## 3.6曲线系及其应用

### 一、知识纵横

#### 1.曲线系与曲线系方程的概念

曲线系：具有某种共同性质的所有曲线的集合,称为一个曲线系,并用含有参数的方程来表示. 曲线系方程: 对于关于的二元方程,如果方程中除外,还含有至少一个暂不确定的参数, 这样的方程叫曲线系方程.

#### 2.过两曲线交点的曲线系

若两曲线和有交点,则过两曲线交点的曲线系方程可设为

（不包括或者.

#### 3.一次曲线系（直线系)

具有某种共同属性的一类直线的集合,称为直线系,也叫做一次曲线系,它的方程称直线系方程. 下面是几种常见的直线系方程:

(1)过已知点的直线系方程 或(为参数）;

(2)斜率为的直线系方程：是参数）;

(3)与已知直线平行的直线系方程: 为参数）;

(4)与已知直线垂直的直线系方程: 为参数）;

(5)过直线与的交点的直线系方程:

为参数）（不包括直线 ）

#### 4.二次曲线系

圆、椭圆、双曲线、抛物线统称为“二次曲线”，两条相交直线被视为二次曲线的退化形式. 二次曲 线系的一般形式为:

两条直线所组成的二次曲线方程为:

熟悉下列结论有助于我们更好地理解二次曲线系:

定理 给定五点,其中任何三点都不共线,则有且仅有一条二次曲线过这五点.在此定理的基础上我们可以进一步得到一些重要结论. 为简单起见,以下将两直线的并体记作

,那么可以理解为一条退化的二次曲线,其方程简记为.

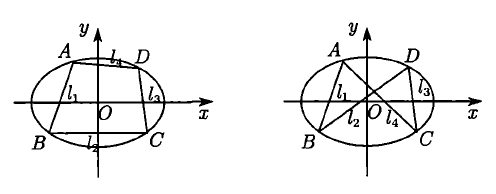
推论1如果两条直线的方程为,分别记为,即

,它们与一条二次曲线有交点,那么曲线系

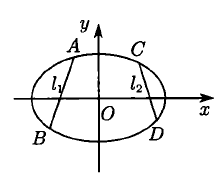
经过这些交点.如果它们有四个不共线交点,那么曲线系包含有所有过此四点的二次曲线.

由推论可知:若二次曲线的方程为: ,则

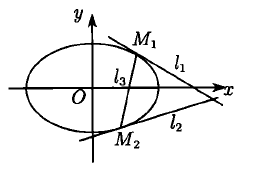
(1)已知四边形四条边的方程为,则过四边形四个顶点的二次曲线方程为.



(2)过两直线与一条二次曲线的四个交点的二次曲线系的方程为



(3)与两条已知直线分别切于点的二次曲线系方程为, 其中 是直线 的方程.



推论 为不共线的三点,直线 的方程为，则曲线系:

表示所有过三点的二次曲线.

### 二、典例分析

#### 类型 利用曲线系求曲线方程

例1.已知椭圆与两直线,各有两个交点,求过此四个交点及点的二次曲线.

【答案】.

【解析】显然四个交点不共线,可设所求曲线方程为,

将点的坐标代人方程,即得.故所求椭圆方程为.

【注】利用曲线系求曲线方程的步䐂:

(1)设出曲线系方程;

(2)根据条件求出参数;

(3)回代即得所求方程.

#### 类型2：圆系问题

例2.求经过两圆和的交点,并且圆心在直线的圆的方程.

【答案】.

【解析】设所求圆的方程为,

化简得 ，

因为圆心在直线 上,所以 ,

解得,即得所求圆的方程为.

例 3.三边所在直线方程为: ,求的外接圆的方程.

【答案】

【解析】外接圆方程可写为

即

于是,解得:,将它们代入，

即得外接圆方程为 .

例4.椭圆与直线 交于两点,点的坐标为.求过点的圆的方程.

【答案】

【解析】我们可以先求出点的坐标,利用推论2求解,不过这里可从另一个角度思考问题,二次曲线系过两点,但十分明显地不包含过的所有曲线,过的圆就不在其中.不过我们可以“就势”一变,再构造二次曲线系

这就包含了过的圆了.展开,得

令,并取,即得.

代入得.

将点坐标代人,得,代人得所求圆的方程为.

【注】这里添加直线,原因是过三点的圆是唯一的,且缺项.

例5.四条直线围成一个四边形,问取何值时, 此四边形有个外接圆,并求此外接圆的方程.

【答案】.

【解析】设过该四边形4个顶点的二次曲线系的方程为

.

整理得, 方程表示圆, 则  解得, 故此四边形外接圆的方程为.

例 6. 设过坐标原点的直线与拋物线交于两点, 且以为直径的圆恰好经过拋物线的焦点, 求直线的方程.

【答案】.

【解析】设直线的方程为, 构造过的二次曲线系

,

即,①

令得，代入①即得过两点的圆的方程是



因点在圆上，于是有



又以为直径的圆的圆心在直线上, 

由上两式消去, 解得, 故所求的直线的方程是

例 7. 已知直线与双曲线相交于两点, 当为何值时, 以为直径的圆经过原点.

【答案】 .

【解析】构造二次曲线系: ,

即

令得，又圆经过原点，代入得，于是方程可表示为



又圆心在直线上，故

化简整理得 故.

易知当时, 直线与双曲线相交, 所以当时, 以为直径的圆经过原点.

#### 类型3: 利用曲线系求解切线问题

例  已知圆的方程为, 求经过圆上一点的切线方程.

【答案】 .

【解析】视圆上的点为点圆,

设所求圆方程为: ,

令, 得, 故切线方程为.

【注】在二次曲线系的应用中，“点圆”, “点椭圆”可助一臂之カ.

本题中, 将点看成“二次曲线": ,

即为“点圆”. 用类似的解法可得:

(1)过圆上一点的切线方程为

(2) 过椭圆上一点的切线方程为

(3)过双曲线上一点的切线方程为；

(4)过抛物线上一点的切线方程为.

例 9. 求经过点且与圆相切于点的圆的方程.

【答案】 .

【解析】将切点视为点圆, 设所求圆的方程为:



将点坐标代入, 可得, 代入整理, 得所求方程为.

例  求与拋物线相切于两点, 且过点的圆锥曲线方程.

【答案】 .

【解析】过  和  两切点的直线方程是,

设所求的曲线方程是

因曲线过点, 代人上式得.

再代入, 化简整理得所求的圆锥曲线方程是.

【注】运用此种解法比其他解法解决这类问题要简单得多，但切勿忘记将切点弦方程加上平方.

#### 类型4; 利用曲线系求解圆锥曲线上的四点共圆问题

例 11.  年高考全国卷 II）已知为坐标原点, 为椭圆在轴正半轴上的焦点,

过且斜率为的直线与交于两点, 点满足.

(1) 证明：点在上;

(2) 设点关于点的对称点为, 证明： 四点在同一圆上.

【答案】（1）见解析; (2) 见解析.

【解析】 (1) 设, 直线, 与联立得,

所以

由，得



因为, 所以点在上.

(2) 解法 1:



同理



所以互补, 因此四点在同一圆上.

解法 2:

由和题设知, 的垂直平分线的方程为

设的中点为, 则的垂直平分线的方程为 (2)

由(1)(2)得的交点为,





所以

故四点在以为圆心的同一圆圆上.

解法 3:

由(1)得, 直线的方程为.

又直线的方程为，即

故两直线的二次方程为

由此可设过点的曲线系方程为

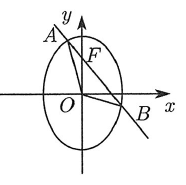
①

即②

我们让②式表示圆, 则, 得 .

代入①式化简得,

即, 显然此方程表示一个圆, 故四点在同一圆上.



例 12. 若两条直线与圆锥曲线有四个交点, 则四个交点共圆的充要条件是.

【答案】见解析

【证明】两直线组成的曲线方程为, 则过四个交点的曲线方程可设为



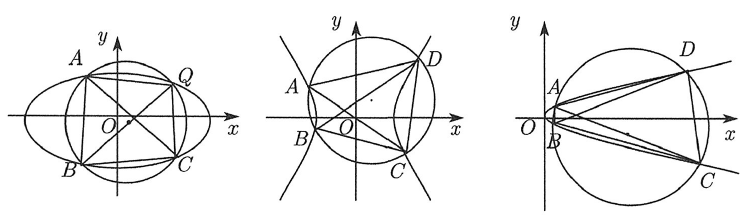
必要性：若四点共圆, 则方程(1)表示圆, 那么(1)式左边展开式中项的系数为零, 即有.

充分性：当时，令(1)式左边展开式中项的系数相等, 得, 联立解得

, 将其代入(1)式, 整理得

由题设知四个交点在方程(2)所表示的曲线上，显然方程(2)表示圆, 即四个交点共圆.

【注】本题表明：圆锥曲线的内接四边形  出现四点共圆时，一定有任何一组对边对应所在的直线倾斜角互补.



例  设直线  与椭圆  交于  两点, 过  两点的圆与  交于另两点 , 则直线  的斜率为（ 

A.  B.  C.  D-4

【答案】D

【解析】设 , 所以, 则过四点的曲线系为 .

表示圆, 则系数相等, 且无项. 化简得

解得

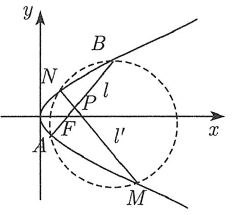
【注】由例 12 结论可知：四点共圆.

例 14.  全国大纲卷）已知拋物线的焦点为, 直线与轴的交点为,

与的交点为, 且.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 过的直线与相交于两点, 若的垂直平分线与相交于两点, 且四点在同一个圆上, 求直线的方程.



【答案】（1） (2)或.

【解析】 (1) 设, 代入中得, 所以,

依题意得, 解得或 （舍去)，故拋物线的方程为.

(2) 依题意知与坐标轴不垂直, 故可设的方程为.

代入得. 设,

则, 故的中点为.

又的斜率为, 所以的方程为,

由直线的方程及拋物线方程, 可设过四点的曲线系方程为:





因为四点共圆, 所以, 从而.

当时，化简式得，

即, 此时直线的方程为:;

当时，化简式得, 即

此时直线的方程为：, 所求直线的方程为：或.

例 15.  全国高中数学联赛  设, 过两定点, 分别引直线和, 使与拋物线有四个不同的交点, 当这四点共圆时, 求和的交点的轨迹.

【答案】点的轨迹是直线 (除去与和三个交点）.

【解析】设, 则:,

将两直线合并为二次曲线:  ，

又抛物线方程为,

则过四个点的二次曲线系方程为

因为四个交点共圆, 则方程（\*）表示圆, 四点必满足方程:

(为常数)

于是:



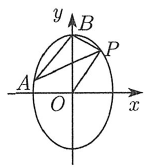
对比两侧项的系数, 可得, 所以,

即点的轨迹是直线(除去与和的三个交点）.

【注】本题借助曲线系方程, 巧妙利用“四点共圆”的已知条件，成功避开了求交点的繁杂过程. 需 要注意的是, 在对比系数时, 不必找出所有项的系数, 我们只要找出其中最好用的即可. 本例中, 由于圆 方程的特点：没有项, 即项系数为0 , 故对比项的系数即可得到结果.

#### 题型5: 利用曲线系求解定点定值问题

例 16. 已知椭圆中有一内接, 且(如图), 求证, 直线方向一定.



**【答案】**见解析

【解析】点的坐标为, 过点的椭圆的切线方程是, 将点视作二重点,于是直线的方程依次是:



过四点的椭圆方程可写为

①

与椭圆方程

②

代表同一条二次曲线, 故比较①②中项系数, 可得：, 即为所求.

例 17. 已知为椭圆 的左右顶点, 在直线 上任取一点, 连接, 分别与椭圆交于, 连交轴于点, 求证: .

【答案】见解析

【解析】设, 则,

用双直线和椭圆表示双直线得



比较的系数得, 即

比较的系数得, 即

所以.

例 18.  年新课标)已知椭圆, 四点中恰有三点在椭圆上.

(1) 求的方程;

(2) 设直线不经过点, 且与相交于两点. 若直线与直线的斜率的和为, 证明:过定点.

【答案】（1） (2)见解析.

【解析】 (1)  (过程略)

(2)设斜率分别为，其中

则

将两直线方程合并为：

联立方程组，（此方程组的解为三点的坐标）

整理得

进而

所以或（即点或）

故直线的方程为：, 显然恒过定点.

例 19. 年全国 1）已知分别为椭圆的左、右顶点, 为的上顶点,

为直线上的动点,与的另一交点为与的另一交点为.

(1) 求的方程; (2) 证明：直线过定点.

【答案】 (1)  (2) 见解析

【解析】 (1) （过程略）

(2) 设, 则

用双直线和椭圆表示双直线,

得

比较的系数得;

比较的系数得, 所以.

直线的方程为, 显然直线过定点.

例 20. 已知椭圆和定点 过点作直线交椭圆于点, 直线分别交椭圆于另一个点. 设直线和的斜率为 证明:

(1) 直线经过定点;

(2) 为定值.

【答案】见解析.

【解析】证明：如图, 设直线, 即

.则下面的曲线系方程表示经过点四点的曲线:



展开此方程得



即

①

取特殊的, 使该方程表示为直线和组合体对应的曲线方程

，展开此方程得

②

由此存在实数, 使得方程①和方程②为同一个方程, 对照和项系数得,

即

由此知直线,

其与轴的交点为.

设直线的交点为, 点在椭圆关于点的极线上，

设极线与轴的交点为. 由此得



解得

故此时的方程为，

即

从而直线经过定点.

#### 题型 6: 证明圆锥曲线内接四边形的性质

例 21. 试证明, 椭圆的内接矩形的两相邻边分别与椭圆的长短轴平行.

【答案】见解析

【解析】建立坐标系, 设矩形各边：,

则椭圆方程可写为,

显然,项系数为0, 故得证.