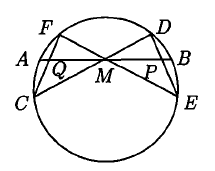
## 椭圆中的蝴蝶模型

### 一、知识纵横

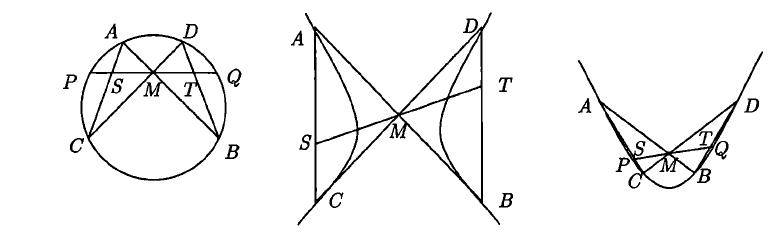
蝴蝶定理（Butterfly Theorem），是古代欧氏平面几何中最精彩的结果之一.这个命题最早出现在1815年,由.霍纳提出证明.



【蝴蝶定理】是中弦的中点,过点的两条弦,连接交于两点,则 是线段的中点.

问题中的图形酷似圆中翩翩起舞的蝴蝶,因此而被冠之“蝴蝶定理".

蝴蝶定理还可以推广到椭圆,甚至双曲线与抛物线中.



高考中,直接考查圆锥曲线中的蝴蝶定理很少见，大多考查蝴蝶模型背景下的直线与椭圆的位置关系问题.此类问题的本质是研究椭圆的内接四边形, 其形如“蝴蝶”的四边形通常可以由椭圆的两条相交弦确定,在具体的问题中,此两弦要么过定点,要么某线斜率特定，由此便会呈现兼具一般解法又别具一格的定点、定值等问题,下面略举几例予以说明.

### 二、典型例题

#### 类型 1：蝴蝶模型中的定点问题

例 在平面直角坐标系中,已知圆是圆上任意一点,在轴上的射影是点,

点满足,设点的轨迹为曲线.

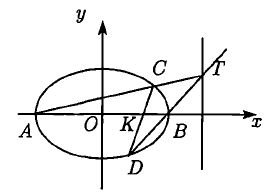
(1)求曲线的方程;

(2)若,过直线上任意一点(不在轴上）作两条直线与曲线分别

交于点(异于,求证：直线过定点.

【答案】(1) (2)见解析.

【解析】(1) 设 , 因为: , 所以 , 代入圆 中, 得 , 所以曲线 的方程为: .



(2)由对称性,定点在轴上.

解法1：设点表点

设点的坐标为

直线方程为: ,即,

直线方程为: ,即.

分别与椭圆联立方程组,同时考虑到,

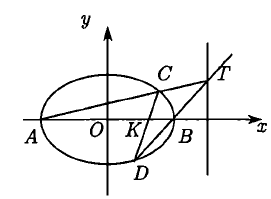
解得:

当时,直线方程为:

令,解得:.此时必过点;

当时,直线方程为: ,与轴交点为 .

所以直线 必过 轴上的一定点 .



**解法 2：设线表点**

显然斜率存在,设斜率为,则斜率为,直线方程为:,与椭圆 联立方程组得,

直线方程为:,与椭圆联立方程组得

，

由韦达定理,,得

(1)当,易得直线为,

由对称性定点在轴上,方程中令,化简得,

所以直线必过轴上的一定点.

【注】上述两种解法的关键是通过设点或设线，利用韦达定理表示出点和点:

或

在此条件下研究直线过定点,研究的思路可以先由对称性,推断其在轴上，写出直线的方程，令,求出的值得定点,另一种更一般的思路是先设出定点,再转为多项式恒等解出定点.其过程如下:

设直线经过定点,直线的方程为,

也可表示为,则，

则对恒成立，

,定点为.

解法 3:韦达代换

【注】在此解法中关键是处理非对称式: .

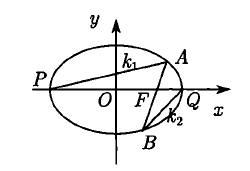
常见的处理解法是构造对称式

这种处理手法在《非对称韦达定理》章节有详细说明.

#### 类型 2：蝴蝶模型中的斜率定比问题

例 2.已知椭圆的左、右顶点分别为,过椭圆右焦点的直线与椭圆交于两点,且直线的斜率不为0.分别记直线和的斜率为与,问是否存在常数,使得在直线转动过程中,有恒成立?

【答案】见解析.



设,直线,

解法2：设点解点, 设,则,由直线与椭圆方程联立,

解法3:三点共线+对偶式

从而

#### 类型3: 蝴蝶模型中的弦长关系问题

例3.已知椭圆的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点,点在椭圆上.

(1)求椭圆的方程;

(2)设不过原点且斜率为的直线与椭圆交于不同的两点,线段中点为,直线与椭圆交于,求证:

【答案】(1)(2)见解析.

【解析】（1）椭圆的方程为

(2)设直线的方程为,

由方程组得: ,

则,易知,点,直线,

由方程组得:

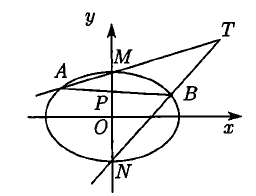
【注】此问题结构漂亮，结论优美，相仿于圆中的相交线定理.一般地,,其中为直线斜率.

### 三、巩固练习

1.如图,为坐标原点,椭圆的焦距等于其长半轴长,为椭圆的上、下顶点,且.

(1)求椭圆的方程;

(2)过点作直线交椭圆于异于的两点,直线交于点.求证：点的纵坐标为定值3



【答案】(1) (2)见解析.

【解析】(1)由题意可知: ,又,

有,故椭圆的方程为: .

(2)由题意知直线的斜率存在,设其方程为,

联立直线方程和椭圆方程得,消去得,

设,则

又三点共线,则 ,即.

构造式子: ,则.

又

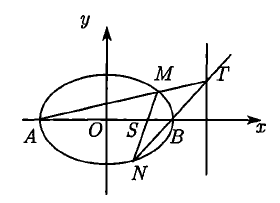
解之,得.故点的纵坐标为3.

【注 此问题是例1的逆向问题,其中也再次用到了手法:

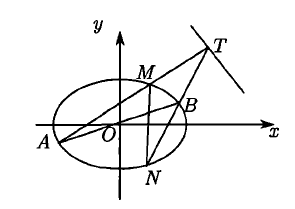
据三点共线,可知构造式子:,

则.

【注 椭圆的内接四边形的对边交点落在定直线上等价于其对角线交点为定点.一般结论如下:

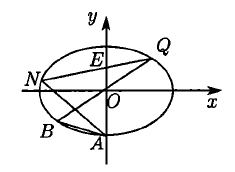


结论1:椭圆的左右顶点为为定直线上任意一点,直线分别与椭圆交于点则直线恒过定点.



结论2:过有心圆锥曲线的中心的直线交曲线于为定直线上任意一点,直线分别与椭圆交于点,则直线恒过定点.

2.已知椭圆与定点,经过点,且斜率存在的直线交椭圆于两点, 点与点关于坐标原点对称,连接.求证：存在实数,使得恒成立?



**【答案】见解析**

【 解析】设,由可知,,

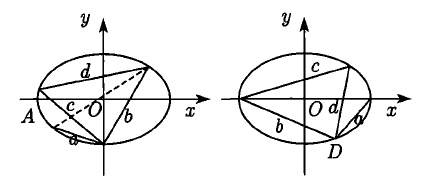
设,则

又三点共线,则,即.

则

存在实数,使得恒成立.

【注】以上问题具有如下共同特征:



(1)直线与直线的斜率之积为定值;

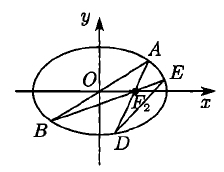
(2)直线过坐标轴上一定点;

(3)直线与直线的斜率之积为定值.

2.椭圆的左、右焦点分别为在椭圆上,的周长为,面积的最大值为2 .

(1)求椭圆的方程;

(2)直线与椭圆交于连接并延长交椭圆于,连接,探索 与的斜率之比是否为定值并说明理由.



【答案】(1);(2)见解析

【解析】(1),

得,所以椭圆的方程为: .

(2)设,则直线

代入得 ，

因为 ,代入化简得,

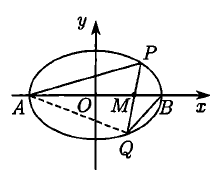
设,则,所以 ，

直线, 同理可得.

所以

,所以

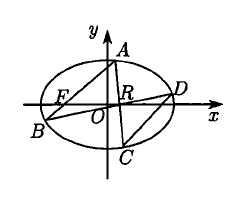
【注】此问题可推广为如下一般结论:



椭圆的左右顶点为椭圆的弦过定点,则，

(定点在轴上时类似.)

3.设椭圆的左、右顶点分别为,椭圆的弦过定点,直线斜率为且 ,求的值.



【答案】.

【解析】设,

因点在椭圆上有

有，

另有

设直线与椭圆联立消去,得

,

左边为

令,得

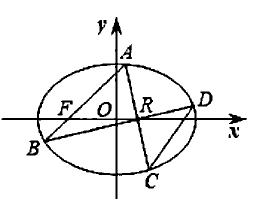
代入式中,得

由于且,

化简得

又因,两式作商得: .

4．全国高三竞赛)已知椭圆的方程为 ,经椭圆的左焦点、斜率为的直线与椭圆交于两点.设,延长分别与椭圆交于两点, 直线的斜率为 则



【答案】.

【解析】设,则直线.

代入椭圆方程消去得.则.

代入直线的方程得于是.

同理,.

则

因为点共线,所以.

故.