湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——解析几何小专题（11）——点差法与定比点差法

### 一、知识点

#### 1、点差法的原理

(1)假设点在有心二次曲线上，且弦的中点为代入曲线,有,两式作差,得;左右两边同除以

,得.变形得,其中为有心二次曲线的离心率(圆的离心率).

（2）抛物线,任意弦的中点为代入曲线方程，有,两式作差,得,左右两边同除以,得.

#### 2、有心二次曲线

实仿射平面的有一个对称中心的常态二次曲线称为有心二次曲线,所有有心二次曲线都是椭圆或双曲线.

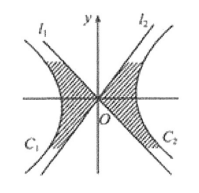
#### 3、点差法基本题型

（1）求以定点为中点的弦所在直线的方程

（2）过定点的弦和平行弦的中点轨迹问题

（3）求与中点弦有关的圆锥曲线的方程

（4）圆锥曲线上两点关于某直线对称问题

与中点有关的的几何特征：对称、垂直平分、等腰三角形、菱形、平行四边形等.

#### 4、点差法在双曲线中的适用条件

已知双曲线,任意弦的中点,

若当中点满足,则这样的双曲线的中点弦不存在（如图阴影部分）;

若当中点满足或，则这样的双曲线的中点弦存在.

#### 5、定比分点

若,则称点为点的定比分点.

当时,点在线段上，称为内分点;

当时,点在线段的延长线上，称为外分点.

定比分点坐标公式:若点,则点的坐标为.

#### 6、定比点差法原理:

若,则称调和分割,根据定义,那么也调和分割.

定理:设为有心二次曲线上的两点,若存在两点,满足,

则一定有

证明:设点,

因为,

则由定比分点坐标公式可得,

将代入曲线,有得

(1)-(3),得.

这样就得到了,则.

(2)若点为异于原点的定点,则点在直线上.

#### 7、定比点差法基本题型

(1)求弦长被坐标轴分界的两段的比值范围;

(2)简化证明过定点的直线问题的运算以及定值问题;

### 二、典型例题

### 1、点差法

关于点差法的研究,在解析几何中有着广泛的应用,主要有以下四种基本题型.

##### 1.1、求以定点为中点的弦所在直线的方程

例1.已知双曲线,过能否作直线,使与双曲线交于两点,且是线段的中点,这样的直线如果存在,求出它的方程;如果不存在,说明理由.

##### 1.2、求过定点的弦或平行弦的中点轨迹

例2.已知椭圆的弦所在直线过点,求弦中点的轨迹方程.

##### 1.3、求与中点弦有关的圆锥曲线的方程

例3.已知中心在原点,一焦点为的椭圆被直线截得的弦的中点的横坐标为,求椭圆的方程.

##### 1.4、圆锥曲线上两点关于某直线对称问题

例4.已知椭圆,试确定的取值范围,使得对于直线,椭圆上总有不同的两点关于该直线对称.

例5.已知椭圆的离心率,连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为4.

(1)求椭圆的方程.

(2)设直线与椭圆相交于不同的两点,已知点,点在线段的垂直平分线上,且,求的值.

#### 2、定比点差法

关于点差法的研究,在解析几何中有着广泛的应用,下面主要从三方面来研究.

##### 2.1求弦长被坐标轴分界的两段的比值范围

围.

例7.已知椭圆的上下两焦点分别为,过点与轴垂直的直线交椭圆于两点,的面积为,椭圆离心率为.

(1)求椭圆的标准方程.

(2)已知为坐标原点,直线与轴交于点,与椭圆交于两个不同的点,若存在实数,使得,求的取值范围.

##### 2.2简化证明过定点的直线问题的运算以及定值问题

例设椭圆过点,且左焦点为.

(1)求椭圆的方程;

(2)当过点的动直线与椭圆相交于两不同点时，在线段上取点,满足

,证明：点总在某定直线上.

例9.已知为有心二次曲线的左、右两个焦点,为曲线上任意一点,直线分别交曲线异于的点,设,证明:为定值.

例10.已知椭圆的离心率为,半焦距为,且,经过椭圆的左焦点,斜率为的直线与椭圆交于两点,为坐标原点.

(1)求椭圆的标准方程;

例11.已知椭圆,点,过点作椭圆的割线为关于轴的对称点,求证：直线恒过定点.

例12.设椭圆的右焦点为,过的直线与交于两点,点的坐标为.

(1)当与轴垂直时,求直线的方程.(2)设为坐标原点,证明:.

例13.已知椭圆的离心率为,焦距为,斜率为的直线与椭圆有两个不同的交点,

(1)求椭圆的方程.

(2)若,求的最大值.

(3)设,直线与椭圆的另一个交点为,直线与椭圆的另一个交点为,若和点共线,求

例14.已知点,椭圆上两点满足,则当为何值时,点横坐标的绝对值最大.

### 三、方法总结

点差法是解决圆锥曲线与直线的关系中常用到的一种方法.当直线与圆锥曲线相交的问题涉及到相交弦的中点时，宜应用点差法求解，即将直线被圆锥曲线截得的弦的两端点坐标代入圆锥曲线方程,得到两个等式,再将两个等式作差,转化得到弦的中点坐标与直线斜率的关系,进而解决问题.在解答圆锥曲线的某些问题时,若果能适时运用点差法,可以达到“设而不求”的目的,同时,还可以降低解题的运算量,优化解题过程.

当时,点为弦的中点.若时,点不再是中点,就成了定比分点.这时就会出现这样形式的式子,若果再凑出,我们就会想到,则在有心二次曲线的方程上乘以再作差,就会得到这样的式子,因此我们想到了“定比点差法”.

定比点差法实际上是直线的参数方程的变异形式,只不过将其中的变作了,也就是说只要是共线点列的问题都可以在考虑运用直线的参数方程的同时考虑定比点差法.定比点差法在处理圆锥曲线上过定点的直线的证明题时往往可以起到简化运算的作用.但定比点差法无法应用于拋物线,并且它采用的参数在解析几何问题中并不通用,在求解具体的斜率、弦长与面积时往往会引起运算上的麻烦当然,求坐标还是很简便的),所以并不是所有的共线问题都适合用定比点差法解决.

综上所述，在研究点差法及定比点差法时，主要核心思想统一体现为减元、消元以及方程的思想.

### 四、练习

1.已知椭圆的一条准线方程是,有一条倾斜角为的直线交椭圆于两点,若的中点为,则椭圆方程为

2.已知椭圆上不同的三点与焦点的距离成等差数列.

(1):

(2)若线段的垂直平分线与轴的交点为,则直线的斜率.

3.若拋物线上存在不同的两点关于直线对称,则实数的取值范围是\_\_\_\_.

4.设分别为椭圆的左、右焦点,点在椭圆上,若,则点的坐标是\_\_\_\_.

双曲线的右顶点作斜率为的直线,该直线与双曲线的两条渐近线的交点分别为若,则双曲线的离心率是

6.已知椭圆的左右焦点分别为是椭圆上的三个动点,且

8.已知抛物线的焦点为,斜率为的直线与的交点分别为,与轴的交点为.

(1)若,则直线的方程为 ;

(2)若,则=

答案1. 2.（1）8;(2) 3. 4. 5.

6. 7.(2)

1.已知椭圆的一条准线方程是,有一条倾斜角为的直线交椭圆于两点,若的中点为,则椭圆方程为

【答案】

【解析】设,则,

且(1),(2)

(1)-(2)得:,

(3)

又(4)

而

由(3)(4)可得,所求椭圆方程为.

2.已知椭圆上不同的三点与焦点的距离成等差数列.

(1):

(2)若线段的垂直平分线与轴的交点为,则直线的斜率.

【答案】（1）略;(2)

【解析】（1）略;

(2)设线段的中点为.

又在椭圆上,(1),(2),

(1)-(2)得:,

3.若拋物线上存在不同的两点关于直线对称,则实数的取值范围是\_\_\_\_.

【答案】

【解析】当时,显然满足.

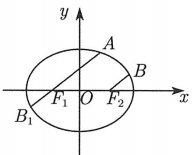
当时,设拋物线上关于直线对称的两点分别为,且的

中点为,则(1),(2),

综上可知,所求实数的取值范围是.

4.设分别为椭圆的左、右焦点,点在椭圆上,若,则点的坐标是\_\_\_\_.

【答案】

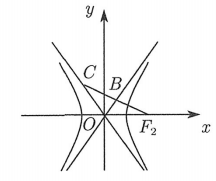


【解析】记直线反向延长交椭圆于,由及椭圆对称性得,

设.

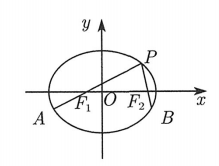
双曲线的右顶点作斜率为的直线,该直线与双曲线的两条渐近线的交点分别为若,则双曲线的离心率是

【答案】



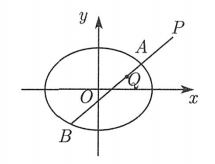
【解析】如图,

6.已知椭圆的左右焦点分别为是椭圆上的三个动点,且



【答案】

【解析】设,



【答案】

【解析】设,

记

即

又

8.已知抛物线的焦点为,斜率为的直线与的交点分别为,与轴的交点为.

(1)若,求直线的方程;

(2)若,求.

(2)设直线的方程为:,联立

设,则(1)