湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——解析几何小专题（18）——蒙日圆及其应用

## 

### 一、知识点

#### 1.椭圆的蒙日圆

椭圆的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是蒙日圆:.

【证明】

方法1:当两条互相垂直的切线中的斜率均存在且均不为0时,设点的坐标为,且）,因此设过点的切线方程为.

由得

因为直线与椭圆相切,所以其判别式为0,得

因为是这个关于的一元二次方程的两个根,所以.

由此得,进而可得.

(2)若两条切线中有一条斜率不存在时,可得点的坐标是,或,满足.

综上所述:交点的轨迹是蒙日圆:.

方法2：作变换,则椭圆变为单位圆,

设原来两条切线斜率分别为,变换后

设变换后的坐标系中的动点,过点直线,

设变换后的坐标系中的动点,过点直线,

即,原点到的距离,

即,化简得

由韦达定理可得：,化简得

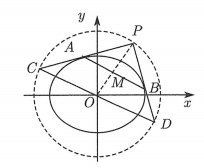
由于在原坐标系中,

所以在原坐标系中,轨迹方程为.

【注】双曲线的两条互相垂直的切线的交点的轨跡是圆;拋物线的两条互相垂直的切线的交点是该抛物线的准线.

#### 2.椭圆蒙日圆的性质

**性质1.**过圆上的动点作椭圆的两条切线,则



**性质2.**设为圆上任一点,过点作椭圆的两条切线,切点分别为,延长交圆于两点,则:

(1)三点共线;

(2)

(3),

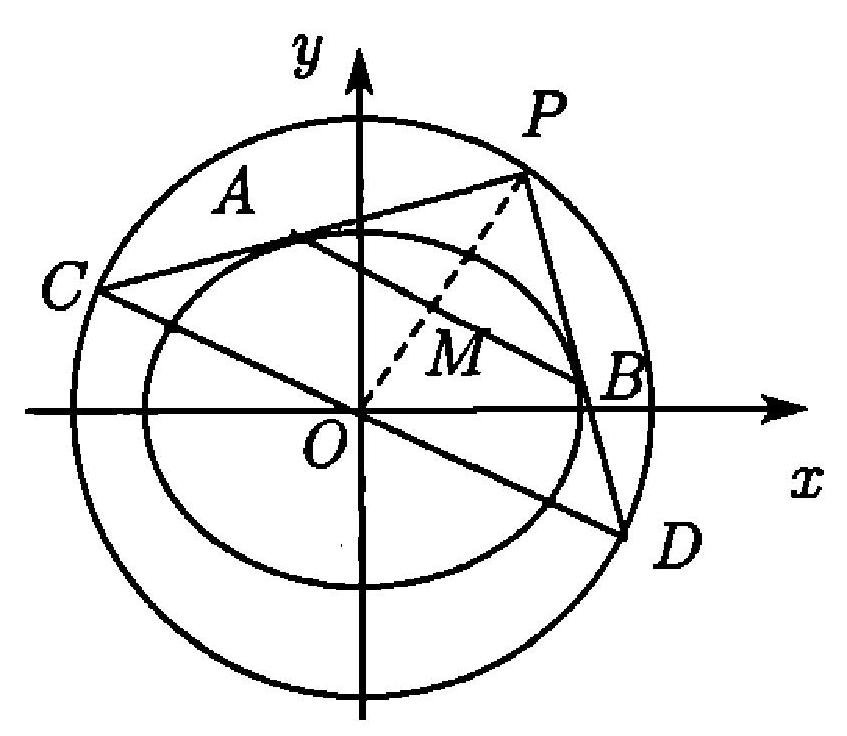
(4)

性质3.过圆上的动点作椭圆的两条切线,为原点,则平分椭圆的切点弦.

注:由性质2中的,不难得证.

### 二、蒙日圆的应用

例1.己知椭圆为圆上的一个动点,过的切线于椭圆相切于两点,与圆相交于两点,求证:.

解析:设与交于点,

由性质2可知,为中点.

由性质1可知,,

所以.

由圆的性质可知,.

因此有，

所以.

例2已知椭圆的一个焦点为,离心率.

(1)求椭圆的标准方程;

(2)若动点为椭圆外一点,且点到椭圆的两条切线相互垂直,求点的轨迹方程.

答案:(1)(2).

解析:（1）可知,椭圆的标准方程为.

(2)解法1:构造同构式

设两切线为,

①当轴或轴时,对应轴或轴,可知;

②当与轴不垂直且不平行时,,设的斜率为,则的斜率为,

的方程为,联立,得

因为直线与朋圆相切,所以,得

整理得

所以和是的两个根,所以

整理得,其中，

此时点的轨迹方程为,

因为也满足上式,综上知：点的轨迹方程为.

解法2：利用椭圆的光学性质

设椭圆的中心为分别为椭圆的左右焦点,,

图示, 工程绘图

描述已自动生成椭圆的两条切线为,

分别为关于关于的对称点.

由椭圆的光学性质知：及分别三点共线,

由椭圆定义有:.

设交直线于点交直线于点,分别延长交于点,

则,

在矩形中,由平面几何知识知:,

代入得，

所以点的轨䢍方程为.

例3.给定椭圆,称圆心在原点,半径为的圆是椭圆的“准圆".若椭圆的一个焦点为,其短轴上的一个端点到的距离为.

(1)求椭圆的方程和其“准圆”方程;

(2)点是椭圆的“准圆”上的动点,过点作椭圆的切线交“准圆”于点.

(1)证明：当点为“准圆”与轴正半轴的交点时,;

(2)求证：线段的长为定值.

解析:(1)根据题意,所以.所以椭圆的方程,“准圆”方程为.

(2)①“准圆"与轴正半轴的交点为,

设过点且与椭圆相切的直线为,由得.

因为直线与椭圆相切,所以,解得.

所以的方程分别为.因为,所以.

②当直线中有一条斜率不存在时，设直线斜率不存在,则.

当时,与“准圆”交于点,此时为(或)，显然

直线垂直;同理当时，直线垂直.

当斜率存在时,设点,其中.

设经过点与椭圆相切的直线为,

由得:,

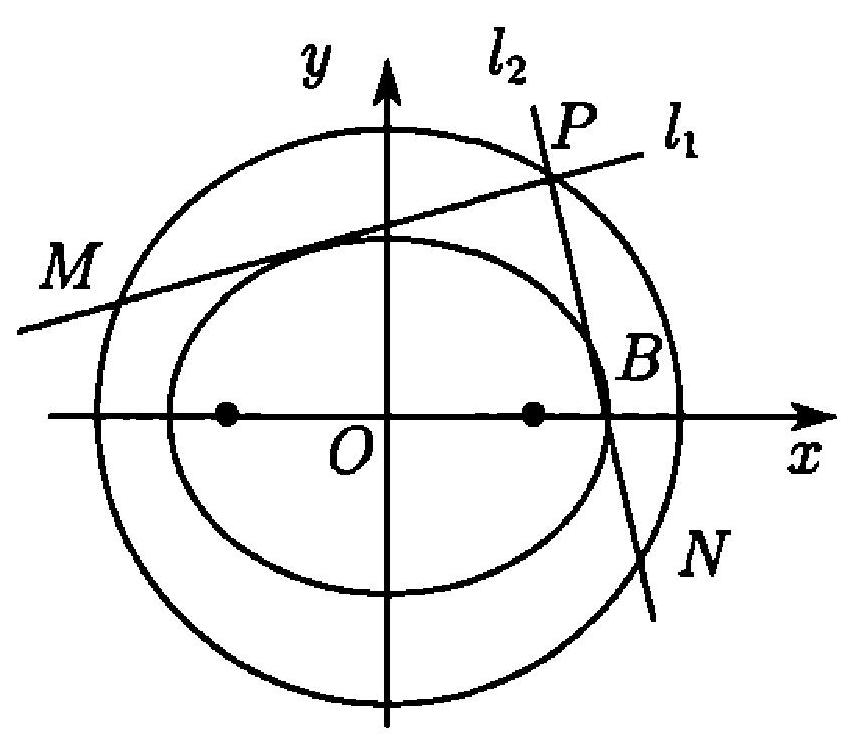
由化简整理得:.因为,所以.

设的斜率分别为,因为与椭圆相切,所以满足,

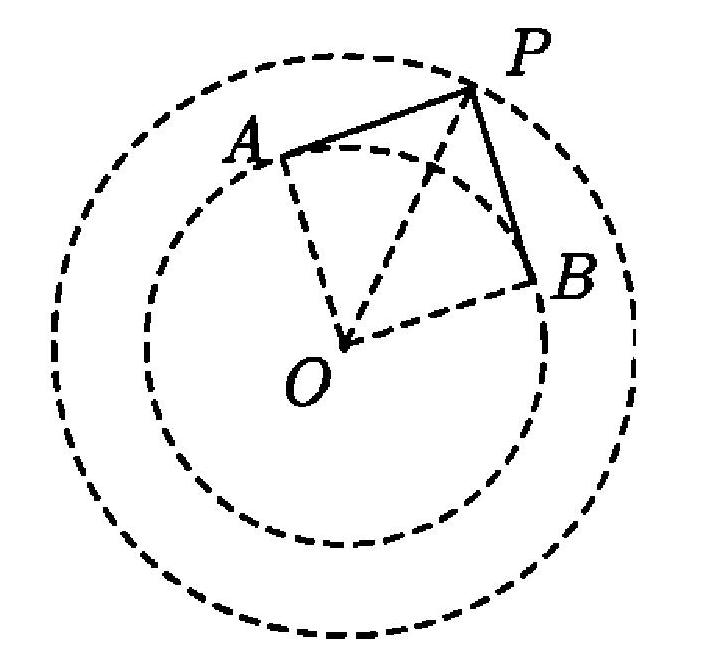
所以,即垂直.结合①,因为经过点,又分别交其“准圆”于点,且垂直.

所以线段为“准圆"的直径,为定值.

例4.已知圆,若直线上存在点,使得过点与圆相切的两切线互相垂直,则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

答案.

解析,圆的蒙日圆为(可将圆看成相等的椭圆）



由题意可知,直线与圆有公共点,故,得或.

例5.已知椭圆的，直线,若直线上存在点,使得过点总能作两条互相垂直的切线,则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_。

答案

解析:椭圆的蒙日圆为,所有满足条件的点都在蒙日圆上,由题意可知,直线与圆有公共点,由得.

例6.已知柏圆,由动点向椭圆引两条切线,且夹角为钝角,则动点到直线的距离的取值范围是\_\_\_\_\_\_。

答案

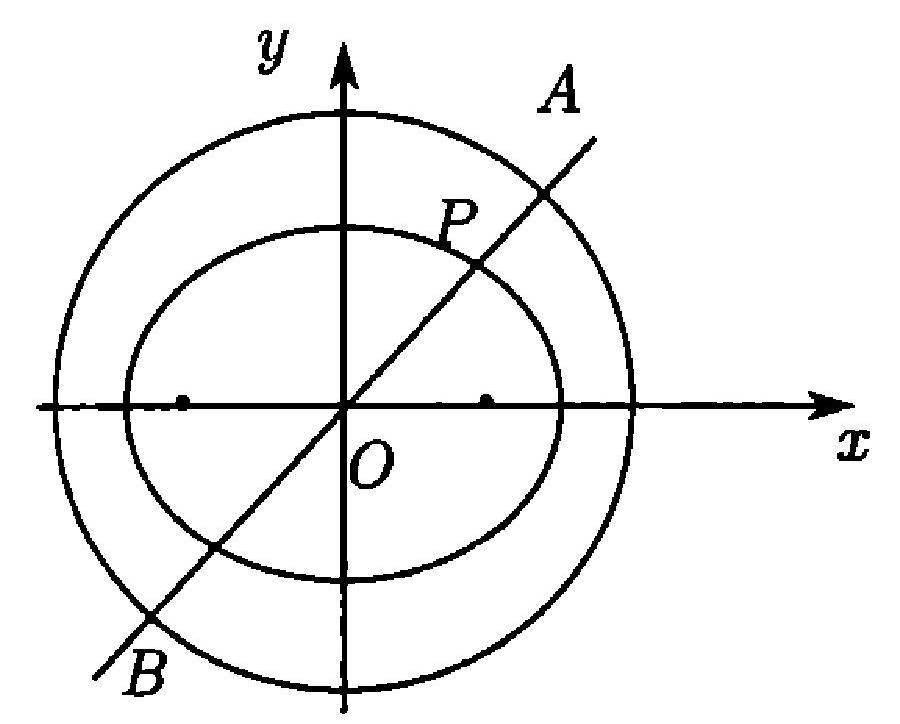
解析:椭圆的蒙日圆为,当在蒙日圆内部时,由向椭圆引两条切线,则夹角为钝角,故所在区域为图中阴影部分,由图可知,当分别在时,到直线的距离分别取得最大值和最小值,而到直线的距离分别为和,故所求范围是

图示, 工程绘图

描述已自动生成

注:从这个题的思路可以看出，当我们拿筷子的手在蒙日圆内部时，筷子的夹角是钝角,手在蒙日圆的外面时,筷子的夹角是锐角,而蒙日圆,就是两种角的分界线了.

例7.过椭圆上一点及坐标原点作直线与圆交于两点.若存在一点满足,则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_.

解析,故,又,故,故所求的取值范围是.

例8.已知圆,椭圆.

(1)若点在圆上,线段的垂直平分线经过椭圆的右焦点,求点的横坐标;

(2)现有如下真命题:

“过圆上任意一点作椭圆的两条切线,则这两条切线垂直";

“过圆上任意一点作椭圆的两条切线,则这两条切线垂直”.据此,写出一般结论,并加以证明.

解析:（1）设点,则,(1)椭圆的右焦点,

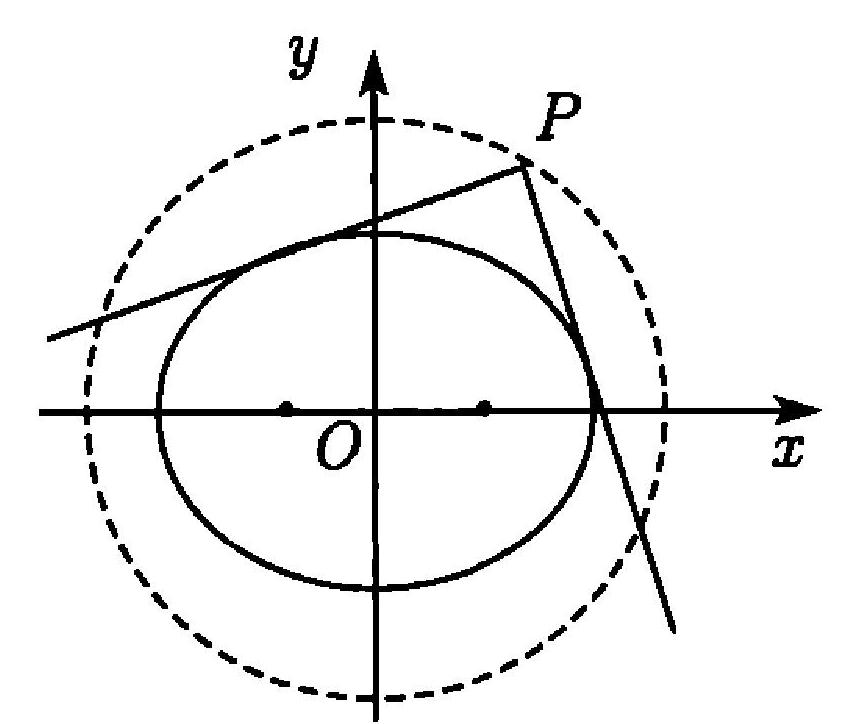
点在线段的垂直平分线上,,(2)

由（1）,(2),解得点的横坐标为.

图示, 工程绘图

描述已自动生成

(2)一般结论为:



"过圆上任意一点作椭圆的两条切线,则这两条切线互相垂直."证明如下：

(i)当过点与椭圆相切的一条切线的斜率不存在时,此时切线方程为,

点在圆上,,

直线恰好为过点与椭圆相切的另一条切线,两切线互相垂直.

(ii)当过点与椭圆相切的切线的斜率存在时,

可设切线方程为,

由得,

整理得,直线与椭圆相切,

整理得

两切线互相垂直,

综上所述,命题成立.

例9.已知椭圆,若存在过点且相互垂直的直线,使得,与椭圆均无公共点，则该椭圆离心率的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

解析:椭圆,显然中一条斜率不存在和另一条斜率为0时,两直线与椭圆相交;

可设,即,联立椭圆方程可得，

由直线和椭圆无交点,可得，

化为,解得,

由两直线垂直的条件,可将换为,即有,化为,

解得或,由题意可得

化为,由于时,,可得;

同样,由,解得则故答案为:

例10.已知从圆上一点作两条互相垂直的直线与椭圆相切,同时圆与直线交于两点,则的最小值为

解析:设其中一条切线的斜率为,则另一条切线的斜率为,故切线方程分别为,,

将与椭圆方程联立可得，

整理得则①,

同理将与椭圆方程联立并整理可得

则②，

由①②联立可得,,故圆的方程为,

注意到直线过定点,故要使最小,则,

又,故此时.

例11.设椭圆的两条互相垂直的切线的交点轨迹为,曲线的两条切线交于点,且与分别切于两点,求的最小值.

答案

解析:设两切线为,

①当轴或轴时,对应轴或轴,可知;

②当与轴不垂直且不平行时,,设的斜率为,则的斜率为的方程为,联立,

得

因为直线与椭圆相切,所以,得

同理是方程的另一个根，

综上知：点的轨迹方程为.

设,则在与中应用余弦定理知,

令,则.

当且仅当,即时,取得最小值.

例12..已知椭圆是圆上的任意一点,分别与椭圆切于.求面积的取值范围.

答案

解析:设,则

,且

由,得

从而

将直线的方程与椭圆的方程联立,得.

所以,.

因此，.

又原点到直线的距离

所以.

令,得到