

HDU 6391 Lord Li's problem

给定 n, k, v 。

定义集合 $S = \{x \mid 0 \leq x < 2^n, \text{popcount}(x) = 3\}$ 。

求满足 $T \subseteq S, |T| = k, \bigoplus_{x \in T} x = v$ 的集合 T 的数量。

对一个模数取模。

$1 \leq n \leq 40, 1 \leq k \leq \min\{20, \binom{n}{3}\}, 0 \leq v < 2^n, 5 \times 10^4$ 组数据。

首先因为顺序是不紧要的，但是发现如果就对于一个集合考虑会有点繁杂。

结合最后选的值一定不重，于是钦定选出来的是有顺序的，最后除掉 $k!$ 即可。

首先发现对于这个 v 实际上并不关心这些 1, 0 的值在哪里而是只关心个数，因为可以对最后的 01 建立双射——映射上。

于是考虑设计 dp: $f_{i,j}$ 表示选了 i 个不同值，异或出的 1 的个数为 j 的方案数。

那么对于转移，就是考虑第 $i+1$ 个选的值，但是同样的因为只关心 1 的个数，所以对于这个值也只关心其有多少个 1 在这个值的 1 之中。

所以有 $f_{i,j} \times \binom{j}{c} \times \binom{n-j}{3-c} \rightarrow f_{i+1,j+3-2c} (0 \leq c \leq 3)$ 。

此时还有一个问题是并没有解决选的不重这个问题。

不过根据状态设计，考虑到如果重了重的也只是第 $i+1$ 个数和某个数。

而且这两个数在异或后就会抵消掉，于是可以当作是从 $i-1$ 个数的时候选了两个相同的且与原有的数不同的数出来。

还有一点是因为 dp 是考虑了顺序的，那么还要考虑把这个值插入进去，于是还有

$-f_{i-1,j} \times i \times (\binom{n}{3} - (i-1)) \rightarrow f_{i+1,j}$ 。

时间复杂度 $\mathcal{O}(Tnk)$ 。

QOJ5357 芒果冰加了空气

给定一颗大小为 n 的树，求其点分树个数（每次选根节点不必为重心）。

对一个模数取模。

$n \leq 5000$ 。

考虑树上 DP。考虑已知两个子树的点分树方案数，求合并成一个子树的答案。但只知道 u, v 的编号信息显然是不够的。

考虑对于任意一组方案，把两边的点分树给画出来。此时多加了 (u, v) 这条边，那么就在点分树上把 u, v 给找出来。在合并两边选择点分树的过程时，如果此时选了 u, v 的子树内的点，显然不影响树的形态。进一步分析，能够发现选的不是 u, v 到根路径上的点，那么顺序都是不影响的，因为其对应链上的点选了之后这些点就与 (u, v) 这条边没有关系了。

现在只需要考虑 $u \rightarrow rt_u, v \rightarrow rt_v$ 这两条路径，记 u, v 在点分树上的深度 d_u, d_v 。那么 DP 就很好设计了，设 $f_{u,d}$ 表示 u 的子树内构成的点分树且 u 的深度为 d_u 的方案数。转移是简单的，枚举合并之后的 u 的深度就是一个组合数。

时空复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

有一个长度为 n 的数轴，初始 n 个点均为白色。

定义一次操作为选择 $(i, x) (1 \leq i \leq i + 2x - 1 \leq n)$ ，把 $[i, i + x - 1]$ 涂成红色，把 $[i + x, i + 2x - 1]$ 涂成蓝色。

可以进行任意多次操作，但要满足任意两个操作选择的区间 $([i, i + 2x - 1])$ 是不交的。

接下来给出了一个长度为 n 的由 R, B, X 组成的字符串。

问有多少种把 X 替换成 R 或 B 或 W 的方式使得该字符串可以从全白的初始状态操作得到。

(R 代表红色，B 代表蓝色，W 代表白色)。

需要注意，数轴上的一些位置是可以不进行操作保持白色的。

对一个模数取模。

$1 \leq n \leq 5 \times 10^5$ 。

对于这种问题，一个想法就是直接考虑前缀方案数，然后不断的拼一个区间上去。

所以考虑设 f_i 表示考虑了 $[1, i]$ 并且 i 被选中的方案数。

不过因为这题还有可能不选，于是再设一个 g_i 表示让 g_{i+1} 开头的方案数。

对于 g 的转移，就考虑这一位到底有没有被选： $g_i = f_i + [s_i = \text{X}]g_{i-1}$ 。

对于 f 的转移，就考虑前面开头在哪： $f_i = \sum_{j=1}^i \text{check}(j, i)g_{j-1}$ 。

那么瓶颈在于这个 f 的转移，继续分析发现主要是这个 $\text{check}(l, r)$ 的问题。

于是考虑分析一下这个 $\text{check}(l, r)$ 在什么时候为 1：

- $(r - l + 1) \bmod 2 = 0$ 。
- 令 $mid = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$ ，则 $[l, mid]$ 能被染为 R, $(mid, r]$ 能被染为 B。
但是这样不是很好判断，考虑反面： $[l, mid]$ 不存在 B, $(mid, r]$ 不存在 R。

于是发现对于一个 l ， l 后面的第一个 B 就限制了其对应的 mid ，就限制了对应的 r 的区间。

且对于一个 r ， r 前面的第一个 R 就限制了其对应的 mid ，就限制了对应的 l 的区间。

于是可以类似扫描线的维护这个贡献。

对于第一个条件，只需要分奇偶维护就行了。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

值得一提的是这题这个区间的限制很好看，所以是可以做到线性的。

给定两个长度为 n, m 的由 $+, -, ?$ 组成的字符串 $s_{1 \sim n}, t_{1 \sim m}$ 。

对于两个长度为 n, m 的由 $+, -$ 组成的字符串 a, b , 有如下定义：

- 定义 $i = 0, j = 0, s = 0$, “移动 i ”操作需要满足 $i < n$, 进行该操作后 $i \leftarrow i + 1$, 若 $a_i = +$, $s \leftarrow s + 1$, 否则 $s \leftarrow s - 1$, “移动 j ”操作则是在 b 上做相同的处理。
- 若 $i = n, j = m$, 该过程停止, 否则有：
 - 若 $s > 0$, 则会在满足条件的“移动 i ”和“移动 j ”的操作中随机一个进行。
 - 若 $s = 0$, 则会在满足条件的“移动 i ”和“移动 j ”且满足进行该操作后 $s = 1$ 的操作中随机一个进行, 否则定义 (i, j) 是不通的。

若对于 (a, b) , 不管怎样随机选择操作进行, 都不会到达不通的状态, 则称 (a, b) 是合法的。

现在询问由多少种把 s, t 中的 $?$ 替换成 $+$ 或 $-$ 后得到的新串 s', t' 满足 (s', t') 是合法的。

对一个模数取模。

$1 \leq n, m \leq 5000$ 。

考虑刻画一下这个移动的过程。

观察一下, 发现不能走当且仅当 $s = 0$ 且走的是 -1 。

于是会发现如果走过去 s 仍然能 ≥ 0 那么就是能走的。

同时会发现走到 (i, j) 时的 s 是确定的, 即为 $S_i + T_j$ (前缀和)。

于是考虑一个二维平面, (i, j) 能走当且仅当 $S_i + T_j \geq 0$ 。

那么条件就是不存在一个能从 $(0, 0)$ 走到且不为 (n, m) 且两个方向都不能走的点。

经过一顿调整证明, 这个就等价于：

给 s 在后面加一个哨兵 -1 , t 也一样。不存在 $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, (i, j) \neq (n, m)$ 使得 $S_i + T_j < 0$ 且 $s_{i+1} = t_{j+1} = -1$ 。

于是考虑容斥不合法的情况。

那么为了不合法, 一定会贪心的选择 $\min S_i, \min T_j (s_{i+1} = -1, t_{j+1} = -1)$ 。

于是考虑 dp, 就需要在 dp 过程中维护这个最小值了。

于是一个 dp 想法就是 $f_{i, sum, min}$ 表示考虑到 $[1, i]$, 当前前缀和为 sum , 最小值为 min 的方案数。

不过这样子是 $\mathcal{O}(n^3)$ 的。

考虑优化一下。

考虑转移的时候钦定的 $+1, -1$ 影响的区间是一个后缀, 这也是要同时维护 sum, min 的原因。

但是考虑倒着 dp, 直接维护 $f_{i, min}$ 表示考虑了 $[i, n]$, 最小值为 min 的方案数。

此时考虑转移钦定的 $+1, -1$ 影响的就是这一个后缀, 就可以直接平移维护了。

同时需要注意的是还需要容斥一种情况：

$\min S_i$ 只在 $i = n$ 时取到, $\min T_j$ 只在 $j = m$ 时取到, 且 $S_n + T_j = 0$ 。

这部分跟上面的 dp 是类似的, 只需要考虑转移时的一些条件就行了。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

小 X 共有 n 天的假期，在第 i 天将会骑行 s_i 分钟，每分钟的骑行费用为 c 元。

为了节约开支，小 X 打算购买一些骑行卡。

现在有 m 种骑行卡可以购买，其中第 i 种骑行卡的具体信息如下：

- 售价 w_i ：每张卡的价格为 w_i 元；
- 有效期 d_i ：从购买当天算起，连续 d_i 天内有效；
- 免费时间 t_i ：在有效期内，每天的前 t_i 分钟骑行是免费的。

小 X 可以多次购买任意一种骑行卡，并且可以在同一时间持有多张有效的骑行卡。如果某天有多张骑行卡同时有效，那么当天可以享受的免费骑行时间为这些卡中 t_i 的最大值。对于超出免费时间的部分，仍然按照每分钟 c 元计算。

小 X 想知道在假期中骑行的最小总支出是多少。

$1 \leq n \leq 150, 1 \leq m, c \leq 10^4, 1 \leq s_i \leq 150$ 。

注意这个取 t_i 的最大值，于是这启发取根据这个 t_i 的值域考虑。

一个想法可能是记 $f_{i,l,r}$ 表示只使用 $t_j \leq i$ 的卡片，并且钦定已经取到了 $[l, r]$ 的最小花费的代价。

但是做一下会发现假了，因为可能存在一个 t_j 大一点 d_j 小一点的区间被一个 t_j 小一点 d_j 大一点的区间包围，此时这个贡献就计算不了了。

于是会发现只能从高到低的来 dp，也类似于是是一个笛卡尔树逐层处理。

因为 t_i 大一点的一定能替换 t_i 小一点的，于是只保留 t_i 大一点的能产生正确的贡献的一定是一个区间的形式。

于是可以设计 $f_{i,l,r}$ 表示只使用 $t_j \geq i$ 的卡片，并且钦定已经取到了 $[l, r]$ 的最小花费的代价。

接下来就考虑扩展到 $i - 1$ ，即去选取 $t_j = i - 1$ 的卡片。

一个错误的转移方式就是直接拆分成许多个由 $t_j \geq i$ 和 $t_j = i - 1$ 的卡片所覆盖的区间独立计算贡献。

问题还是和一开始一样，有可能这个 d_j 比较大，覆盖的比较长，单独计算贡献就算多了。

于是考虑在此时引入辅助 dp： $g_{l,r}$ 表示强制钦定 $[l, r]$ 一定被 $t_j = i - 1$ 的卡片填满了的最小代价。

那么转移就可以考虑分讨：

- r 或许没有被覆盖过，那确实就是覆盖的最大值为 $i - 1$ 。
- 存在 k 使得 $[k, r]$ 其实也被 $t_j \geq i$ 覆盖了，那么可以枚举这个 k ，根据 $g_{l,k}$ 和 $f_{i,k+1,r}$ 来转移。

最后还需要让 $g_{l,r}$ 加上填上 $r - l + 1$ 这个长度所需要的代价，可以背包。

那么此时就可以考虑把区间拆为被 $t = i - 1$ 填了的区间和没有被 $t = i - 1$ 填了的区间，即 g 和 f_i ，对这个再做合并得到的 f_{i-1} 就对了。

时间复杂度 $\mathcal{O}(nm + n^3 \max t)$ 。

给定两个字符串 S, T 以及长度为 $|S|$ 的数组 c_i , 表示删去位置 i 的代价。

对于每个字符, 你可以删去这个字符在 S 开头的若干个位置和结尾的若干个位置。

求最小花费使得 $S = T$ 或者报告无解。

$|s| \leq 2 \times 10^5, |\Sigma| = 26$ 。

对于每种字符最终只会保留一段区间。考虑把 T 中每个字符对应的区间拿出来, 这对应到 S 上区间的相对顺序是不变的。

例如 $T = bbabca$, 用 $L_b, L_a, R_b, L_c, R_c, R_a$ 来描述对应区间的关系。把 T 按照区间端点划分成若干部分: $|bb|ab|c|a|$ 。这个划分对于 S 是等价的, 相当于要把 S 划分成若干部分, 每个部分只保留字符集内部的所有字符, 而且满足和 T 对应部分相同。

设 $dp_{i,j}$ 表示前 i 个数分成 j 段的最小代价。 k 能够转移, 当且仅当 $s[k+1, i]$ 在只保留若干字符之后恰好等于 $T[l_j, r_j]$ 。

考虑优化, 首先我们对于 S 只保留当前需要的字符集合 C 得到 S' , 然后用 S' 和 $T[l, r]$ 做一个匹配, 对于每个匹配的位置, 对应到 DP 上的转移形如一段区间的状态到另一段区间, 而且花费为 $s_r - s_{l-1} + c$, 其中 c 是一个常数, 贡献独立, 随便预处理一下就能做到单次 $\mathcal{O}(n)$ 。

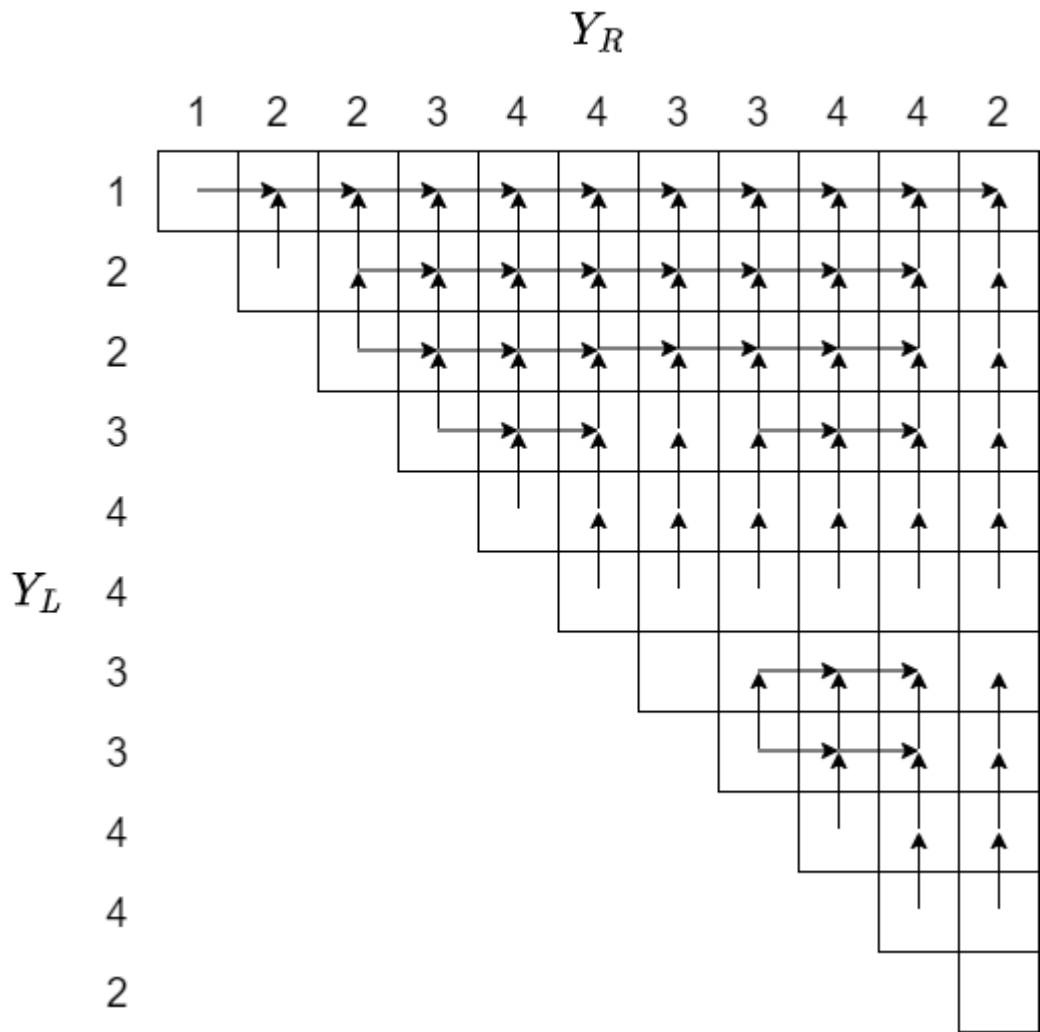
最多只会有 $\mathcal{O}(|\Sigma|)$ 个段, 故总的复杂度为 $\mathcal{O}(n|\Sigma|)$ 。

对于一个十进制 X ，对它进行如下操作：
有另一个十进制 Y ，初始为空，从高到低对于每个 X_i ，把它放到 Y 开头或结尾。
记 $f(X)$ 为 X 能操作出的最小的 Y 。
现给定 Y ，求有多少个 X 满足 $f(X) = Y$ 。
对一个模数取模。
 $1 \leq Y < 10^{200000}$ 。

考虑对于一个 X ， $f(X)$ 的性质。容易发现，对于 X 中的前缀最小值，我们把它放到开头，否则放到结尾。设 $dp_{l,r}$ 表示有多少个 X 的前缀可以 $Y_{l,r}$ ，那么可以得到如下转移：

- 若 $Y_{l-1} \leq Y_l$ ，则 $dp_{l,r} \rightarrow dp_{l-1,r}$ 。
- 若 $Y_{r+1} > Y_r$ ，则 $dp_{l,r} \rightarrow dp_{l,r+1}$ 。

画出转移图：



可以发现存在很多状态是没有意义的。

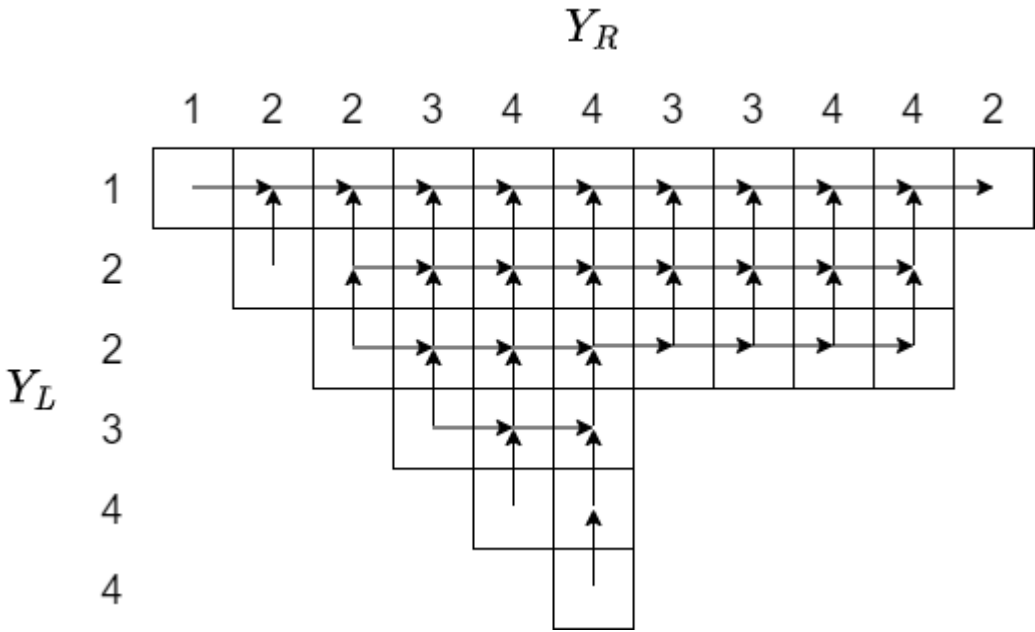
记 p 表示 Y 的最大不降前缀。

对于 l ，那些 $l > p$ 的 $dp_{l,r}$ 不可能转移到 $dp_{1,n}$ ，这些状态可以去掉。

那么剩下的对答案有贡献的 l 满足 Y_l 单调不降。

对于 r , 若 $r > p$, 且存在一个 $k \in (p, r]$ 满足 $Y_k \leq Y_l$, 那么 $dp_{l,r}$ 不可能被访问到, 也可以去掉。

删去无用点后得到缩减后的图：



考虑从大到小枚举 l 转移。注意到 $1 \leq Y_l \leq 9$, 考虑把 Y_l 相等的连续的 l 一起做, 不难发现相等的部分建出来的图左边是若干个 1, 右边就是一个矩形, 每个点都可以往上或者往右走。

对于矩形部分, 从 (l, r) 走到 $(l - x, r + y)$ 的方案就是组合数, 即 $dp[l][r] = \sum_{r'} dp[l - x][r'] \times \binom{x+r'-r}{x}$, 这是一个卷积形式, 套用 NTT 优化至 $\mathcal{O}(9n \log n)$ 。

给定长为 n 的数组 a 。

m 次询问将前缀 $[1, x_i]$ 划分为 k_i 个区间，每个区间颜色数之和的最大值。

$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 10^6$ 。

设 $dp_{i,k}$ 表示 $[1, i]$ 中划分了 k 个区间的最大美观度。

首先这个美观度 f 满足四边形不等式，因此 $dp_{i,k}$ 关于 k 是凸的。

由于 $dp_{i,k} \leq i$ ，这个凸函数实际上还比较特殊：

设 $d_k = dp_{i,k} - dp_{i,k-1}$ ，那么 $\sum_{k=1}^i d_k = dp_{i,i} \leq i$ ， d_k 一共只会有 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 种值，也就是说这个凸包只有 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 段。

具体而言，这样求出这 n 个凸包：

- 对于 $k \leq \sqrt{n}$ 的部分，直接 dp 出所有 $dp_{i,k}$ 。
- 对于 $k > \sqrt{n}$ 的部分，凸包的斜率 $x < \sqrt{n}$ ，那么枚举这个斜率 x ，用 wqs 二分的办法（用 $g(l, r) = f(l, r) - x$ 做一遍无限制的区间划分问题得到 $\max(dp_{i,k} - kx)$ ）得到凸包上这种斜率对应的端点。

那么现在的问题是进行这 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 次 dp。用线段树是单次 $\mathcal{O}(n \log n)$ 的，无法接受。

考虑 dp 时要干什么：

1. 将 $last_{a_i}$ 到 i 之间的值加上 1。
2. 加入 i 的值。

对于 $j < i$ ，如果 $v_j < v_i$ ，那么 j 就没用了。因此我们可以用一个单调递减的单调栈维护有用的位置。

这个单调栈在 1 操作时需要从中间 pop，因此要用链表。

1 操作时需要在栈里面 lower_bound，用一个并查集维护。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\sqrt{n}\alpha(n))$ ，空间复杂度为 $\mathcal{O}(n + m)$ 。

两人博弈。

初始给定一个数组 a ，值域为 $[0, m]$ ，元素 i 出现了 f_i 次。

A 先手，每次可以选 a 中的某个元素加入集合 c 并删去。

B 后手，每次可以删去不超过 k 个元素。

求最优策略下 $\text{mex}(c)$ 的最大值。

$$m \leq 2 \times 10^5, 0 \leq f_i, k \leq 10^9.$$

二分答案。

问题转化为了有 x 堆石头，A 每次可以删去一整堆，B 每次可以删去不超过 k 个石子。求 B 能够删掉某一堆石子。

考虑贪心，感受这个选取的过程，注意到几个性质：

- A 每次一定会删去最小的那堆。
- B 获胜的条件是在某个时刻最小的那堆 $\leq k$ 。

这启发我们从小到大排序，但是直接贪心还是不好贪，因为发现对于 B 的策略，肯定对于那些被删去的堆尽量不去减，但是如果把后面的堆减得过小了又会被 A 删去。但是思考后一种情况，其实不可能发生，因为如果把后面的删的更小了，其实等价于删去前面的那一堆。所以 B 的策略就是在不影响相对顺序的情况下删数。

假设 B 最终赢了，即某一堆 $\leq k$ ，那么 B 显然不会去删比这堆大的堆。考虑直接枚举这一堆的位置 i ，那么是从 i 开始一直往前面减，直到相同之后就一起减。这可以 $O(m^2)$ 模拟，分析一下复杂度就是 $O(m^3 \log m)$ 。

考虑优化 check 部分。

思考 check 的过程，相当于不断地把 i 减小到和前面的堆相同大小。每轮下来 A 删开头，然后 B 操作 $[1, i]$ 的一段后缀。起初 A, B 的操作其实是独立的，所以我们可以加速这个过程，直到 A 删到了某个被 B 操作的点。

加速这个过程是简单的，可以直接二分。对于剩下的数，不难发现它们的极差一定 ≤ 1 。假设总和为 s ，个数为 len 。实际上知道了 s, len 就可以知道每一堆的大小。容易发现，A 操作其实等价于 $len \leftarrow len - 1, s \leftarrow s - \min_v$ ，B 操作等价于 $s \leftarrow s - K$ ，同时 $\min_v = \lfloor \frac{s}{len} \rfloor$ 。

直接设 dp_i 表示长度为 i 的最大的总和使得 Bob 赢：

$$dp_i - \lfloor \frac{dp_i}{i} \rfloor - k \leq dp_{i-1}$$

注意到可以把 $\lfloor \frac{dp_i}{i} \rfloor$ 等价成 $\frac{dp_i}{i}$ ，这只会多减去小数部分，不影响答案，于是有 $dp_i = \lfloor \frac{i(dp_{i-1} + k)}{i-1} \rfloor$ 。

继续优化，随着 i 的增加， p 肯定是单调的，所以省去了一个二分。

总的时间复杂度为 $O(m \log m)$ 。

计算满足以下条件的大小为 n 的图 G 的数量（可以有重边，不能有自环）：

- G 边双连通
- 删去 G 中任意一条边后，剩下的图不边双连通

$$1 \leq n \leq 50.$$

考虑一下删掉一条边会剩下什么东西：

这是一个边双，因此会有一条由若干个边双串起来的链（长度不小于 2），这条边的端点连接链的两端。

那么考虑能不能递归到这些边双内解决子问题。

对于连接链的边，它们的要求已经满足。

小边双内会有一个或两个点被从外部连接，对于小边双内的边，同样考虑将其断掉产生的链，那么要求就是"从外部被连接"的点不属于链上相邻两个边双。

这样我们会得到如下形式的子问题：

计算大小为 n ，关键点为 $1 \cdots k$ 的符合条件的边双连通图数，关键点可以从外部相互到达。

计算方式就是选取一条连接 1 的边，其产生的链要求关键点不能处于相邻边双，用背包计算链的数量。

还有一个问题是任选 1 的出边会导致图被计算 \deg_1 次，因此要记录 \deg_1 。图中可能会出现二重边，二重边只会被计算 1 次而非 2 次，需要单独补回来。

具体地，设 $F_{n,k}$ 表示大小为 n ，关键点 $1 \cdots k$ 的图数， $f_{n,k,d}$ 表示 $\deg_1 = d$ 时图的数量， $g_{n,k,0/1}$ 表示当前的链上有 n 个点， k 个关键点，最后一个边双不含/含关键点。

初值 $F_{1,1} = f_{1,1,0} = g_{0,0,1} = 1$ ，答案 $F_{n,1}$ 。

转移：

- 对于 $f_{n,k,d}$ ：

枚举 1 所在边双大小 n_0 ，关键点数 k_0 ，并设 $X = g_{n-n_0,k-k_0,0} \times \binom{n-k}{n_0-k_0} \binom{k-1}{k_0-1}$ ，有这些贡献：

- 在 1 上连了两条链上的边： $X \times f_{n_0,k_0,d-2}$ 。
- 在 1 上连了一条， $2 \cdots k_0$ 上连另一条： $X \times f_{n_0,k_0,d-1} \times (k_0 - 1)$ 。
- 在 1 上连了一条， $k_0 + 1 \cdots n_0$ 上连另一条： $X \times f_{n_0,k_0+1,d-1} \times (n_0 - k_0)$ 。
- 补上二重边的贡献（此时 $k_0 = k$ ）： $F_{n-n_0,1} \times f_{n_0,k,d-1} \times \binom{n-k}{n-n_0} \times (n - n_0)$ 。

- 对于 $g_{n,k,0}$ ：

枚举当前边双大小 n_0 ，设 $X = g_{n-n_0,k,0/1} \times \binom{n-k}{n_0}$ ，有这些贡献：

- 在同一个点上连两条： $X \times F_{n_0,1} \times n_0$ 。
- 在不同点上连： $X \times F_{n_0,2} \times n_0(n_0 - 1)$ 。

- 对于 $g_{n,k,1}$ ：

枚举 n_0, k_0 ， $X = g_{n-n_0,k-k_0,0} \times \binom{n-k}{n_0-k_0} \binom{k}{k_0}$ ，有这些贡献：

- 在 $1 \cdots k_0$ 上连 1/2 条： $X \times F_{n_0,k_0} \times k_0^2$ 。
- 在 $1 \cdots k_0$ 上连一条， $k_0 + 1 \cdots n_0$ 上连另一条： $X \times F_{n_0,k_0+1} \times 2k_0(n_0 - k_0)$ 。

◦ 在 $k_0 + 1 \cdots n_0$ 上连 $1/2$ 条:

$$X \times F_{n_0, k_0+1} \times (n_0 - k_0) + X \times F_{n_0, k_0+2} \times (n_0 - k_0)(n_0 - k_0 - 1).$$