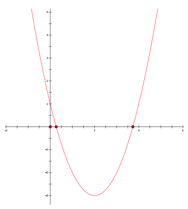
湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——极值点偏移问题（1）

1. 极值点偏移基本定义

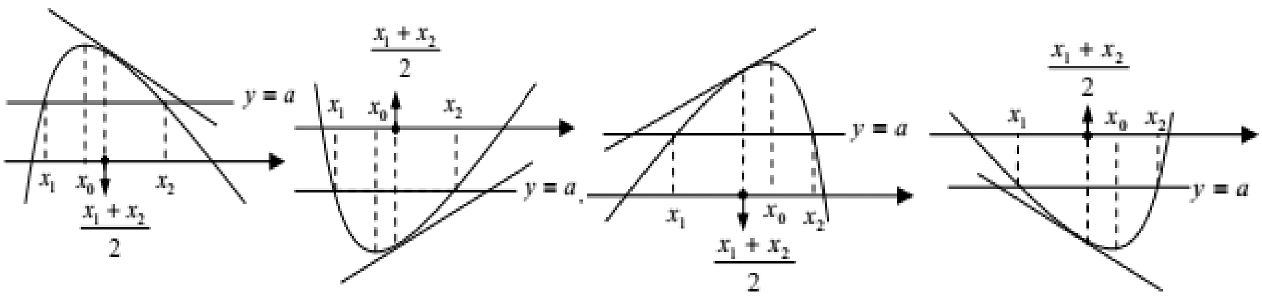
众所周知，函数 $f(x)$ 满足定义域内任意自变量 x 都有 $f(x)=f(2m-x)$，则函数 $f(x)$ 关于直线 $x=m$ 对称；可以理解为函数 $f(x)$ 在对称轴两侧，函数值变化快慢相同，且若 $f(x)$ 为单峰函数，则 $x=m$ 必为 $f(x)$ 的极值点. 如二次函数 $f(x)$ 的顶点就是极值点 x_0，若 $f(x)=c$ 的两根的中点为 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$，则刚好有 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_0$，即极值点在两根的正中间，也就是极值点没有偏移.



若相等变为不等，则为极值点偏移：若单峰函数 $f(x)$ 的极值点为 m，且函数 $f(x)$ 满足定义域内 $x=m$ 左侧的任意自变量 x 都有 $f(x)>f(2m-x)$ 或 $f(x)<f(2m-x)$，则函数 $f(x)$ 极值点 m 左右侧变化快慢不同. 故单峰函数 $f(x)$ 定义域内任意不同的实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 与极值点 m 必有确定的大小关系：

$m<\dfrac{x_1+x_2}{2}$，则称为极值点**左偏**；若 $m>\dfrac{x_1+x_2}{2}$，则称为极值点**右偏**.

如图所示，x_0 为函数的极值点，x_0 处对应的曲线的切线的斜率为 0

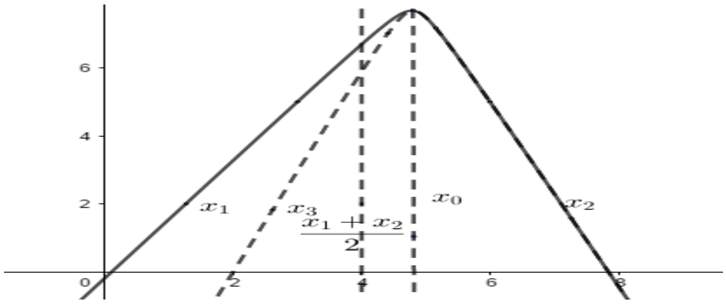


极值点左偏　　　　极值点右偏

极值点左移： $x_1+x_2>2x_0$，$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 处切线与 x 轴不平行

极值点右移： $x_1+x_2<2x_0$，$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 处切线与 x 轴不平行

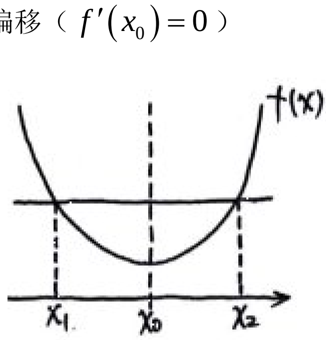
由上面图像可知，函数的图像分为凸函数和凹函数。当函数图像为凸函数，且极值点左偏时，有 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f'(x_0)=0$；当函数图像为凸函数，且极值点右偏时，有 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>f'(x_0)=0$。当函数图像为凹函数，且极值点左偏时，$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>f'(x_0)=0$；当函数图像为凹函数，且极值点右移时，有 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f'(x_0)=0$。



如图所示，上图的函数图像为凸函数，且极值点右移，x_1 和 x_2 处对应的函数值相等，我们可以作 x_2 关于 x_0 的对称点 x_3，则 $x_3=2x_0-x_2>x_1$，且 $x_3<x_0$，故 $f(x_3)>f(x_1)$，即 $f(2x_0-x_2)>f(x_1)$，故我们可以构造函数 $F(x)=f(2x_0-x_2)-f(x_1)$，只需要判断函数 $F(x)$ 的单调性，然后根据单调性判断函数的最小值，只要满足 $F(x)_{\min}>0$，我们就可以得到 $x_1+x_2<2x_0$。同理，我们可以得到凸函数极值点左移以及凹函数极值点左移或右移的构造函数。

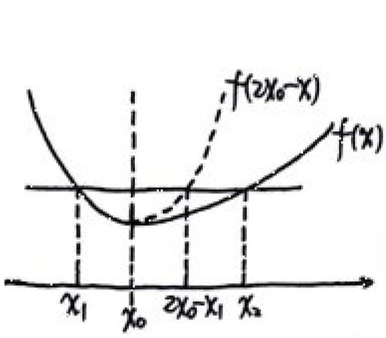
二、纯极值点偏移与纯拐点偏移常规类型

1、极值点偏移（$f'(x_0)=0$）



（不偏移）二次函数

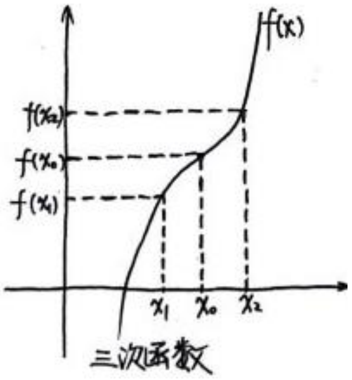
$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+x_2=2x_0$

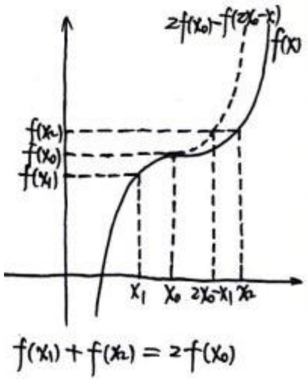


（左偏）

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_2>2x_0-x_1\Rightarrow x_1+x_2>2x_0$

2、拐点偏移（ $f''\left(x_0\right)=0$ ）





（不偏移）　　　　　　　　　　　　　　（左偏）

$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=2f\left(x_0\right)\Rightarrow x_1+x_2=$ 　 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=2f\left(x_0\right)\Rightarrow x_2>2x_0-x_1\Rightarrow x_1+x$

三、极值点纯偏移特征：

①函数 $f\left(x\right)$ 的极值点为 x_0；

②函数 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，然后证明：$x_1+x_2>2x_0$ 或 $x_1+x_2<2x_0$.

四、极值点偏移的的纯偏移型解法步骤：

①构造一元差函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(2x_0-x\right)$ 或是 $F\left(x\right)=f\left(x+x_0\right)-f\left(x_0-x\right)$；

②对差函数 $F\left(x\right)$ 求导，判断单调性；

③结合 $F\left(0\right)=0$，判断 $F\left(x\right)$ 的符号，从而确定 $f\left(x\right)$ 与 $f\left(2x_0-x\right)$ 的大小关系；

④ 由 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left[x_0-\left(x_0-x_2\right)\right]$ 与 $f\left[x_0+\left(x_0-x_2\right)\right]=f\left(2x_0-x_2\right)$ 的大小关系，得到 $f\left(x_1\right)$____ $f\left(2x_0-x_2\right)$，（横线上为不等号）；

⑤结合 $f\left(x\right)$ 单调性得到 x_1____ $2x_0-x_2$，进而得到 $\frac{x_1+x_2}{2}$___ x_0.

五 两个重要的不等式

1、对数平均值不等式：$\forall a,b>0$， $a\neq b$，则$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$；

2、指数平均值不等式：$a,b\in R$， $a\neq b$，则$\sqrt{e^{x_1+x_2}}<\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}<\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$.

湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——极值点偏移问题（2）

基本方法——极值点偏移1：纯偏移

1. 已知函数 $f\left(x\right)=xe^{-x}$（$x\in R$）

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间和极值；

（2）已知函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象与函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，证明当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)>g\left(x\right)$

（3）如果 $x_1\neq x_2$，且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，证明 $x_1+x_2>2$.

2. 已知函数 $f\left(x\right)=e^x-x^2-x-1$

（1）求函数 $y=f'\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）已知 $a\geq -1$，且 $f\left(x\right)\geq -x^2+ax+b-1$ 恒成立，求 $\left(a+1\right)b$ 的最大值；

（3）若存在不相等的实数 x_1,x_2 使 $f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)$ 成立，试比较 x_1+x_2 与 $2\ln 2$ 的大小.

3. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^x+a\left(x-1\right)^2$ 有两个零点.

（1）求 a 的取值范围；

（2）设 x_1,x_2 是 $f\left(x\right)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

4. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2+1$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，设函数 $f\left(x\right)$ 的两个零点为 x_1,x_2，试证明：$x_1+x_2>2$.

5. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\ln x+x-1$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $P\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）已知 $x=x_0$ 是函数 $y=f\left(x\right)$ 的极值点，若 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，$x_1\neq x_2$，$x_1,x_2\in R$，求证：$x_1+x_2>2x_0$（极值点是指函数取极值时对应的自变量的值）.

6. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-ax\left(a\in R\right)$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 的图象与直线 $y=a$ 交于 A,B 两点，记 A,B 两点的横坐标分别为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_1+x_2<\ln a^2$.

7. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{a}{x}-\ln x\left(a\in R\right)$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 x_1,x_2 是方程 $f\left(x\right)=2$ 的两个不同实根，证明：$x_1+x_2>\dfrac{2}{e^3}$.

基本方法——极值点偏移 2：非纯偏移（转化）

8. 已知函数 $f\left(x\right)=ax-\ln x$ 有两个零点 x_1,x_2.

（1）求 a 的取值范围；

（2）求证：$x_1x_2>e^2$.

9. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{ax}-a\left(x+2\right)$，$a\neq 0$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，求证：$e^{ax_1}+e^{ax_2}>2$.

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^{x-1}}{x^2}-a\left(\ln x+\dfrac{2}{x}\right)\left(a\in R\right)$.

（1）若 $a=1$，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\right)$ 上有两个极值点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$.

（i）求实数 a 的取值范围；

（ii）求证：$x_1x_2<1$.

11. 已知函数 $f\left(x\right)=ax-\ln x$（$a\in R$）

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点 x_1,x_2，证明：$\dfrac{1}{\ln x_1}+\dfrac{1}{\ln x_2}>2$.

12. 已知函数 $f\left(x\right)=x-2-\ln^2 x-a\ln x$.（$a\in R$）

（1）令 $g\left(x\right)=xf'\left(x\right)$，讨论 $g\left(x\right)$ 的单调性并求极值；

（2）令 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+2+\ln^2 x$，若 $h\left(x\right)$ 有两个零点；

（i）求 a 的取值范围；

（ii）若方程 $xe^x-a\left(\ln x+x\right)=0$ 有两个实根 x_1,x_2，且 $x_1\neq x_2$，证明：$e^{x_1+x_2}>\dfrac{e^2}{x_1x_2}$.

13. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^x+a\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的极值点的个数；

（2）若 $f\left(x\right)$ 有 3 个极值点 x_1,x_2,x_3（其中 $x_1<x_2<x_3$），证明：$x_1x_3<x_2^2$.

基本方法——极值点偏移 3：非纯偏移（不等式解法）

14. 已知函数 $f\left(x\right)=xe^{-x}$（$x\in R$），如果 $x_1\neq x_2$，且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，证明 $x_1+x_2>2$.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax^2+\left(2-a\right)x$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）设 $a>0$，证明：当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f\left(\dfrac{1}{a}+x\right)>f\left(\dfrac{1}{a}-x\right)$；

（3）若函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像与 x 轴交于 A,B 两点，线段 AB 中点的横坐标为 x_0，证明：$f'\left(x_0\right)<0$.

17. 设函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax^2+\left(2-a\right)x$ 的两个零点是 x_1,x_2，求证：$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x$ 与直线 $y=m$ 交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点. 求证：$0<x_1x_2<\dfrac{1}{e^2}$

19. 设函数 $f\left(x\right)=e^x-ax+a$（$a\in R$），其图像与 x 轴交于 $A\left(x_1,0\right),B\left(x_2,0\right)$ 两点，且 $x_1<x_2$.

（1）求 a 的取值范围；

（2）证明：$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$；

（3）证明：$f'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)<0$.

基本方法——极值点偏移 1：纯偏移

1. 已知函数 $f(x)=xe^{-x}$（$x\in R$）

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）已知函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，证明当 $x>1$ 时，$f(x)>g(x)$

（3）如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明 $x_1+x_2>2$.

【答案】：（Ⅰ）$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内是增函数，在 $(1,+\infty)$ 内是减函数.

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=\dfrac{1}{e}$；（Ⅱ）见解析；（Ⅲ）见解析.

【解析】：

(Ⅰ)解：$f'(x)=(1-x)e^{-x}$.
令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$.
当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内是增函数，在 $(1,+\infty)$ 内是减函数.
函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)$，且 $f(1)=\frac{1}{e}$.
(Ⅱ)证明：由题意可知 $g(x)=f(2-x)$，得 $g(x)=(2-x)e^{x-2}$.
令 $F(x)=f(x)-g(x)$，
即 $F(x)=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$.
于是 $F'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)e^{-x}$.
当 $x>1$ 时，$2x-2>0$，从而 $e^{2x-2}-1>0$.
又 $e^{-x}>0$，所以 $F'(x)>0$.
从而函数 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数.
又 $F(1)=e^{-1}-e^{-1}=0$，
所以 $x>1$ 时，有 $F(x)>F(1)=0$，
即 $f(x)>g(x)$.
(Ⅲ)证明：(1)若 $(x_1-1)(x_2-1)=0$，
由(Ⅰ)及 $f(x_1)=f(x_2)$，
得 $x_1=x_2=1$. 与 $x_1\neq x_2$ 矛盾.
(2)若 $(x_1-1)(x_2-1)>0$，
由(Ⅰ)及 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $x_1=x_2$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾.
根据(1)，(2)得 $(x_1-1)(x_2-1)<0$.
不妨设 $x_1<1$，$x_2>1$.
由(Ⅱ)可知，$f(x_2)>g(x_2)$，$g(x_2)=f(2-x_2)$，
所以 $f(x_2)>f(2-x_2)$，从而 $f(x_1)>f(2-x_2)$.
因为 $x_2>1$，所以 $2-x_2<1$.
又由(Ⅰ)可知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 内是增函数，
所以 $x_1>2-x_2$，即 $x_1+x_2>2$.

2. 已知函数 $f(x)=e^x-x^2-x-1$

（1）求函数 $y=f'(x)$ 的单调区间；

（2）已知 $a\geq -1$，且 $f(x)\geq -x^2+ax+b-1$ 恒成立，求 $(a+1)b$ 的最大值；

（3）若存在不相等的实数 x_1,x_2 使 $f'(x_1)=f'(x_2)$ 成立，试比较 x_1+x_2 与 $2\ln 2$ 的大小.

【答案】:
【解析】:（拐点偏移）

（1）由已知得f'（x）=ex-2x-1，令φ（x）=f'（x），则φ'（x）=ex-2，

由φ'（x）=ex-2>0得x>ln2，由p'（x）=ex-2<0，得x<ln 2，

∴函数y=f'（x）在区间（-∞，ln2）上单调递减，在（ln 2，+∞）上单调递增.

（2）若f（x）≥-x2+ax+b-1恒成立，

即h（x）=f（x）+x2-ax-b+1=ex-（a+1）x-b≥0恒成立∵ h'（x）=ex-（a+1），

当a+1>0时，h（x）>0恒成立，则b≤0，（a+1）b=0;

当a+1>0时，h'（x）=ex-（a+1）为增函数，由h'（x）=0得x=ln（a+1），

故f'（x）>0⇔x>ln（a+1），f'（x）<0⇔x<ln（a+1）.

当x=ln（a+1）时，h（x）取最小值h（ln（a+1））=a+1-（a+1）ln（a+1）-b.

依题意有h（ln（a+1））=a+1-（a+1）ln（a+1）-b≥0，

即b≤a+1-（a+1）ln（a+1），∵a+1>0，∴（a+1）b≤（a+1）2-（a+1）2ln（a+1），

令u（x）=x2-x2lnx（x>0），则u'（x）=2x-2xlnx-x=x（1-2lnx），$u'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<\sqrt{e}$，$u'(x)<0 \Leftrightarrow x>\sqrt{e}$，

∴当$x=\sqrt{e}$，u（x）取最大值$u(\sqrt{e})=\frac{e}{2}$，

故当$a+1=\sqrt{e}$，$b=\frac{\sqrt{e}}{2}$时，（a+1）b取最大值$\frac{e}{2}$.

综上，若$f(x)\geq\frac{1}{2}x^2+ax+b$，则（a+1）b的最大值为$\frac{e}{2}$.

法二：x1+x2<2ln2.

证明：令$x_1<\ln 2<x_2$ ∵ $f'(x_1)=f'(x_2)$，∴

$e^{x_1}-2x_1-1=e^{x_2}-2x_2-1$，∴$2=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$，

记$t=\frac{x_2-x_1}{2}$，(t>0)，则由（1）知

$\varphi'(\frac{x_1+x_2}{2})=e^{\frac{x_1+x_3}{2}}-\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{e^{\frac{\pi+x_2}{2}}}{2t}(2t-(e^t-e^{-t}))$，

设g（t）=2t-（et-e-t），（t>0），则g'（t）=2-（et+e-t）<0，

∴g（t）在t∈（0，+∞）上单调递减，故g（t）<g（0）=0，而$\frac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2t}>0$，∴$\varphi'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$，∴$e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<2$，∴x1+x2<2ln2.

（3）x1+x2<2ln2

法一：证明如下：设x>ln2，∴2ln2-x<ln2，f'（2ln2-x）e（2ln2-x）-2（2ln2-x）-1=$\frac{4}{e^x}$+2x-4ln2-1.

令g（x）=f'（x）-f'（2ln2-x）=$e^x-\frac{4}{e^x}$-4x+4ln2(x≥ln2)，

∴g'（x）=ex+4e-x-4≥0，当且仅当x=ln2时，等号成立，

∴g（x）=f'（x）-f'（2ln2-x）在（ln2，+∞）上单调递增，

又g（ln2）=0，∴当x>ln2时，g（x）=f'（x）-f'（2ln2-x）>g（ln2）=0，

即f'（x）>f'（2ln2-x），不妨设x1<ln2<x2，∴

$f'(x_2)>f'(2\ln 2-x_2)$，

又∵$f'(x_1)=f'(x_2)$，∴$f'(x_1)>f'(2\ln 2-x_2)$，

由于x2>ln2，∴2ln2-x2<ln2，

∵x1<ln2，由（1）知函数y=f'（x）在区间（-∞，ln2）上单调递减，

∴x1<2ln2-x2，即x1+x2<2ln2.

3. 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

（Ⅰ）求 a 的取值范围；

（Ⅱ）设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

【答案】:（Ⅰ）$\left(0,+\infty\right)$；（Ⅱ）见解析

【解析】:（Ⅰ） $f'(x)=(x-1)e^{x}+2a(x-1)=(x-1)(e^{x}+2a)$.

①设 $a=0$，则 $f(x)=(x-2)e^{x}$， $f(x)$ 只有一个零点.

②设 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

又 $f(1)=-e$， $f(2)=a$，取 b 满足 $b<0$ 且 $b<\ln\dfrac{a}{2}$，则 $f(b)>\dfrac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^{2}=a(b^{2}-\dfrac{3}{2}b)>0$，

故 $f(x)$ 存在两个零点.

③设 $a<0$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

若 $a\geq-\dfrac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)\leq1$，故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增. 又当 $x\leq1$ 时 $f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

若 $a<-\dfrac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$，故当 $x\in(1,\ln(-2a))$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 因此 $f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 单调递减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 单调递增. 又当 $x\leq1$ 时， $f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点.

综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

（Ⅱ）不妨设 $x_1<x_2$，由（Ⅰ）知 $x_1\in(-\infty,1),x_2\in(1,+\infty)$， $2-x_2\in(-\infty,1)$， $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减，所以

$x_1+x_2<2$ 等价于 $f(x_1)>f(2-x_2)$，即 $f(2-x_2)<0$.

由于 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^{2}$，而 $f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^{2}=0$，所以

$f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$.

设 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^{x}$，则 $g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^{x})$.

所以当 $x>1$ 时， $g'(x)<0$，而 $g(1)=0$，故当 $x>1$ 时， $g(x)<0$.

从而 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$，故 $x_1+x_2<2$.

4. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^{2}+1$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，设函数 $f\left(x\right)$ 的两个零点为 x_1,x_2，试证明： $x_1+x_2>2$.

【答案】:（1）当 $a\leq0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 上单调递减；（2）证明见解析.

【解析】:（1）易得函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$.

对函数 $f\left(x\right)$ 求导得：$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-ax$.

当 $a\le 0$ 时，$f'\left(x\right)>0$ 恒成立，即可知 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，当 $x\in\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$，

故 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

（2）当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+1$，$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-x=\dfrac{1-x^2}{x}$，

此时 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减.

$f\left(x\right)_{极大值}=f\left(1\right)=\dfrac{1}{2}>0$，又 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)<0$，$f\left(e\right)<0$，

不妨设 $x_1<x_2$，则有 $0<x_1<1<x_2$，令 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(2-x\right)$，$x\in\left(0,1\right)$，

$F'\left(x\right)=f'\left(x\right)+f'\left(2-x\right)=\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{1-\left(2-x\right)^2}{2-x}=\dfrac{2\left(1-x\right)^2}{x\left(2-x\right)}$.

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$F'\left(x\right)>0$，$F\left(x\right)$ 单调递增，

$\because x_1\in\left(0,1\right)$，$\therefore F\left(x_1\right)=f\left(x_1\right)-f\left(2-x_1\right)<F\left(1\right)=0$，$\therefore f\left(x_1\right)<f\left(2-x_1\right)$，

又 $\because f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$，$\therefore f\left(x_2\right)<f\left(2-x_1\right)$，

$\because x_2>1$，$2-x_1>1$，$f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$.

5. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\ln x+x-1$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $P\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）已知 $x=x_0$ 是函数 $y=f\left(x\right)$ 的极值点，若 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，$x_1\ne x_2$，$x_1,x_2\in R$，求证：$x_1+x_2>2x_0$（极值点是指函数取极值时对应的自变量的值）.

【答案】:（1）$y=0$；（2）证明见解析.

【解析】:（1）由 $f(x)=(x-2)\ln x+x-1$，有 $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1$

$\therefore f'(1)=0$，而 $f(1)=0$，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=0$

（2）由（1）得 $f^{'}(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1=\ln x+2-\dfrac{2}{x}$，令 $g(x)=\ln x+2-\dfrac{2}{x},x>0$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $g(x)=\ln x+2-\dfrac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $g(1)=0$，知当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore$ 当函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值.

$\because f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right),x_1\neq x_2,x_1,x_2\in R$，不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

令 $h(x)=f(x)-f(2-x),\quad 0<x<1$，

则 $h^{'}(x)=f^{'}(x)+f^{'}(2-x)=\ln x+2-\dfrac{2}{x}+\ln(2-x)+2-\dfrac{2}{2-x}=\ln x(2-x)+4-\dfrac{4}{x(2-x)}$

因为 $0<x<1$，所以 $0<x(2-x)<1$，即有 $\ln x(2-x)<0,4-\dfrac{4}{x(2-x)}<0$，

$\therefore h'(x)<0$，即函数 $h(x)=f(x)-f(2-x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，而 $h(1)=f(1)-f(1)=0$，

所以 $h(x)>h(1)=0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，即 $f(x)>f(2-x)$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，有 $f\left(x_1\right)>f\left(2-x_1\right)$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，又 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，所以 $f\left(x_2\right)>f\left(2-x_1\right)$，

因为 $0<x_1<1<x_2$ 且 $2-x_1>1$，而函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$，而 $x_0=1$，所以 $x_1+x_2>2x_0$ 得证.

6. 已知函数 $f\left(x\right)=e^x-ax\left(a\in R\right)$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 的图象与直线 $y=a$ 交于 A,B 两点，记 A,B 两点的横坐标分别为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_1+x_2<\ln a^2$.

【答案】：（1）过程不唯一，具体见解析；（2）证明见解析.

【解析】：（1）$f'(x)=e^x-a$，

$a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 R 递增；

$a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得：$x>\ln a$，令 $f'(x)<0$，解得：$x<\ln a$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 递增；

（2）函数的 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=e^x-a$，若 $a\le 0$，则 $f'(x)=e^x-a>0$，还是单调递增，

则不满足条件，则$a>0$由$f'(x)>0$得$x>\ln a$，由$f'(x)<0$得$x<\ln a$，

即当$x=\ln a$时，还是$f(x)$取得极小值同时也是最小值$f(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a=a(1-\ln a)$

$\because f(x)=a$有两个根，$\therefore a(1-\ln a)<0$，即$1-\ln a<0$，则$\ln a>1$，即$a>e$

要证$x_1+x_2<2\ln a$，则只需要$x_2<2\ln a-x_1$又$x_2>\ln a$，则只需要证明$f\left(x_2\right)<f\left(2\ln a-x_1\right)$，

即证$f\left(2\ln a-x_1\right)>f\left(x_2\right)=0=f\left(x_1\right)$，

令$g(x)=f(2\ln a-x)-f(x)$，$(x<\ln a)$，则$g(x)=e^{2\ln a-x}-a(2\ln a-x)-e^x+ax$，

$g'\left(x\right)=-a^2e^{-x}+a-e^x+a=-\dfrac{\left(e^x-a\right)^2}{e^x}\le 0$，即$g(x)$在$(-\infty,\ln a]$上单调递减，

即$g(x)>g(\ln a)=0$则命题成立.

7. 已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{a}{x}-\ln x\left(a\in R\right)$.

（1）讨论$f\left(x\right)$的单调性；

（2）若x_1,x_2是方程$f\left(x\right)=2$的两个不同实根，证明：$x_1+x_2>\dfrac{2}{e^3}$.

【答案】:（1）答案见解析;（2）证明见解析.

【解析】:（1）因为$f\left(x\right)=\dfrac{a}{x}-\ln x$，所以$f'\left(x\right)=-\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{a+x}{x^2}$.

①当$a\ge 0$时，$f'\left(x\right)<0$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，故$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减.

②当$a<0$时，由$f'\left(x\right)>0$得$0<x<-a$；由$f'\left(x\right)<0$得$x>-a$.

即$f\left(x\right)$在$\left(0,-a\right)$上单调递增，在$\left(-a,+\infty\right)$上单调递减，

综上，当$a\ge 0$时，$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减；

当$a<0$时，$f\left(x\right)$在$\left(0,-a\right)$上单调递增，在$\left(-a,+\infty\right)$上单调递减.

（2）证明：因为$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=2$，所以$\dfrac{a}{x_1}-\ln x_1-2=0$，$\dfrac{a}{x_2}-\ln x_2-2=0$，

即$x_1\ln x_1+2x_1-a=x_2\ln x_2+2x_2-a=0$.

设$g\left(x\right)=x\ln x+2x-a$，则$g'\left(x\right)=\ln x+3$，

故$g\left(x\right)$在$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^3},+\infty\right)$上单调递增.

由题意不妨设$0<x_1<\frac{1}{\mathrm{e}^3}<x_2$，欲证$x_1+x_2>\frac{2}{\mathrm{e}^3}$，只需证$x_2>\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1$.

又x_2，$\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}^3},+\infty\right)$，$g\left(x\right)$在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}^3},+\infty\right)$上单调递增. 故只需证$g\left(x_2\right)>g\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\right)$.

因为$g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，所以只需证$g\left(x_1\right)>g\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\right)$对任意的$x_1\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$恒成立即可，

即$x_1\ln x_1+2x_1-a>\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\right)\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\right)+2\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\right)-a$.

整理得$x_1\ln x_1+2x_1>\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\right)\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\right)+\frac{4}{\mathrm{e}^3}-2x_1$，即$x_1\ln x_1-\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\right)\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x_1\right)+4x_1-\frac{4}{\mathrm{e}^3}>0$.

设$h\left(x\right)=x\ln x-\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x\right)\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x\right)+4x-\frac{4}{\mathrm{e}^3}$，$x\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$，

则$h'\left(x\right)=\ln x+\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}^3}-x\right)+6=\ln\left(\frac{2x}{\mathrm{e}^3}-x^2\right)+6$.

因为$0<x<\frac{1}{\mathrm{e}^3}$，所以$0<\frac{2x}{\mathrm{e}^3}-x^2<\frac{1}{\mathrm{e}^6}$，所以$h'\left(x\right)=\ln\left(\frac{2x}{\mathrm{e}^3}-x^2\right)+6<0$，所以$h\left(x\right)$在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$上单调递减，

则$h\left(x\right)>h\left(\frac{1}{\mathrm{e}^3}\right)=0$. 所以$x_1+x_2>\frac{2}{\mathrm{e}^3}$成立.

极值点偏移 2：非纯偏移（转化）

8. 已知函数$f\left(x\right)=ax-\ln x$有两个零点x_1,x_2.

（1）求a的取值范围；

（2）求证：$x_1x_2>e^2$.

【答案】：（1）$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$；（2）证明见解析.

【解析】：（1）$f\left(x\right)$有两个零点$\Leftrightarrow a=\frac{\ln x}{x}$有两个相异实根.

令$G\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，则$G'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

由$G'\left(x\right)>0$得：$0<x<e$，由$G'\left(x\right)<0$得：$x>e$，

$\therefore G(x)$在$(0,e)$单调递增，在$(e,+\infty)$单调递减，$\therefore G(x)_{\max}=G(e)=\dfrac{1}{e}$，

又$\because G(1)=0$，$\therefore$当$0<x<1$时，$G(x)<0$；当$x>1$时，$G(x)>0$

当$x\to+\infty$时，$G(x)\to 0$，

$\therefore f(x)$有两个零点时，实数a的取值范围为$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

（2）不妨设$x_1<x_2$，由题意得$\begin{cases} ax_1=\ln x_1 \\ ax_2=\ln x_2 \end{cases}$，

$\therefore a(x_1+x_2)=\ln x_1+\ln x_2$ ，$a(x_2-x_1)=\ln x_2-\ln x_1$，$\therefore a=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

要证：$x_1\cdot x_2>e^2$，只需证$\ln x_1+\ln x_2>2$.

$$\ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}\cdot(x_1+x_2)=\left(\frac{\frac{x_2}{x_1}+1}{\frac{x_2}{x_1}-1}\right)\cdot\ln\frac{x_2}{x_1},$$

令$t=\dfrac{x_2}{x_1}$，$t>1$，只需证$\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)\ln t>2$

$\because t>1$，$\therefore \dfrac{t+1}{t-1}>0$，$\therefore$只需证：$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{(t+1)}$.

令$F(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{(t+1)}(t>1)$，$\therefore F'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$\therefore F(t)$在$(1,+\infty)$递增，$\therefore F(t)>F(1)=0$，$\therefore \ln t>\dfrac{2(t-1)}{(t+1)}$成立.

综上所述，$x_1\cdot x_2>e^2$成立.

【解法二】欲证$x_1x_2>\mathrm{e}^2$，需证$\ln x_1+\ln x_2>2$．若$f(x)$有两个极值点x_1，x_2，即函数$f'(x)$有两个零点．又$f'(x)=\ln x-mx$，所以，x_1，x_2是方程$f'(x)=0$的两个不同实根．显然$m>0$，否则，函数$f'(x)$为单调函数，不符合题意.

由 $\begin{cases} \ln x_1-mx_1=0 \\ \ln x_2-mx_2=0 \end{cases}\Rightarrow \ln x_1+\ln x_2=m(x_1+x_2)$ ，

即只需证明$m(x_1+x_2)>2$即可．即只需证明$x_1+x_2>\frac{2}{m}$．

设$g(x)=f'(x)-f'\left(\frac{2}{m}-x\right)\left(x\in\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)$，$g'(x)=\frac{2(mx-1)^2}{x(2-mx)}>0$，故$g(x)$在

$\left(0,\frac{1}{m}\right)\uparrow$，即$g(x)<g\left(\frac{1}{m}\right)=0$，故$f'(x)<f'\left(\frac{2}{m}-x\right)$．

由于$f''(x)=\frac{1}{x}-m=\frac{1-mx}{x}$，故$f'(x)$在$\left(0,\frac{1}{m}\right)\uparrow$，$\left(\frac{1}{m},+\infty\right)\downarrow$．

设$x_1<\frac{1}{m}<x_2$，令$x=x_1$，则$f'(x_2)=f'(x_1)<f'\left(\frac{2}{m}-x_1\right)$，

9. 已知函数$f(x)=e^{ax}-a(x+2)$，$a\neq 0$．

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）若函数$f(x)$有两个零点$x_1,x_2\ (x_1<x_2)$，求证：$e^{ax_1}+e^{ax_2}>2$．

【答案】：（1）$f(x)$的增区间是$[0,+\infty)$，减区间是$(-\infty,0)$；（2）证明见解析.

【解析】：（1）对函数求导可得$f'(x)=ae^{ax}-a=a(e^{ax}-1)$，令$f'(x)=0$，得$x=0$

①当$a>0$时，若$x>0$,则$e^{ax}>1$，即$f'(x)>0$；若$x<0$，则$e^{ax}<1$，即$f'(x)<0$．

②当$a<0$时，若$x>0$，则$e^{ax}<1$，即$f'(x)>0$；若$x<0$，则$e^{ax}>1$，即$f'(x)<0$．

综上，$f(x)$的单调递增区间是$[0,+\infty)$，单调递减区间是$(-\infty,0)$．

（2）证明：由（1）知，$f(x)$有两个零点时，$x_1<0<x_2$，$f(0)=e^0-a(0+2)<0$，$\therefore a>\frac{1}{2}$．

令$e^{ax_1}=t_1$，$e^{ax_2}=t_2$，则$ax_1=\ln t_1, ax_2=\ln t_2$

$\therefore t_1$，t_2为方程$t-\ln t-2a=0$的两个根.

令$g(t)=t-\ln t-2a$，则t_1，t_2为$g(t)$的两个零点，$0<t_1<1<t_2$．

$g(2-t_1)-g(t_2)=g(2-t_1)-g(t_1)=2-t_1-\ln(2-t_1)-2a-(t_1-\ln t_1-2a)=2-2t_1-\ln(2-t_1)+\ln t_1$

令$h(t_1)=2-2t_1-\ln(2-t_1)+\ln t_1, t_1\in(0,1)$，则

$$h'(t_1)=-2+\frac{1}{2-t_1}+\frac{1}{t_1}=\frac{-2(2-t_1)t_1+t_1+(2-t_1)}{(2-t_1)t_1}=\frac{2(t_1-1)^2}{(2-t_1)t_1}>0.$$

$\therefore h(t_1)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$\therefore h(t_1) < h(1)=0$

$\therefore g(2-t_1)-g(t_2) < 0$，即 $g(2-t_1) < g(t_2)$.

$\because g'(t)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$，$\therefore$ 当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$g(t)$ 单调递增.

$\because (2-t_1)\in(1,+\infty)$，$t_2\in(1,+\infty)$，$\therefore 2-t_1 < t_2$，$\therefore t_1+t_2 > 2$，$\therefore e^{ax_1}+e^{ax_2} > 2$.

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x^2}-a\left(\ln x+\dfrac{2}{x}\right)(a\in R)$.

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上有两个极值点 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$.

（i）求实数 a 的取值范围；

（ii）求证：$x_1x_2<1$.

【答案】：（1）递减区间 $(0,2)$，递增区间为 $(2,+\infty)$；（2）（i）$1<a<\dfrac{e}{2}$，（ii）证明见解析.

【解析】：（1）$f'(x)=\dfrac{(x-2)(e^{x-1}-x)}{x^3}(x>0)$，令 $g(x)=e^{x-1}-x(x>0)$，$g(x)=e^{x-1}-1$，

因为 $x>0$，$e^{x-1}>\dfrac{1}{e}$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$\mathrm{g}(x)$ 单调递减；

所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$\mathrm{g}(x)$ 单调递增，所以 $g(x)\ge g(1)=e^0-1=0$，

所以当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

$f(x)$ 的单调递减区间 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$.

（2）（i）$f(x)=\dfrac{(x-2)(e^{x-1}-ax)}{x^3}(x>0)$，

要使 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上有两个极值点 x_1,x_2，则 $g(x)=e^{x-1}-ax$ 在 $(0,2)$ 上有两个不同的零点，

①$a\le1$ 时，由（1）知，$g(x)=e^{x-1}-ax\ge e^{x-1}-x$，

令 $S(x)=e^{x-1}-x$，故 $S'(x)=e^{x-1}-1>0$，所以 $S(x)$ 在 $(0,2)$ 上为增函数，

所以 $S(x)>S(0)=0$，故 $g(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上无零点，舍.

②当$a\ge e$时，$\because x\in(0,2)$，$e^{x-1}\in\left(\dfrac{1}{e},e\right)$，$g'(x)=e^{x-1}-a<0$，

则$g(x)$在$(0,2)$上单调递减，故$g(x)$最多只有一个零点，不合题意，舍去.

③当$1<a<e$时，由（1）知所以$g(x)$在$(0,\ln a+1)$上单调递减，在$(\ln a+1,2)$上单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(\ln a+1)=-a\ln a$，即要使$\begin{cases}g(0)=\dfrac{1}{e}>0\\ g(\ln a+1)=-a\ln a<0\\ g(2)=e-2a>0\end{cases}$，解得$1<a<\dfrac{e}{2}$，

综上所述，a的取值范围为$1<a<\dfrac{e}{2}$.

（ii）由（i）知，$g(x_1)=g(x_2)=0$，$0<x_1<\ln a+1<x_2<2$，

即$\begin{cases}e^{x_1-1}=ax_1\\ e^{x_2-1}=ax_2\end{cases}$，故$\begin{cases}x_1-1=\ln a+\ln x_1\\ x_2-1=\ln a+\ln x_2\end{cases}$，所以$x_1+x_2-2-2\ln a=\ln(x_1x_2)$，

要证$x_1x_2<1$，只要证$x_1+x_2-2-2\ln a<0$，就要证$x_2<2+2\ln a-x_1$，

由上可知$g(x)$ 在$(\ln a+1,+\infty)$上单调递增，所以只要证$g(x_2)<g(2+2\ln a-x_1)$，而$g(x_2)=g(x_1)$，

所以只要证$g(x_1)<g(2+2\ln a-x_1)$，（*）

令$h(x)=g(x)-g(2+2\ln a-x)(0<x<\ln a+1)$，即$h(x)=\dfrac{1}{e}\left(e^x-e^{2+2\ln a-x}\right)-2ax+2a(1+\ln a)$，

所以$h'(x)=\dfrac{1}{e}\left(e^x+e^{2+2\ln a-x}\right)-2a\ge\dfrac{1}{e}\cdot 2\sqrt{e^x\cdot e^{2+2\ln a-x}}-2a=0$，故$h(x)$在$(0,\ln a+1)$上单调递增，

所以当$x\in(0,\ln a+1)$时，$h(x)<h(1+\ln a)=0$，即$g(x)-g(2+2\ln a-x)<0$，

$g(x_1)-g(2+2\ln a-x_1)<0$，即（*）式成立，所以$x_1x_2<1$得证.

11. 已知函数$f(x)=ax-\ln x$（$a\in R$）

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若函数$f(x)$有两个零点x_1,x_2，证明：$\dfrac{1}{\ln x_1}+\dfrac{1}{\ln x_2}>2$.

【答案】:

【解析】:

【解答】解：（1） $f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$ $(x>0)$，

①当$a\leqslant 0$时，由于$x>0$，故$ax-1<0$，$f'(x)<0$，

所以，$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$，

②当$a>0$时，由$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{a}$，

在区间$(0,\frac{1}{a})$上，$f'(x)<0$，在区间$(\frac{1}{a}$，$+\infty)$上，$f'(x)>0$．

所以，函数$f(x)$的单调递减区间为$(0,\frac{1}{a})$，

单调递增区间为$(\frac{1}{a}$，$+\infty)$，

综上，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$；

当$a>0$时，函数$f(x)$的单调递减区间为$(0,\frac{1}{a})$，单调递增区间为$(\frac{1}{a}$，$+\infty)$．

（2）函数$f(x)$有两个零点分别为x_1，x_2，不妨设$x_1<x_2$，

则$lnx_1-ax_1=0$，$lnx_2-ax_2=0$，

$lnx_2-lnx_1=a(x_2-x_1)$，

要证：$\frac{1}{lnx_1}+\frac{1}{lnx_2}>2$，

只需证：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2a$，只需证：$\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}>a$，

只需证：$\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}>\frac{lnx_2-lnx_1}{x_2-x_1}$，

只需证：$\frac{x_2{}^2-x_1{}^2}{2x_1x_2}>ln\frac{x_2}{x_1}$，

只需证：$ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{1}{2}(\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2})$，

令$t=\frac{x_2}{x_1}>1$，即证$lnt<\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$

设$\varphi(t)=lnt-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})$，

则$\varphi'(t)=\frac{2t-t^2-1}{2t^2}<0$，

即函数$\varphi(t)$在$(1,+\infty)$单调递减，

则$\varphi(t)<\varphi$（1）$=0$，

即得$\frac{1}{lnx_1}+\frac{1}{lnx_2}>2$．

12. 已知函数$f\left(x\right)=x-2-\ln^2 x-a\ln x$．（$a\in R$）

（1）令$g\left(x\right)=xf'\left(x\right)$，讨论$g\left(x\right)$的单调性并求极值；

（2）令$h\left(x\right)=f\left(x\right)+2+\ln^2 x$，若$h\left(x\right)$有两个零点；

（i）求a的取值范围；

（ii）若方程$xe^x-a\left(\ln x+x\right)=0$有两个实根$x_1,x_2$，且$x_1\neq x_2$，证明：$e^{x_1+x_2}>\frac{e^2}{x_1x_2}$．

【答案】:（Ⅰ）$g\left(x\right)$单调递减区间为$\left(0,2\right)$，单调递增区间为$\left(2,+\infty\right)$，极小值为$g\left(2\right)=2-2\ln 2-a$，无极大值；（Ⅱ）（i）$a>e$；（ii）证明见解析.

【解析】:（Ⅰ）因为 $f'(x)=1-\frac{2\ln x}{x}-\frac{a}{x}$，所以 $g(x)=xf'(x)=x-2\ln x-a$， $x\in(0,+\infty)$

则 $g'(x)=\frac{x-2}{x}$，

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	负	0	正
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $g(x)$ 单调递减区间为 $(0,2)$，单调递增区间为 $(2,+\infty)$

极小值为 $g(2)=2-2\ln 2-a$，无极大值.

（Ⅱ）（i） $h(x)=x-a\ln x$ 有两个零点.

因为 $h'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$

①当 $a\le 0$ 时， $h'(x)>0$， $h(x)$ 单调递增，不可能有两个零点；

②当 $a>0$ 时，令 $h'(x)<0$，得 $0<x<a$， $h(x)$ 单调递减；

令 $h'(x)>0$，得 $x>a$， $h(x)$ 单调递增. 所以 $h(x)_{\min}=h(a)=a-a\ln a$

要使 $h(x)$ 有两个零点，即使 $h(a)<0$，得 $a>e$，

又因为 $h(1)=1>0$， $h(e)=e-a<0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 存在唯一一个零点，且 $a>e$， $h(\mathrm{e}^{a})=\mathrm{e}^{a}-a^{2}>0$，

所以 $h(x)$ 在 (e,e^{a}) 上存在唯一一个零点，符合题意.

综上，当 $a>e$ 时，函数 $h(x)$ 有两个零点.

法二： $h(x)=x-a\ln x$ 有两个零点.

等价于 $x\ne 1$ 时， $a=\frac{x}{\ln x}$ 有两个实根，(1)

令 $F(x)=\frac{x}{\ln x}$， $F'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^{2}x}$

当 $x\in(0,1)$ 时， $F'(x)<0$， $F(x)$ 单调递减，且 $F(x)<0$；

当 $x\in(1,e)$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增；

$F(e)=e$，$x\to1^{+}$，$F(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$，$F(x)\to+\infty$.

要使（1）有两个实数根，即使 $a>F(e)=e$，

综上，当 $a>e$ 时，函数 $h(x)$ 有两个零点.

（ii）$x\mathrm{e}^{x}-a(\ln x+x)=x\mathrm{e}^{x}-a\ln\left(x\mathrm{e}^{x}\right)(x>0)$ 有两个实根，令 $t=x\mathrm{e}^{x}$，

$g(t)=t-a\ln t$ 有两个零点 t_1，t_2，$t_1=x_1\mathrm{e}^{x_1}$，$t_2=x_2\mathrm{e}^{x_2}$，

所以 $\begin{cases}t_1-a\ln t_1=0\\t_2-a\ln t_2=0\end{cases}$，所以 $a(\ln t_2-\ln t_1)=t_2-t_1$（1）；$a(\ln t_2+\ln t_1)=t_2+t_1$　　（2）

要证 $e^{x_1+x_2}>\dfrac{e^2}{x_1x_2}$，只需证 $\left(x_1e^{x_1}\right)\cdot\left(x_2e^{x_2}\right)>e^2$，即证 $\ln\left(x_1e^{x_1}\right)+\ln\left(x_2e^{x_2}\right)>2$，

所以只需证 $\ln t_1+\ln t_2>2$.

由（1）（2）可得 $\ln t_2+\ln t_1=\dfrac{t_2+t_1}{t_2-t_1}(\ln t_2-\ln t_1)=\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}$，只需证 $\dfrac{\left(\dfrac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\dfrac{t_2}{t_1}}{\dfrac{t_2}{t_1}-1}>2$.

设 $0<t_1<t_2$，令 $t=\dfrac{t_2}{t_1}$，则 $t>1$，所以只需证 $\ln t>2\dfrac{t-1}{t+1}$，即证 $\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>0$

令 $h(t)=\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2$，$t>1$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

$h(t)>h(1)=0$，即当 $t>1$ 时，$\ln t+\dfrac{4}{t+1}-2>0$ 成立.

所以 $\ln t_1+\ln t_2>2$，即 $\left(x_1e^{x_1}\right)\cdot\left(x_2e^{x_2}\right)>e^2$，即 $x_1x_2>\dfrac{e^2}{e^{x_1+x_2}}$.

13. 已知函数 $f(x)=(x-2)e^{x}+a\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的极值点的个数；

（2）若 $f(x)$ 有 3 个极值点 x_1,x_2,x_3（其中 $x_1<x_2<x_3$），证明：$x_1x_3<x_2^2$.

【答案】:（1）答案见解析；（2）证明见解析.

【解析】：（1） $f'(x)=(x-1)e^x+a(x^2-x)=(x-1)(e^x+ax)$

$\because f'(0)\neq 0$，$\therefore f'(x)=x(x-1)\left(\dfrac{e^x}{x}+a\right)$，

f（x）的极值点的个数即为 $f'(x)=0$ 的变号方程根的个数

令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$，$g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，故 g（x）在（0，1）上单调递减（1，+∞）上单调递增，在（﹣∞，0）上单调递减，且当 $x<0$ 时，g（x）<0．即 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}\in(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$

根据 $y=-a$ 与 $y=g(x)$ 的交点个数可得：

当 $a>0$ 时，f（x）有 2 个极值点，当﹣$e\leqslant a\leqslant 0$ 时，f（x）只有 1 个极值点，

当 $a<-e$ 时，f（x）有 3 个极值点．

（2）证明：因为 $f(x)$有 3 个极值点 x_1,x_2,x_3（其中 $x_1<x_2<x_3$），所以 $e^{x_1}=-ax_1$，$e^{x_3}=-ax_3$ 且 $x_2=1$，即得 $\dfrac{e^{x_1}}{x_1}=\dfrac{e^{x_3}}{x_3}$，

要证 $x_1x_3<x_2^2$，即 $x_1x_3<1$，

由 $\dfrac{e^{x_1}}{x_1}=\dfrac{e^{x_3}}{x_3}$，得 $\dfrac{x_3}{x_1}=\dfrac{e^{x_3}}{e^{x_1}}=e^{x_3-x_1}$，设 $\dfrac{x_3}{x_1}=k$，$k>1$，$e^{x_3-x_1}=k$，所以 $x_3-x_1=\ln k$，

联立 $\begin{cases}x_3-x_1=lnk\\ \dfrac{x_3}{x_1}=k\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{lnk}{k-1},\\ x_3=\dfrac{klnk}{k-1},\end{cases}$ 所以 $x_1x_3=\dfrac{k(lnk)^2}{(k-1)^2}$，

所以要证 $x_1x_3<1$，只需 $\dfrac{k(lnk)^2}{(k-1)^2}<1$，$k>1$，

则有 $(lnk)^2<\dfrac{(k-1)^2}{k}$，即 $lnk<\dfrac{k-1}{\sqrt{k}}=\sqrt{k}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}$，则需证明 $lnk-\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k}}<0$．

令 $\sqrt{k}=t$，$t>1$，即需证明 $h(t)=lnt^2-t+\dfrac{1}{t}<0$．

因为 $h'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{-t^2+2t-1}{t^2}=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}<0$ 恒成立，

所以 h（t）在 $t\in$（1，+∞）上是单调递减函数，则有 $h(t)<h(1)=ln1-1+\dfrac{1}{1}=0$，

即 $h(t)=lnt^2-t+\dfrac{1}{t}<0$ 成立，所以 $x_1x_3<1$，即 $x_1x_3<x_2^2$ 得以证明．

极值点偏移 3：非纯偏移（不等式解法）

14. 已知函数 $f\left(x\right)=xe^{-x}$ （$x\in R$），如果 $x_1\neq x_2$，且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，证明 $x_1+x_2>2$.

【答案】:

【解析】：原题目有 3 问，其中第二问为第三问的解答提供帮助，现在我们利用不等式直接去证明第三问：

设 $f(x_1)=f(x_2)=c$，则 $\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=c$，$\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=c$，$(x_1\neq x_2)$ 两边取对数

$\ln x_1-x_1=\ln c$ ①；$\ln x_2-x_2=\ln c$ ②

①-②得：$\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$

根据对数平均值不等式：$\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=1$，$\therefore x_1+x_2>2$.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax^2+\left(2-a\right)x$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）设 $a>0$，证明：当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f\left(\dfrac{1}{a}+x\right)>f\left(\dfrac{1}{a}-x\right)$；

（3）若函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像与 x 轴交于 A,B 两点，线段 AB 中点的横坐标为 x_0，证明：$f'\left(x_0\right)<0$.

【答案】:（Ⅰ）$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 单调增加，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 单调减少；

（Ⅱ）当 $0<x<\dfrac{1}{a}$，$f\left(\dfrac{1}{a}+x\right)>f\left(\dfrac{1}{a}-x\right)$；（Ⅲ）见解析.

【解析】:（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+(2-a)=-\dfrac{(2x+1)(ax-1)}{x}$.

（i）若 $a\leq 0$,则$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$ 单调增加.

（ii）若 $a>0$,则由$f'(x)=0$得$x=\dfrac{1}{a}$,且当$x\in(0,\dfrac{1}{a})$时,$f'(x)>0$,当$x>\dfrac{1}{a}$时,$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$ 单调增加，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调减少.

（II）设函数 $g(x)=f(\dfrac{1}{a}+x)-f(\dfrac{1}{a}-x)$,则 $g(x)=\ln(1+ax)-\ln(1-ax)-2ax$,

$g'(x)=\dfrac{a}{1+ax}+\dfrac{a}{1-ax}-2a=\dfrac{2a^3x^2}{1-a^2x^2}$.

当$0<x<\frac{1}{a}$时，$g'(x)>0$，而$g(0)=0$，所以$g(x)>0$.

故当$0<x<\frac{1}{a}$时，$f(\frac{1}{a}+x)>f(\frac{1}{a}-x)$.

（III）由（I）可得，当$a\le 0$时，函数$y=f(x)$的图像与 x 轴至多有一个交点，

故$a>0$，从而$f(x)$的最大值为$f(\frac{1}{a})$，且$f(\frac{1}{a})>0$.

不妨设$A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$0<x_1<x_2$，则$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$．$\therefore\frac{2}{a}-x_1>\frac{2}{a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

由（II）得$f(\frac{2}{a}-x_1)=f(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-x_1)>f(x_1)=0$. 从而$x_2>\frac{2}{a}-x_1$，于是$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{a}$.

由（I）知，$f'(x_0)<0$.

【解法二】：设$A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，$x_1<x_2$，则$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，

$\ln x_1-ax_1^2+(2-a)x_1=0$ ①；$\ln x_2-ax_2^2+(2-a)x_2=0$ ②

①-②得：$\ln x_1-\ln x_2-a(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(2-a)(x_1-x_2)=0$，

化简得：$\frac{1}{a(x_1+x_2)-(2-a)}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>0$ ③

而根据对数平均值不等式：$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

③等式代换到上述不等式$\frac{1}{a(x_1+x_2)-(2-a)}<\frac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow\frac{1}{2ax_0-(2-a)}<x_0$ ④

根据：$2ax_0-(2-a)x_0>0$（由③得出）∴④式变为：$2ax_0^2-(2-a)x_0-1>0\Rightarrow(2x_0+1)(ax_0-1)>0$

$\because(2x_0+1)>0$，$\therefore x_0>\frac{1}{a}$，$\therefore x_0$在函数单减区间中，即：$\therefore f'(x_0)<0$.

17. 设函数$f\left(x\right)=\ln x-ax^2+\left(2-a\right)x$的两个零点是$x_1,x_2$，求证：$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

【答案】:

【解析】：证法 1：首先易知 $a>0$，且 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上 ↗，在 $\left(\dfrac{1}{a}\infty\right)$ 上 ↘，不妨设 $0<x_1<\dfrac{1}{a}<x_2$，

$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0\Leftrightarrow a\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}-1>0\Leftrightarrow x_1+x_2>\dfrac{2}{a}$，构造函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(\dfrac{2}{a}-x\right)$ 可证.

证法 2：由题意得 $\begin{cases}\ln x_1-ax_1^2+\left(2-a\right)x_1=0\\ \ln x_2-ax_2^2+\left(2-a\right)x_2=0\end{cases}$，两式相减得

$\ln x_1-\ln x_2-a\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)+\left(2-a\right)\left(x_1-x_2\right)=0$，

$\ln x_1-\ln x_2=\left(x_1-x_2\right)\left(a\left(x_1+x_2\right)+a-2\right)$，

$\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\dfrac{1}{a\left(x_1+x_2\right)+a-2}>0$，

所以 $\dfrac{1}{a\left(x_1+x_2\right)+a-1}<\dfrac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow a\left(x_1+x_2\right)^2+\left(a-2\right)\left(x_1+x_2\right)-2>0$

$\Rightarrow\left(a\left(x_1+x_2\right)-2\right)\left(x_1+x_2+1\right)>0\Rightarrow x_1+x_2>\dfrac{2}{a}\Rightarrow f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x$ 与直线 $y=m$ 交于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点. 求证：$0<x_1x_2<\dfrac{1}{e^2}$

【答案】:

【解析】：由 $x_1\ln x_1=m$，$x_2\ln x_2=m$，可得：$x_1=\dfrac{m}{\ln x_1}$ ①，$x_2=\dfrac{m}{\ln x_2}$ ②

①−②得：$x_1-x_2=m(\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\ln x_1\ln x_2})\Rightarrow\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\dfrac{-m}{\ln x_1\ln x_2}$ ③

①+②得：$x_1+x_2=\dfrac{m(\ln x_2+\ln x_1)}{\ln x_1\ln x_2}$ ④

根据对数平均值不等式：$\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{-m}{\ln x_1-\ln x_2}(x_1\neq x_2)$

利用③④式可得：$\dfrac{m(\ln x_1+\ln x_2)}{2\ln x_1\ln x_2}>\dfrac{-m}{\ln x_1\ln x_2}$

由题于 $y=m$ 与 $y=x\ln x$ 交于不同两点，易得出则 $m<0$

∴上式简化为: $\ln(x_1\cdot x_2)<-2=\ln e^{-2}$，∴ $0<x_1x_2<\dfrac{1}{e^2}$.

19. 设函数 $f\left(x\right)=e^{x}-ax+a$ （$a\in R$），其图像与 x 轴交于 $A\left(x_1,0\right),B\left(x_2,0\right)$ 两点，且 $x_1<x_2$.

（1）求 a 的取值范围；

（2）证明：$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$；

（3）证明：$f'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)<0$.

【答案】:（Ⅰ）$a>e^2$；（Ⅱ）证明见解析.

【解析】:（Ⅰ）因为 $f\left(x\right)=e^{x}-ax+a,a\in R$，所以 $f'\left(x\right)=e^{x}-a$.

若 $a\le 0$，则 $f'\left(x\right)>0$，则函数 $f\left(x\right)$ 是单调增函数，$f\left(x\right)$ 的图像与 x 轴至多有一个交点，这与题设矛盾.

所以 $a>0$，令 $f'\left(x\right)=0$，则 $x=\ln a$.

当 $x<\ln a$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 是单调减函数；$x>\ln a$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 是单调增函数；

于是当 $x=\ln a$ 时，$f\left(x\right)$ 取得极小值.

因为函数 $f\left(x\right)=e^{x}-ax+a\left(a\in R\right)$ 的图像与 x 轴交于两点 $A\left(x_1,0\right)$，$B\left(x_2,0\right)\left(x_1<x_2\right)$，

所以 $f\left(\ln a\right)=a\left(2-\ln a\right)<0$，即 $a>e^2$.

此时，存在 $1<\ln a$，$f\left(1\right)=e>0$；存在 $3\ln a>\ln a$，又 $a>\ln a$

$$f\left(3\ln a\right)=a^3-3a\ln a+a>a^3-3a^2+a=a\left[\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right]>0,$$

又 $f\left(x\right)$ 在 R 上连续，故 $a>e^2$.

（Ⅱ）证明：因为 $\begin{cases}e^{x_1}-ax_1+a=0\\e^{x_2}-ax_2+a=0\end{cases}$，两式相减得 $a=\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$.

记 $\dfrac{x_2-x_1}{2}=s\left(s>0\right)$，

则 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=e^{\frac{x_1+x_2}{2}}-\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{x_2-x_1}\left[x_2-x_1-\left(e^{\frac{x_2-x_1}{2}}-e^{-\frac{x_2-x_1}{2}}\right)\right]=\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}\left[2s-\left(e^{s}-e^{-s}\right)\right]$，

设 $g\left(s\right)=2s-\left(e^{s}-e^{-s}\right)$，因为 $s>0$，所以 $e^{s}>1,e^{-s}>0$，$e^{s}+e^{-s}\ge 2\sqrt{e^{s}\cdot e^{-s}}=2$，当且仅当 $e^{s}=e^{-s}$ 时，即

$e^{s}=e^{-s}=1,s=0$，而 $s>0$，所以 $e^{s}+e^{-s}>2$，

则 $g'\left(s\right)=2-\left(e^{s}+e^{-s}\right)<0$，所以 $g\left(s\right)$ 是单调减函数，

则有 $g(s)<g(0)=0$，而 $\dfrac{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}{2s}>0$，所以 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

（III）【解法一】根据题意：$e^{x_1}-ax_1+a=0$，$e^{x_2}-ax_2+a=0$ 移项取对数得：

$x_1=\ln(x_1-1)+\ln a$ ①；$x_2=\ln(x_2-1)+\ln a$ ②

①−②得：$x_1-x_2=\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)$，即：$\dfrac{(x_1-1)-(x_2-1)}{\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)}=1$

根据对数平均值不等式：$\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}<\dfrac{(x_1-1)-(x_2-1)}{\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)}=1$

$\therefore(x_1-1)(x_2-1)<1\Rightarrow\ln(x_1-1)(x_2-1)<0$，①+②得：$x_1+x_2=2\ln a+\ln(x_1-1)(x_2-1)<2\ln a$

根据均值不等式：$\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln a$

$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减，$\therefore$ $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$.

由(1)知，$f(x)$ 在$(-\infty,\ln a)$ 内递减，在$(\ln a,+\infty)$ 内递增，且 $f(1)=e>0$，

所以 $1<x_1<\ln a<x_2<2\ln a$，

要证 $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$，只须证 $e^{\sqrt{x_1x_2}}<a$，

即证 $\sqrt{x_1x_2}<\ln a$.

又 $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$，故只须证 $x_1+x_2<2\ln a$.

令 $h(x)=f(x)-f(2\ln a-x)=e^x-ax+a-e^{2\ln a-x}+a(2\ln a-x)-a,=e^x-a^2e^{-x}-2ax+2a\ln a,1<x<\ln a$，

则 $h'(x)=e^x+a^2e^{-x}-2a\geqslant 2\sqrt{e^xa^2e^{-x}}-2a=0$，所以 $h(x)$ 在区间$(1,\ln a)$ 内递增，

所以 $h(x)<e^{\ln a}-a^2e^{-\ln a}-2a\ln a+2a\ln a=0$，即 $f(x)<f(2\ln a-x)$，

所以 $f(x_1)<f(2\ln a-x_1)$，所以 $f(x_2)<f(2\ln a-x_2)$.

因为 $x_2>\ln a,2\ln a-x_1>\ln a$，且 $f(x)$ 在区间$(\ln a,+\infty)$ 内递增，

所以 $x_2<2\ln a-x_1$，即 $x_1+x_2<2\ln a$，

故 $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$.

解法二：

由(1)知，$f(x)$ 在$(-\infty,\ln a)$ 内递减，在$(\ln a,+\infty)$ 内递增，且 $f(1)=e>0$，

所以 $1<x_1<\ln a<x_2<2\ln a$，

因为 $f(x_1)=e^{x_1}-ax_1+a=0,f(x_2)=e^{x_2}-ax_2+a=0$，

则 $a=\dfrac{e^{x_1}}{x_1-1}=\dfrac{e^{x_2}}{x_2-1}$，即$\dfrac{e^{x_1-1}}{x_1-1}=\dfrac{e^{x_2-1}}{x_2-1}$，

所以 $1=\dfrac{(x_1-1)-(x_2-1)}{\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)}>\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}$，

所以 $x_1x_2-(x_1+x_2)<0$，要证 $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$，只须证

$^{\overline{x_1x_2}}<a$，即 $\sqrt{x_1x_2}<\ln a$，

故 $\sqrt{x_1x_2}<x_1-\ln(x_1-1),\sqrt{x_1x_2}<x_2-\ln(x_2-1)$，

所以 $2\sqrt{x_1x_2}<x_1+x_2-\ln(x_1-1)(x_2-1)$，

所以 $\ln(x_1x_2-(x_1+x_2)+1)<x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}$.

因为 $x_1x_2-(x_1+x_2)<0$，

所以 $\ln(x_1x_2-(x_1+x_2)+1)<\ln 1=0$，

而 $x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}>0$，

所以 $\ln(x_1x_2-(x_1+x_2)+1)<x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}$ 成

所以 $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$.