湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——解析几何小专题（14）——构造同构式方程简化运算

### 一、知识纵横

#### 1.同构式方程

“同构式方程”指“结构相同的方程”, 是指除了变量不同, 其余结构均相同的等式.

如, 两式中除了的下标不同之外, 其余结构完全相同, 两式为同构式方程. 说明两点坐标满足直线方程: 则直线的方程为: .

又如 , 两式中除了的下标不同之外, 其余结构完全一致, 说明为方程

的两根, 由韦达定理可得: 

#### 2.解析几何中同构式的应用

同构思想简化运算的基本思路：构造方程, 巧用韦达定理.

①构造两个直线方程;

②构造一个二次方程的两根（坐标, 斜率, 定比）.

### 二、例题

例  已知椭圆内有一点, 过的两条直线分别于椭圆交于和两点, 且满足其中, 且, 若变化时,的斜率总为, 则椭圆的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【解析】设, 则.由, 得

代入椭圆方程, 得.

整理, 得，即 ①

设, 同理可得 ②

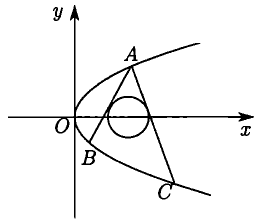
由①②可得直线的方程为,

所以直线斜率为, 即, 易得椭圆的离心率为.

例 2. 已知拋物线上三点, 直线是圆 的两条切线,则直线的方程为

【解析】解法 同构式韦达定理

由抛物线过, 得, 拋物线方程为.

设, 则, 同理,

由与圆相切得:, 整理得.

同理有:, 于是是方程的两根,

所以, 得.

【注】过拋物线任意两点的直线方程为.

解法 2：同构式2

由抛物线过, 得, 拋物线方程为.

设, 则, 直线,由与圆相切得:,

整理得，将代入, 得, 即 ①

同理可得 ② ①②两式说明：直线  经过两点

而过两点的直线有且只有一条, 故直线的方程为.

例3. 过椭圆的右焦点的直线交椭圆于两点,交轴于,若,, 则为

【解析】证明: 设, 由得,,代入椭圆方程得:,同理可得: ，

所以,是二次方程的两根，故.

![C:\Users\Administrator\AppData\Roaming\Tencent\Users\654362633\QQ\WinTemp\RichOle\84(4GJ1DEJD5Q(~8](C9$EJ.png](data:image/png;base64,)例4. 在平面直角坐标系中, 点在椭圆上，从原点向圆作两条切线分别与椭圆交于点, 若直线的斜率分别为, 且

(1) 求证: 

(2) 求证: .

【解析】（1）, 设,由得,所以.

在椭圆上, ,

于是,即, 化简得.

所以

(2) 设直线的方程分别为与,

过原点作圆的切线, 由圆心到直线的距离等于半径，

得, 即 即

因为是方程的两根, 所以, 所以

因为在椭圆上, 所以, 即, 所以.

例5.过抛物线上一点作圆的两条切线分别交于点, 则直线的方程为 .

【解析】解法1:, 设

则 同理, 直线的方程为, 即 ,由直线与圆相切, 得, 即,

化简得, 即. 由直线与圆相切，同理可得.

说明 两点都在直线 上，故直线的方程为.

解法2:

由题意知，切线的斜率均存在，设过点且与圆相切的直线方程为, 即,

则, 所以, 即 ，设, 则是上面方程的两根, 所以,由 得, 即.

设, 则 进而



而, 直线的方程为

即, 即, 即.

解法3:设, 则,

同理, 由与圆相切得: ,

整理得, 将 代入，得,

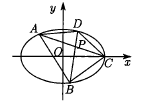
同理有: , 于是是方程的两根,

所以, 得.

例6. 如图, 在平面直角坐标系中, 椭圆过点, 离心率为, 又椭圆内接四边形（点在椭圆上）的对角线相交于点, 且,

(1) 求椭圆的方程;

(2) 求直线  的斜率.



【解析】（1）依题意, , 解得, 所求椭圆的方程为

(2) 设, 则. 由, 得 代入椭圆方程,

得 整理, 得, 即 ①

设, 同理可得 ②

由①②可得直线的方程为, 所以直线斜率为.

例7.已知椭圆的一个焦点为, 离心率为.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若动点为椭圆外一点，且点到椭圆的两条切线相互垂直，求点的轨迹方程.

【解析】 (1)  ，椭圆的标准方程为.

(2) 若两切线斜率都存在, 设切线方程为,

代入椭圆方程得:,

由判别式为零得:,

整理得: ，所以是方程的一个根，

同理是方程的另一个根,所以, 即;

若两切线中有斜率不存在,则, 也满足故点的轨迹方程为.

例8..过点的直线与椭圆交于点和, 且. 点满足, 若为坐标原点, 则 的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【解析】设点的坐标分别为, 由题设有四点共线,

故可设, 于是

 ①  ②

点在椭圆 上, 将①代入椭圆方程整理得

 ③

点在椭圆上，将②代入，同理可得

 ④

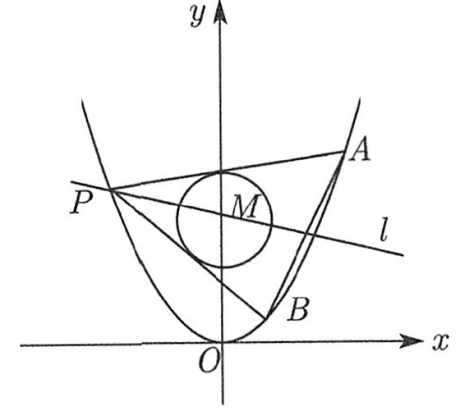
由 ③④知:是方程的两根,

由韦达定理得,点的轨迹方程为,

故的最小值就是点到直线的距离.

例9.已知抛物线,圆的圆心为点.

(1)求点到抛物线的准线的距离;

(2)已知点是抛物线上一点（异于原点）,过点作圆的两条切线,交抛物线于两点,若过两点的直线垂直于,求直线的方程.

**【解析】**(1)抛物线的准线为,圆心,点到准线的距离.

（2）**解法1:**

设点,由题意知.

设过点的圆的切线方程为：,由直线与圆相切有



设的斜率为,则.

由于,同理.

因此,解得,即.所以直线方程为.

**解法2:**设,由题意得,

可得,

所以直线化简得.

因为与圆相切,所以,化简得

同理可得.所以是方程的两根.

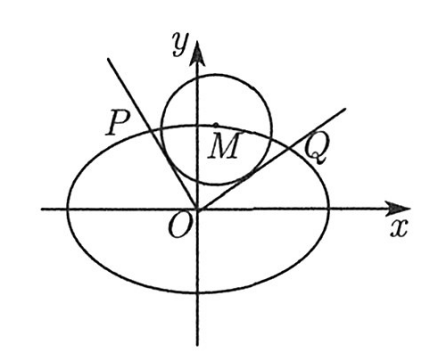
所以.又,由,解得.

即点的坐标为,所以直线的方程为.

例10.设为坐标原点,椭圆的离心率,以椭圆的长轴长,短轴长分别为两邻边的矩形的面积为8.

(1)求椭圆的方程;

(2)若是椭圆上的点,且圆与直线相切,,求圆的半径.

**【答案】**(1); (2).

**【解析】**(1)由已知得,解得,所以椭圆的方程为.

(2)过原点作圆的切线,设,圆半径为,

由圆心到直线的距离等于半径,得,

即,即,

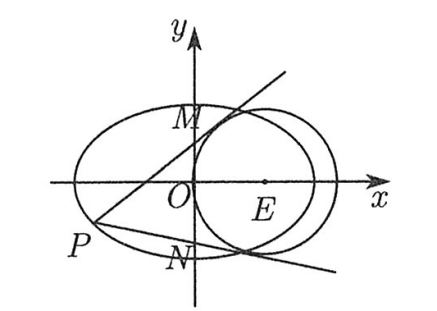
是方程的两根,,

因为在椭圆上，所以.

例11.已知椭圆的中心在原点,离心率为,其右焦点是圆的圆心.

(1)求椭圆的标准方程;

(2)如图,过椭圆上且位于轴左侧的一点作圆的两条切线,分别交轴于点.试推断是否存在点,使?若存在,求出点的坐标;若不存在,请说明理由.

****

**【答案】**(1);(2)存在点满足条件.

**【解析】**(1)设椭圆方程,半焦距为,

因为椭圆的右焦点是圆的圆心,则,又因为,即,

从而,故椭圆的方程为.

（2）设点,

则直线的方程为,即,

因为圆心到直线的距离为1,即,

即,即,

同理.

由此可知,为方程的两个实根,

所以,



因为点在椭圆上,则，

则,

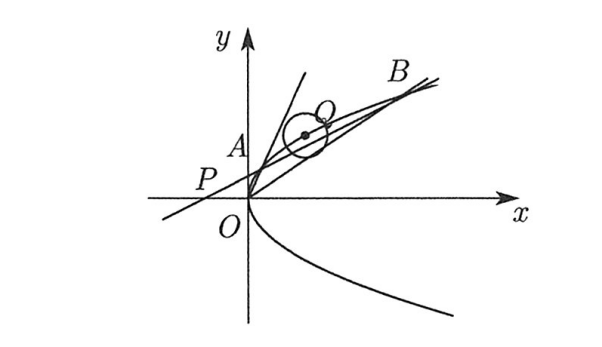
令,

则,因为,则，，即,

故存在点满足条件.

例12**.**如图,已知抛物线,直线过点与抛物线交于第一象限内两点,设的斜率分别为.

(1)求的取值范围;

(2)若直线恰好与圆相切,求的值.****

**【答案】**(1)(2)

**【解析】**（1）设,代入,

得,得.

设,则

,所以的取值范围是.

（2）由（1）知,设过原点且与圆相切的直线为,则,

整理得

,得,所以.

例13.已知圆,圆心在抛物线上,圆过原点且与的准线相切.

(1)求抛物线的方程;

(2)设点,点（与不重合）在直线上运动,过点作的两条切线,切点分别为,求证:.

**【答案】**(1);（2）见解析

**【解析】**（1）∵圆与抛物线准线相切,∴.又圆过和原点,∴.

∴,解得.∴抛物线的方程为.

(2)设方程为,

∴抛物线在点处的切线的斜率,

∴切线的方程为,即,

化简得:,

又因过点,故可得,即.

同理可得:.

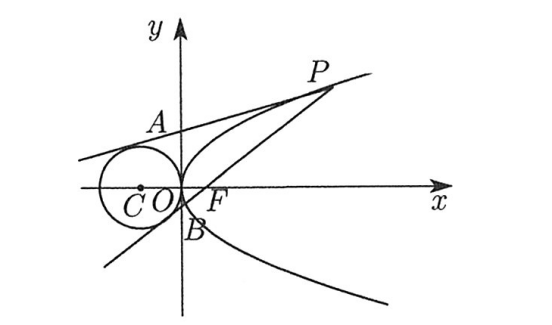
∴为方程的两根,∴.

∴

∴.

例14.已知抛物线和,过抛物线上的一点,作的两条切线,与轴分别相交于两点.

(1)若切线过抛物线的焦点,求直线斜率;（2）求面积的最小值.

**【答案】**(1)(2).

**【解析】**（1）抛物线的焦点为,设切线的斜率为,

则切线的方程为:,即.

∴,解得：.∵

（2）设切线方程为,由点在直线上得：

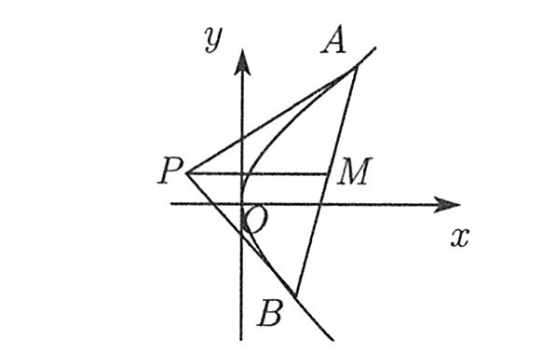
圆心到切线的距离,整理得:

将(1)代入(2)得:。设方程的两个根分别为,所以,

从而,

记函数,则,

的最小值为,当取得等号.

11.如图,已知点是轴左侧不含轴)一点,抛物线存在不同的两点满足的中点均在上.

(1)设中点为,证明:垂直于轴;

(2)若是半椭圆上的动点,求面积的取值范围.

**【答案】**（1）见解析;(2).

**【解析】**(1)设,

则中点为,由中点在抛物线上,可得,化简得,显然,且对也有,

所以是二次方程的两不等实根,

所以,即垂直于轴.

(2),

由（1）可得,

此时在半椭圆上,

∴,

∵,

,

所以,

,所以,

即的面积的取值范围是.