湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——最值问题的常用处理技巧（1）

一、洛必达法则

法则 1　若函数 $f(x)$和 $g(x)$满足下列条件：（1）$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ 及$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$；（2）在点 a 的附近 $f(x)$与 $g(x)$可导且 $g'(x)\neq 0$；（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，那么$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

法则 2　若函数 $f(x)$和 $g(x)$满足下列条件：（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$及$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$；（2）在点 a 的附近 $f(x)$与 $g(x)$可导且 $g'(x)\neq 0$；（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，那么$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

注意：（1）洛必达法则的功能是用于求$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$两种类型极限值，其他结构需转化才能应用；

（2）未定式可以连续应用，已定式不能再用；

（3）可以把定理中的$x\to x_0$换为$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，此时只要把定理中的条件作相应的修改，定理仍然成立.

二、隐零点问题

（1）利用导数解决函数问题常与函数单调性的判断有关，而函数的单调性与其导函数的零点有着紧密的联系．按导函数零点能否求精确解可以分为两类：

①数值上能精确求解的，称之为“显零点”；

②能判断其存在但无法求解或求解麻烦($f'(x)=0$ 是超越形式)，称之为“隐零点”.

（2）隐零点问题处理的基本思路：形式上虚设，运算上代换，数值上估算.

（3）隐零点问题求解步骤：

①用函数零点存在定理判定导函数零点的存在性，列出零点方程 $f'(x_0)=0$，并结合 $f'(x)$的单调性得到零点的取值范围.

②以零点为分界点，说明导函数 $f'(x)$的正负，进而得到 $f(x)$的最值表达式.

③将零点方程适当变形，整体代入最值式子进行化简证明，有时(1)中的零点范围还可以适当缩小.

三、函数结构构造技巧：对数独行侠，指数找朋友，指对常分手．

（1）对数独行侠

①设 $f(x)>0$，$f(x)\ln x+g(x)>0\Leftrightarrow \ln x+\dfrac{g(x)}{f(x)}>0$，则：$(\ln x+\dfrac{g(x)}{f(x)})'=\dfrac{1}{x}+(\dfrac{g(x)}{f(x)})'$，不含超越函数，求解过程简单；

或 $f(x)\ln x+g(x)>0\Leftrightarrow f(x)(\ln x+\dfrac{g(x)}{f(x)})>0$，即将前面部分提出然后研究剩余部分.

②设 $f(x)\neq 0$，$f(x)\ln x+g(x)=0\Leftrightarrow \ln x+\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$，则：$(\ln x+\dfrac{g(x)}{f(x)})'=\dfrac{1}{x}+(\dfrac{g(x)}{f(x)})'$，不含超越函数，求解过程简单；

或 $f(x)\ln x+g(x)=0\Leftrightarrow f(x)(\ln x+\dfrac{g(x)}{f(x)})=0$ 即将前面部分提出然后研究剩余部分.

（2）指数找朋友

①由 $e^x+f(x)>0\Leftrightarrow 1+\dfrac{f(x)}{e^x}>0$，则$(1+\dfrac{f(x)}{e^x})'=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$是一个多项式函数，变形后可大大简化运算.

②由 $e^x+f(x)=0\Leftrightarrow 1+\dfrac{f(x)}{e^x}=0$，则 $(1+\dfrac{f(x)}{e^x})'=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$ 是一个多项式函数，变形后可大大简化运算.

（3）指对常分手 设 $f(x)$ 为可导函数，则有 $(e^x\ln x-f(x))'=e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x}-f'(x)$，

若 $f(x)$ 为非常数函数，求导式子中还是含有 e^x，$\ln x$，导函数的研究麻烦，此时可以采用作商的方法，构造 $\dfrac{e^x\ln x-f(x)}{e^x}=\ln x-\dfrac{f(x)}{e^x}$，从而达到简化运算的目的.

四、例题

1.计算下列各题：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$；（3）$\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$；（4） $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$.

解析 （1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{3x^2-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x-2}{6x}=\dfrac{2}{3}$. 注意：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x-2}{6x}$ 为已定式，不能再用洛必达法则.

（3）不适合条件，需转化：$\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$.

（4）不合条件 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=-\dfrac{1}{2}$.

2.已知函数 $f(x)=x(e^x-1)-ax^2(a\in\mathbf{R})$.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处有极值，求 a 的值.

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)\geq 0$，求实数 a 的取值范围.

（提示：最值分析法（端点效应）、最值分析法（指数找朋友）、参变分离法（洛必达法则））

解析 （1）$f'(x)=e^x-1+xe^x-2ax=(x+1)e^x-2ax-1$，依题意知 $f'(-1)=2a-1=0$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$.

（2）**方法一 （最值分析法（端点效应））**

当 $x>0$ 时，$f(x)\geq 0$，即 $x(e^x-1)-ax^2\geq 0$，即 $e^x-1-ax\geq 0$，

令 $\varphi(x)=e^x-1-ax(x>0)$，则 $\varphi(x)_{\min}\geq 0$，$\varphi'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leq 1$ 时，$\varphi'(x)=e^x-a>0$，$\therefore\varphi(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，$\therefore\varphi(x)>\varphi(0)=0$，

$\therefore a\leq 1$ 满足条件.

②当 $a>1$ 时，若 $0<x<\ln a$，则 $\varphi'(x)<0$，若 $x>\ln a$，则 $\varphi'(x)>0$.

$\therefore\varphi(x)$ 在 $(0，\ln a)$ 上递减，在 $(\ln a，+\infty)$ 上递增，$\therefore\varphi(x)_{\min}=\varphi(\ln a)=a-1-a\ln a\geq 0$.

令 $g(a)=a-1-a\ln a(a>1)$，$\therefore g'(a)=1-(1+\ln a)=-\ln a<0$，

$\therefore g(a)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递减．$\therefore g(a)<g(1)=0$ 与 $g(a)\geq 0$ 矛盾，故 $a>1$ 不满足条件，

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty，1]$.

方法二 （最值分析法（指数找朋友））

当 $x>0$ 时，$f(x)\geq 0$，即 $x(e^x-1)-ax^2\geq 0$，即 $e^x-1-ax\geq 0$，即即$\dfrac{ax+1}{e^x}\leq 1$ 恒成立，

令 $h(x)=\dfrac{ax+1}{e^x}$ $(x>0)$，$\therefore h'(x)=$……．

方法三　（参变分离法（洛必达法则））

当 $x>0$ 时，$f(x)\geq 0$，即 $x(e^x-1)-ax^2\geq 0$，即 $e^x-1-ax\geq 0$，即 $ax\leq e^x-1$ 即 $a\leq\dfrac{e^x-1}{x}$恒成立，

令 $h(x)=\dfrac{e^x-1}{x}(x>0)$，$\therefore h'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$，

令 $k(x)=e^x(x-1)+1(x>0)$，$\therefore k'(x)=e^x\,x>0$，

$\therefore k(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，$\therefore k(x)>k(0)=0$，$\therefore h'(x)>0$，$\therefore h(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增．

又由洛必达法则知，$\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$，$\therefore a\leq 1$．故 a 的取值范围是$(-\infty，1]$．

3.已知函数 $f(x)=ae^x+\sin x+x$，$x\in[0，\pi]$．

（1）证明：当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$有唯一的极大值点；

（2）当$-2<a<0$ 时，证明：$f(x)<\pi$．

（提示：最值分析法（隐零点）、最值分析法（指数找朋友）、最值分析法（变换主元））

解析　（1）当 $a=-1$ 时，$f(x)=x+\sin x-e^x$，$f'(x)=1+\cos x-e^x$，

因为 $x\in[0，\pi]$，所以 $1+\cos x\geq 0$，令 $g(x)=1+\cos x-e^x$，$g'(x)=-e^x-\sin x<0$，

所以 $g(x)$在区间$[0，\pi]$上单调递减．因为 $g(0)=2-1=1>0$，$g(\pi)=-e^{\pi}<0$，

所以存在 $x_0\in(0，\pi)$，使得 $f'(x_0)=0$，且当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_0<x<\pi$ 时，$f'(x)<0$．

所以函数 $f(x)$的单调递增区间是$[0，x_0]$，单调递减区间是$[x_0，\pi]$．

所以函数 $f(x)$存在唯一的极大值点 x_0．

（2）**方法一　（最值分析法（隐零点））**

当$-2<a<0$ 时，令 $h(x)=ae^x+\sin x+x-\pi$，则 $h'(x)=ae^x+\cos x+1$，

令 $k(x)=ae^x+\cos x+1$，则 $k'(x)=ae^x-\sin x<0$，

所以函数 $h'(x)$在区间$[0，\pi]$上单调递减，

因为 $h'(0)=a+2>0$，$h'(\pi)=ae^{\pi}<0$，

所以存在 $t\in(0，\pi)$，使得 $h'(t)=0$，即 $ae^t+\cos t+1=0$，

且当 $0<x<t$ 时，$h'(x)>0$；当 $t<x<\pi$ 时，$h'(x)<0$．

所以函数 $h(x)$在区间$[0，t]$上单调递增，在区间$[t，\pi]$上单调递减．

$h(x)_{\max}=h(t)=ae^t+\sin t+t-\pi$，$t\in(0，\pi)$，

因为 $ae^t+\cos t+1=0$，只需证 $\varphi(t)=\sin t-\cos t+t-1-\pi<0$ 即可，

又 $\varphi'(t)=\cos t+\sin t+1=\sin t+(1+\cos t)>0$，

所以函数 $\varphi(t)$在区间$(0，\pi)$上单调递增，$\varphi(t)<\varphi(\pi)=0$，即 $f(x)<\pi$．

方法二　（最值分析法（指数找朋友））

当$-2<a<0$ 时，$f(x)<\pi$，即 $ae^x+\sin x+x-\pi<0$，即$\dfrac{\sin x+x-\pi}{e^x}<-a$．

……

方法三　（最值分析法（变换主元））

由题意：$f(x)<\pi$（$-2<a<0$），即 $ae^x+\sin x+x<\pi$（$-2<a<0$）

令 $h(a)=e^x a+\sin x+x$，则当 $-2<a<0$ 时，$h(a)$为增函数，

所以函数 $h(a)_{\max}=h(0)=\sin x+x$.

所以只需证明 $\sin x+x<\pi$（$x\in[0,\pi]$）即可．…………

4.已知函数 $f(x)=ax+x\ln x(a\in\mathbf{R})$.

（1）若函数 $f(x)$在区间$[e,+\infty)$上为增函数，求 a 的取值范围；

（2）当 $a=1$ 时，不等式 $k(x-1)<f(x)$在 $x\in(1,+\infty)$上恒成立，求整数 k 的最大值.

（提示：参变分离（隐零点）、最值分析法（隐零点，对数独行侠）、特值锁定参数范围再证明）

解析　（1）∵函数 $f(x)$在区间$[e,+\infty)$上为增函数，∴$f'(x)=a+\ln x+1\geq 0$ 在区间$[e,+\infty)$上恒成立，

∴$a\geq(-\ln x-1)_{\max}=-2$，∴$a\geq-2$．∴$a$ 的取值范围是$[-2,+\infty)$.

（2）**方法一　（参变分离（隐零点，最值分析法））**

当 $a=1$ 时，$f(x)=x+x\ln x$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，不等式 $k(x-1)<f(x)$在 $x\in(1,+\infty)$上恒成立，

∴$k<\left(\dfrac{x+x\ln x}{x-1}\right)_{\min}$.

令 $g(x)=\dfrac{x+x\ln x}{x-1}$，则 $g'(x)=\dfrac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$，

令 $h(x)=x-\ln x-2(x>1)$．则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$，

∴$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，∵$h(3)=1-\ln 3<0$，$h(4)=2-2\ln 2>0$，

∴存在 $x_0\in(3,4)$，使 $h(x_0)=0$，

且当 $1<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，

∴$g(x)$在$(1,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增．令 $h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，即 $\ln x_0=x_0-2$，

∴$g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0(1+\ln x_0)}{x_0-1}=\dfrac{x_0(1+x_0-2)}{x_0-1}=x_0\in(3,4)$.

∴$k<g(x)_{\min}=x_0\in(3,4)$，且 $k\in\mathbf{Z}$，∴$k_{\max}=3$.

方法二　（最值分析法（隐零点，对数独行侠））

当 $a=1$ 时，$f(x)=x+x\ln x$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，不等式 $k(x-1)<f(x)$在 $x\in(1,+\infty)$上恒成立，

即：　$\ln x+\dfrac{k}{x}+1-k>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$上恒成立.

………

方法三　（特值锁定参数范围再证明）

当 $a=1$ 时，$f(x)=x+x\ln x$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，不等式 $k(x-1)<f(x)$在 $x\in(1,+\infty)$上恒成立，

∴当 $x=e$ 时，不等式 $k(x-1)<f(x)$ ∴$k<\dfrac{2e}{e-1}\in(3,4)$，又 $k\in\mathbf{Z}$，∴$k_{\max}=3$.

下面证明当 $k=3$ 时，符合题意即可．………..

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——最值问题的常用处理技巧（2）

5.已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

（1）当 $a=e$ 时，求 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积；

（2）若 $f(x)\geq 1$，求 a 的取值范围.

（提示：最值分析法（隐零点，对数独行侠）、指对分手（同构））

解析　（1）当 $a=e$ 时，$f(x)=e^x-\ln x+1$，$\therefore f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，$\therefore f'(1)=e-1$.

$\because f(1)=e+1$，$\therefore$切点为$(1，1+e)$，$\therefore$切线为 $y-e-1=(e-1)(x-1)$，即 $y=(e-1)x+2$，

$\therefore$切线与两坐标轴的交点坐标分别为$(0，2)$，$\left(\dfrac{-2}{e-1}，0\right)$，$\therefore$所求面积为$\dfrac{1}{2}\times 2\times\left|\dfrac{-2}{e-1}\right|=\dfrac{2}{e-1}$.

（2）**方法一**　（最值分析法（隐零点，对数独行侠））

$\because f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，$\therefore f'(x)=ae^{x-1}-\dfrac{1}{x}$，且 $a>0$.

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=ae^{x-1}+\dfrac{1}{x^2}>0$，$\therefore g(x)$在$(0，+\infty)$上增，即 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上递增

当 $a=1$ 时，$f'(1)=0$，则 $f(x)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=1$，$\therefore f(x)\geq 1$ 成立；

当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{a}<1$，$\therefore e^{\frac{1}{a}-1}<1$，$\therefore f'\left(\dfrac{1}{a}\right)f'(1)=a(e^{\frac{1}{a}-1}-1)(a-1)<0$，

$\therefore$存在唯一 $x_0>0$，使得 $f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\dfrac{1}{x_0}=0$，$\therefore ae^{x_0-1}=\dfrac{1}{x_0}$，$\therefore \ln a+x_0-1=-\ln x_0$，

且当 $x\in(0，x_0)$时 $f'(x)<0$，当 $x\in(x_0，+\infty)$时 $f'(x)>0$，

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=\cdots\cdots=\dfrac{1}{x_0}+\ln a+x_0-1+\ln a\geq 2\ln a-1+2\sqrt{\dfrac{1}{x_0}\cdot x_0}=2\ln a+1>1$，

$\therefore f(x)>1$，$\therefore f(x)\geq 1$ 恒成立；

当 $0<a<1$ 时，$f(1)=a+\ln a<a<1$，$\therefore f(1)<1$，$f(x)\geq 1$ 不恒成立.

综上所述，a 的取值范围是$[1，+\infty)$.

方法二　（指对分手（同构））

$\because f(x)=ae^{x-1}-\ln x+f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a=e^{\ln a+x-1}-\ln x+\ln a\geq 1$

等价于 $e^{\ln a+x-1}+\ln a+x-1\geq\ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$，

令 $g(x)=e^x+x$，上述不等式等价于 $g(\ln a+x-1)\geq g(\ln x)$，

又显然 $g(x)$为单调递增函数，$\therefore$又等价于 $\ln a+x-1\geq\ln x$，即 $\ln a\geq\ln x-x+1$，

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

在$(0，1)$上 $h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；在$(1，+\infty)$上 $h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=0$，$\ln a\geq 0$，即 $a\geq 1$，$\therefore a$ 的取值范围是$[1，+\infty)$.

6.设函数 $f(x)=ae^{x}\ln x+\dfrac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线为 $y=e(x-1)+2$.

（1）求 a，b；　　　　（2）证明：$f(x)>1$.（**提示：指对分手（凹凸反转）**）

解析　（1）$f'(x)=ae^{x}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{be^{x-1}(x-1)}{x^{2}}(x>0)$，

由于直线 $y=e(x-1)+2$ 的斜率为 e，图象过点(1，2)，

所以$\begin{cases}f(1)=2，\\ f'(1)=e，\end{cases}$ 即$\begin{cases}b=2，\\ ae=e，\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1，\\ b=2.\end{cases}$

（2）**方法一　（指对分手（凹凸反转））**

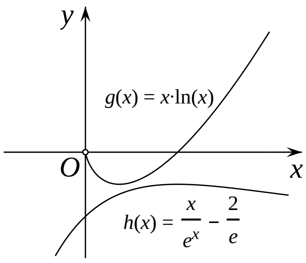
由（1）知 $f(x)=e^{x}\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}(x>0)$，从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$.

构造函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$，

所以当 $x\in\left(0，\dfrac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$，当 $x\in\left(\dfrac{1}{e}，+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，

故 $g(x)$在$\left(0，\dfrac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{e}，+\infty\right)$上单调递增，

从而 $g(x)$在$(0，+\infty)$上的最小值为 $g\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$.



构造函数 $h(x)=xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$.

所以当 $x\in(0，1)$时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1，+\infty)$时，$h'(x)<0$；

故 $h(x)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，

从而 $h(x)$在$(0，+\infty)$上的最大值为 $h(1)=-\dfrac{1}{e}$.

综上，当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

方法二　（指对分手（凹凸反转））

由（1）知 $f(x)=e^{x}\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}(x>0)$，从而 $f(x)>1$ 等价于 $\ln x+\dfrac{1}{ex}>e^{-x}-\dfrac{1}{ex}$.

构造函数 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{ex}$，则……

构造函数 $h(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{ex}$，则……

7.设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$.

（1）讨论 $f(x)$的导函数 $f'(x)$的零点的个数；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

（提示：最值分析法（隐零点，对数独行侠）、最值分析法（变换主元，对数独行侠））

解析　（1）$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}(x>0)$．由 $f'(x)=0$ 得 $2xe^{2x}=a$．

令 $g(x)=2xe^{2x}$，$g'(x)=(4x+2)e^{2x}>0(x>0)$，

从而 $g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$．

当 $a>0$ 时，方程 $g(x)=a$ 有一个根，即 $f'(x)$存在唯一零点；

当 $a\leq 0$ 时，方程 $g(x)=a$ 没有根，即 $f'(x)$没有零点．

（2）**方法一　（最值分析法（隐零点，对数独行侠））**

由(1)可设 $f'(x)$在$(0，+\infty)$上的唯一零点为 x_0，

当 $x\in(0，x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$f'(x)>0$．

故 $f(x)$在$(0，x_0)$上单调递减，在$(x_0，+\infty)$上单调递增，所以$[f(x)]_{\min}=f(x_0)$．

由 $2e^{2x_0}-\frac{a}{x_0}=0$ 得 $e^{2x_0}=\frac{a}{2x_0}$，又 $x_0=\frac{a}{2e^{2x_0}}$，得 $\ln x_0=\ln\frac{a}{2e^{2x_0}}=\ln\frac{a}{2}-2x_0$，

所以 $f(x_0)=e^{2x_0}-a\ln x_0$

$$=\frac{a}{2x_0}-a\left(\ln\frac{a}{2}-2x_0\right)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{2x_0}\cdot 2ax_0}+a\ln\frac{2}{a}=2a+a\ln\frac{2}{a}.$$

故当 $a>0$ 时，$f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$.

方法二　（最值分析法（变换主元，对数独行侠））

由题意：当 $a>0$ 时，$f(x)\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$，即 $e^{2x}-a\ln x\geq 2a+a\ln\frac{2}{a}$，

即证：$\ln a+\frac{1}{a}e^{2x}-\ln 2-\ln x-2\geq 0$（$a>0$）

令 $h(a)=\ln a+\frac{1}{a}e^{2x}-\ln 2-\ln x-2$，则 $h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{e^{2x}}{a^2}=\frac{a-e^{2x}}{a^2}$（$a>0$）

当 $0<a<e^{2x}$ 时，$h(a)$为减函数；当 $a>e^{2x}$ 时，$h(a)$为增函数．

所以函数 $h(a)_{\min}=h(e^{2x})=2x-\ln x-\ln 2-1$．

所以只需证明 $2x-\ln x-\ln 2-1\geq 0$ 即可．…………

8.已知函数 $f(x)=xe^x-a(x+\ln x)$．

（1）讨论 $f(x)$极值点的个数；

（2）若 x_0 是 $f(x)$的一个极小值点，且 $f(x_0)>0$，证明：$f(x_0)>2(x_0-x_0^3)$.

（提示：隐零点，切线放缩）

解析　（1）$f'(x)=(x+1)e^x-a\left(1+\frac{1}{x}\right)=(x+1)\left(e^x-\frac{a}{x}\right)=\frac{(x+1)(xe^x-a)}{x}$，$x\in(0，+\infty)$．

①当 $a\leq 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0，+\infty)$上为增函数，不存在极值点；

②当 $a>0$ 时，令 $h(x)=xe^x-a$，$h'(x)=(x+1)e^x>0$．显然函数 $h(x)$在$(0，+\infty)$上是增函数，

又因为当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to -a<0$，$h(a)=a(e^a-1)>0$，必存在 $x_0>0$，使 $h(x_0)=0$．

当 $x\in(0，x_0)$时，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；

当 $x\in(x_0，+\infty)$时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数．

所以，$x=x_0$ 是 $f(x)$的极小值点．

综上，当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$无极值点，当 $a>0$ 时，$f(x)$有一个极值点．

（2）由（1）得，$f'(x_0)=0$，即 $x_0e^{x_0}=a$，$f(x_0)=x_0e^{x_0}-a(x_0+\ln x_0)=x_0e^{x_0}(1-x_0-\ln x_0)$，

因为 $f(x_0)>0$，所以 $1-x_0-\ln x_0>0$，令 $g(x)=1-x-\ln x$，$g'(x)=-1-\dfrac{1}{x}<0$，

$g(x)$在$(0，+\infty)$上是减函数，且 $g(1)=0$，由 $g(x)>g(1)$得 $x<1$，所以 $x_0\in(0，1)$，

设 $\varphi(x)=\ln x-x+1$，$x\in(0，1)$，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

当 $x\in(0，1)$时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$为增函数，

所以 $\varphi(x)<\varphi(1)=0$，即 $\varphi(x)<0$，即 $\ln x<x-1$，所以 $-\ln x>1-x$，

所以 $\ln(x+1)<x$，所以 $e^x>x+1>0$，则 $e^{x_0}>x_0+1$．

因为 $x_0\in(0，1)$，所以 $1-x_0-\ln x_0>1-x_0+1-x_0=2(1-x_0)>0$．

相乘得 $e^{x_0}(1-x_0-\ln x_0)>(x_0+1)(2-2x_0)$，

所以 $f(x_0)=x_0e^{x_0}(1-x_0-\ln x_0)>2x_0(x_0+1)(1-x_0)=2x_0(1-x_0^2)=2(x_0-x_0^3)$．

故 $f(x_0)>2(x_0-x_0^3)$成立．