湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

高三数学一轮复习——解析几何小专题（9）——最值与范围问题

### 一、知识点

解决圆锥曲线中的最值与范围问题，一般有两类方法:

一是几何法, 若题目的条件和结论有明显的几何特征，可考虑利用圆锥曲线的定义和平面图形的有关性质来求解;

二是代数法, 先根据条件列出目标函数, 然后根据函数表达式的特征选用适当的方法求出最值或值域. 下面是常见的求函数值域的方法:

(1)基本不等式法;(2)导数法;(3)判别式法;(4)换元法;(5)配方法;(6)三角函数有界性;(7)函数单调性.

### 二、例题

#### 类型一：两点间距离的最值

例 在平面直角坐标系 中, 点 , 点 是椭圆 上的一个动点, 则 的最大值. 与最小值的积为

#### 类型二：点到直线距离的最值

例 2. 已知椭圆 , 直线 . 试在椭圆上找一点, 使得它到直线 的距离最小， 并求出这个最小距离.

#### 类型三：距离之和（差）的最值（化折为直）

例 3. 以椭圆 的焦点为焦点, 过直线 上一点 作椭圆, 要使所作椭圆的长 轴最短，点 应在何处？并求出此时的椭圆方程.

例4.(1)如果是以为焦点的椭圆上任一点,若点到点与点的距离之差为,则的最大值是

(2)如果是以为焦点的椭圆上任一点,若点到点与点的距离之和为,则的取值范围是

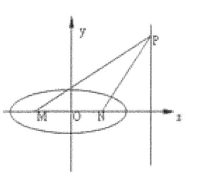
#### 

#### 类型四：距离之积的最值问题（投影转化)

例5.已知圆,椭圆,过原点的射线分别与圆、椭圆交于两点,点不同于点,则的最大值是

#### 类型五：与角度有关的最值问题

例6.分别是椭圆的左、右焦点,直线是椭圆的一条准线,点在上，则的最大值是

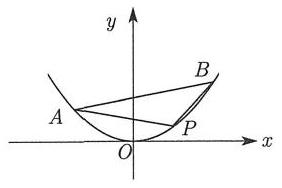


#### 类型六：与三角形（四边形）面积有关的最值问题

例7.已知抛物线为抛物线上不同的三点.

(1)当点的坐标为时,若直线过抛物线焦点且斜率为1,求直线的斜率之积;

(2)若为以为顶点的等腰直角三角形,求面积的最小值.



【答案】(1)(2)

例已知敉圆的离心率为,过其右焦点且与轴垂直的直线交椭圆于两点,椭圆的右顶点为,且满足.

(1)求椭圆的方程;

(2)若斜率为（其中）的直线过点,且与椭圆交于点两点,弦的中点为,直线与椭圆交于点两点,求四边形面积的取值范围.

#### 类型七：与定点有关的最值问题

例9.已知拋物线上一点,点是抛物线上的两动点,且则点到直线的距离的最大值。

#### 类型八:与定值有关的最值问题

例10.设的为椭圆上一点,分别为椭圆的右顶点与上顶点,直线与轴交于点,直线与轴交于点.则的最小值为

#### 类型九：与向量定比分点有关的范围和最值问题

(2)若已知在动点的轨迹上且,求实数的取值范围.

#### 类型十：与对称有关的最值与范围问题

例12.已知椭圆,试确定的取值范围,使得对于直线,椭圆上有不同的两点关于该直线对称.

**三、练习**

1.已知双曲线,求点到此双曲线上的点的最近距离.

2.已知椭圆的离心率大于是桞圆的上顶点,是椭圆上的点,则的最大值＝\_\_\_\_\_\_\_

3.若点在抛物线上移动,点在上移动,则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_

4.已知点是圆上的动点,点是椭圆上的动点,则的最大值为

5.拋物线上的点到直线的距离最近的点的坐标是()

6.设是拋物线上的一个动点.

(1)点到点的距离与点到直线的距离之和的最小值为 ;

(2)若,则的最小值为 .

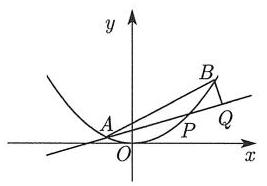
的点,则的最大值为

已知对称中心为坐标原点的椭圆与抛物线有一个相同的焦点,直线与拋物线只有一个公共点.

(1)求直线的方程;

(2)若椭圆经过直线上的点,当椭圆的的离心率取得最大值时,求椭圆的方程及点的坐标.

如图，已知拋物线,点,抛物线上的点过点作直线的垂线,垂足为.

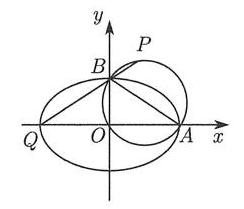
(1)求直线斜率的取值范围;

(2)求的最大值.

10.已知椭圆的离心率为,且过点.

(1)求椭圆的方程;

(2)若点是椭圆的右顶点,点在以为直径的圆上,延长交椭圆于点,求的最大值.



11.如图,已知椭圆的中心在坐标原点,焦点在轴上，长轴的长为4,左准线与轴的交点为.

（1）求椭圆的方程;

(2)若直线为上的动点,使最大的点记为,求点的坐标（用表示）.

12.已知分别是椭圆的左、右焦点.

(I)若是第一象限内椭圆上的一点,,求点的坐标;

(II)设过定点的直线与椭圆交于同的两点,且为锐角（其中为坐标原点),求直线的斜率取值范围.

13.过抛物线的焦点作互相垂直的弦,则点所构成四边形的面积的最小值为

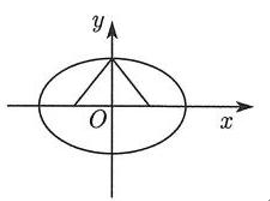
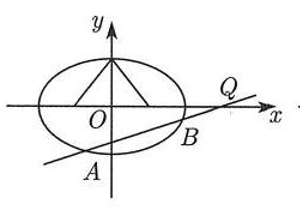
14.如图,已知椭圆的一个焦点是,两个焦点与短轴的一个端点构成等边三角形.

(1)求椭圆的方程;

(2)过点且不与坐标轴垂直的直线交椭圆于两点,设点关于轴的对称点为.

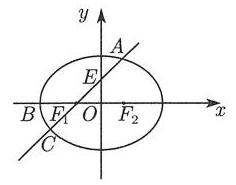
(i)求证:直线过轴上一定点,并求出此定点坐标;

(ii)求面积的取值范围.

15.如图,在椭圆中,分别为椭圆的左、右焦点,、分别为椭圆的左、右顶点,为椭圆在第一象限内的任意一点,直线交椭圆于另一点,交轴于点,且点三等分线段.

(1)求的值;

(2)若四边形为平行四边形,求点的坐标.

(3)设,求的取值范围.

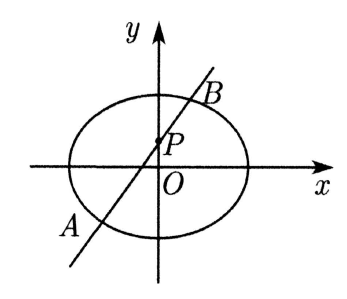
16.已知为直线上任一点,过作椭圆的两条切线为切点）,为左边原点,求三角形面积的最小值.

17．已知为抛物线的焦点，点，在该抛物线上且位于轴的两侧，（其中为坐标原点），则与面积之和的最小值是

18．已知是圆上一点，且不在坐标轴上，，，直线与轴交于点，直线与轴交于点，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_．

19．若抛物线，过其焦点的直线与抛物线交于，两点，则的最小值为

20．已知点，椭圆上两点，满足，则当\_\_\_\_\_\_\_时，点横坐标的绝对值最大．



1. 2. 3. 4.. 5. 6.(1)(2)4 7.9

（1）直线 斜率的取值范围为 ;(2)

10. 椭圆的方程为 (2) .

11.（1） .(2) 12. ( II )

13.32  
14.（1） .（2）定点 ， 的面积取值范围是 .

15.(1) (2) (3)

16. 17.3 **18.**8 19. **20.**5