湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——解析几何小专题（12）——点乘双根法

### 一、知识点

在计算两个向量的数量积（即点乘）时，会遇到 的结构, 常规 方法是将它展开, 再结合韦达定理化简整理, 也可以利用“点乘双根法”进行整体处理, 达到简化运算, 快速解题的目的.

#### 1.方法介绍

所谓的“点乘双根法”, 是指构建双根式，整体处理含 或 等类似结构的计算问题.

#### 2.理论基础

二次函数 的双根式. 若一元二次方程 有两根 , 则, 取 , 可得

#### 3.适用类型

, 或 等形式.

#### 4.解题步骤

化双根式 赋值 整体代入.

### 二、例题

例 1. 已知点 是拋物线 上一定点, 以 为直角顶点作该抛物线的内接直角三角形 , 则动直线 过定点 .

1.【证明】设 , 由 , 得

显然直线 不与 轴平行，设其方程为 .

步骤 1: 化双根式

联立 , 得 , 方程两根为 , 则 (1)

联立 , 得 , 则 (2)

步骤 2: 赋值

在(1)中, 令 , 则 (4)

在(2)中, 令 , 则 (5)

步骤 3: 整体代入

即 ,

即 ,

所以 或 ,

情形一：当 , 即 时, 说明点 在直线 上, 不合题意;

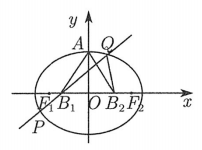
情形二：当 , 即 时, 直线 过定点 .

综上所述：直线 恒过定点 .

例 2.设椭圆中心在原点 , 长轴在 轴上，上顶点为 , 左右顶点分别为 ,线段 中点分别为 , 且 是面积为 4 的直角三角形.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过 作直线 交椭圆于 两点, 使 , 求直线 的方程.



【解析】（1）设所求椭圆的标准方程为 , 右焦点为 .

因为 是直角三角形, 又 , 故 为直角, 因此 , 得 .

在  中, , 故 

由题设条件 , 得 , 从而 .

因比, 所求椭圆的标准方程为 ;

(2) 显然直线  不与  轴垂直，设  的方程为 ,

因为 , 则 ,

所以 

联立 

因为  是方程的两根, 所以 ,

令 , 得 ,

令 , 得 ,

代入 (\*), 得 ,

化简可得: , 所以 ,

故直线  方程为: .

例 3.设  分别为椭圆  的左、右顶点, 过左焦点  且斜率为  的直线与

椭圆交于  两点. 若 , 求  的值.

【答案】 .

【解析】设点 , 由  得直线  的方程为 ,

由方程组 , 消去 , 整理得 .

由韦达定理可得 .

因为 ,所以





由 , 得 .

因为  是方程  的两根, 所以



令 , 则 , 所以 

令 , 则 所以 

因为 ,所以 , 解得 .

例 4.设  为曲线  上两点,  与  的横坐标之和为 4 .

(1) 求直线  的斜率;

(2) 设  为曲线  上一点,  在  处的切线与直线  平行, 且 , 求直线  的方程.

4【答案】 (1) 1； (2) 

【解析】(1) 设 , 则 

于是直线  的斜率 .

(2) 由 , 得 .

设 , 由題设知 , 解得 , 于是 

因为 , 所以 , 即 .

设直线  的方程为 , 因为点  在直线  上,所以 ,

所以 .

由  得 . 由 , 得 .

在  式中, 令 , 得 

在(1)式中, 令 , 得 

∴,

解得 , 或  (舍）, 所以直线  的方程为 .

例5. 椭圆 , 若直线  与椭圆  交于  两点  不是左右顶点）, 且以直线  为直径的圆恒过椭圆  的右顶点. 求证：直线  恒过定点, 并求出该点的坐标.

例6. 已知椭圆  的右焦点为 , 过  且与  轴垂直的弦长为 3 .

(1) 求椭圆标准方程;

(2) 直线  过点  与满圆交于  两点, 问  轴上是否存在点 , 使  为定值?若存在, 求

出  的坐标; 若不存在, 说明理由.

例7.已知椭圆  的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三

个顶点, 直线  与椭圆  有且只有一个公共点 .

(1) 求椭圆  的方程及点  的坐标;

(2) 设  是坐标原点, 直线  平行于 , 与椭圆  交于不同的两点 , 且与直线  交于点 . 证明: 存在常数 , 使得 , 并求  的值.

5.【答案】 

【解析】设椭圆的右顶点为 ,

则 

联立 , 整理得: ,

因为  是方程  的两个根, 所以



取 , 得 ,

所以  (2).

取 , 并两边同时乘以 , 可得  (3).

将（2和(3)整体代入 (\*), 得 ,

即 , 即  或 ,

当  时, 直线  过点 , 不合题意;

当  时, 直线 , 显然  恒过定点 .

6.【答案】 (1) ; (2) 见解析

【解析】 (1)易得椭圆标准方程为 ;

(2) 当直线  的斜率存在时, 设为 , 则直线  的方程为 ,

设 , 则  (1).





在(1)中令 , 得 , (3)

在(1)中令 , 得 , (4)

把(3)4代入(2)并整理得



所以 , 得 , 此时 .

当直线  的斜率不存在时, , 仍有 .

综上所述,  的坐标为 .

7.【答案】 (1)  (2) ,

【解析】 (1) , 点  坐标为 , 过程路.

(2) 由已知可设直线  的方程为 ,

由方程组  可得 

所以  点坐标为 , 设点  的坐标分别为, ,

由方程组 , 可得  (1)

而  是  的两根, 所以

 (2)

方程(2)的判别式为 , 由 , 解得 .

由(2)得 

所以



同理 , 所以



②中令，得

得

得

，故存在，使得