数学

黄建恒

广东实验中学

2025 年 4 月 27 日

P7481 梦现时刻

定义 $F(a,b)=\sum_{i=0}^{b}\binom{b}{i}\binom{n-i}{a}$

对所有 $1\le a,b\le m$ 求出 $F(a,b)$

$1\le m\le 5000, m\le n\le 10^9$

P7481

$$\binom{b}{i}\binom{n-i}{a}$$
$$=[\binom{b-1}{i}+\binom{b-1}{i-1}][\binom{n-i+1}{a+1}-\binom{n-i}{a+1}]$$
$$=F(a,b-1)-F(a+1,b)+2F(a+1,b-1)$$

边界 $a=m$ 和 $b=1$，$O(m^2)$。

一道模拟赛题

给定 n, m 和长为 m 的非负整数序列 a_i，求

$$\sum_{x_i \geq 0, x_1+x_2+\cdots+x_m=n} \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i}$$

答案对 998244353 取模。
$m, \sum a_i \leq 10^5$，$n \leq 10^7$

一道模拟赛题

首先有经典式子：
$m^n = \sum_{i=0}^{n} C(m,i)S(n,i)i!$
考虑如果把题目中的 $x_i^{a_i}$ 换成 $\binom{x_i}{a_i}$，那么答案可以用插板法计算为 $\binom{n+m-1}{m-1+\sum a_i}$。由于 $\sum a$ 不大，先计算一行的第二类斯特林数，再使用分治 NTT 计算每个 $\sum a_i$ 的系数即可。

有两种对于数组的变换：
- $F(a,k)$ 为将数组 a 的每一个数替换成 k 个该数后取前 $|a|$ 个数的数组。
- $G(a,x,y)$ 为将数组 a 中每一个 x 替换成 y，每一个 y 替换成 x。

现要求构造出 m 个数组，其中每个数组都有 n 个数，每个数为不超过 k 的正整数。同时对于所有含 n 个数且每个数为不超过 k 的正整数的数组，你要满足在这 m 个数组中至少存在一个数组经过任意多次上述两个函数的变换后能得到它。
你只需要求出所有构造方案中最小的 m 是多少，答案对 998244353 取模。
$n,k \le 2\times 10^5$

CF1644F

如果只有 G 操作，相当于把 n 个数分到 k 个集合的方案数，即第二类斯特林数，用卷积可以 $O(n\log n)$ 求。
考虑 F 操作，相当于如果开头开始每 k 个数都相等，就能被另一个数组 $F(a,k)$ 出来，这个的方案数是 $S(\lceil \frac{n}{k} \rceil, *)$。
注意每个因子都会被算一遍，因此需要莫比乌斯反演，时间复杂度 $O(n\log^2 n)$。

在一个背包里，有 $n+m$ 件物品，其中有 n 件物品是小 X 的，m 件物品属于小 Y。
对于 n 件属于小 X 的物品，体积分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$
对于 m 件属于小 Y 的物品，体积分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_m$
每次小 X 会根据体积等概率从中拿出一件物品。具体地，假设当前还剩 k 件物品，体积分别为 $c_1, c_2, \cdots, c_k$，则选择第 i 件物品的概率为 $\frac{c_i}{\sum c_i}$
现在，小 X 想找回属于他的所有物品，并想知道期望操作次数，对 998244353 取模。
$1 \leq n, m \leq 100, \sum a_i + \sum b_i < 998244353$，$1 \leq a_i \leq 100$，$b_i \geq 1$。
加强版：$1 \leq n, m, a_i \leq 500$。

即求拿完小 X 的物品时期望拿了多少个小 Y 的物品。
注意到小 Y 物品的贡献是独立的，可以分开计算，变为小 X 的所有物品和小 Y 的其中一个物品 b_0 为初状态的答案和。求有多大的概率使得最后拿出来的是小 Y 的物品。此时允许一个物品可以重复拿，答案不变。
枚举小 Y 拿物品的时间 t，令 $V=\sum a_i$，$S=b_0+V$，概率为

$$\frac{b_0}{S}(t-1)![x^{t-1}]\prod_{i=1}^{n}(e^{\frac{a_i x}{S}}-1)$$

$F(x)=\prod_{i=1}^{n}(e^{\frac{a_i x}{S}}-1)=\sum_{i=0}^{V} f_i e^{\frac{a_i x}{S}}$，其中 f_i 可以背包求出，e^{kx} 转 OGF 为 $\frac{1}{1-kx}$，单次查询复杂度 $O(n^2)$，总时间复杂度 $O(n^3)$。
细节：需要维护 $O(n^3)$ 个 $\frac{a}{b}$ 相加对质数取模的结果，可以直接维护分数相加：$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$，最后求逆元。

AGC034F RNG and XOR

给定 n 和一个长度为 2^n 的数组 A (从 0 开始标号).
有一个初始为 0 的变量 x . 不断操作, 每次操作以 $\frac{A_i}{\sum\limits_{j=0}^{2^n-1} A_j}$ 的概率将 x 变成 $x \oplus i$.
对于所有 $i \in [0, 2^n)$, 求出 x 第一次变成 i 的期望操作次数.
$n \leq 18, 1 \leq A_i \leq 1000$。

不难列出答案的方程：

$$f_i = 1 + \sum_{j=0}^{2^n-1} f_j p_{i\oplus j}$$

$$FWT(F)_i = FWT(\sum x^k)_i + FWT(F)_i \cdot FWT(P)_i + FWT(c)_i$$

其中 c 为 $i=0$ 时的修正项，代入 $i=0$，有 $FWT(P)_0 = 1$，因此 $c + 2^n = 0$，$c = -2^n$。
于是 $FWT(F)_i = \frac{-2^n}{1-FWT(P)_i}$，做一遍 FWT 和 IFWT 即可，时间复杂度 $O(2^n n)$。

qoj9562 欧伊昔

给出一个 3×3 的运算表 op_0 与两个下标 $[0, 3^n - 1]$ 的数组 A, B，定义 $a \text{ op } b$ 表示 a 和 b 在三进制下每一位按 op_0 进行二元运算后得到的结果。现在需要求出数组 C，满足：

$$C_k = \sum_{i \text{ op } j = k} A_i B_j$$

保证 op_0 中的每个数在每个子任务的限制下中随机生成，无限制则为 $\{0, 1, 2\}$，$n \leq 11$。
子任务 1：$op_{i,j} = i + j \bmod 3$。
子任务 2：$op_{i,j} = \text{mex}(i, j)$。
子任务 7：$n = 11$。有 10 组测试数据，其他子任务数据组数为 5。

qoj9562

子任务 1：每一位做长度为 3 的 FFT 即可。
子任务 2：考虑用类似 FWT 的方法做 $n=1$：
$c_0=(a_1+a_2)(b_1+b_2), c_2=a_0b_1+a_1b_0, c_1=(a_0+a_1+a_2)(b_0+b_1+b_2)-c_0-c_1$。
因此进行如下变换：$a_0,a_1,a_2 \to a_0,a_1,a_1+a_2,a_0+a_1+a_2$，$b$ 的前两个反过来，然后点值对应相乘，最后还原出 $c_0 \sim c_2$。
对于 $n>1$ 的情况，每一位做上述变换，然后直接点值相乘，最后还原即可，时间复杂度 $O(3^n n+4^n)$，还原时复杂度是等比数列求和，因此 4^n 不带 n。

子任务 7：类似 mex 卷积，我们维护 $a_0 \sim a_2 \to f_0 \sim f_4$，$b_0 \sim b_2 \to g_0 \sim g_4$，其中 $f_i = \sum F_{i,j}a_j$，$g_i = \sum G_{i,j}b_j$，$F_{i,j}, G_{i,j} \in \{0,1\}$。
有 $7 \times 7 = 49$ 种 f, g 匹配的方式，在其中选 5 种，检查时判断能否用 $\sum h_{i,j} \times f_i g_i$ 凑出 c_j，取 $h_{i,j} \in \{-1,0,1\}$ 即可。在随机数据下可以找到解，时间复杂度最坏是 $\binom{49}{5} \times 3^3$。实际上大概率会选上 $(a_0+a_1+a_2)(b_0+b_1+b_2)$，把这个情况放到爆搜最前面即可。后面部分的复杂度是 $O(5^n)$，可以通过除子任务 1 外的所有子任务，子任务 1 特判即可。

qoj9562

对于这个做法的正确性，大概证明就是，一个数所需占用的位数为它所有出现位置对应矩阵的秩，如果有两个数在矩阵中对应位置的秩不超过 2，那么需要的个数是 $2+2+1$（最后一个数可以用整个矩阵减掉前两个），一定有解，考虑出现第二多的数，如果出现了 4 个，那么出现最少的数只能出现一个，也一定有解，出现 2 个同理，如果出现 3 个，那么这三个数需要出现在不同行列，秩才为 3，概率为 $\frac{3!}{\binom{9}{3}}=\frac{1}{14}$，并不是很高。
进行打表后可以发现，$3^9=19683$ 中情况中只有 174 种情况满足最小的两个矩阵秩的和超过 4，因此错误率至多为 $\frac{1}{100}$。
从这个正确性分析也可以看出，可以用高斯消元优化爆搜的过程。

给定整数 n, C，你要计算一个 $n \times n$ 的大矩阵的行列式 A，其中行列的下标都是 $1 \sim n$。
当 $i = j$ 时，$A_{i,j} = 1$，
当 $i \nmid j$ 时，$A_{i,j} = C$，
都不满足则 $A_{i,j} = 0$。
求 A 的行列式对 998244353 取模。
$1 \le n \le 10^9$。

AT_xmascon20_d

令 $A_{i,j}=B_{i,j}+C$，那么 $B_{i,i}=1-C$，对于其他 $i\mid j$，$B_{i,j}=-C$。考虑 $\prod_{i=1}^{n} rev(p)(B_{i,p_i}+C)$。如果选了两个 C，那么可以交换 p 中的前两个选 C 的元素抵消，是双射。因此只有至多一个数选 C，至多存在一个 $p_i<i$。考虑这个 i 的置换环，必然为
$s_1\to s_2\to\ldots\to s_k\to s_1$，其中除末尾外后一个数是前一个数的倍数。
令 $f(n)$ 为钦定从 1 开始的答案，可以有递归式
$f(n)=1+\frac{C}{1-C}\sum_{i=2}^{n} f(n/i)$，记忆化后时间复杂度 $O(n^{0.75})$。

给你一棵 n 个点的树，点有点权 v_i，给一个长为 k 的序列 A，令矩阵 $B_{i,j} = v_{LCA(A_i,A_j)}$，计算 B 的行列式。
$n, k \leq 5 \times 10^5$。
部分分：A 是 $1 \sim n$ 的排列。

套路是把一个矩阵 B 拆成一个上三角矩阵 C 和下三角矩阵 D 的乘积。例如，当 $B_{i,j}=\gcd(i,j)$ 时，$C_{i,j}=[j\mid i]$，$D_{i,j}=[i\mid j]\varphi(i)$，于是 $|B|=|C||D|=\prod\limits_{i=1}^{n}\varphi(i)$，

在本题中，交换 A 中的两个元素不影响结果，且如果有重复元素，那么相当于两行相同，$|B|=0$。如果 A 是 $1\sim n$ 的排列，那么 $B_{i,j}=v_{LCA(i,j)}$，记 $i\to j$ 表示 i 是 j 的祖先，那么取 $C_{i,j}=[j\to i]$，$D_{i,j}=[i\to j](v_i-v_{fa_i})$，可以得到 $|B|=\prod\limits_{i=1}^{n}(v_i-v_{fa_i})$，

qoj4889

对于更一般的情况，考虑 Cauchy-Binet 公式，对于 $B_{k\times k} = C_{k\times n}D_{n\times k}$，$k < n$，有 $|B| = \sum_{S\subseteq[1,n],|S|=k} |C_{[1,k],S}||D_{S,[1,k]}|$。感性证明可以考虑 S 是可重集一定对，有重复元素时可以交换匹配抵消。
称 A 中的点为关键点，那么变成要在树上选 k 个点，权值先乘上这些点的 $v_i - v_{fa_i}$，每个点和子树内的关键点匹配。注意到如果选出来的 k 个点与子树内点的匹配方案不唯一，可以构造双射抵消。因此匹配方案必须唯一，做一个树形背包即可。时间复杂度 $O(n)$。

AT_jsc2023_final_f Adjacent Binomial Coefficients

https://atcoder.jp/contests/jsc2023-final
对于所有满足 $A_1 = K, \sum A_i = M$ 的长为 N 的非负整数序列 A。求 $\sum_{i=1}^{N-1} \binom{A_i+A_{i+1}}{A_i}$ 的和对 998244353。
$2 \le n \le 2.5 \times 10^5, 0 \le k \le m \le 2.5 \times 10^5$。

考虑组合意义，相当于有 m 个 n 种球，第 i 种球插入时必须插入到第 $i-1$ 种球的后面或开头。
那么即统计长为 m 的值域 $[1,n]$ 的整数序列 b 个数，满足 $b_{i+1} \le b_i + 1$，且恰有 k 个 i 满足 $b_i = 1$。
考虑生成函数，答案为 $[x^m]F(x)^k G(x)$，其中 $F(x)$ 表示仅有开头为 1 的方案数， $G(x)$ 表示开头任意且没有 1 的方案数。
考虑格路计数，即相当于从 $(0,0)$ 出发，每次走 $(+1,+1)$ 后走若干步 $(+1,-1)$，且 y 坐标位于 $[0,n]$ 之间，除起点外第一次 $y=0$ 的位置为 $(2i,0)$ 的方案数即 $[x^i]F(x)$。
令 F_j 表示 y 坐标位于 $[0,j]$ 之间时的 GF，有 $F_0=1$，$F_j=\frac{1}{1-xF_{j-1}}$，原因是考虑每两次 y 回到 0 之间是一个 F_{j-1}。维护 $F_j=P_j/Q_j$ 的形式，那么 $F_{j+1}=Q_j/(Q_j-xP_j)$，使用矩阵加速即可，答案为 xF_{n-1}，时间复杂度是 1log。

对于 G，情况略微复杂：

$$G_j = \frac{G_{j-1}}{1 - xF_{j-1}}$$

$$F_j = \frac{1 - \frac{G_{j-1}}{G_j}}{x}$$

$$\frac{1 - \frac{G_j}{G_{j+1}}}{x} = \frac{1}{1 - (1 - \frac{G_{j-1}}{G_j})}$$

$$\frac{G_j}{G_{j+1}} + \frac{xG_j}{G_{j-1}} = 1$$

$$H_{j+1} = H_j - xH_{j-1}$$

其中 $H_j = \frac{1}{G_j}$，最后求逆即可。总时间复杂度 $O(n \log n)$。

有一个长度为无限的字符串 S，刚刚开始时，每个字符都是英文横杠：-。

现在对它进行更改，操作如下：

随机选字符串其中的一个左右两个字符不是 X 的字符 - ,将其修改为 X ,直到没有可以修改的字符。

操作完后，给定整数 N 以及长度为 N 的由 - 和 X 组成字符串 s ,问在 S 中随机取一段长度为 N 的字符串，这个串与 s 相同的概率是多少，可以证明，答案一定为 $p+\frac{q}{e}+\frac{r}{e^2}$ 的形式，其中 $e\approx 2.718$ 为自然常数。

你需要输出 p,q,r 对 10^9+7 取模的结果。

$1\le N\le 1000$。

样例：对于 $s=''X''$，答案为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}$。

AT_wtf19_e

考虑如下过程：给每个位置随机 $[0,1]$ 的实数权值 X_i，按权值从小往大考虑每个位置，能放就放，最后得到一个串。显然得到每个串的概率是不变的。
考虑一个位置 i，如果 $X_{i-1} > X_i < X_{i+1}$，那么这个位置为 X，从每个这样的“谷”开始向左右 X- 交替，可以说明：一个位置是 X，当且仅当其左右两侧极长下降段长度均为偶数。这个概率可以容斥计算：假设它的权值为 x，那么左边是偶数的概率为：
$1 - P(X_{i-1} < X_i) + P(X_{i-2} < X_{i-1} < X_i) \ldots = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \ldots = e^{-x}$。
两边均为偶数的概率为 e^{-2x}，答案为 $\int_0^1 e^{-2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$。

对上述做法进行拓展。设 $f(i,0/1,0/1,0/1)$ 表示当且考虑到 i， i 左侧的极长连续段奇偶性， i 右侧的极长连续段奇偶性为奇数，偶数时是否合法，转移枚举 i 和 $i+1$ 之间的字符，形如 $\int_L^R f(i-1)\mathrm{d}y \to f(i)$，其中 $L=0,R=x$ 或者 $L=x,R=1$。边界
$f(0,0,1,1)=e^{-x}, f(0,1,1,1)=1-e^{-x}$。
可以归纳证明：f 有 $A(x)+\frac{B(x)}{e}+Ce^{-x}$ 的形式，其中 $A(x),B(x)$ 是不超过 n 次的多项式。那么单次转移可以做到 $O(n)$，时间复杂度
$O(n^2)$。
答案为 $\int_0^1 (f(n,*,1,1)+f(n,*,0,1)e^{-x}+f(n,*,1,0)(1-e^{-x}))\mathrm{d}x$

AT_wtf19_e

统计答案需要计算形如 $\int_0^1 x^k e^{-x}\mathrm{d}x$，利用分部积分法，$u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u$。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 x^k e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 x^k \mathrm{d}(e^{-x}) \\
&= -x^k e^{-x} + \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}(x^k) \\
&= -x^k e^{-x} + k\int_0^1 x^{k-1} e^{-x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

可以递归计算。

Bonus 小技巧?

付公主的背包
集合划分容斥（例 P7275）
https://www.cnblogs.com/xiaoziyao/p/17533907.html
~~二元GF 对角线~~

祝大家NOI顺利！