

构造选讲

QOJ - 1817 AND Permutation

给定一个长度为 n 的数组 a 。

你需要将 a 数组重新排列得到一个数组 b ，使得对于每个 $i = 1 \sim n$ ，有 $a_i \& b_i = 0$ 。

这里 $\&$ 表示按位与。你需要输出任意一个合法的 b ，保证有解。

保证 $1 \leq n \leq 2^{18}$, $0 \leq a_i < 2^{60}$ 。保证 a 中所有数互不相同。

特别地，对于所有非负数 x ，若存在 i 使得 $a_i \& x = x$ ，那么保证存在 j 使得 $a_j = x$ 。

- Hint: Trie 树?

QOJ - 666 Bit Operations

给定 n 个限制 x_i, y_i ，构造一个 C++ 意义下的函数 $f(x)$ ，使得 $f(x_i) = y_i$ 。

你可以使用运算符 $\&|\wedge+-*$ ，括号，任意常数以及参数 x (x 和常数都是 `unsigned int` 类型)。

保证 $1 \leq n \leq 8$, $0 \leq x_i, y_i < 256$ ，给定的输入有解。

- Hint: $f(0) = 0, f(2) = 1$ 有解吗?

Gym - 102979D Designing a PCB

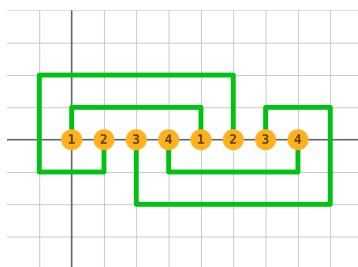
有 $2n$ 个点排列在数轴上，每个点有类型 $1 \sim n$ ，每种类型有恰两个点。

你要用线连接每种类型的两个点。不同类型的连线不能有交。线不能从两个相邻的点之间经过。

为了方便 check，你输出时需要保证连线的每个部分平行或垂直于坐标轴。如下图。

保证 $1 \leq n \leq 1000$ 。

- Hint: 不交有没有什么简单的充要条件?



QOJ - 6545 Connect the Dots

考虑数轴上的 n 个不同点，从左到右编号为 $1 \sim n$ 。

一共有 m 种颜色，点 i 的颜色为 a_i 。保证每种颜色至少有一个点。

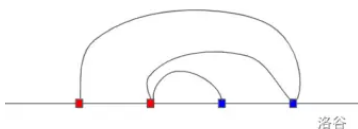
你连若干条无向边，每条边连接两个点，使得：

- 不能有重边。
- 一条边 (x, y) 需要满足 $a_x \neq a_y$ 。
- 需要存在一种方案，使得所有边只经过数轴上方，且两两在端点外不交。

求你最多可以连多少条边，并输出一种方案。

多测, 保证 $\sum n \leq 2 \times 10^5, 2 \leq m \leq n$ 。

- Hint: 能简单分析出的答案上界是什么?



QOJ 1844 Cactus

给定一张 n 个点 m 条边的仙人掌图, 有两种操作:

1. 选择一个奇数度数的点, 删除与其相邻的所有边。
2. 新建 n 个点, 编号为 $n+1 \sim 2n$ 。对于使用此操作时图中存在的每条边 (u, v) , 新建一条边 $(u+n, v+n)$ 。最后额外新建 n 条边, 第 i 条是 $(i, i+n)$ 。

其中第 2 种操作至多使用一次, 问最后得到的图上最少有多少边, 并构造方案。

保证 $1 \leq n, m \leq 3 \times 10^5$ 。

- Hint: 2 操作应该在什么时候用?

Gym - 100876H Mafia forever!

有 n 个人和 k 类货币。第 i 个人持有 j 类货币 $A_{i,j}$ 个。

给定 t , 你需要将这些人分为至少 $\left\lfloor \frac{n}{2^t} \right\rfloor - 2^k$ 组, 使得:

1. 每组恰好 2^t 个人
2. 对于每类货币, 每组的所有人拥有这类货币的数量之和是 2^t 的倍数。
3. 可以有人不在任何组中。

保证 $1 \leq n \leq 10^4, 1 \leq k, t \leq 10$ 。

- Hint: $k=1$ 怎么做?

QOJ 6550 Elimination Race

有一场 n 个人参加, $n-1$ 轮的淘汰赛。

第 i 轮中每个人的发挥情况是一个固定的排列 P_i , 这轮的排名是从 P_i 中删去所有已经被淘汰的选手得到的序列。每轮过后, 排名最后一名的选手将被淘汰。最后未被淘汰的选手获胜。

你现在可以改变这 $n-1$ 轮的顺序, 问每个选手最后能否获胜, 若能, 给出一种方案。

保证 $1 \leq n \leq 500$ 。(卡常题, 先想想 $O(n^4)$)。

- Hint: 选手 x 能获胜的必要条件是什么?

QOJ 6415 Classical Minimization Problem

在平面上给你 $2n$ 个不同的点。点 i 的坐标为 (x_i, y_i) , 没有两个坐标相同的点。

如果 $x_i = x_j$ 或 $y_i = y_j$, 则点 i 和 j 是一对友好点。

你需要将 $2n$ 个点分成 n 对点。每个点必须属于恰好一对。

这 n 对点中友好对的数量需要最少。输出一种方案。

多测, 保证 $\sum n \leq 10^5, 0 \leq |x_i|, |y_i| \leq 10^9$ 。

- Hint: 友好对数的下界是多少?
- Hint: 要不参考一下一维问题?

CodeChef-PERMUTINVS Permutating Inversions

对于排列 p, q , 记 $p \circ q$ 为排列 $(p_{q_1}, p_{q_2}, p_{q_3} \dots p_{q_n})$ 。

给定长度为 n 的排列 a, b 。构造排列 c 使得 $a \circ c$ 有恰好 A 个逆序对, $b \circ c$ 有恰好 B 个逆序对。

保证 $1 \leq n \leq 2000$ 。

- Hint: 有解的必要条件是什么?
- Hint: 要不参考一下一维问题?