

图论杂题选讲

彭博

北京大学

2025.4

给定 n 个点的不带权无向图，你需要在图中加一条权值为 0 的边，使得图直径最短。

图直径定义为两个点的最短路的最大值。

$$n \leq 400$$

给定一个 n 个点 m 条边的简单无向图，你需要把每个点 x 的出边排序。

如果存在两条边 $(x, y), (y, z)$ ，设 $x <_y z$ 为真当且仅当在 y 处 (x, y) 的顺序在 (y, z) 之前。

你需要保证对于任意一个简单环 v_0, \dots, v_{m-1} ，以下两个条件之一成立：

- $\forall 0 \leq i < m, v_i <_{v_{(i+1) \bmod m}} v_{(i+2) \bmod m}$
- $\forall 0 \leq i < m, v_i >_{v_{(i+1) \bmod m}} v_{(i+2) \bmod m}$

构造一组方案，或判断无解。

$$n, m \leq 3 \times 10^5$$

给定一个 n 个点 m 条边的简单带权无向图，你需要找一个长度为 k 的简单环，最大化环上所有边的边权之和。

$n, m \leq 300, k \leq 10$

给定一个 n 个点的无向图。

由 Alice 选一个点 x 染黑，然后 Bob 操作若干轮，每轮可以选择至多 2 个与黑点相邻的点染黑，所有点都染黑时游戏结束。

Bob 希望最小化游戏轮数，而 Alice 相反。求最终的游戏轮数。

$$n, m \leq 3 \times 10^5$$

给定一个 n 个点 m 条边的带权无向图，求出其所有简单环的权值的 gcd。

$n \leq 5000, m \leq 10000$

给定一个 n 个点 m 条边的简单无向图，每个点上写了一个数字 p_i ，其中 p 是一个排列。

给定 A 和 B ，你希望把点上的数字进行重排，使得对于每个点 x 都存在一条从 A 到 B 的经过 x 的路径，且路径上的点权递增。

但你只能对 p 进行如下操作：选择一条从 A 出发的简单路径 $A = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ ，同时令 $p_{x_i} \leftarrow p_{x_{i+1} \bmod k}$ 。

你可以操作至多 10000 次。构造方案或判断无解。

Hint: 你可以认为题目额外给出了一个定向，使得 A 可以到达任意点，任意点可以到达 B 。

$n \leq 1000, m \leq 2000$

给定 n 个点 m 条边的无向图，求有多少种删掉三条边使图不连通的方案数。

$$n \leq 2 \times 10^5, m \leq 5 \times 10^5$$

有 n 个红色石头和 m 个蓝色石头，放在坐标系上。你可以任意次移动蓝色石头，代价是起点到终点的哈密顿距离。你需要满足任意一个红色石头的右上方都有至少 K 个蓝色石头。

$$n, m \leq 10^5, K \leq 10$$

给定一个 n 个点 m 条边的二分图，你需要删去两个点，使得最大匹配大小不变。

求出删点的方案数。

$$n, m \leq 2 \times 10^5$$

给定一个 $n \times m$ 的四连通网格，其中某些格子有障碍物。

把格子黑白染色， $(1,1)$ 是黑色。你需要保留一些边，得到一棵生成树，使得所有叶子都是白色。特别的， $(1,1)$ 可以是叶子。

$n, m \leq 300$

给定一个 n 个点的完全图，每条边都被染了 m 种颜色中的一种。

你需要判断能否再加入 $m - n + 1$ 个点，补成一个 $m + 1$ 个点的完全图，并且每条边仍然被染了 m 种颜色中的一种，使得每个点都满足相邻的边的颜色恰好取遍这 m 种。

$$n, m \leq 200$$