湛江一中 2023 届高三卓越班　NLXF2023—17

高三数学一轮复习——概率解答题——二项分布、超几何分布、正态分布 1

1．(1)解：记阳性人数为ξ，则$\xi\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，$P\left(\xi=0\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$，$P\left(\xi=1\right)=\mathrm{C}_4^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$，

$P\left(\xi=2\right)=\mathrm{C}_4^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$，$P\left(\xi=3\right)=\mathrm{C}_4^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$，$P\left(\xi=4\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$，

所以，随机变量ξ的分布列如下表所示：（表略）　　所以，$E\left(\xi\right)=np=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

(2)解：记所需化验次数为X，则X的可能取值为2、$k+2$、$2k+2$，$\because p=1-2^{-\frac{1}{4}}$，则$1-p=2^{-\frac{1}{4}}$，

所以，$P\left(X=2\right)=\left(2^{-\frac{k}{4}}\right)^2$，$P\left(X=k+2\right)=\mathrm{C}_2^1\cdot2^{-\frac{k}{4}}\left(1-2^{-\frac{k}{4}}\right)$，$P\left(X=2k+2\right)=\left(1-2^{-\frac{k}{4}}\right)^2$，

$$E\left(X\right)=2\times2^{-\frac{k}{2}}+2\left(k+2\right)\cdot2^{-\frac{k}{4}}\cdot\left(1-2^{-\frac{k}{4}}\right)+\left(2k+2\right)\cdot\left(1-2^{-\frac{k}{4}}\right)^2=2+2k\left(1-2^{-\frac{k}{4}}\right),$$

令$2k-E\left(X\right)=2k\cdot2^{-\frac{k}{4}}-2>0$，可得$k>2^{\frac{k}{4}}$，则$\frac{1}{k}<2^{-\frac{k}{4}}$，所以，$-\frac{k}{4}>\log_2\frac{1}{k}$，即$\log_2k-\frac{k}{4}>0$，

令$f\left(k\right)=\log_2k-\frac{k}{4}\left(k\geq2\right)$，则$f'\left(k\right)=\frac{1}{k\ln2}-\frac{1}{4}=\frac{4-k\ln2}{4k\ln2}$.

当$2\leq k<\frac{4}{\ln2}$时，$f'\left(k\right)>0$，此时函数$f\left(k\right)$单调递增，

当$k>\frac{4}{\ln2}$时，$f'\left(k\right)<0$，此时函数$f\left(k\right)$单调递减，

$\because f\left(2\right)=\log_22-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}>0$，当$k\in\left[2,\frac{4}{\ln2}\right)$时，$f\left(k\right)>0$恒成立，

$\because f\left(16\right)=\log_216-\frac{16}{4}=0$，则当$k\in\left[\frac{4}{\ln2},16\right)$时，$f\left(k\right)>0$恒成立，

当$k\in\left(16,+\infty\right)$时，$f\left(k\right)<0$恒成立.

综上所述，当$k\in\left[2,16\right)$且$k\in\mathrm{N}$时，$f\left(k\right)>0$，则$E\left(X\right)<2k$，

当$k=16$时，$f\left(k\right)=0$，则$E\left(X\right)=2k$，

当$k\in\left(16,+\infty\right)$且$k\in\mathrm{N}$时，$f\left(k\right)<0$，则$E\left(X\right)>2k$.

2．(1)甲滑雪用时比乙多$5\times36=180$秒$=3$分钟，

因为前三次射击，甲、乙两人的被罚时间相同，所以在第四次射击中，甲至少要比乙多命中 4 发子弹.

设“甲胜乙”为事件 A，“在第四次射击中，甲有 4 发子弹命中目标，乙均未命中目标”为事件 B，

“在第四次射击中，甲有 5 发子弹命中目标，乙至多有 1 发子弹命中目标”为事件 C，

依题意，事件 B 和事件 C 是互斥事件，$A=B+C$

$P(B)=\mathrm{C}_5^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5$，$P(C)=\left(\frac{3}{4}\right)^5\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5+\mathrm{C}_5^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}\right]$，所以，$P(A)=P(B)+P(C)=\frac{19}{1536}$.

所以甲胜乙的概率为$\frac{19}{1536}$.

(2)依题意得，甲选手在比赛中未击中目标的子弹数为 X，乙选手在比赛中未击中目标的子弹数为 Y，则$X\sim B\left(20,\frac{1}{4}\right)$，

$Y\sim B\left(20,\frac{1}{3}\right)$，所以甲被罚时间的期望为$1\times E(X)=1\times20\times\frac{1}{4}=5$（分钟），

乙被罚时间的期望为$1\times E(Y)=1\times20\times\frac{1}{3}=\frac{20}{3}$（分钟），

又在赛道上甲选手滑行时间慢 3 分钟，则甲最终用时的期望比乙多$5+3-\frac{20}{3}=\frac{4}{3}$分钟，

因此，仅从最终用时考虑，乙选手水平更高.

3．（1）解：X可取 5，6，7，8，9，10，

$P\left(X=5\right)=C_5^0?\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，$P\left(X=6\right)=C_5^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$，$P\left(X=7\right)=C_5^2?\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$，

$P\left(X=8\right)=C_5^3?\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$，$P\left(X=9\right)=C_5^4?\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$，$P\left(X=10\right)=C_5^5?\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，

分布列如下：（表略）

所以$E\left(X\right)=5\times\frac{1}{32}+6\times\frac{5}{32}+7\times\frac{5}{16}+8\times\frac{5}{16}+9\times\frac{5}{32}+10\times\frac{1}{32}=7.5$（分）；

（2）解：设一天得分不低于 3 分为事件 A，则$P\left(A\right)=\left[1-\left(1-p\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=1-\frac{2}{3}\left(1-p\right)=\frac{2p+1}{3}$，

则恰有 3 天每天得分不低于 3 分的概率 $f\left(p\right)=C_5^3\left(\frac{2p+1}{3}\right)^3\cdot\left(1-\frac{2p+1}{3}\right)^2=\frac{40}{243}\left(2p+1\right)^3\left(1-p\right)^2$，$0<p<1$

则 $f'\left(p\right)=\frac{40}{243}\times6\left(2p+1\right)^2\left(1-p\right)^2-\frac{40}{243}\times2\left(2p+1\right)^3\left(1-p\right)=\frac{40}{243}\left(2p+1\right)^2\left(1-p\right)\left(4-10p\right)$，

当$0<p<\frac{2}{5}$时，$f'\left(p\right)>0$，当$\frac{2}{5}<p<1$时，$f'\left(p\right)<0$，所以函数 $f\left(p\right)$ 在$\left(0,\frac{2}{5}\right)$上递增，在$\left(\frac{2}{5},1\right)$上递减，

所以当 $p=\frac{2}{5}$ 时，$f\left(p\right)$ 取得最大值.

4．解：（1）由题意知 $X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，则$P\left(X=0\right)=\mathrm{C}_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P\left(X=1\right)=C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，

$P\left(X=2\right)=\mathrm{C}_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$，$P\left(X=3\right)=C_3^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，

所以 X 的分布列为

$E\left(X\right)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

（2）由（1）可知在一局游戏中，甲得 3 分的概率为$\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$，得 1 分的概率为$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$，

若选择$n=k$，此时要能获得大奖，则需 $2k$ 次游戏的总得分大于 $4k$，

设 $2k$ 局游戏中，得 3 分的局数为 m，则$3m+\left(2k-m\right)>4k$，即$m>k$.

易知$m\sim B\left(2k,\frac{1}{2}\right)$，

故此时获大奖的概率

$$P_1=P\left(m>k\right)=\mathrm{C}_{2k}^{k+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\mathrm{C}_{2k}^{k+2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\cdots+\mathrm{C}_{2k}^{2k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\left(\mathrm{C}_{2k}^{k+1}+\mathrm{C}_{2k}^{k+2}+\cdots+\mathrm{C}_{2k}^{2k}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{C}_{2k}^0+\mathrm{C}_{2k}^1+\cdots+\mathrm{C}_{2k}^{2k}-C_{2k}^k\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\frac{1}{2}\left(2^{2k}-C_{2k}^k\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\right)$$

同理可以求出当$n=k+1$，获大奖的概率为$P_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mathrm{C}_{2k+2}^{k+1}}{2^{2k+2}}\right)$

因为$\dfrac{\frac{\mathrm{C}_{2k}^k}{2^{2k}}}{\frac{\mathrm{C}_{2k+2}^{k+1}}{2^{2k+2}}}=\dfrac{4\mathrm{C}_{2k}^k}{\mathrm{C}_{2k+2}^{k+1}}=\dfrac{4\frac{\left(2k\right)!}{\left(k!\right)\left(k!\right)}}{\frac{\left(2k+2\right)!}{\left[\left(k+1\right)!\right]\left[\left(k+1\right)!\right]}}=\dfrac{4\left(k+1\right)^2}{\left(2k+2\right)\left(2k+1\right)}=\dfrac{2\left(k+1\right)}{2k+1}>1$

所以$\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}>\frac{C_{2k+2}^{k+1}}{2^{2k+2}}$，则$P_1<P_2$，故甲选择$n=k+1$时，获奖的概率更大.

5．【详解】（1）（i）因为$k=2$，所以控制系统中正常工作的元件个数 X 的可能取值为 0，1，2，3；

因为每个元件的工作相互独立，且正常工作的概率均为$p=\frac{2}{3}$，所以 $X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，

所以$P\left(X=0\right)=C_3^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$P\left(X=1\right)=C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$ $P\left(X=2\right)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$，

$P\left(X=3\right)=C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$，

所以控制系统中正常工作的元件个数 X 的分布列为：

控制系统中正常工作的元件个数 X 的数学期望为 $E\left(X\right)=3\times\frac{2}{3}=2$；

（ii）由题意知：$P_3=C_5^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+C_5^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1+C_5^5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{80}{243}+\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{192}{243}=\frac{64}{81}$；

（2）升级改造后单位时间内产量的分布列为

产量	$4a$	0
设备运行概率	p_k	$1-p_k$

所以升级改造后单位时间内产量的期望为 $4ap_k$；

所以

产品类型	高端产品	一般产品
产量（单位：件）	ap_k	$3ap_k$
利润（单位：元）	2	1

设备升级后单位时间内的利润为 $y=2ap_k+3ap_k=5ap_k$，即 $y=5ap_k$；

因为控制系统中元件总数为奇数，若增加 2 个元件，则第一类：原系统中至少有 $k+1$ 个元件正常工作，其概率为 $p\left(1\right)=p_k-C_{2k-1}^{k}p^k\left(1-p\right)^{k-1}$；

第二类：原系统中恰好有 k 个元件正常工作，新增 2 个元件中至少有 1 个正常工作，其概率为 $p\left(2\right)=C_{2k-2}^{k}p^k\left(1-p\right)^{k-1}\cdot\left[1-\left(1-p\right)^2\right]=C_{2k-1}^{k}p^{k+1}\left(1-p\right)^{k-1}\left(2-p\right)$；

第三类：原系统中有 $k-1$ 个元件正常工作，新增 2 个元件全部正常工作，其概率为 $p\left(3\right)=C_{2k-1}^{k-1}p^{k-1}\left(1-p\right)^k\cdot p^2=C_{2k-1}^{k-1}p^{k+1}\left(1-p\right)^k$；

所以 $p_{k+1}=p_k-C_{2k-1}^{k}p^k\left(1-p\right)^{k-1}+C_{2k-1}^{k}p^{k+1}\left(1-p\right)^{k-1}\left(2-p\right)+C_{2k-1}^{k-1}p^{k+1}\left(1-p\right)^k=p_k+C_{2k-1}^{k}p^k\left(1-p\right)^k\left(2p-1\right)$，

即 $p_{k+1}-p_k=C_{2k-1}^{k}p^k\left(1-p\right)^k\left(2p-1\right)$，所以当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$p_{k+1}-p_k>0$，p_k 单调递增，

即增加元件个数设备正常工作的概率变大，当 $p\le\frac{1}{2}$ 时，$p_{k+1}-p_k\le 0$，

即增加元件个数设备正常工作的概率没有变大，又因为 $y=5ap_k$，

所以当 $p>\frac{1}{2}$ 时，设备可以通过增加控制系统中元件的个数来提高利润；

当 $p\le\frac{1}{2}$ 时，设备不可以通过增加控制系统中元件的个数来提高利润.

6.（1）由频率分布直方图得：$2(0.02+0.03+0.05+0.05+0.15+a+0.05+0.04+0.01)=1$，

解得 $a=0.10$，$0.10\times2=0.20$，所以日平均阅读时间在 $\left(10,12\right]$ 内的概率为 0.20；

（2）由频率分布直方图得：

这 500 名学生中日平均阅读时间在 $(12，14]$，$(14，16]$，$(16，18]$ 三组内的学生人数分别为：$500\times0.10=50$ 人，$500\times0.08=40$ 人，$500\times0.02=10$ 人，

若采用分层抽样的方法抽取了 10 人，

则从日平均阅读时间在 $(14，16]$ 内的学生中抽取：$\frac{40}{50+40+10}\times10=4$ 人，

现从这 10 人中随机抽取 3 人，则 X 的可能取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$，

$\therefore X$ 的分布列为：（略））

数学期望 $E\left(X\right)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.

（3）$k=5$，理由如下：

由频率分布直方图得学生日平均阅读时间在 $\left(8,12\right]$ 内的概率为 0.50，从该地区所有高一学生中随机抽取 10 名学生，恰有 k 名学生日平均阅读时间在 $\left(8,12\right]$ 内的分布列服从二项分布 $X\sim B(10,0.50)$，$P(k)=\mathrm{C}_{10}^{k}(\frac{1}{2})^k(1-\frac{1}{2})^{10-k}=\mathrm{C}_{10}^{k}(\frac{1}{2})^{10}$，

由组合数的性质可得 $k=5$ 时 $P\left(k\right)$ 最大.

7.（1）选择方案一若享受到免单优惠，则需要摸出三个红球，

设顾客享受到免单优惠为事件 A，则 $P(A)=\dfrac{C_2^2C_1^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$，

所以两位顾客均享受到免单的概率为 $P=P(A)\cdot P(A)=\dfrac{1}{14400}$；

（2）若选择方案一，设付款金额为 X 元，则 X 可能的取值为 0、500、700、1000.

$P(X=0)=\dfrac{C_2^2C_1^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$，$P(X=500)=\dfrac{C_2^2C_7^1}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{120}$，

$P(X=700)=\dfrac{C_1^1C_7^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{40}$，$P(X=1000)=1-\dfrac{1}{120}-\dfrac{7}{120}-\dfrac{7}{40}=\dfrac{91}{120}$.

故 X 的分布列为：（略）

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{120}+500\times\dfrac{7}{120}+700\times\dfrac{7}{40}+1000\times\dfrac{91}{120}=910$（元）.

若选择方案二，设摸到红球的个数为 Y，付款金额为 Z，则 $Z=1000-200Y$，

由已知可得 $Y\sim B\left(3,\dfrac{3}{10}\right)$，故 $E(Y)=3\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{10}$，所以 $E(Z)=E(1000-200Y)=1000-200E(Y)=820$（元）.

因为 $E(X)>E(Z)$，所以该顾客选择第二种抽奖方案更合算.

8.（1）设化学成绩获得 A 等级的学生原始成绩为 x，等级成绩为 y，由转换公式得：

$\dfrac{95-x}{x-85}=\dfrac{100-y}{y-86}$，即：$y=\dfrac{14(x-85)}{10}+86=\dfrac{14x-330}{10}$，所以 $\dfrac{14x-330}{10}\geq 96$，得：$x\geq 92.1$，

显然原始成绩满足 $x\geq 92.1$ 的同学有 3 人，获得 A 等级的考生有 15 人.

恰好有 1 名同学的等级成绩不小于 96 分的概率为 $P=\dfrac{C_3^1C_{12}^1}{C_{15}^2}=\dfrac{12}{35}$.

（2）由题意可得：等级成绩不小于 96 分人数为 3 人，获得 A 等级的考生有 15 人，

$P(\xi=0)=\dfrac{C_3^0C_{12}^5}{C_{15}^5}=\dfrac{24}{91}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_3^1C_{12}^4}{C_{15}^5}=\dfrac{45}{91}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_3^2C_{12}^3}{C_{15}^5}=\dfrac{20}{91}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_3^3C_{12}^2}{C_{15}^5}=\dfrac{2}{91}$

则分布列为：（略）

则期望为：$E\xi=\dfrac{45}{91}+2\cdot\dfrac{20}{91}+3\cdot\dfrac{2}{91}=1$

9.（1）结合频率分布直方图，得用分层随机抽样抽取 8 个口罩，其中二级、一级口罩的个数分别为 6，2，所以 X 的可能取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3C_2^0}{C_8^3}=\dfrac{5}{14}$，$P(X=1)=\dfrac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{28}$，$P(X=2)=\dfrac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\dfrac{3}{28}$，

所以 X 的分布列为：（略）

所以 $EX=0\times\dfrac{5}{14}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{3}{28}=\dfrac{3}{4}$.

（2）①由题意，知 Y 的可能取值为 0，1，2.

$P(Y=0)=\left[1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right]^2=\dfrac{(n^2+4n+3)^2}{(n+2)^4}$，$P(Y=1)=2\left[1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right]\times\dfrac{1}{(n+2)^2}=\dfrac{2}{(n+2)^2}-\dfrac{2}{(n+2)^4}$，

$P(Y=2)=\dfrac{1}{(n+2)^4}$，所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\dfrac{(n^2+4n+3)^2}{(n+2)^4}$	$\dfrac{2}{(n+2)^2}-\dfrac{2}{(n+2)^4}$	$\dfrac{1}{(n+2)^4}$

所以 $EY=0\times\dfrac{(n^2+4n+3)^2}{(n+2)^4}+1\times\left[\dfrac{2}{(n+2)^2}-\dfrac{2}{(n+2)^4}\right]+2\times\dfrac{1}{(n+2)^4}=\dfrac{2}{(n+2)^2}$.

因为 $Z=nY$，所以 $EZ=nEY=\dfrac{2n}{(n+2)^2}=\dfrac{2}{n+\dfrac{4}{n}+4}\leq\dfrac{1}{4}$，当且仅当 $n=2$ 时取等号.

所以 EZ 取最大值时，n 的值为 2.

10.（1）由题意，事件“从小区超市购买甲类生活物资的居民户中任意选取 1 户，购买量在 $[3,4)$”发生的概率为 $p=\frac{1}{4}$.

①记事件“从小区超市购买甲类生活物资的居民户中任意选取 5 户，则至少有两户购买量在 $[3,4)$”为 A，则

$P(A)=1-C_5^1\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^4-\left(1-\frac{1}{4}\right)^5=\frac{47}{128}$.

②随机变量 ξ 所有可能的取值为 0，1，2.则

$P(\xi=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(\xi=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，$P(\xi=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，

所以 ξ 的分布列为：（略）

所以 $E(\xi)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

（2）每天对甲类生活物资的需求平均值为

$1.5\times0.10+2.5\times0.30+3.5\times0.25+4.5\times0.20+5.5\times0.15=3.5$（kg）

则购买甲类生活物资为“迫切需求户”的购买量为 $[4,6]$，从小区随机抽取中随机抽取一户为“迫切需求户”的概率为 $p=0.35$，

若从小区随机抽取 10 户，且抽到 X 户为“迫切需求户”，$X\sim B(10,0.35)$，

若 k 户的可能性最大，则 $P(X=k)=C_{10}^k p^k(1-p)^{10-k}$，$k=0,1,\cdots,10$

$\begin{cases}P(X=k)\ge P(X=k-1)\\P(X=k)\ge P(X=k+1)\end{cases}$，得 $\begin{cases}C_{10}^k(0.35)^k(0.65)^{10-k}\ge C_{10}^{k-1}(0.35)^{k-1}(0.65)^{11-k}\\C_{10}^k(0.35)^k(0.65)^{10-k}\ge C_{10}^{k+1}(0.35)^{k+1}(0.65)^{9-k}\end{cases}$，

解得 $2.85\le k\le3.85$，由于 $k\in\mathbf{N}^*$，故 $k=3$.

11.（1）$\bar{x}=(0.01\times55+0.02\times65+0.045\times75+0.02\times85+0.005\times95)\times10=74$

（2）由 $X\sim N(74,10^2)$，所以 $\mu=74,\sigma=10$，$\because P(\mu-\sigma<\zeta\le\mu+\sigma)\approx0.6827$

$P(\mu-2\sigma<\zeta\le\mu+2\sigma)\approx0.9545\ \therefore P(64<X<94)\approx\frac{0.6827}{2}+\frac{0.9545}{2}=0.8186$.

（3）小兔子开始在第 1 格，为必然事件，$P_1=1$，

点一下开始按钮，小兔子跳 1 格即移到第 2 格的概率为 $\frac{1}{2}$，即 $P_2=\frac{1}{2}$，

小兔子移到第 $n+1(2\le n\le14)$ 格的情况是下列两种，而且也只有两种情况.

①小兔子先跳到第 $n-1$ 格，又点一下开始按钮跳了 2 格，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$；

②小兔了先跳到第 n 格，乂点一下开始按钮跳了 1 格，其概率为 $\frac{1}{2}P_n$；

因为 $P_{n+1}=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{2}P_n$，所以 $P_{n+1}-P_n=-\frac{1}{2}(P_n-P_{n-1})$.

所以当 $1\le n\le14$ 时，数列 $\{P_{n+1}-P_n\}$ 是以 $P_2-P_1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ 为首项，以 $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

所以 $P_{n+1}-P_n=(P_2-P_1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

$P_{n+1}=P_1+(P_2-P_1)+(P_3-P_2)+\cdots+(P_{n+1}-P_n)=1+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right](1\le n\le14)$.所以获胜的概率 $P_{15}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{15}\right]$.

12.（Ⅰ）由 $X\sim N\left(\frac{5}{2},\frac{1}{4}\right)$，易知 $\mu=\frac{5}{2},\sigma=\frac{1}{2}$

$\therefore P(1\le X\le3)=P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx0.6827+\frac{0.9973-0.6827}{2}=0.6827+0.1573=0.84$，

则预估该地区某辆家用汽车导航精确度在 $[1,3]$ 的概率为 0.84.

（Ⅱ）（ⅰ）由题意知$Y\sim H\left(4,3,30\right)$，$P\left(Y=i\right)=\dfrac{C_3^iC_{27}^{4-i}}{C_{30}^4}\left(i=0,1,2,3\right)$，

∴Y的分布列为：（略）

∴$E\left(Y\right)=0\times\dfrac{130}{203}+1\times\dfrac{65}{203}+2\times\dfrac{39}{1015}+3\times\dfrac{1}{1015}=\dfrac{2}{5}$.

（ⅱ）5 个基地相互独立，每个基地随机选取 1 颗卫星是中圆地球轨道卫星的概率为$\dfrac{24}{30}=\dfrac{4}{5}$，所以 5 个基地选取的 5 颗卫星中含中圆地球轨道卫星的数目$\xi\sim B\left(5,\dfrac{4}{5}\right)$，∴$E\left(\xi\right)=np=5\times\dfrac{4}{5}=4$.

13．解：（1）由频率分布直方图可知：

$\overline{x}=17\times0.02+18\times0.09+19\times0.22+20\times0.33+21\times0.24+22\times0.08+23\times0.02=20$，

故估计 50 位农民的年平均收入$\overline{x}$为 20 千元.

（2）由题意知$X\sim N\left(20,1.22^2\right)$，①因为$P\left(X>\mu-\sigma\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{0.6827}{2}\approx0.84135$，

$20-1.22=18.78$时，满足题意，即最低年收入标准大约为18.78千元；

②由$P\left(X\geq17.56\right)=P\left(X\geq\mu-2\sigma\right)=0.5+\dfrac{0.9545}{2}\approx0.97725$，

每个农民的年收入不少于17.56千元的概率为0.97725，记1000个农民的年收入不少于12.14千元的人数为ξ，

则$\xi\sim B(1000,p)$，其中$p=0.97725$，

于是恰好有k个农民的年收入不少于17.56千元的事件概率为$P\left(\xi=k\right)=C_{1000}^k\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{10^3-k}$.

从而由$\dfrac{P\left(\xi=k\right)}{P\left(\xi=k-1\right)}=\dfrac{\left(1001-k\right)\times p}{k\times\left(1-p\right)}>1$，得$k<1001p$，而$1001p=978.22725$，

所以当$0\leq k\leq978$时，$P\left(\xi=k-1\right)<P\left(\xi=k\right)$，

当$979\leq k\leq1000$时，$P\left(\xi=k-1\right)>P\left(\xi=k\right)$

由此可知，在所走访1000位农民中，年收入不少于17.56千元的人数最有可能是978人.

14．（1）由题意得：$\dfrac{30\times2+40\times13+50\times21+60\times25+70\times24+80\times11+90\times4}{100}=60.5$，

∴$\mu=60.5$，∵$\sigma=\sqrt{198}\approx14$，

$P(Z>88.5)=P(Z>\mu+2\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-2\sigma<Z\leq\mu+2\sigma)}{2}=0.0228$，

$P(60.5<Z\leq74.5)=\dfrac{P(\mu-\sigma<X\leq\mu+\sigma)}{2}=\dfrac{0.6826}{2}=0.3413$

$\therefore P\left(74.5<Z\leq88.5\right)=0.5-P(60.5<Z<74.5)-P(Z>88.5)=0.5-0.3413-0.0228=0.1359$

（2）由题意知$P\left(Z<\mu\right)=P\left(Z\geq\mu\right)=\dfrac{1}{2}$，.获赠话费$X$的可能取值为 20，40，50，70，100，

$P\left(X=20\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$，$P\left(X=40\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{32}$，$P\left(X=50\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$，

$P\left(X=70\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$，$P\left(X=100\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{32}$，.

∴X的分布列为：（略）

∴$E(X)=20\times\dfrac{3}{8}+40\times\dfrac{9}{32}+50\times\dfrac{1}{8}+70\times\dfrac{3}{16}+100\times\dfrac{1}{32}=\dfrac{165}{4}$.

15．解：（1）100 人中得分不低于 80 分的人数为$\left(0.014+0.006\right)\times10\times100=20$，

随机变量ξ可能的取值为 0，1，2.

又$P\left(\xi=0\right)=\dfrac{C_{80}^2}{C_{100}^2}=\dfrac{316}{495}$，$P\left(\xi=1\right)=\dfrac{C_{20}^1C_{80}^1}{C_{100}^2}=\dfrac{32}{99}$，$P\left(\xi=2\right)=\dfrac{C_{20}^2}{C_{100}^2}=\dfrac{19}{495}$，

则ξ的分布列为：（略）

$E\left(\xi\right)=0\times\dfrac{316}{495}+1\times\dfrac{32}{99}+2\times\dfrac{19}{495}=\dfrac{198}{495}=\dfrac{2}{5}$.

（2）$\mu=35\times0.04+45\times0.06+55\times0.11+65\times0.36+75\times0.23+85\times0.14+95\times0.06=68.4$.$\sigma=\sqrt{192.44}=13.9$，

$P\left(X\geqslant82.3\right)=P\left(X\geqslant\mu+\sigma\right)\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$，

每位参赛者分数不低于 82.3 的概率为 0.15865，记 500 位参赛者中分数不低于 82.3 的人数为随机变量η，则 $\eta \sim B(500,p)$，其中 $p=0.5865$，

所以恰好有 k 个参赛者的分数不低于 82.3 的概率为$P(\eta=k)=C_{500}^{k}p^{k}(1-p)^{500-k}$， $k=0$，1，2，…，500.

由$\dfrac{P(\eta=k)}{P(\eta=k-1)}=\dfrac{C_{500}^{k}p^{k}(1-p)^{500-k}}{C_{500}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{501-k}}=\dfrac{(501-k)p}{k(1-p)}>1$，

得$k<501p=79.4837$.

所以当$1\leqslant k\leqslant 79$时， $P(\eta=k)>P(\eta=k-1)$，

当$80\leqslant k\leqslant 500$时， $P(\eta=k)<P(\eta=k-1)$

由此可知，在这 500 名参赛者中分数不低于 82.3 的人数最有可能是 79.

16．解：（1）由题意知样本平均数为$\bar{x}=45\times0.1+55\times0.15+65\times0.2+75\times0.3+85\times0.15+95\times0.1=70.5$，$\therefore \mu=\bar{x}=70.5$，

$\because \sigma=s=14.31$，所以，$(\mu-\sigma,\mu+2\sigma]=(56.19,99.12]$，

而$P(\mu-\sigma<z\le\mu+2\sigma)=\dfrac{1}{2}P(\mu-\sigma<z\le\mu+\sigma)+\dfrac{1}{2}(\mu-2\sigma<z\le\mu+2\sigma)=0.8186$，

故 2 万名 $5G$ 手机用户中满意度得分位于区间$(56.19,99.12]$的人数约为$20000\times0.8186=16372$（人）；

（2）（ⅰ）小王获得900元话费表明其前9轮连续中奖且第10轮未中奖，故所求的概率为$P=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{9}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1024}$；

（ⅱ）由题意可知 X 的可能取值有0、100、200、300、400、500、600、700、800、900、1000，即$X=100i$，$0\le i\le10$，$i\in N$，

当$1\le i\le9$，$i\in N$时，$X=100i$，说明小王前i轮连续中奖且第$i+1$轮未中奖，此时$P(X=100i)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^{i+1}}$，

又$P(X=0)=\dfrac{1}{2}$满足$P(X=100i)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^{i+1}}$， $P(X=1000)=\dfrac{1}{2^{10}}$，

所以，$P(X=100i)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{i+1}},0\le i\le9,i\in N\\ \dfrac{1}{2^{10}},i=10\end{cases}$，

所以$E(X)=0\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2^{2}}+\dfrac{2}{2^{3}}+\dfrac{3}{2^{4}}+\cdots+\dfrac{9}{2^{10}}\right)\times100+\dfrac{1000}{2^{10}}$，

令$S=\dfrac{1}{2^{2}}+\dfrac{2}{2^{3}}+\dfrac{3}{2^{4}}+\cdots+\dfrac{9}{2^{10}}$，则$\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{2^{3}}+\dfrac{2}{2^{4}}+\dfrac{3}{2^{5}}+\cdots+\dfrac{9}{2^{11}}$，

上述两个等式相减得$\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{2^{2}}+\dfrac{1}{2^{3}}+\dfrac{1}{2^{4}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{10}}-\dfrac{9}{2^{11}}=\dfrac{\dfrac{1}{2^{2}}\left(1-\dfrac{1}{2^{9}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{9}{2^{11}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{10}}-\dfrac{9}{2^{11}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{11}{2^{11}}$，

化简得$S=1-\dfrac{11}{2^{10}}$，所以，$E(X)=\left(1-\dfrac{11}{2^{10}}\right)\times100+\dfrac{1000}{2^{10}}=100-\dfrac{25}{2^{8}}\approx99.90$（元）.

7．解：（1）由题意，估计从该企业生产的正品中随机抽取 1000 件的平均数为：

$\bar{x}=0.010\times10\times\dfrac{46+56}{2}+0.020\times10\times\dfrac{56+66}{2}+0.045\times10\times\dfrac{66+76}{2}+0.020\times10\times\dfrac{76+86}{2}+0.005\times10\times\dfrac{86+96}{2}=70$，即$\mu\approx\bar{x}=70$，

样本方差$s^{2}=100$，故$\sigma\approx\sqrt{s^{2}}=10$，所以$X\sim N(70,10^{2})$，

则优等品为质量差在$(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$内，即$(60,80)$，

一等品为质量差在$(\mu+\sigma,\mu+2\sigma)$内，即$(80,90)$，

所以正品为质量差在$(60,80)$和$(80,90)$内，即$(60,90)$，

所以该企业生产的产品为正品的概率：$P=P(60<X<90)=P(60<X<80)+P(80<X<90)=\dfrac{1}{2}\times(0.6827+0.9545)=0.8186$.

（2）①从$n+2$件正品中任选两个，有C_{n+2}^{2}种选法，其中等级相同有$C_{n}^{2}+C_{2}^{2}$种选法，

∴某箱产品抽检被记为 B 的概率为：$p=1-\dfrac{C_{n}^{2}+C_{2}^{2}}{C_{n+2}^{2}}=1-\dfrac{n^{2}-n+2}{n^{2}+3n+2}=\dfrac{4n}{n^{2}+3n+2}$.

②由题意，一箱产品抽检被记为 B 的概率为p，则 5 箱产品恰有 3 箱被记为 B 的概率为

$f(p)=C_{5}^{3}p^{3}(1-p)^{2}=10p^{3}(1-2p+p^{2})=10(p^{3}-2p^{4}+p^{5})$，

所以 $f'(p)=10(3p^2-8p^3+5p^4)=10p^2(3-8p+5p^2)=10p^2(p-1)(5p-3)$，

所以当 $p\in(0,\frac{3}{5})$ 时， $f'(p)>0$，函数 $f(p)$ 单调递增，

当 $p\in(\frac{3}{5},1)$ 时， $f'(p)<0$，函数 $f(p)$ 单调递减，

所以当 $p=\frac{3}{5}$ 时， $f(p)$ 取得最大值，最大值为 $f(\frac{3}{5})=\mathrm{C}_5^3\times(\frac{3}{5})^3\times(1-\frac{3}{5})^2=\frac{216}{625}$.

此时 $p=\frac{4n}{n^2+3n+2}=\frac{3}{5}$，解得： $n=3$，

∴ $n=3$时，5 箱产品恰有 3 箱被记为 B 的概率最大，最大值为$\frac{216}{625}$.

18．（1）随机变量 X 的所有可能的取值为$0,1,2,3$.

由题意可得：$P(X=0)=\frac{C_5^0C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$，$P(X=1)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$，$P(X=2)=\frac{C_5^2C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$，$P(X=3)=\frac{C_5^3C_5^0}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$，

$\therefore$随机变量 X 的分布列为：（略）

数学期望$E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{3}{2}$.

（2）①设该划线分为m，由 $Y\sim N(75.8,36)$ 得 $\mu=75.8,\sigma=6$，令 $\eta=\frac{Y-\mu}{\sigma}=\frac{Y-75.8}{6}$，则 $Y=6\eta+75.8$，

由题意， $P(Y\geqslant m)\approx0.85$，即 $P(6\eta+75.8\geqslant m)=P\left(\eta\geqslant\frac{m-75.8}{6}\right)\approx0.85$，

$\because\eta\sim N(0,1)$， $P(\eta\leqslant1.04)\approx0.85$， $\therefore P(\eta\geq-1.04)\approx0.85$， $\therefore\frac{m-75.8}{6}\approx-1.04$， $\therefore m\approx69.56$，取 $m=69$.

②由①讨论及参考数据得 $P(Y\geqslant71)=P(6\eta+75.8\geqslant71)=P(\eta\geqslant-0.8)=P(\eta\leqslant0.8)\approx0.788$，

即每个学生生物统考成绩不低于71分的事件概率约为0.788，

$\therefore\xi\sim B(800,0.788)$， $P(\xi=k)=C_{800}^k0.788^k(1-0.788)^{800-k}$.

由$\begin{cases}P(\xi=k)\geq P(\xi=k-1),\\P(\xi=k)\geq P(\xi=k+1),\end{cases}$即$\begin{cases}C_{800}^k0.788^k(1-0.788)^{800-k}\geq C_{800}^{k-1}0.788^{k-1}(1-0.788)^{801-k},\\C_{800}^k0.788^k(1-0.788)^{800-k}\geq C_{800}^{k+1}0.788^{k+1}(1-0.788)^{799-k},\end{cases}$

解得 $630.188\leqslant k\leqslant631.188$， $\because k\in\mathbf{N}$， $\therefore k=631$，

$\therefore$ 当 $k=631$ 时， $P(\xi=k)$ 取得最大值.