规则是：在某张方格图上标有第0格、第1格、第2格、...、第60格共61个方格.棋子开始在第0格，然后掷一枚均匀的硬币（已知硬币出现正、反面的概率都是 $\frac{1}{2}$ ，其中 $P_0 = 1$ ），若掷出正面，将棋子向前移动一格（从 k 到 $k+1$ ），若掷出反面，则将棋子向前移动两格（从 k 到 $k+2$ ）。重复多次，若这枚棋子最终停在第59格，则认为“闯关成功”，并赠送500元充值饭卡；若这枚棋子最终停在第60格，则认为“闯关失败”，不再获得其他奖励，活动结束。

①设棋子移到第 n 格的概率为 P_n ，求证：当 $1 \leq n \leq 59$ 时， $\{P_n - P_{n-1}\}$ 是等比数列；

②若某大学生参与这档“闯关游戏”，试比较该大学生闯关成功与闯关失败的概率大小，并说明理由。

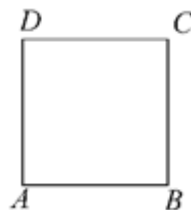
参考数据：若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) = \frac{5}{6}$ ， $P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$ ， $P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$ 。

高三数学一轮复习——概率解答题热点题型 2

10. 如图所示, 质点 P 在正方形 $ABCD$ 的四个顶点上按逆时针方向前进. 现在投掷一个质地均匀、每个面上标有一个数字的正方体玩具, 它的六个面上分别写有两个 1、两个 2、两个 3 一共六个数字. 质点 P 从 A 点出发, 规则如下: 当正方体上底面出现的数字是 1, 质点 P 前进一步(如由 A 到 B); 当正方体上底面出现的数字是 2, 质点 P 前进两步(如由 A 到 C); 当正方体上底面出现的数字是 3, 质点 P 前进三步(如由 A 到 D). 在质点 P 转一圈之前连续投掷, 若超过一圈, 则投掷终止.

(1) 求质点 P 恰好返回到 A 点的概率;

(2) 在质点 P 转一圈恰能返回到 A 点的所有结果中, 用随机变量 ξ 表示点 P 恰能返回到 A 点的投掷次数, 求 ξ 的数学期望.



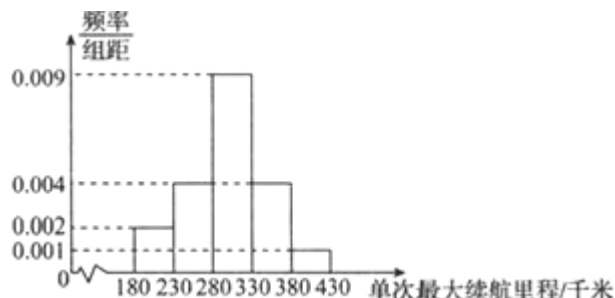
11. 2019 年 7 月 1 日至 3 日, 世界新能源汽车大会在海南博鳌召开, 大会着眼于全球汽车产业的转型升级和生态环境的持续改善. 某汽车公司顺应时代潮流, 最新研发了一款新能源汽车, 并在出厂前对 100 辆汽车进行了单次最大续航里程(理论上是指新能源汽车所装载的燃料或电池所能提供给车行驶的最远里程)的测试. 现对测试数据进行分析, 得到如下的频率分布直方图:

(1) 估计这 100 辆汽车的单次最大续航里程的平均值 \bar{x} (同一组中的数据用该组区间的中点值代表).

(2) 根据大量的汽车测试数据, 可以认为这款汽车的单次最大续航里程 X 近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 经计算第(1)问中样本标准差 s 的近似值为 50. 用样本平均数 \bar{x} 作为 μ 的近似值, 用样本标准差 s 作为 σ 的估计值, 现任取一辆汽车, 求它的单次最大续航里程恰在 250 千米到 400 千米之间的概率.

参考数据: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

(3) 某汽车销售公司为推广此款新能源汽车, 现面向意向客户推出“玩游戏, 送大奖”活动, 客户可根据抛掷硬币的结果, 操控微型遥控车在方格图上行进, 若遥控车最终停在“胜利大本营”, 则可获得购车优惠券. 已知硬币出现正、反面的概率都是 $\frac{1}{2}$, 方格图上标有第 0 格、第 1 格、第 2 格、...、第 50 格. 遥控车开始在第 0 格, 客户每掷一次硬币, 遥控车向前移动一格, 若掷出正面, 遥控车向前移动一格(从 k 到 $k+1$), 若掷出反面, 遥控车向前移动两格(从 k 到 $k+2$), 直到遥控车移到第 49 格(胜利大本营)或第 50 格(失败大本营)时, 游戏结束, 设遥控车移到第 n 格的概率为 P_n , 试说明 $\{P_n - P_{n-1}\}$ 是等比数列, 并解释此方案能否成功吸引顾客购买该款新能源汽车.



【题型四】 药物试验模式

12. 为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只更施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β , 一轮试验中甲药的得分记为 X .

(1) 求 X 的分布列;

(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, $p_i (i=0,1,\cdots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0=0$, $p_8=1$, $p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1} (i=1,2,\cdots,7)$, 其中 $a=P(X=-1)$, $b=P(X=0)$, $c=P(X=1)$. 假设 $\alpha=0.5$, $\beta=0.8$.

(i) 证明: $\{p_{i+1} - p_i\} (i=0,1,2,\cdots,7)$ 为等比数列;

(ii) 求 p_4 , 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

13. 冠状病毒是一个大型病毒家族, 已知可引起感冒以及中东呼吸综合征(MERS)和严重急性呼吸综合征(SARS)等较严重疾病. 而今年出现在湖北武汉的新型冠状病毒(nCoV)是以前从未在人体中发现的冠状病毒新毒株. 人感染了新型冠状病毒后常见体征有呼吸道症状、发热、咳嗽、气促和呼吸困难等. 在较严重病例中, 感染可导致肺炎、严重急性呼吸综合征、肾衰竭, 甚至死亡. 某医院为筛查冠状病毒, 需要检验血液是否为阳性, 现有 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 份血液样本, 有以下两种检验方式:

方式一: 逐份检验, 则需要检验 n 次.

方式二: 混合检验, 将其中 $k (k \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } k \geq 2)$ 份血液样本分别取样混合在一起检验. 若检验结果为阴性, 这 k 份的血液全为阴性, 因而这 k 份血液样本只要检验一次就够了, 如果检验结果为阳性, 为了明确这 k 份血液究竟哪几份为阳性, 就要对这 k 份再逐份检验, 此时这 k 份血液的检验次数总共为 $k+1$.

假设在接受检验的血液样本中, 每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的, 且每份样本是阳性结果的概率为 $p (0 < p < 1)$. 现取其中 $k (k \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } k \geq 2)$ 份血液样本, 记采用逐份检验, 方式, 样本需要检验的总次数为 ξ_1 , 采用混合检验方式, 样本需要检验的总次数为 ξ_2 .

(1) 若 $E(\xi_1) = E(\xi_2)$, 试求 p 关于 k 的函数关系式 $p=f(k)$.

(2) 若 p 与干扰素计量 x_n 相关, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots (n \geq 2)$ 是不同的正实数, 满足 $x_1=1$ 且 $x_{n+1}^2 - x_n^2 = (e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{3}})x_n x_{n+1}$.

(i) 求证: 数列 $\{x_n\}$ 为等比数列;

(ii) 当 $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x_4}}$ 时采用混合检验方式可以使得样本需要检验的总次数的期望值比逐份检验的总次数的期望值更少, 求 k 的最大值.

13.2019 年 12 月以来,湖北武汉市发现多起病毒性肺炎病例,并迅速在全国范围内开始传播,专家组认为,本次病毒性肺炎病例的病原体初步判定为新型冠状病毒,该病毒存在人与人之间的传染,可以通过与患者的密切接触进行传染.我们把与患者有过密切接触的人群称为密切接触者,每位密切接触者被感染后即被称为患者.已知每位密切接触者在接触一个患者后被感染的概率为 p ($0 < p < 1$),某位患者在隔离之前,每天有 a 位密切接触者,其中被感染的人数为 X ($0 \leq X \leq a$),假设每位密切接触者不再接触其他患者.

(1) 求一天内被感染人数为 X 的概率 $P(X)$ 与 a 、 p 的关系式和 X 的数学期望;

(2) 该病毒在进入人体后有 14 天的潜伏期,在这 14 天的潜伏期内患者无任何症状,为病毒传播的最佳时间,设每位患者在被感染后的第二天又有 a 位密切接触者,从某一名患者被感染,按第 1 天算起,第 n 天新增患者的数学期望记为 E_n ($n \geq 2$).

(i) 求数列 $\{E_n\}$ 的通项公式,并证明数列 $\{E_n\}$ 为等比数列;

(ii) 若戴口罩能降低每位密切接触者患病概率,降低后的患病概率 $p' = \ln(1+p) - \frac{2}{3}p$,当 p' 取最大值时,计算此时 p' 所对应的 E_6' 值和此时 p 对应的 E_6 值,根据计算结果说明戴口罩的必要性.(取 $a=10$)

(结果保留整数,参考数据: $\ln 5 \approx 1.6, \ln 3 \approx 1.1, \ln 2 \approx 0.7, \frac{1}{3} \approx 0.3, \frac{2}{3} \approx 0.7$)

14.现有一批疫苗试剂,拟进入动物试验阶段,将 1000 只动物平均分成 100 组,任选一组进行试验.第一轮注射,对该组的每只动物都注射一次,若检验出该组中有 9 只或 10 只动物产生抗体,说明疫苗有效,试验终止;否则对没有产生抗体的动物进行第二轮注射,再次检验.如果被二次注射的动物都产生抗体,说明疫苗有效,否则需要改进疫苗.设每只动物是否产生抗体相互独立,两次注射疫苗互不影响,且产生抗体的概率均为 p ($0 < p < 1$).

(1) 求该组试验只需第一轮注射的概率(用含 p 的多项式表示);

(2) 记该组动物需要注射次数 X 的数学期望为 $E(X)$,求证: $10 < E(X) < 10(2-p)$.

【题型五】 商场促销

15. 垃圾分类，是指按一定规定或标准将垃圾分类储存、分类投放和分类搬运，从而转变成公共资源的一系列活动的总称。分类的目的是提高垃圾的资源价值和经济价值，力争物尽其用。2019年6月25日，生活垃圾分类制度入法。到2020年底，先行先试的46个重点城市，要基本建成垃圾分类处理系统；其他地级城市实现公共机构生活垃圾分类全覆盖。某机构欲组建一个有关“垃圾分类”相关事宜的项目组，对各个地区“垃圾分类”的处理模式进行相关报道。该机构从600名员工中进行筛选，筛选方法：每位员工测试 A ， B ， C 三项工作，3项测试中至少2项测试“不合格”的员工，将被认定为“暂定”，有且只有一项测试“不合格”的员工将再测试 A ， B 两项，如果这两项中有1项以上（含1项）测试“不合格”，将也被认定为“暂定”，每位员工测试 A ， B ， C 三项工作相互独立，每一项测试“不合格”的概率均为 p ($0 < p < 1$)。 (1) 记某位员工被认定为“暂定”的概率为 $f(p)$ ，求 $f(p)$ ； (2) 每位员工不需要重新测试的费用为90元，需要重新测试的总费用为150元，除测试费用外，其他费用总计为1万元，若该机构的预算为8万元，且该600名员工全部参与测试，问上述方案是否会超过预算？请说明理由。

高三数学一轮复习——概率解答题热点题型 3

16. 某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如下表：

汽车型号	I	II	III	IV	V
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.3	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值。

假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等。

(1) 从所有的回访客户中随机抽取 1 人，求这个客户满意的概率；

(2) 从 I 型号和 V 型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列和期望；

(3) 用 “ $\eta_1=1$ ”，“ $\eta_2=1$ ”，“ $\eta_3=1$ ”，“ $\eta_4=1$ ”，“ $\eta_5=1$ ” 分别表示 I, II, III, IV, V 型号汽车让客户满意，“ $\eta_1=0$ ”，“ $\eta_2=0$ ”，“ $\eta_3=0$ ”，“ $\eta_4=0$ ”，“ $\eta_5=0$ ” 分别表示 I, II, III, IV, V 型号汽车让客户不满意. 写出方差 $D\eta_1, D\eta_2, D\eta_3, D\eta_4, D\eta_5$ 的大小关系.

17. 据长期统计分析，某货物每天的需求量 $r (r \in N^*)$ 在 17 与 26 之间，日需求量 r （件）的频率 $P(r)$ 分布如下表所示：

需求量 r	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
频率 $P(r)$	0.12	0.18	0.23	0.13	0.10	0.08	0.05	0.04	0.04	0.03

已知其成本为每件 5 元，售价为每件 10 元. 若供大于求，则每件需降价处理，处理价每件 2 元. 假设每天的进货量必需固定.

(1) 设每天的进货量为 $X_n (X_n = 16 + n, n = 1, 2, \dots, 10)$ ，视日需求量 $r_i (r_i = 16 + i, i = 1, 2, \dots, 10)$ 的频率为概率 $P_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ ，求在每天进货量为 X_n 的条件下，日销售量 Z_n 的期望值 $E(Z_n)$ （用 P_i 表示）；

(2) 在 (1) 的条件下，写出 $E(Z_n)$ 和 $E(Z_{n+1})$ 的关系式，并判断 X_n 为何值时，日利润的均值最大？

【题型六】 证明概率、期望等不等式

18. 某校数学兴趣小组由水平相当的 n 位同学组成, 他们的学号依次为 $1, 2, 3, \dots, n$. 辅导老师安排一个挑战数学填空题的活动, 活动中有两个固定的题, 同学们对这两个题轮流作答, 每位同学在四分钟内答对第一题及四分钟内答对第二题的概率都为 $\frac{1}{2}$, 每个同学的答题过程都是相互独立的挑战的具体规则如下:

- ①挑战的同学先做第一题, 第一题做对才有机会做第二题;
- ②挑战按学号由小到大的顺序依次进行, 第 1 号同学开始第 1 轮挑战;
- ③若第 $i(i=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 号同学在四分钟内未答对第一题, 则认为第 i 轮挑战失败, 由第 $i+1$ 号同学继续挑战;
- ④若第 $i(i=1, 2, 3, \dots, n-1)$ 号同学在四分钟内答对了第一题, 满四分钟后, 辅导老师安排该生答第二题, 若该生在四分钟内又答对第二题, 则认为挑战成功挑战在第 i 轮结束; 若该生在四分钟内未答对第二题, 则也认为第 i 轮挑战失败, 由第 $i+1$ 号同学继续挑战;
- ⑤若挑战进行到了第 n 轮, 则不管第 n 号同学答对多少题, 下轮不再安排同学挑战.

令随机变量 X_n 表示 n 名挑战者在第 $X_n(X_n=1, 2, 3, \dots, n)$ 轮结束.

(1) 求随机变量 X_4 的分布列;

(2) 若把挑战规则①去掉, 换成规则⑥: 挑战的同学先做第一题, 若有同学在四分钟内答对了第一题, 以后挑战的同学不做第一题, 直接从第二题开始作答.

令随机变量 Y_n 表示 n 名挑战者在第 $Y_n(Y_n=1, 2, 3, \dots, n)$ 轮结束.

(i) 求随机变量 $Y_n(n \in N^*, n \geq 2)$ 的分布列;

(ii) 证明 $E(Y_2) < E(Y_3) < E(Y_4) < E(Y_5) < \dots < E(Y_n) < \dots < 3$.

19. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$.

(1) 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$;

(2) 从编号为 1~100 的 100 张卡片中每次随机抽取一张, 然后放回, 用这种方式连续抽取 20 张, 设抽取的 20 个号码

互不相同的概率为 p . 证明: $p < \left(\frac{9}{10}\right)^{19} < \frac{1}{e^2}$.

20. 口袋中有大小、形状、质地相同的两个白球和三个黑球. 现有一抽奖游戏规则如下: 抽奖者每次有放回的从口袋中随机取出一个球, 最多取球 $2n+1 (n \in N^*)$ 次. 若取出白球的累计次数达到 $n+1$ 时, 则终止取球且获奖, 其它情况均不获奖. 记获奖概率为 P_n .

(1) 求 P_1 ;

(2) 证明: $P_{n+1} < P_n$.

21. 一疫苗生产单位通过验血方法检验某种疫苗产生抗体情况, 需要检验血液是否有抗体现有 $n (n \in N^*)$ 份血液样本每份样本取到的可能性均等有以下两种检验方式: (1) 逐份检验, 则需要检验 n 次; (2) 混合检验将其中 $k (k \in N^*$ 且 $k \geq 2)$ 份血液样本分别取样混合在一起检验若检验结果无抗体, 则这 k 份的血液全无抗体, 因而这 k 份血液样本只需检验一次就够了, 若检验结果有抗体, 为了明确这 k 份血液究竟哪几份有抗体就要对这 k 份再逐份检验, 此时这 k 份血液的检验总次数为 $k+1$ 次假设在接受检验的血液样本中, 每份样本的检验结果有无抗体都是相互独立的, 且每份样本有抗体的概率均为 $p (0 < p < 1)$.

(1) 假设有 5 份血液样本, 其中只有 2 份血液样本有抗体, 若采用逐份检验方式, 求恰好经过 3 次检验就能把有抗体的血液样本全部检验出来的概率;

(2) 现取其中 $k (k \in N^*$ 且 $k \geq 2)$ 份血液样本, 记采用逐份检验方式, 样本需要检验的总次数为 ξ_1 , 采用混合检验方式样本需要检验的总次数为 ξ_2 . 若 $E(\xi_1) = E(\xi_2)$, 求 p 关于 k 的函数关系式 $p = f(k)$, 并证明 $p < 1 - e^{-\frac{1}{e}}$.

【题型七】摸球与射击模型

22. 设 n 是给定的正整数 ($n > 2$), 现有 n 个外表相同的袋子, 里面均装有 n 个除颜色外其他无区别的小球, 第 $k (k = 1, 2, 3, \dots, n)$ 个袋中有 k 个红球, $n-k$ 个白球. 现将这些袋子混合后, 任选其中一个袋子, 并且从中连续取出三个球 (每个取后不放回).

(1) 若 $n=4$, 假设已知选中的恰为第 2 个袋子, 求第三次取出为白球的概率;

(2) 若 $n=4$, 求第三次取出为白球的概率;

(3) 对于任意的正整数 $n (n > 2)$, 求第三次取出为白球的概率.

23.射击是使用某种特定型号的枪支对各种预先设置的目标进行射击，以命中精确度计算成绩的一项体育运动.射击运动不仅能锻炼身体，而且可以培养细致、沉着、坚毅等优良品质，有益于身心健康.为了度过愉快的假期，感受体育运动的美好，法外狂徒张三来到私人靶场体验射击运动.

(1) 已知用于射击打靶的某型号步枪的弹夹中一共有 $k(k \in \mathbb{N}^*)$ 发子弹，假设张三每次打靶的命中率均为 $p(0 < p < 1)$ ，靶场主规定：一旦出现子弹脱靶或者子弹打光耗尽的现象便立刻停止射击.记标靶上的子弹数量为随机变量 X ，求 X 的分布列和数学期望.

(2) 张三在休息之余用手机逛B站刷到了著名电视剧《津门飞鹰》中的经典桥段：中国队长燕双鹰和三合会何五姑玩起了俄罗斯轮盘.这让张三不由得想起了半人半鬼，神枪第一的那句家喻户晓的神话“我赌你的枪里没有子弹”.由此，在接下来的射击体验中，张三利用自己的人脉关系想办法找人更换了一把型号为M1917，弹容为6发的左轮手枪，弹巢中有 m 发实弹，其余均为空包弹.现规定：每次射击后，都需要在下一次射击之前填充一发空包弹.假设每次射击相互独立且均随机.在进行 $n(n \in \mathbb{N})$ 次射击后，记弹巢中空包弹的发数 X_n .

(i) 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时，探究数学期望 $E(X_n)$ 和 $E(X_{n-1})$ 之间的关系；

(ii) 若无论 m 取何值，当射击次数达到一定程度后都可近似认为枪中没有实弹（以弹巢中实弹的发数的数学期望为决策依据，当弹巢中实弹的发数的数学期望 < 1 时可近似认为枪中没有实弹），求该种情况下最小的射击次数 n_0 .

（参考数据： $\lg 2 \approx 0.301$ 、 $\lg 3 \approx 0.477$ ）

24.一个袋子中装有 n 个红球($n \geq 5, n \in \mathbb{N}$)和5个白球，一次摸奖是从袋中同时摸两个球，两个球颜色不同则为中奖.

(1) 试用 n 表示一次摸奖就中奖的概率；

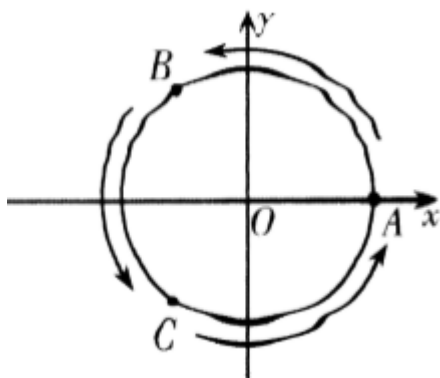
(2) 若 $n = 5$ ，求三次摸奖（每次摸奖后放回）恰有一次中奖的概率；

(3) 记三次摸奖（每次摸奖后放回）恰有一次中奖的概率为 P ，当 n 取多少时， P 最大？

高三数学一轮复习——概率解答题热点题型 3

强化训练：

1. 如图，直角坐标系中，圆的方程为 $x^2 + y^2 = 1$ ， $A(1, 0)$ ， $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为圆上三个定点，某同学从 A 点开始，用掷骰子的方法移动棋子。规定：①每掷一次骰子，把一枚棋子从一个定点沿圆弧移动到相邻下一个定点；②棋子移动的方向由掷骰子决定，若掷出骰子的点数为偶数，则按图中箭头方向移动；若掷出骰子的点数为奇数，则按图中箭头相反的方向移动。设掷骰子 n 次时，棋子移动到 A，B，C 处的概率分别为 $P_n(A)$ ， $P_n(B)$ ， $P_n(C)$ 。例如：掷骰子一次时，棋子移动到 A，B，C 处的概率分别为 $P_1(A) = 0$ ， $P_1(B) = \frac{1}{2}$ ， $P_1(C) = \frac{1}{2}$ 。



- (1) 分别掷骰子二次，三次时，求棋子分别移动到 A，B，C 处的概率；
- (2) 掷骰子 N 次时，若以 X 轴非负半轴为始边，以射线 OA ， OB ， OC 为终边的角的余弦值记为随机变量 X_n ，求 X_4 的分布列和数学期望；
- (3) 记 $P_n(A) = a_n$ ， $P_n(B) = b_n$ ， $P_n(C) = c_n$ ，其中 $a_n + b_n + c_n = 1$ 。证明：数列 $\left\{b_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是等比数列，并求 a_{2020} 。

2. 随着科学技术的飞速发展，网络也已经逐渐融入了人们的日常生活，网购作为一种新的消费方式，因其具有快捷、商品种类齐全、性价比高等优势而深受广大消费者认可。某网购公司统计了近五年在本公司网购的人数，得到如下的相关数据(其中“ $x=1$ ”表示 2015 年，“ $x=2$ ”表示 2016 年，依次类推； y 表示人数)：

x	1	2	3	4	5
y (万人)	20	50	100	150	180

- (1) 试根据表中的数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程，并预测到哪一年该公司的网购人数能超过 300 万人；
- (2) 该公司为了吸引网购者，特别推出“玩网络游戏，送免费购物券”活动，网购者可根据抛掷骰子的结果，操控微型遥控车在方格图上行进。若遥控车最终停在“胜利大本营”，则网购者可获得免费购物券 500 元；若遥控车最终停在“失败大本营”，则网购者可获得免费购物券 200 元。已知骰子出现奇数与偶数的概率都是 $\frac{1}{2}$ ，方格图上标有第 0 格、第 1 格、第 2 格、...、第 20 格。遥控车开始在第 0 格，网购者每抛掷一次骰子，遥控车向前移动一次。若掷出奇数，遥控车向前移动一格(从 k 到 $k+1$)；若掷出偶数，遥控车向前移动两格(从 k 到 $k+2$)，直到遥控车移到第 19 格(胜利大本营)或第 20 格(失败大本营)时，游戏结束。设遥控车移到第 n ($1 \leq n \leq 19$) 格的概率为 P_n ，试证明 $\{P_n - P_{n-1}\}$ 是等比数列，并求网购者参与游戏一次获得免费购物券金额的期望值。

附：在线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中， $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 。

3.新冠抗疫期间,某大学应用数学专业的学生希望通过将所学的知识应用新冠抗疫,决定应用数学实验的方式探索新冠的传染和防控.实验设计如下:在不透明的小盒中放有大小质地相同的8个黑球和2个红球,从中随机取一球,若取出黑球,则放回小盒中,不作任何改变;若取出红球,则黑球替换该红球重新放回小盒中,此模型可以解释为“安全模型”,即若发现一个新冠患者,则移出将其隔离进行诊治.(注:考虑样本容量足够大和治愈率的可能性,用黑球代替红球)

(1)记在第 $n(n \geq 2)$ 次时,刚好抽到第二个红球,试用 n 表示恰好第 n 次抽到第二个红球的概率;

(2)数学实验的方式约定:若抽到第2个红球则停止抽球,且无论第10次是否能够抽到红球或第二个红球,当进行到第10次时,即停止抽球;记停止抽球时已抽球总次数为 X ,求 X 的数学期望.(精确到小数点后1位)

参考数据: $\sum_{k=2}^9 \left(\left(\frac{9}{10} \right)^{k-1} - \left(\frac{4}{5} \right)^{k-1} \right) \approx 1.80$, $\sum_{k=2}^{10} \left(\left(\frac{9}{10} \right)^{k-1} - \left(\frac{4}{5} \right)^{k-1} \right) \approx 2.05$,

$\sum_{k=2}^9 k \left(\left(\frac{9}{10} \right)^{k-1} - \left(\frac{4}{5} \right)^{k-1} \right) \approx 10.79$, $\sum_{k=2}^{10} k \left(\left(\frac{9}{10} \right)^{k-1} - \left(\frac{4}{5} \right)^{k-1} \right) \approx 13.32$.

4.在孟德尔遗传理论中,称遗传性状依赖的特定携带者为遗传因子,遗传因子总是成对出现,例如,豌豆携带这样一对遗传因子: A 使之开红花, a 使之开白花,两个因子的相互组合可以构成三种不同的遗传性状: AA 为开红花, Aa 和 aA 一样不加区分为开粉色花, aa 为开白色花,生物在繁衍后代的过程中,后代的每一对遗传因子都包含一个父本的遗传因子和一个母本的遗传因子,而因为生殖细胞是由分裂过程产生的,每一个上一代的遗传因子以 $\frac{1}{2}$ 的概率传给下一代,而且各代的遗传过程都是相互独立的,可以把第 n 代的遗传设想为第 n 次试验的结果,每一次试验就如同抛一枚均匀的硬币,比如对具有性状 Aa 的父本来说,如果抛出正面就选择因子 A ,如果抛出反面就选择因子 a ,概率都是 $\frac{1}{2}$,对母本也一样,父本、母本各自随机选择得到的遗传因子再配对形成子代的遗传性状,假设三种遗传性状 AA , Aa (或 aA), aa 在父本和母本中以同样的比例 $u:v:w(u+v+w=1)$ 出现,则在随机杂交试验中,

遗传因子 A 被选中的概率是 $p=u+\frac{v}{2}$,遗传因子 a 被选中的概率是 $q=w+\frac{v}{2}$,称 p 、 q 分别为父本和母本中遗传因子 A 和 a 的频率, $p:q$ 实际上是父本和母本中两个遗传因子的个数之比,基于以上常识回答以下问题:

(1)如果植物的上代父本、母本的遗传性状都是 Aa ,后代遗传性状为 AA , Aa (或 aA), aa 的概率分别是多少?

(2)对某一植物,经过实验观察发现遗传性状 aa 具有重大缺陷,可人工剔除,从而使得父本和母本中仅有遗传性状为 AA , Aa (或 aA)的个体,在进行第一代杂交实验时,假设遗传因子 A 被选中的概率为 p , a 被选中的概率为 q ,其中 p 、 q 为定值且 $p+q=1$,求杂交所得子代的三种遗传性状 AA , Aa (或 aA), aa 所占的比例 u_1 , v_1 , w_1 ;

(3)继续对(2)中的植物进行杂交实验,每次杂交前都需要剔除 aa 的个体.假设得到的第 n 代总体中3种遗传性状 AA , Aa (或 aA), aa 所占的比例分别为: u_n , v_n , $w_n(u_n+v_n+w_n=1)$,设第 n 代遗传因子 A 和 a 的频率分别

为 p_n 和 q_n ,已知有以下公式 $p_n = \frac{u_n + \frac{v_n}{2}}{1 - w_n}$, $q_n = \frac{\frac{v_n}{2}}{1 - w_n}$, $n=1,2,\dots$

(i) 证明 $\left\{ \frac{1}{q_n} \right\}$ 是等差数列;

(ii) 求 u_{n+1} , v_{n+1} , w_{n+1} 的通项公式,如果这种剔除某种遗传性状的随机杂交实验长期进行下去,会有什么现象发生?

5. 已知正三角形 ABC ，某同学从 A 点开始，用掷骰子的方法移动棋子，规定：①每掷一次骰子，把一枚棋子从三角形的一个顶点移动到另一个顶点；②棋子移动的方向由掷骰子决定，若掷出骰子的点数大于 3，则按逆时针方向移动；若掷出骰子的点数不大于 3，则按顺时针方向移动。设掷骰子 n 次时，棋子移动到 A, B, C 处的概率分别为： $P_n(A)$ ， $P_n(B)$ ， $P_n(C)$ ，例如：掷骰子一次时，棋子移动到 A, B, C 处的概率分别为 $P_1(A)=0$ ， $P_1(B)=\frac{1}{2}$ ， $P_1(C)=\frac{1}{2}$

(1) 掷骰子三次时，求棋子分别移动到 A, B, C 处的概率 $P_3(A)$ ， $P_3(B)$ ， $P_3(C)$ ；

(2) 记 $P_n(A)=a_n$ ， $P_n(B)=b_n$ ， $P_n(C)=c_n$ ，其中 $a_n+b_n+c_n=1$ ， $b_n=c_n$ ，求 a_8 。

6. 冠状病毒是一个大型病毒家族，已知可引起感冒以及中东呼吸综合征 (MERS) 和严重急性呼吸综合征 (SARS) 等较严重疾病。而今年出现在湖北武汉的新型冠状病毒 (nCoV) 是以前从未在人体中发现的冠状病毒新毒株。人感染了新型冠状病毒后常见体征有呼吸道症状、发热、咳嗽、气促和呼吸困难等，在较严重病例中，感染可导致肺炎、严重急性呼吸综合征、肾衰竭，甚至死亡。医院为筛查冠状病毒，需要检验血液是否为阳性，现有 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 份血液样本，有以下两种检验方式：

方式一：逐份检验，则需要检验 n 次。

方式二：混合检验，将其中 k ($k \in \mathbb{N}^*$ 且 $k \geq 2$) 份血液样本分别取样混合在一起检验。

若检验结果为阴性，这 k 份的血液全为阴性，因而这 k 份血液样本只要检验一次就够了，如果检验结果为阳性，为了明确这 k 份血液究竟哪几份为阳性，就要对这 k 份再逐份检验，此时这 k 份血液的检验次数总共为 $k+1$ 。假设在接受检验的血液样本中，每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的，且每份样本是阳性结果的概率为 p ($0 < p < 1$)。

(1) 现有 4 份血液样本，其中只有 2 份样本为阳性，若采用逐份检验方式，求恰好经 2 次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率。

(2) 现取其中 k ($k \in \mathbb{N}^*$ 且 $k \geq 2$) 份血液样本，记采用逐份检验方式，样本需要检验的总次数为 ξ_1 ，采用混合检验方式，样本需要检验的总次数为 ξ_2 。

(i) 若 $E\xi_1 = E\xi_2$ ，试求 p 关于 k 的函数关系式 $p = f(k)$ ；

(ii) 若 $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ ，且采用混合检验方式可以使得样本需要检验的总次数的期望值比逐份检验的总次数期望值更少，求 k 的最大值。

参考数据： $\ln 2 \approx 0.6931$ ， $\ln 3 \approx 1.0986$ ， $\ln 5 \approx 1.6094$ 。

7. 2021 年 4 月 23 日是第 26 个“世界读书日”，某校组织“阅百年历程，传精神力量”主题知识竞赛，有基础题、挑战题两类问题。每位参赛同学回答 n 次 ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*$)，每次回答一个问题，若回答正确，则下一个问题从挑战题库中随机抽取；若回答错误，则下一个问题从基础题库中随机抽取。规定每位参赛同学回答的第一个问题从基础题库中抽取，基础题答对一个得 10 分，否则得 0 分；挑战题答对一个得 30 分，否则得 0 分。已知小明能正确回答基础类问题的概率为 $\frac{3}{5}$ ，能正确回答挑战类问题的概率为 $\frac{2}{5}$ ，且每次回答问题是相互独立的。

(1) 记小明前 2 题累计得分为 X ，求 X 的概率分布列和数学期望；

(2) 记第 k 题小明回答正确的概率为 a_k ($k=1, 2, \dots, n$)，证明：当 $k \geq 2$ 时， $a_k = -\frac{1}{5}a_{k-1} + \frac{3}{5}$ ，并求 $\{a_k\}$ 的通项公式。

8.某医院为筛查某种疾病,需要检验血液是否为阳性,现有 $n(n \in N^*)$ 份血液样本,有以下两种检验方式:①逐份检验,需要检验 n 次;②混合检验,将其 $k(k \in N^*$ 且 $k \geq 2)$ 份血液样本分别取样混合在一起检验.若检验结果为阴性,这 k 份的血液全为阴性,因而这 k 份血液样本只要检验一次就够了,如果检验结果为阳性,为了明确这 k 份血液究竟哪几份为阳性,就要对这 k 份再逐份检验,此时这 k 份血液的检验次数总共为 $k+1$ 次.假设在接受检验的血液样本中,每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的,且每份样本是阳性结果的概率为 $p(0 < p < 1)$.

(1)假设有5份血液样本,其中只有2份样本为阳性,若采用逐份检验的方式,求恰好经过3次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率.

(2)现取其中 $k(k \in N^*$ 且 $k \geq 2)$ 份血液样本,记采用逐份检验方式,样本需要检验的总次数为 ξ_1 ,采用混合检验方式,样本需要检验的总次数为 ξ_2 .

①记 $E(\xi)$ 为随机变量 ξ 的数学期望.若 $E(\xi_1)=E(\xi_2)$,运用概率统计的知识,求出 p 关于 k 的函数关系式 $p=f(k)$,并写出定义域;

②若 $p=1-e^{-\frac{1}{4}}$,且采用混合检验方式可以使得样本需要检验的总次数的期望值比逐份检验的总次数期望值更少,求 k 的最大值.

参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 3 \approx 1.0986$, $\ln 5 \approx 1.6094$.

9.随着5G商用进程的不断加快,手机厂商之间围绕5G用户的争夺越来越激烈,5G手机也频频降价飞入寻常百姓家.某科技公司为了打开市场,计划先在公司进行“抽奖免费送5G手机”优惠活动方案的内部测试,测试成功后将在全市进行推广.

(1)公司内部测试的活动方案设置了第 $i(i \in N_+)$ 次抽奖中奖的名额为 $3i+2$,抽中的用户退出活动,同时补充新的用户,补充新用户的名额比上一次中奖用户的名额少2个.若某次抽奖,剩余全部用户均中奖,则活动结束.参加本次内部测试第一次抽奖的有15人,甲、乙均在其中.

①请求甲在第一次中奖和乙在第二次中奖的概率分别是多少?

②请求甲参加抽奖活动次数的分布列和期望?

(2)由于该活动方案在公司内部的测试非常顺利,现将在全市进行推广.报名参加第一次抽奖活动的有20万用户,该公司设置了第 $i(i \in N_+)$ 次抽奖中奖的概率为 $p_i = \frac{9+(-1)^i}{40}$,每次中奖的用户退出活动,同时补充相同人数的新用户,抽奖活动共进行 $2n(n \in N_+)$ 次.已知用户丙参加了第一次抽奖,并在这 $2n$ 次抽奖活动中中奖了,在此条件下,求证:用户丙参加抽奖活动次数的均值小于 $\frac{9}{2}$.