湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——解析几何小专题（16）——椭圆的共轭直径

### 一、知识点

**1、有关概念**

**定义1** 过椭圆中心的弦叫做椭圆的直径.

**定义2** 若椭圆的两直径，的斜率之积为，则称这两直径，为椭圆的一对共轭直径.特别地，当一直径所在直线斜率为，另一直径所在直线斜率不存在时，我们也称这两直径为椭圆的共轭直径.

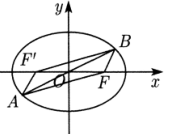
**注**：(1)椭圆直径即过其对称中心的弦，因此椭圆的直径有无数条，因此共轭直径有无数对；

(2)当椭圆的一对共轭直径互相垂直时，即为椭圆的长轴和短轴.

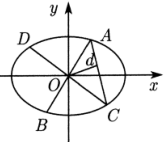
**2、椭圆直径的性质**

**性质1** 已知椭圆，线段为椭圆的直径(过椭圆中心的弦)，点为椭圆  上异于 、的点， 则 .

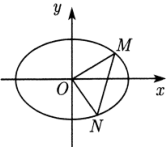
**性质 2**  椭圆的一焦点为，为其一直径，则的面积的最大值为.



**性质3** 椭圆)的中心为，则到互相垂直的两直径的两端点的连线段的距离为.



**3、椭圆共轭直径的性质：**

**性质** 已知直线与椭圆交于，两不同点，若直线，的斜率之积，则：(1)，好；

(2)，；(3)；

(4)；(5)；(6)的面积.

**证明**：(2).

因为点，在椭圆上，所以，.

即 ①  ②

由①②得：，所以.

由①②得，所以.

(3)因为  

所以.

(4)因为，所以，.

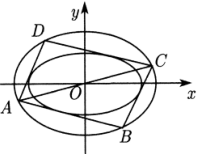
(5).

(6)



**推论1** 设椭圆的两共轭直径的端点为，及，，则四边形的面积为定值.

**推论2** 椭圆的任意两共轭直径的平方和为.

### 二、例题

**例1**.已知椭圆的方程为，，是椭圆上的两动点，为椭圆上任意一点，若，且，证明：.

**【证明】**设，，，由，

知点的坐标为，因为点在椭圆上，所以.

即.

又，是椭圆上的两动点，所以，.

又由，可得，所以.

**【注】**三个条件中：（1）；（2），(3)在椭圆上，已知任意两个，可以推出第三个.

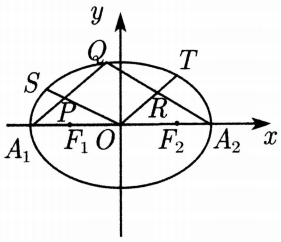
**例2**.已知，是椭圆上关手原点对称的两个点，、、是椭圆上异于的点，且，，则的面积为

**【解析】解法1：利用特殊位置**.

**解法2：利用参数方程**，

设，，则，

，∴.

**解法3**：，由性质（6）有．

**例3**．如图，分别为椭圆的长轴的左，右端点，为坐标原点，为

椭圆上不同于的三点，直线围成一个平行四边形，

则等于

**【解析】解法1：**

设三点的坐标分别为，直线的斜率分别为，则直线的斜率为分别为，且，∵，同理，

∴．

**解法2：**，

设，由，，∴，

同理(将换成)，，于是．

**例4**．已知椭圆，为坐标原点，是椭圆上两点，的斜率存在并分别记为，且，则的最小值为

**【解析】解法1：**记，，

由，，，

∴，

∴．当且仅当时，等号成立．∴．

**解法2：**设，由，，

∴，同理(将换成)，，于是，

∴．当且仅当时，等号成立．∴的最小值为．

**解法3：**设，由，，

∴，同理(将换成)，，于是，

∴．当且仅当时，等号成立．

∴的最小值为．

**解法4:仿射变换**设，则，，

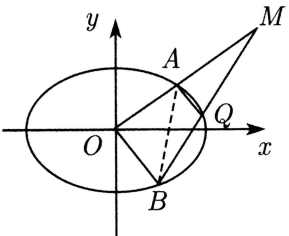
∴，∴，∴，

∴．当且仅当时，等号成立．∴的最小值为．

**例**．在平面直角坐标系中，已知椭圆，其焦点到相应准线的距离为3，离心率为．

(1)求椭圆的标准方程；

(2)如图所示，是椭圆上两点，且直线的斜率满足，延长到，使得，且交椭圆于，设，求证：①；②为定值．



**【解析】**(1 ．

(2)**解法1：**，设，则，由得．

由在椭圆上，得，，，

化简得，所以．

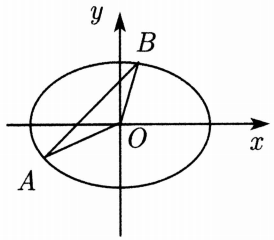
而，由三点共线，得．

∴，，，设，则，∴，即．

**解法2：仿射变换**，，，延长交圆于，，，

由勾股定理得：，由割线定理得：，解得，．

例6．椭圆上有相异的任两点，且三点不共线，直线，直线的斜率满足：，求证：为定值．

****

**【解析】解法1：**

设，代入，

得，

设，

则，，，

因为，所以，

所以，，因为三点不共线，所以，所以，故，，

所以．

**解法2：**设，由得，

即，所以

即,

即,

即,

即,

即,因为三点不共线,所以,

所以,即，

所以,不妨设,则,所以

**例6**已知椭圆,过抛物线焦点的直线交抛物线于两点,连接,并延长分别交于两点,连接与的面积分别记为,则在下列命题中,正确的命题是

(1)若记直线的斜率分别为,则的大小是定值为

(2)的面积是定值1；

(3)线段的长度的平方和是定值5；

(4)设,则.

【解析】设,由拋物线焦点弦的性质有所以,

设由得,

即,即,因此,

所以,

而

所以

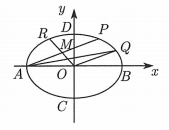
综上，四个选项均正确,

**例7.**如图,在平面直角坐标系中,和分别是椭圆的左右顶点与上下顶点.设是椭圆上且位于第一象限的两点,满足,是线段的中点,射线与椭圆交于点.

证明：线段能构成一个直角三角形.

【解析】解法1:

设直线,联立椭圆方程,得,

所以

由中点弦结论知,得直线,

解法2:利用椭圆参数方程

线段能构成一个直角三角形.

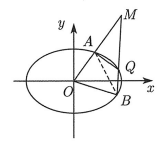
3.已知两点,设是椭圆上三点,满足,点为线段的中点,求的值.

设

故.

4.已知在椭圆上运动,,延长到,使得为与椭圆的交点,求的值.

【答案】见解析.



【解析】解法1:

设,则

解法2:

5.已知椭圆,不过原点的直线与椭圆相交于两点,设直线的斜率分别为,且恰好构成等比数列.证明:为定值.

【答案】见解析.

【解析】设直线的方程为,

联立

则,由韦达定理得

又构成等比数列,则

,

由韦达定理,代入可得,即.

又由,解得,故,

所以

定值.