**湛江一中卓越班2023-17**

**高三数学复习小专题——求三角函数ω的卡根法**

一、*ω*为定值卡根

此类型题就是根据题意，给定的区间宽度与函数周期的关系建立即可．

基本结论：任意对称轴（对称中心）之间的间距为；最大值与最小值的水平间距为．

任意对称轴与对称中心之间的间距为；以上情况当时取得最小值．

1.若，是函数两个相邻的极值点，则（ ）

A．2 B． C．1 D．

2.设函数，，其中，．若，，且的最小正周期大于，则（ ）

A．， B．， C．， D．，

3.已知函数，，若函数在区间内单调递增，且函数的图象关于直线对称，则的值为　 　．

4.设函数，，是常数，，若在区间，上具有单调性，且，则的最小正周期为　 　 ．

二、限定周期的ω卡根

通常在固定的一两个周期内，给予单调性的限定或者值域的限定，对或者会有一个区间限定，此类型题就是要卡住两个临界点，通常可以找出的范围，再推导至当中.

常见的卡根数学语言转化如下：

①在区间内单调且，（图1）

同理，在区间内单调且，

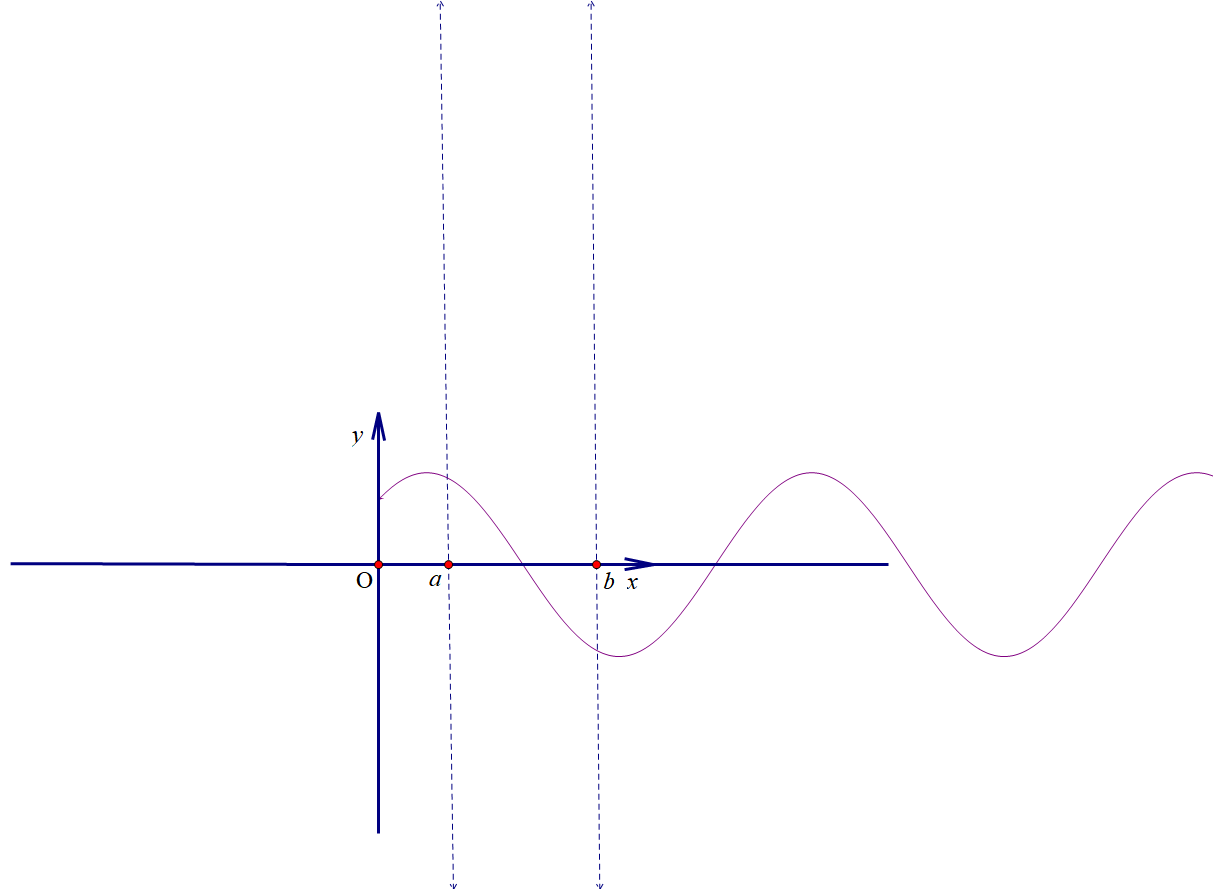
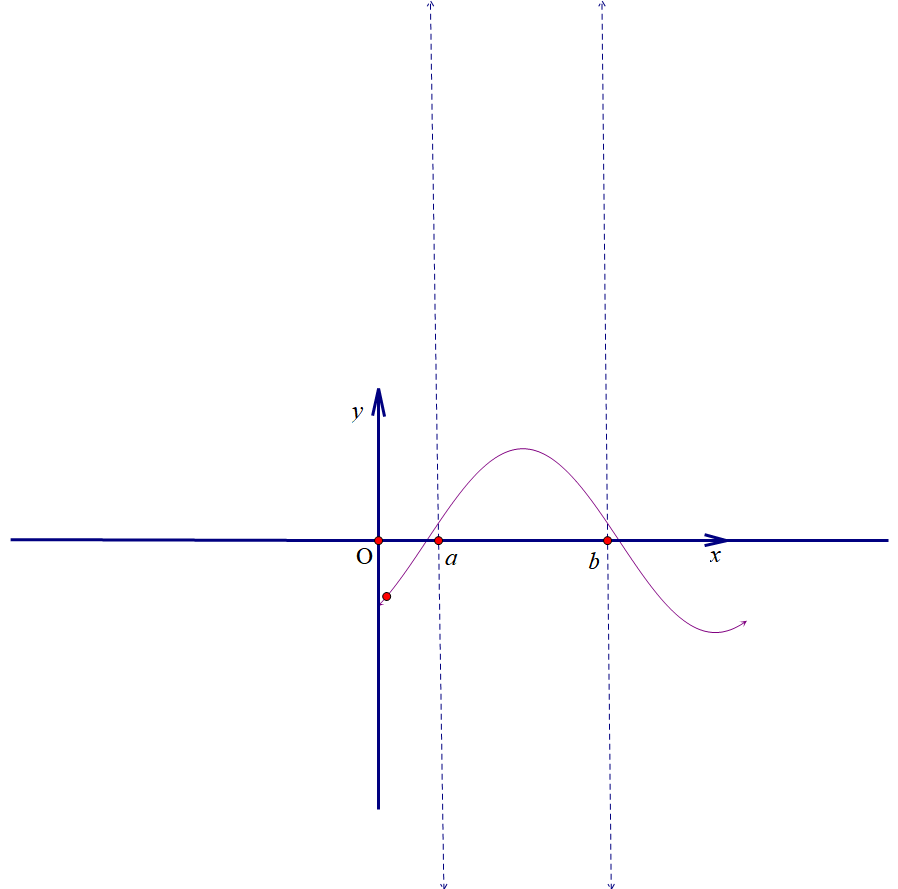
 

图1 图2

②在区间内没有零点且，（图2）；

同理，在区间内没有零点且，

关于在给定范围内单调或者没有零点的问题，卡根的范围都在半个周期，区间内单调的开区间和闭区间没有区别，没有零点问题的开区间和闭区间的区别在于是否加上等号，很多考题就喜欢在这个细节上体现学生的基本功．所以，我们给出了模型分解，那么请大家思考，如果区间是或者是呢？如果题目所说在区间内是单调递增或者单调递减呢？请读者自己分析模型，或者通过刷此类型的题目不断累积经验．

另外，区间内单调或者无零点叫做内卡根，即卡在区间内部．

③在区间内有个零点

且（图3图4）

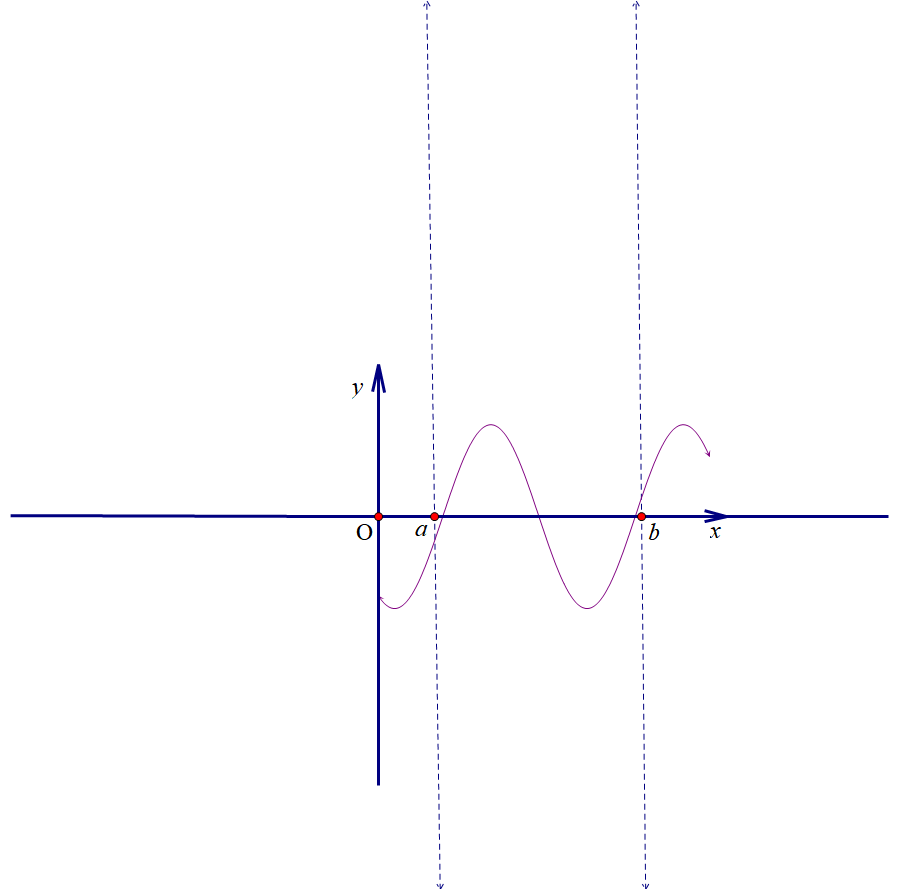
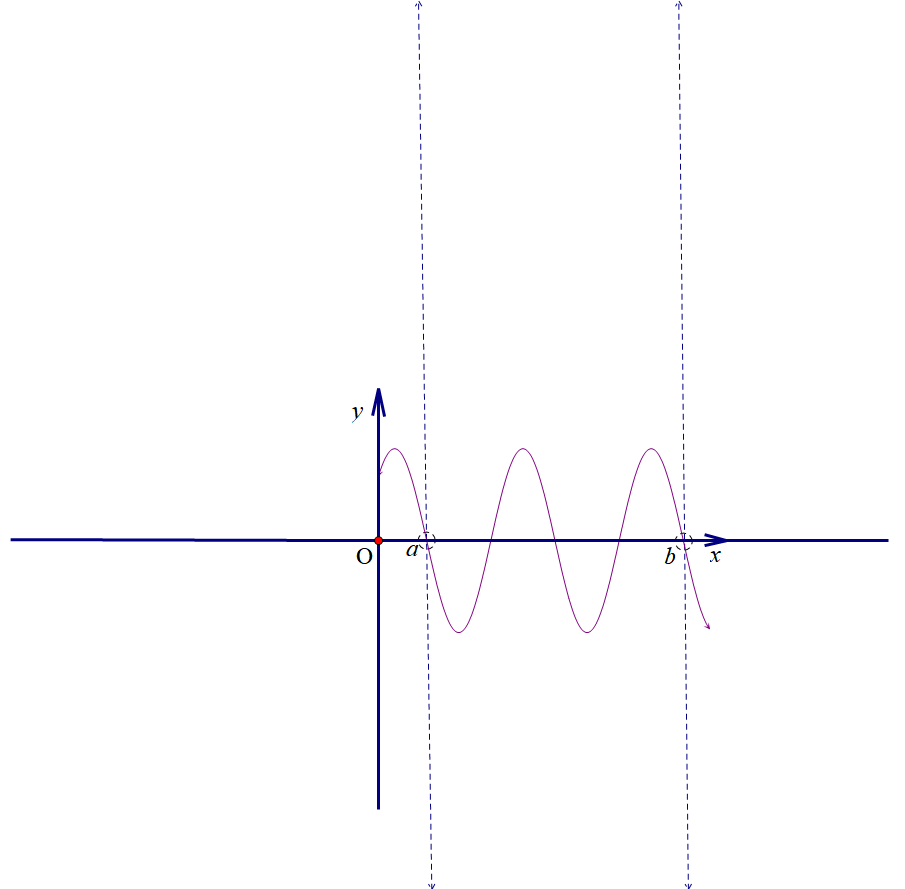
 

图3 图4

同理在区间内有个零点

且（图5图6）

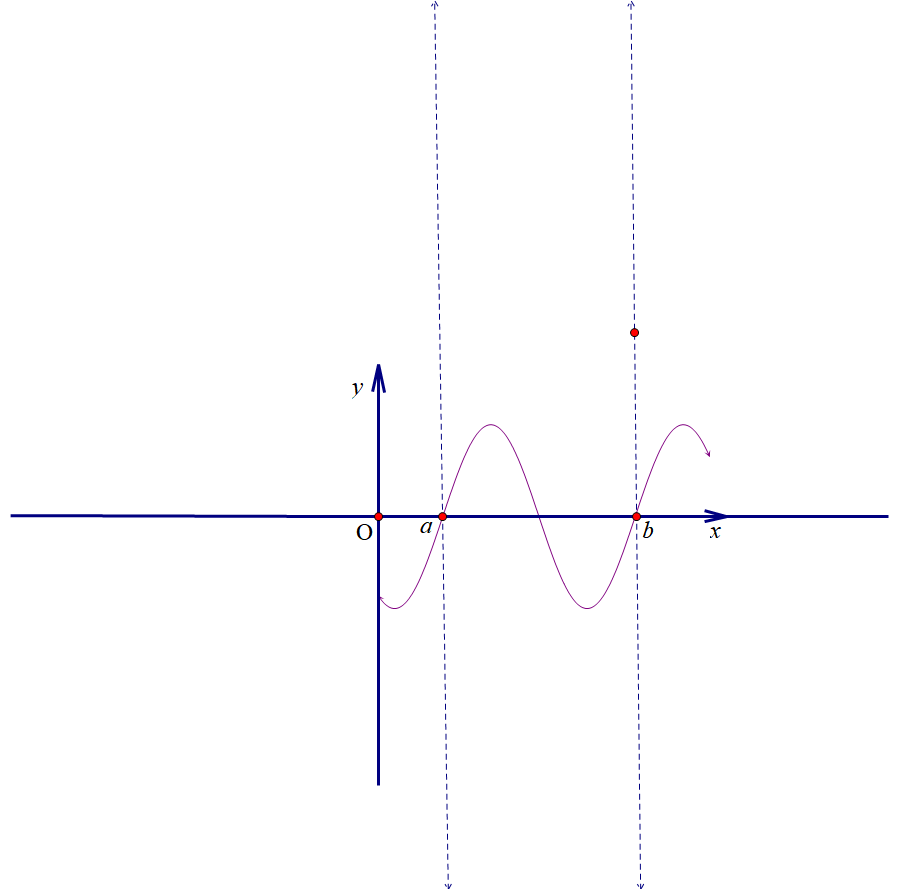
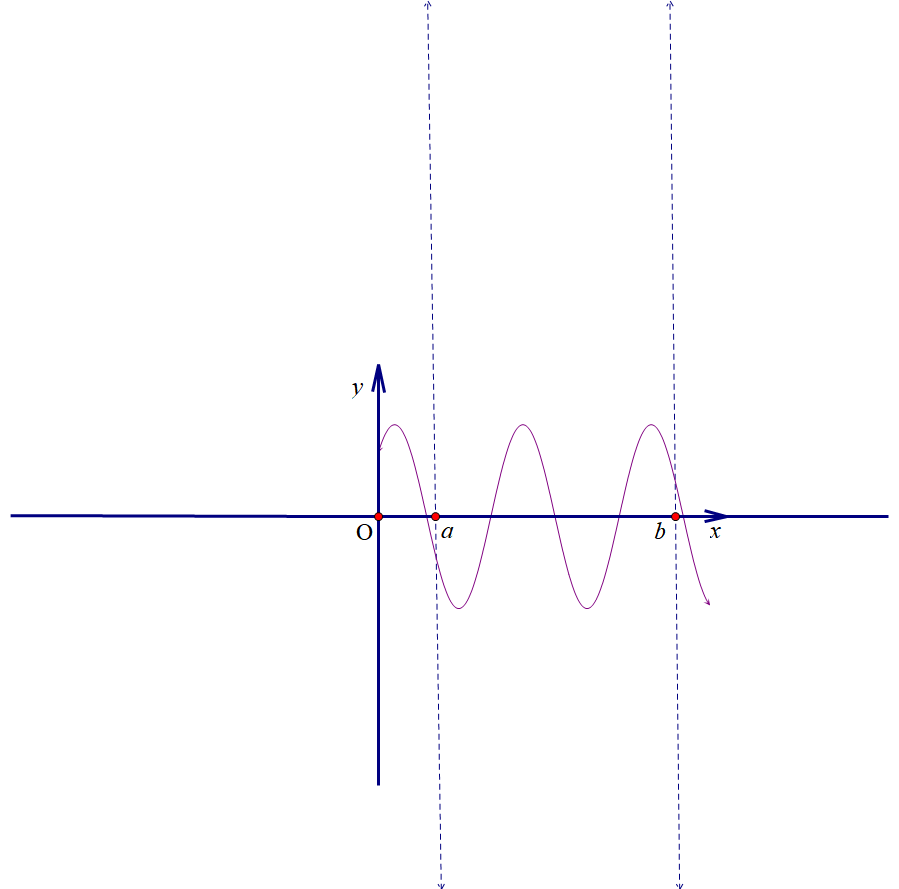
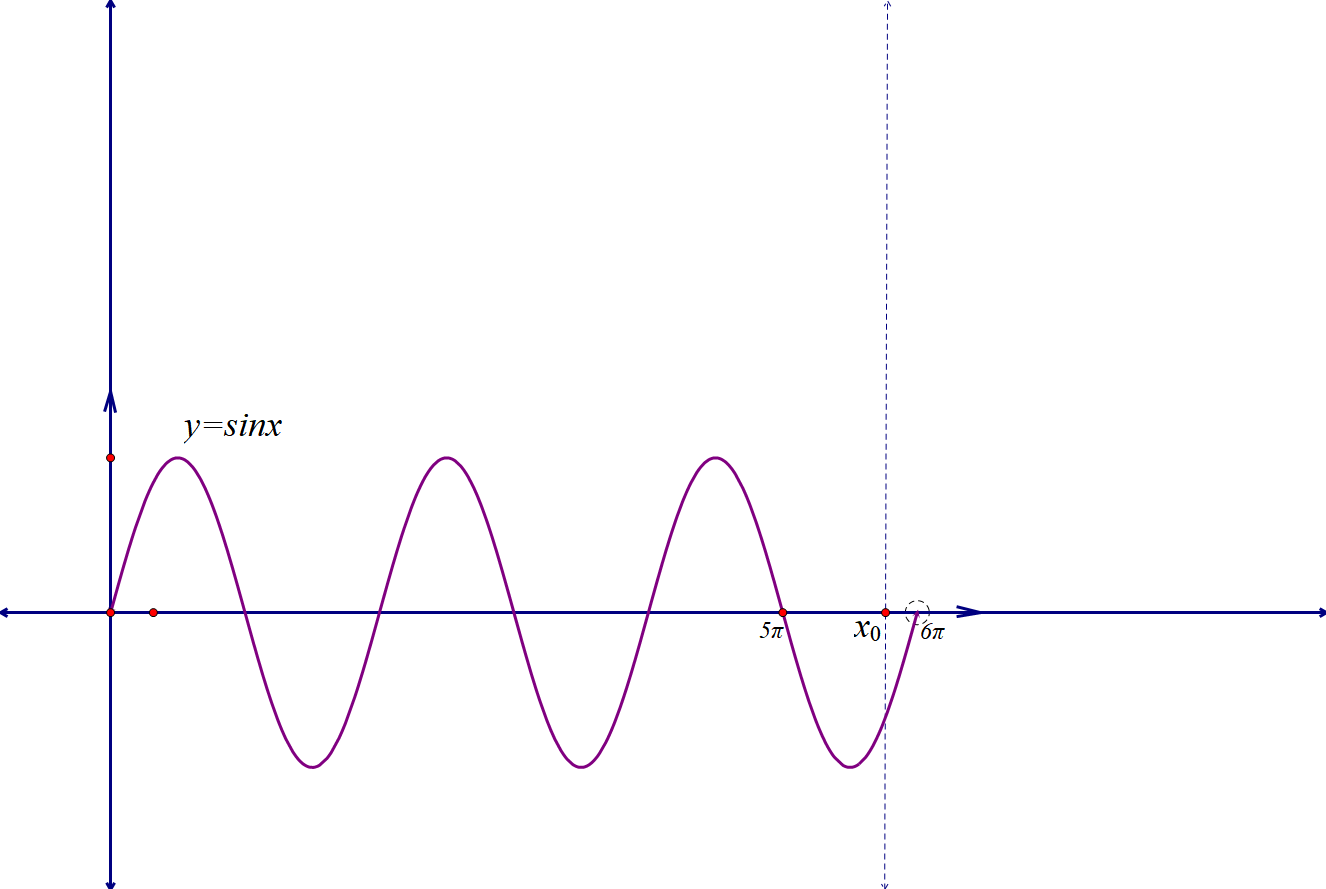
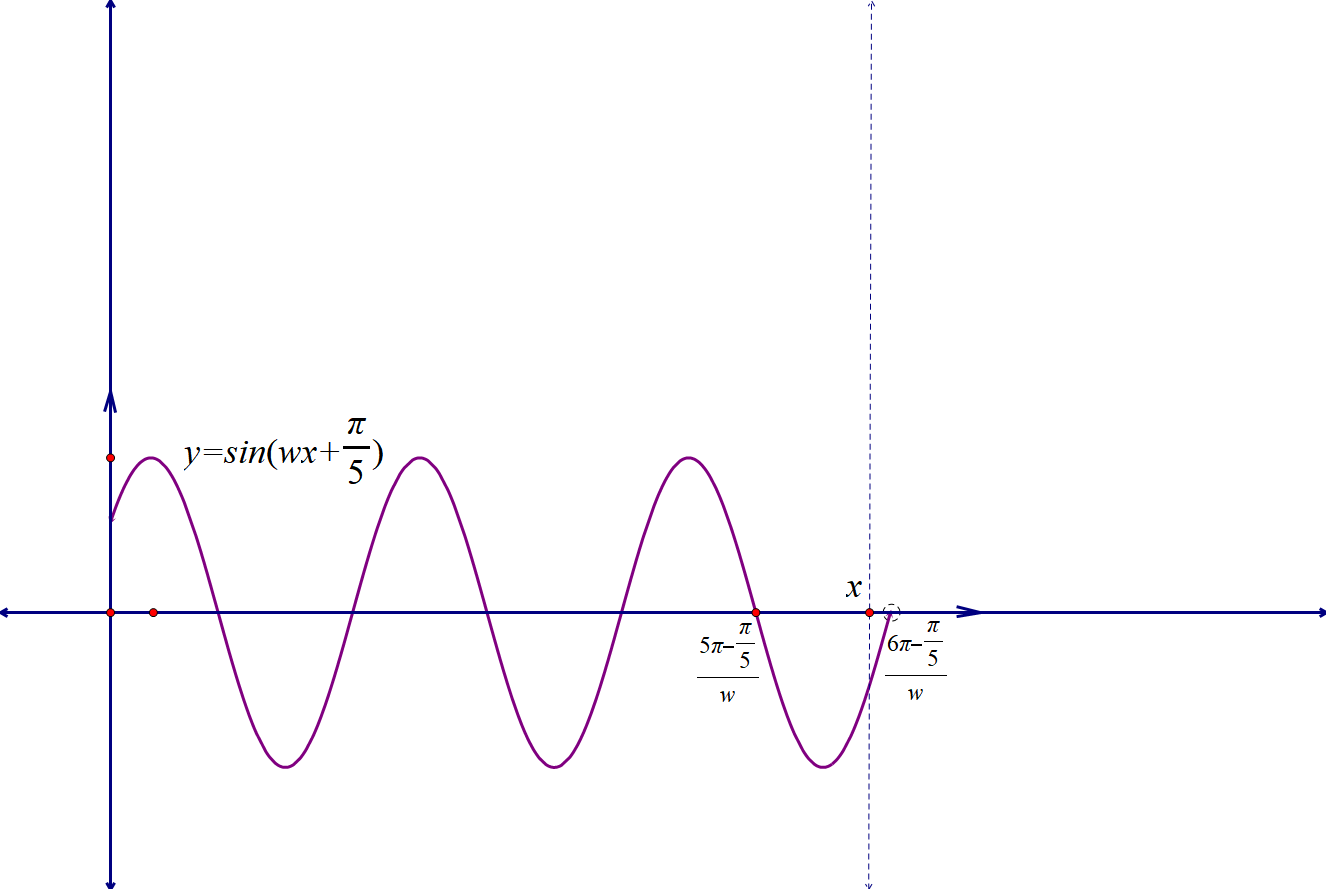
 

图5 图6

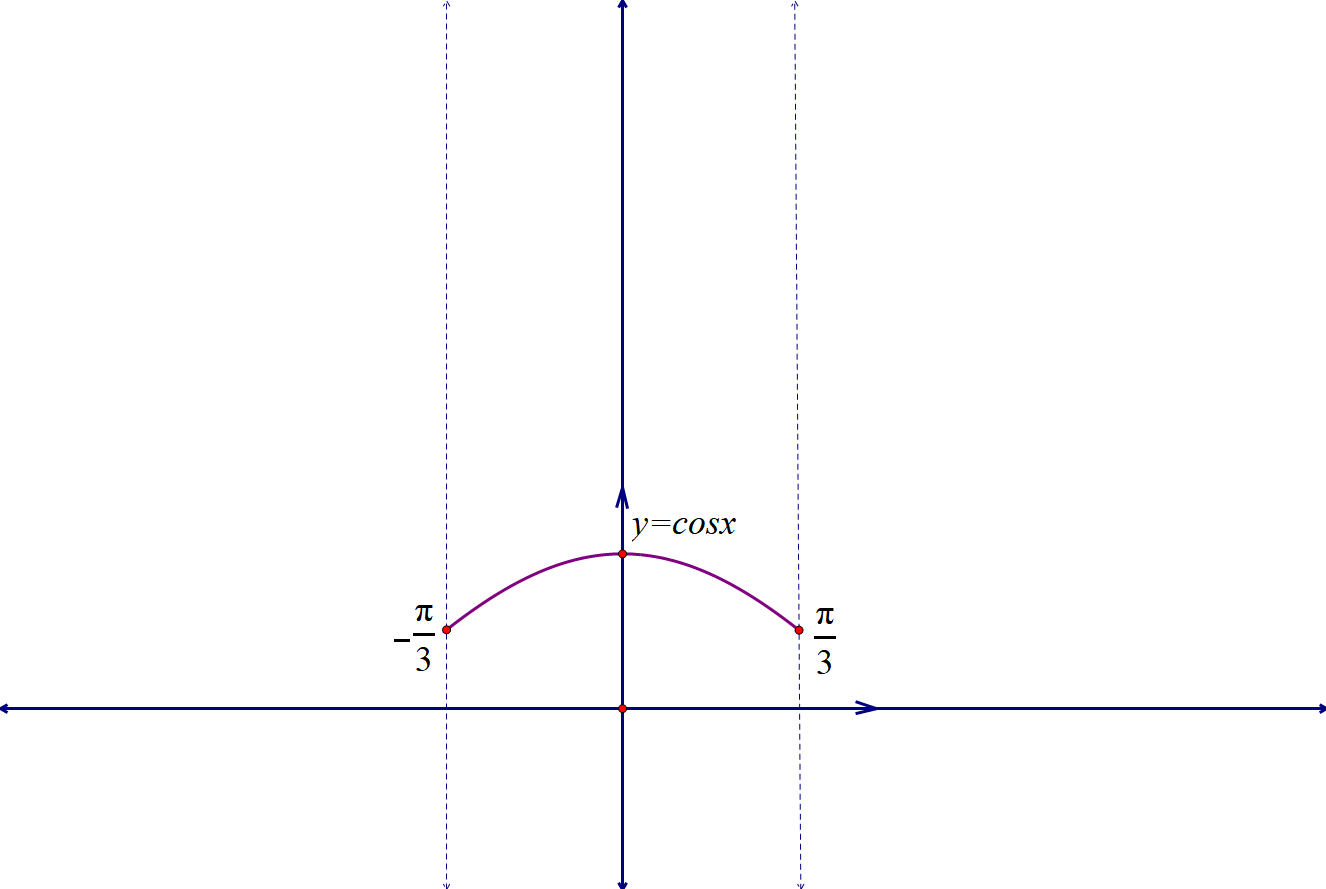
5.设函数，已知在，有且仅有5个零点．下述四个结论：①在有且仅有3个极大值点；②在有且仅有2个极小值点；③在单调递增；④的取值范围是，．其中所有正确结论的编号是（ ）

A．①④ B．②③ C．①②③ D．①③④

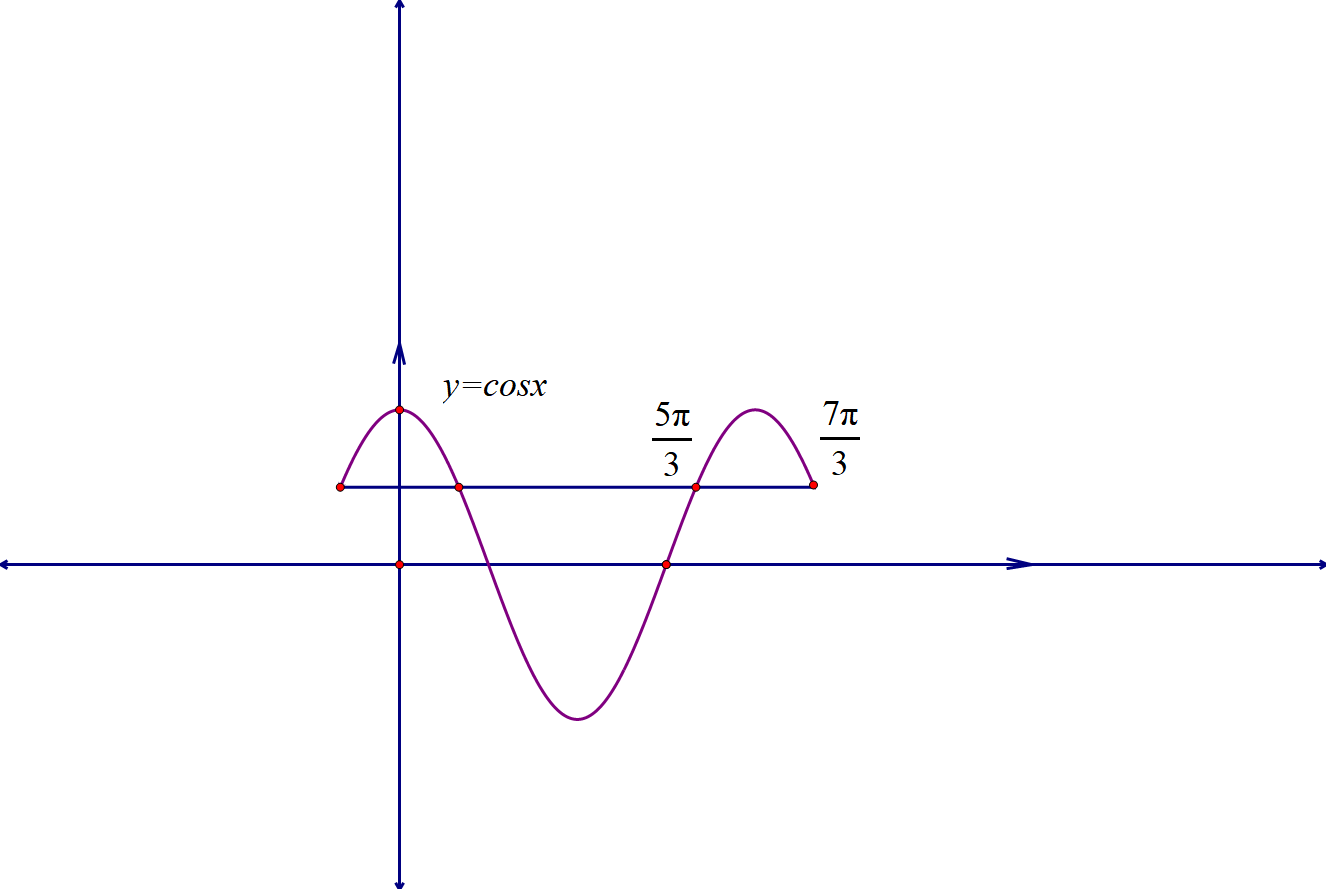
6.已知函数，若在区间，内没有零点，则的取值范围是

7.函数在上的值域为，则的取值范围是



8.已知在区间上恰有一个最大值点和最小值点，则实数的取值范围为

9.已知函数在区间上恰有三个零点，则的取值范围是　 　 ．



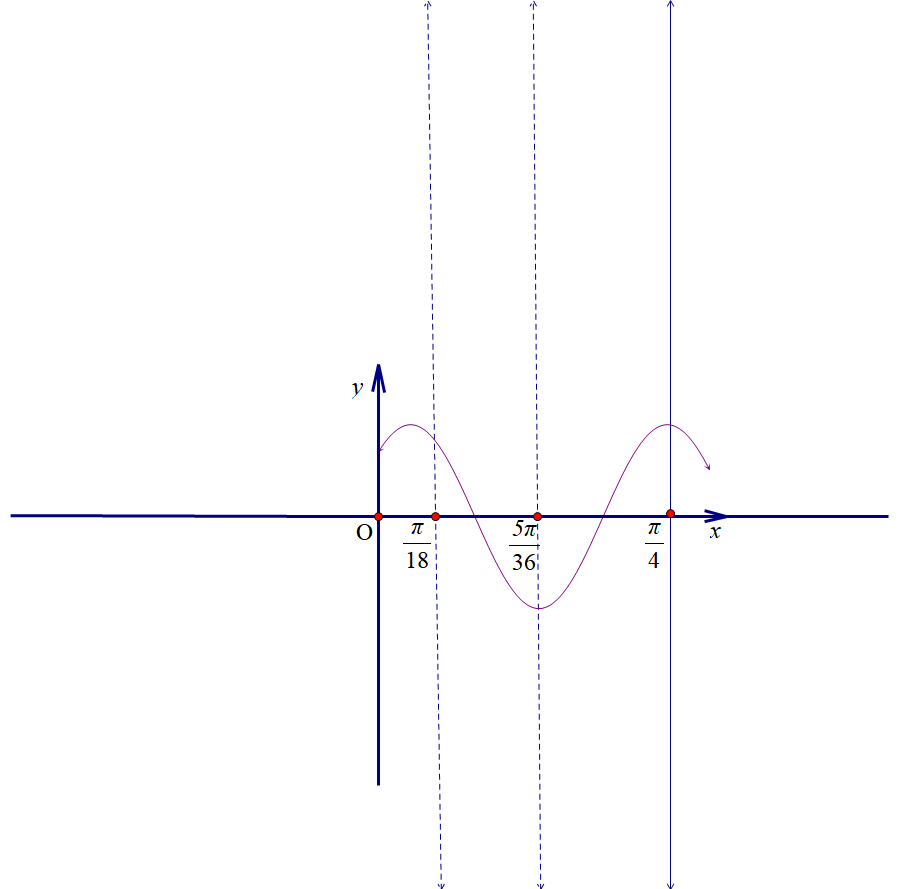
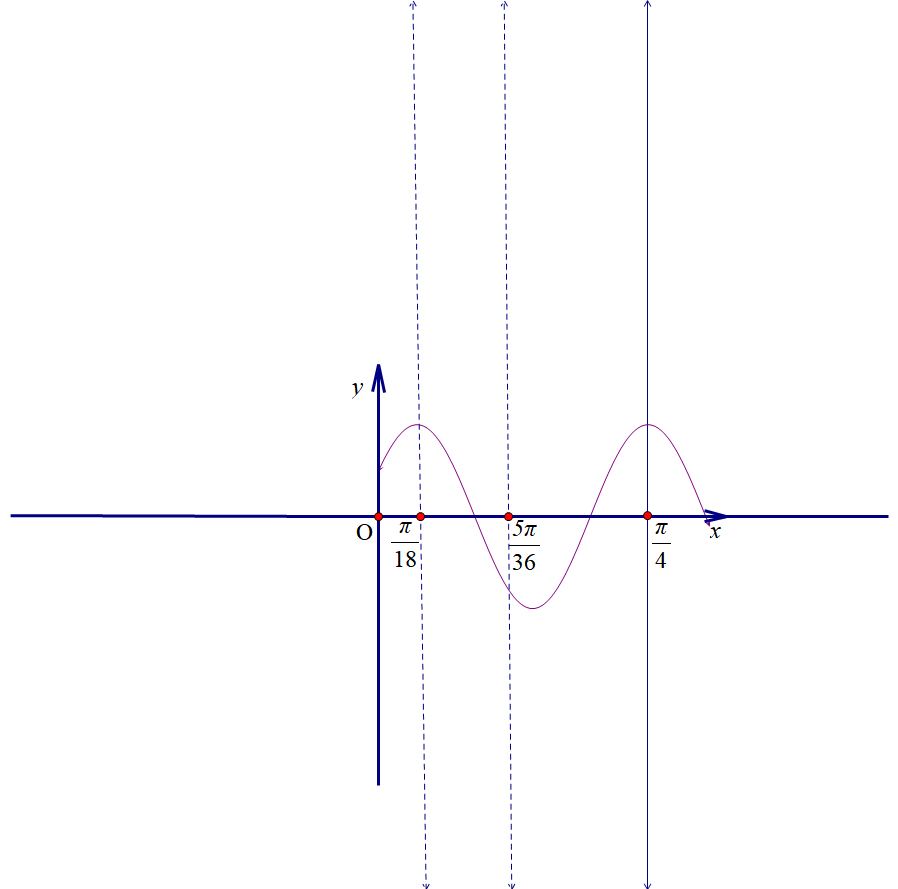
10.已知函数且，若在区间上有最大值，无最小值，则的最大值为

三、已知一条对称轴和一个对称中心的*ω*卡根

由于对称轴和对称中心的水平距离为****，设计****，构造出函数的形式，再根据单调区间或者最值区间所处的范围进行卡根．

11.已知函数，，为的零点，为图象的对称轴，且在，上单调，则的最大值为（ ）

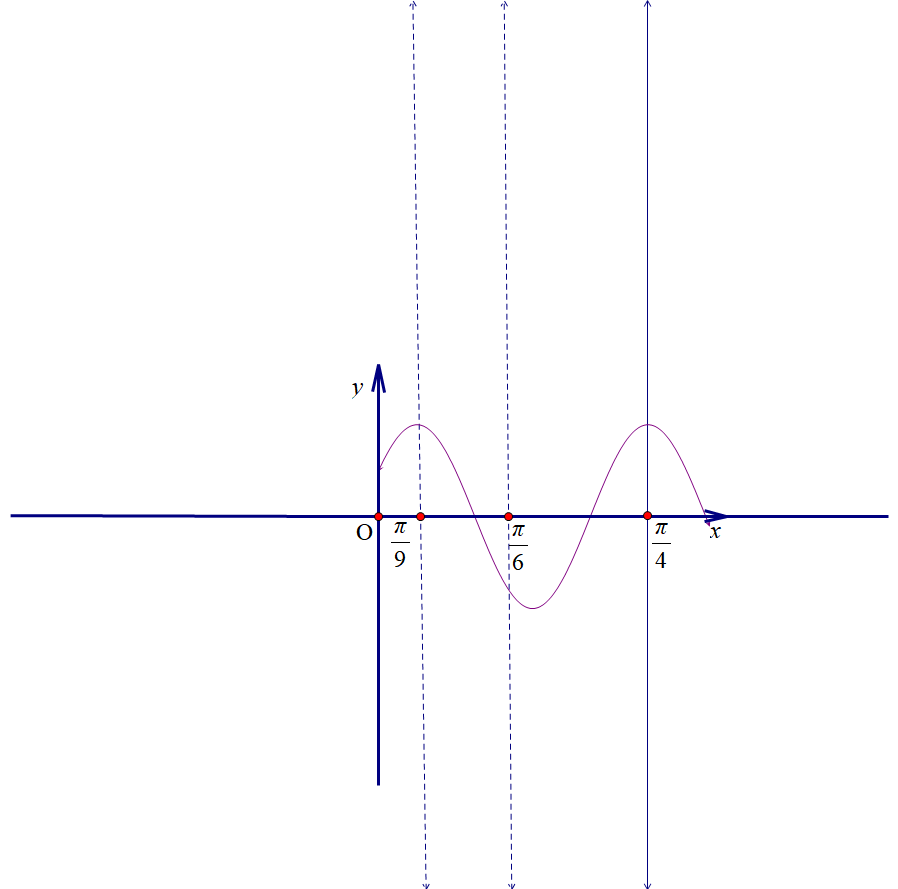
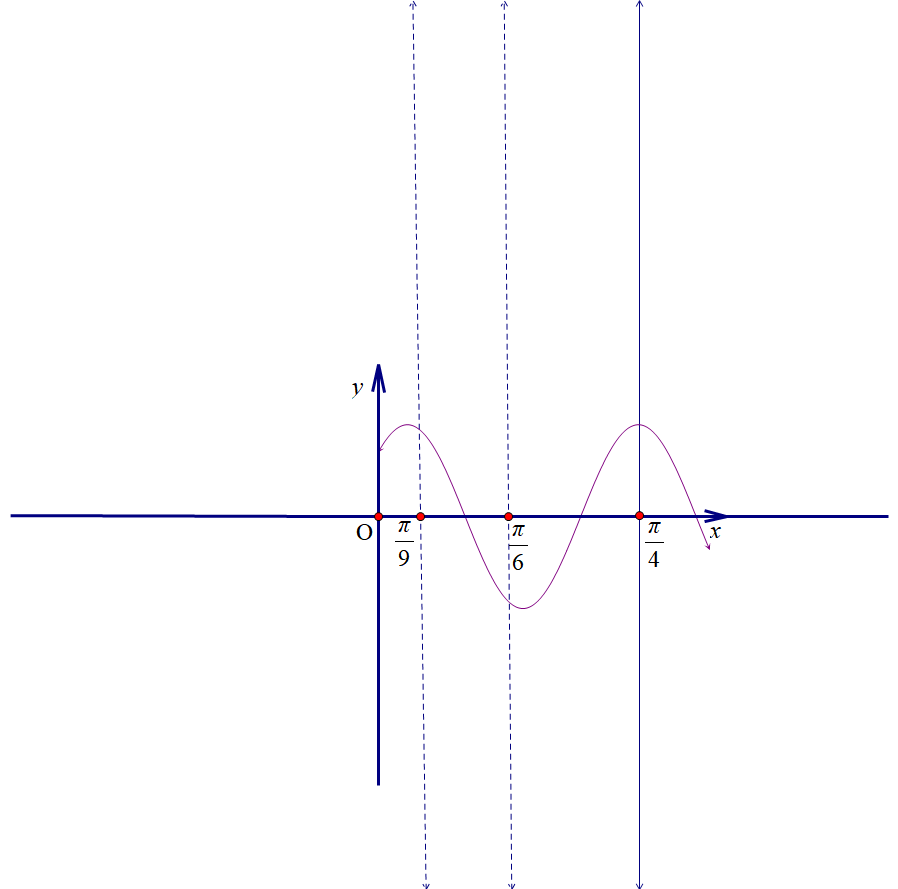
A．11 B．9 C．7 D．5

例11图1 例11图2

12.已知函数，，，是函数的一个零点，且是其图象的一条对称轴．若是的一个单调区间，则的最大值为（ ）

A．18 B．17 C．15 D．13

例12图1 例12图2

总结：关于卡根法，通常先进行的形式控制，即来卡住形式，再利用三点控制，任意相邻区间卡住半周期，通常是一边大于半周期，另一边小于半周期，如果发现卡住的空间太大，再考虑整个周期的卡根，这样大大简化了计算．

13.已知函数，若是图象的一条对称轴，是图象的一个对称中心，则（ ）A． B． C． D．

14.函数在区间，上的最大值为，则下列的取值不可能为（ ）

A．0 B． C． D．

15.已知函数，的最小正周期为，且是，上的单调函数，则的取值范围是

16.定义在，上的函数有零点，且值域，，则**的取值范围是

17.已知，函数在区间，上恰有9个零点，那么的取值范围为

18.已知函数在区间，上单调递增，则的取值范围为

20已知函数，若的图象的任意一条对称轴与轴的交点的横坐标都不属于区间，则的取值范围是

21.已知函数，，为的零点，为图象的对称轴，且在，单调，则的最大值为

22.已知函数且，若在区间上有最大值，无最小值，则的最大值为

23.已知函数，其中，，为的零点：且恒成立，在区间上有最小值无最大值，则的最大值是

2

0．（2019•小店期中）已知函数，的图象关于对称，是函数的一个对称中心，且在上单调，则的最大值为（ ）

A．9 B．7 C．5 D．3

21．（2019•日照期中）已知函数，，，对恒有，且在区间上有且只有一个使，则的最大值为（ ）

A． B． C． D．

22．（2019•衡水金卷联考）已知函数，，，两个等式：

，对任意的实数均恒成立，且在上单调，则的最大值为（ ）

A．1 B．2 C．3 D．4

23.（2019•湛江一模）已知函数在，上恰有一个最大值点和两个零点，则的取值范围是　 ．

24．（2019•承德期末）已知函数，满足函数是奇函数，且当取最小值时，函数在区间和上均单调递增，则实数的取值范围为　　 ．

25．（2019•定远一模）已知函数，若在区间内没有极值点，则的取值范围是　 　．

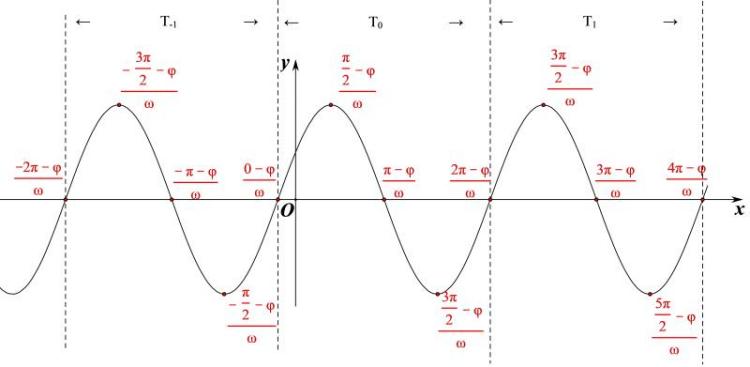
ω**函数之卡根法（拓展提升）**

1.ω函数之卡根法前世今生

【例1】（2019•新课标II）若，是函数两个相邻的极值点，则　　

A．2 B． C．1 D．

2.五点法卡根

图像 )图像

当时，一定有五点中的第二点和上一个周期的最后一点一定位于第一和第三象限，故当卡根的区间过零点，比如或者，这样就可以按照五点法卡根直接卡出ω范围，为了便于理解，在此处规定此周期为，下一期为，上一期为，以次类推.

【例1】（2015•天津）已知函数，，若函数在区间内单调递增，且函数的图象关于直线对称，则的值为　 　 ．

【例2】（2019•深圳二模）已知函数在区间上恰有一个最大值点和最小值点，则实数的取值范围为　　

A． B． C． D．

【例3】（2019•新课标Ⅲ）设函数，已知在有且仅有5个零点．下述四个结论：

①在有且仅有3个极大值点；

②在有且仅有2个极小值点；

③在单调递增；

④的取值范围是．

其中所有正确结论的编号是　　

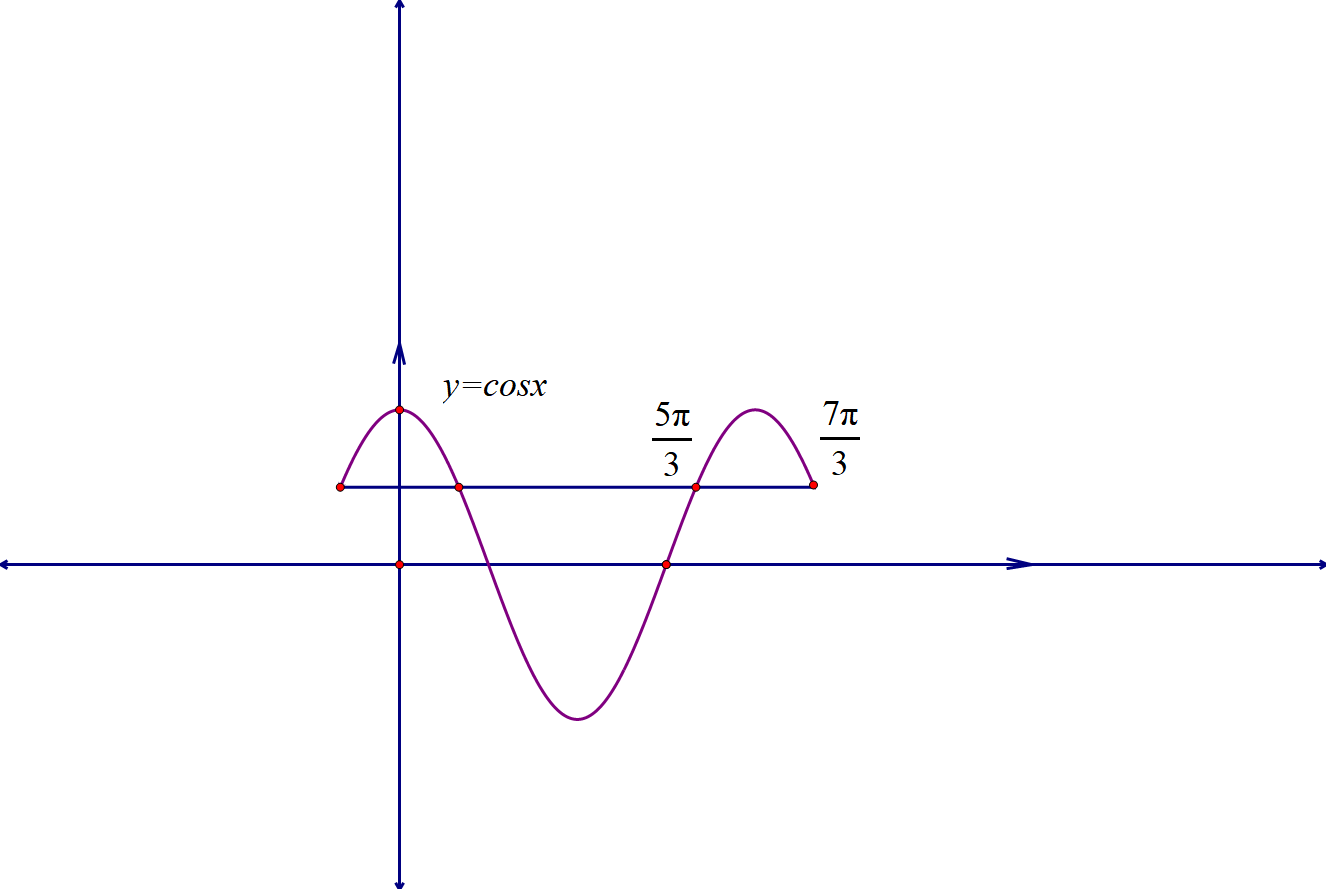
A．①④ B．②③ C．①②③ D．①③④

【例4】（2020•天津吗二模）已知函数，若函数在区间上有且只有两个零点，则的取值范围为　　

A． B． C． D．

【跟踪训练】

1.（2019•湖北模拟）已知函数在区间，上恰有三个零点，则的取值范围是　 　．



2．（2020•深圳模拟）已知定义在，上的函数的最大值为，则正实数的取值个数最多为　　

A．4 B．3 C．2 D．1

3.周期卡根法

半周期卡根法与区间不过零点的五点卡根法

通常在固定的一两个周期内，给予区间零点个数的限定，通过卡半周期会得到或者的一个区间限定，然后此类型题只需再卡住两个临界点即可，左界点可以在的第一点和第三点或者第三点和第五点之间（形成两个区间的原因），此时一三五均相差半个周期，可用代替，由此我们统一规定起始点是，每次递增也就是说左界点在和间，此时右界点在和间即可（代表区间内零点个数），此类题目利用这种半周期卡根法与区间不过零点的五点卡根法妙解即可.

先介绍几个零点个数问题的数学表达式

①在区间内没有零点（图1图2）；

同理，在区间内没有零点

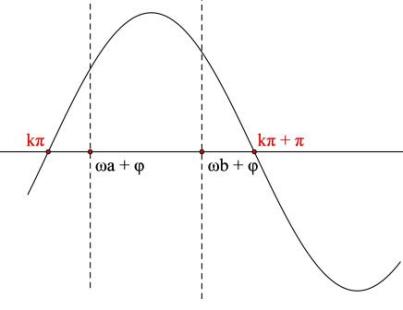
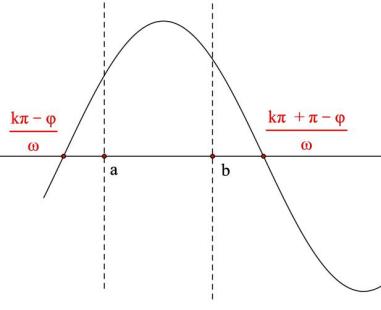
 

图1 图2

②在区间内有个零点

（图3图4）；

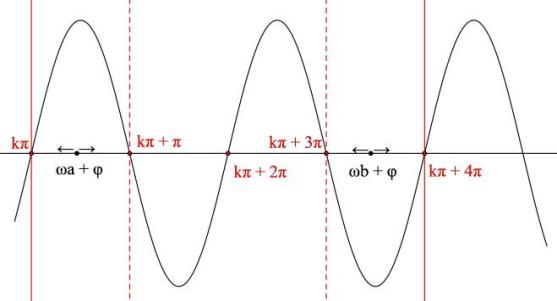
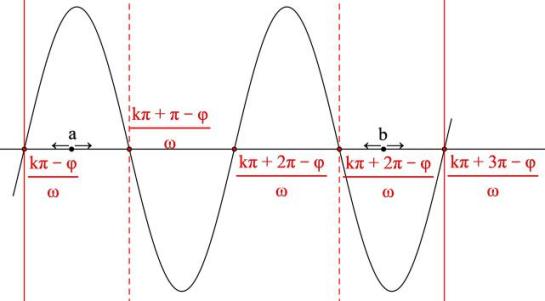
 

图3 图4

同理在区间内有个零点

（图5图6）；

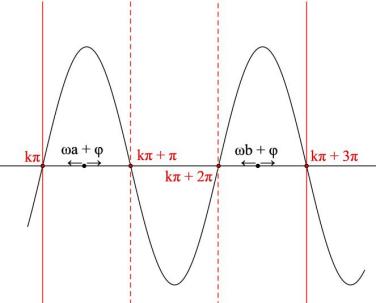
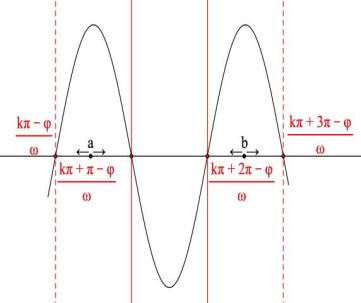
 

图5 图6

关于在给定范围内出现零点个数的问题，卡根的范围都在一个周期，即左端点卡半个，右端点卡半个的情形，而开区间和闭区间的区别也仅仅是加上等号而已．开区间是外取等，闭区间则是内取等．请大家思考n个零点以及关于在区间的零点问题是如何解决的呢？

【例1】（2020秋•天津期中）将函数的图象先向右平移个单位，再把所得函数图象横坐标变为原来的，纵坐标不变，得到函数的图象，若函数在上没有零点，则的取值范围是　　

A．， B．， C．，， D．，，

【例2】（2021•桂林一模）函数的图象向左平移个单位长度得到函数，在，上有且只有5个零点，则的取值范围是　　

A． B． C． D．

小结：在区间内有个零点

同理在区间内有个零点

【跟踪训练】

3.（2019•靖远县期末）已知函数，若在区间，内没有零点，则的取值范围是　　

A． B． C． D．

4．（2018•湖北模拟）已知函数且，若在区间上有最大值，无最小值，则的最大值为　　

A． B． C． D．

4.形式卡根+周期卡根法

已知一条对称轴和一个对称中心，由于对称轴和对称中心的水平距离为，设计，构造出函数的形式，再根据单调区间或最值区间所处的范围进行卡根．

通常在固定的一两个周期内，如果给予单调性的限定或者值域的限定，此时比零点个数更难的是，对称轴位置不定造成需要两路分析，常见的卡根数学语言转化如下：当卡根区间不过零点时，比如或者，此时则会要考虑半周期卡根法，一周期卡根法，甚至四分之一周期卡根法，其中以四分之一周期卡根法最为稳妥，也就是作图时每次多画四分之一个周期，因为第二点和的第四点不能保证位于区间内.

对于周期卡根法，有图1图2和图3图4两种模型，

模型一：已知单调区间和对称轴，两种情况，如图1需要卡两次,，如果半周期不行就卡一个周期，

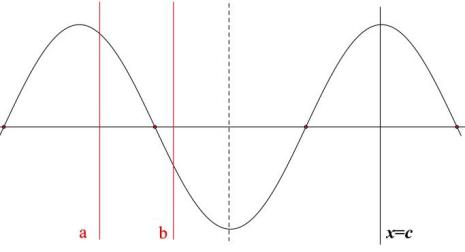
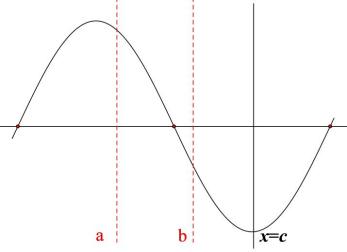
 

图1 图2

如图2需要卡1次，在间移动.

模型二：已知单调区间和对称中心，卡四分之一个周期

图3，可以在间移动； 图4

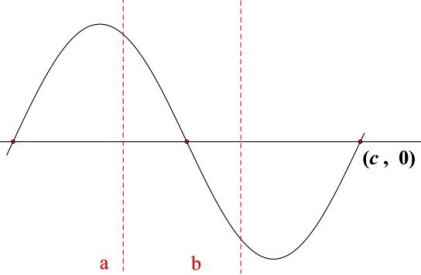
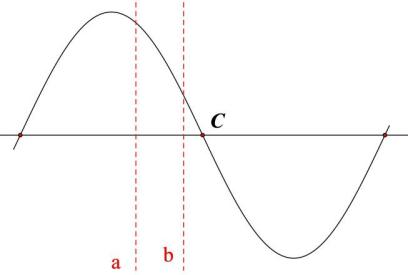
 

图3 图4

不管如何卡，总有一款适合你.

【例1】（2016•新课标Ⅰ）已知函数，，为的零点，为图象的对称轴，且在，上单调，则的最大值为（ ）

A．11 B．9 C．7 D．5

【例2多选】（2020•开福月考）已知函数满足，，且在区间单调，则选项正确的 个数为　　

A．有8种取值 B．的取值有无限个 C．不能等于 D．可以等于

【跟踪训练】

5.（2020•黔南州期末）已知函数，，，是函数的一个零点，且是其图象的一条对称轴．若是的一个单调区间，则的最大值为　　

A．18 B．17 C．15 D．13

声明：试

6.（2020•开福模拟）已知函数，，，对恒有，且在区间上有且只有一个使，则的最大值为　　

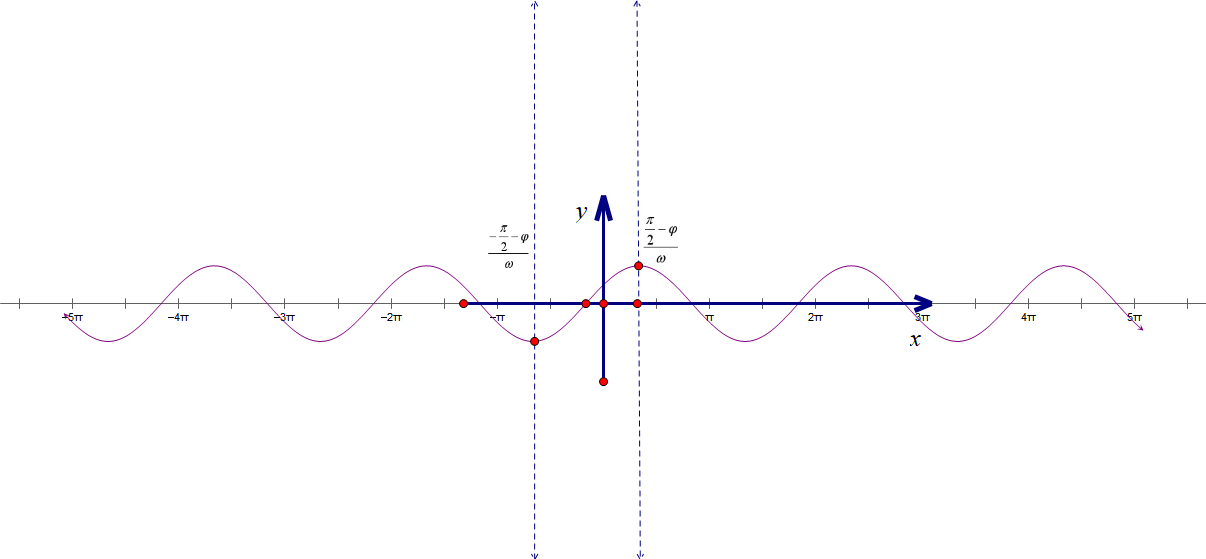
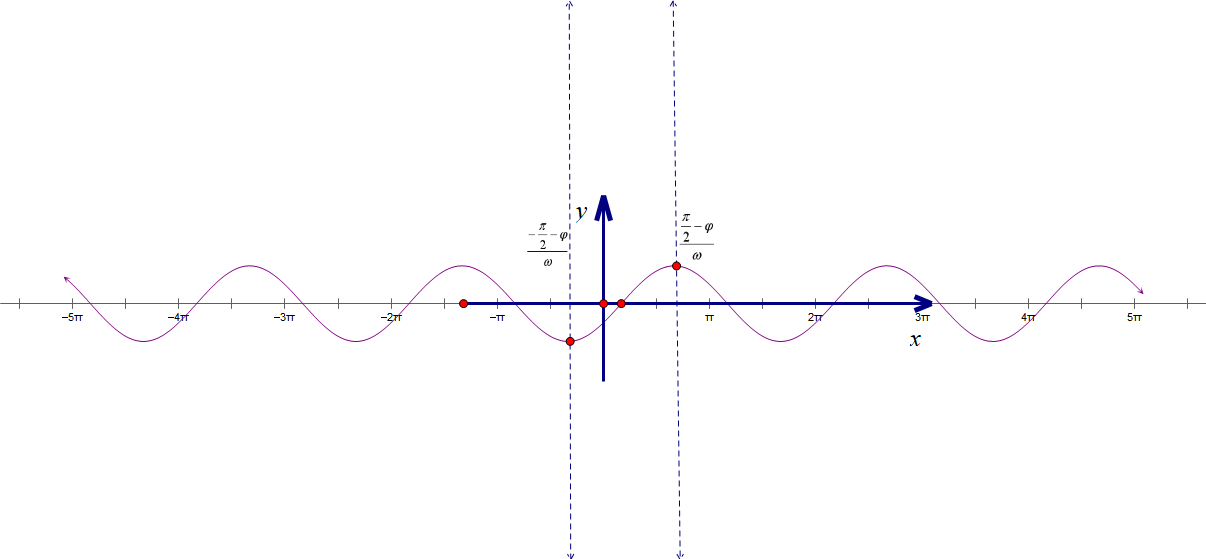
A． B． C． D．

题型五.函数卡根法模型

一轮复习里面就重点介绍了卡根，二轮有一点炒剩饭的感觉，当一轮二轮都重复提及卡根，那么说明此方法的重要性，卡根更多利用几何性质，我们这里介绍的方法，全程无，尽量简单便捷.

卡根分两种，一是五点法卡根，二是周期卡根，区别就在于卡根的区间或者是否包含0，比如这个范围内进行卡根，那么一定选择五点卡根法，这个范围内进行卡根，那么一定选择周期卡根法。

**一．五点卡根法，**通常当中，都会给一个条件，就是，所以，当时，图像如左下，当时，图像如右下：

我们通过图形可以知道，无论为任意正数，则正弦函数的靠近零点的第一个递增区间最小值和最大值均在第三和第一象限，卡根就从这个周期的五点开始操作，我们称之为五点卡根法.先看例题.

例18．（2021•铁岭模拟）函数在内有且仅有一个极大值点，则的取值范围为　　

A．， B．， C．， D．，

例19．（2021•南通模拟•多选）已知函数在，上有且只有三个零点，则下列说法中正确的有　　

A．在上存在，，使得 B．的取值范围为

C．在上单调递增 D．在上有且只有一个最大值点

例20.（2021•宿州三模）已知函数，函数的图象可以由函数的图象先向右平移个单位长度，再将所得函数图象保持纵坐标不变，横坐标变为原来的得到．若函数在上恰有3个零点，则的取值范围是　　

A．， B．， C．， D．，

22．（2021•凉州区模拟）若函数在区间上有最大值，则的取值范围为　　

A． B． C． D．

23．（2021•汉中模拟）已知函数在区间上是增函数，且在区间，上存在唯一的使得，则的取值可能为　　

A． B． C． D．2

24．（2021•宁江区三模•多选）已如函数在，上有且仅有6个零点，则实数的值可能为　　

A． B． C．3 D．

25．（2021•香坊区四模）已知函数在区间内有且仅有一个极大值，且方程在区间内有4个不同的实数根，则的取值范围是　　．

1. **周期卡根法**

如果卡根区间没有过零点，那么在卡根区间进行周期卡根，就看最多或者最少能放进去几个周期，当然，前提需要就是先要卡形式，即关于的表达式(为正整数).

定理：轴心距,也可以转化为

例21．（2021•全国三模）已知把函数的图象向左平移后得到的图象关于，对称，在，上具有单调性，则的最大值为　　

A．8 B．16 C．32 D．36

26.（2020•深圳月考）已知函数，，是的零点，直线是图象的对称轴，且在上单调，则的最大值为　　

A．1 B．2 C．3 D．4

27．（2016•新课标Ⅰ）已知函数，，为的零点，为图象的对称轴，且在，上单调，则的最大值为（ ）

A．11 B．9 C．7 D．5

28．（2021•射洪市月考）若函数在区间内没有最值，则的取值范围是　　

A． B． C． D．