

# 数学

黄建恒

广东实验中学

2025 年 4 月 27 日

定义  $F(a, b) = \sum_{i=0}^b \binom{b}{i} \binom{n-i}{a}$

对所有  $1 \leq a, b \leq m$  求出  $F(a, b)$   
 $1 \leq m \leq 5000, m \leq n \leq 10^9$

# 一道模拟赛题

给定  $n, m$  和长为  $m$  的非负整数序列  $a_i$ ，求

$$\sum_{x_i \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_m = n} \prod_{i=1}^m x_i^{a_i}$$

答案对 998244353 取模。

$m, \sum a_i \leq 10^5, n \leq 10^7$

有两种对于数组的变换：

- $F(a, k)$  为将数组  $a$  的每一个数替换成  $k$  个该数后取前  $|a|$  个数的数组。

- $G(a, x, y)$  为将数组  $a$  中每一个  $x$  替换成  $y$ ，每一个  $y$  替换成  $x$ 。

现要求构造出  $m$  个数组，其中每个数组都有  $n$  个数，每个数为不超过  $k$  的正整数。同时对于所有含  $n$  个数且每个数为不超过  $k$  的正整数的数组，你要满足在这  $m$  个数组中至少存在一个数组经过任意多次上述两个函数的变换后能得到它。

你只需要求出所有构造方案中最小的  $m$  是多少，答案对 998244353 取模。

$$n, k \leq 2 \times 10^5$$

在一个背包里，有  $n + m$  件物品，其中有  $n$  件物品是小 X 的， $m$  件物品属于小 Y。

对于  $n$  件属于小 X 的物品，体积分别为  $a_1, a_2, \dots, a_n$

对于  $m$  件属于小 Y 的物品，体积分别为  $b_1, b_2, \dots, b_m$

每次小 X 会根据体积等概率从中拿出一件物品。具体地，假设当前还剩  $k$  件物品，体积分别为  $c_1, c_2, \dots, c_k$ ，则选择第  $i$  件物品的概率为  $\frac{c_i}{\sum c_i}$

现在，小 X 想找回属于他的所有物品，并想知道期望操作次数，对 998244353 取模。

$1 \leq n, m \leq 100, \sum a_i + \sum b_i < 998244353, 1 \leq a_i \leq 100, b_i \geq 1$ 。

加强版：  $1 \leq n, m, a_i \leq 500$ 。

给定  $n$  和一个长度为  $2^n$  的数组  $A$  (从 0 开始标号).

有一个初始为 0 的变量  $x$ . 不断操作, 每次操作以  $\frac{A_i}{\sum_{j=0}^{2^n-1} A_j}$  的概率将  $x$

变成  $x \oplus i$ .

对于所有  $i \in [0, 2^n)$ , 求出  $x$  第一次变成  $i$  的期望操作次数.

$n \leq 18, 1 \leq A_i \leq 1000$ .

给出一个  $3 \times 3$  的运算表  $op_0$  与两个下标  $[0, 3^n - 1]$  的数组  $A, B$ , 定义  $a \text{ op } b$  表示  $a$  和  $b$  在三进制下每一位按  $op_0$  进行二元运算后得到的结果。现在要求出数组  $C$ , 满足:

$$C_k = \sum_{i \text{ op } j = k} A_i B_j$$

保证  $op_0$  中的每个数在每个子任务的限制下中随机生成, 无限制则为  $\{0, 1, 2\}$ ,  $n \leq 11$ 。

子任务 1:  $op_{i,j} = i + j \bmod 3$ 。

子任务 2:  $op_{i,j} = \text{mex}(i, j)$ 。

子任务 7:  $n = 11$ 。有 10 组测试数据, 其他子任务数据组数为 5。

给定整数  $n, C$ ，你要计算一个  $n \times n$  的大矩阵的行列式  $A$ ，其中行列的下标都是  $1 \sim n$ 。

当  $i = j$  时， $A_{i,j} = 1$ ，

当  $i \nmid j$  时， $A_{i,j} = C$ ，

都不满足则  $A_{i,j} = 0$ 。

求  $A$  的行列式对 998244353 取模。

$1 \leq n \leq 10^9$ 。



给你一棵  $n$  个点的树，点有点权  $v_i$ ，给一个长为  $k$  的序列  $A$ ，令矩阵  $B_{i,j} = v_{LCA(A_i, A_j)}$ ，计算  $B$  的行列式。

$n, k \leq 5 \times 10^5$ 。

部分分： $A$  是  $1 \sim n$  的排列。

<https://atcoder.jp/contests/jsc2023-final>

对于所有满足  $A_1 = K, \sum A_i = M$  的长为  $N$  的非负整数序列  $A$ 。求  $\sum_{i=1}^{N-1} \binom{A_i + A_{i+1}}{A_i}$  的和对 998244353。

$2 \leq n \leq 2.5 \times 10^5, 0 \leq k \leq m \leq 2.5 \times 10^5$ 。

有一个长度为无限的字符串  $S$ ，刚开始时，每个字符都是英文横杠：-

现在对它进行更改，操作如下：

随机选字符串其中的一个左右两个字符不是  $X$  的字符 -，将其修改为  $X$ ，直到没有可以修改的字符。

操作完后，给定整数  $N$  以及长度为  $N$  的由 - 和  $X$  组成字符串  $s$ ，问在  $S$  中随机取一段长度为  $N$  的字符串，这个串与  $s$  相同的概率是多少，可以证明，答案一定为  $p + \frac{q}{e} + \frac{r}{e^2}$  的形式，其中  $e \approx 2.718$  为自然常数。

你需要输出  $p, q, r$  对  $10^9 + 7$  取模的结果。

$1 \leq N \leq 1000$ 。

样例：对于  $s = "X"$ ，答案为  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$ 。

# Bonus 小技巧?

付公主的背包

集合划分容斥（例 P7275）

<https://www.cnblogs.com/xiaoziyao/p/17533907.html>

~~二元GF 对角线~~

祝大家NOI顺利!