湛江一中2023届高三卓越班NLXF2023—17

高三数学一轮复习——解析几何小专题（8）——定值问题

### 一、知识点

圆锥曲线中的定值问题是近几年高考和竞赛中的热点题型，是指某些几何量(如线段长度、图形面积、直线斜率、角的度数等)的大小或某些代数表达式的值与题目中的参数无关,不依参数的变化而变化,始终是一个确定的数值.

#### 1.定值问题的解法

(1)常规解法:选定参数,求出题目所需的代数表达式,然后对表达式进行计算、化简、消参,从而得到定值.步骤为:一选（选好参数）、二求(化简消参）、三定值（得到定值）.

(2)特殊解法:曲线系法,仿射变换法等.

#### 2.两个技巧

定值问题的处理技巧:

(1)思路：可从特殊情况入手(如直线斜率不存在时）,求出定值,再证明这个值与变量无关;

(2)运算：在运算过程中，应尽量减少所求表达式中变量的个数,以利于向目标靠拢.

#### 3.三个定值模型

(1)圆锥曲线定义相关的定值;

(2)圆锥曲线垂径定理:

(3)椭圆的共轭直径性质.

#### 4.八类常见的定值问题

(1)斜率为定值

(2)斜率之和（积）为定值

(3)斜率之比为定值

(4)角度为定值

(5)距离为定值

(6)面积为定值

(7)数量积为定值

(8)系数和为定值

### 二、典型例题

#### 类型1:斜率为定值

例1.设椭圆的左右焦点分别为椭圆上点到两焦点的距离之和为,椭圆的离心率为.(1)求椭圆的方程;

(2)直线与椭圆在第一象限交于点,点是第四象限的点且在椭圆上,线段被直线垂直平分,直线与椭圆交于点(异于点）,求证直线的斜率为定值.

一般性的结论如下（请自行证明）:

**结论**已知是椭圆上的定点,直线(不过点）与椭圆交于两点,且,则直线斜率为定值.

**结论2:**已知是双曲线上的定点,直线(不过点）与双曲线交于两点,且,直线斜率为定值.

**结论3:**已知是抛物线上的定点,直线(不过点）与抛物线交于两点,若,则直线斜率为定值.(证明过程略)

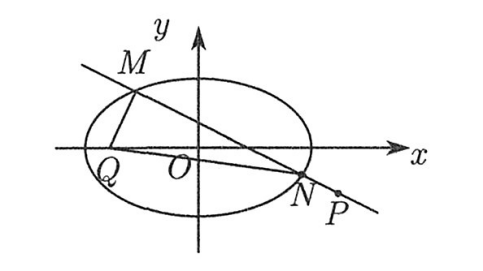
例2.过抛物线一定点,作两条直线分别交抛物线于若与的倾斜角互补,求证：直线的斜率是常数.

【注】拋物线上两点连线的斜率:,这个结论十分重要.本题结论为,其高等数学背景是：直线的斜率等于处切线的斜率.

例3.已知椭圆方程为,点,设直线经过点且与交于不同的两点.,,试问：在轴上是否存在点,使得与直线的斜率之和是定值？若存在请求出点的坐标以及定值,若不存在请说明理由.

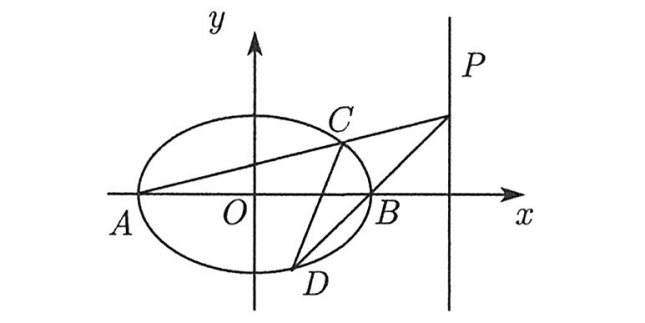
#### 类型2:斜率之积为定值

例4.已知椭圆的上、下顶点分别为,点在椭圆上,且异于点,直线、与直线分别交于点,设直线的斜率分别为,求证:为定值.



【注】椭圆第三定义：已知椭圆的方程为:,过原点的直线交椭圆于两点,为椭圆上异于的任一点,若直线的斜率均存在,则为定值.

例5.已知分别为椭圆的左、右顶点,为直线..上的动点，与的另一交点为与的另一交点为.求证:为定值.

.

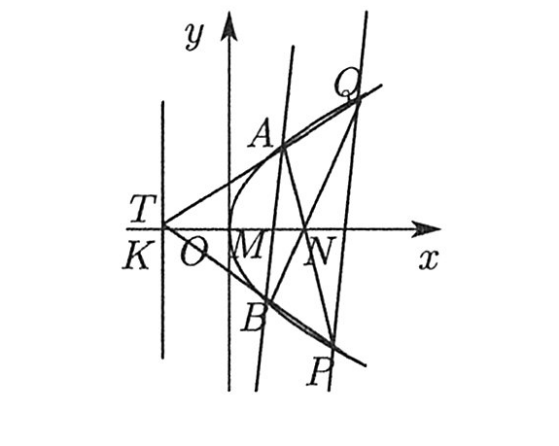
#### 类型3:斜率之比为定值

例6.已知抛物线的焦点为,过点的直线交抛物线于两点,直线分别与抛物线交于两点.求证：直线与直线的斜率之比为定值.

【注】本题两次利用了抛物线的性质：设为抛物线上的任意两点,若直线与轴交于点,则有.这个结论在抛物线中有着重要的地位.

例7.已知椭圆,左右顶点分别记为,过右焦点作直线交椭圆于.两点,记直线的斜率为,直线的斜率为.

(1)求的值;(2)求证直线与直线的交点的在一条定直线上.

例.如图,已知抛物线,点.过点作直线交抛物线于点,直线分别交抛物线于另一个点,设直线和的斜率为,则(1)直线经过定点;(2)为定值.

#### 类型4:角度为定值

例9.已知椭圆上的点到两个焦点的距离之和为,短轴长为,直线与椭圆交于两点.

(1)求椭圆的方程;

(2)若直线与圆相切,探究是否为定值,如果是定值,请求出该定值;如果不是定值,请说明理由.

例10.已知双曲线的离心率为,右准线方程为,设直线是圆上动点处的切线,与双曲线交于不同的两点,证明的大小为定值.

例11.已知椭圆上的点到它的两个焦的距离之和为4,以椭圆的短轴为直径的圆经过这两个焦点,点分别是椭圆的左、右顶点.

(1)求圆和椭圆的方程.

(2)已知分别是椭圆和圆上的动点位于轴两侧,且直线与轴平行,直线分别与轴交于点.求证:为定值.

#### 类型5：距离为定值

例12.在平面直角坐标系中,圆过点和点,圆心到直线的距离等于.

（1）求圆的标准方程;

（2）若圆心在第一象限,为圆外一点,过点做圆的两条切线,切点分别为,四边形的面积为,问线段CM的长是否为定值？若为定值,请求出定值;若不是定值,请说明理由.

例13已知椭圆的离心率为,且过点.

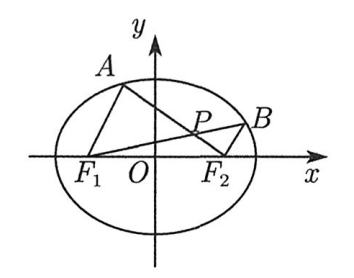
(1)求的方程:

(2)点在上,且为垂足.证明：存在定点,使得为定值.

例14如图，在平面直角坐标系中，椭圆的左、右焦点分别为已知和都在椭圆上，其中为椭圆的离心率.

(1)求椭圆的方程;

(2)设是椭圆上位于轴上方的两点，且直线与直线平行，与交于点.

(i)若，求直线的斜率;

(ii)求证:是定值.

#### 类型6：面积为定值

例15.已知为椭圆上三个不同的点，为坐标原点，且为的重心.

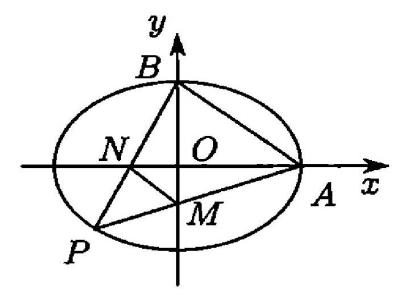
(1)如果直线的斜率都存在，求证:为定值;

(2)试判断的面积是否为定值，如果是就求出这个定值，否则请说明理由.

【注】圆锥曲线中平面图形面积问题，如果平面图形不是三角形，常常须将其分割为几个三角形，然后利用弦长公式求出三角形的一边长，再由点到直线距离公式求得三角形的高，其边的长和高常常利用直线的斜率表示，从而确定平面图形的面积是否为定值.可以证明：本题的一般结论为：.

例16.已知椭圆过点两点.

(1)求椭圆的方程及离心率;

(2)设为第三象限内一点且在椭圆上，直线与轴交于点，直线与轴交于点，求证：四边形的面积为定值.

例17.已知椭圆，的左右焦点分别是，以原点为圆心，椭圆的短半轴长为半径的圆与直线相切，点在椭圆上.

(1)求椭圆的方程;

(2)若直线与椭圆相交于两点，且的面积是否为定值?若是，求出定值;若不是，请说明理由.

【注】一般地，可以证明：若直线与椭圆相交于两点，且，则的面积为定值利用此结论，本例即:(定值).

例18.已知离心率为的椭圆经过点.

(1)求椭圆的方程;

(2)若椭圆的右焦点为，过点的直线与椭圆分别交于，若直线的斜率成等差数列，请问的面积是否为定值？若是，求出此定值;若不是，请说明理由.

#### 类型7：数量积为定值

例19.设是椭圆的左、右焦点，离心率为过点的直线交椭圆于两点，且的周长为.

(1)求椭圆的方程;

(2)若线段中点的横坐标为，求斜率的值;

(3)在轴上是否存在定点，使得为定值？若存在，请求出定点坐标;若不存在，请说明理由.

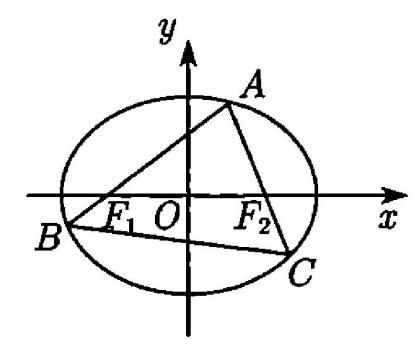
例20.椭圆是椭圆的左右顶点，点是椭圆上的任意一点.

(1)证明：直线，与直线，斜率之积为定值.

(2)设经过且斜率不为0的直线交椭圆于两点，直线与直线交于点，求证:为定值.类型

**8:系数和为定值**

例已知椭圆的左右焦点分别为，离心率为是椭圆上不同于长轴端点的任一点，的延长线分别交椭圆于另一点且求证:为定值.



【注】椭圆焦点弦性质：已知点为椭圆的焦点，任意过点的直线与椭圆交于两点，则有.

例22.已知椭圆，过椭圆的右焦点作直线交椭圆于两点，交轴于点，若.求证:为定值.

例23.已知抛物线经过点，直线与抛物线有两个不同的交点，直线交轴于，直线交轴于.

(1)若直线过点，求直线的斜率的取值范围;

(2)若直线过抛物线的焦点，交轴于点，求的值.

(3)若直线过点，设，求的值;

例24.已知椭圆的中心为坐标原点，焦点在轴上，斜率为1且过椭圆右焦点的直线交椭圆于、两点，与共线.

(1)求椭圆的离心率;

【注】从解答过程可以发现，即，推广到一般，则有下面结论:

已知是椭圆上的两动点，点满足，

(1)若在椭圆上，且，则(2)若，且，则在椭圆上;

(3)若在椭圆上，且，则.

### 三、练习

1.已知抛物线:的焦点在双曲线：的右准线上，抛物线与直线交于两点，的延长线与拋物线交于两点.

(1)求抛物线的方程;

(2)若的面积等于3，求的值;

(3)记直线的斜率为，证明：为定值，并求出该定值.

2.如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线.设为抛物线上的动点(异于顶点)，连接并延长交拋物线于点，连接并延长交拋物线于点，连接.设直线的斜率存在且分别为.

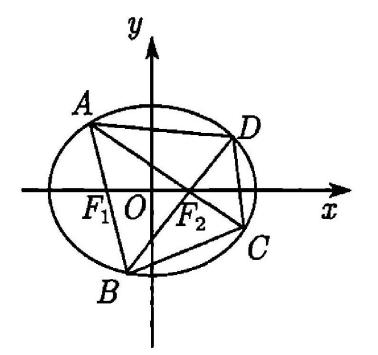
(1)若，求;

(2)是否存在与无关的常数，使得恒成立.若存在请用表示出来;若不存在，请说明理由.

3.四边形是椭圆的内接四边形，经过左焦点交于右焦点，直线与直线的斜率分别为.

(1)证明：为定值;

(2)证明：直线过定点，并求出该定点的坐标.



4.已知双曲线的离心率为，右准线方程为.

(1)求双曲线的方程;

(2)设直线是圆上动点处的切线，与双曲线交于不同的两点，证明的大小为定值.

5.已知双曲线的离心率为，右准线方程为上的动点处的切线与双曲线交于不同的两点证明:

6.已知点为椭圆上任意一点，直线与圆交于两点，点为椭圆的左焦点.

(1)求证：直线与椭圆相切;

(2)判断是否为定值，并说明理由.

7.已知椭圆的一个焦点坐标为.

(1)求椭圆的方程和离心率;

(2)若椭圆与轴交于两点（点在点的上方），是椭圆上异于的任意一点,过点作轴于为线段的中点,直线与直线交于点为线段的中点,为坐标原点.求的大小.

8.已知,记动点的轨迹为.

(1)求曲线的轨迹方程.

(2)若斜率为的直线与曲线交于不同的两点与轴相交于点,则是否为定值？若为定值,则求出该定值;若不为定值,请说明理由.

9.已知是椭圆的左、右顶点,为的上顶点,.

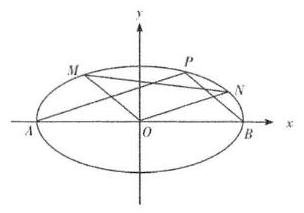
(1)求椭圆的方程;

(2)若是椭圆上不同的三点,且坐标原点为的重心,试探究的面积是否为定值？若是,求出这个定值;若不是,说明理由.

10.如图,椭圆的左右顶点分别为,离心率,为椭圆上非顶点的三点.设直线的斜率分别为.

(1)求椭圆的方程,并求的值;

(2)若,判断的面积是否为定值？若为定值,求出该定值;若不为定值,请说明理由.



11.已知椭圆过点两点.

(1)求敉圆的方程及离心率;

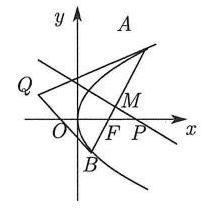
(2)设为第三象限内一点且在椭圆上,椭圆与轴正半轴交于点,直线与轴交于点,直线与轴交于点,求证：四边形的面积为定值.

12.已知是抛物线的焦点,点是抛物线上的定点,且.

(1)求拋物线的方程;

(2)直线与抛物线交于不同两点,且,直线与平行,且与抛物线相切,切点为,试问的面积是否是定值.若是,求出这个定值;若不是,请说明理由.

13.如图,拋物线的焦点为为过点的弦,设直线的斜率为的中垂线与轴交于点,抛物线在两点处切线交于点.

(1)当时,求的面积;

(2)判断是否为定值,若是,求出此定值,若不是,请说明理由.

14.若椭圆的离心率,又经过点为坐标原点.

（1）求椭圆的方程;

(2)当时,试问：的面积是否为定值？如果是,请给予证明;如果不是,请说明理由.

15.已知桞圆的离心率为,直线过右焦点,过点的直线交椭圆于两点（均不为顶点）

(1)求椭圆的方程;

(2)已知是椭圆的右顶点,直线,若直线与直线交于点直线与直线交于点,试判断是否为定值,若是,求出定值,若不是请说明理由.

16.已知椭圆的离心率为,过焦点且垂直于长轴的弦长为3.

(1)求椭圆的方程;

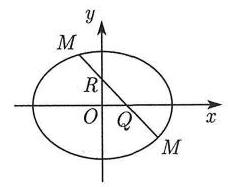
(2)过点的直线交椭圆于两点,在轴上是否存在定点,使得为定值？若存在,求出点的坐标和的值;若不存在,请说明理由.

.已知椭圆的离心率为,直线过椭圆的右焦点,过的直线交椭圆于两点（均异于左、右顶点）.

(1)求敉圆的方程;

(2)已知直线为椭圆的右顶点.若直线交于点,直线交于点,试判断是否为定值,若是,求出定值;若不是,说明理由.

18.椭圆方程为,过点作直线（与轴不垂直）与椭圆交于两点,与轴交于点,若,求证:为定值.



19.设是椭圆上任意一点,分别交椭圆于点,若,求证:为定值.

20.设是椭圆.上任意一点,分别交椭圆于点,若,求证:（其中是椭圆的离心率）.

21.已知抛物线C:经过点.过点的直线与抛物线有两个不同的交点,,且直线交轴于,直线交轴于.

(1)求直线的斜率的取值范围;

22.已知椭圆的短轴端点到右焦点的距离为2.

(1)求椭圆的方程;

(2)过点的直线交椭圆于两点,交直线于点,若,求证:为定值.