

DP 计数

范斯喆

浙江省诸暨市海亮高级中学

2025 年 4 月 22 日

[省选联考 2025] 封印

给定一个序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 每个元素都是 1 到 m 之间的正整数。

你可以对序列进行任意次修改 (可以 0 次)。每次选择序列的某个**严格前缀最大值** a_x 。若 $a_x > 1$, 则将 $a_x - 1$ 插入序列 a 的最后。然后把 a_1 到 a_x 全部删除。

求你可能得到多少种本质不同的非空序列。

$1 \leq n, m \leq 2500$ 。

[省选联考 2023] 染色数组

考虑一个正整数序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 值域为 $[1, m]$ 。
你要将每个数染成红色或绿色, 满足红色的数递增, 绿色的数递减。如果一个序列存在**至少两种**染色方案, 则称它是**完美的**。
定义一种给染色方案打分的方式。对于每个 $i < j$:

- 如果 a_j 被染成红色, 且 $a_j < a_i$, 则得 $m - a_j + 1$ 分;
- 如果 a_j 被染成绿色, 且 $a_j > a_i$, 则得 a_j 分;
- 否则不得分。

定义一个完美序列的得分为它的染色方案的得分最大值。
给定序列的前 t 个数, 你需要回答:

- 1 有多少种确定后 $n - t$ 个数的方案, 使得形成一个完美数组?
- 2 所有可能的完美数组的得分之和是多少?

$1 \leq n \leq 50, 1 \leq m \leq 200$ 。

[IOI 2020] 装饼干

有 k 种物品，编号为 $0, 1, \dots, k-1$ 。第 i 种物品有 a_i 块，价值为 2^i 。

你需要将饼干装袋。给定 x ，求有多少个 y ，使得可以凑出至少 x 袋价值总和为 y 的饼干。

$1 \leq k \leq 60$ 。多组数据，数据组数不超过 1000。

CF1603E A Perfect Problem

称一个序列为**好的**当且仅当它的 $\max \times \min \geq \text{sum}$ 。

给定 n ，求长度为 n 、每个数在 $[1, n+1]$ 范围内，且每个**非空子序列**都是好序列的序列个数。

$1 \leq n \leq 200$ 。

[PA 2021] Od deski do deski

称一个序列为**好的**当且仅当通过“删除一个长度至少为 2 且两端相等的区间”可以在若干次操作后被删空。

给定 n, m , 求长度为 n , 每个元素在 $[1, m]$ 之间的好序列个数。

$1 \leq n \leq 3000, 1 \leq m \leq 10^9$ 。

[AGC022E] Median Replace

有一个长度为 n 的 01 串 s , 其中有若干个位置还未确定。

一次操作可以将 3 个连续的字符变为它们的中位数。

求有多少确定整个串的方案, 使得进行 $\frac{n-1}{2}$ 次操作后可以剩下 1。

$1 \leq n \leq 3 \times 10^5$ 。保证 n 是奇数。

Median Operations

给定一个长度为 n 的排列。

一次操作可以将 3 个连续的数变为它们的中位数。

求对于每个 $k = 1, 2, \dots, n$, 是否可以通过 $\frac{n-1}{2}$ 次操作, 让序列剩下的元素变为 k 。

$1 \leq n \leq 2 \times 10^5$ 。保证 n 是奇数。

[NOI2023] 桂花树

给定一棵 n 个节点的树 T ，保证 T 的非根节点的父亲编号小于自己。

给定整数 k ，称一棵 $n + m$ 个节点的树 T' 是**好的**，当且仅当它满足以下所有条件：

- 1 对于所有满足 $1 \leq i, j \leq n$ 的 (i, j) ，在树 T 和 T' 上， i 和 j 的最近公共祖先相同。
- 2 对于所有满足 $1 \leq i, j \leq n + m$ 的 (i, j) ，在树 T' 上， i 和 j 的最近公共祖先的编号不超过 $\max(i, j) + k$ 。

求有多少棵 T' 是好的。

$1 \leq n \leq 3 \times 10^4$, $1 \leq m \leq 3 \times 10^3$, $0 \leq k \leq 10$ 。

[AGC064D] Red and Blue Chips

有 n 个字符串，初始每个字符串都只有一个字符 R 或 B。保证第 n 个是 B。

对于每个 $i = 1, 2, \dots, n-1$ ，你需要选择一个整数 j 满足 $i < j \leq n$ ，且第 j 个字符串的最后一个字符是 B，然后把第 i 个字符串拼在第 j 个的前面。

问最后能得到多少种本质不同的字符串。

$2 \leq n \leq 300$ 。

[AGC069D] Tree and Intervals

给定 n 。

对于所有 n 个节点的树，定义一个长度为 $n - 1$ 的序列 x 。初始时 x 全为 0。对于树的每条边 (u, v) ，将所有满足 $\min(u, v) \leq i < \max(u, v)$ 的 x_i 加上一。

求本质不同的 x 序列的数量。

$2 \leq n \leq 500$ 。

CF924F Minimal Subset Difference

定义 $f(n)$ 表示将 n 的所有数位之间插入加号或减号，最终得到的值的绝对值最小值。

T 组询问，每次给定 l, r, k ，求 $l \leq n \leq r$ 且 $f(n) \leq k$ 的 n 的个数。
 $1 \leq T \leq 5 \times 10^4$, $1 \leq l \leq r \leq 10^{18}$, $0 \leq k \leq 9$ 。

[USACO22FEB] Phone Numbers P

有一个九键手机。你想要打出一个目标序列，为了节省时间，你可以用以下三种手法：

- 1 按下某个键；
- 2 同时按下相邻的两个键；
- 3 同时按下组成一个正方形的四个键。

当你同时按下若干个键时，这些键的输入顺序是随机的。当然，你的输入方式必须可能打出目标序列。

给定你实际输入的序列 S ，求有多少种可能的目标序列。

$1 \leq |S| \leq 10^5$ 。

???

有一个九键手机。你想要打出一个目标序列，为了节省时间，你可以用以下三种手法：

- 1 按下某个键；
- 2 同时按下相邻的两个键；
- 3 同时按下组成一个正方形的四个键。

当你同时按下若干个键时，这些键的输入顺序是随机的。当然，你的输入方式必须可能打出目标序列。

给定两个包含 $0 \sim 9$ 和 $?$ 的序列 S_1, S_2 。求有多少种将把 $?$ 替换为数字的方式，使得有可能想输入 S_1 ，打出了 S_2 。

$1 \leq |S| \leq 10^5$ 。

CF1679F Formalism for Formalism

给定正整数 n ，以及 m 组无序数对 (u_i, v_i) 。

若一个数字的相邻两位数 (x, y) 在这些无序数对中出现过，则可以交换 x 和 y 。若一个数 A 可以通过若干次交换操作得到 B ，则称 A 和 B 是等价的。

求 $[0, 10^n - 1]$ 中等价类的数量。如果数字不足 n 位，则补前导零。

$1 \leq n \leq 5 \times 10^4$, $0 \leq m \leq 45$, $0 \leq u_i, v_i \leq 9$ 。

CF1740F Conditional Mix

给定一个长度为 n 的序列 a_1, a_2, \dots, a_n 。

有 n 个集合，一开始每个集合只有一个元素 a_i 。可以操作任意次，每次可以合并两个交集为空的集合。

设合并完之后每个集合的元素个数构成可重集 S ，求 S 的种类数。

$$1 \leq n \leq 2 \times 10^3。$$

[AGC008F] Black Radius

有一棵 n 个节点的树，一开始每个节点均为白色。其中有些点是好的，另一些点是不好的。

你要选择一个好的点 x ，然后选择一个自然数 d ，将所有与 x 距离不超过 d 的点都染成黑色。

问染色一次后，有多少种可能的状态。

$2 \leq n \leq 2 \times 10^5$ 。

[集训队互测 2022] Range Minimum Element

有一个长度为 n , 值域为 $[1, c]$ 的正整数序列 a 。
给定 m 个区间 $[l_i, r_i]$, 定义长度为 m 的序列 b 满足
 $b_i = \min_{j=l_i}^{r_i} a_j$ 。
求 a 任意的情况下, 有多少种可能的 b 。
 $1 \leq n \leq 100, 1 \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2}, 1 \leq c \leq 998244353$ 。

[AGC056B] Range Argmax

有一个长度为 n 的排列 a 。

给定 m 个区间 $[l_i, r_i]$ ，定义长度为 m 的序列 b ，满足 b_i 是 $a_{l_i}, a_{l_i+1}, \dots, a_{r_i}$ 中最大值对应的下标。

求 a 任意的情况下，有多少种可能的 b 。

$1 \leq n \leq 300, 1 \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2}$ 。

[NOIP2024] 树的遍历

给定一棵 n 个点的树。我们定义一种以边为基础的遍历方式。定义两条边相邻当且仅当它们有公共端点。初始时，所有边都未被标记。进行如下过程：

- 1 选择一条边 b 作为起始边，将它打上标记。
- 2 假设当前访问边为 e ，寻找任意一条与 e 相邻且未被标记的边 f ，将 f 作为新的访问边打上此标记。然后再次进入第 2 步。
- 3 如果与 e 相邻的边都被标记，如果 $e = b$ 则遍历结束，否则将 e 设为遍历 e 之前的上一条边，再次进入第 2 步。

显然，这样能够遍历所有边。我们构建一张新图，新图中的点与原图中的边——对应，且每次进行第 2 步时，在新图中将 e 和 f 对应的点连边。显然新图也是一棵树。

给定原树上的若干条边（称作关键边），求以这些边为起始边时，可能得出的本质不同的新树个数。

$1 \leq n \leq 10^5$ 。

[AGC035F] Two Histograms

有一个 $n \times m$ 的网格，一开始全为 0。

你需要在每行选一个前缀 +1，每列选一个前缀 +1。选择的前缀可能为空。

求可能得到多少种网格。

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5$ 。

[UNR #7] 反重：求熵

有 n 个整数变量 x_1, x_2, \dots, x_n , 值域为 $[0, T]$ 。

给定 m 条约束, 第 i 条约束形如 $x_{u_i} - x_{v_i} \leq c_i$ 。

求给变量赋值的合法方案数。

$2 \leq n \leq 8, 0 \leq m \leq 200, 0 \leq T \leq 10^{12}$ 。

[NOI2021] 机器人游戏

有 m 个机器人，每个机器人分别对一条纸带进行操作。每条纸带分为 n 个格子，每个格子有 3 种状态：填 0，填 1 或者空着。每个机器人有个操作序列 S_i 。机器人会被设定一个初始位置，然后依次按照 S_i 中的每个字符进行操作：

- 1 R 表示机器人向右走一格，如果右边是边界，机器人会爆炸；
- 2 0 表示如果机器人所在格子非空，则将该格子改为 0；
- 3 1 表示如果机器人所在格子非空，则将该格子改为 1；
- 4 * 表示如果机器人所在格子非空，则将该格子反转。

给定每个机器人对应的初始纸带状态 X_i ，以及操作完后的纸带状态 Y_i 。求一个位置 p ，使得所有机器人以纸带的第 p 个格子为起始位置时，可以在不爆炸的情况下执行完所有操作，且操作完后的纸带状态满足要求。

这太简单了，因此你要求有多少组 X_i, Y_i 使得这个问题有解。

$1 \leq n \leq 32, 1 \leq m \leq 1000, 1 \leq |S_i| \leq 100$ 。

[NOI2023] 深搜

给定一棵 n 个顶点的树 T ，以及 m 条两两不同的非树边。另外指定了恰好 k 个点是关键点。

求有多少种选择 m 条非树边的方案，使得将 T 和这些选择的边构成图 G 之后，存在某个关键点 x ，使得 T 是 G 的一棵以 x 为根的 dfs 树。

$1 \leq k \leq n \leq 5 \times 10^5$, $1 \leq m \leq 5 \times 10^5$ 。