图论杂题选讲

彭博

北京大学

2025.4

Potyczki Algorytmiczne 2025 Runda 1 A Teleport

给定 n 个点的不带权无向图，你需要在图中加一条权值为 0 的边，使得图直径最短。

图直径定义为两个点的最短路的最大值。

$n \leq 400$

Solution 1.

不妨先二分答案 ans ，考虑所有原图中最短路 $> ans$ 的点对 (x, y) 。

一个合法的连边方案 (u, v) 必须满足 $dis(x, u) + dis(y, v) \leq ans$ 或 $dis(x, v) + dis(y, u) \leq ans$ 。

发现两者至多只有一个成立，所以可以直接对每个 (u, v) 进行计数。计数可以做到 $O(n^3)$ 。

Solution 2.

仍然二分答案 ans ，考虑所有原图中最短路 $> ans$ 的点对 (x, y) 。

对于一个连边方案 (u, v) ，如果 $dis(x, u) < dis(x, v)$ ，那么路径一定是 $x \to u \to v \to y$ 。

先枚举 x, v, y ，算出 $w_{x,v} = \max_{y:dis(x,y)>ans} dis(v, y)$ ，然后枚举 x, u, v ，如果 $dis(x, u) < dis(x, v)$ 且 $dis(x, u) + w_{x,v} > ans$ 就把 (u, v) 标为不合法。

最后发现不需要二分答案，可以直接从大到小枚举 ans ，每次用新的 (x, y) 来更新 $w_{x,v}$ ，然后用 $w_{x,v}$ 把一些 (u, v) 筛掉。

CF1656I Neighbour Ordering

给定一个 n 个点 m 条边的简单无向图，你需要把每个点 x 的出边排序。

如果存在两条边 $(x,y),(y,z)$ ，设 $x <_y z$ 为真当且仅当在 y 处 (x,y) 的顺序在 (y,z) 之前。

你需要保证对于任意一个简单环 $v_0,\cdots,v_{m-1}$ ，以下两个条件之一成立：

- $\forall 0 \le i < m, v_i <_{v_{(i+1) \bmod m}} v_{(i+2) \bmod m}$
- $\forall 0 \le i < m, v_i >_{v_{(i+1) \bmod m}} v_{(i+2) \bmod m}$

构造一组方案，或判断无解。

$n,m \le 3 \times 10^5$

CF1656I Neighbour Ordering

尝试直接构造，发现过于困难，这限制好像有点强。

既然限制很强，那就反过来，考虑怎样的图肯定无解，从而给自己加点图的性质。

随便画画，发现图必须存在一个哈密顿回路，并且把这个回路拉出来之后里面的边两两不交，从而是个平面图（可以补成三角剖分图），直接按照顺时针顺序排序即可。

XX Open Cup GP of Nanjing – M

给定一个 n 个点 m 条边的简单带权无向图，你需要找一个长度为 k 的简单环，最大化环上所有边的边权之和。

$n, m \leq 300, k \leq 10$

XX Open Cup GP of Nanjing – M

难点在于怎么保证 k 个点两两不同。

随机!

我们随机一种黑白染色方案，就有 $k/2^k$ 的概率可以使得环恰好被分成两段长度为 $k/2$ 的同色的链。

在 $k = 10$ 的时候只需要随机 1000 次就基本可以保证能随到一个合法的染色方案。接下来我们只需要对于一种染色方案在 $O(m^2)$ 的时间内做出来即可。

XX Open Cup GP of Nanjing – M

对于黑色点和白色点分别处理，设 $f_{x,y}$ 表示黑色点 x 到 y 的长度为 $k/2$ 的简单路径的边权最大值，g 同理。

合并的时候只需要枚举两条横跨黑白的边然后合并即可。

对 $k/2$ 分类讨论。我们直接跳到最难的情况，$k=10$，链上有 5 个点，4 条边。

枚举第一条和最后一条边，那么中间只需要再选出一个点就够了。

我们可以另外设 $h_{x,y}$ 表示 x 到 y 中间再选一个点能得到的最大边权和。这个也只需要枚举两条边就可以求出来。并且不仅是最大边权和，我们可以把前三大的边权和都算出来。

因为两边只 ban 掉了两个点，所以中间的前三大方案中必有一个会被选，这就做完了。

Xmas Contest 2022 H Happy Game

给定一个 n 个点的无向图。

由 Alice 选一个点 x 染黑，然后 Bob 操作若干轮，每轮可以选择至多 2 个与黑点相邻的点染黑，所有点都染黑时游戏结束。

Bob 希望最小化游戏轮数，而 Alice 相反。求最终的游戏轮数。

$n, m \leq 3 \times 10^5$

简单感受一下， Bob 只在割点有可能被迫只染黑一个点，所以不妨先求出圆方树。

继续感受，从 x 开始只有一条链能让 Bob 浪费步数，而这条链以外的点都可以减小浪费。既然每次浪费都只需要一个额外的点就能避免，这条链就只能是从 x 到距离 x 的最远点。这里的距离是圆方树上的距离。

最远点只能是直径的两个端点。所以分别把两个端点设为根，在树上简单跑一个类似于括号序列的东西即可。

2nd ucup stage 2 C Many Many Cycles

给定一个 n 个点 m 条边的带权无向图，求出其所有简单环的权值的 gcd 。

$n \le 5000, m \le 10000$

先说正解。

随便拿一棵生成树出来，随便选几条非树边，它们异或起来就可以得到若干个简单环的和。

但事实上，我们只需要考虑一条和两条的情况。这是因为多条非树边的交一定可以表示为两条非树边的交。

因此只要考虑了一条和两条，就可以线性组合出任意非树边的交（的两倍），自然也就可以组合出任意非树边的 xor 。

复杂度 $O(m^2)$ 。

然后说优化。

给每个非树边一个随机权值，把每个树边的权值定为覆盖它的非树边的权值的异或和，那么权值相同的边只能同时出现在环上，或同时不出现。

显然每一组边的权值和的 gcd 一定是答案的约数。可以证明，答案只能是它或它的两倍。

证明其实并不难，用一条边和两条边的线性组合乱搞搞，就可以容斥出每一类边的权值和的两倍。

只需要判断是不是两倍即可。

2nd ucup stage 2 C Many Many Cycles

反正每一类边只能同时出现或同时不出现，不妨把一类边的权值和集中到一条边上，再除掉 gcd 。

现在就只需要判断是不是每个环的权值和都为偶数了。

拿并查集乱搞搞即可。

Ptz Summer 2022 Day2H Grammy Sorting

给定一个 n 个点 m 条边的简单无向图，每个点上写了一个数字 p_i ，其中 p 是一个排列。

给定 A 和 B ，你希望把点上的数字进行重排，使得对于每个点 x 都存在一条从 A 到 B 的经过 x 的路径，且路径上的点权递增。

但你只能对 p 进行如下操作：选择一条从 A 出发的简单路径 $A = x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ ，同时令 $p_{x_i} \leftarrow p_{x_{i+1} \bmod k}$ 。

你可以操作至多 10000 次。构造方案或判断无解。

Hint: 你可以认为题目额外给出了一个定向，使得 A 可以到达任意点，任意点可以到达 B 。

$n \le 1000, m \le 2000$

显然存在一个定向是有解的必要条件。尝试根据一个定向来构造出解。

但是直接做并不好做，先考虑一些简单情况，比如一条从 1 到 n 的链，那么就是要用若干次操作做排序。

可以把一次操作看做是把 p_1 丢到任意位置，于是不难想到插入排序，只需要 n 次操作就可以解决。

然后可以考虑一棵树，但每个叶子都与 A 相连。发现类似插入排序的操作仍然适用，只需要不断往根移动，直到找到第一个比自己大的数即可。只有最后一步需要注意，要把最小的叶子换到 A ，而不能是任意一个叶子。

最后考虑 DAG 。仍然用插入排序的方式，维护一组已经解决的点，每次把 A 的权值插进去。

往哪插呢？为了防止已经解决的点权又被弄乱的情况，我们可以让解决的点是拓扑序的一个后缀。那么这一次就要解决最靠后的还没被解决的点。

从这个点开始插入排序。但一个点会有多个后继，该往哪边走呢？如果随便走，可能出现的问题是虽然每个点都能递增地走到 B ，但 A 未必能递增地走到每个点。

解决方案是在插入排序的过程中要往权值最小的父亲走，就像树的情况的最后一步一样。

简单归纳一下发现这样就可以保证每个点都有前驱和后继，就做完了。

Ptz Summer 2022 Day2H Grammy Sorting

Bonus: 怎样求出一个定向?

Potyczki Algorytmiczne 2020 Runda 5 A Trzy drogi

给定 n 个点 m 条边的无向图，求有多少种删掉三条边使图不连通的方案数。

$n \le 2 \times 10^5, m \le 5 \times 10^5$

Potyczki Algorytmiczne 2020 Runda 5 A Trzy drogi

任取一棵 dfs 树，给每条非树边一个随机权值异或到对应的树链上，那么就是求选出三条边使得里面某个非空子集异或和为 0 的方案数。

一条边为 0 或两条边相等都是 trivial 的。我们只考虑三条边异或为 0 且两两不同的情况。

此时有三种情况：三条树边、两条树边一条非树边、一条树边两条非树边。

第三种情况当且仅当某条树边只被两条非树边覆盖，很好做。

第二种情况是选树边 a, b 和非树边 c ，使得 c 覆盖了 a 但没有覆盖 b ，且其他非树边都同时覆盖 a, b 。此时需要一些分类讨论。

Potyczki Algorytmiczne 2020 Runda 5 A Trzy drogi

显然 a, b 需要是祖先关系，否则不存在同时覆盖 a, b 的边。

如果 a 比 b 更深，那么 c 显然只能是覆盖 a 的边里上端点最深的，很好做。

否则画画图发现 c 只能是覆盖 a 的边里下端点 dfs 序最小或最大的，也不难做。

Potyczki Algorytmiczne 2020 Runda 5 A Trzy drogi

三条树边的做法并不显然。但此时我们知道所有非树边都不会被删，所以可以把它们缩起来递归做。

直接递归的复杂度显然不对：如果图是一个环，每次就只会缩掉一条边。

解决方式是在选 dfs 树之前把图中所有度数为 2 的点都先缩起来，这样就可以保证递归一层点数减半。

ARC122F Domination

有 n 个红色石头和 m 个蓝色石头，放在坐标系上。你可以任意次移动蓝色石头，代价是起点到终点的哈密顿距离。你需要满足任意一个红色石头的右上方都有至少 K 个蓝色石头。

$n, m \leq 10^5, K \leq 10$

ARC122F Domination

显然我们只需要考虑外层轮廓线上的红色石头，于是把二维转成类似一维的情况。

先考虑 $K=1$ 的情况。

因为红色石头的位置是一维的，可以用路径来描述一种方案：新建虚点 $n+1$ ，如果一个蓝色石头 i 覆盖了区间 $[l,r)$ ，那么就是走了 $l\to i\to r$ 的路径。代价可以被写在边上。

当然如果这么做那边数就起飞了。

ARC122F Domination

注意到代价可以被写成 $\max(0, RY_l - BY_i), \max(0, RX_{r-1} - BX_i)$ ，那么可以把它写在坐标轴上。

在 y 轴上，向下走需要 1 的代价，向上走不用代价；在 x 轴上向右走需要代价而向左走不用。原点不会连接两个轴。

于是路径就变成 $(0, RY_l) \to (0, BY_i) \to (BX_i, 0) \to (RX_{r-1,0})$ 。然后再把 $(RX_{r-1}, 0) \to (0, RY_r)$ 这条边补上就完美了。

检查一下，不会出现奇怪路径的情况，所以 $K = 1$ 的时候就转化为最短路。

ARC122F Domination

根据经典结论，任何一个 $K>1$ 的合法方案都可以被拆成 K 个 $K=1$ 的方案，所以直接变成费用流即可。

CCPC Finals 2021 H Harie Programming Contest

给定一个 n 个点 m 条边的的二分图，你需要删去两个点，使得最大匹配大小不变。

求出删点的方案数。

$n, m \le 2 \times 10^5$

CCPC Finals 2021 H Harie Programming Contest

大胖讨论题。

按照删去的两个点是同侧还是异侧进行分类讨论。

先看比较简单的异侧的情况。

如果删去的点是 u 和 u' 那么显然没救了。否则设删去的点是 u 和 v'，我们需要知道 u' 和 v 能否同时找到新匹配。

这等价于是否存在两条“增广路”，第一条从左边未匹配点出发并在 u 结束，第二条从右边未匹配点出发并在 v' 结束，并且这两条增广路不交。

有趣的是，这两条增广路必然不交，否则原先的最大匹配就不是最大匹配了。

因此只需要求出左边合法的 u 的个数和右边合法的 v' 的个数，然后直接相乘即可。

然后是比较麻烦的同侧的情况。

设删掉的点是 u, v ，那么就需要存在两条增广路，都是从左边的未匹配点出发，一个到 u 一个到 v ，且不交。

这就等价于从左边的未匹配点到 u, v 的最大流至少是 2 ，也就等价于最小割不等于 1 ，也就等价于删去任何一个点之后仍然存在增广路，也就等价于 u, v 在支配树上的 lca 是根。

所以直接求支配树即可。

CF1284G Seollal

给定一个 $n \times m$ 的四连通网格，其中某些格子有障碍物。

把格子黑白染色，$(1,1)$ 是黑色。你需要保留一些边，得到一棵生成树，使得所有叶子都是白色。特别的，$(1,1)$ 可以是叶子。

$n, m \leq 300$

CF1284G Seollal

可以直接拟阵交解决原题的 $n, m \le 20$ ，但这就没什么意思了。

把 $(1,1)$ 从图中删掉，那么所有叶子都是白色等价于每个黑色点都有至少一个儿子，不妨先让每个黑色点都和一个白色儿子匹配。

然而存在完美匹配还不足以构造出合法解，因为匹配是有向的，不一定存在合法方案把它们连起来。

让黑色点指向它匹配的白点，白色点指向所有相邻的黑色点，那么只要能从所有未被匹配的白点出发，把所有黑点都走一遍，就能保证匹配的白点是匹配的黑点的儿子了。

那么如果无法这样走到所有黑点呢？不难发现这等价于存在一个黑点集合 S 使得与它相邻的白点个数恰好是 $|S|$ 。不难发现此时一定无解。

给定一个 n 个点的完全图，每条边都被染了 m 种颜色中的一种。

你需要判断能否再加入 $m-n+1$ 个点，补成一个 $m+1$ 个点的完全图，并且每条边仍然被染了 m 种颜色中的一种，使得每个点都满足相邻的边的颜色恰好取遍这 m 种。

$n, m \leq 200$

首先判掉原图就不合法的情况，以及 $2 \nmid (m+1)$ 的情况。

在最终的图里面，每种颜色都会有恰好 $(m+1)/2$ 个匹配，或者说 $(m+1)/2$ 个 set 。

那么现在就可以先把 $1, \cdots, n$ 加入到这些 set 里。按照 set 的大小分为 0-set, 1-set, 2-set 。

显然，如果一种颜色现在的 1-set 和 2-set 个数之和已经超过了 $(m+1)/2$ 那么也无解。

否则，通过构造的方式证明一定有解。

只需要每次加入一个点，并仍然保证每种颜色的 set 个数不超过 $(m+1)/2$ 即可。

不难想到用二分图匹配来构造：左边 m 个点表示 m 种颜色，右边 $n+1$ 个点，前 n 个点表示图中的点，最后一个点表示不连边。左边到源和右边到汇的容量都是 1 ，只有第 $n+1$ 个点到汇的容量是 $m-n$ 。

如果图中第 j 个点旁边没有第 i 种颜色，就从 i 到 j 连一条容量为 1 的边。 i,j 匹配的意义就是第 j 个点要向新点连颜色为 i 的边。

另外，每种颜色还要向右边第 $n+1$ 个点连两倍 0-set 个数条边，每条边的容量也都是 1 。（下面会说为什么要连那么多条边而不是只是 0 或 1 条边。）

跑一个二分图匹配。显然，只要满流，就成功地从 n 扩展到了 $n+1$ 。

我们惊奇地发现，左边的每个点的出度，和右边的每个点的入度（除去最后一个点），都是 $m+1-n$！

因此，只要把右边最后一个点拆成 m 个，就得到了一个二分正则图，所以一定存在完美匹配。