**湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023-17**

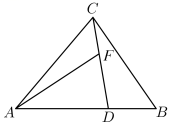
**高三数学复习小专题——平面向量小专题（1）**

**一、三点共线问题**

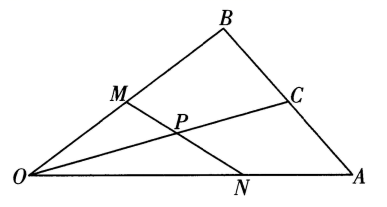
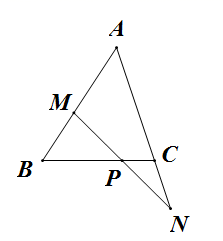
三点共线基本结论：已知A、B、P三点共线，O是A、B、P所在平面内且直线AB外任一点.则=m+n且m+n=1.（如何证明？）特别地+=2P是线段AB中点.

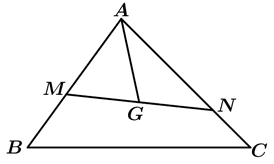
“爪子”定理：△*ABC*中，D为线段BC上一点，且则

1.如图，中，为上靠近的三等分点，点在线段上，设，，，则的最小值为



2.已知点在线段上（不含端点），是直线外一点，且，则的最小值是

3.如图所示，已知点*G*是的重心，过点*G*作直线分别与*AB*，*AC*两边交于*M*，*N*两点点*N*与点*C*不重合，设，，则的最小值为



4.如图，在中，*C*是的中点，*P*在线段上，且.过点*P*的直线交线段分别于点*N*，*M*，且，其中，则的最小值为

5.如图，在中，点满足，过点的直线与所在的直线分别交于点若，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

6.已知数列是正项等差数列，在中，，若，则的最大值为

7.在中，点是线段上一点，点是线段上一点，且，则

8.中，，为边上一点，与交于点，若，则

9.在中，为的中点，，为的两个三等分点，交于点，设，，则

**二、三角形的四心**

**（一）重心**

1.重心G定义：三角形各边的中线的交点

2.重心G几何性质：

①重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为2∶1．

②重心和三角形3个顶点组成的3个三角形面积相等(都等于原三角形面积的2/3)．

③在平面直角坐标系中，重心的坐标是顶点坐标的算术平均数；即*G*为△*ABC*的重心，*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，*C*(*x*3，*y*3)，则*G*．

3.重心G的向量相关公式：

（1）是的重心；

（2）G是ABC的重心,则P为ABC所在平面的任意一点则；

（3）是的重心2＋2＋2取得最小值；（建立坐标系，直接求最值）

（4）是的重心＋＋取得最小值；

（5）若=(+)(≥0)点P轨迹经过△ABC的重心；

（6）=(+)(≥0)点P轨迹经过△ABC的重心；

（7）=(+)(≥0)点P轨迹经过△ABC的重心.

4.考查角度

█确定“心”

1.已知*O*是△*ABC*所在平面上的一点，若，则点*O*是△*ABC*的（ ）

A．外心 B．内心 C．重心 D．垂心

2.*O*是*ΔABC*所在平面上的一点，若（其中*P*为平面上任意一点），则点*O*是*ΔABC*的（ ）

A．外心 B．内心 C．重心 D．垂心

3.在所在的平面内有一动点，若，则当取得最小值时，为的（ ）

A．垂心 B．重心 C．外心 D．内心

4.设为所在平面内一动点.则使得取得最小值的点是的（ ）.

A．外心 B．内心 C．重心 D．垂心

5.已知*O*是平面上一定点，*A*，*B*，*C*是平面上不共线的三个点，动点*P*满足＝＋*λ*，*λ*∈R，则*P*点的轨迹一定经过△*ABC*的(　　)

A.外心 B.内心 C.重心 D.垂心

6.已知*O*是平面上的一定点，*A*，*B*，*C*是平面上不共线的三个动点，若动点*P*满足＝＋*λ*(＋)，*λ*∈(0，＋∞)，则点*P*的轨迹一定通过△*ABC*的(　　)

A．内心　　　　　　B．外心　　　　　　C．重心　　　　　　D．垂心

7.已知*A*，*B*，*C*是平面上不共线的三点，*O*为坐标原点，动点*P*满足＝[(1－*λ*)＋(1－*λ*)＋(1＋2*λ*)·]，*λ*∈R，则点*P*的轨迹一定经过(　　)

A．△*ABC*的内心　B．△*ABC*的垂心　　C．△*ABC*的重心　　D．*AB*边的中点

8.已知点是所在平面内的一定点，是平面内一动点，若，则点的轨迹一定经过的（ ）

A．重心 B．垂心 C．内心 D．外心

9.已知的三个内角分别为，，，动点满足，，则动点的轨迹一定经过的（ ）

A．重心 B．垂心 C．内心 D．外心

█应用“心”

10.已知*G*是△*ABC*重心，若，，则的值为

11.已知点*G*是△*ABC*的重心，过点*G*作直线与*AB*，*AC*两边分别交于*M*，*N*两点，且=，＝*y*，则的值

12.已知点*G*是的重心，过点*G*作直线分别与*AB*，*AC*两边交于*M*，*N*两点（点*M*，*N*与点*B*，*C*不重合），设，，则的最小值为

13.为三角形内部一点，､､均为大于1的正实数，且满足，若､､分别表示､､的面积，则为

14.过△*ABC*重心*O*的直线*PQ*交*AC*于点*P*，交*BC*于点*Q*，＝，＝*n*，则*n*的值为\_\_\_\_．

15.设*G*为△*ABC*的重心，且sin*A*·＋sin*B*·＋sin*C*·＝0，则*B*的大小为\_\_\_\_\_\_\_\_．

16.已知是的重心，且满足，则 = .

17.已知*P*，*Q*为△*ABC*中不同的两点，且3＋2＋＝0，＋＋＝0，则*S*△*PAB*∶*S*△*QAB*为\_\_\_\_\_．

**（二）外心**

1.外心的定义;三角形各边的中垂线的交点（外接圆的圆心）

2.外心的几何性质;外心到三个顶点的距离相等，等于外接圆的半径

3.外心向量相关公式;

(1)W为△ABC外心2=2=2;

(2)W为△ABC外心（+）∙=（＋）∙=（＋）∙;

(3)W为△ABC外心;

(4)W为△ABC外心.

4.考查角度

█确定“心”

1.在中，设，那么动点的轨迹必通过的（ ）

1. 垂心 B．内心 C．外心 D．重心

2.已知是所在平面上的一点，若，则点是的（ ）

A.外心 B.内心 C.重心 D.垂心

3.设*O*是所在平面内一定点,*P*是平面内一动点,若,则点*O*是的（ ）

A．内心 B．外心 C．重心 D．垂心

4.已知，点，为所在平面内的点，且，，， 则点为的（ ）

A．内心 B．外心 C．重心 D．垂心

5.已知是平面上的一定点，，，是平面上不共线的三个点，动点满足

，，则动点的轨迹一定通过的( )

A．重点 B．外心 C．内心 D．垂心

6.设是所在平面内的一点，若且．则点*P*是的（ ）

A．外心 B．内心 C．重心 D．垂心

7.设是所在平面内的一点,若且.则点是的（ ）

A．外心 B．内心 C．重心 D．垂心

8.已知点是内任意一点，点是△所在平面内一点；若点是△的底边上的中点，满足，则点可能通过△的\_\_\_\_\_\_心（填：重心、内心、垂心、外心）.

█应用“心”

9.在△*ABC*中，∠*ACB*＝90°，＝，＝，点*D*是的外心，*E*是*AC*的中点，则＋＝（ ）

A． B． C． D．

10.已知△*ABC*中，，，点*O*是△*ABC*的外心，则（ ）

A．－ B．－ C． D．

**湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023-17**

**高三数学复习小专题——平面向量小专题（2）**

11.在中，，，，点*D*是的外心，*E*是*AC*的中点，则＋＝（ ）

A． B． C． D．

12.已知是锐角三角形的外接圆的圆心，且，若，则*m*＝(　　)

A．　　　　B．　　　C．　　　　D．不能确定

13.已知*O*是△*ABC*的外心，∠*C*＝45°，则＝*m*＋*n*(*m*，*n*∈R)，则*m*＋*n*的取值范围是

14.在中，，，分别为的重心和外心，且，则的形状是（ ）

A．锐角三角形　　B．钝角三角形　　C．直角三角形　　D．上述三种情况都有可能

15.在锐角三角形*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，点*O*为△*ABC*的外接圆的圆心，*A*＝，且＝*λ*＋*μ*，则*λμ*的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

16.在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*， ，若△*ABC*的外接圆的圆心为，且满足，则的值为 .

17.已知*P*是边长为3的等边三角形*ABC*外接圆上的动点，则的最大值为

18.设是△的外心，、、分别为△的内角、、的对边，满足，则的取值范围是

18.已知在△*ABC*中，*AB*＝1，*BC*＝，*AC*＝2，点*O*为△*ABC*的外心，若＝*x*＋*y*，则有序实数对(*x*，*y*)是

19.设点O是△ABC外接圆的圆心，AB=3，且，则的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

20.已知O是△ABC的外心，AB=6，AC=10，若，且，则△ABC的面积为\_\_\_\_\_\_.

21.已知△ABC的外心为O,且AB=5，，则\_\_\_\_\_\_.

22.在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*， ，若中，，，为的重心，为的外心，则 ．

23.的外接圆的圆心为，、、，则 .

24.已知点O是△ABC的外心，若，则cos∠BAC=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**（三）垂心**

1.垂心H的定义;三角形各边的垂线的交点

2.垂心H的几何性质;

①垂心和顶点的连线与对应的边垂直，即为高．

②[锐角三角形](http://baike.baidu.com/view/9094.htm)的垂心在三角形内，[直角三角形](http://baike.baidu.com/view/8935.htm)的垂心在直角顶点上，[钝角三角形](http://baike.baidu.com/view/9110.htm)的垂心在三角形外．

3.垂心H向量相关公式;

（1）H是的垂心；

（2）H是的垂心；

（3）H是的垂心(非直角三角形）；

（4）H是的垂心(非直角三角形）；

(5)=(+)(≥0)点P轨迹经过△ABC的垂心.

█确定“心”

1.设为的外心，若，则是的（ ）

A．重心（三条中线交点） B．内心（三条角平分线交点）

C．垂心（三条高线交点） D．外心（三边中垂线交点）

2.已知点在所在平面内，且，则点是的 

A．重心 B．外心 C．垂心 D．内心

3.在四面体中，，，点在面上的射影为点，则点为的　　

A．重心 B．外心 C．内心 D．垂心

4.已知点*O*为△*ABC*所在平面内一点，且， 则*O*一定为△*ABC*的 （ ）

A．外心 B．内心 C．垂心 D．重心

5.已知是所在平面内一点，且满足，则点（ ）

A．在边的高所在的直线上 B．在平分线所在的直线上

C．在边的中线所在的直线上 D．是的外心

6.已知的外接圆的的圆心是*M*，若，则*P*是的（ ）

A．内心 B．外心 C．重心 D．垂心

7.已知*O*是平面上的一个定点，*A*，*B*，*C*是平面上不共线的三个点，动点*P*满足＝＋*λ*(＋)，*λ*∈(0，＋∞)，则动点*P*的轨迹一定通过△*ABC*的(　　)

A．重心 B．垂心 C．外心 D．内心

8.若为所在平面内一点，且，则点是的( )

A．重心 B．外心 C．内心 D．垂心

9.向量所在直线一定通过△的\_\_\_\_\_\_\_\_心.

█应用“心”

10.在中，，，是的中点，是的垂心，则（ ）

1.  B． C． D．

11.设*H*是△*ABC*的垂心，若，则的值为（ ）

A． B． C． D．

3. 设*H*是△*ABC*的垂心，若，则的值为（ ）

A． B． C． D．

4.设H为的垂心，且，则\_\_\_\_\_\_\_.

**（四）内心**

1.内心的定义：三角形各边的角分线的交点（内切圆的圆心）

2.内心的几何性质：

①三角形的内心到三边的距离相等，都等于内切圆半径r．

②内切圆半径的计算一般涉及等面积变形，公式；特别地，在Rt△ABC中，∠C=90°，．

③**I为△ABC的**内**心,*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，*C*(*x*3，*y*3)，则I（,）．**

3.内心向量相关公式：

(1)I为△ABC内心a＋b＋c=；

(2)I为△ABC内心；

(3)I为△ABC内心；

(4)I为△ABC内心；

(6)I为△ABC内心∙（+）=∙（+）=∙（+）=0；

(7)I为△ABC内心设为△ABC所在平面内任意一点，；

(8)=(+)(≥0)点P轨迹经过△ABC的内心 .

█确定“心”

1.中，*a*､*b*､*c*分别是*BC*､*AC*､*AB*的长度，若，则*O*是的（ ）

A．外心 B．内心 C．重心 D．垂心

2.已知所在的平面上的动点满足，则直线一定经过的 

A．重心 B．外心 C．内心 D．垂心

3.在中，，，，则直线通过的 

A．垂心 B．外心 C．内心 D．重心

4.已知*O*是平面上一点，，*A*、*B*、*C*是平面上不共线的三个点，点*O*满足，则*O*点一定是△*ABC*的（ ）A．外心 B．内心 C．重心 D．垂心

5.设的角、、的对边长分别为，，，是所在平面上的一点，，则点是的　　

A．重心 B．外心 C．内心 D．垂心

6.已知点在平面中，且，则点是的（ ）

A．重心 B．垂心 C．外心 D．内心

7.平面内及一点满足，则点是的（ ）

A．重心 B．内心 C．外心 D．垂心

8.在中，，动点*M*满足，则直线*AM*一定经过的（ ）

A．垂心 B．内心 C．外心 D．重心

9.已知*O*是平面上的一定点，*A*，*B*，*C*是平面上不共线的三个动点，若动点*P*满足＝＋*λ*，*λ*∈(0，＋∞)，则点*P*的轨迹一定通过△*ABC*的 心；

10.为所在平面内一点，，，为的角，若，则点为的 心；

█应用“心”

11.设*O*是△*ABC*的内心，*AB*＝*c*，*AC*＝*b*，若＝*λ*1＋*λ*2，则(　　)

A．＝　　B．＝　　C．＝　　D．＝

12.已知在中，，，设是的内心，若，则（ ）

A． B． C． D．

13.在△*ABC*中，*AB*＝5，*AC*＝6，cos *A*＝，*O*是△*ABC*的内心，若＝*x*＋*y*，其中*x*，*y*∈[0，1]，则动点*P*的轨迹所覆盖图形的面积为（ ）

**湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023-17**

**高三数学复习小专题——平面向量小专题（3）**

A．B．C．4D．6

14.在中，，设是的内心，若，则的值为\_\_\_\_\_\_．

15.在△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边为*a*，*b*，*c*，*a*=*b*=4，*c*=6，*I*是△*ABC*中内切圆的圆心，若，，则．

**三、奔驰定理**

1、奔驰定理：是内的一点，且，则；由于这个定理对应的图象和奔驰车的标志很相似，我们把它称为“奔驰定理”．

2、证明过程：已知是内的一点，，，的面积分别为，，，

求证：.

证明：延长与边相交于点，则，

，∵，

∴，∴，所以.



3.奔驰定理推论：是所在平面内的一点，，则

①；②，，.

题型一、奔驰定理的直接应用求面积

1.设点在所在平面内，若，则与的面积比为 .

【解析】方法一：由奔驰定理可得：

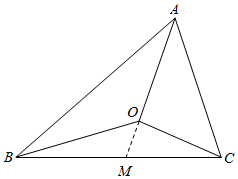
方法二：如图，设直线与直线的交点为点，

则和面积比为，设，

∵，∴，

由平面向量的基本定理得，，解得，

∴和的面积比为.



2.已知点是所在平面内一点，满足，，则 .

【解析】方法一：由奔驰定理可得，，所以

方法二：由，可得，

设，中点分别是，，得，所以点在中位线上，且，

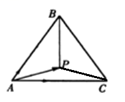
所以.方法三、罗氏定位万能比例法

题型二、奔驰定理的变式应用求面积

考查角度一、点在三角形内部

3.如图，设为所在平面内的一点，且，则与的面积之比等于（ ）

A. B. C. D.



【解析】方法一：由变形可得：4，则，整理可得：，根据奔驰定理可得：，则.

方法二：延长AP交BC于点D，因为A、P、D三点共线，所以，设 ，代入可得，即，又因为，即，且，解得 ，所以可得 ，因为与有相同的底边，所以面积之比就等于与之比，所以与的面积之比为.

4.已知点是所在平面内的一点，若满足，且，则实数的值是\_\_\_\_\_\_.

【解析】方法一：由变形可得：，整理可得：，根据奔驰定理可得：，则.

方法二：记=，∵，∴，，

又∵，∴，从而.

5.已知*P*，*Q*为△*ABC*中不同的两点，且3＋2＋＝0，＋＋＝0，则*S*△*PAB*∶*S*△*QAB*为\_\_\_\_\_．

解析　因为3＋2＋＝2(＋)＋＋＝0，所以*P*在与*BC*平行的中位线上，且是该中位线上的一个三等分点，可得*S*△*PAB*＝*S*△*ABC*，＋＋＝0，可得*Q*是△*ABC*的重心，因此*S*△*QAB*＝*S*△*ABC*，*S*△*PAB*∶*S*△*QAB*＝1∶2．

秒杀　由3＋2＋＝0，＋＋＝0，根据奔驰定理得，*S*△*PAB*∶*S*△*ABC*＝1∶6，*S*△*QAB*∶*S*△*ABC*＝1∶3＝2∶6，所以*S*△*PAB*∶*S*△*QAB*＝1∶2．

考查角度二、点在三角形外部

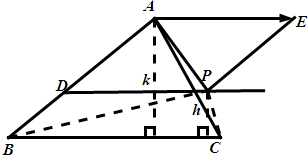
6.已知点是所在平面内一点，若，则与的面积比为（ ）

A． B． C． D．

【解析】方法一：由，变形可得：，

根据奔驰定理推论可得：.

方法二：在线段上取使，则，过作直线使，在上取点使，过作的平行线，过作的平行线，设交点为，则由平行四边形法则可得，设的高线为，的高线，由三角形相似可得，∵与有公共的底边，∴与的面积的比为．



考查角度三、点在三角形边上

7.已知的三个顶点，，及坐在平面内一点满足，若与的面积分别为，，则

【解析】∵，∴，即是上靠近的一个三等分点，∴与的面积之比为2.

题型三、奔驰定理的应用求其他数学量

8设为所在平面上一点，且满足．若的面积为8，则的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

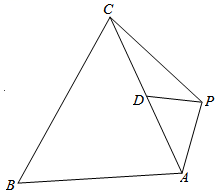
【解析】方法一：奔驰定理推论：是平面内的一点，且，则①  ； ② 

∵，∴

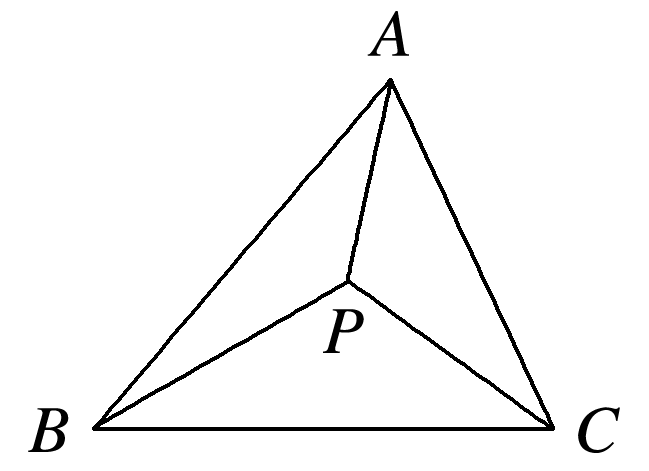
方法二：共线系数和＋分点恒等式+等积变形，

设*H*为线段*AC*上一点，且，则，

∵*PD*∥*AB*，∴.



9.设点*P*在△*ABC*内且为△*ABC*的外心，∠*BAC*＝30°，如图．若△*PBC*，△*PCA*，△*PAB*的面积分别为，*x*，*y*，则*x*＋*y*的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_．



解析：根据奔驰定理得，＋*x*＋*y*＝0，即＝2*x*＋2*y*，平方得2＝4*x*22＋4*y*22＋8*xy*||·||·cos∠*BPC*，又因为点*P*是△*ABC*的外心，所以||＝||＝||，且∠*BPC*＝2∠*BAC*＝60°，所以*x*2＋*y*2＋*xy*＝，(*x*＋*y*)2＝＋*xy*≤＋2，解得0<*x*＋*y*≤，当且仅当*x*＝*y*＝时取等号．所以(*x*＋*y*)max＝．