UNIVERSIDAD DE BURGOS

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Grado en Ingeniería Informática

Trabajo de Final de Grado
ROBÓTICA: Modelado de Cinemática Directa e Inversa basado en el Algoritmo de Denavit-Hartenberg – Desacoplamiento de Subproblemas

Documentación Técnica
Desarrollo Teórico – Humanoide

Presentado por Jaime Sáiz de la Peña

en Universidad de Burgos — 19/01/2023

Tutores:

José Manuel Sáiz Diez

Raúl Marticorena Sánchez

Índice de contenido

Illustration Index

1 Casos planteados

Casos analizados – Motor de cada articulación respecto al anterior y a la base

	Arti-1	Arti-2	Arti-3	Arti-4	Arti-5	
Caso 3-0	Perpen	Perpen				DH
Caso 3-1	Perpen	Perpen	Paralelo			DH+Geométrico
Caso 4-0	Paralelo	Perpen	Paralelo			Cuadrúpodo resuelto por DH
Caso 4-1	Paralelo	Perpen	Paralelo			Cambio de ejes sobre Caso 4-0
Caso 4-2	Paralelo	Paralelo	Paralelo			
Caso 5-0	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo		
Caso 1-0...	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo	Paralelo	
… Arti. 1	Perpen	Fija	Fija	Fija	Fija	DH
… Arti. 2 *	Fija	Perpen	Fija	Fija	Fija	DH-Sin giro de 90º
… Arti. 2	Fija	Perpen	Fija	Fija	Fija	DH-Con giro de 90º
… Arti. 3	Fija	Fija	Perpen	Fija	Fija	DH
… Arti. 4	Fija	Fija	Fija	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 5	Fija	Fija	Fija	Fija	Paralelo	DH
… Arti. 1-2	Perpen	Perpen	Fija	Fija	Fija	DH
… Arti. 2-3 *	Fija	Perpen	Perpen	Fija	Fija	DH-Sin giro de 90º
… Arti. 2-3	Fija	Perpen	Perpen	Fija	Fija	DH-Con giro de 90º
… Arti. 3-4	Fija	Fija	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 4-5	Fija	Fija	Fija	Paralelo	Paralelo	DH
… Arti. 1-2-3	Perpen	Perpen	Perpen	Fija	Fija	DH
… Arti. 1-3-4	Perpen	Fija	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 2-3-4	Fija	Perpen	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 3-4-5	Fija	Fija	Perpen	Paralelo	Paralelo	DH
… Arti. 1-2-3-4	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 2-3-4-5	Fija	Perpen	Perpen	Paralelo	Paralelo	DH
… Arti. Desacopladas 1-2 + 3-4-5	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo	Paralelo	**Brazo** resuelto por DH y Acoplamiento, con plano y ángulo de ataque
Caso 7-0-Pierna	Perpen	Paralelo	Paralelo	Paralelo	Perpen	**Humanoide** resuelto por DH
Caso 7-0-Brazo	Perpen	Paralelo	Paralelo			**Humanoide** resuelto por DH

1.1 Caso 7-0 – Humanoide

Para el diseño de un robot de tipo Humanoide se necesita un número de articulaciones que permitan la altura suficiente de la cadera como para salvar obstáculos de cierto tamaño, y como para buscar el plano y ángulo de ataque adecuados. Habrá que tener en cuenta las limitaciones de movimiento de los motores y la necesidad de apoyar las piernas de forma correcta para tener una mayor estabilidad al avanzar y poder mover el centro de gravedad del Humanoide de forma equilibrada.
Por tanto, además de ejecutar correctamente el movimiento hacia adelante, parece necesario el juego de cadera y tobillo adecuado para poder apoyarse de forma equilibrada, con la superficie del pie completamente en contacto con el suelo. Y para asegurar el equilibrio necesario, se exigirá la posibilidad de girar lateralmente.
Por tanto, se establece que las Piernas deberían tener una estructura como la siguiente:

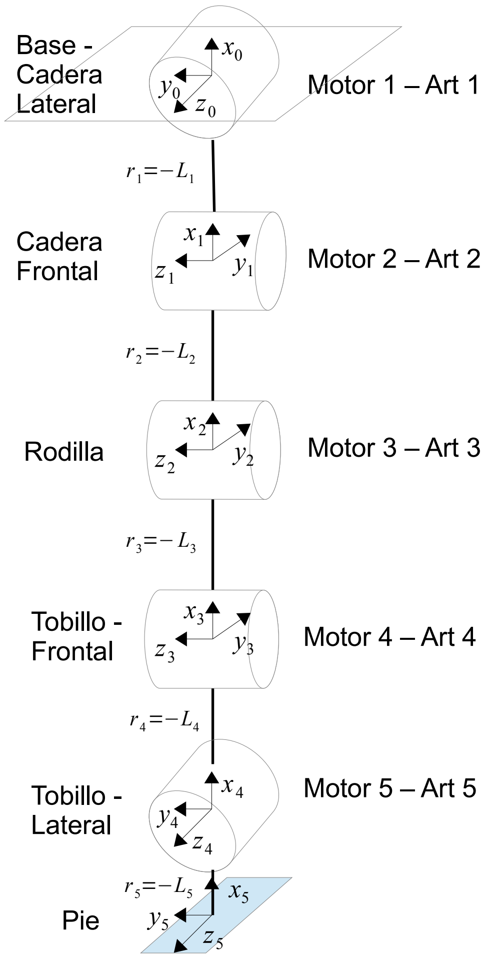

Ilustración 1: Pierna con cinco motores, con el primer y último motores paralelos al suelo al suelo y perpendiculares a los otros tres motores, paralelos entre sí

Aún así, esta arquitectura no permite al robot realizar giros dado que, para ello, se debería añadir un motor con el eje de giro perpendicular al suelo en cada una de las piernas.

Sin embargo, en el caso de los brazos no parece tener unas necesidades previas más allá de ser usados para controlar la posición del centro de gravedad del Humanoide, y cierto carácter estético para que el movimiento del Humanoide al avanzar parezca natural. De esta forma, su funcionalidad es escasa, dado que, de ser necesario para una funcionalidad mayor, se debería incluir otra articulación que permitiera el juego de muñeca. Por tanto, su arquitectura podría ser la siguiente:

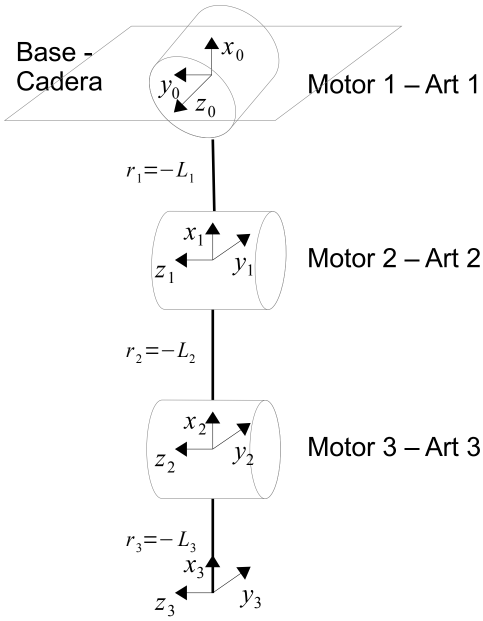

Ilustración 2: Brazo con tres motores, con el primero (hombro) con su eje de giro perpendicular a los otros dos, motores 2 y 3, con sus ejes paralelos entre sí.

De esta forma, se va a tratar de realizar el análisis de los miembros que conforman un Humanoide. Está compuesto por dos brazos (izquierdo y derecho) y dos piernas (izquierda y derecha) y cada de ellos será gestionado por la Unidad de Control de forma independiente.
Hay que tener en cuenta que ambas piernas y brazos son simétricos y que el análisis de cada uno de los mismos sería diferente, si se tratara del lado derecho o del izquierdo. Aún así, se hará de forma genérica para un único lado, que sería reproducible para el lado contrario.

Se va a comenzar por el análisis de una pierna con cinco motores. El primer motor (cadera-lateral) y el quinto y último (tobillo-lateral) tendrán el eje de giro paralelos entre sí para controlar el movimiento lateral, y para asegurar el apoyo completo del pie en el suelo, como no se consideran planos inclinados, se compensarán ambos ángulos. Los tres restantes, motores 2, 3, y 4 también tendrán sus ejes de giro paralelos entre sí, pero perpendicualres a los dos primeros. Y la base de la pierna se situará precisamente en la cadera, en el punto de unión con el resto del Humanoide.

En cuanto al brazo, tendrá tres motores. El primero (hombro) tendrá un eje de giro perpendicular a los otros dos, motores 2 y 3, con sus ejes paralelos entre sí.

1.1.1 Piernas con 5 motores

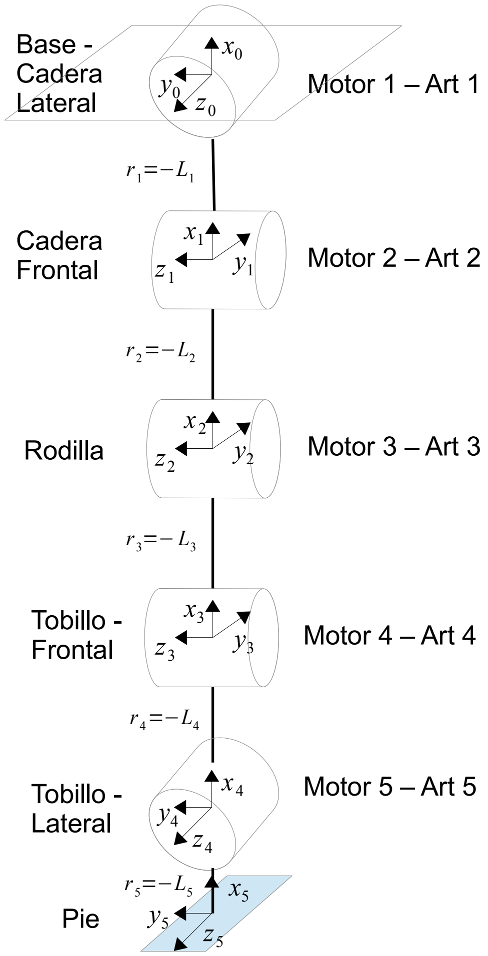

Ilustración 3: Pierna con cinco motores, con el primer y último motores paralelos al suelo al suelo y perpendiculares a los otros tres motores, paralelos entre sí

Se va a resolver el problema de Cinemática Directa e Inversa para una pierna con 5 motores definidos en una arquitectura lineal, sin desviaciones laterales, y para la que el movimiento de balanceo se desarrolla en la dirección de la marcha, hacia los valores positivos del eje Z .

1.1.1.1 Cinemática Directa, sin giro de 180º sobre el eje X en el primer motor

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes. Pero, en este caso, se hace una modificación en el primer motor ya que se considera positivo en el giro sobre el el eje X , para poder realizar el giro posterior en la propia aplicación, y probar que esa solución aportada pueda ser correcta:

$$
\begin{matrix}
Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\
0-1 & \theta_1 & 0 & r_1 & \pi/2 \\
1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \\
2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \\
3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & \pi/2 \\
4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0
\end{matrix}
=
\begin{matrix}
Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\
0-1 & \theta_1 & 0 & -L_1 & \pi/2 \\
1-2 & \theta_2 & 0 & -L_2 & 0 \\
2-3 & \theta_3 & 0 & -L_3 & 0 \\
3-4 & \theta_4 & 0 & -L_4 & \pi/2 \\
4-5 & \theta_5 & 0 & -L_5 & 0
\end{matrix}
=
\begin{matrix}
Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\
0-1 & \theta_1 & 0 & -83 & \pi/2 \\
1-2 & \theta_2 & 0 & -78 & 0 \\
2-3 & \theta_3 & 0 & -64 & 0 \\
3-4 & \theta_4 & 0 & -48 & \pi/2 \\
4-5 & \theta_5 & 0 & -16 & 0
\end{matrix}
$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^0A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [^3A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_4 & -C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^4A_5]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^0A_5={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^0A_5={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 \;=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & r_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & r_1S\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_1=-L_5$, $r_2=-L_4$, $r_3=-L_3$, $r_4=-L_2$, $r_5=-L_1$), y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_5+C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_5 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-C\theta_1 S\theta_5 & -C\theta_1 C\theta_5-S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & -S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & -C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & -L_1 C\theta_1-L_5 S\theta_1 S\theta_5-L_2 C\theta_1 C\theta_2-L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4+L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4-L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) \\ . & -L_1 S\theta_1-L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_5 C\theta_1 S\theta_5-L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1+L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4-L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) \\ . & -L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2-L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4-L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4+C\theta_5(-L_5 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4-L_5 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4) \\ . & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z)=(P_x\ ,\ P_y\ ,\ P_z)$$

Y se deducen las siguientes igualdades:

$$P_x=-L_1 C\theta_1-L_5 S\theta_1 S\theta_5-L_2 C\theta_1 C\theta_2-L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4+L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 \ldots$$
$$\ldots-L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$

$$P_y=-L_1 S\theta_1-L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_5 C\theta_1 S\theta_5-L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1+L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 \ldots$$
$$\ldots-L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$

$$P_z=-L_3 S(\theta_2+\theta_3)-L_2 S\theta_2-L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4-L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 \ldots$$
$$\ldots-C\theta_5(L_5 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4-L_5 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes y ángulos definidos, para así determinar el punto alcanzado.

Por otra parte, puesto que el problema cinemático directo, resuelto a través ecuaciones homogéneas contiene en el caso de un brazo de 5DOF, 12 ecuaciones, y se buscan sólo 5 relaciones que incluyan las variables articulares (una por cada grado de libertad), existirán, necesariamente ciertas interdependencias entre las 12 expresiones.
De hecho, todos los elementos no nulos de la matriz T ($\left([R]_{3x3}\quad [p]_{3x1}\right)_{3x4}$) dependen dela suma de los ángulos $\theta_2+\theta_3+\theta_4$.

Este caso no podría ser resuelto de forma analítica mediante la búsqueda de las expresiones que lo definieran dado que esa interdependencia de variables (5 variables para 3 componentes del punto de destino final) daría como resultado un número infinito de soluciones. Por tanto, para resolver el problema habría que añadir alguna condición al problema.
Una posible condición podría ser la orientación del último segmento respecto al suelo. De hecho, cuando se ha planteado el cálculo del punto de destino final, no se ha considerado la orientación, y resulta fundamental si se pretende que la superficie del pie se apoye por completo en el suelo.
Así la orientación debería ser tal que el último segmento (L5) fuera perpendicular a la superficie de apoyo.
Para ello, si se toma la submatriz de orientación (R), para que el segmento L5 fuera perpendicular al

suelo se deberían dar las siguientes condiciones:

$$T=\begin{pmatrix}[R]_{3x3} & [p]_{3x1}\\ [F]_{1x3} & [W]_{1x1}\end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix}[Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1}\\ [Perspectiva]_{1x3} & [Escalado]_{1x1}\end{pmatrix}_{4x4}=$$

$$\begin{pmatrix}[R]_{3x3} & [p]_{3x1}\\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1}\end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix}[Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1}\\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1}\end{pmatrix}_{4x4}$$

$$[R]_{3x3}=\begin{pmatrix}[n]_{3x1} & [o]_{3x1} & [a]_{3x1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_x & o_x & a_x\\ n_y & o_y & a_y\\ n_z & o_z & a_z\end{pmatrix}$$

Los vectores [n] ($\vec{n}$), [o] ($\vec{o}$), [a] ($\vec{a}$), son vectores ortogonales unitarios, donde [n] es un vector unitario que representaría la dirección del eje x^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0), [o] es un vector unitario que representaría la dirección del eje y^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0) y [a] es un vector unitario que representaría la dirección del eje z^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0).

Si ahora se analiza el desarrollo matricial anterior que relaciona el último Sistema de Coordenadas con el correspondiente al Origen de Coordenadas del problema completo, se puede comprobar que los Sistemas de Coordenadas de ambos extremos coinciden.

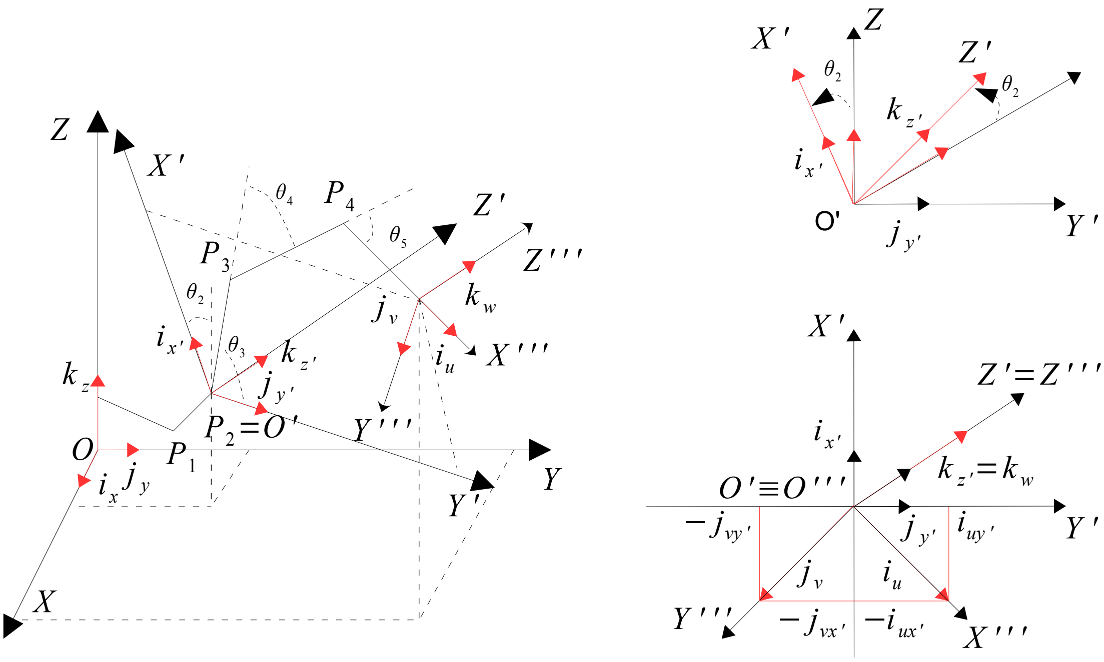

Ilustración 4: Relación de vectores directores de los ejes de los diferentes Sistemas de Coordenadas del segundo grupo de motores

Como consecuencia, en caso de no tener rotación alguna del Sistema de Coordenadas final respecto del Sistema de Coordenadas de la base (Sistema de Coordenadas de Referencia), la matriz de rotación sería a matriz Identidad (I):

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Y aplicado al problema (lado derecho de la igualdad): $T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5$

$$R=\begin{pmatrix}\vec{i}_x\vec{i}_u & \vec{i}_x\vec{j}_v & \vec{i}_x\vec{k}_w\\ \vec{j}_y\vec{i}_u & \vec{j}_y\vec{j}_v & \vec{j}_y\vec{k}_w\\ \vec{k}_z\vec{i}_u & \vec{k}_z\vec{j}_v & \vec{k}_z\vec{k}_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}S\theta_1 S\theta_5+C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_5 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\\ C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-C\theta_1 S\theta_5 & -C\theta_1 C\theta_5-S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\\ C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & -S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & -C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\end{pmatrix}$$

Así se pueden extraer hasta nueve expresiones al igualar los dos lados:

$$\vec{i}_x\vec{i}_u=S\theta_1 S\theta_5+C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=1 \quad *$$
$$\vec{i}_x\vec{j}_v=C\theta_5 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$
$$\vec{i}_x\vec{k}_w=C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0 \quad *$$
$$\vec{j}_y\vec{i}_u=C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-C\theta_1 S\theta_5=0$$
$$\vec{j}_y\vec{j}_v=-C\theta_1 C\theta_5-S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=1$$
$$\vec{j}_y\vec{k}_w=S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$
$$\vec{k}_z\vec{i}_u=C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$
$$\vec{k}_z\vec{j}_v=-S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$
$$\vec{k}_z\vec{k}_w=-C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=1$$

Si ahora se toma la tercera expresión se puede determinar cierta relación de ángulos:

$$\vec{i}_x\vec{k}_w=C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$

Expresión de la que se puede extraer como una de sus soluciones:

$$\theta_2+\theta_3+\theta_4=0\pm\pi$$

Y si se toma la primera expresión:

$$\vec{i}_x\vec{i}_u=S\theta_1 S\theta_5+C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=1$$
$$S\theta_1 S\theta_5+C\theta_1 C\theta_5=1$$

Y por la siguiente razón trigonométrica:

$$\cos(A-B)=\cos(A)\cos(B)+\sin(A)\sin(B)$$

Se obtendría:

$$C(\theta_1-\theta_5)=1$$

$$\theta_1 - \theta_5 = 0$$
$$\theta_1 = \theta_5 \quad *$$

Y aunque pueda parecer que no se llega a ninguna solución aceptable, esta solución tiene una interpretación necesaria para el robot. De hecho, ambos ángulos deben ser iguales si se pretende que el robot esté equilibrado al caminar, puesto que el ángulo del primer motor debe ser compensado por el mismo ángulo del último motor para tener equilibrado el robot y que se mantenga de forma vertical. De esta forma, s centro de gravedad será lo más estable posible, siempre y cuando permanezca dentro de la vertical marcada por la base y los hombros.

De igual forma, se puede analizar el resto de expresiones respecto a los otros ángulos.

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0 \pm \pi$$
$$\theta_4 = -\theta_2 - \theta_3 \quad *$$

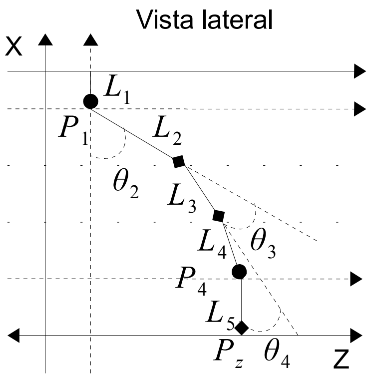

Ilustración 5: Relación lógica de ángulos para llegar perpendicular al suelo

Se vuelve a tener una expresión que parece no llegar a ninguna ecuación aceptable y, sin embargo, supone una nueva relación entre los diferentes motores que permite el equilibrio del robot al mantener el robot lo más verticalmente posible.

Por otra parte, se puede intentar llegar a calcular los ángulos necesarios para alcanzar ciertos puntos que permitan al robot caminar.
Para ello se puede hacer el análisis del robot para alcanzar cualquier punto mediante el mismo tratamiento que en los casos anteriores.

Si se parte de $\theta_1 = \theta_5$ y $\theta_4 = -\theta_2 - \theta_3$, y de las expresiones que determinan el punto final de destino:

$$P_x = -L_1 C\theta_1 - L_5 S\theta_1 S\theta_5 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 \ldots$$
$$\ldots - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$
$$P_y = -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_5 C\theta_1 S\theta_5 - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 \ldots$$
$$\ldots - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$
$$P_z = -L_3 S(\theta_2+\theta_3) - L_2 S\theta_2 - L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 - L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 \ldots$$
$$\ldots - C\theta_5 (L_5 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 - L_5 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4)$$

Aplicando $\theta_2 + \theta_3 = -\theta_4$

$$
\begin{aligned}
P_x &= -L_1 C\theta_1 - L_5 S\theta_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_4 C(-\theta_4) C\theta_1 C\theta_4 + L_4 S(-\theta_4) C\theta_1 S\theta_4 \ldots \\
&\ldots - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 C\theta_1 C(-\theta_4+\theta_4) \\
P_y &= -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_5 C\theta_1 S\theta_1 - L_4 C(-\theta_4) C\theta_4 S\theta_1 + L_4 S(-\theta_4) S\theta_1 S\theta_4 \ldots \\
&\ldots - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 S\theta_1 C(-\theta_4+\theta_4) \\
P_z &= -L_3 S(-\theta_4) - L_2 S\theta_2 - L_4 C(-\theta_4) S\theta_4 - L_4 S(-\theta_4) C\theta_4 \ldots \\
&\ldots - C\theta_1 (L_5 C(-\theta_4) S\theta_4 - L_5 S(-\theta_4) C\theta_4)
\end{aligned}
$$

Aplicando $C\theta_4 = C(-\theta_4)$, $S\theta_4 = -S(-\theta_4)$, $C(0)=1$ y $S(0)=0$:

$$
\begin{aligned}
P_x &= -L_1 C\theta_1 - L_5 S\theta_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_4 C(\theta_4) C\theta_1 C\theta_4 - L_4 S(\theta_4) C\theta_1 S\theta_4 \ldots \\
&\ldots - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 C\theta_1 \\
P_y &= -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_5 C\theta_1 S\theta_1 - L_4 C(\theta_4) C\theta_4 S\theta_1 - L_4 S(\theta_4) S\theta_1 S\theta_4 \ldots \\
&\ldots - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 S\theta_1 \\
P_z &= L_3 S(\theta_4) - L_2 S\theta_2 - L_4 C(\theta_4) S\theta_4 + L_4 S(\theta_4) C\theta_4 \ldots \\
&\ldots - C\theta_1 (L_5 C(\theta_4) S\theta_4 + L_5 S(\theta_4) C\theta_4)
\end{aligned}
$$

Simplificando y factorizando:

$$
\begin{aligned}
P_x &= -L_1 C\theta_1 - L_5 (S\theta_1)^2 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_1 (C\theta_4)^2 - L_4 C\theta_1 (S\theta_4)^2 \ldots \\
&\ldots - L_3 C\theta_1 (C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3) - L_5 (C\theta_1)^2 \\
P_y &= -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_5 C\theta_1 S\theta_1 - L_4 S\theta_1 (C\theta_4)^2 - L_4 S\theta_1 (S\theta_4)^2 \ldots \\
&\ldots + L_3 S\theta_1 (C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3) + L_5 C\theta_1 S\theta_1 \\
P_z &= L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2
\end{aligned}
$$

Aplicando el coseno de la suma:

$$
\begin{aligned}
P_x &= -L_1 C\theta_1 - L_5 (S\theta_1)^2 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_1 (C\theta_4)^2 - L_4 C\theta_1 (S\theta_4)^2 \ldots \\
&\ldots - L_3 C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) - L_5 (C\theta_1)^2 \\
P_y &= -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_5 C\theta_1 S\theta_1 - L_4 S\theta_1 (C\theta_4)^2 - L_4 S\theta_1 (S\theta_4)^2 \ldots \\
&\ldots - L_3 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) - L_5 C\theta_1 S\theta_1 \\
P_z &= L_3 S(\theta_4) - L_2 S\theta_2
\end{aligned}
$$

Aplicando $\theta_2+\theta_3 = -\theta_4$:

$$
\begin{aligned}
P_x &= -L_1 C\theta_1 - L_5 (S\theta_1)^2 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_1 (C\theta_4)^2 - L_4 C\theta_1 (S\theta_4)^2 \ldots \\
&\ldots - L_3 C\theta_1 C(-\theta_4) - L_5 C\theta_1 C\theta_1 \\
P_y &= -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_5 C\theta_1 S\theta_1 - L_4 S\theta_1 (C\theta_4)^2 - L_4 S\theta_1 (S\theta_4)^2 \ldots \\
&\ldots - L_3 S\theta_1 C(-\theta_4) - L_5 C\theta_1 S\theta_1 \\
P_z &= L_3 S(\theta_4) - L_2 S\theta_2
\end{aligned}
$$

Aplicando $C\theta_4 = C(-\theta_4)$, la suma de los cuadrados y simplificando:

$$
\begin{aligned}
P_x &= -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_1 - L_3 C\theta_1 C\theta_4 - L_5 \\
P_y &= -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_4 S\theta_1 - L_3 S\theta_1 C\theta_4 \\
P_z &= L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2
\end{aligned}
$$

Operando:

$$P_x + L_1 = C\theta_1(-L_1 - L_2 C\theta_2 - L_4 - L_3 C\theta_4)$$
$$P_y = S\theta_1(-L_1 - L_2 C\theta_2 - L_4 - L_3 C\theta_4)$$
$$P_z = L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2$$

Despejando $(-L_1 - L_2 C\theta_2 - L_4 - L_3 C\theta_4)$ en la segunda igualdad y sustituyendo en la primera:

$$P_y / S\theta_1 = (-L_1 - L_2 C\theta_2 - L_4 - L_3 C\theta_4)$$
$$P_x + L_5 = C\theta_1 (P_y / S\theta_1)$$
$$S\theta_1 / C\theta_1 = tg(\theta_1) = P_y / (P_x + L_5)$$
$$\theta_1 = arctg(P_y / (P_x + L_5)) \quad *$$

Y si se sigue operando con la segunda y tercera igualdad:

$$P_y = S\theta_1(-L_1 - L_2 C\theta_2 - L_4 - L_3 C\theta_4)$$
$$P_z = L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2$$

$$P_y / S\theta_1 = -L_1 - L_2 C\theta_2 - L_4 - L_3 C\theta_4$$
$$L_3 S\theta_4 = L_2 S\theta_2 + P_z$$

$$-(P_y / S\theta_1) - L_1 - L_2 C\theta_2 - L_4 = L_3 C\theta_4$$
$$L_3 S\theta_4 = L_2 S\theta_2 + P_z$$

$$L_3 C\theta_4 = -(P_y / S\theta_1) + L_1 + L_2 C\theta_2 + L_4$$
$$L_3 S\theta_4 = L_2 S\theta_2 + P_z$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$L_3^2 = (-(P_y / S\theta_1) + L_1 + L_2 C\theta_2 + L_4)^2 + (L_2 S\theta_2 + P_z)^2$$

$$L_3^2 = (-(P_y / S\theta_1) + L_5 + L_4 + L_2 C\theta_2)^2 + (L_2 S\theta_2 + P_z)^2$$

Y operando:

$$L_3^2 = (-(P_y / S\theta_1) + L_1 + L_4)^2 + 2(-(P_y / S\theta_1) + L_1 + L_4)(L_2 C\theta_2) + (L_2 C\theta_2)^2 + (L_2 S\theta_2)^2 + 2(L_2 S\theta_2)(P_z) + P_z^2$$

$$L_3^2 = (-(P_y / S\theta_1) + L_1 + L_4)^2 + 2(-(P_y / S\theta_1) + L_1 + L_4)(L_2 C\theta_2) + 2(L_2 S\theta_2)(P_z) + P_z^2 + L_2^2$$

$$(2 L_2(-(P_y / S\theta_1) + L_1 + L_4)) C\theta_2 + (2 P_z L_2) S\theta_2 = (L_3^2 - L_2^2 - P_z^2 - (-(P_y / S\theta_1) + L_1 + L_4)^2)$$

$$(2 L_2(L_1 + L_4 - (P_y / S\theta_1))) C\theta_2 + (2 P_z L_2) S\theta_2 = (L_3^2 - L_2^2 - P_z^2 - (L_1 + L_4 - (P_y / S\theta_1))^2)$$

Y aplicando la ecuación trascendente:

$$a \cos\theta + b \sin\theta = c \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

$$\theta_2 = atan2((2P_z L_2),(2L_2(L_1+L_4-(P_y/S\theta_1))))...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(2L_2(L_1+L_4-(P_y/S\theta_1)))^2+(2P_zL_2)^2-(L_3^2-L_2^2-P_z^2-(L_1+L_4-(P_y/S\theta_1))^2)^2},(L_3^2-L_2^2-P_z^2-(L_1+L_4-(P_y/S\theta_1))^2)) \quad *$$

Por tanto ya se tiene definido el ángulo θ_2 . Y ahora de la siguiente igualdad se obtendría θ_4 :

$$L_3 S\theta_4 = L_2 S\theta_2 + P_z$$

$$\theta_4 = \arcsin((L_2 S\theta_2 + P_z)/L_3) \quad *$$

Y con $\theta_4 = -\theta_2 - \theta_3$:

$$\theta_3 = -\theta_2 - \theta_4$$

Luego ya se tendrían definidos todos los ángulos correspondientes a las variables articulares de este problema.

Y a modo de resumen:

$$\theta_1 = arctg(P_y/(P_x+L_5))$$
$$\theta_2 = atan2((2P_z L_2),(2L_2(L_1+L_4-(P_y/S\theta_1))))...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(2L_2(L_1+L_4-(P_y/S\theta_1)))^2+(2P_zL_2)^2-(L_3^2-L_2^2-P_z^2-(L_1+L_4-(P_y/S\theta_1))^2)^2},(L_3^2-L_2^2-P_z^2-(L_1+L_4-(P_y/S\theta_1))^2))$$
$$\theta_4 = \arcsin((L_2 S\theta_2 + P_z)/L_3)$$
$$\theta_5 = \theta_1$$
$$\theta_3 = -\theta_2 - \theta_4$$

Otra posibilidad sería no definir $\theta_5 = \theta_1$ o $\theta_4 = -\theta_2 - \theta_3$ como se ha hecho en este caso. Por ejemplo, cuando el suelo no sea exactamente horizontal, ya que en ese caso, se debe mantener cierto control sobre el Centro de Gravedad del robot, pero habrá un cierto ángulo de diferencia que se corresponde con el ángulo de inclinación del suelo.

Sin embargo, los resultados obtenidos a través de la aplicación para controlar el Humanoide no dan los resultados esperados, a pesar de contar con ecuaciones que definen el movimiento de las piernas. Incluso cuando se ha modificado e ángulo $\alpha_{0-1} = -\pi/2$ desde el propio programa. Por tanto, parece previsible que estas ecuaciones no sean correctas en alguno de los términos que las componen.
Por ello, va a realizar el mismo ejercicio con la corrección del ángulo $\alpha_{0-1} = -\pi/2$ ya incluida en la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg. Y se revisarán los nuevos resultados obtenidos comparándolos con los obtenidos en este apartado con $\alpha_{0-1} = \pi/2$.
Y en caso de encontrar expresiones diferentes y resultados diferentes, podría lleva a pensar que no siempre se pueden resolver los errores de diseño de la arquitectura a través de programación, para aplicar el modelo de Denavit-Hartenberg.

1.1.1.2 Cinemática Directa, con giro de 180º sobre el eje X en el primer motor

En este caso, se va a considerar que el ángulo de giro del primer motor sobre el eje X a la hora de obtener los parámetros de la matriz de Denavit-Hartenberg sea de 180º, y por tanto $\alpha_{0-1} = -\pi/2$.
De igual forma, se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por

determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & r_1 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & \pi/2 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & -L_1 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & -L_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & -L_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & -L_4 & \pi/2 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & -L_5 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & -83 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & -78 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & -64 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & -48 & \pi/2 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & -16 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$
{}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
[{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{3}A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_4 & -C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
[{}^{4}A_5]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$
T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5
$$

$$
P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$
T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5 \quad =
$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_1 = -L_1$, $r_2 = -L_2$, $r_3 = -L_3$, $r_4 = -L_4$, $r_5 = -L_5$), y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ($(0_{u0'}, 0_{v0'}, 0_{w0'})$ - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x, y, z)$ - $O - XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - S\theta_1 S\theta_5 & -C\theta_5 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ C\theta_1 S\theta_5 + C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 C\theta_5 - S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ -C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_5 S\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4 \\ . & -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 C\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1 \\ . & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 + L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 + L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4) \\ . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z) = (P_x \ , \ P_y \ , \ P_z)$$

Y se deducen las siguientes igualdades:

$$P_x = -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_5 S\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \ldots$$
$$\ldots - L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4$$

$$P_y = -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 C\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \ldots$$
$$\ldots - L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1$$

$$P_z = L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 + L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 \ldots$$
$$\ldots + L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes y ángulos definidos, para así determinar el punto alcanzado.

Como se ha comentado con anterioridad, otra posibilidad sería no definir $\theta_5 = \theta_1$ o $\theta_4 = -\theta_2 - \theta_3$ como se ha hecho en este caso. Por ejemplo, cuando el suelo no sea exactamente horizontal, ya que en ese caso, se debe mantener cierto control sobre el Centro de Gravedad del robot, pero habrá un cierto ángulo de diferencia que se corresponde con el ángulo de inclinación del suelo.

Así, en principio, los pies deben estar en contacto con el suelo, pero el cuerpo debe seguir estando de la forma más vertical posible para mantener el Centro de Gravedad estable. Por tanto, los motores de los tobillos deben girar hasta permitir estas dos condiciones. Y como consecuencia, se siguen manteniendo las condiciones mínimas necesarias para resolver la Cinemática Inversa de una forma similar.

Sería interesante resolver ese nuevo problema para asegurar la estabilidad del Humanoide sobre planos inclinados, o cuando el ángulo del Humanoide y la perpendicular al suelo varía de forma inesperada. Pero, para ello se debería montar un giróscopo en el Humanoide para poder determinar su orientación relativa respecto al suelo y poder corregir las desviaciones de la vertical del Centro de Gravedad producidas por la propia inclinación del suelo.

Un dispositivo posible para resolver este problema podría ser un MPU6050 ("Trabajando con Sistemas de Inercia" [WWWiescampDoc4] - "Ángulos de navegación" [WWWwikipediaDoc9] - "Precesión" [WWWwikipediaDoc10] - "Ángulos de Euler" [WWWwikiwandDoc0] - "MPU-6050 giroscopio de 3 ejes + módulo de acelerómetro" [WWWaliexpressProd109]).

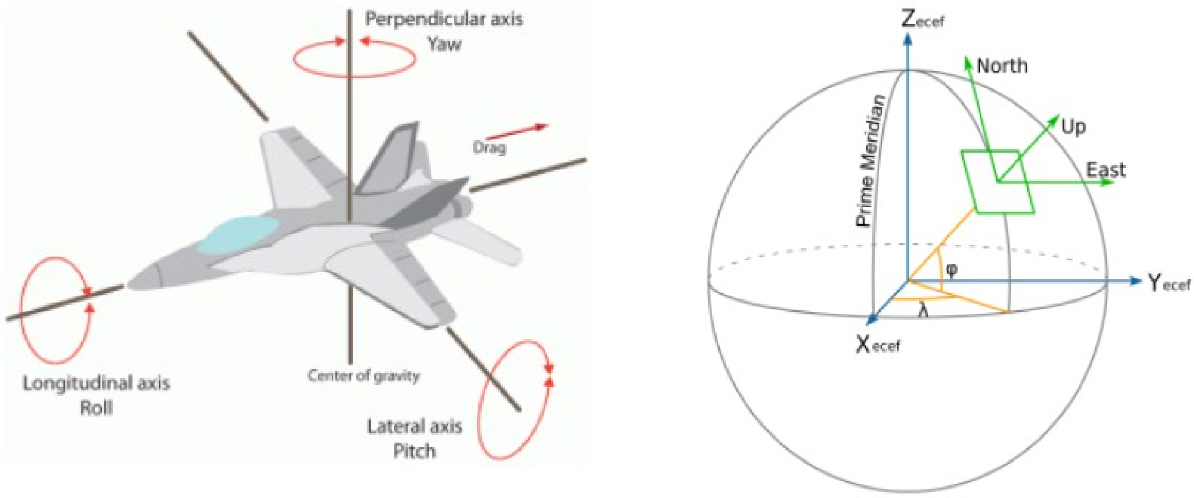

Ilustración 6: MPU6050 – Giróscopo/Acelerómetro de tres ejes (1) [WWWiescampDoc4]

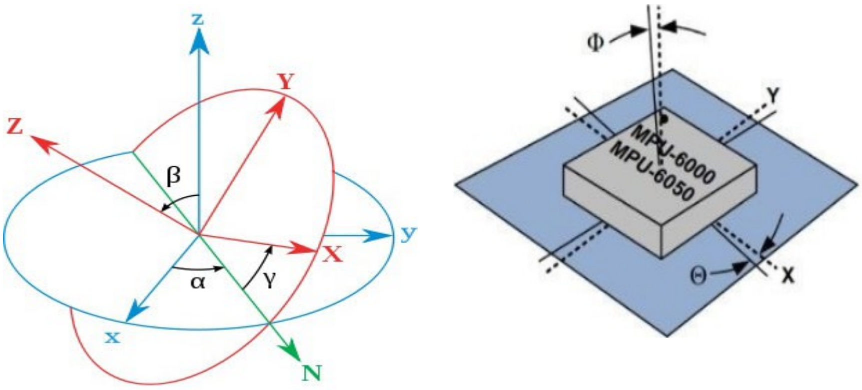

Ilustración 7: MPU6050 - Giróscopo/Acelerómetro de tres ejes (2)
(Izquierda: [WWWwikiwandDoc0] - *Derecha:*[WWWiescampDoc4])

1.1.1.3 Cinemática Inversa – Análisis de Orientación

Puesto que el problema cinemático directo, resuelto a través ecuaciones homogéneas contiene en el caso de un brazo de 5DOF, 12 ecuaciones, y se buscan sólo 5 relaciones que incluyan las variables articulares (una por cada grado de libertad), existirán, necesariamente ciertas interdependencias entre las 12 expresiones.
De hecho, todos los elementos no nulos de la matriz T ($\left([R]_{3x3} \quad [p]_{3x1}\right)_{3x4}$) dependen de la suma de los ángulos $\theta_2+\theta_3+\theta_4$.

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5 & -C\theta_5 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ C\theta_1 S\theta_5+C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 C\theta_5-S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ -C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_5 S\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4 \\ . & -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 C\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1 \\ . & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 + L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 + L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4) \\ . & 1 \end{pmatrix}$$

Este caso no podría ser resuelto de forma analítica mediante la búsqueda de las expresiones que lo definieran dado que esa interdependencia de variables (5 variables para 3 componentes del punto de destino final) daría como resultado un número infinito de soluciones. Por tanto, para resolver el problema habría que añadir alguna condición al problema.
Una posible condición podría ser la orientación del último segmento respecto al suelo. De hecho, cuando se ha planteado el cálculo del punto de destino final, no se ha considerado la orientación, y resulta fundamental si se pretende que la superficie del pie se apoye por completo en el suelo.
Así la orientación debería ser tal que el último segmento (L_5) fuera perpendicular a la superficie de apoyo.
Para ello, si se toma la submatriz de orientación (R), para que el segmento L_5 fuera perpendicular al suelo se deberían dar las siguientes condiciones:

$$T=\begin{pmatrix} [R]_{3x3} & [p]_{3x1} \\ [F]_{1x3} & [W]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} [Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1} \\ [Perspectiva]_{1x3} & [Escalado]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} =$$

$$\begin{pmatrix} [R]_{3x3} & [p]_{3x1} \\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} [Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1} \\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4}$$

$$[R]_{3x3} = \left([n]_{3x1} \quad [o]_{3x1} \quad [a]_{3x1}\right) \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

Los vectores $[n]$ ($\vec{n}$), $[o]$ ($\vec{o}$), $[a]$ ($\vec{a}$), son vectores ortogonales unitarios, donde $[n]$ es un vector unitario que representaría la dirección del eje x^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0), $[o]$ es un vector unitario que representaría la dirección del eje y^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0, y^0, z^0) y $[a]$ es un vector unitario que representaría la dirección del eje z^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0, y^0, z^0) .

Como ejemplo, en el caso de ser una única rotación alrededor del eje X :

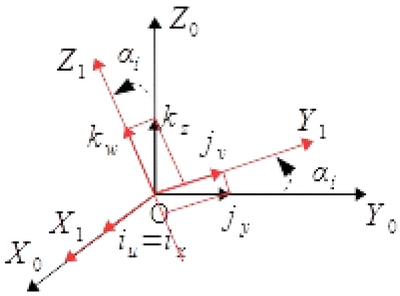

Ilustración 8: Relación de rotación de un ángulo α sobre el eje X en un sistema de coordenadas

$$P(x,y,z) = [P_x, P_y, P_z]^T = P_x \vec{i}_x + P_y \vec{j}_y + P_z \vec{k}_z$$
$$P(u,v,w) = [P_u, P_v, P_w]^T = P_u \vec{i}_u + P_v \vec{j}_v + P_w \vec{k}_w$$
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = R(x,\alpha) \begin{pmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{pmatrix}$$

Aplicando el producto tensorial, producto de Kronecker:

$$R(x,\alpha) = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} P_u & P_v & P_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_x \vec{i}_u & \vec{i}_x \vec{j}_v & \vec{i}_x \vec{k}_w \\ \vec{j}_y \vec{i}_u & \vec{j}_y \vec{j}_v & \vec{j}_y \vec{k}_w \\ \vec{k}_z \vec{i}_u & \vec{k}_z \vec{j}_v & \vec{k}_z \vec{k}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{pmatrix}$$

Si se interpreta este resultado, se ve que el primer elemento (fila 1-columna 1) vale "1" precisamente por realizarse un giro al rededor del eje X , y que las componentes dependientes del ángulo (fila 2-columna 2 ; fila 2-columna 3 ; fila 3-columna 2 ; fila 3-columna 3), lo son por contemplar la relación de los vectores unitarios $\vec{j}_v, \vec{k}_w$ respecto a las otras dos componentes $\vec{j}_y, \vec{k}_z$.

Se puede volver al desarrollo matricial anterior que relaciona el último Sistema de Coordenadas con el correspondiente al Origen de Coordenadas del problema completo.

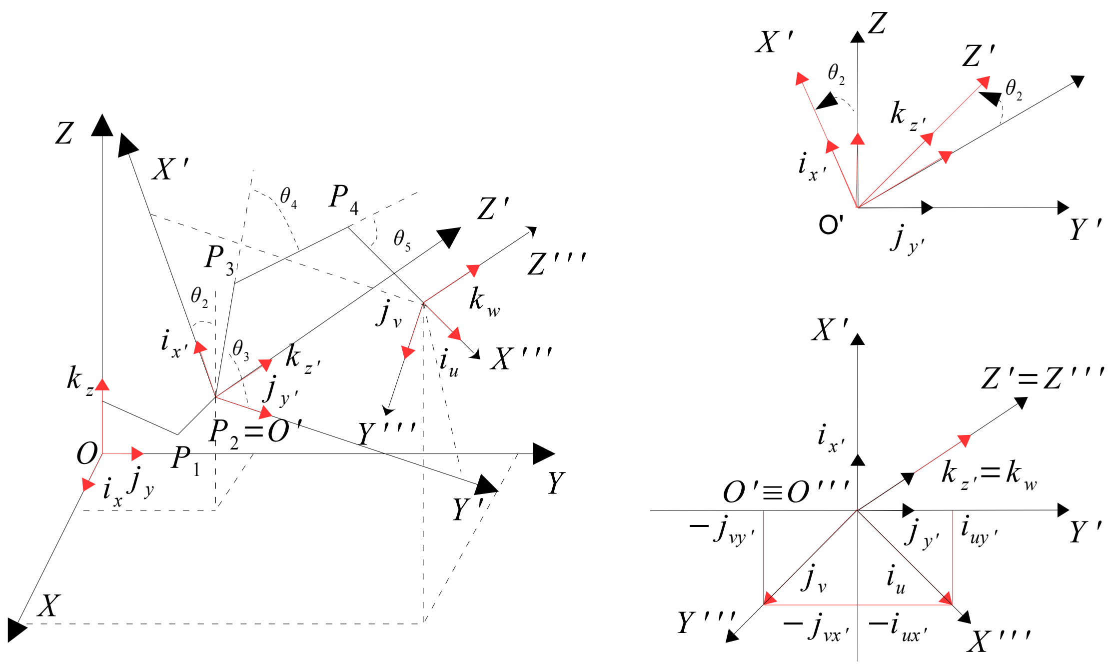

Ilustración 9: Relación de vectores directores de los ejes de los diferentes Sistemas de Coordenadas del segundo grupo de motores

Y si se analiza el caso, se puede comprobar que los Sistemas de Coordenadas de ambos extremos coinciden.
Como consecuencia, en caso de no tener rotación alguna del Sistema de Coordenadas final respecto del Sistema de Coordenadas de la base (Sistema de Coordenadas de Referencia), la matriz de rotación sería a matriz Identidad (I):

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Y aplicado al problema (lado derecho de la igualdad): $T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5$

$$R=\begin{pmatrix}\vec{i}_x\vec{i}_u & \vec{i}_x\vec{j}_v & \vec{i}_x\vec{k}_w\\ \vec{j}_y\vec{i}_u & \vec{j}_y\vec{j}_v & \vec{j}_y\vec{k}_w\\ \vec{k}_z\vec{i}_u & \vec{k}_z\vec{j}_v & \vec{k}_z\vec{k}_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5 & -C\theta_5 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\\ C\theta_1 S\theta_5+C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 C\theta_5-S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\\ -C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)\end{pmatrix}$$

Así se pueden extraer hasta nueve expresiones al igualar los dos lados:

$$\vec{i}_x\vec{i}_u=C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5=1 \quad *$$
$$\vec{i}_x\vec{j}_v=-C\theta_5 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$
$$\vec{i}_x\vec{k}_w=C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0 \quad *$$
$$\vec{j}_y\vec{i}_u=C\theta_1 S\theta_5+C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$
$$\vec{j}_y\vec{j}_v=C\theta_1 C\theta_5-S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=1$$

$$\vec{j}_y \vec{k}_w = S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$
$$\vec{k}_z \vec{i}_u = -C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$
$$\vec{k}_z \vec{j}_v = S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$
$$\vec{k}_z \vec{k}_w = C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=1$$

Si ahora se toma la tercera expresión se puede determinar cierta relación de ángulos:

$$\vec{i}_x \vec{k}_w = C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0$$

Expresión de la que se puede extraer como una de sus soluciones:

$$\theta_2+\theta_3+\theta_4=0\pm\pi$$

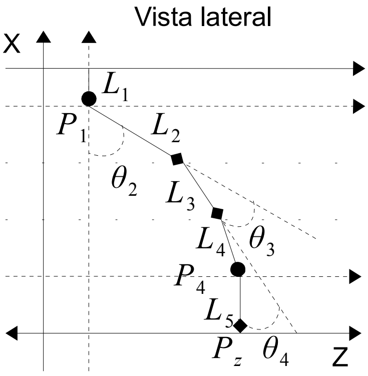

Ilustración 10: Relación lógica de ángulos para llegar perpendicular al suelo

Y si se toma la primera expresión:

$$\vec{i}_x \vec{i}_u = C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - S\theta_1 S\theta_5 = 1$$
$$S\theta_1 S\theta_5 + C\theta_1 C\theta_5 = 1$$

Y por la siguiente razón trigonométrica:

$$\cos(A-B)=\cos(A)\cos(B)+\sin(A)\sin(B)$$

Se obtendría:

$$C(\theta_1-\theta_5)=1$$
$$\theta_1-\theta_5=0$$
$$\theta_1=\theta_5 \quad *$$

Y aunque pueda parecer que no se llega a ninguna solución aceptable, esta solución tiene una interpretación necesaria para el robot. De hecho, ambos ángulos deben ser iguales si se pretende que el robot esté equilibrado al caminar, puesto que el ángulo del primer motor debe ser compensado por el mismo ángulo del último motor para tener equilibrado el robot y que se mantenga de forma vertical. De esta forma, s centro de gravedad será lo más estable posible, siempre y cuando permanezca dentro de la vertical marcada por la base y los hombros.

De igual forma, se puede analizar el resto de expresiones respecto a los otros ángulos.

$$\theta_2+\theta_3+\theta_4=0\pm\pi$$
$$\theta_4=-\theta_2-\theta_3 \quad *$$

Se vuelve a tener una expresión que parece no llegar a ninguna ecuación aceptable y, sin embargo, supone una nueva relación entre los diferentes motores que permite el equilibrio del robot al mantener el robot lo más verticalmente posible.

Por otra parte, se puede intentar llegar a calcular los ángulos necesarios para alcanzar ciertos puntos que permitan al robot caminar.
Para ello se puede hacer el análisis del robot para alcanzar cualquier punto mediante el mismo tratamiento que en los casos anteriores.

Si se parte de $\theta_1=\theta_5$ y $\theta_4=-\theta_2-\theta_3$, y de las expresiones que determinan el punto final de destino:

$$P_x=-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2+L_5S\theta_1S\theta_5+L_4S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3...$$
$$...-L_5C\theta_1C\theta_5C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-L_4C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1C\theta_4$$
$$P_y=-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-L_5C\theta_1S\theta_5+L_4S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1+L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3...$$
$$...-L_5C\theta_5S\theta_1C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-L_4C(\theta_2+\theta_3)C\theta_4S\theta_1$$
$$P_z=L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2+L_4C(\theta_2+\theta_3)S\theta_4+L_4S(\theta_2+\theta_3)C\theta_4...$$
$$...+L_5C\theta_5(C(\theta_2+\theta_3)S\theta_4+S(\theta_2+\theta_3)C\theta_4)$$

Aplicando $\theta_2+\theta_3=-\theta_4$

$$P_x=-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2+L_5S\theta_1S\theta_5+L_4S(-\theta_4)C\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3...$$
$$...-L_5C\theta_1C\theta_5C(-\theta_4+\theta_4)-L_4C(-\theta_4)C\theta_1C\theta_4$$
$$P_y=-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-L_5C\theta_1S\theta_5+L_4S(-\theta_4)S\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1+L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3...$$
$$...-L_5C\theta_5S\theta_1C(-\theta_4+\theta_4)-L_4C(-\theta_4)C\theta_4S\theta_1$$
$$P_z=L_3S(-\theta_4)+L_2S\theta_2+L_4C(-\theta_4)S\theta_4+L_4S(-\theta_4)C\theta_4...$$
$$...+L_5C\theta_5(C(-\theta_4)S\theta_4+S(-\theta_4)C\theta_4)$$

Aplicando $C\theta_4=C(-\theta_4)$, $S\theta_4=-S(-\theta_4)$ y $C(0)=1$:

$$P_x=-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2+L_5S\theta_1S\theta_5-L_4S\theta_4C\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3...$$
$$...-L_5C\theta_1C\theta_5-L_4C\theta_4C\theta_1C\theta_4$$
$$P_y=-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-L_5C\theta_1S\theta_5-L_4S\theta_4S\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1+L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3...$$
$$...-L_5C\theta_5S\theta_1-L_4C\theta_4C\theta_4S\theta_1$$
$$P_z=-L_3S\theta_4+L_2S\theta_2+L_4C\theta_4S\theta_4-L_4S\theta_4C\theta_4...$$
$$...+L_5C\theta_5(C\theta_4S\theta_4-S\theta_4C\theta_4)$$

Simplificando y factorizando:

$$P_x=-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2+L_5S\theta_1S\theta_5-L_4C\theta_1(S\theta_4)^2-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3...$$
$$...-L_5C\theta_1C\theta_5-L_4C\theta_1(C\theta_4)^2$$
$$P_y=-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-L_5C\theta_1S\theta_5-L_4S\theta_1(S\theta_4)^2-L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1+L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3...$$
$$...-L_5C\theta_5S\theta_1-L_4S\theta_1(C\theta_4)^2$$

$$P_z = -L_3 S\theta_4 + L_2 S\theta_2$$

$$P_x = -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_5 (C\theta_1 C\theta_5 - S\theta_1 S\theta_5) - L_3 C\theta_1 (C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3)...$$
$$...-L_4 C\theta_1$$
$$P_y = -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 (C\theta_1 S\theta_5 + S\theta_1 C\theta_5) - L_3 S\theta_1 (C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3)...$$
$$...-L_4 S\theta_1$$
$$P_z = -L_3 S\theta_4 + L_2 S\theta_2$$

Aplicando $\theta_1 = \theta_5$:

$$P_x = -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_5 (C\theta_1 C\theta_1 - S\theta_1 S\theta_1) - L_3 C\theta_1 (C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3)...$$
$$...-L_4 C\theta_1$$
$$P_y = -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 (C\theta_1 S\theta_1 + S\theta_1 C\theta_1) - L_3 S\theta_1 (C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3)...$$
$$...-L_4 S\theta_1$$
$$P_z = -L_3 S\theta_4 + L_2 S\theta_2$$

$$P_x = -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_5 (C\theta_1 C\theta_1 - S\theta_1 S\theta_1) - L_3 C\theta_1 (C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3)...$$
$$...-L_4 C\theta_1$$
$$P_y = -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - 2\mathrm{L}_5 C\theta_1 S\theta_1 - L_3 S\theta_1 (C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3)...$$
$$...-L_4 S\theta_1$$
$$P_z = -L_3 S\theta_4 + L_2 S\theta_2$$

Aplicando el coseno de la suma y el seno de la suma, hay dos opciones:

$$P_x = -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_5 C(2\theta_1) - L_3 C\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3)...$$
$$...-L_4 C\theta_1$$
$$P_y = -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - 2\mathrm{L}_5 C\theta_1 S\theta_1 - L_3 S\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3)...$$
$$...-L_4 S\theta_1$$
$$P_z = -L_3 S\theta_4 + L_2 S\theta_2$$

O también:

$$P_x = -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_5 C(2\theta_1) - L_3 C\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3)...$$
$$...-L_4 C\theta_1$$
$$P_y = -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 S(2\theta_1) - L_3 S\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3)...$$
$$...-L_4 S\theta_1$$
$$P_z = -L_3 S\theta_4 + L_2 S\theta_2$$

Si se desarrolla la primera opción, aplicando $\theta_2 + \theta_3 = -\theta_4$:

$$P_x = -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 - L_5 C(2\theta_1) - L_3 C\theta_1 C(-\theta_4)...$$
$$...-L_4 C\theta_1$$
$$P_y = -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - 2\mathrm{L}_5 C\theta_1 S\theta_1 - L_3 S\theta_1 C(-\theta_4)...$$
$$...-L_4 S\theta_1$$
$$P_z = -L_3 S\theta_4 + L_2 S\theta_2$$

Aplicando $C\theta_4 = C(-\theta_4)$

$$P_x=-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2-L_5C(2\theta_1)-L_3C\theta_1C\theta_4-L_4C\theta_1$$
$$P_y=-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-2L_5C\theta_1S\theta_1-L_3S\theta_1C\theta_4-L_4S\theta_1$$
$$P_z=-L_3S\theta_4+L_2S\theta_2$$

$$P_x=-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2-L_5C(2\theta_1)-L_3C\theta_1C\theta_4-L_4C\theta_1$$
$$P_y=S\theta_1(-L_1-L_2C\theta_2-2L_5C\theta_1-L_3C\theta_4-L_4)$$
$$P_z=-L_3S\theta_4+L_2S\theta_2$$

Y la primera opción no parece llevar a ninguna solución razonable.

En cuanto a la segunda opción, aplicando $\theta_2+\theta_3=-\theta_4$:

$$P_x=-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2-L_5C(2\theta_1)-L_3C\theta_1C(-\theta_4)...$$
$$...-L_4C\theta_1$$
$$P_y=-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-L_5S(2\theta_1)-L_3S\theta_1C(-\theta_4)...$$
$$...-L_4S\theta_1$$
$$P_z=-L_3S\theta_4+L_2S\theta_2$$

Aplicando $C\theta_4=C(-\theta_4)$, la suma de los cuadrados y simplificando:

$$P_x=-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2-L_5C(2\theta_1)-L_3C\theta_1C\theta_4-L_4C\theta_1$$
$$P_y=-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-L_5S(2\theta_1)-L_3S\theta_1C\theta_4-L_4S\theta_1$$
$$P_z=-L_3S\theta_4+L_2S\theta_2$$

$$P_x=-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2-L_5C(2\theta_1)-L_3C\theta_1C\theta_4-L_4C\theta_1$$
$$P_y=-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-L_5S(2\theta_1)-L_3S\theta_1C\theta_4-L_4S\theta_1$$
$$P_z=-L_3S\theta_4+L_2S\theta_2$$

Y no parece tener una solución razonable.

Además, las ecuaciones que se obtuvieron en el apartado anterior mediante las igualdades equivalentes a las tratadas en este apartado, no pueden ser extraídas en este caso. Eso podría llevar a pensar que el cambio en el parámetro correspondiente al eje de giro Z pueden ser corregidos mediante programación ya que se trata de cambiar el valor del ángulo sobre el que se calcula cada término, pero en el caso de ser sobre el eje de giro X , los términos podrían incluso, llegar a anularse, por lo que no se puede deshacer la modificación fundamental de esos términos, y menos aún la pérdida de esos términos, modificando el ángulo de giro correspondiente.

1.1.1.4 Cinemática Inversa – Primera Inversa (con solución forzada)

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$T={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5={}^0A_5$$

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T={}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5={}^{1}A_5$$
$$({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}\,T={}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5={}^{2}A_5$$
$$({}^{2}A_3)^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}\,T={}^{3}A_4\,{}^{4}A_5\,{}^{5}A_6={}^{3}A_5$$
$$({}^{3}A_4)^{-1}({}^{2}A_3)^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}\,T={}^{4}A_5\,{}^{5}A_6={}^{4}A_5$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 , y así sucesivamente con θ_3 , θ_4 y θ_5 . Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_1=-L_1$, $r_2=-L_2$, $r_3=-L_3$, $r_4=-L_4$ y $r_5=-L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5 & -C\theta_5 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ C\theta_1 S\theta_5+C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 C\theta_5-S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ -C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & -L_1 C\theta_1-L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_5 S\theta_1 S\theta_5+L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4-L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4 \\ . & -L_1 S\theta_1-L_2 C\theta_2 S\theta_1-L_5 C\theta_1 S\theta_5+L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4-L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1 \\ . & L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2+L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4+L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4+L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4+S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4) \\ . & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^1A_5={}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & -L_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & -L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & -L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & -L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & -L_4 S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & -L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & -L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & -S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & \cdots \\ C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & -S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & -C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & \cdots \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & -L_3 C(\theta_2+\theta_3)-L_2 C\theta_2-L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4+L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_4-L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4-S(\theta_2+\theta_3) S\theta_4) \\ \cdots & -L_3 S(\theta_2+\theta_3)-L_2 S\theta_2-L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4-L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4-L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4+S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4) \\ \cdots & -L_5 S\theta_5 \\ \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & -L_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & -L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & -L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & -L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & -L_4 S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & -L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & -L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & f'_{11}(p) \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & f'_{12}(p) \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & f'_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde f'_{ij} son los elementos de la matriz T y f_{ij} son los elementos de la matriz resultante del uso de la primera inversa ($({}^0A_1)^{-1}\,T$).

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^0A_1)^{-1}\,T$). Así, en primer lugar, se va a realizar el análisis utilizando la primera inversa:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T={}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5={}^1A_5$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^0A_1)^{-1}\,T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11} = C\theta_1 x + S\theta_1 y + L_1 t$$
$$f_{12} = -z$$
$$f_{13} = -S\theta_1 x + C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^1A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n) = C\theta_1 x + S\theta_1 y + L_1 t = C\theta_1 f'_{11}(n) + S\theta_1 f'_{12}(n) - L_1 t \quad =$$
$$C\theta_1(C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - S\theta_1 S\theta_5) + S\theta_1(C\theta_1 S\theta_5 + C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad =$$
$$C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$
$$f_{12}(n) = -z = f'_{13}(n) = -(-C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) = C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$
$$f_{13}(n) = -S\theta_1 x + C\theta_1 y = S\theta_1 f'_{11}(n) - C\theta_1 f'_{12}(n) \quad =$$
$$-S\theta_1(C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - S\theta_1 S\theta_5) + C\theta_1(C\theta_1 S\theta_5 + C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad =$$
$$S\theta_5$$

$$f_{11}(o) = C\theta_1 x + S\theta_1 y + L_1 t = C\theta_1 f'_{11}(o) + S\theta_1 f'_{12}(o) \quad =$$
$$C\theta_1(-C\theta_5 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) + S\theta_1(C\theta_1 C\theta_5 - S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad =$$
$$-S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$
$$f_{12}(o) = -z = f'_{13}(o) = -(S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) = -S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$
$$f_{13}(o) = -S\theta_1 x + C\theta_1 y = S\theta_1 f'_{11}(o) - C\theta_1 f'_{12}(o) \quad =$$
$$-S\theta_1(-C\theta_5 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) + C\theta_1(C\theta_1 C\theta_5 - S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad =$$
$$C\theta_5$$

$$f_{11}(a) = C\theta_1 x + S\theta_1 y + L_1 t = C\theta_1 f'_{11}(a) + S\theta_1 f'_{12}(a) \quad =$$

$$C\theta_1(C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4))+S\theta_1(S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4))=S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$
$$f_{12}(a)=-z=f'_{13}(a)=-(C(\theta_2+\theta_3+\theta_4))=-C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$$
$$f_{13}(a)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y=S\theta_1 f'_{11}(a)-C\theta_1 f'_{12}(a) \quad =$$
$$-S\theta_1(C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4))+C\theta_1(S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4))=0$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1 x+S\theta_1 y+L_1 t=C\theta_1 f'_{11}(p)+S\theta_1 f'_{12}(p) \quad =$$
$$C\theta_1(-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2+L_5S\theta_1S\theta_5+L_4S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3-L_5C\theta_1C\theta_5C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-L_4C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1C\theta_4)\ldots$$
$$\ldots+S\theta_1(-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-L_5C\theta_1S\theta_5+L_4S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1+L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3-L_5C\theta_5S\theta_1C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-L_4C(\theta_2+\theta_3)C\theta_4S\theta_1)\ldots$$
$$\ldots+L_1 \quad = \quad -L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2-L_4C(\theta_2+\theta_3)C\theta_4+L_4S(\theta_2+\theta_3)S\theta_4-L_5C\theta_5(C(\theta_2+\theta_3)C\theta_4-S(\theta_2+\theta_3)S\theta_4)$$
$$f_{12}(p)=-z=f'_{13}(p) \quad =$$
$$-(L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2+L_4C(\theta_2+\theta_3)S\theta_4+L_4S(\theta_2+\theta_3)C\theta_4+L_5C\theta_5(C(\theta_2+\theta_3)S\theta_4+S(\theta_2+\theta_3)C\theta_4)) \quad =$$
$$-L_3S(\theta_2+\theta_3)-L_2S\theta_2-L_4C(\theta_2+\theta_3)S\theta_4-L_4S(\theta_2+\theta_3)C\theta_4-L_5C\theta_5(C(\theta_2+\theta_3)S\theta_4+S(\theta_2+\theta_3)C\theta_4)$$
$$f_{13}(p)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y=S\theta_1 f'_{11}(p)-C\theta_1 f'_{12}(p)\ldots \quad =$$
$$-S\theta_1(-L_1C\theta_1-L_2C\theta_1C\theta_2+L_5S\theta_1S\theta_5+L_4S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3-L_5C\theta_1C\theta_5C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-L_4C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1C\theta_4)\ldots$$
$$\ldots+C\theta_1(-L_1S\theta_1-L_2C\theta_2S\theta_1-L_5C\theta_1S\theta_5+L_4S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1S\theta_4-L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1+L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3-L_5C\theta_5S\theta_1C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-L_4C(\theta_2+\theta_3)C\theta_4S\theta_1) \quad =$$
$$-L_5S\theta_5$$

Donde se puede ver la complejidad del cálculo si se intenta resolver cualquiera de las igualdades.

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \quad =$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y+L_1 \\ . & . & . & -P_z \\ . & . & . & -S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^1A_5 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & -L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2-L_4C(\theta_2+\theta_3)C\theta_4+L_4S(\theta_2+\theta_3)S\theta_4-L_5C\theta_5(C(\theta_2+\theta_3)C\theta_4-S(\theta_2+\theta_3)S\theta_4) \\ \ldots & -L_3S(\theta_2+\theta_3)-L_2S\theta_2-L_4C(\theta_2+\theta_3)S\theta_4-L_4S(\theta_2+\theta_3)C\theta_4-L_5C\theta_5(C(\theta_2+\theta_3)S\theta_4+S(\theta_2+\theta_3)C\theta_4) \\ \ldots & -L_5S\theta_5 \\ \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y+L_1=-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2-L_4C(\theta_2+\theta_3)C\theta_4\ldots$$
$$\ldots+L_4S(\theta_2+\theta_3)S\theta_4-L_5C\theta_5(C(\theta_2+\theta_3)C\theta_4-S(\theta_2+\theta_3)S\theta_4)$$
$$f_{12}(p)=-P_z=-L_3S(\theta_2+\theta_3)-L_2S\theta_2-L_4C(\theta_2+\theta_3)S\theta_4-L_4S(\theta_2+\theta_3)C\theta_4\ldots$$

$$...-L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4)$$
$$f_{13}(p) = -S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .

Aplicando $\theta_2+\theta_3=-\theta_4$ a las ecuaciones anteriores:

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C(\theta_2+\theta_3) - L_2 C\theta_2 - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 ...$$
$$...+L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 - L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 - S(\theta_2+\theta_3) S\theta_4)$$
$$f_{12}(p) = -P_z = -L_3 S(\theta_2+\theta_3) - L_2 S\theta_2 - L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 - L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 ...$$
$$...-L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4)$$
$$f_{13}(p) = -S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5$$

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C(-\theta_4) - L_2 C\theta_2 - L_4 C(-\theta_4) C\theta_4 ...$$
$$...+L_4 S(-\theta_4) S\theta_4 - L_5 C\theta_5 (C(-\theta_4) C\theta_4 - S(-\theta_4) S\theta_4)$$
$$-P_z = -L_3 S(-\theta_4) - L_2 S\theta_2 - L_4 C(-\theta_4) S\theta_4 - L_4 S(-\theta_4) C\theta_4 ...$$
$$...-L_5 C\theta_5 (C(-\theta_4) S\theta_4 + S(-\theta_4) C\theta_4)$$
$$-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5$$

Aplicando $C\theta_4 = C(-\theta_4)$ y $S\theta_4 = -S(-\theta_4)$:

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C\theta_4 - L_2 C\theta_2 - L_4 (C\theta_4)^2 ...$$
$$...-L_4 (S\theta_4)^2 - L_5 C\theta_5 ((C\theta_4)^2 + (S\theta_4)^2)$$
$$-P_z = L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2 - L_4 C\theta_4 S\theta_4 + L_4 S\theta_4 C\theta_4 ...$$
$$...-L_5 C\theta_5 (C\theta_4 S\theta_4 - S\theta_4 C\theta_4)$$
$$-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5$$

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C\theta_4 - L_2 C\theta_2 - L_4 - L_5 C\theta_5$$
$$-P_z = L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2$$
$$-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5$$

Aplicando $\theta_1=\theta_5$ a la tercera ecuación:

$$-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5$$
$$-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_1$$
$$-S\theta_1 P_x + L_5 S\theta_1 = -C\theta_1 P_y$$
$$(L_5 - P_x) S\theta_1 = -C\theta_1 P_y$$
$$((P_x - L_5) S\theta_1)/C\theta_1 = (C\theta_1 P_y)/C\theta_1$$
$$(P_x - L_5)\tan(\theta_1) = P_y$$
$$\tan(\theta_1) = P_y/(P_x - L_5)$$
$$\theta_1 = \arctan(P_y/(P_x - L_5)) \quad *$$

Si se opera con las dos primeras ecuaciones, se aplica $\theta_1=\theta_5$, y se elevan al cuadrado y se suman:

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C\theta_4 - L_2 C\theta_2 - L_4 - L_5 C\theta_5$$
$$-P_z = L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2$$

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C\theta_4 - L_2 C\theta_2 - L_4 - L_5 C\theta_1$$
$$-P_z = L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2$$

$$-L_3 C\theta_4 - L_2 C\theta_2 = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 + L_4 + L_5 C\theta_1 = M$$
$$L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2 = -P_z = K$$

$$(-L_3 C\theta_4 - L_2 C\theta_2)^2 = M^2$$
$$(L_3 S\theta_4 - L_2 S\theta_2)^2 = K^2$$

$$(-L_3 C\theta_4)^2 - 2(-L_3 C\theta_4)(L_2 C\theta_2) + (L_2 C\theta_2)^2 = M^2$$
$$(L_3 S\theta_4)^2 - 2(L_3 S\theta_4)(L_2 S\theta_2) + (L_2 S\theta_2)^2 = K^2$$

$$(L_3 C\theta_4)^2 + 2(L_3 C\theta_4)(L_2 C\theta_2) + (L_2 C\theta_2)^2 = M^2$$
$$(L_3 S\theta_4)^2 - 2(L_3 S\theta_4)(L_2 S\theta_2) + (L_2 S\theta_2)^2 = K^2$$

$$(L_3 C\theta_4)^2 + 2(L_3 C\theta_4)(L_2 C\theta_2) + (L_2 C\theta_2)^2 + (L_3 S\theta_4)^2 - 2(L_3 S\theta_4)(L_2 S\theta_2) + (L_2 S\theta_2)^2 = M^2 + K^2$$

$$(L_3)^2 + 2(L_3 C\theta_4)(L_2 C\theta_2) + (L_2)^2 - 2(L_3 S\theta_4)(L_2 S\theta_2) = M^2 + K^2$$

$$(L_3)^2 + (L_2)^2 + 2 L_3 L_2 (C\theta_4 C\theta_2 - S\theta_4 S\theta_2) = M^2 + K^2$$

Aplicando el coseno de la suma:

$$(L_3)^2 + (L_2)^2 + 2 L_3 L_2 C(\theta_4 + \theta_2) = M^2 + K^2$$

Y aplicando $\theta_2 + \theta_3 = -\theta_4$ y $C\theta_3 = C(-\theta_3)$:

$$(L_3)^2 + (L_2)^2 + 2 L_3 L_2 C(-\theta_3) = M^2 + K^2$$
$$(L_3)^2 + (L_2)^2 + 2 L_3 L_2 C\theta_3 = M^2 + K^2$$
$$\theta_3 = \arccos((M^2 + K^2 - (L_3)^2 - (L_2)^2)/(2 L_3 L_2))$$
$$\theta_3 = \arccos(((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 + L_4 + L_5 C\theta_1)^2 + (-P_z)^2 - (L_3)^2 - (L_2)^2)/(2 L_3 L_2)) \quad *$$

Ecuación con un formato que resulta muy similar al obtenido en el modelo SCARA, para el segundo de sus ángulos. Y es así porque, en realidad, el problema es similar al resuelto en aquel caso, al tener varios motores con ejes de giro paralelos.

Ahora se plantea un problema de dependencia de las variables articulares que ha estado presente durante la resolución del problema.
De hecho, con la expresión $\theta_2 + \theta_3 = -\theta_4$ se entiende que hay una dependencia entre las tres variables que llevan a infinitas soluciones.

1.1.1.5 Cinemática Inversa – Segunda inversa (sin solución)

Se va a repetir el cálculo con la segunda inversa:

$$({}^{1}A_{2})^{-1}({}^{0}A_{1})^{-1}T={}^{2}A_{3}\,{}^{3}A_{4}\,{}^{4}A_{5}={}^{2}A_{5}$$

$$[{}^{0}A_{1}]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{1}A_{2}]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{2}A_{3}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{3}A_{4}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{4}A_{5}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_{5}={}^{0}A_{1}\,{}^{1}A_{2}\,{}^{2}A_{3}\,{}^{3}A_{4}\,{}^{4}A_{5}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y sustituyendo los valores $r_1=-L_1$, $r_2=-L_2$, $r_3=-L_3$, $r_4=-L_4$, $r_5=-L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{1}A_{2})^{-1}({}^{0}A_{1})^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5 & -C\theta_5 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ C\theta_1 S\theta_5 + C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 C\theta_5 - S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ -C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_5 S\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4 \\ . & -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 C\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1 \\ . & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 + L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 + L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4) \\ . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & -S\theta_2 & L_2 + L_1 S\theta_2 \\ -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_2 & -L_1 S\theta_2 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & -S\theta_2 & L_2 + L_1 C\theta_2 \\ -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_2 & -L_1 S\theta_2 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5 & -C\theta_5 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ C\theta_1 S\theta_5 + C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C\theta_1 C\theta_5 - S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ -C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & -L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_5 S\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4 \\ . & -L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 C\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1 \\ . & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 + L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 + L_5 C\theta_5 (C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4) \\ . & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_5 = {}^2A_3\, {}^3A_4\, {}^4A_5 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & -L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & -L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & 0 & S\theta_4 & -L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & 0 & -C\theta_4 & -L_4 S\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & -L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & -L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 & -C(\theta_3+\theta_4) S\theta_5 & S(\theta_3+\theta_4) & -L_4 C(\theta_3+\theta_4) - L_3 C\theta_3 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 \\ S(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 & -S(\theta_3+\theta_4) S\theta_5 & -C(\theta_3+\theta_4) & -L_4 S(\theta_3+\theta_4) - L_3 S\theta_3 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & -L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde f'_{ij} son los elementos de la matriz T .

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$). Así, en este caso, se va a realizar el análisis utilizando la primera y la segunda inversa:

$$({}^{1}A_{2})^{-1}({}^{0}A_{1})^{-1}T={}^{2}A_{3}{}^{3}A_{4}{}^{4}A_{5}={}^{2}A_{5}$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^{1}A_{2})^{-1}({}^{0}A_{1})^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21}&=C\theta_1 C\theta_2 x-C\theta_2 S\theta_1 y-S\theta_2 z-(L_2+L_1 C\theta_2)t \\ f_{22}&=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_1 S\theta_2 y-C\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \\ f_{23}&=-S\theta_1 x+C\theta_1 y \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^{1}A_{2})^{-1}({}^{0}A_{1})^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^{2}A_{5}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21}(n)&=C\theta_1 C\theta_2 x-C\theta_2 S\theta_1 y-S\theta_2 z-(L_2+L_1 C\theta_2)t \quad = \\ &\quad C\theta_1 C\theta_2(C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5)\ldots \\ &\quad -C\theta_2 S\theta_1(C\theta_1 S\theta_5+C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\ldots \\ &\quad \ldots-S\theta_2(-C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad = \quad C(\theta_3+\theta_4)C\theta_5 \\ f_{22}(n)&=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_1 S\theta_2 y-C\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t=-C\theta_1 S\theta_2(C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5)-S\theta_1 \\ &\quad -C\theta_1 S\theta_2(C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5)\ldots \\ &\quad -S\theta_1 S\theta_2(C\theta_1 S\theta_5+C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\ldots \\ &\quad \ldots-C\theta_2(-C\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad = \quad S(\theta_3+\theta_4)C\theta_5 \\ f_{23}(n)&=-S\theta_1 x+C\theta_1 y \quad = \\ &\quad -S\theta_1(C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)-S\theta_1 S\theta_5)\ldots \\ &\quad \ldots+C\theta_1(C\theta_1 S\theta_5+C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad = \quad S\theta_5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{21}(o) = {} & C\theta_1 C\theta_2 x - C\theta_2 S\theta_1 y - S\theta_2 z - (L_2 + L_1 C\theta_2)t \quad = \\
& C\theta_1 C\theta_2(-C\theta_5 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\ldots \\
& -C\theta_2 S\theta_1(C\theta_1 C\theta_5 - S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\ldots \\
& \ldots - S\theta_2(S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad = \quad -C(\theta_3+\theta_4) S\theta_5 \\
f_{22}(o) = {} & -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_1 S\theta_2 y - C\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \\
& -C\theta_1 S\theta_2(-C\theta_5 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\ldots \\
& -S\theta_1 S\theta_2(C\theta_1 C\theta_5 - S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\ldots \\
& \ldots - C\theta_2(S\theta_5 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad = \quad -S(\theta_3+\theta_4) S\theta_5 \\
f_{23}(o) = {} & -S\theta_1 x + C\theta_1 y \quad = \\
& -S\theta_1(-C\theta_5 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\ldots \\
& \ldots + C\theta_1(C\theta_1 C\theta_5 - S\theta_1 S\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad = \quad C\theta_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{21}(a) = {} & C\theta_1 C\theta_2 x - C\theta_2 S\theta_1 y - S\theta_2 z - (L_2 + L_1 C\theta_2)t \quad = \\
& C\theta_1 C\theta_2(C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) - C\theta_2 S\theta_1(S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\ldots \\
& \ldots - S\theta_2(C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad = \quad S(\theta_3+\theta_4) \\
f_{22}(a) = {} & -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_1 S\theta_2 y - C\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t 0 \\
& -C\theta_1 S\theta_2(C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) - S\theta_1 S\theta_2(S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4))\ldots \\
& \ldots - C\theta_2(C(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad = \quad -C(\theta_3+\theta_4) \\
f_{23}(a) = {} & -S\theta_1 x + C\theta_1 y \quad = \\
& -S\theta_1(C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) + C\theta_1(S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3+\theta_4)) \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& f_{21}(p) = C\theta_1 C\theta_2 x - C\theta_2 S\theta_1 y - S\theta_2 z - (L_2 + L_1 C\theta_2)t \quad = \\
& C\theta_1 C\theta_2(-L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_5 S\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - \\
& -C\theta_2 S\theta_1(-L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 C\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1)\ldots \\
& -S\theta_2(L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 + L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 + L_5 C\theta_5(C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4)) - (L_2 + L_1 C\theta_2) \quad = \\
& -L_4 C(\theta_3+\theta_4) - L_3 C\theta_3 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& f_{22}(p) = -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_1 S\theta_2 y - C\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \quad = \\
& -C\theta_1 S\theta_2(-L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_5 S\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4)\ldots \\
& \ldots - S\theta_1 S\theta_2(-L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 C\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1)\ldots \\
& \ldots - C\theta_2(L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 + L_4 C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 + L_5 C\theta_5(C(\theta_2+\theta_3) S\theta_4 + S(\theta_2+\theta_3) C\theta_4)) - L_1 S\theta_2 \quad = \\
& -L_4 S(\theta_3+\theta_4) - L_3 S\theta_3 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& f_{23}(p) = -S\theta_1 x + C\theta_1 y \quad = \\
& -S\theta_1(-L_1 C\theta_1 - L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_5 S\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_1 C\theta_5 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_1 C\theta_4)\ldots \\
& \ldots + C\theta_1(-L_1 S\theta_1 - L_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_5 C\theta_1 S\theta_5 + L_4 S(\theta_2+\theta_3) S\theta_1 S\theta_4 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - L_5 C\theta_5 S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3+\theta_4) - L_4 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_4 S\theta_1) \quad = \\
& -L_5 S\theta_5
\end{aligned}
$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x, y, z)$:

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x \\
. & . & . & P_y \\
. & . & . & P_z \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y - S\theta_2 P_z - (L_2 + L_1 S\theta_2) \\ . & . & . & -C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y - C\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 \\ . & . & . & -S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^{2}A_5 =$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & -L_4 C(\theta_3+\theta_4) - L_3 C\theta_3 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 \\ \ldots & -L_4 S(\theta_3+\theta_4) - L_3 S\theta_3 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 \\ \ldots & -L_5 S\theta_5 \\ \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{21}(p) &= C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y - S\theta_2 P_z - (L_2 + L_1 S\theta_2) = \\ &\quad -L_4 C(\theta_3+\theta_4) - L_3 C\theta_3 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 \\ f_{22}(p) &= -C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y - C\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = \\ &\quad -L_4 S(\theta_3+\theta_4) - L_3 S\theta_3 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 \\ f_{23}(p) &= -S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5 \end{aligned}$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .

Si ahora se toman esas tres igualdades y se opera de forma similar como se hizo en la Primera Inversa se obtiene:

$$\begin{aligned} f_{21}(p) &= C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y - S\theta_2 P_z - (L_2 + L_1 S\theta_2) = \\ &\quad -L_4 C(\theta_3+\theta_4) - L_3 C\theta_3 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 \\ f_{22}(p) &= -C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y - C\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = \\ &\quad -L_4 S(\theta_3+\theta_4) - L_3 S\theta_3 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 \\ f_{23}(p) &= -S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5 \end{aligned}$$

Aplicando $\theta_2+\theta_3=-\theta_4$ a las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} &C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y - S\theta_2 P_z - (L_2 + L_1 S\theta_2) = \\ &\quad -L_4 C(-\theta_4) - L_3 C\theta_3 - L_5 C(-\theta_4) C\theta_5 \\ &-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y - C\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = \\ &\quad -L_4 S(-\theta_4) - L_3 S\theta_3 - L_5 S(-\theta_4) C\theta_5 \\ &-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5 \end{aligned}$$

Operando y aplicando $C\theta_4=C(-\theta_4)$ y $S\theta_4=-S(-\theta_4)$:

$$\begin{aligned} &C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y - S\theta_2 P_z - L_2 - L_1 S\theta_2 = \\ &\quad -L_4 C\theta_4 - L_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_4 C\theta_5 \end{aligned}$$

$$-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y - C\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_4 S\theta_4 - L_3 S\theta_3 + L_5 S\theta_4 C\theta_5$$
$$-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_5$$

Aplicando $\theta_1 = \theta_5$:

$$C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y - S\theta_2 P_z - L_2 - L_1 S\theta_2 = -L_4 C\theta_4 - L_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_4 C\theta_1$$
$$-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y - C\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_4 S\theta_4 - L_3 S\theta_3 + L_5 S\theta_4 C\theta_1$$
$$-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = -L_5 S\theta_1$$

Operando con las dos primeras igualdades:

$$(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) C\theta_2 - (L_1) S\theta_2 - (S\theta_2 P_z + L_2 + L_3 C\theta_3) = C\theta_4 (-L_4 - L_5 C\theta_1)$$
$$-(P_z) C\theta_2 + (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y - L_1) S\theta_2 + (L_3 S\theta_3) = S\theta_4 (L_4 + L_5 C\theta_1)$$

$$((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) C\theta_2 - (L_1) S\theta_2 - (S\theta_2 P_z + L_2 + L_3 C\theta_3)) / (-L_4 - L_5 C\theta_1) = C\theta_4$$
$$(-(P_z) C\theta_2 + (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y - L_1) S\theta_2 + (L_3 S\theta_3)) / (L_4 + L_5 C\theta_1) = S\theta_4$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$(((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) C\theta_2 - (L_1) S\theta_2 - (S\theta_2 P_z + L_2 + L_3 C\theta_3)) / (-L_4 - L_5 C\theta_1))^2$$
$$((-(P_z) C\theta_2 + (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y - L_1) S\theta_2 + (L_3 S\theta_3)) / (L_4 + L_5 C\theta_1))^2 = 1$$

Quedaría una única ecuación con una única incógnita, pero con cierta complejidad para calcular. De hecho, la ecuación resultante sería una ecuación de segundo grado en función de $S\theta_2$ y $C\theta_2$ para la que no parece haber una solución razonable.

Otra posibilidad podría ser partir de las mismas dos igualdades, pero tratarlas como dos igualdades diferentes:

$$(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) C\theta_2 - (L_1) S\theta_2 = (S\theta_2 P_z + L_2 + L_3 C\theta_3) + C\theta_4 (-L_4 - L_5 C\theta_1)$$
$$-(P_z) C\theta_2 + (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y - L_1) S\theta_2 = -(L_3 S\theta_3) + S\theta_4 (L_4 + L_5 C\theta_1)$$

Se podría aplicar una de las fórmulas trascendentes:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \;\; y \;\; d\sin\theta + e\cos\theta = f \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(af - ce, cd - bf)$$

Sin embargo, a primera vista se ve que el resultado sería obtener θ_2 en función de θ_4 , dependencia que ya se conocía con anterioridad mediante $\theta_2 + \theta_3 = -\theta_4$ y teniendo en cuenta que anteriormente se habían localizado algunas igualdades como:

$$\theta_2 + \theta_3 = -\theta_4$$
$$\theta_1 = \theta_5$$
$$\theta_1 = \arctan(P_y / (L_5 - P_x))$$
$$\theta_3 = \arccos(((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 + L_4 + L_5 C\theta_1)^2 + (-P_z)^2 - (L_3)^2 - (L_2)^2) / (2 L_3 L_2))$$

Por tanto este camino no lleva a ninguna solución razonable.

1.1.1.6 Cinemática Inversa – Equilibrado de ángulos para resolver interdependencias

Como ya se había comentado se plantea un problema de dependencia de las variables articulares mostrada a través de la expresión $\theta_2+\theta_3=-\theta_4$ lo que lleva a infinitas soluciones.
Por tanto, se trata de resolver el problema dando una nueva condición a las tres variables.

Por la arquitectura del problema se sabe que tiene que haber un cierto equilibrio entre los tres ángulos, mientras no haya ninguna otra condición establecida, para que las posiciones de los segmentos implicados estén determinados sobre posiciones razonables.
Por ello, se puede generar el valor correspondiente a una de las variables de forma que equilibre todos ellos en rangos de valores razonables.

Se partirá de las ecuaciones que ya se han calculado con anterioridad:

$$\theta_2+\theta_3=-\theta_4$$
$$\theta_1=\theta_5$$
$$\theta_1=\arctan\left(P_y/\left(L_5-P_x\right)\right)$$
$$\theta_3=\arccos\left(\left(\left(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y+L_1+L_4+L_5 C\theta_1\right)^2+\left(-P_z\right)^2-\left(L_3\right)^2-\left(L_2\right)^2\right)/\left(2 L_3 L_2\right)\right)$$

Y quedan pendientes de resolver los ángulos θ_2 y θ_4 .

Una posibilidad es realizar una estimación de uno de estos ángulos, por ejemplo θ_4 para que los tres ángulos estén equilibrados.

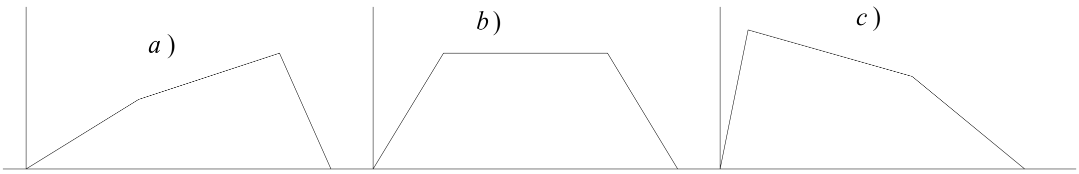

Ilustración 11: Diferentes ángulos de ataque al punto de destino para tres motores paralelos

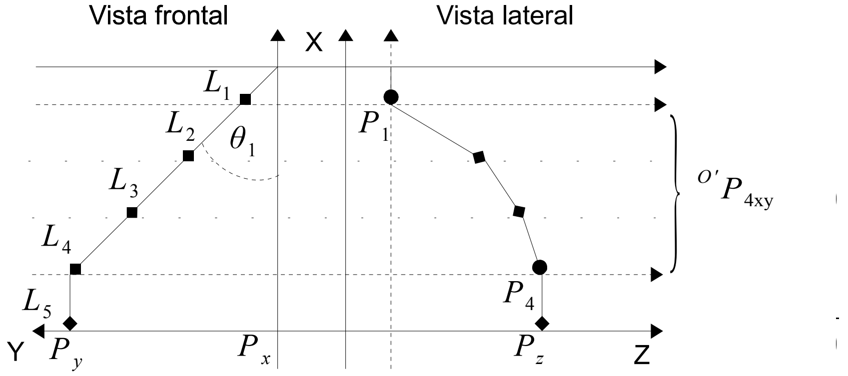

Ilustración 13: Vistas lateral y frontal de las piernas del Humanoide (Ejes referenciados a los ejes del Sistema de Coordenadas de la base)

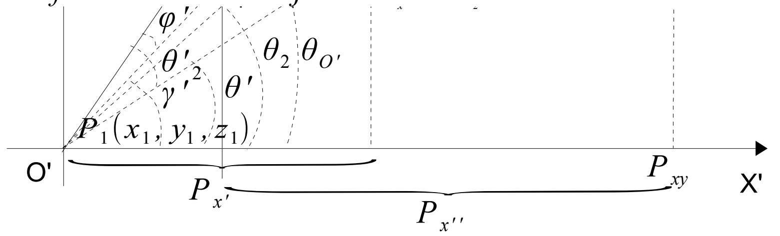

Ilustración 12: Esquema para el equilibrado de ángulos de las piernas del Humanoide

Para ello se va a establecer una relación entre ellos de tal forma que θ_4 sea más pequeño cuanto más alejado esté el punto a alcanzar. Y además, deben tener cierta relación con el ángulo establecido para el primer motor (θ_1) y su posición (P_1), y el punto de destino de su último segmento (P_4).
Pero, para simplificarlo, a la hora de equilibrar los ángulos de estos tres motores sólo se van a considerar las distancias de los segmentos.
Eso supone que esos ángulos serán proporcionales al ángulo que se obtiene de considerar todos los segmentos unidos.

$$L = L_2 + L_3 + L_4$$
$${}^{O'}P_{4xy} = \left(\left| {}^{O}P_z \right| - \left| L_1 C\theta_1 \right| - \left| L_5 \right| - \left| L_4 C\theta_1 \right| \right) / C\theta_1$$
$$\theta_{O'} = \left| \arccos\left({}^{O'}P_{4xy} / L \right) \right|$$
$$\theta_4 = k\left(L_4 / L \right) \theta_{O'} \quad \text{(Con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

Y una vez definido θ_4 , se obtiene θ_2 :

$$\theta_3 = \arccos\left(\left(\left(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 + L_4 + L_5 C\theta_1 \right)^2 + \left(-P_z \right)^2 - \left(L_3 \right)^2 - \left(L_2 \right)^2 \right) / \left(2 L_3 L_2 \right) \right)$$
$$\theta_4 = k\left(L_4 / L \right) \theta_{O'} \quad \text{(Con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$
$$\theta_2 + \theta_3 = -\theta_4$$
$$\theta_2 = -\theta_4 - \theta_3 =$$
$$-\left(k\left(L_4 / L \right) \theta_{O'} \right) - \left(\arccos\left(\left(\left(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 + L_4 + L_5 C\theta_1 \right)^2 + \left(-P_z \right)^2 - \left(L_3 \right)^2 - \left(L_2 \right)^2 \right) / \left(2 L_3 L_2 \right) \right) \right)$$

En resumen, se obtienen todas las variables articulares:

$$\theta_1 = \theta_5$$
$$\theta_1 = \arctan\left(P_y / \left(L_5 - P_x \right) \right)$$

$$\theta_3 = \arccos(((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 + L_4 + L_5 C\theta_1)^2 + (-P_z)^2 - (L_3)^2 - (L_2)^2)/(2 L_3 L_2))$$
$$L = L_2 + L_3 + L_4$$
$${}^{O'}P_{4xy} = (|{}^{O}P_z| - |L_1 C\theta_1| - |L_5| - |L_4 C\theta_1|)/C\theta_1$$
$$\theta_{O'} = |\arccos({}^{O'}P_{4xy}/L)|$$
$$\theta_4 = k(L_4/L)\theta_{O'} \quad \text{(Con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$
$$\theta_2 = -(k(L_4/L)\theta_{O'}) - (\arccos(((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 + L_4 + L_5 C\theta_1)^2 + (-P_z)^2 - (L_3)^2 - (L_2)^2)/(2 L_3 L_2)))$$

Sin embargo, los resultados obtenidos en el prototipo no son los esperados.

1.1.1.7 Cinemática Inversa – Aplicación del modelo de SCARA

En este caso el esquema a resolver se encuentra en la siguiente imagen. Y en ella se ve un doble esquema del modelo SCARA.

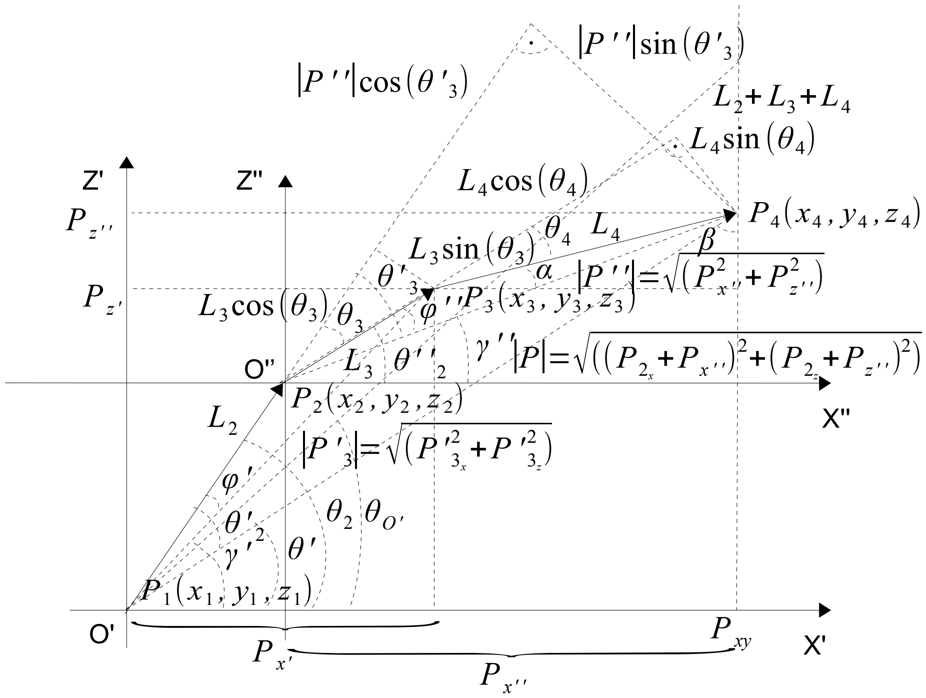

Ilustración 14: Esquema del modelo de SCARA modificado, asociado a los motores 2, 3 y 4.

En este esquema del modelo SCARA se va a aplicar el mismo modelo de solución ya utilizado con anterioridad basado en la teoría del coseno, resultando la siguientes igualdades.

Se trata de resolver las tres variables articulares ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$):

Sin embargo, la necesidad de que el último tramo sea perpendicular al suelo simplifica las distancias y ángulos del problema, como se muestra a continuación.

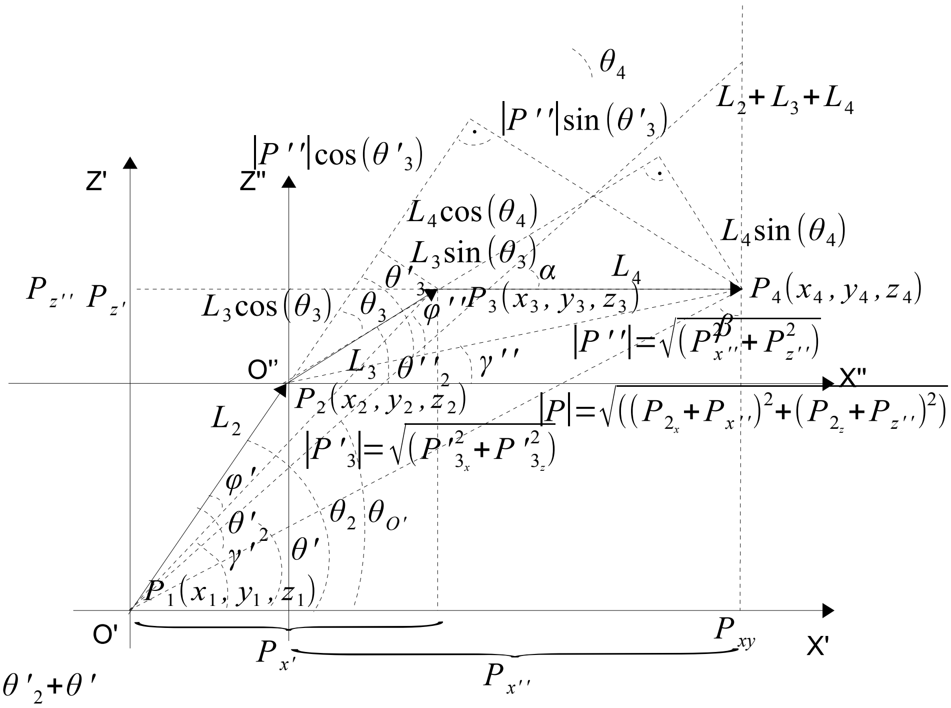

Ilustración 15: Esquema del modelo de SCARA modificado, asociado a los motores 2, 3 y 4, incluyendo la condición de perpendicularidad al suelo.

Por tanto, las condiciones del problema cambian y ya no es necesario utilizar el cuarto segmento (L_4) para el cálculo de los ángulos. Por ello los puntos a utilizar serán:

$$P_1=(0,-L_1\,sin\theta_1,-L_1\,cos\theta_1)$$
$$P_3=(P_{3x},P_{3y},P_{3z}-L_5-L_4)$$

Las distancias a utilizar en el modelo de SCARA:

$$^{O'}P_3=(^{O'}P_{3x'},{}^{O'}P_{3y'},{}^{O'}P_{3z'})=(|^{O}P_x|,|^{O}P_y|-L_1\,sin\theta_1,|^{O}P_z|-|L_1\,C\theta_1|-|L_5|-|L_4|-L_1\,cos\theta_1)$$

Y las ecuaciones derivadas del modelo:

$$(\sqrt{P^2_{3x'}+P^2_{3y'}})^2=(L_2+L_3\cos(\theta_3))^2+(L_3\sin(\theta_3))^2$$
$$P^2_{3x'}+P^2_{3y'}=L_2^2+L_3^2(\cos(\theta_3))^2+2\,L_2\,L_3\cos(\theta_3)+L_3^2(\sin(\theta_3))^2$$
$$P^2_{3x'}+P^2_{3y'}=L_2^2+L_3^2((\cos(\theta_3))^2+(\sin(\theta_3))^2)+2\,L_2\,L_3\cos(\theta_3)$$
$$\cos(\theta_3)=(P^2_{3x'}+P^2_{3y'}-L_2^2-L_3^2)/2\,L_2\,L_3$$

De donde se despeja:

$$\theta_3=\arccos((P^2_{3x'}+P^2_{3y'}-L_2^2-L_3^2)/2\,L_2\,L_3)$$

Y para el último ángulo:

$$\varphi'=\arctan(L_3\,sen(\theta_3)/(L_2+L_3\cos(\theta_3)))=atan2(L_3\,sen(\theta_3),L_2+L_3\cos(\theta_3))$$
$$\gamma'=\theta_2-\varphi'=\arctan(P_{3y'}/P_{3x'})=atan2(P_{3y'},P_{3x'})$$
$$\theta_2=\gamma'+\varphi'=\arctan(P_{3y'}/P_{3x'})+\arctan(L_3\sin(\theta_3)/(L_2+L_3\cos(\theta_3)))=$$
$$atan2(P_{3y'},P_{3x'})+atan2(L_3\,sen(\theta_3),L_2+L_3\cos(\theta_3))$$

Y sólo faltaría por calcular θ_4 :

$$\theta_2+\theta_3+\theta_4=0$$
$$\theta_4=-\theta_2-\theta_3$$

En resumen:

$$\theta_3=\arccos((P_{3x'}^2+P_{3y'}^2-L_2^2-L_3^2)/2\,L_2\,L_3)$$
$$\theta_2=\gamma'+\varphi'=\arctan(P_{3y'}/P_{3x'})+\arctan(L_3\sin(\theta_3)/(L_2+L_3\cos(\theta_3)))=$$
$$atan2(P_{3y'},P_{3x'})+atan2(L_3\,sen(\theta_3),L_2+L_3\cos(\theta_3))$$
$$\theta_4=-\theta_2-\theta_3$$
$$\theta_1=\theta_5$$

Por tanto, el problema queda reducido a una secuencia de ecuaciones en función de los puntos P_1 y P_3 .

Y, tras ser probado en el prototipo utilizado, se alcanzan los resultados esperados.

1.1.1.8 Cinemática Inversa – Cálculo de la localización de los motores

Para poder calcular los puntos correspondientes a la localización de las diferentes articulaciones, se puede usar el algoritmo de Denavit-Hartenmerg a los motores necesarios para el cálculo parcial de cada punto.
Por ejemplo, para el caso del punto P_1 sólo serán necesarios la posición del primer motor ($O=(0,0,0)$), la longitud del primer segmento (L_1) y el ángulo del primer segmento respecto a la base θ_1 . Y con esos datos se ejecutará el algoritmo de Denavit-Hartenmerg paa un único motor.

Se iniciará con la resolución de la Cinemática Directa para esta primera articulación (Motor 1), donde el motor "Motor 1" girará, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "2" se posicione en el punto parcial deseado P_1 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establece el eje Z , el origen de coordenadas de la articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & r_1 & -\pi/2 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & -L_1 & -\pi/2 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^0A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^0A_1$.

$$T = {}^0A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_1 = L_1$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -L_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & -L_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ($(0_{u0'}, 0_{v0'}, 0_{w0'})$ - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -L_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & -L_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1 C\theta_1 \\ -L_1 S\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = (-L_1 C\theta_1, -L_1 S\theta_1, 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

En el caso de Cinemática Inversa, por seguir con el método, aunque en el caso de un único motor es inmediato, se va a seguir con el procedimiento establecido.
Sin embargo, en este caso, el cálculo se realiza de forma inmediata.

$$({}^0A_1)^{-1} T = I$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .

Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -L_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & -L_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y el valor $r_1=-L_1$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -L_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & -L_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^{0}A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=C\theta_1 x+S\theta_1 y+L_1 t$$
$$f_{12}=-z$$
$$f_{13}=-S\theta_1 x+C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_1 x+S\theta_1 y+L_1 t=C\theta_1 C\theta_1+S\theta_1 S\theta_1=1$$
$$f_{12}(n)=-z=0$$
$$f_{13}(n)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y=-S\theta_1 C\theta_1+C\theta_1 S\theta_1=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_1 x+S\theta_1 y+L_1 t=0$$
$$f_{12}(o)=-z=1$$
$$f_{13}(o)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y=0$$

$$f_{11}(a)=C\theta_1 x+S\theta_1 y+L_1 t=-C\theta_1 S\theta_1+S\theta_1 C\theta_1=0$$
$$f_{12}(a)=-z=0$$
$$f_{13}(a)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y=S\theta_1 S\theta_1+C\theta_1 C\theta_1=1$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1 x+S\theta_1 y+L_1 t=-C\theta_1 L_1 C\theta_1-S\theta_1 L_1 S\theta_1+L_1=0$$
$$f_{12}(p)=-z=0$$
$$f_{13}(p)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y=S\theta_1 L_1 C\theta_1-C\theta_1 L_1 S\theta_1=0$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{1x} \\ . & . & . & P_{1y} \\ . & . & . & P_{1z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_{1x} \\ . & . & . & P_{1y} \\ . & . & . & P_{1z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y}+L_1 \\ . & . & . & -P_{1z} \\ . & . & . & -S\theta_1 P_{1x}+C\theta_1 P_{1y} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y}+L_1=0$$
$$-P_{1z}=0$$
$$-S\theta_1 P_{1x}+C\theta_1 P_{1y}=0$$

…

Ahora hay que calcular el valor de θ_1 en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{1x} y P_{1y} . Para ello, con la tercera ecuación:

$$-S\theta_1 P_{1x} + C\theta_1 P_{1y} = 0$$
$$(-S\theta_1 P_{1x} + C\theta_1 P_{1y}) / C\theta_1 = 0$$
$$(S\theta_1 P_{1x} - C\theta_1 P_{1y}) / C\theta_1 = 0$$
$$tg\theta_1 P_{1x} - P_{1y} = 0$$

$$\theta_1 = arctg(P_{1y} / P_{1x})$$

Y en resumen:

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = (-L_1 C\theta_1, -L_1 S\theta_1, 0)$$
$$\theta_1 = arctg(P_{1y} / P_{1x})$$

Pero en este caso, ya se conocía el primer ángulo a través de $\theta_1 = \arctan(P_y / (L_5 - P_x))$ por lo que quedaría como:

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = (-L_1 C\theta_1, -L_1 S\theta_1, 0)$$
$$\theta_1 = \arctan(P_y / (L_5 - P_x))$$

Y se podría seguir calculando la posición de los sucesivos motores mediante el algoritmo de Denavit-Hartenmerg añadiendo en cada caso un motor más y calculando las correspondientes matrices y ecuaciones correspondientes.
Sin embargo, no será necesario puesto que las posiciones intermedias no tienen ninguna importancia a la hora de resolver este problema, tal y como está planteado.

Aún así, sólo con el esquema presentado y con las condiciones y cálculos previos, y sin hacer ningún tipo de cálculo, el punto P_4 vendrá definido como:

$$P_4 = (P_x, P_y, P_z - L_5)$$

1.1.2 Brazos con 3 motores

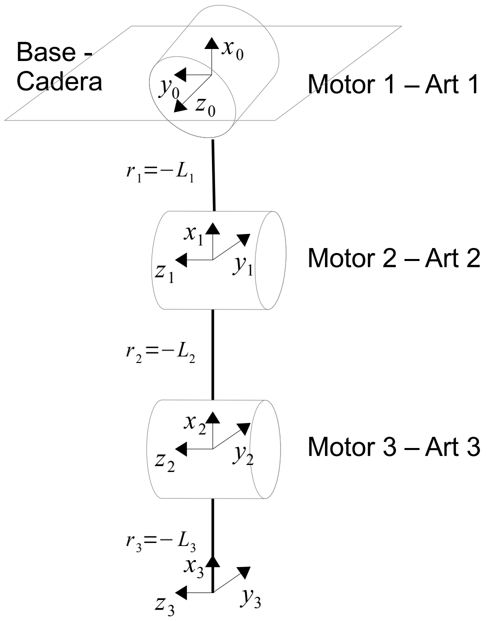

Ilustración 16: Brazo con tres motores, con el primero (hombro) con su eje de giro perpendicular a los otros dos, motores 2 y 3, con sus ejes paralelos entre sí.

Se va a resolver el problema de Cinemática Directa e Inversa para un brazo con 3 motores definidos en una arquitectura lineal, sin desviaciones laterales, y para el que el movimiento de balanceo se desarrolla en la dirección del movimiento del robot, hacia valores negativos del eje Z .

Este caso es similar a "Caso 4-0 - Cuadrípodo - Tres motores, con el primer motor paralelo al suelo, y el resto perpendicular al primero y paralelos al suelo". Pero hay dos diferencias, el sentido del brazo, dado que en el caso referenciado la base se sitúa en el suelo, mientras que el brazo en este ejercicio tiene como base el hombro, y el desplazamiento lateral del hombro.
Sin embargo, a la hora de ejecutar el Algoritmo de Denavit-Hartenberg el desplazamiento lateral puede eliminarse dad que se puede considerar que el motor del hombro esté en la vertical del brazo en lugar de en el hombro. De esta forma, los motores pueden considerarse en línea, lo que simplifica el problema.

1.1.2.1 Cinemática Directa, sin giro de 180º sobre el eje X en el primer motor

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & r_1 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & \pi/2 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & -L_1 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & -L_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & -L_3 & \pi/2 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1} p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = [{}^{i-1}A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$ {}^0A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^1A_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & 0 & S\theta_3 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & 0 & -C\theta_3 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_3 & -C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & 0 & S\theta_3 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & 0 & -C\theta_3 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & -S\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & C\theta_1(r_1+r_3C(\theta_2+\theta_3)+r_2C\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & C\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & S\theta_1(r_1+r_3C(\theta_2+\theta_3)+r_2C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & C(\theta_2+\theta_3) & -r_3S(\theta_2+\theta_3)-r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_1=-L_1$, $r_2=-L_2$ y $r_3=-L_3$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & -S\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & C\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & C\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & S\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & C(\theta_2+\theta_3) & -L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & -S\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & C\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & C\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & S\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & C(\theta_2+\theta_3) & -L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2) \\ S\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2) \\ L_3S(\theta_2+\theta_3)L_2S\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z)=(C\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2), S\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2), L_3S(\theta_2+\theta_3)L_2S\theta_2)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

1.1.3 Cinemática Inversa

1.1.3.1 Resolución del primer ángulo θ_1

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^0A_1)^{-1}T={}^1A_3={}^1A_2{}^2A_3$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 y θ_3 .

Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & -S\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & C\theta_1(r_1+r_3C(\theta_2+\theta_3)+r_2C\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & C\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & S\theta_1(r_1+r_3C(\theta_2+\theta_3)+r_2C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & C(\theta_2+\theta_3) & -r_3S(\theta_2+\theta_3)-r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & -S\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & P_x \\ C(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & C\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & P_y \\ -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & C(\theta_2+\theta_3) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & 0 & S\theta_3 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & 0 & -C\theta_3 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_1=-L_1$, $r_2=-L_2$ y $r_3=-L_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$[{}^0A_1]^{-1}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & -S\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & C\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & C\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & S\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & C(\theta_2+\theta_3) & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & -S\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1 & P_x \\ C(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & C\theta_1 & S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1 & P_y \\ -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & C(\theta_2+\theta_3) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \ {}^1A_3 = {}^1A_2\,{}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & -L_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & 0 & S\theta_3 & -L_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & 0 & -C\theta_3 & -L_3S\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & 0 & S(\theta_2+\theta_3) & -L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & 0 & -C(\theta_2+\theta_3) & -L_3S(\theta_2+\theta_3)-L_2S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_1 x + S\theta_1 y + L_1 t$$
$$f_{12} = -z$$
$$f_{13} = -S\theta_1 x + C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1} A = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^1A_3 = {}^1A_2\,{}^2A_3 = \begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & 0 & S(\theta_2+\theta_3) & -L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & 0 & -C(\theta_2+\theta_3) & -L_3S(\theta_2+\theta_3)-L_2S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones (Formato: fórmula = izquierda sin simplificar = izquierda simplificado = derecha sin simplificar = derecha simplificado):

$$f_{11}(n) = C\theta_1 x + S\theta_1 y + L_1 t \ =$$

$$C\theta_1(C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1)+S\theta_1(C(\theta_2+\theta_3)S\theta_1)=C(\theta_2+\theta_3)$$

$$f_{12}(n)=-z=-(-S(\theta_2+\theta_3))=S(\theta_2+\theta_3)$$

$$f_{13}(n)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y \quad = \quad -S\theta_1(C(\theta_2+\theta_3)C\theta_1)+C\theta_1(C(\theta_2+\theta_3)S\theta_1)=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_1 x+S\theta_1 y+L_1 t=C\theta_1(-S\theta_1)+S\theta_1(C\theta_1)=0$$

$$f_{12}(o)=-z=0$$

$$f_{13}(o)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y=-S\theta_1(-S\theta_1)+C\theta_1(C\theta_1)=1$$

$$f_{11}(a)=C\theta_1 x+S\theta_1 y+L_1 t=C\theta_1(S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1)+S\theta_1(S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1)=S(\theta_2+\theta_3)$$

$$f_{12}(a)=-z=-C(\theta_2+\theta_3)$$

$$f_{13}(a)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y=-S\theta_1(S(\theta_2+\theta_3)C\theta_1)+C\theta_1(S(\theta_2+\theta_3)S\theta_1)=0$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1 x+S\theta_1 y+L_1 t=C\theta_1(C\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2))...$$

$$...+S\theta_1(S\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2))+L_1 \quad =$$

$$-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2$$

$$f_{12}(p)=-z=-(-L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2)=-L_3S(\theta_2+\theta_3)-L_2S\theta_2$$

$$f_{13}(p)=-S\theta_1 x+C\theta_1 y=-S\theta_1(C\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2))...$$

$$...+C\theta_1(S\theta_1(-L_1-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2))=0$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Y de ello, se extraen las siguientes ecuaciones (sólo serían útiles los elementos de la última columna)...

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y+L_1 \\ . & . & . & -P_z \\ . & . & . & -S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^1A_3=\begin{pmatrix} . & . & . & -L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2 \\ . & . & . & -L_3S(\theta_2+\theta_3)-L_2S\theta_2 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y+L_1=-L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2$$

$$-P_Z=-L_3S(\theta_2+\theta_3)-L_2S\theta_2$$

$$-S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y=0$$

$$...$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z . Para ello, con la tercera ecuación:

$$-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y = 0$$
$$(-S\theta_1 P_x)/C\theta_1 + (C\theta_1 P_y)/C\theta_1 = 0$$
$$P_x + tg(\theta_1) P_y = 0$$
$$tg(\theta_1) = P_y / P_x$$
$$\theta_1 = arctg(P_y / P_x) = atan(P_y, P_x) = atan2(P_y, P_x) \quad *$$

Luego, ya se tiene la variable θ_1 .

1.1.3.2 Intento 1 para obtener el resto de ángulos θ_2 θ_3 - Elementos de T

Si ahora se tomaran las primeras ecuaciones:

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C(\theta_2 + \theta_3) - L_2 C\theta_2$$
$$-P_Z = -L_3 S(\theta_2 + \theta_3) - L_2 S\theta_2$$

Las dos igualdades por separado tienen un formato similar y sin una solución evidente.
Sin embargo, se pueden sumar sus cuadrados.

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C(\theta_2 + \theta_3) - L_2 C\theta_2$$
$$-P_Z = -L_3 S(\theta_2 + \theta_3) - L_2 S\theta_2$$

$$-(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1) = L_3 C(\theta_2 + \theta_3) + L_2 C\theta_2$$
$$P_Z = L_3 S(\theta_2 + \theta_3) + L_2 S\theta_2$$

$$(-(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))^2 = (L_3 C(\theta_2 + \theta_3) + L_2 C\theta_2)^2$$
$$(P_Z)^2 = (L_3 S(\theta_2 + \theta_3) + L_2 S\theta_2)^2$$

$$(-(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))^2 = (L_3 C(\theta_2 + \theta_3))^2 + 2(L_3 C(\theta_2 + \theta_3))(L_2 C\theta_2) + (L_2 C\theta_2)^2$$
$$(P_Z)^2 = (L_3 S(\theta_2 + \theta_3))^2 + 2(L_3 S(\theta_2 + \theta_3))(L_2 S\theta_2) + (L_2 S\theta_2)^2$$

$$(-(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))^2 = (L_3 C(\theta_2 + \theta_3))^2 + 2(L_3 C(\theta_2 + \theta_3))(L_2 C\theta_2) + (L_2 C\theta_2)^2$$
$$(P_Z)^2 = (L_3 S(\theta_2 + \theta_3))^2 + 2(L_3 S(\theta_2 + \theta_3))(L_2 S\theta_2) + (L_2 S\theta_2)^2$$

$$(-(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))^2 + (P_Z)^2 = (L_3 C(\theta_2 + \theta_3))^2 + 2(L_3 C(\theta_2 + \theta_3))(L_2 C\theta_2) + (L_2 C\theta_2)^2 \ldots$$
$$\ldots + (L_3 S(\theta_2 + \theta_3))^2 + 2(L_3 S(\theta_2 + \theta_3))(L_2 S\theta_2) + (L_2 S\theta_2)^2$$

$$(-(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))^2 + (P_Z)^2 = (L_3 C(\theta_2 + \theta_3))^2 + (L_2 C\theta_2)^2 + (L_3 S(\theta_2 + \theta_3))^2 + (L_2 S\theta_2)^2 \ldots$$
$$\ldots + 2(L_3 S(\theta_2 + \theta_3))(L_2 S\theta_2) + 2(L_3 C(\theta_2 + \theta_3))(L_2 C\theta_2)$$

$$(-(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))^2 + (P_Z)^2 = (L_3)^2 + (L_2)^2 \ldots$$
$$\ldots + 2 L_3 L_2 (S(\theta_2 + \theta_3) S\theta_2 + C(\theta_2 + \theta_3) C\theta_2)$$

$$(-(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))^2 + (P_Z)^2 = (L_3)^2 + (L_2)^2 \ldots$$

$$(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1)^2 + (P_Z)^2 = (L_3)^2 + (L_2)^2 + 2 L_3 L_2 C(\theta_2 + \theta_3 - \theta_2)$$

$$(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1)^2 + (P_Z)^2 = (L_3)^2 + (L_2)^2 + 2 L_3 L_2 C(\theta_3)$$

$$\theta_3 = \arccos(((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1)^2 + (P_Z)^2)/((L_3)^2 + (L_2)^2 + 2 L_3 L_2))$$

$$\theta_3 = \arccos(((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1)^2 + (P_Z)^2)/(L_3^2 + L_2^2 + 2 L_3 L_2)) \quad *$$

Y habiendo obtenido con ambos ángulos, θ_1 y θ_3 se podría intentar calcular θ_2 desde alguna de las igualdades anteriores, por ejemplo desde la primera igualdad.

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C(\theta_2 + \theta_3) - L_2 C\theta_2$$
$$-P_Z = -L_3 S(\theta_2 + \theta_3) - L_2 S\theta_2$$

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3(C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3) - L_2 C\theta_2$$

$$C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1 = -L_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_3 S\theta_3 S\theta_2 - L_2 C\theta_2$$

$$(-L_3 C\theta_3 - L_2) C\theta_2 + (L_3 S\theta_3) S\theta_2 = (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1)$$

Y usando ahora una de las ecuaciones trascendentes:

$$a \cos\theta + b \sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

Se obtendrá el ángulo θ_2 .

$$\theta_2 = atan2((L_3 S\theta_3), (-L_3 C\theta_3 - L_2))...$$
$$... \pm atan2(\sqrt{((-L_3 C\theta_3 - L_2))^2 + ((L_3 S\theta_3))^2 - ((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))^2}, (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1)) \quad *$$

Luego, ya se han calculado las tres variables articulares θ_1 , θ_2 y θ_3 :

$$\theta_1 = arctg(P_y / P_x) = atan(P_y, P_x) = atan2(P_y, P_x)$$
$$\theta_3 = \arccos(((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1)^2 + (P_Z)^2)/(L_3^2 + L_2^2 + 2 L_3 L_2))$$
$$\theta_2 = atan2((L_3 S\theta_3), (-L_3 C\theta_3 - L_2))...$$
$$... \pm atan2(\sqrt{((-L_3 C\theta_3 - L_2))^2 + ((L_3 S\theta_3))^2 - ((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))^2}, (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y + L_1))$$

Por tanto, quedaría resuelta la parte de Cinemática Inversa.