# Algoritmo genético para selección de predictores

# Joaquín Amat Rodrigo j.amatrodrigo@gmail.com

## Noviembre, 2018

# Tabla de contenidos

Introducción	2
Algoritmo	2
Población inicial	3
Fitness de un individuo	5
Fitness de todos los individuos de una población	8
Seleccionar individuos	11
Cruzar dos individuos (crossover, recombinación)	13
Mutar individuo	15
Algoritmo completo	16
Ejemplo regresión	21
Simulación de datos	21
Selección de predictores	23
Mejor individuo	29
Evolución del error	30
Frecuencia selección variables	31
Ejemplo clasificación	34
Datos	34
Selección de predictores	34
Mejor individuo	35
Evolución del error	35
Frecuencia selección variables	36
Paralelización	38
Versión paralelizada	38
Comparación	44
Bibliografía	46

Versión PDF: Github

## Introducción

Los algoritmos genéticos son métodos de optimización heurística que, entre otras aplicaciones, pueden emplearse para encontrar la combinación de variables que consigue maximizar la capacidad predictiva de un modelo. Su funcionamiento está inspirado en la teoría evolutiva de selección natural propuesta por Darwin y Alfred Russel: los individuos de una población se reproducen generando nuevos descendientes, cuyas características, son combinación de las características de los progenitores (más ciertas mutaciones). De todos ellos, únicamente los mejores individuos sobreviven y pueden reproducirse de nuevo, transmitiendo así sus características a las siguientes generaciones.

Los algoritmos genéticos son solo una de las muchas estrategias que existen para seleccionar los predictores más relevantes, y no tiene por qué ser la más adecuada en todos los escenarios. Por ejemplo, existen estrategias iterativas Stepwise selection, modelos como Random Forest, Boosting y Lasso capaces de excluir automáticamente predictores, y técnicas de reducción de dimensionalidad como PCA y t-SNE.

La implementación de algoritmo genético que se muestra en este documento pretende ser lo más explicativa posible aunque para ello no sea la más eficiente.

# Algoritmo

Aunque existen variaciones, algunas de las cuales se describen a lo largo de este documento, en términos generales, la estructura de un algoritmo genético para la selección de predictores sigue los siguientes pasos:

- 1. Crear una población inicial aleatoria de *P* individuos. En este caso, cada individuo representa una combinación de predictores.
- 2. Calcular la fortaleza (fitness) de cada individuo de la población.
- 3. Crear una nueva población vacía y repetir los siguientes pasos hasta que se hayan creado *P* nuevos individuos.
  - 3.1 Seleccionar dos individuos de la población existente, donde la probabilidad de selección es proporcional al *fitness* de los individuos.

- 3.2 Cruzar los dos individuos seleccionados para generar un nuevo descendiente (*crossover*).
- 3.3 Aplicar un proceso de mutación aleatorio sobre el nuevo individuo.
- 3.4 Añadir el nuevo individuo a la nueva población.
- 4. Reemplazar la antigua población por la nueva.
- 5. Si no se cumple un criterio de parada, volver al paso 2.

En los siguientes apartados se describe cada una de las etapas del proceso para, finalmente, combinarlas todas en una única función.

### Población inicial

En el contexto de algoritmos genéticos, el término individuo hace referencia a cada una de las posibles soluciones del problema que se quiere optimizar. En el caso particular de la selección de mejores predictores, cada individuo representa una posible combinación de variables. Para representar dichas combinaciones, se pueden emplear vectores binarios, cuya longitud es igual al número total de predictores disponibles, y cada posición toma el valor TRUE/FALSE dependiendo de si el predictor que ocupa esa posición se incluye o excluye. También es común encontrar la representación en términos o/1.

Por ejemplo, supóngase que las variables disponibles son:  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$  y  $X_5$ . El individuo  $TRUE, FALSE, TRUE, FALSE, o su equivalente codificación 1, 0, 1, 1, 0 representa la selección de los predictores <math>X_1$ ,  $X_3$ , y  $X_4$ .

El primer paso del algoritmo genético para la selección de predictores consiste en crear una población inicial aleatoria de individuos. La siguiente función crea una matriz binaria en la que, cada fila, está formada una combinación aleatoria de valores TRUE y FALSE. Además, el número máximo y mínimo de TRUEs por fila puede estar acotado. Esta acotación resulta útil cuando se quiere limitar, en cierta medida, el número de predictores que pueden incluir los individuos. Es en cierta medida porque, debido a los cruces y mutaciones a lo largo de las generaciones, se pueden crear individuos que excedan los límites iniciales.

```
crear poblacion <- function(n poblacion, n variables, n max = NULL, n min = NULL,
                            verbose = TRUE){
 # Argumentos:
 # n poblacion: número total de individuos de la población.
 # n variables: longitud de los individuos.
               número máximo de TRUEs que puede contener un individuo.
 # n max:
 # n min:
                 número mínimo de TRUEs que puede contener un individuo.
 # verbose:
                 mostrar información del proceso por pantalla.
 # Retorno: una matriz de tamaño n poblacion x n variables que representa
            una población.
 # Si no se especifica n_max, el número máximo de predictores (TRUEs) que puede
 # contener un individuo es iqual al número total de variables disponibles.
 if(is.null(n_max)){
   n max <- n_variables</pre>
 # Si no se especifica n_min, el número mínimo de predictores (TRUEs) que puede
 # contener un individuo es 1.
 if(is.null(n min)){
   n_min <- 1
 # Matriz donde almacenar los individuos generados.
 poblacion <- matrix(data = NA, nrow = n_poblacion, ncol = n_variables)</pre>
 # Bucle para crear cada individuo.
 for(i in 1:n poblacion){
   # Se selecciona (con iqual probabilidad) el número de valores = TRUE que puede
   # tener el individuo, dentro del rango acotado por n_min y n_max.
   n true <- sample(x = n min:n max, size = 1)</pre>
   # Se crea un vector con todo FALSE que representa el individuo.
   individuo <- rep(FALSE, times = n variables)</pre>
   # Se sustituyen (n true) posiciones aleatorias por valores TRUE.
   individuo[sample(x = 1:n variables, size = n true)] <- TRUE</pre>
   # Se añade el nuevo individuo a la población.
   poblacion[i,] <- individuo</pre>
 if(verbose){
   print("Población inicial creada")
   print(paste("Número de individuos =", n_poblacion))
   print(paste("Número de predictores mínimo por individuo =", n min))
   print(paste("Número de predictores máximo por individuo =", n max))
   cat("\n")
 }
 return(poblacion)
```

**Ejemplo**: se crea una población de 10 individuos de longitud 8, con un número de valores TRUE acotado entre 1 y 5.

```
## [1] "Población inicial creada"
      "Número de individuos = 10"
  [1]
      "Número de predictores mínimo por individuo = 1"
  [1] "Número de predictores máximo por individuo = 5"
##
          [,1]
                [,2]
                    [,3]
                          [,4]
                                  [,5]
                                        [,6]
##
   [1,] FALSE
               TRUE FALSE FALSE
                                 TRUE
                                       TRUE
                                             TRUE FALSE
   [2,] FALSE FALSE
                           TRUE FALSE FALSE FALSE
##
                     TRUE
##
   [3,]
         TRUE FALSE
                     TRUE FALSE
                                 TRUE FALSE FALSE
##
   [4,]
               TRUE FALSE
                          TRUE FALSE
                                      TRUE FALSE
         TRUE
##
   [5,]
         TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
##
   [6,]
         TRUE
               TRUE FALSE
                           TRUE FALSE FALSE
                                             TRUE FALSE
   [7,] FALSE FALSE FALSE
                           TRUE
                                 TRUE FALSE
                                             TRUE FALSE
   [8,] FALSE FALSE FALSE
                           TRUE
                                 TRUE FALSE
                                             TRUE
   [9,] FALSE FALSE
                     TRUE
                          TRUE FALSE FALSE
                                             TRUE TRUE
##
  [10,] FALSE FALSE
                    TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

#### Fitness de un individuo

Cada individuo de la población debe ser evaluado para cuantificar su fortaleza (*fitness*). Dado que, en este caso, el objetivo es encontrar la combinación de predictores que da lugar al mejor modelo, el *fitness* de un individuo se calcula con una métrica de calidad del modelo. Dependiendo de la métrica, la relación con el *fitness* puede ser:

- Error del modelo: si se emplea una métrica de error, el individuo tiene mayor *fitness* cuanto menor sea el error.
- *Accuracy*, precisión, *recall...*: con este tipo de métricas, el individuo tiene mayor *fitness* cuanto mayor sea la métrica.

Para conseguir que, independientemente de la métrica, cuanto mayor sea su valor, mayor el fitness del individuo, se puede utilizar el -(error). De esta forma, la estrategia de selección es la misma. Es importante recordar que, en el caso del -(error), el intervalo de valores posibles es  $-\infty$  a o. Además, para que las estimaciones sean robustas y evitar el *overfitting*, es muy

importante recurrir a estrategias de validación cruzada o *bootstrapping* en la cuantificación del *fitness*.

En este ejemplo, se presentan dos opciones de modelos de evaluación: un modelo lineal por mínimos cuadrados y un *random forest*. El modelo lineal solo puede utilizarse para problemas de regresión y emplea la métrica *MSE* como indicativo de *fitness*. El *random forest* puede utilizarse para problemas de regresión, en cuyo caso emplea la métrica *MSE*, y clasificación, en cuyo caso emplea el *Accuracy*.

#### Versión con random forest

```
calcular_fitness_individuo_rf <- function(x, y, cv, seed=123, verbose=TRUE,...){</pre>
  # Argumentos
               matriz de predictores.
     x:
               variable respuesta.
               número de particiones de validación cruzada.
               semilla para garantizar reproducibilidad en el proceso de CV.
     verbose: mostrar información del proceso por pantalla.
  # fitness del individuo obtenido por validación cruzada empleando random forest
  # como modelo.
  # Repartición de las observaciones para la validación cruzada (CV).
  set.seed(seed)
  indices cv <- sample(x = 1:cv, size = nrow(x), replace = TRUE)</pre>
  # Vector para almacenar el fitness de cada iteración CV.
  fitness_cv <- rep(NA, times = cv)</pre>
  for(i in 1:cv){
    set.seed(seed)
    modelo <- randomForest::randomForest(x = x[indices_cv != i, , drop = FALSE],</pre>
                                           y = y[indices_cv != i],
                                           ntree = 100)
    predicciones <- predict(modelo, newdata = x[indices_cv == i, , drop = FALSE])</pre>
    if(is.numeric(y)){
      # Si y es numérico (regresión), el fitness es igual al -MSE.
                    <- predicciones - y[indices_cv == i]</pre>
      fitness_cv[i] <- -(mean(residuos^2))</pre>
    }else{
     # Si y es factor (clasificación), el fitness es igual al Accuracy.
                    <- mean(predicciones == y[indices cv == i])</pre>
      fitness cv[i] <- accuracy</pre>
    }
```

```
if(verbose){
    print(paste("El fitness calculado por CV =", cv, "es de:", mean(fitness_cv)))
    cat("\n")
}
return(mean(fitness_cv))
}
```

#### Versión con modelo lineal

```
calcular_fitness_individuo_lm <- function(x, y, cv, seed=123, verbose=TRUE, ...){
 # Argumentos
             matriz de predictores.
     x:
 #
    y:
             variable respuesta.
 #
               número de particiones de validación cruzada.
 # cv:
    seed: semilla para garantizar reproducibilidad en el proceso de CV.
    verbose: mostrar información del proceso por pantalla.
 # Retorno:
    fitness del individuo obtenido por validación cruzada empleando MSE como
     métrica y regresión lineal como tipo de modelo.
 # Repartición de Las observaciones para la validación cruzada (CV).
 set.seed(seed)
 indices_cv <- sample(x = 1:cv, size = nrow(x), replace = TRUE)</pre>
 # Vector para almacenar el fitness de cada iteración CV.
 fitness_cv <- rep(NA, times = cv)</pre>
 for(i in 1:cv){
   set.seed(seed)
   datos modelo <- as.data.frame(cbind(x[indices cv != i, , drop = FALSE],</pre>
                                         y = y[indices cv != i])
   modelo <- lm(formula = y \sim .,
                 data = datos_modelo)
   predicciones <- predict(modelo,</pre>
                            newdata = as.data.frame(
                                         x[indices cv == i, , drop = FALSE])
                 <- predicciones - y[indices_cv == i]</pre>
   fitness_cv[i] <- -(mean(residuos^2))</pre>
 if(verbose){
      print(paste("El fitness calculado por CV =", cv, "es de:", mean(fitness cv)))
      cat("\n")
  }
 return(mean(fitness_cv))
```

## **Ejemplo**: Se calcula el *fitness* de un individuo que incluye 10 predictores simulados.

```
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.2154377565129"

## [1] -1.215438

calcular fitness individuo lm(x = predictores
```

```
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.32359842761727"
## [1] -1.323598
```

# Fitness de todos los individuos de una población

Esta función recibe como argumentos una población de individuos, una matriz de predictores, un vector con la variable respuesta, y devuelve el *fitness* de cada individuo.

```
calcular_fitness_poblacion <- function(poblacion, x , y, cv, seed = 123,</pre>
                                      modelo = "rf", verbose = TRUE){
 # Argumentos
    poblacion: matriz que representa la población de individuos.
                matriz de predictores.
                variable respuesta.
 #
     y:
    cv:
                número de particiones de validación cruzada.
 #
    seed:
                semilla para garantizar reproducibilidad en el proceso de CV.
                mostrar información del proceso por pantalla.
    verbose:
                tipo de modelo empleado para calcular el fitness. Puede ser
 #
    modelo:
 #
                Lm o rf.
 # Retorno:
    vector con el fitness de todos los individuos de la población, obtenido por
    validación cruzada. El orden de los valores se corresponde con el orden de
     las filas de la matriz población.
```

```
# Vector donde almacenar el fitness de cada individuo.
fitness poblacion <- rep(NA, times = nrow(poblacion))</pre>
# Tipo de modelo utilizado para calcular el fitness.
 if(modelo == "lm"){
    calcular fitness individuo <- calcular fitness individuo lm
  }else if(modelo == "rf"){
    calcular_fitness_individuo <- calcular_fitness_individuo_rf</pre>
    stop(paste("El modelo empleado para calcular el fitness debe ser",
               "lm (linear model)", "o rf (randomforest)."))
  }
for (i in 1:nrow(poblacion)) {
  individuo <- poblacion[i, ]</pre>
  if(verbose){
    print(paste("Individuo", i,":", paste(individuo, collapse = " ")))
  fitness_individuo <- calcular_fitness_individuo(</pre>
                           x = x[,individuo, drop = FALSE],
                           y = y
                           CV = CV
                           seed = seed,
                           verbose = verbose
 fitness_poblacion[i] <- fitness_individuo</pre>
if(verbose){
  print(paste("Fitness calculado para los",
               nrow(poblacion) ,
               "individuos de la población."))
  print(paste("Modelo empleado para el cálculo del fitness:", modelo))
  metrica_fitness <- ifelse(test = is.numeric(y), "mse", "accuracy")</pre>
  print(paste("Métrica empleada para el cálculo del fitness:", metrica fitness))
  cat("\n")
}
return(fitness_poblacion)
```

**Ejemplo**: Se calcula el *fitness* de todos los individuos de una población formada por 10 individuos de longitud 8, con un número de valores TRUE acotado entre 1 y 5.

```
# Población simulada
poblacion <- crear poblacion(n poblacion = 10,</pre>
                              n \text{ variables} = 8,
                              n_{max} = 5
                             n_{min} = 1
                              verbose = TRUE)
## [1] "Población inicial creada"
## [1] "Número de individuos = 10"
## [1] "Número de predictores mínimo por individuo = 1"
## [1] "Número de predictores máximo por individuo = 5"
# Datos simulados
predictores
              <- matrix(data = rnorm(n = 1000), nrow = 100, ncol = 10)
var respuesta \leftarrow rnorm(n = 100)
# Cálculo del fitness de todos los individuos
fitness_poblacion <- calcular_fitness_poblacion(poblacion = poblacion,
                                                 x = predictores,
                                                 y = var respuesta,
                                                 modelo = "lm",
                                                  cv = 5
                                                  seed = 123,
                                                 verbose = TRUE)
## [1] "Individuo 1 : FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.33112329251321"
##
## [1] "Individuo 2 : TRUE FALSE TRUE TRUE TRUE FALSE FALSE TRUE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.23369791906619"
##
## [1] "Individuo 3 : FALSE FALSE FALSE TRUE TRUE FALSE FALSE TRUE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.20899906906925"
##
## [1] "Individuo 4 : TRUE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.31140582120689"
##
## [1] "Individuo 5 : FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.30135564112265"
##
```

## [1] "Individuo 6 : FALSE FALSE TRUE TRUE TRUE TRUE FALSE TRUE TRUE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.2834350546162"

## [1] "Individuo 7 : TRUE TRUE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE TRUE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.22917588425381"

## [1] "Individuo 8 : TRUE TRUE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE TRUE"

##

##

```
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.24781250586997"
##
## [1] "Individuo 9 : TRUE TRUE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.29704039773951"
##
## [1] "Individuo 10 : TRUE FALSE TRUE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -1.30145023146265"
##
## [1] "Fitness calculado para los 10 individuos de la población."
## [1] "Modelo empleado para el cálculo del fitness: lm"
```

#### fitness poblacion

```
## [1] -1.331123 -1.233698 -1.208999 -1.311406 -1.301356 -1.283435 -1.229176
## [8] -1.247813 -1.297040 -1.301450
```

El vector devuelto contiene el *fitness* de cada uno de los individuos en el mismo orden que se encuentran en la matriz de la población.

#### Seleccionar individuos

La forma en que se seleccionan los individuos que participan en cada cruce difiere en las distintas implementaciones de los algoritmos genéticos. Por lo general, todas ellas tienden a favorecer la selección de aquellos individuos con mayor *fitness*. Algunas de las estrategias más comunes son:

- Método de ruleta: la probabilidad de que un individuo sea seleccionado es proporcional a su *fitness* relativo, es decir, a su *fitness* dividido por la suma del *fitness* de todos los individuos de la población. Si el *fitness* de un individuo es el doble que el de otro, también lo será la probabilidad de que sea seleccionado.
- Selección estocástica aleatoria: se selecciona cada individuo exactamente el número de veces que indica su *fitness* relativo.
- Selección competitiva (*tournament*): se seleccionan aleatoriamente dos individuos de la población (todos con la misma probabilidad) y se descarta el que tenga menor *fitness*.
- Selección truncada (*truncated selection*): se realizan selecciones aleatorias de individuos, habiendo descartado primero los *n* individuos con menor *fitness* de la población.

En este documento se emplea la estrategia de selección proporcional al *fitness* relativo (método ruleta).

La siguiente función recibe como argumento un vector con el *fitness* de cada individuo y selecciona una de las posiciones, donde la probabilidad de selección es proporcional al *fitness* relativo.

La conversión de *fitness* a probabilidad es distinta dependiendo de la métrica utilizada para calcular el *fitness*.

• Si el *fitness* es el valor negativo del error, cuanto menor sea el *fitness* (menor la magnitud del valor negativo), mayor debe ser la probabilidad de ser seleccionado. Para lograr la conversión se emplea  $\frac{1}{fitness}$ . Además, como en este caso el *fitness* es negativo y toda probabilidad debe ser positiva, se tiene que cambiar el signo. Esto último se consigue automáticamente al dividir entre el sumatorio de la inversa de todos los *fitness*.

Probabilidad selección individuo i = 
$$\frac{1/\text{fitness}_i}{\sum_{k=1}^{n} 1/\text{fitness}_k}$$

• Si el *fitness* es el *accuracy*, cuanto mayor sea el *fitness*, mayor debe ser la probabilidad de ser seleccionado. En este caso, no es necesario calcular la inversa.

Probabilidad selección individuo i = 
$$\frac{\text{fitness}_i}{\sum_{k=1}^n \text{ffitness}_k}$$

```
seleccionar_individuo <- function(vector_fitness, metrica){</pre>
  # Argumentos:
      vector fitness: un vector con el fitness de cada individuo.
                      métrica empleada para calcular el fitness.
  # Retorno:
  # El índice que ocupa el individuo seleccionado.
  if (metrica == "mse") {
    probabilidad_seleccion <- (1/vector_fitness) / sum(1/vector_fitness)</pre>
  }else if (metrica == "accuracy") {
    probabilidad_seleccion <- (vector_fitness) / sum(vector_fitness)</pre>
  }else {
    stop("La métrica debe ser mse o accuracy")
  indice_selectionado <- sample(x = 1:length(vector_fitness),</pre>
                                    size = 1,
                                    prob = probabilidad seleccion)
  return(indice seleccionado)
```

**Ejemplo**: Se selecciona un individuo de entre 10 empleando una probabilidad de selección proporcional a sus *fitness*, que ha sido calculado empleando el *MSE*.

## [1] 3

## Cruzar dos individuos (crossover, recombinación)

El objetivo de esta etapa es generar, a partir de individuos ya existentes (parentales), nuevos individuos (descendencia) que combinen las características de los anteriores. Este es otro de los puntos del algoritmo en los que se puede seguir varias estrategias. Tres de las más empleadas son:

- Cruzamiento a partir de uno solo punto: se selecciona aleatoriamente una posición que actúa como punto de corte. Cada individuo parental se divide en dos partes y se intercambian las mitades. Como resultado de este proceso, por cada cruce, se generan dos nuevos individuos.
- Cruzamiento a partir múltiples puntos: se seleccionan aleatoriamente varias posiciones que actúan como puntos de corte. Cada individuo parental se divide por los puntos de corte y se intercambian las partes. Como resultado de este proceso, por cada cruce, se generan dos nuevos individuos.
- Cruzamiento uniforme: el valor que toma cada posición del nuevo individuo se obtiene
  de uno de los dos parentales. Por lo general, la probabilidad de que el valor proceda de
  cada parental es la misma, aunque podría, por ejemplo, estar condicionada al fitness de
  cada uno. A diferencia de las anteriores estrategias, con esta, de cada cruce se genera un
  único descendiente.

```
cruzar_individuos <- function(parental_1, parental_2){</pre>
 # Argumentos:
     parental 1: vector que representa a un individuo.
     parental 2: vector que representa a un individuo.
 # Retorno:
 # Un vector que representa a un nuevo individuo.
 # Para crear el nuevo individuo, se emplea el método de cruzamiento uniforme,
 # con la misma probabilidad de que el valor proceda de cada parental.
 if(length(parental_1) != length(parental_2)){
   stop(paste0("La longitud de los dos vectores que representan a los ",
                "individuos debe ser la misma."))
 }
 # Se crea el vector que representa el nuevo individuo
   descendencia <- rep(NA, times = length(parental 1))</pre>
 # Se seleccionan aleatoriamente las posiciones que se heredan del parental 1.
   herencia_parent_1 <- sample(x = c(TRUE, FALSE),
                                 size = length(parental_1),
                                 replace = TRUE)
 # El resto de posiciones se heredan del parental 2.
   herencia parent 2 <- !herencia parent 1
   descendencia[herencia parent 1] <- parental 1[herencia parent 1]</pre>
   descendencia[herencia_parent_2] <- parental_2[herencia_parent_2]</pre>
   return(descendencia)
```

**Ejemplo**: se obtiene un nuevo individuo a partir del cruce de los individuos c(T, T, T, T) y(F, F, F, F, F, F).

## [1] FALSE TRUE FALSE FALSE TRUE

#### Mutar individuo

Tras generar cada nuevo individuo de la descendencia, este se somete a un proceso de mutación en el que, cada una de sus posiciones, puede verse modificada con una probabilidad p. Este paso es importante para añadir diversidad al proceso y evitar que el algoritmo caiga en mínimos locales por que todos los individuos sean demasiado parecidos de una generación a otra.

```
mutar_individuo <- function(individuo, prob_mut = 0.01){
    # Argumentos:
    # individuo: vector que representa a un individuo.
    # prob_mut: probabilidad que tiene cada posición del vector de mutar.

# Retorno:
    # Un vector que representa al individuo tras someterse a las mutaciones.

# Selección de posiciones a mutar.
    posiciones_mutadas <- runif(n = length(individuo), min = 0, max = 1) < prob_mut

# Se modifica el valor de aquellas posiciones que hayan sido seleccionadas para
    # mutar. Si el valor de prob_mut es muy bajo, las mutaciones serán muy poco
    # frecuentes y el individuo devuelto será casi siempre igual al original.
    individuo[posiciones_mutadas] <- !(individuo[posiciones_mutadas])
    return(individuo)
}</pre>
```

**Ejemplo**: se somete a un individuo al proceso de mutación, con una probabilidad de mutación de 0.2.

## Algoritmo completo

En cada uno de los apartados anteriores se ha definido una de las etapas del algoritmo genético. A continuación, se combinan todas ellas dentro de una única función.

```
selecionar predictores <- function(x,</pre>
                                 n_{poblacion} = 20,
                                 n generaciones = 10,
                                 n_max_predictores = NULL,
                                 n min predictores = NULL,
                                 modelo = "lm",
                                 cv = 5,
                                 elitismo = 0.1,
                                 prob mut = 0.01,
                                 verbose = TRUE,
                                 parada temprana = FALSE,
                                 rondas parada = NULL,
                                 tolerancia_parada = NULL,
                                 ){
 # COMPROBACIONES INICIALES
 # Combrovación de que la variable respuesta es numérica si el modelo es lm.
 if(!is.numeric(y) & modelo == "lm"){
   stop(paste("El modelo lm solo puede aplicarse a problemas de regresión,",
               "(variable respuesta numérica)."))
 }
 \# El número máximo de predictores no puede superar el número de columnas de x.
 if(n max predictores > ncol(x)){
   stop(paste("El número máximo de predictores no puede superar al número de",
              "variables disponibles en x."))
 }
 # Si se activa la parada temprana, hay que especificar los argumentos
 # rondas_parada y tolerancia_parada.
 if(isTRUE(parada temprana) &
(is.null(rondas parada) | is.null(tolerancia parada))){
   stop(paste("Para activar la parada temprana es necesario indicar un valor",
              "de rondas parada y de tolerancia parada."))
 }
```

```
# ALMACENAMIENTO DE RESULTADOS
# Por cada generación se almacena el mejor individuo, su fitness, y el porcentaje
# de mejora respecto a la última generación.
resultados_fitness <- vector(mode = "list", length = n_generaciones)
resultados_individuo <- vector(mode = "list", length = n_generaciones)
porcentaje_mejora <- vector(mode = "list", length = n_generaciones)</pre>
# CREACIÓN DE LA POBLACIÓN INICIAL
# -----
poblacion <- crear poblacion(n poblacion = n poblacion,</pre>
                      n \text{ variables} = ncol(x),
                      n_max = n_max_predictores,
                      n min = n min predictores,
                      verbose = verbose
# ITERACIÓN DE POBLACIONES
for (i in 1:n_generaciones) {
 if(verbose){
   print("----")
   print(paste("Generación:", i))
   print("----")
 # CALCULAR FITNESS DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACION
 fitness ind poblacion <- calcular fitness poblacion(poblacion = poblacion,
                                         x = x
                                         y = y
                                         modelo = modelo,
                                         cv = cv,
                                         verbose = verbose)
 # SE ALMACENA EL MEJOR INDIVUDUO DE LA POBLACION ACTUAL
 fitness_mejor_individuo <- max(fitness_ind_poblacion)</pre>
 mejor_individuo <- poblacion[which.max(fitness_ind_poblacion), ]</pre>
 resultados_fitness[[i]] <- fitness_mejor_individuo</pre>
 resultados_individuo[[i]] <- colnames(x)[mejor_individuo]</pre>
```

```
# SE CALCULA LA MEJORA RESPECTO A LA GENERACIÓN ANTERIOR
# El porcentaje de mejora solo puede calcularse a partir de la segunda
# generación.
if(i > 1){
 porcentaje mejora[[i]] <- 1 - (resultados fitness[[i]] /</pre>
                              resultados fitness[[i-1]])
}
# NUEVA POBLACION
nueva poblacion <- matrix(data = NA,
                        nrow = nrow(poblacion),
                        ncol = ncol(poblacion))
# ELITISMO
# -----
# El elitismo indica el porcentaje de mejores individuos de la población
# actual que pasan directamente a la siquiente población. De esta forma, se
# asegura que, la siguiente generación, no sea nunca inferior.
if(elitismo > 0){
  n_elitismo
                   <- ceiling(nrow(poblacion)*elitismo)
 posicion_n_mejores <- order(fitness_ind_poblacion, decreasing = TRUE)</pre>
  posicion n mejores <- posicion n mejores[1:n elitismo]</pre>
  nueva_poblacion[1:n_elitismo, ] <- poblacion[posicion_n_mejores, ]</pre>
}else{
 n_elitismo <- 0
# CREACIÓN DE NUEVOS INDIVIDUOS POR CRUCES
for (j in (n elitismo + 1):nrow(nueva poblacion)) {
 # Seleccionar parentales
 metrica <- ifelse(test = is.numeric(y), "mse", "accuracy")</pre>
  indice_parental_1<-seleccionar_individuo(vector_fitness=fitness_ind_poblacion,</pre>
                                        metrica=metrica)
  indice_parental_2<-selectionar_individuo(vector_fitness=fitness_ind_poblacion,</pre>
                                       metrica=metrica)
  indice_parental_1 <- seleccionar_individuo(vector_fitness=fitness_ind_poblacion)</pre>
  indice parental 2 <- seleccionar individuo(vector fitness=fitness ind poblacion)</pre>
  parental 1 <- poblacion[indice parental 1, ]</pre>
  parental_2 <- poblacion[indice_parental_2, ]</pre>
  # Cruzar parentales para obtener la descendencia
  descendencia <- cruzar individuos(parental 1 = parental 1,</pre>
                                 parental 2 = parental 2)
```

```
# Mutar la descendencia
    descendencia <- mutar individuo(individuo = descendencia,</pre>
                                  prob_mut = prob_mut)
    # Almacenar el nuevo descendiente en la nueva población: puede ocurrir que
    # el individuo resultante del cruce y posterior mutación no contenga ningún
    # predictor (todas sus posiciones son FALSE). Si esto ocurre, y para evitar
    # que se produzca un error al ajustar el modelo, se introduce aleatoriamente
    # un valor TRUE.
    if(all(descendencia == FALSE)){
     descendencia[sample(x = 1:length(descendencia), size = 1)] <- TRUE</pre>
    nueva_poblacion[j,] <- descendencia</pre>
  poblacion <- nueva poblacion</pre>
  # CRITERIO DE PARADA
  # -----
  # Si durante las últimas n generaciones el mejor individuo no ha mejorado por
  # una cantidad superior a tolerancia parada, se detiene el algoritmo y no se
  # crean nuevas generaciones.
  if(parada_temprana & (i > rondas_parada)){
   ultimos_n <- tail(unlist(porcentaje_mejora), n = rondas_parada)</pre>
    if(all(ultimos n < tolerancia parada)){</pre>
     print(paste("Algoritmo detenido en la generacion", i,
                 "por falta de mejora mínima de", tolerancia parada,
                 "durante", rondas_parada, "generaciones consecutivas."))
     break()
   }
 }
# RESULTADOS
# La función devuelve una lista con 4 elementos:
  fitness:
                     una lista con el fitness del mejor individuo de cada
#
                     generación.
#
  mejor_individuo:
                     una lista con la combinación de predictores del mejor
#
                      individuo de cada generación.
#
  porcentaje_mejora: una lista con el porcentaje de mejora entre el mejor
#
                      individuo de cada generación.
#
                     un dataframe con todos los resultados anteriores.
  df_resultados:
# Para crear el dataframe se convierten las listas a vectores del mismo tamaño.
           <- unlist(resultados fitness)</pre>
predictores <- resultados_individuo[!sapply(resultados_individuo, is.null)]</pre>
predictores <- sapply(predictores, function(x){paste(x, collapse = ", ")})</pre>
           <- c(NA, unlist(porcentaje mejora))
```

# Ejemplo regresión

#### Simulación de datos

En el paquete mlbench puede encontrarse, entre muchos otros data sets, el problema de regresión propuesto por Friedman (1991) y Breiman (1996). Con la función mlbench.friedman1() se puede generar un conjunto de datos simulados que siguen la ecuación:

$$y = 10\sin(\pi x_1 x_2) + 20(x_3 - 0.5)^2 + 10x_4 + 5x_5 + \epsilon$$

Además de las primeras 5 columnas  $(x_1,...,x_5)$ , que están relacionadas con la variable respuesta, se añaden automáticamente 5 columnas adicionales  $(x_6,...,x_{10})$  que siguen una distribución uniforme [0,1] y que, por lo tanto, no guardan relación alguna con la variable respuesta.

```
library(mlbench)
library(dplyr)
set.seed(123)
simulacion <- mlbench.friedman1(n = 500, sd = 1)
#El objeto simulación es una lista que contiene una matriz con los 10 predictores y
#un vector con la variable respuesta. Se unen todos los datos en un único
#dataframe.
datos <- as.data.frame(simulacion$x)
datos$y <- simulacion$y
colnames(datos) <- c(paste("x", 1:10, sep = ""), "y")
datos <- datos %>% select(y, everything())
head(datos)
```

```
##
                      x1
                                 x2
                                           х3
                                                     х4
## 1 13.665374 0.2875775 0.35360608 0.2736227 0.9380283 0.1596740 0.8535317
## 2 19.232842 0.7883051 0.36644144 0.5938669 0.9880033 0.1445159 0.6660066
## 3 10.519756 0.4089769 0.28710013 0.1601848 0.4563196 0.1491804 0.7333267
## 4 9.042955 0.8830174 0.07997291 0.8534302 0.2306149 0.5144343 0.3147403
## 5 21.430304 0.9404673 0.36545427 0.8477392 0.6954893 0.4928273 0.6677179
## 6 8.436942 0.0455565 0.17801381 0.4778868 0.5566323 0.6163428 0.4638867
##
            x7
                      x8
                                х9
## 1 0.2058269 0.2414939 0.3044642 0.10504174
## 2 0.9425390 0.4107782 0.8328188 0.40250560
## 3 0.3793238 0.8111750 0.5936475 0.45567659
## 4 0.6262401 0.3791412 0.8071966 0.62464525
## 5 0.1835024 0.4469502 0.2940508 0.07885528
## 6 0.6592076 0.5705078 0.1410852 0.34198272
```

Se añaden además 20 columnas adicionales con valores aleatorios distribuidos de forma normal.

```
n <- 500
p <- 20
ruido <- matrix(rnorm(n * p), nrow = n)
colnames(ruido) <- paste("x", 11:(10+p), sep = "")
ruido <- as.data.frame(ruido)
datos <- bind_cols(datos, ruido)
head(datos)</pre>
```

```
##
                                 x2
                                                     x4
                                                               x5
                     x1
                                          х3
                                                                        x6
## 1 13.665374 0.2875775 0.35360608 0.2736227 0.9380283 0.1596740 0.8535317
  2 19.232842 0.7883051 0.36644144 0.5938669 0.9880033 0.1445159 0.6660066
## 3 10.519756 0.4089769 0.28710013 0.1601848 0.4563196 0.1491804 0.7333267
     9.042955 0.8830174 0.07997291 0.8534302 0.2306149 0.5144343 0.3147403
## 5 21.430304 0.9404673 0.36545427 0.8477392 0.6954893 0.4928273 0.6677179
## 6
    8.436942 0.0455565 0.17801381 0.4778868 0.5566323 0.6163428 0.4638867
##
            x7
                     x8
                                x9
                                          x10
                                                      x11
                                                                 x12
## 1 0.2058269 0.2414939 0.3044642 0.10504174 -0.15030748
                                                           1.4783345
  2 0.9425390 0.4107782 0.8328188 0.40250560 -0.32775713 -1.4067867
## 3 0.3793238 0.8111750 0.5936475 0.45567659 -1.44816529 -1.8839721
## 4 0.6262401 0.3791412 0.8071966 0.62464525 -0.69728458 -0.2773662
  5 0.1835024 0.4469502 0.2940508 0.07885528 2.59849023 0.4304278
## 6 0.6592076 0.5705078 0.1410852 0.34198272 -0.03741501 -0.1287867
##
            x13
                       x14
                                  x15
                                             x16
                                                        x17
                                                                   x18
     0.1965498
## 1
                0.8343715 -0.4941739 -1.3572306 -0.6992281
                                                             0.5844478
     0.6501132 -0.6984039
                            1.1275935 -1.2926978
                                                 0.9964515 -0.1975278
  2
     0.6710042
                1.3092405 -1.1469495 -1.5172073 -0.6927454
## 4 -1.2841578 -0.9801776
                           1.4810186
                                      0.8591760 -0.1034830
                                                             1.5628134
## 5 -2.0261096 0.7479851
                           2.2053261
## 6
                 1.2577966
                            0.3351310
                                      0.6190554 -0.6080450
                                                             1.3784108
##
            x19
                       x20
                                               x22
                                                          x23
                                  x21
                                                                     x24
## 1 -1.6180367
                0.3500025
                            0.5110004
                                      0.272647072
                                                   1.9315759 -0.3378621
## 2
     0.3791812
                0.8144417
                            1.8079928
                                      0.041452123 -0.6164747 -0.1471321
     1.9022505 -0.5166661 -1.7026150 -0.004881852 -0.5625675 -0.6736354
## 3
## 4
     0.6018743 -2.6922644
                            0.2874488 -0.976219229 -0.9899631 -0.5686278
  5
     1.7323497 -1.0969546 -0.2691142
                                       0.144050084 2.7312276
                                                               0.4708565
##
  6 -0.1468696 -1.2554751 -0.3795247
                                       0.456619219 -0.7216662
                                                               1.3013367
##
            x25
                                                        x29
                       x26
                                  x27
                                             x28
     2.3707252
## 1
                0.9863167
                            0.2677904 -0.5582810 -0.1506300
                                                             0.01014789
  2 -0.1668120 -0.6629674 -0.3993609
                                      0.1254263
                                                  0.8009406
                                                             1.56213812
                0.5767211
                            0.2768838
                                      1.8151103 -1.1867178
     0.9269614
                                                             0.41284605
  4 -0.5681517 -0.1378378 -1.2336734
                                       0.1630368
                                                 0.4306364 -1.18886219
                                                  0.2167471
## 5
     0.2250901 -0.1681767
                            0.7535749 -0.7234664
                                                             0.71454993
## 6
     1.1319859 0.5761930
                            0.2892610
                                      0.5809549
                                                  0.9612923
                                                            0.58507617
```

Como resultado se ha generado un conjunto de datos con 30 predictores, de los cuales, solo 5 están realmente relacionados con la variable respuesta.

## Selección de predictores

En primer lugar se emplean pocos individuos y generaciones para mostrar la información que se imprime por pantalla cuando verbose = TRUE.

```
## [1] "Población inicial creada"
## [1] "Número de individuos = 5"
## [1] "Número de predictores mínimo por individuo = 1"
## [1] "Número de predictores máximo por individuo = 8"
##
## [1] "----"
## [1] "Generación: 1"
## [1] "-----"
## [1] "Individuo 1 : FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -33.4937748882335"
## [1] "Individuo 2 : FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE 
FALSE FALSE TRUE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -35.1898854520939"
##
## [1] "Individuo 3 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE TRUE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
TRUE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.0739443735319"
## [1] "Individuo 4 : TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.3922070205572"
## [1] "Individuo 5 : FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

```
FALSE FALSE TRUE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -27.056440150829"
##
## [1] "Fitness calculado para los 5 individuos de la población."
## [1] "Modelo empleado para el cálculo del fitness: rf"
## [1] "----"
## [1] "Generación: 2"
## [1] "-----"
## [1] "Individuo 1 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE TRUE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
TRUE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.0739443735319"
##
## [1] "Individuo 2 : TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.3922070205572"
##
## [1] "Individuo 3 : FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -29.6420553630002"
## [1] "Individuo 4 : FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -29.914583610825"
## [1] "Individuo 5 : TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE 
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -21.2679574169409"
## [1] "Fitness calculado para los 5 individuos de la población."
## [1] "Modelo empleado para el cálculo del fitness: rf"
##
## [1] "----"
## [1] "Generación: 3"
## [1] "----"
## [1] "Individuo 1 : TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE 
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -21.2679574169409"
## [1] "Individuo 2 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -28.1248903098165"
## [1] "Individuo 3 : FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE 
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -29.914583610825"
```

```
##
## [1] "Individuo 4 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -19.076204922599"
##
## [1] "Individuo 5 : FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE TRUE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
TRUE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.0739443735319"
##
## [1] "Fitness calculado para los 5 individuos de la población."
## [1] "Modelo empleado para el cálculo del fitness: rf"
## [1] "-----"
## [1] "Generación: 4"
## [1] "----"
## [1] "Individuo 1 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -19.076204922599"
##
## [1] "Individuo 2 : FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
TRUE TRUE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -27.5809372029824"
## [1] "Individuo 3 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -19.076204922599"
## [1] "Individuo 4 : TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE 
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -19.0168231225349"
## [1] "Individuo 5 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
TRUE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -18.8433477249609"
## [1] "Fitness calculado para los 5 individuos de la población."
## [1] "Modelo empleado para el cálculo del fitness: rf"
##
## [1] "----"
## [1] "Generación: 5"
## [1] "----"
## [1] "Individuo 1 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
TRUE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -18.8433477249609"
```

## [1] "Individuo 2 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FAL

```
TRUE TRUE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.6691907148176"
## [1] "Individuo 3 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -19.076204922599"
## [1] "Individuo 4 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -25.5320534830692"
##
## [1] "Individuo 5 : TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE 
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -20.9132472913046"
## [1] "Fitness calculado para los 5 individuos de la población."
## [1] "Modelo empleado para el cálculo del fitness: rf"
##
## [1] "----"
## [1] "Generación: 6"
## [1] "----"
## [1] "Individuo 1 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
TRUE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -18.8433477249609"
##
## [1] "Individuo 2 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -19.076204922599"
## [1] "Individuo 3 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.5758223503607"
## [1] "Individuo 4 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -25.5320534830692"
## [1] "Individuo 5 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE
FALSE TRUE FALSE FALSE"
## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.5906602920682"
## [1] "Fitness calculado para los 5 individuos de la población."
## [1] "Modelo empleado para el cálculo del fitness: rf"
##
## [1] "----"
## [1] "Generación: 7"
## [1] "----"
## [1] "Individuo 1 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
```

FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FAL

## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -18.8433477249609"

##

- ## [1] "Individuo 2 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALS
- ## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -18.8433477249609"

##

- ## [1] "Individuo 3 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FAL
- ## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -25.5320534830692"

##

- ## [1] "Individuo 4 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALS
- ## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -19.076204922599"
  ##
- ## [1] "Individuo 5 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FAL
- ## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.5758223503607"

##

- ## [1] "Fitness calculado para los 5 individuos de la población."
- ## [1] "Modelo empleado para el cálculo del fitness: rf"

##

- **##** [1] "----"
- ## [1] "Generación: 8"
- **##** [1] "-----"
- ## [1] "Individuo 1 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALS
- ## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -18.8433477249609"
- ## [1] "Individuo 2 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALS
- ## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -18.8433477249609"

##

- ## [1] "Individuo 3 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FAL
- ## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -24.5758223503607"

##

- ## [1] "Individuo 4 : FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE TRUE FALSE FALS
- ## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -25.8639673511654"
- ## [1] "Individuo 5 : TRUE FALSE FALSE FALSE TRUE FALSE FALS
- ## [1] "El fitness calculado por CV = 5 es de: -18.8433477249609"
  ##

```
## [1] "Fitness calculado para los 5 individuos de la población."
## [1] "Modelo empleado para el cálculo del fitness: rf"
##
## [1] "Algoritmo detenido en la generacion 8 por falta de mejora mínima de 0.01 durante 4
generaciones consecutivas."
# Mejor fitness de cada generación.
unlist(seleccion$fitness)
## [1] -24.07394 -21.26796 -19.07620 -18.84335 -18.84335 -18.84335 -18.84335
## [8] -18.84335
# Mejor individuo de cada generación.
seleccion$mejor_individuo
## [[1]]
             "x10" "x11" "x22" "x24" "x28"
## [1] "x5"
##
## [[2]]
             "x6"
                    "x24"
## [1] "x1"
##
## [[3]]
                   "x22" "x24"
## [1] "x1"
             "x5"
##
## [[4]]
              "x5"
                    "x22" "x24" "x28"
## [1] "x1"
##
## [[5]]
## [1] "x1"
             "x5"
                    "x22" "x24" "x28"
##
## [[6]]
## [1] "x1"
             "x5"
                    "x22" "x24" "x28"
##
## [[7]]
## [1] "x1"
             "x5"
                    "x22" "x24" "x28"
##
## [[8]]
             "x5" "x22" "x24" "x28"
## [1] "x1"
## [[9]]
## NULL
##
## [[10]]
## NULL
# Porcentaje de mejora entre generaciones.
unlist(seleccion$porcentaje_mejora)
## [1] 0.11655701 0.10305421 0.01220668 0.00000000 0.00000000 0.00000000
```

## [7] 0.00000000

# # Resultados en forma de dataframe seleccion\$df\_resultados

```
##
       fitness
                               predictores
                                                mejora
## 1 -24.07394 x5, x10, x11, x22, x24, x28
                                                    NA
## 2 -21.26796
                               x1, x6, x24 0.11655701
## 3 -19.07620
                          x1, x5, x22, x24 0.10305421
## 4 -18.84335
                     x1, x5, x22, x24, x28 0.01220668
                     x1, x5, x22, x24, x28 0.00000000
## 5 -18.84335
                     x1, x5, x22, x24, x28 0.00000000
## 6 -18.84335
                     x1, x5, x22, x24, x28 0.00000000
## 7 -18.84335
## 8 -18.84335
                     x1, x5, x22, x24, x28 0.00000000
```

Se repite el proceso, pero, esta vez, con 50 individuos por generación y 20 generaciones. Se especifica que verbose = FALSE para no saturar la consola.

## [1] "Algoritmo detenido en la generacion 15 por falta de mejora mínima de 0.01 durante 5 generaciones consecutivas."

## Mejor individuo

El objeto devuelto por la función seleccionar\_predictores almacena el mejor individuo de cada generación junto con su *fitness*, por lo que es fácil conocer cuál ha sido, de entre todos, el mejor individuo, así como la evolución a lo largo de las generaciones.

```
seleccion$mejor_individuo[[which.max(unlist(seleccion$fitness))]]
## [1] "x1" "x2" "x3" "x4" "x5" "x21" "x28"
```

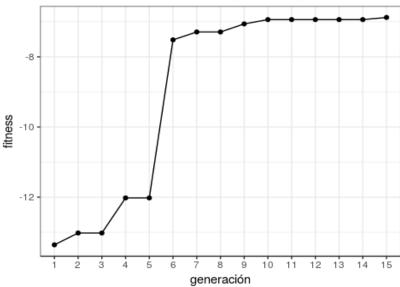
```
# Otra forma de identificar al mejor individuo
seleccion$df_resultados %>%
arrange(desc(fitness)) %>%
head(1)
```

```
## fitness predictores mejora
## 1 -6.877708 x1, x2, x3, x4, x5, x21, x28 0.008846317
```

## Evolución del error

En el siguiente gráfico se puede ver cómo evoluciona el *fitness* del mejor individuo a medida que avanzan las generaciones.

## Evolución del fitness a lo largo de las generaciones



#### Frecuencia selección variables

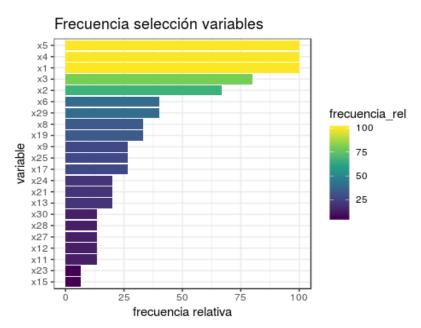
Tal y como ocurre en este caso (sobre todo si se emplea *ranfom forest* con muchos árboles), el mejor individuo puede incorporar algunos predictores no relevantes o dejarse fuera alguno de los importantes. Una forma de ser críticos con el resultado obtenido al aplicar el algoritmo genético, es seguir la siguiente idea: si realmente existen variables útiles, es de esperar que estas tiendan a aparecer en el mejor individuo de cada generación, mientras que, las variables no relevantes, cambiarán con más frecuencia.

Como se han almacenado las variables que incluye el mejor individuo de cada generación, se puede calcular la frecuencia con la que ha aparecido cada una.

```
frecuencia_abs <- table(unlist(seleccion$mejor_individuo))
n_generaciones <- sum(!sapply(seleccion$mejor_individuo, is.null))
frecuencia_rel <- (frecuencia_abs / n_generaciones) * 100

as.data.frame(frecuencia_rel) %>%
    rename(variable = Var1, frecuencia_rel = Freq) %>%
    arrange(desc(frecuencia_rel))
```

```
##
      variable frecuencia_rel
## 1
                    100.000000
            x1
## 2
            x4
                    100.000000
## 3
            x5
                    100.000000
            х3
                     80.000000
## 4
            x2
## 5
                     66.666667
            x29
## 6
                     40.000000
## 7
            х6
                     40.000000
## 8
            x19
                     33.333333
## 9
                     33.33333
            x8
## 10
           x17
                     26.666667
## 11
           x25
                     26.666667
## 12
                     26.666667
            x9
## 13
           x13
                     20.000000
## 14
            x21
                     20.000000
## 15
           x24
                     20.000000
## 16
           x11
                     13.333333
## 17
           x12
                     13.333333
## 18
                     13.333333
           x27
## 19
           x28
                     13.333333
## 20
           x30
                     13.333333
## 21
            x15
                      6.666667
## 22
                      6.666667
            x23
```



Una forma de facilitar la valoración de estas frecuencias es compararlas frente a la frecuencia esperada solo por azar. La probabilidad de que una variable i perteneciente un conjunto de variables de tamaño M esté incluida en un subconjunto de tamaño N obtenido por muestreo aleatorio sin reposición es:

$$P(i \ en \ N) = \frac{N}{M}$$

Como el tamaño de cada individuo varía, hay que tenerlo en cuenta en el cálculo. Supónganse 5 individuos de tamaños  $K=\{5,5,3,2,1\}$  y que el total de variables disponibles es M. El número de individuos en los que se espera que una determinada variable haya sido seleccionada por azar es:

$$\sum_{i \in K} \frac{i}{M}$$

La siguiente función realiza el cálculo de la frecuencia esperada.

```
## [1] 0.2711111
```

Puede observarse como, las variables que aparecen con más frecuencia en los mejores individuos de cada generación, son las que están realmente relacionadas con la variable respuesta. Combinando el resultado obtenido en el individuo final del algoritmo genético con la información de las frecuencias, se pueden obtener buenos resultados de selección.

Puede observarse que, las variables que aparecen con más frecuencia en los mejores individuos de cada generación, son las que están realmente relacionadas con la variable respuesta. Además, todas ellas superan la frecuencia esperada por azar. Combinando el resultado obtenido en el individuo final del algoritmo genético con la información de las frecuencias, se pueden obtener buenos resultados de selección.

Nota: si se utiliza elitismo, el mejor individuo de una generación puede pasar por las siguientes n generaciones de forma directa. De ser así, las variables no relevantes que arrastre este individuo aparecerán con una frecuencia superior a la esperada por azar aun cuando no son predictores útiles.

# Ejemplo clasificación

#### **Datos**

El set de datos <u>titanic\_train</u> del paquete <u>titanic</u> contiene información sobre los pasajeros del transatlántico titanic así como si sobrevivieron o no al naufragio. Se pretende identificar las variables con las que mejor se puede predecir si un pasajero vivió o falleció.

```
library(titanic)

# Se eliminan para este ejemplo 3 variables.
datos <- titanic_train %>% select(-Name, -Ticket, -Cabin)

# Se eliminan observaciones incompletas.
datos <- na.omit(datos)

# Se convierten a factor las variables de tipo character.
datos <- datos %>% mutate_if(is.character, as.factor)
datos <- datos %>% mutate(Survived = as.factor(Survived))
```

## Selección de predictores

## [1] "Algoritmo detenido en la generacion 6 por falta de mejora mínima de 0.01 durante 5 generaciones consecutivas."

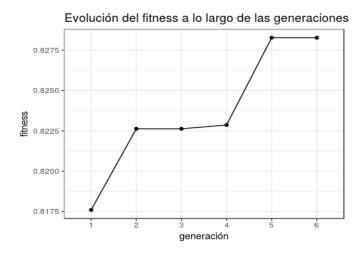
#### seleccion\$df\_resultados

```
fitness
                                                                predictores
## 1 0.8176096 PassengerId, Pclass, Sex, Age, SibSp, Parch, Fare, Embarked
                            Pclass, Sex, Age, SibSp, Parch, Fare, Embarked
## 2 0.8226326
## 3 0.8226326
                            Pclass, Sex, Age, SibSp, Parch, Fare, Embarked
                            PassengerId, Pclass, Sex, Age, SibSp, Embarked
## 4 0.8228663
                                             Pclass, Sex, Age, Parch, Fare
## 5 0.8282689
                                              Pclass, Sex, Age, Parch, Fare
## 6 0.8282689
##
            mejora
## 1
                NA
## 2 -0.0061434266
## 3 0.0000000000
## 4 -0.0002841001
## 5 -0.0065655972
## 6 0.0000000000
```

# Mejor individuo

```
seleccion$mejor_individuo[[which.max(unlist(seleccion$fitness))]]
## [1] "Pclass" "Sex" "Age" "Parch" "Fare"
```

#### Evolución del error

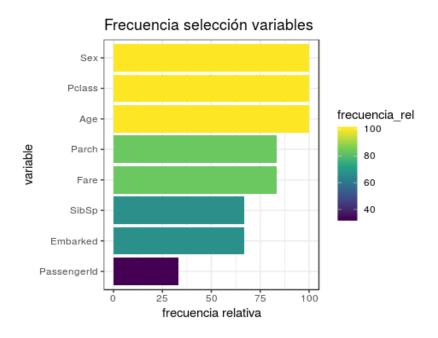


#### Frecuencia selección variables

```
frecuencia_abs <- table(unlist(seleccion$mejor_individuo))
n_generaciones <- sum(!sapply(seleccion$mejor_individuo, is.null))
frecuencia_rel <- (frecuencia_abs / n_generaciones) * 100

as.data.frame(frecuencia_rel) %>%
    rename(variable = Var1, frecuencia_rel = Freq) %>%
    arrange(desc(frecuencia_rel))
```

```
##
        variable frecuencia rel
                       100.00000
## 1
             Age
          Pclass
## 2
                       100.00000
                       100.00000
## 3
             Sex
## 4
            Fare
                        83.33333
                        83.33333
## 5
           Parch
## 6
        Embarked
                        66.66667
## 7
           SibSp
                        66.66667
## 8 PassengerId
                        33.33333
```



# Frecuencia esperada por azar

## [1] 0.8333333

## Paralelización

Uno de los inconvenientes de los algoritmos genéticos es su alto requerimiento computacional. Por ejemplo, si se establecen 20 generaciones con 50 individuos por generación y una estimación del *fitness* mediante validación cruzada de 5 particiones, en total, se tienen que ajustar 50x20x5 = 5000 modelos.

Dos de las estrategias que se pueden emplear para agilizar el proceso son:

- Parada temprana: detener el algoritmo si tras *n* generaciones consecutivas no se ha conseguido mejora. Esta estrategia está implementada en los ejemplos anteriores.
- Paralelización: ajustar varios modelos de forma simultánea empleando múltiples cores del ordenador.

El algoritmo genético propuesto en este documento tiene dos etapas que pueden ser paralelizadas: la evaluación de los individuos de población una (calcular fitness poblacion()) validación individuo V la cruzada de cada (calcular\_fitness\_individuo()). Se procede a paralelizar la primera y comparar el impacto en el tiempo de ejecución.

## Versión paralelizada

```
# Paquetes necesarias para paralelizar.
library(foreach)
library(doParallel)
calcular fitness poblacion paral <- function(poblacion, x , y, cv, seed = 123,
                                             modelo = "rf", verbose = TRUE){
  # Argumentos
     poblacion: matriz que representa la población de individuos.
                 matriz de predictores.
  #
     x:
                 variable respuesta.
     y:
                 número de particiones de validación cruzada.
  #
     cv:
     seed:
                 semilla para garantizar reproducibilidad en el proceso de CV.
     verbose:
                 mostrar información del proceso por pantalla.
                 tipo de modelo empleado para calcular el fitness. Puede ser
  #
     modelo:
                 Lm o rf.
```

```
# Retorno:
# vector con el fitness de todos los individuos de la población, obtenido por
  validación cruzada. El orden de los valores se corresponde con el orden de
#
# las filas de la matriz población.
# Tipo de modelo utilizado para calcular el fitness.
 if(modelo == "lm"){
    calcular fitness individuo <- calcular fitness individuo lm
  }else if(modelo == "rf"){
    calcular_fitness_individuo <- calcular_fitness_individuo_rf</pre>
  }else{
    stop(paste("El modelo empleado para calcular el fitness debe ser",
               "lm (linear model)", "o rf (randomforest)."))
  }
# Se emplean todos los cores del ordenador menos 1.
registerDoParallel(parallel::detectCores()-1)
# Se emplea la función foreach para paralelizar.
fitness_poblacion <- foreach::foreach(i = 1:nrow(poblacion)) %dopar% {</pre>
  individuo <- poblacion[i, ]</pre>
  if(verbose){
    print(paste("Individuo", i,":", paste(individuo, collapse = " ")))
  fitness_individuo <- calcular_fitness_individuo(</pre>
                          x = x[,individuo, drop = FALSE],
                          y = y
                          CV = CV
                          seed = seed,
                          verbose = verbose
                      )
 fitness individuo
if(verbose){
  print(paste("Fitness calculado para los",
               nrow(poblacion) ,
               "individuos de la población."))
  print(paste("Modelo empleado para el cálculo del fitness:", modelo))
  metrica fitness <- ifelse(test = is.numeric(y), "mse", "accuracy")</pre>
  print(paste("Métrica empleada para el cálculo del fitness:", metrica_fitness))
  cat("\n")
# Se vuelve a un único core.
options(cores = 1)
return(unlist(fitness poblacion))
```

Para incluir la opción de paralelizado, se repite la función del algoritmo completo, esta vez, incluyendo el argumento paralelizado con el que el usuario pueda especificar que se emplee la función calcular\_fitness\_poblacion o calcular\_fitness\_poblacion\_paral.

```
selecionar predictores <- function(x,</pre>
                               n poblacion = 20,
                               n_generaciones = 10,
                               n_max_predictores = NULL,
                               n min predictores = NULL,
                               modelo = "lm",
                               cv = 5,
                               elitismo = 0.1,
                               prob mut = 0.01,
                               verbose = TRUE,
                               parada temprana = FALSE,
                               rondas parada = NULL,
                               tolerancia parada = NULL,
                               paralelizado = FALSE,
                               ){
 # COMPROBACIONES INICIALES
 # Combrovación de que la variable respuesta es numérica si el modelo es lm.
 if(!is.numeric(y) & modelo == "lm"){
   stop(paste("El modelo lm solo puede aplicarse a problemas de regresión,",
              "(variable respuesta numérica)."))
 }
 # El número máximo de predictores no puede superar el número de columnas de x.
 if(n max predictores > ncol(x)){
   stop(paste("El número máximo de predictores no puede superar al número de",
             "variables disponibles en x."))
 }
 # Si se activa la parada temprana, hay que especificar los arqumentos
 # rondas_parada y tolerancia_parada.
 if(isTRUE(parada temprana) &
(is.null(rondas_parada) | is.null(tolerancia_parada))){
   stop(paste("Para activar la parada temprana es necesario indicar un valor",
             "de rondas parada y de tolerancia parada."))
 }
 # ALMACENAMIENTO DE RESULTADOS
 # Por cada generación se almacena el mejor individuo, su fitness, y el porcentaje
 # de mejora respecto a la última generación.
 resultados_fitness <- vector(mode = "list", length = n_generaciones)
```

```
resultados_individuo <- vector(mode = "list", length = n_generaciones)
# CREACIÓN DE LA POBLACIÓN INICIAL
poblacion <- crear poblacion(n poblacion = n poblacion,</pre>
                     n_{variables} = ncol(x),
                     n_max = n_max_predictores,
                     n min = n min predictores,
                     verbose = verbose
# ITERACIÓN DE POBLACIONES
for (i in 1:n generaciones) {
 if(verbose){
  print("----")
   print(paste("Generación:", i))
   print("----")
 }
 # CALCULAR FITNESS DE LOS INDIVIDUOS DE LA POBLACION
 if(!paralelizado){
  fitness_ind_poblacion <- calcular_fitness_poblacion(poblacion = poblacion,</pre>
                                       x = x
                                       y = y
                                       modelo = modelo,
                                       CV = CV
                                       verbose = verbose)
 }
 if(paralelizado){
   fitness_ind_poblacion <- calcular_fitness_poblacion_paral(</pre>
                                       poblacion = poblacion,
                                       x = x
                                       y = y,
                                       modelo = modelo,
                                       CV = CV
                                       verbose = verbose)
 }
 # SE ALMACENA EL MEJOR INDIVUDUO DE LA POBLACION ACTUAL
 fitness_mejor_individuo <- max(fitness_ind_poblacion)</pre>
 mejor_individuo <- poblacion[which.max(fitness_ind_poblacion), ]</pre>
 resultados_fitness[[i]] <- fitness_mejor_individuo
 resultados_individuo[[i]] <- colnames(x)[mejor_individuo]</pre>
```

```
# SE CALCULA LA MEJORA RESPECTO A LA GENERACIÓN ANTERIOR
# El porcentaje de mejora solo puede calcularse a partir de la segunda
# generación.
if(i > 1){
 porcentaje_mejora[[i]] <- 1 - (resultados_fitness[[i]] /</pre>
                             resultados fitness[[i-1]])
}
# NUEVA POBLACION
nueva poblacion <- matrix(data = NA,
                       nrow = nrow(poblacion),
                       ncol = ncol(poblacion))
# ELITISMO
# El elitismo indica el porcentaje de mejores individuos de la población
# actual que pasan directamente a la siguiente población. De esta forma, se
# asegura que, la siguiente generación, no sea nunca inferior.
if(elitismo > 0){
                  <- ceiling(nrow(poblacion)*elitismo)
 n elitismo
 posicion_n_mejores <- order(fitness_ind_poblacion, decreasing = TRUE)</pre>
 posicion n mejores <- posicion n mejores[1:n elitismo]</pre>
 nueva_poblacion[1:n_elitismo, ] <- poblacion[posicion_n_mejores, ]</pre>
}else{
 n_elitismo <- 0
# CREACIÓN DE NUEVOS INDIVIDUOS POR CRUCES
for (j in (n elitismo + 1):nrow(nueva_poblacion)) {
 # Seleccionar parentales
 metrica <- ifelse(test = is.numeric(y), "mse", "accuracy")</pre>
 indice_parental_1<-selectionar_individuo(vector_fitness=fitness_ind_poblacion,</pre>
                                    metrica=metrica)
 indice_parental_2 <-seleccionar_individuo(vector_fitness=fitness_ind_poblacion,</pre>
                                     metrica=metrica)
 parental_1 <- poblacion[indice_parental 1, ]</pre>
 parental_2 <- poblacion[indice_parental_2, ]</pre>
 # Cruzar parentales para obtener la descendencia
 descendencia <- cruzar_individuos(parental_1 = parental_1,</pre>
                               parental 2 = parental 2)
 # Mutar la descendencia
 descendencia <- mutar_individuo(individuo = descendencia,</pre>
                              prob mut = prob mut)
```

```
# Almacenar el nuevo descendiente en la nueva población: puede ocurrir que
    # el individuo resultante del cruce y posterior mutación no contenga ningún
    # predictor (todas sus posiciones son FALSE). Si esto ocurre, y para evitar
    # que se produzca un error al ajustar el modelo, se introduce aleatoriamente
    # un valor TRUE.
   if(all(descendencia == FALSE)){
     descendencia[sample(x = 1:length(descendencia), size = 1)] <- TRUE</pre>
   nueva_poblacion[j,] <- descendencia</pre>
  poblacion <- nueva_poblacion</pre>
 # CRITERIO DE PARADA
  # Si durante las últimas n generaciones el mejor individuo no ha mejorado por
  # una cantidad superior a tolerancia_parada, se detiene el algoritmo y no se
  # crean nuevas generaciones.
  if(parada_temprana & (i > rondas_parada)){
    ultimos n <- tail(unlist(porcentaje mejora), n = rondas parada)</pre>
    if(all(ultimos_n < tolerancia_parada)){</pre>
     print(paste("Algoritmo detenido en la generacion", i,
                 "por falta de mejora mínima de", tolerancia_parada,
                 "durante", rondas parada,
                 "generaciones consecutivas."))
     break()
   }
  }
}
# RESULTADOS
# La función devuelve una lista con 4 elementos:
                     una lista con el fitness del mejor individuo de cada
  fitness:
#
#
                     generación.
  mejor_individuo: una lista con la combinación de predictores del mejor
#
                     individuo de cada generación.
#
#
  porcentaje_mejora: una lista con el porcentaje de mejora entre el mejor
                     individuo de cada generación.
#
  df_resultados:
                     un dataframe con todos los resultados anteriores.
# Para crear el dataframe se convierten las listas a vectores del mismo tamaño.
          <- unlist(resultados fitness)</pre>
predictores <- resultados_individuo[!sapply(resultados_individuo, is.null)]</pre>
predictores <- sapply(predictores, function(x){paste(x, collapse = ", ")})</pre>
mejora
           <- c(NA, unlist(porcentaje_mejora))</pre>
```

## Comparación

Se compara el tiempo necesario para ejecutar el ejemplo del Titanic empleando paralelización y sin ella.

```
library(titanic)
library(dplyr)
# Se eliminan para este ejemplo 3 variables.
datos <- titanic_train %>% select(-Name, -Ticket, -Cabin)
datos <- na.omit(datos)
# Se convierten a factor las variables de tipo character.
datos <- datos %>% mutate_if(is.character, as.factor)
datos <- datos %>% mutate(Survived = as.factor(Survived))
```

## Sin paralelización

## [1] "Algoritmo detenido en la generacion 6 por falta de mejora mínima de 0.01
durante 5 generaciones consecutivas."

```
fin <- Sys.time()
tiempo_ejecucion <- fin-inicio
tiempo_ejecucion</pre>
```

## Time difference of 1.049898 mins

#### Con paralelización

## [1] "Algoritmo detenido en la generacion 6 por falta de mejora mínima de 0.01
durante 5 generaciones consecutivas."

```
fin <- Sys.time()
tiempo_ejecucion <- fin-inicio
tiempo_ejecucion</pre>
```

## Time difference of 31.91465 secs

Puede observarse que, para las mismas generaciones, la versión paralelizada tarda aproximadamente la mitad de tiempo.

# Bibliografía

John McCall, Genetic algorithms for modelling and optimisation, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 184, Issue 1, 2005

https://www.neuraldesigner.com/blog/genetic\_algorithms\_for\_feature\_selection

https://en.wikipedia.org/wiki/Crossover\_(genetic\_algorithm)



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.