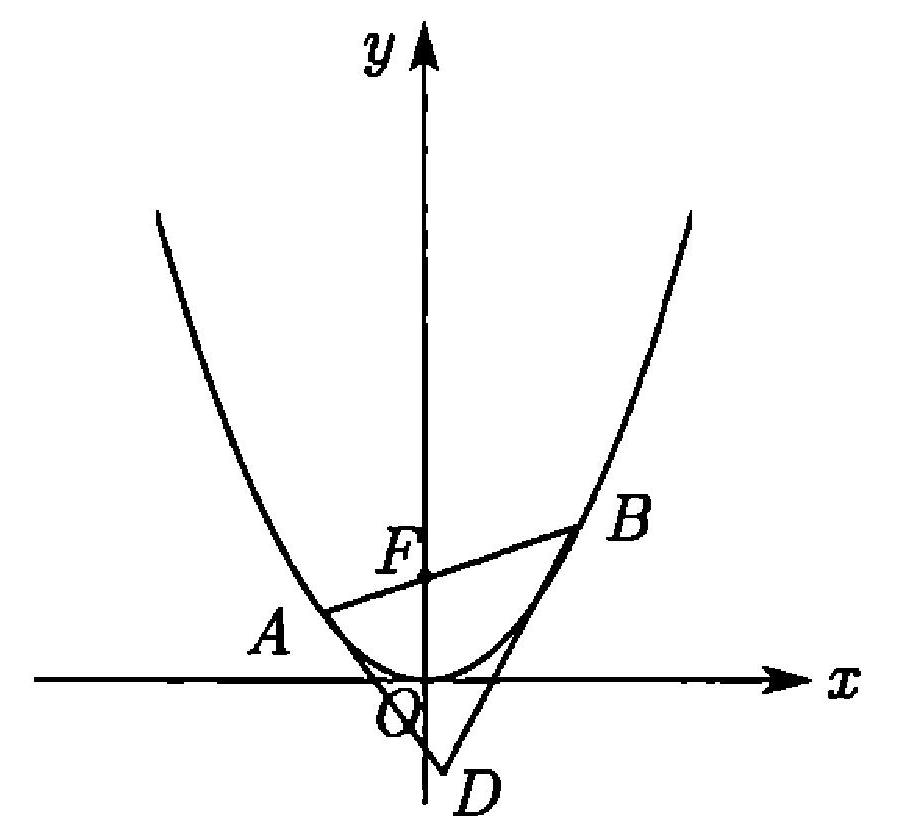
湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

## 高三数学一轮复习——解析几何小专题（19）——阿基米德三角形

### 一、知识点

**阿基米德三角形指的是圆锥曲线（椭圆、双曲线、拋物线）的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形.**

**条件：已知抛物线,如图所示,为某一直线上的动点,过作的两条切线,切点分别为为直线与轴的交点,则有以下结论成立:**

**结论1.1 直线的方程为.**

证明:设,则.

由于,所以切线的斜率为,故切线的方程为(1)

设,同理可得的方程为(2)

(1)(2)化简后,可得(3)

将(3)代入(1),可得,所以点的坐标为

故直线的方程为

说明:特别的,当为直线上的动点时,直线的方程为且该直线过拋物线的焦点.第二部分中的典例第（1）问考查的就是该性质的具体运用.

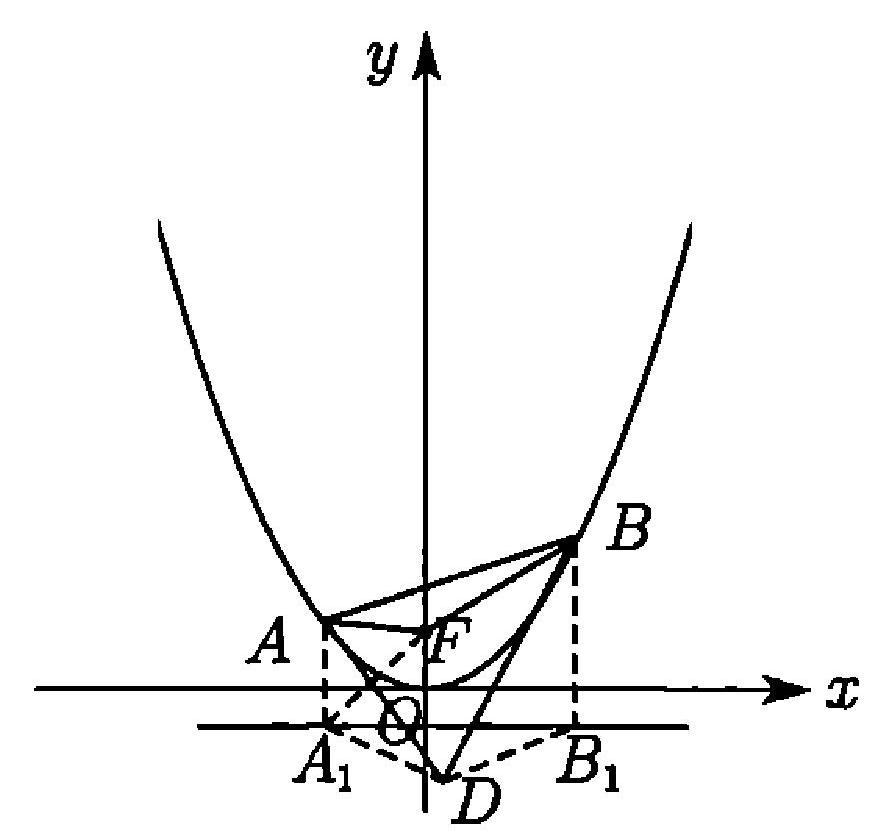
**结论**

证明:由结论的证明可知点的坐标为

又,所以结论1.2得证.

说明:特别的,当为直线上的动点时，有且此时面积的达到最小,其最小值为.第三部分中的第2题、第3题考查的均是该条性质及推论的运用,如若我们对上述性质比较熟悉,则审题结束时答案或许已了然于心.

**结论 在阿基米德中,有.**

证明:如图,过点分别作抛物线准线的垂线,垂足为连接,

,则

易知,又,所以垂直且平分,故.

同理可得,所以.

进而,即.

说明:第三部分中的第4题的第（2）问恰恰就考查了这一结论.

**结论1.4 的斜率成等差数列、三点的横坐标成等差数列.**

证明:结合结论的证明过程以及点坐标,稍作运算，便可证得该结论.

说明:第三部分中的第5题的第（1）问中就涉及到了这一结论.

**结论 线段的长度之间的关系为.**

证明:经过简单计算即可得到上述结果.

说明:特别的,当为直线上的动点时,有线段的长度成等比数列.

**结论 若以为圆心的圆与直线相切于点,则四边形的面积为**

证明:易知

利用面积公式,可得

所以

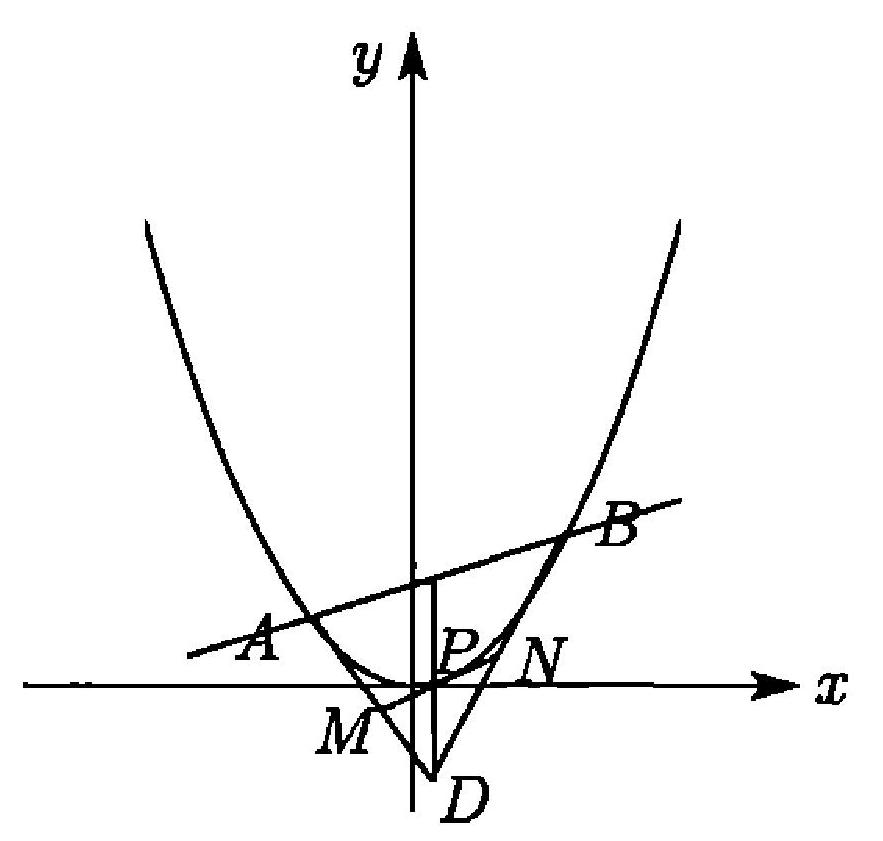
说明：当为直线上的动点,且时,则四边形的面积为.

**结论1.7 的重心满足的方程为.**

证明:过程从略，感兴趣的读者可自行尝试证明.

说明:当为直线上的动点时，的重心的轨迹方程为

结论 若为拋物线弧上一点,拋物线在点处的切线与直线..分别交与两点,则

证明:设,则有

所以.

因为,所以

同理,所以.

又,所以

所以 所以.

### 二、以阿基米德三角形为背景考查的高考题基本类型.

#### （一）定点问题

1.已知曲线为直线上的动点,过作的两条切线,切点分别为.(1)证明：直线过定点;

(2)若以为圆心的圆与直线相切，且切点为线段的中点,求四边形的面积.

分析:分析题目可知,直线是切点所在的直线,只需找到㔹点的共同属性即可.故可采用“设而不求”的思想就将该问题解决.

解析:解法1：设而不求

设,则.

由于,所以切线的斜率为,故即的方程为.

设,同理可得的方程为.

故直线的方程为,所以直线过定点.

(2)由（1）得直线的方程为.由,可得

设分别为点到直线的距离,则.

因此,四边形的面积.

设为线段的中点,则.

由于,而与向量平行,所以.解得或.

当时,;当时,.因此,四边形的面积为3或.

分析:本题还可从寻找切点定直线入手，将直线用参数表示，借助海伦秦九韶公式将面积问题解决.

解法2：求切点定直线

(1)设,过点与相切的直线方程设为,切线的斜率分别为.

由,可得(1)，由,可得(2)于是

将@代入(1),可得,所以

故直线的方程为,即直线过定点.

(2)设线段的中点坐标为,则有,所以

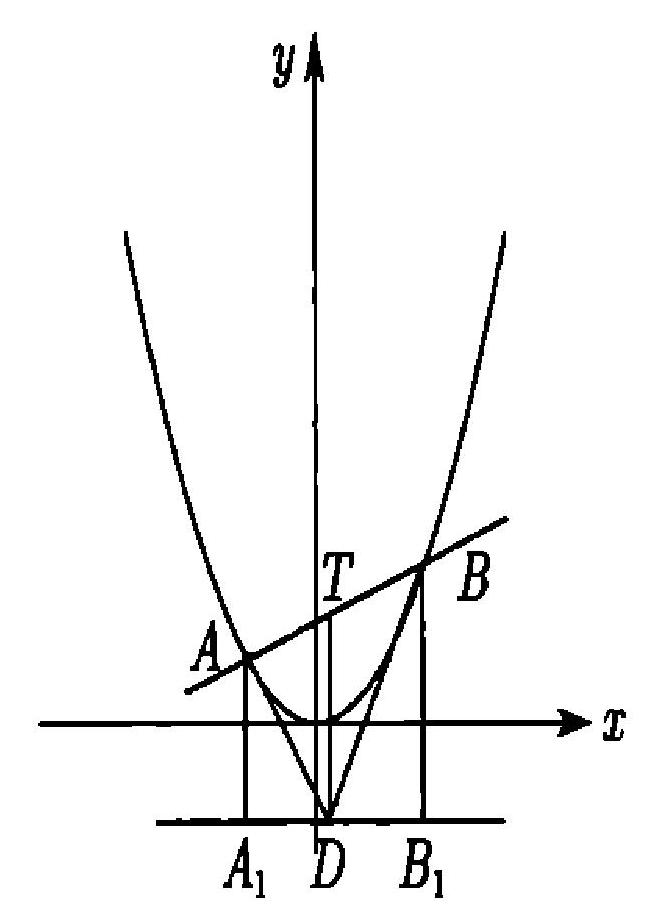
又,解得或又

利用面积公式可得

当时,,此时

当时,,此时

注:此处给出的这种方法是解决此类问题的通性通法,但注意不要漏掉斜率为0的情形.

解法3:设直线定“待参”

设直线的方程设为

由,可得于是

由于,所以切线的斜率分别为

所以切线的方程分别为

联立可得点的纵坐标,又为直线上的动点,所以

故直线过定点

(2)由（1）知，设线段的中点坐标为,则有

所以垂直于直线，，过分别作直线的垂线,垂足分别为,如图所示,

所以点为的中点.记过的定点为,则有

由（1）知,所以

易得又

以下计算同方法二.

解法四：设切点定截距设,直线.

联立,由韦达定理得

又,从而直线的方程分别为

因为切线过点,所以有即为方程的两根,即,所以直线过定点.

(2)由（1）知,,则,所以,的中点.

当时,,此时,四边形的面积.

当时,由得,解得.

所以,.

又点到直线的距离,点到直线的距离

所以四边形的面积.

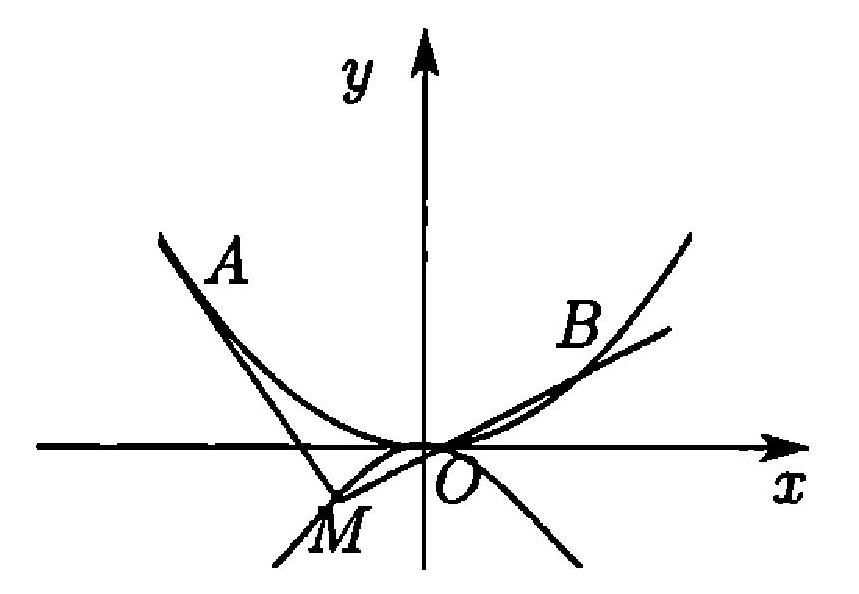
综上，四边形的面积为3或.

#### （二）轨迹问题

2.如图,抛物线.点在拋物线上,过作的切线,切点为为原点时,重合于.当时,切线的斜率为.

(1)求的值;

(2)当在上运动时,求线段中点的轨迹方程重合于时,中点为).



答案:(1);(2)见解析

解析:（1）过程从略;

(2)设

由为线段中点知(1),所以(2).

所以，切线的方程分别为,(3).(4)

由(3)(4)得,的交点的坐标为.

因为点在上,即,所以.(5)

由(1)(2)(5)得.

当时,重合于时,中点为,坐标满足.

因此中点的轨迹方程为.

#### （三）最值问题

3.已知抛物线的焦点为是抛物线上的两动点,且过两点分别作扡物线的切线,设其交点为.

(1)证明为定值;

(2)设的面积为,写出的表达式,并求的最小值.

解析:(1)由已知条件,得.

设由

即,也即

将①式两边平方并把代入得③

解②、③式得,且有,

拋物线方程为,求导得.

所以过抛物线上两点的切线方程分别是

易得的坐标为.

所以

(II)由()知在中,,因而.

又

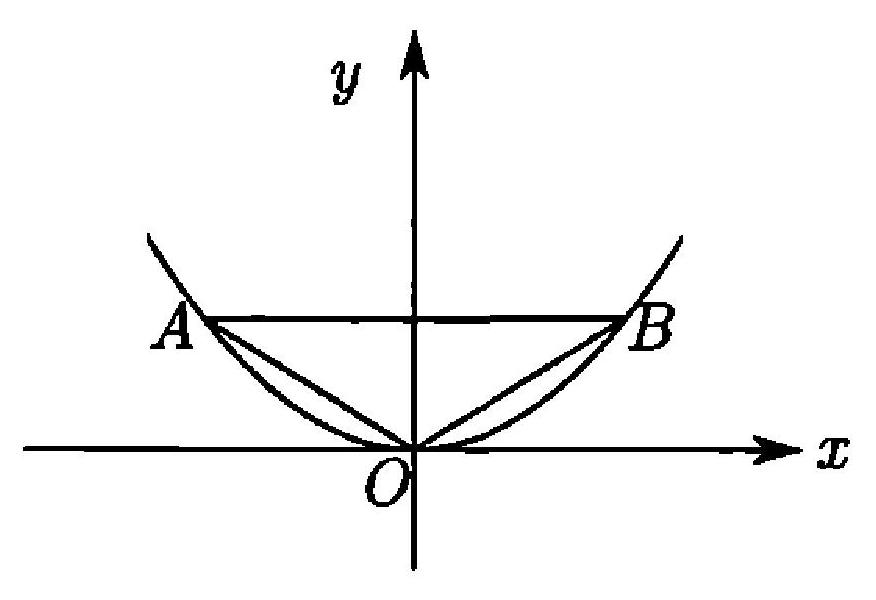
于是,由知,且当时,取得最小值4.

#### （四）定点问题

4.如图,等边三角形的边长为,且其三个顶点均在拋物线上.

（1）求抛物线的方程;

(2)设动直线与抛物线相切于点,与直线相交于点.证明以为直径的圆恒过轴上某定点.

【解析】(1)抛物线的方程为,过程略.

(2)设,由,得,直线的方程为,

即.联立，即，所以

设,所以

因为,所以又,所以，故以为直径的圆恒过.

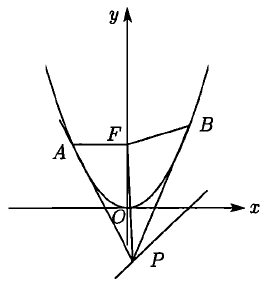
#### （五）角度问题

5.如图，设抛物线的焦点为,动点在直线上运动,过作拋物线的两条切线,且与抛物线分别相切于两点.

(1)求的重心的轨迹方程;

(2)证明.

【解析】（1）设切点坐标分别为和,

所以切线的方程为:;切线的方程为:;

解得点的坐标为:所以的重心的坐标为,

所以,由点在直线上运动.

从而得到重心的轨迹方程为: .

(2)因为.

由于点在拋物线外,则.所以

同理有所以.

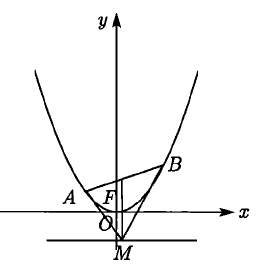
#### （六）探索性问题

如图,设抛物线方程为 为直线 上任意一点,过引抛物线的切线,切点分别为 .

(1)求证：三点的横坐标成等差数列;

(2)已知当点的坐标为时，,求此时抛物线的方程;

(3)是否存在点,使得点关于直线的对称点在拋物线上，其中点满足 为坐标原点).若存在,求出所有适合题意的点的坐标;若不存在,请说明理由.



【解析】（1）证明：由题意设.

由得,得,所以.

因此直线的方程为,直线的方程为.

所以,(1) (2)

由(1)、(2)得 ,因此,即.

所以三点的横坐标成等差数列.

(2) 由（1）知,当时,将其代入(1)、(2)并整理得:

所以是方程的两根，因此,

又,所以

由弦长公式得.

又,所以或,

因此所求抛物线方程为或.

(3)设,由题意得,

则的中点坐标为.

设直线的方程为,

由点在直线上,并注意到点也在直线上，

代入得.若在拋物线上,则.

因此或 即或.

(1)当 时,则,此时,点适合题意.

(2)当,对于 , 此时,

所以,即,矛盾.

对于,因为,此时直线平行于 轴,

又,所以直线与直线不垂直,与题设矛盾,

所以时,不存在符合题意的点.

综上所述,仅存在一点适合题意.