湛江一中卓越班　2023-17

高三数学压轴解答题——函数导数——双变量问题（1）

.双变量不等式的解题关键：

一是转化，即由已知条件入手，寻找双参数满足的关系式，并把含双参数的不等式转化为含单参数的不等式；

二是巧构函数，再借用导数，判断函数的单调性，从而求其最值；

三是回归双参的不等式的证明，把所求的最值应用到双参不等式，即可证得结果.

双变量不等式基本类型 1 中点型

1．已知函数 $f(x)=lnx-ax^{2}+(2-a)x$.

①讨论 $f(x)$ 的单调性；

②设 $a>0$ ，证明：当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时， $f(\frac{1}{a}+x)>f(\frac{1}{a}-x)$ ；

③函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴相交于 A 、 B 两点，线段 AB 中点的横坐标为 x_{0} ，证明 $f'(x_{0})<0$.

2．已知函数 $f(x)=2x+(1-2a)lnx+\frac{a}{x}$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）如果方程 $f(x)=m$ 有两个不相等的解 x_{1} ， x_{2} ，且 $x_{1}<x_{2}$ ，证明： $f'(\frac{x_{1}+x_{2}}{2})>0$.

3．已知函数 $f(x)=x^{2}-2ax+2lnx(a>0)$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=lnx-bx-cx^{2}$ ，若函数 $f(x)$ 的两个极值点 x_{1} ， $x_{2}(x_{1}<x_{2})$ 恰为函数 $g(x)$ 的两个零点，且 $y=(x_{1}-x_{2})g'(\frac{x_{1}+x_{2}}{2})$ 的取值范围是 $[ln3-1$ ， $+\infty)$ ，求实数 a 的取值范围.

4.已知函数 $f(x)=lnx-ax(a$ 为常数）.

（1）当 $a>1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a\geqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，设函数 $g(x)=2f(x)+x^{2}$ 的两个极值点 x_{1} ， $x_{2}(x_{1}<x_{2})$ 满足 $t=\frac{lnx_{1}-lnx_{2}}{x_{1}-x_{2}}$ ，求 $y=(x_{1}-x_{2})(\frac{2}{x_{1}+x_{2}}-t)+\frac{2}{3}$ 的最小值.

5．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^{2}+lnx+mx$ ， $(m\in R)$.

（1）若 $f(x)$ 存在两个极值点，求实数 m 的取值范围；

（2）若 x_1， x_2 为 $f(x)$ 的两个极值点，证明：$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f(\dfrac{x_1+x_2}{2})>\dfrac{(m+2)^2}{8}$.

6．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+2a\cdot lnx$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=lnx-bx-cx^2$ ，若函数 $f(x)$ 的两个极值点 x_1 ， $x_2(x_1<x_2)$ 恰为函数 $g(x)$ 的两个零点，且 $y=(x_1-x_2)\cdot g'(\dfrac{x_1+x_2}{2})$ 的范围是 $[ln3-1$ ， $+\infty)$ ，求实数 a 的取值范围.

7．已知函数 $f(x)=e^x+ax+b$ ，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1$ ， f （1））处的切线方程为 $ex-y-2=0$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式，并证明： $f(x)\geqslant x-1$.

（2）已知 $g(x)=kx-2$，且函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)$ 的图象交于 $A(x_1$ ，$y_1)$，$B(x_2$ ，$y_2)$ 两点，且线段 AB 的中点为 $P(x_0$ ，$y_0)$，证明： $f(x_0)<g$ （1） $<y_0$.

8．已知函数 $f(x)=2lnx-2mx+x^2(m>0)$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $m\geqslant\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象与 x 轴交于 A ， B 两点，其横坐标分别为 x_1 ， $x_2(x_1<x_2)$ ，线段 AB 的中点的横坐标为 x_0 ，且 x_1 ， x_2 恰为函数 $h(x)=lnx-cx^2-bx$ 的零点．求证 $(x_1-x_2)h'(x_0)\geqslant-\dfrac{2}{3}+ln2$.

双变量不等式:极值和差商积问题

1．已知函数 $f(x)=lnx-\dfrac{1}{2}(ax-\dfrac{1}{x})$.

（1）若 $a=1$，证明：当 $0<x<1$ 时， $f(x)>0$；当 $x>1$ 时， $f(x)<0$.

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1 ， x_2 ，证明：$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\dfrac{1-a}{2}$.

2．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+alnx$.

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程；

（2）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（3）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1 ， x_2 ，证明：$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

3．已知函数 $f(x)=lnx+\dfrac{a}{2}x^2-(a+1)x,a\in R$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）设 x_1 ， $x_2(0<x_1<x_2)$ 是函数 $g(x)=f(x)+x$ 的两个极值点，证明： $g(x_1)-g(x_2)<\dfrac{a}{2}-lna$ 恒成立.

4．已知函数 $f(x)=lnx-\dfrac{a}{x+1}(a\in R)$.

（Ⅰ）若函数 $y=f(x)$ 在定义域上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1 ， x_2 ，求实数 a 的取值范围，并比较 $f(x_1)+f(x_2)$ 与 x_1+x_2 的大小.

5．已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-2x+lnx$ ，其中 $a>0$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1 ， x_2 ，证明： $f(x_1)+f(x_2)<-3$.

6．已知函数 $f(x)=lnx+mx$， $m\in R$．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^{2}$ 有两个极值点 x_1， x_2，求证： $g(x_1)+g(x_2)+3<0$．

7．已知实数 $a\neq 0$，设函数 $f(x)=\frac{a}{x}-ln^{2}x$．

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1， $x_2(x_1<x_2)$，且 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{k(x_1-x_2)}-e^{2}(x_1+x_2)+2e>0$ 恒成立，求正实数 k 的最大值．

8．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^{2}-bx+lnx$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 x_1， $x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $f(x)$ 的两个极值点，若 $b\geqslant\frac{5}{2}$，且 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant k$ 恒成立，求实数 k 的最大值．

双变量不等式:剪刀模型

1．已知 $f(x)=\frac{1}{3}ax^{3}-2xlnx+(2-a)x(a\in R)$ 有两个极值点 x_1， x_2．

（1）求 a 的取值范围；

（2）当 $0<a<\frac{1}{e-1}$ 时，证明：$|x_2-x_1|>\sqrt{e}-1$．

2．已知函数 $f(x)=(x+b)(e^{x}-a)(b>0)$ 在点 $(-1$， $f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x+ey+e-1=0$．

（1）求 a， b；

（2）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴负半轴的交点为点 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=h(x)$，求证：对于任意的实数 x，都有 $f(x)\geqslant h(x)$；

3．已知函数 $f(x)=(x+b)(e^{2x}-a)(b>0)$ 在点 $(-\frac{1}{2},f(-\frac{1}{2}))$ 处的切线方程为 $(e-1)x+ey+\frac{e-1}{2}=0$．

（1）求 a， b；

（2）函数 $f(x)$ 图象与 x 轴负半轴的交点为 P，且在点 P 处的切线方程为 $y=h(x)$，函数 $F(x)=f(x)-h(x)$， $x\in R$，求 $F(x)$ 的最小值；

（3）关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有两个实数根 x_1， x_2，且 $x_1<x_2$，证明： $x_2-x_1\leqslant\frac{1+2m}{2}-\frac{me}{1-e}$．

4．已知函数 $f(x)=ax-e^{x}+1$， $ln3$ 是 $f(x)$ 的极值点．

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线为直线 l．求证：曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f(x)=m(m>0)$ 有两个不等实根 x_1， $x_2(x_1<x_2)$，求证： $x_2-x_1<2-\frac{7m}{10}$．

5．已知函数 $f(x)=6x-x^{6}$， $x\in R$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，求曲线在点 P 处的切线方程；

（Ⅲ）若方程 $f(x)=a$（a 为实数）有两个实数根 x_1， x_2 且 $x_1<x_2$，求证： $x_2-x_1\leqslant 6^{\frac{1}{5}}-\frac{a}{5}$．

6．已知函数 $f(x)=4x-x^{4}$， $x\in R$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，求证：对于任意的实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

（Ⅲ）若方程 $f(x)=a(a$ 为实数）有两个实数根 x_{1}， x_{2}，且 $x_{1}<x_{2}$，求证： $x_{2}-x_{1}\leqslant-\dfrac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$．

双变量不等式:主元法 答案

1．已知函数 $f(x)=xlnx$．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和最小值；

（2）当 $b>0$ 时，求证： $b^{b}\geqslant(\dfrac{1}{e})^{\frac{1}{n}}$（其中 e 为自然对数的底数）；

（3）若 $a>0$， $b>0$ 求证： $f(x)+(a+b)ln2\geqslant f(a+b)-f$（b）．

2.已知函数 $f(x)=a\dfrac{e^{x}}{x}+(lnx-x)$（其中 $a\in R$ 且 a 为常数， e 为自然对数的底数， $e=2.71828\ldots)$．

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 的极值点只有一个，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）当 $a=0$ 时，若 $f(x)\leqslant kx+m$（其中 $m>0)$ 恒成立，求 $(k+1)m$ 的最小值 $h(m)$ 的最大值．

3．设函数 $f(x)=xlnx$．

（Ⅰ） 求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x+1)$，若对任意的 $x\geqslant0$，都有 $g(x)\geqslant mx$ 成立，求实数 m 的取值范围；

（Ⅲ）若 $0<a<b$，证明： $0<f(a)+f(b)-2f(\dfrac{a+b}{2})<(b-a)ln2$．

4．已知函数 $f(x)=e^{x}-x$， $g(x)=(x+k)ln(x+k)-x$．

（1）若 $k=1$， $f'(t)=g'(t)$，求实数 t 的值．

（2）若 a， $b\in R^{+}$， f（a）$+g$（b）$\geqslant f(0)+g(0)+ab$，求正实数 k 的取值范围．

5．已知实数 $a\neq0$，设函数 $f(x)=alnx+\sqrt{1+x}$， $x>0$．

（Ⅰ）当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）对任意 $x\in[\dfrac{1}{e^{2}}$， $+\infty)$ 均有 $f(x)\leqslant\dfrac{\sqrt{x}}{2a}$，求 a 的取值范围．

注： $e=2.71828\ldots$ 为自然对数的底数．

6．设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$， a， b， $c\in R$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

（1）若 $a=b=c$， f（4）$=8$，求 a 的值；

（2）若 $a\neq b$， $b=c$，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3$，1， $3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值；

（3）若 $a=0$， $0<b\leqslant1$， $c=1$，且 $f(x)$ 的极大值为 M，求证： $M\leqslant\dfrac{4}{27}$．

7．已知函数 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}+alnx$， $(a\in R)$．

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）函数 $g(x)=2(x+1)+xf(x)$，证明：当 $0<a\leqslant1$ 时， $g(x)>0$ 恒成立．

8．已知函数 $f(x)=x^{3}+klnx(k\in R)$， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

（Ⅰ）当 $k=6$ 时，

（ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程；

（ⅱ）求函数 $g(x)=f(x)-f'(x)+\dfrac{9}{x}$ 的单调区间和极值；

（Ⅱ）当 $k\geqslant -3$ 时，求证：对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有 $\dfrac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

双变量单调问题

1.已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-\dfrac{a}{2}x^2$，其中 $a\in R$.

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的图象能否与 x 轴相切？若能，求出实数 a，若不能，请说明理由；

（Ⅱ）求最大的整数 a，使得对任意 $x_1\in R$，$x_2\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x_1+x_2)-f(x_1-x_2)>-2x_2$ 恒成立.

2．已知函数 $g(x)=x-alnx$.

（1）讨论 $g(x)$ 的单调性；

（2）若 $a>2$，且 $f(x)=\dfrac{1}{x}-g(x)$ 存在两个极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，证明：$f(x_1)-f(x_2)>(a-2)(x_1-x_2)$.

3．已知函数 $f(x)=(a+1)lnx+ax^2+1$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $a<-1$．如果对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$，求 a 的取值范围.

4．已知函数 $f(x)=2lnx+\dfrac{m}{x}$，$m>0$.

（1）当 $m=e(e$ 为自然对数的底数）时，求 $f(x)$ 的极小值；

（2）讨论函数 $g(x)=f(x)-x$ 的单调性；

（3）若 $m\geqslant 1$，证明：对于任意 $b>a>0$，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$.

5．已知函数 $f(x)=x^2-2ax+2(a+1)ln\quad x$.

（1）若函数 $f(x)$ 有两个极值点，求 a 的取值范围；

（2）证明：若 $-1<a<3$，则对于任意的 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2$.

6．已知函数 $f(x)=(a+1)lnx+ax^2+1$.

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $a\leqslant -2$，证明：对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4|x_1-x_2|$.

7．已知函数 $f(x)=\dfrac{a-2lnx}{x^2}$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线与直线 $y=-4x+1$ 平行.

（1）求实数 a 的值及 $f(x)$ 的极值；

（2）若对任意 x_1，$x_2\in(0,\dfrac{1}{e}]$，有 $|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}|>\dfrac{k}{x_1^2\bullet x_2^2}$，求实数 k 的取值范围.

8．已知函数 $f(x)=alnx+x^b(a\neq 0)$.

（1）当$b=2$时，若函数$f(x)$恰有一个零点，求实数a的取值范围；

（2）当$a+b=0$，$b>0$时，对任意x_1，$x_2\in[\frac{1}{e}，e]$，有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant e-2$成立，求实数$b$的取值范围

双参数问题解答

1．已知不等式$ln(x+1)-1\leqslant ax+b$对一切$x>-1$都成立，求$\frac{b}{a}$的最小值

2．已知e为自然对数的底数，a，b为实数，且不等式$lnx+(2e-a-1)x+b+1\leqslant 0$对任意的$x\in(0,+\infty)$恒成立．则当$\frac{b+2}{a+1}$取最大值时，求$a$的值

3．设函数$f(x)=lnx-\frac{e}{x}-2mx+n$，若不等式$f(x)\leqslant 0$对任意$x\in(0,+\infty)$恒成立，求$\frac{n}{m}$的最大值

4．已知函数$f(x)=lnx+a$，$g(x)=ax+b+1$，若$\forall x>0$，$f(x)\leqslant g(x)$，求$\frac{b}{a}$的最小值

5．已知函数$f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2(e$为自然对数的底数）$g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+b(a\in R,b\in R)$．

6．已知函数$f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$．

（1）若$x_1\neq x_2$，且$f(x_1)=f(x_2)$，求证：$f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$；

（2）若$x\in R$时，恒有$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$，求$ab+b$的最大值．

7．已知函数$f(x)=e^x-x+\frac{t}{2}x^2(t\in R$，$e$为自然对数的底数)，且$f(x)$在点$(1$，$f$（1）$)$处的切线的斜率为$e$，函数$g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+b(a\in R,b\in R)$．

（1）求$f(x)$的单调区间和极值；

（2）若$f(x)\geqslant g(x)$，求$\frac{b(a+1)}{2}$的最大值．

8．已知函数$f(x)$满足$f(x)=f'$（1）$e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2$．

（1）求$f(x)$的解析式及单调区间；

（2）若$f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$，求$(a+1)b$的最大值．

9．已知函数$f(x)=(x^2+x)ln\frac{1}{x}-ax$，$g(x)=\frac{2}{3}x^3+(1-a)x^2-2ax+b$，$a$，$b\in R$．

（Ⅰ）求函数$g(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若$f(x)\leqslant g(x)$恒成立，求$b-2a$的最小值．

10．已知函数$f(x)=ln(ax+b)-x(a$，$b\in R)$．

（1）若曲线$y=f(x)$在点$(1$，f（1）$)$处的切线方程为$y=-2x+1$，求a，b的值；

（2）已知当$a>0$时，$f(x)\leqslant 0$恒成立，求ab的最大值．

11．已知函数$f(x)=e^x+x^2-x$，$g(x)=x^2+ax+b$，a，$b\in R$．

（1）当$a=1$时，求函数$F(x)=f(x)-g(x)$的单调区间；

（2）若曲线$y=f(x)-g(x)$在点$(1,0)$处的切线为：$x+y-1=0$，求a，b的值；

（3）若 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值.