湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——解析几何小专题（15）——非对称韦达定理

### 一、知识点

在解决直线与圆锥曲线的位置关系的问题中,通常要联立直线与圆锥曲线的方程,消去或,得到一个一元二次方程,例如消去,得到一个两根为的一元二次方程,则有根与系数的关系:,此即为韦达定理.对于诸如,之类的目标,它们的结构特点是：将与互换之后结果不变,即具有“对称性”,此类问题称之为“对称型韦达”问题，稍作变形,就可以直接利用韦达定理的结果整体代入，快速求解.

但在某些问题中,我们会遇到两根不对称的结构,比如,,之类的问题，就相对较难地直接应用韦达定理来处理了，我们把这类问题称为“非对称韦达问题”,本讲介绍一些常见的处理手法.

### 二、例题

**类型两根之比型（如等**

例1.椭圆的左焦点为,过点的直线与椭圆相交于两点,直线的倾斜角为,求椭圆的离心率.

【解析】设,由题意知,直线的方程为,其中.

联立,得,解得

因为,所以,必,得离心率.

特殊解法1：非对称处理手法1:由韦达定理得,

由,得,即,所以,

即,即,,

整理得,即,所以.整理得.

【注】将取倒数相加,得到,这样处理将不对称式转化为对称式,就可以将韦达定理结果整体代入了.

特殊解法2：非对称处理手法2:由得,得,

将,代入上式得,整理得.

【注】手法2是利用条件得到与的关系:,就可以用韦达定理处理了.

特殊解法3：非对称处理手法3:

将代入,得,消去得,整理得.

【注】手法3逐个消掉,其实是代入消元法.

**类型2:系数不等型（如）**

例2.已知抛物线与定点,直线与抛物线交于两点,且有,求直线的斜率.

【解析】设,由条件可得与的系数不对等,怎么凑出韦达式呢?

解法1:即,待定系数,使得,易得,即,

因为,所以,取倒数相加,便得,

所以,

设直线,与抛物线联立可得,

则,代入前面的式子中可得,

解得或,所以直线斜率为或.

解法2:设,设直线,

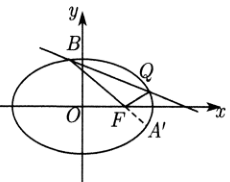
与抛物线联立可得,则,

由条件可得:,

代入上面两式,得:,所以

所以，解得或,所以直线斜率为或.

类型3:分式上下不对称型（如等)

例3.设为椭圆的右焦点,过点的直线与椭圆交于两点.

(1)若点为椭圆的上顶点,求直线的方程;

（2）设直线的斜率分别为,求证：为定值.

**【解析】**(1)方程为，即联立或，所以，而，故直线的方程为；

(2)设，，，联立，则.

由韦达定理可得：，（\*）

求解目标为：，，的系数出现了不对称，可有如下处理手法：

**非对称处理手法1：**（转化为）由（\*）两式相除，可得：，所以

所以.**【注】**，中，把转化为.

**非对称处理手法2**：，保留

.

**【注】**，保留一个，分子分母统一保留，故在分母配.

**非对称处理手法3**：，保留

.

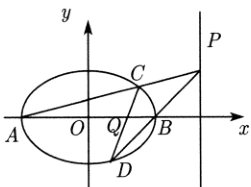
**【注】**，保留一个，分子分母统一保留，故在分子配.

**非对称处理手法4**：（暴力求根）

由求根公式得：，不妨设，，则

.

**【注】**首先结合韦达定理处理掉，然后暴力求根代入，，将分子分母都用含的式子表示，逐步消元得到结果.

**例4.**已知、分别为椭圆的左、右顶点，为的上顶点，，为直线上的动点，与的另一交点为，与的另一交点为.

(1)求的方程；

(2)证明：直线过定点.

**【解析】**（1）（过程略(1)；

(2)**解法1**：设，，.

由，，三点共线，得；由，，三点共线，，两式相除得：.

当直线的斜率不为，设直线的方程为，

联立，消去得：，由韦达定理得：，，

两式相除，可得，于是





所以，解得，直线方程为，过定点.

当直线的斜率为时，则其方程为，显然过点.综上所述：直线过定点.

**解法2**：利用椭圆的弦性质设，，，则，，所以，即.

又，所以.

当直线的斜率不为时，设的方程为，

联立方程组，消去得，则，

而，，

，由已知得，即，解得.直线的方程为，直线过定点.

当直线的斜率为时，则其方程为，显然过点.综上所述：直线过定点.

**【注】**此法利用椭圆第三定义进行转化：，联立直线与椭圆方程后，便是常规的韦达定理了.这个转化值得回味，基于一个重要模型：斜率之积为定值，第三边过定点.

一般地：为圆锥曲线上一定点，、为圆锥曲线上的两个动点，若（为常数且），则直线过定点.（证明略)

**解法3：平方法**由，，三点共线，得；由，，三点共线，，

两式相除得：，所以， ①

由点，在椭圆上，得：，.

对①式两边平方，得，即，也即，整理得，当直线的斜率存在时，设直线的方程为，联立，消去得

，韦达定理得：，.

于是，化简得，即，解得或.

当，直线的方程为，过定点；当时，直线的方程为，过定点，不合题意，舍去.当直线的斜率不存在时，有，，结合，可解得，此时直线的方程为，直线过点.综上，直线恒过定点.

**【注】**该法将不对称式两边平方，将不对称式转化为对称式：，接下来应用韦达定理就水到渠成了.

### 三、练习

1.设双曲线与直线相交于不同的点、.

（1）求双曲线的离心率的取值范围；

（2）设直线与轴的交点为，且，求的值.

**【解析】**(1)答案：，过程略.

(2)易得，设，，故，.

由与相交于两个不同的点，联立，得，

得，且，

由知，，取.

由得，取倒数相加，得，

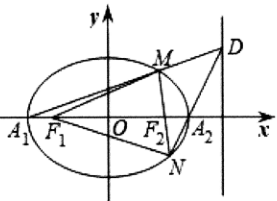
则，则，

将，代入上式得，解得.

2.已知椭圆离心率为，点，分别为椭圆的左、右顶点，点，分别为椭圆的左、右焦点.过点任作一条不与轴垂直的直线与椭圆交于、两点，的周长为.

(1)求椭圆的方程；

(2)若直线，交于点，试判断点是否在某条定直线上，若是，求出的值；若不是，请说明理理由.



**【解析】**(1)由的周长为8，得，即.

由离心率，可得，故.所以椭圆的方程为.

(2)**解法1**：设，，

联立得，由韦达定理得，.

考虑斜率不存在的情形，即，将其代入的方程得：.不妨设，，求得，，联立解得.

下面证明：当斜率存在时，，的交点恒在定直线上.

直线，，

联立两直线方程解得：，

所以，即.

综上，直线，的交点恒在定直线上.

**解法2**：设，，，联立得

，由韦达定理得，

联立，的方程得，则，

又，即，则.

故 

解得.

故直线，的交点恒在定直线上.

**解法3**：设，，

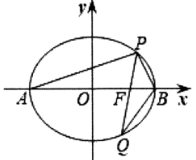
可知直线，.联立两直线方程得.

联立得，由韦达定理得，.

两式相除，得，则，

所以.

故直线，的交点恒在定直线上.

3.如图，在平面直角坐标中，已知椭圆的左、右顶点分别为，，过右焦点的直线与椭圆交于点，(点在轴的上方).设直线，，的斜率分别为，，.

(1)求证：为定值；

(2)是否存在常数，使得？若存在，求出的值；若不存在，请说明理由.

**【解析】**分析设，，直线的方程为，代入椭圆方程，

得，从而，，

于是.而，，

因此，将，代入，化简得.

(2)假设存在常数，使得，则，

**解法1**消

因为，，所以，

又，从而，于是.

**解法2：积化和**

因为，所以

**解法3：和化积**

因为，即，

所以

**解法4：升幂**

因为，所以，由，，得，.

于是，

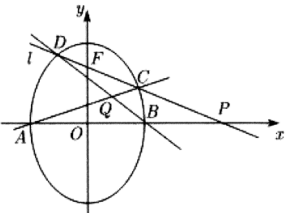
当直线斜率不存在时，此时.

当直线斜率存在时，设，代入椭圆方程，得.

从而，，于是，是.

**解法5：换**

因为，即，而，所以，从而.

**5.**椭圆有两顶点，，过其焦点的直线与椭圆交于，两点，并与轴交于点.直线与直线交于点.

(1)当时，求直线的方程；

(2)当点异于，两点时，求证：为定值.

**【解析】**（1）由已知可得椭圆方程为，设的方程

为为的斜率，设，.则由，得，

可得，所以

整理得，，所以，的方程为.

(2)由题可得，，直线的方程为，直线的方程为，

由，可得，

由，，得，代入上式可得，

，可得，即。所以(定值）.

6.已知椭圆过点，且离心率为.

(1)求椭圆的方程；

(2)椭圆的上下顶点分别为，，过点斜率为的直线与椭圆交于，两点，证明：直线与的交点在定直线上，并求出该定直线的方程.

**【答案】**(1)（过程略）；

(2)由题意得，，直线的方程，设，，

由得，所以，.

直线的方程为，直线的方程为，

联立，得

由根与系数关系，，知，

代入上式，得，解得，

即直线与的交点在定直线上.