湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——解析几何小专题（17）——圆锥曲线等角定理

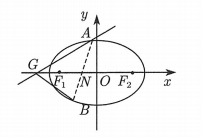
### 一、知识点

圆锥曲线等角定理及其证明

#### 1.椭圆的等角定理:

长轴上任意一点的一条弦端点与对应点的连线所成角被焦点所在直线平分，即.

【证明】只需证明,即.



①

联立,得:

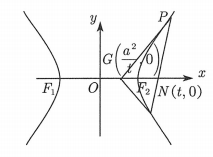
由韦达定理,得:

代入①式:等式左边

故命题得证.

#### 2.双曲线的等角定理:

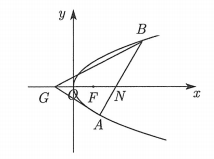
实轴上任意一点的一条弦端点与对应点的连线所成角被焦点所在直线平分，即.



该定理的证明方式和椭圆的类似,可以参照上面的解法进行证明.

#### 3.拋物线的等角定理:

过抛物线对称轴上任意一点的一条弦端点与对应点的连线所成角被对称轴平分.



【证明】只需证明,即.即证:,

即证: ①

其中.

设所在直线方程为:,则有:,代入(1)中可得:

,化简，得: ②

联立,得:,即

由韦达定理，得：代入②式,

等式左边,

故命题得证.

### 二、例题

#### 类型1:椭圆等角定理的应用

例1.设椭圆的右焦点为,过的直线与交两点,点的坐标为.

(1)当与轴垂直时,求直线的方程;

(2)设为坐标原点,证明：.

【答案】(1)或(2)见解析.

【解析】（1）由已知得的方程为.

由已知可得,点的坐标为或.

所以的方程为或.

(2)当与轴重合时,.

当与轴垂直时,为的垂直平分线,所以.

当与轴不重合也不垂直时,设的方程为,

则,直线的斜率之和为.

由,得

将代入得.

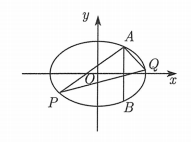
所以.

则

从而,故的倾斜角互补,所以.

综上,.

例2.如图,两条相交线段的四个端点都在椭圆上，其中直线的方程为,直线的方程为.



(1)若,求的值;

(2)探究：是否存在常数,当变化时,恒有?

【答案】（1）；（2）见解析.

【解析】依题意,当时,由,解得,

因为,所以,

设,则,化简得,

又由,联立方程组,解得或.

因为平分,所以(不合题意）,所以.

(2)设,

由,整理得,

其中,

若存在常数,当变化时,恒有,

则由（1）可知只可能是,

①当时,取等价于,

即,

即即,此式子恒成立,

所以存在常数,当变化时,恒有;

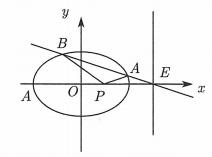
②当时,取,由椭圆的对称性,同理可知结论也成立,

综上可得,存在常数,当变化时,恒有.

例3.已知点,直线过点且与椭圆（或双曲线交于不同的两点,求证:直线与轴所成的较小的角相等.

【答案】见解析.

【解析】下面仅以椭圆为例（如图)来证明,双曲线的情形可仿此证明.



【证明】设点和点的坐标分别为和,

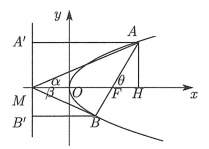
直线的斜率互为相反数,倾斜角互补,

直线与轴所成的较小的角相等.

#### 类型2：拋物线等角定理的应用

例已知倾斜角为的直线过抛物线的焦点,且直线交拋物线于两点.若点,则

【解析】过作轴,准线准线

设,

由于,

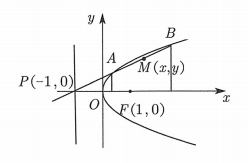
所以.

同理,

从而.

所以.

例2.已知是拋物线的焦点,其准线与轴交于点,过点的直线与拋物线交于两点,若线段上有一点,满足,则的轨迹方程是\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】且)

【解析】

解法1:

设,所以

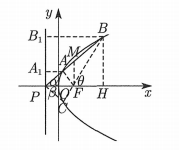
由直线和拋物线联立,得

或

由(1)和得，代入直线,得

故点的轨迹方程是且).

解法2：

延长,与拋物线交于点,设,

点在轴上的射影为在准线上的射影分别为,

则,

同理,所以于是关于轴对称,

进而得,故.

由条件得:,

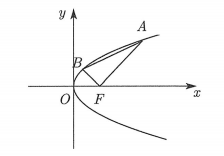
又因为,所以,由角平分线定理得.

因为,所以,

故,即,即轴,

于是在直线上（不在轴），且在拋物线开口之内.

由,得的轨迹方程为,且.

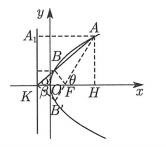
例3.已知是拋物线上的两点,是焦点,直线的倾斜角互补,记的斜率分别为,则\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】1.

【解析】设,由,得

即,得

而,直线的方程为,

即,将代入，得,

可得直线过定点,即准线与轴的交点.

设点在准线上的投影为,在轴上的投影为,

记,则

于是.

例4.在直角坐标系中,曲线与直线交于,两点.

(1)当时，分别求在点和处的切线方程;

(2)轴上是否存在点,使得当变动时,总有?说明理由.

【解析】（1）联立,不妨取,

由曲线可得:,

曲线在点处的切线斜率为,

其切线方程为:,即为.

同理可得曲线在点处的切线方程为:.

(2)存在符合条件的点,下面给出证明:

设满足,

联立,得，

设,直线的斜率分别为.则

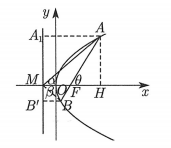
所以

当时,,直线的倾斜角互补,.

即点符合条件.

例5设抛物线的焦点为,过的直线与抛物线交于两点,为抛物线的准线与轴的交点,若,则\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

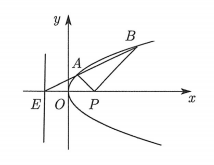


【解析】,

同理于是

由

例6.已知点,直线过点,且与抛物线交于不同的两点,求证：直线与轴所成的较小的角相等.



【答案】见解析.

【解析】设点和点的坐标分别为和,直线过点设直线的方程为

代入抛物线的方程得:

直线的斜率互为相反数,倾斜角互补,

直线与轴所成的较小的角相等.

例6.已知抛物线的交点为,准线与轴相交于点,过的直线与交于两点,若,

则

【解析】设,由圆锥曲线中的等角定理可知,轴是的平分线

由角平分线定理可知,即,故

设直线方程为,与抛物线方程联立得,

故,解方程组得故.