UNIVERSIDAD DE BURGOS
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
Grado en Ingeniería Informática

Trabajo de Final de Grado
ROBÓTICA: Modelado de Cinemática Directa e Inversa basado en el Algoritmo de Denavit-Hartenberg – Desacoplamiento de Subproblemas

Documentación Técnica
Desarrollo Teórico - Casos Básicos y Aplicación en otras Arquitecturas

Presentado por Jaime Sáiz de la Peña
en Universidad de Burgos —
19/01/2023

Tutores:
José Manuel Sáiz Diez
Raúl Marticorena Sánchez

Índice de contenido

Illustration Index

1 Casos planteados

Casos analizados – Motor de cada articulación respecto al anterior y a la base

	Arti-1	Arti-2	Arti-3	Arti-4	Arti-5	
Caso 3-0	Perpen	Perpen				DH
Caso 3-1	Perpen	Perpen	Paralelo			DH+Geométrico
Caso 4-0	Paralelo	Perpen	Paralelo			Cuadrúpodo resuelto por DH
Caso 4-1	Paralelo	Perpen	Paralelo			Cambio de ejes sobre Caso 4-0
Caso 4-2	Paralelo	Paralelo	Paralelo			
Caso 5-0	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo		
Caso 1-0...	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo	Paralelo	
… Arti. 1	Perpen	Fija	Fija	Fija	Fija	DH
… Arti. 2 *	Fija	Perpen	Fija	Fija	Fija	DH-Sin giro de 90º
… Arti. 2	Fija	Perpen	Fija	Fija	Fija	DH-Con giro de 90º
… Arti. 3	Fija	Fija	Perpen	Fija	Fija	DH
… Arti. 4	Fija	Fija	Fija	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 5	Fija	Fija	Fija	Fija	Paralelo	DH
… Arti. 1-2	Perpen	Perpen	Fija	Fija	Fija	DH
… Arti. 2-3 *	Fija	Perpen	Perpen	Fija	Fija	DH-Sin giro de 90º
… Arti. 2-3	Fija	Perpen	Perpen	Fija	Fija	DH-Con giro de 90º
… Arti. 3-4	Fija	Fija	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 4-5	Fija	Fija	Fija	Paralelo	Paralelo	DH
… Arti. 1-2-3	Perpen	Perpen	Perpen	Fija	Fija	DH
… Arti. 1-3-4	Perpen	Fija	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 2-3-4	Fija	Perpen	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 3-4-5	Fija	Fija	Perpen	Paralelo	Paralelo	DH
… Arti. 1-2-3-4	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 2-3-4-5	Fija	Perpen	Perpen	Paralelo	Paralelo	DH
… Arti. Desacopladas 1-2 + 3-4-5	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo	Paralelo	**Brazo** resuelto por DH y Acoplamiento, con plano y ángulo de ataque
Caso 7-0-Pierna	Perpen	Paralelo	Paralelo	Paralelo	Perpen	**Humanoide** resuelto por DH
Caso 7-0-Brazo	Perpen	Paralelo	Paralelo			**Humanoide** resuelto por DH

1.1 Caso 3-0 – 2 motores perpendiculares

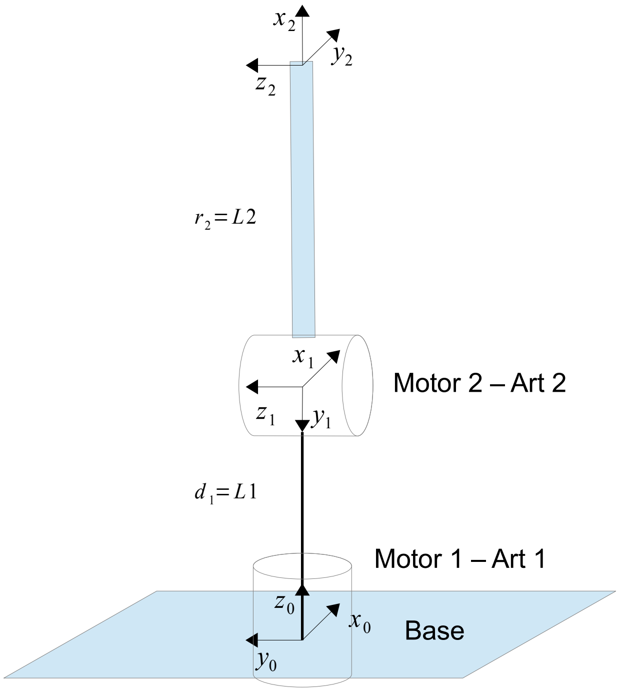


Ilustración 1: Brazo con dos motores perpendiculares

1.1.1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, se comenzará por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L1 & 0 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L2 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = [{}^{i-1}A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^0A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^1A_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^0A_1 {}^1A_2$.

$$T={}^{0}A_2={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$T={}^{0}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 & r_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ C\theta_2 S\theta_1 & -S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & r_2 C\theta_2 S\theta_1 \\ -S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & d_1 - r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1 = L_1$ y $r_2 = L_2$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 & L_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ C\theta_2 S\theta_1 & -S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & L_2 C\theta_2 S\theta_1 \\ -S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & L_1 - L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 & L_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ C\theta_2 S\theta_1 & -S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & L_2 C\theta_2 S\theta_1 \\ -S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & L_1 - L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ L_2 C\theta_2 S\theta_1 \\ L_1 - L_2 S\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z)=(L_2 C\theta_1 C\theta_2,\, L_2 C\theta_2 S\theta_1,\, L_1 - L_2 S\theta_2)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

1.1.2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).

Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias, incluidas en la igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T={}^{1}A_2$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .

Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & d_1\\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2\\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2S\theta_2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x\\ r_y\\ r_z\\ 1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x\\ n_y & o_y & a_y & P_y\\ n_z & o_z & a_z & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_1C\theta_2 & -C\theta_1S\theta_2 & -S\theta_1 & r_2C\theta_1C\theta_2\\ C\theta_2S\theta_1 & -S\theta_1S\theta_2 & C\theta_1 & r_2C\theta_2S\theta_1\\ -S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & d_1-r_2S\theta_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x\\ n_y & o_y & a_y & P_y\\ n_z & o_z & a_z & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1C\theta_2 & -C\theta_1S\theta_2 & -S\theta_1 & P_x\\ C\theta_2S\theta_1 & -S\theta_1S\theta_2 & C\theta_1 & P_y\\ -S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$ y $r_2=L_2$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & L_1\\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1C\theta_2 & -C\theta_1S\theta_2 & -S\theta_1 & L_2C\theta_1C\theta_2\\ C\theta_2S\theta_1 & -S\theta_1S\theta_2 & C\theta_1 & L_2C\theta_2S\theta_1\\ -S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & L_1-L_2S\theta_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & L_1\\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1C\theta_2 & -C\theta_1S\theta_2 & -S\theta_1 & P_x\\ C\theta_2S\theta_1 & -S\theta_1S\theta_2 & C\theta_1 & P_y\\ -S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$ {}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^{0}A_1)^{-1}T$:

$$ \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$ f_{11} = C\theta_1 x + S\theta_1 y $$
$$ f_{12} = -z + d_1 t $$
$$ f_{13} = -S\theta_1 x + C\theta_1 y $$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$ ({}^{0}A_1)^{-1} T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$ f_{11}(n) = C\theta_1 C\theta_1 C\theta_2 + S\theta_1 C\theta_2 S\theta_1 = C\theta_2 $$
$$ f_{12}(n) = -(-S\theta_2) = S\theta_2 $$
$$ f_{13}(n) = -S\theta_1 C\theta_1 C\theta_2 + C\theta_1 C\theta_2 S\theta_1 = 0 $$

$$ f_{11}(o) = C\theta_1(-C\theta_1 S\theta_2) + S\theta_1(-S\theta_1 S\theta_2) = -C\theta_1 C\theta_1 S\theta_2 - S\theta_1 S\theta_1 S\theta_2 \;\; = $$
$$ -S\theta_2(C\theta_1 C\theta_1 + S\theta_1 S\theta_1) = -S\theta_2 $$
$$ f_{12}(o) = -(-C\theta_2) = C\theta_2 $$
$$ f_{13}(o) = -S\theta_1(-C\theta_1 S\theta_2) + C\theta_1(-S\theta_1 S\theta_2) = 0 $$

$$ f_{11}(a) = C\theta_1(-S\theta_1) + S\theta_1 C\theta_1 = 0 $$
$$ f_{12}(a) = 0 $$
$$ f_{13}(a) = -S\theta_1(-S\theta_1) + C\theta_1 C\theta_1 = 1 $$

$$ f_{11}(p) = C\theta_1(L_2 C\theta_1 C\theta_2) + S\theta_1(L_2 C\theta_2 S\theta_1) = L_2 C\theta_2(C\theta_1 C\theta_1 + S\theta_1 S\theta_1) = L_2 C\theta_2 $$
$$ f_{12}(p) = -(L_1 - L_2 S\theta_2) + L_1 = L_2 S\theta_2 $$

$$f_{13}(p)=-S\theta_1\,L_2\,C\theta_1\,C\theta_2+C\theta_1\,L_2\,C\theta_2\,S\theta_1=0$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar P(x,y,z):

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y \\ . & . & . & L_1 \\ . & . & . & (-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^{1}A_2=\begin{pmatrix} . & . & . & L_2 C\theta_2 \\ . & . & . & L_2 S\theta_2 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_1\,P_x+S\theta_1 P_y=L_2\,C\theta_2 \quad\Leftrightarrow\quad f_{11}(p)=C\theta_1(L_2\,C\theta_1\,C\theta_2)+S\theta_1(L_2\,C\theta_2\,S\theta_1)=L_2\,C\theta_2$$

$$...$$

$$(-S\theta_1)P_x+C\theta_1\,P_y=0 \quad\Leftrightarrow\quad f_{13}(p)=-S\theta_1\,C\theta_1\,C\theta_2+C\theta_1\,C\theta_2\,S\theta_1=0$$

$$\dots$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 y θ_2 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x y P_y . Para ello, con la segunda ecuación:

$$(-S\theta_1)P_x+\,C\theta_1\,P_y=0$$
$$((-S\theta_1)\,P_x+\,C\theta_1 P_y)/C\theta_1=0$$
$$(-tg\theta_1)\,P_x+\,P_y=0$$
$$\theta_1=arctg\,(P_y/P_x)$$
$$\theta_1=arctg\,(P_y/P_x)=atan(P_y,P_x)=atan2\,(P_y\,,P_x)$$

Y con la primera ecuación:

$$C\theta_1\,P_x+S\theta_1 P_y=L_2\,C\theta_2$$
$$\theta_2=acos((C\theta_1 P_x+S\theta_1\,P_y)/L_2)$$

Luego, ya estarán determinados los ángulos necesarios en ambas articulaciones, para llegar al punto $P(x\,,y\,,z)$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto. Y por tanto, también quedaría resuelta la parte de Cinemática Inversa.

Ahora sólo faltaría introducir esas ecuaciones en el lenguaje de programación necesario para mover el brazo robótico hasta el punto del espacio deseado.

1.2 Caso 3-1 – Tres motores, con el primer motor perpendicular al suelo, y el resto perpendicular al primero

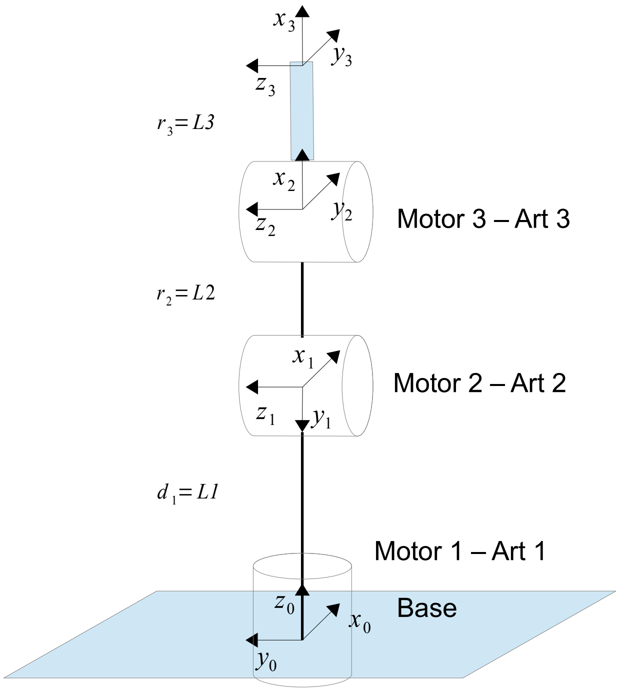


Ilustración 2: Brazo con tres motores, con el primer motor perpendicular al suelo, y el resto perpendicular al primero

1.2.1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, se comenzará por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2-\pi/2 & 0 & r_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L1 & 0 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2-\pi/2 & 0 & L2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & L3 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$ {}^0A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\theta_2-\pi/2) & -S(\theta_2-\pi/2) & 0 & r_2 C(\theta_2-\pi/2) \\ S(\theta_2-\pi/2) & C(\theta_2-\pi/2) & 0 & r_2 S(\theta_2-\pi/2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\theta_2-\pi/2) & S(\theta_2-\pi/2) & 0 & -r_2 \\ -S(\theta_2-\pi/2) & C(\theta_2-\pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la resta de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A-B)=\cos(A)\cos(B)+\sin(A)\sin(B)$ y, los elementos incluidos en estas $\sin(A-B)=\sin(A)\cos(B)-\cos(A)\sin(B)$ matrices serían:

$$\cos((\theta_2)-(\pi/2))=\cos(\theta_2)\cos(\pi/2)+\sin(\theta_2)\sin(\pi/2)=\cos(\theta_2)*0+\sin(\theta_2)*1=\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\theta_2)-(\pi/2))=\sin(\theta_2)\cos(\pi/2)-\cos(\theta_2)\sin(\pi/2)=\sin(\theta_2)*0-\cos(\theta_2)*1=-\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^1A_2$ y $[{}^1A_2]^{-1}$ anteriores se convierten en:

$$ {}^1A_2=\begin{pmatrix} S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ -C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3$$
$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo), tanto en versión completa como simplificada.

$$T={}^0A_3=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ -C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3+C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2 & -S\theta_1 & r_2 C\theta_1 S\theta_2+r_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+r_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2 & C\theta_1 & r_2 S\theta_2 S\theta_1+r_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+r_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ -S\theta_2 S\theta_3+C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_3 & 0 & d_1+r_2 C\theta_2-r_3 S\theta_2 S\theta_3+r_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(r_3 S(\theta_2+\theta_3)+r_2 S\theta_2) \\ S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(r_3 S(\theta_2+\theta_3)+r_2 S\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & d_1+r_2 C\theta_2+r_3 C(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1=L_1$, $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3+C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2 & -S\theta_1 & L_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2 & C\theta_1 & L_2 S\theta_2 S\theta_1+L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ -S\theta_2 S\theta_3+C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_3 & 0 & L_1+L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(r_3 S(\theta_2+\theta_3)+r_2 S\theta_2) \\ S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(r_3 S(\theta_2+\theta_3)+r_2 S\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & d_1+r_2 C\theta_2+r_3 C(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo $((0_{u0'},0_{v0'},0_{w0'})$ - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3+C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2 & -S\theta_1 & L_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2 & C\theta_1 & L_2 S\theta_2 S\theta_1+L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ -S\theta_2 S\theta_3+C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_3 & 0 & L_1+L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2) \\ S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ L_2 S\theta_2 S\theta_1+L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ L_1+L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2) \\ S\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2) \\ L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C(\theta_2+\theta_3) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$\begin{gathered} P(x,y,z)=(L_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3\ , \quad \ldots \\ L_2 S\theta_2 S\theta_1+L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3\ ,\ L_1+L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2)\ = \\ (C\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2), S\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2), L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C(\theta_2+\theta_3)) \end{gathered}$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

1.2.2 Cinemática Inversa

1.2.2.1 Resolución del primer ángulo θ_1

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^0A_1)^{-1}T={}^1A_3={}^1A_2\,{}^2A_3$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_2 y θ_3 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3+C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2 & -S\theta_1 & L_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2 & C\theta_1 & L_2 S\theta_2 S\theta_1+L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ -S\theta_2 S\theta_3+C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_3 & 0 & L_1+L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2) \\ S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2 & -S\theta_1 & P_x \\ S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2 & C\theta_1 & P_y \\ -S\theta_2 S\theta_3 + C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_3 & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S(\theta_2 + \theta_3) & C\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3) & -S\theta_1 & P_x \\ S\theta_1 S(\theta_2 + \theta_3) & S\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3) & C\theta_1 & P_y \\ C(\theta_2 + \theta_3) & -S(\theta_2 + \theta_3) & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ {}^1A_2 = \begin{pmatrix} S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ -C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1 = L_1$, $r_2 = L_2$ y $r_3 = L_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^0A_1)^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2 & -S\theta_1 & L_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2 & C\theta_1 & L_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ -S\theta_2 S\theta_3 + C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_3 & 0 & L_1 + L_2 C\theta_2 - L_3 S\theta_2 S\theta_3 + L_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 S(\theta_2 + \theta_3) & C\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1 (L_3 S(\theta_2 + \theta_3) + L_2 S\theta_2) \\ S\theta_1 S(\theta_2 + \theta_3) & S\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1 (L_3 S(\theta_2 + \theta_3) + L_2 S\theta_2) \\ C(\theta_2 + \theta_3) & -S(\theta_2 + \theta_3) & 0 & L_1 + L_2 C\theta_2 + L_3 C(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2 & -S\theta_1 & P_x \\ S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2 & C\theta_1 & P_y \\ -S\theta_2 S\theta_3 + C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_3 & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 S(\theta_2 + \theta_3) & C\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3) & -S\theta_1 & P_x \\ S\theta_1 S(\theta_2 + \theta_3) & S\theta_1 C(\theta_2 + \theta_3) & C\theta_1 & P_y \\ C(\theta_2 + \theta_3) & -S(\theta_2 + \theta_3) & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \ {}^1A_3 = {}^1A_2 \, {}^2A_3 = \begin{pmatrix} S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2 S\theta_2 \\ -C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_3 + C\theta_3 C\theta_2 & 0 & L_2 S\theta_2 + L_3 S\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_2 S\theta_3 \\ S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 C\theta_2 & S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_3 & 0 & -L_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 S\theta_3 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 \\ -C(\theta_2+\theta_3) & S(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_3 C(\theta_2+\theta_3) - L_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_1 x + S\theta_1 y$$
$$f_{12} = -z + d_1 t$$
$$f_{13} = -S\theta_1 x + C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1} T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^1A_3 = {}^1A_2\, {}^2A_3 = \begin{pmatrix} S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_3 + C\theta_3 C\theta_2 & 0 & L_2 S\theta_2 + L_3 S\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_2 S\theta_3 \\ S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 C\theta_2 & S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_3 & 0 & -L_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 S\theta_3 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 \\ -C(\theta_2+\theta_3) & S(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_3 C(\theta_2+\theta_3) - L_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n) = C\theta_1 (C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) + S\theta_1 (S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) = S(\theta_2+\theta_3)$$

$$f_{12}(n)=-(-S\theta_2 S\theta_3+C\theta_3 C\theta_2)=-C(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{13}(n)=-S\theta_1(C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)+C\theta_1(S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_1(-C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3+C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2)+S\theta_1(-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2) = C(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{12}(o)=-(-C\theta_2 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_3)=S(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{13}(o)=-S\theta_1(-C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3+C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2)+C\theta_1(-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2)=0$$

$$f_{11}(a)=C\theta_1(-S\theta_1)+S\theta_1 C\theta_1=0$$
$$f_{12}(a)=0$$
$$f_{13}(a)=-S\theta_1(-S\theta_1)+C\theta_1 C\theta_1=1$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1(L_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)+\ldots$$
$$\ldots+S\theta_1(L_2 S\theta_2 S\theta_1+L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)=L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2$$
$$f_{12}(p)=-(L_1+L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2)+L_1=-L_3 C(\theta_2+\theta_3)-L_2 C\theta_2$$
$$f_{13}(p)=-S\theta_1(L_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)+\ldots$$
$$\ldots C\theta_1(L_2 S\theta_2 S\theta_1+L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)=0$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y \\ . & . & . & -P_z+L_1 \\ . & . & . & (-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$
$${}^1A_3=\begin{pmatrix} . & . & . & L_2 S\theta_2+L_3 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_2 S\theta_3 \\ . & . & . & -L_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2 \\ . & . & . & -L_3 C(\theta_2+\theta_3)-L_2 C\theta_2 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y=L_2 S\theta_2+L_3 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_2 S\theta_3=L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2$$
$$f_{12}(p)=-P_z+L_1=-L_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_2 C\theta_3=-L_3 C(\theta_2+\theta_3)-L_2 C\theta_2$$
$$f_{13}(p)=(-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y=0$$

...

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x y P_y . Para ello, con la tercera ecuación:

$$(-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y=0$$
$$(-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y=0$$
$$-tg(\theta_1)P_x+P_y=0$$
$$\theta_1=arctg(P_y/P_x)=atan(P_y,P_x)=atan2(P_y,P_x) \quad *$$

Por tanto, ya se ha obtenido el ángulo θ_1 .

Otra posibilidad hubiera sido tomar los dos elementos correspondientes a la primera y segunda fila de la cuarta columna de T también presentado como componentes del punto P . Se podría haber operado de la siguiente forma:

$$P(x,y,z)=(L_2C\theta_1S\theta_2+ L_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3+ L_3C\theta_1C\theta_2S\theta_3 \ , \ \ldots$$
$$L_2S\theta_2S\theta_1+ L_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1+ L_3S\theta_1C\theta_2S\theta_3 \ , \ L_1+ L_2C\theta_2-L_3S\theta_2S\theta_3+ L_3C\theta_3C\theta_2) \ =$$
$$(C\theta_1(L_3S(\theta_2+\theta_3)+ L_2S\theta_2), S\theta_1(L_3S(\theta_2+\theta_3)+ L_2S\theta_2), L_1+ L_2C\theta_2+ L_3C(\theta_2+\theta_3))$$

$$P(y)/P(x)=(L_2S\theta_2S\theta_1+L_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1+L_3S\theta_1C\theta_2S\theta_3)\ldots$$
$$\ldots/(L_2C\theta_1S\theta_2+L_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1C\theta_2S\theta_3) \ =$$
$$S\theta_1(L_2S\theta_2+L_3S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_2S\theta_3)/C\theta_1(L_2S\theta_2+L_3S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_2S\theta_3) \ =$$
$$P(y)/P(x)=S\theta_1/C\theta_1$$

$$\theta_1=atan2(P(y),P(x)) \quad *$$

Luego, se puede comprobar que existen varias formas analíticas de determinar el valor de los ángulos, lo que da a entender que existen varios elementos que son linealmente dependientes. Y eso hace pensar que el número de ecuaciones que puedan ser utilizadas para el cálculo de los diferentes ángulos podría ser mucho más reducido que lo que, aparentemente se podría pensar. De hecho, la existencia de una línea completa con un valor "0" o "1", además de otros elementos que también lo son, ya reducen inicialmente el número de posibles combinaciones que acaben siendo una ecuación utilizable.

1.2.2.2 Intento 1 para obtener el resto de ángulos θ_2 θ_3 - Elementos de T, o primera inversa

Si se parte del punto P definido mediante los elementos de la última columna de la matriz T que definen cada una de sus componentes.

$$P(x,y,z)=(L_2C\theta_1S\theta_2+ L_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3+ L_3C\theta_1C\theta_2S\theta_3 \ , \ \ldots$$
$$L_2S\theta_2S\theta_1+ L_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1+ L_3S\theta_1C\theta_2S\theta_3 \ , \ L_1+ L_2C\theta_2-L_3S\theta_2S\theta_3+ L_3C\theta_3C\theta_2) \ =$$
$$(C\theta_1(L_3S(\theta_2+\theta_3)+ L_2S\theta_2), S\theta_1(L_3S(\theta_2+\theta_3)+ L_2S\theta_2), L_1+ L_2C\theta_2+ L_3C(\theta_2+\theta_3))$$

$$P(x)=L_2C\theta_1S\theta_2+L_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1C\theta_2S\theta_3 \ =$$
$$C\theta_1(L_2S\theta_2+L_3S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_2S\theta_3)=C\theta_1(L_2S\theta_2+L_3S(\theta_2+\theta_3))$$
$$P(y)=L_2S\theta_2S\theta_1+L_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1+L_3S\theta_1C\theta_2S\theta_3=S\theta_1(L_2S\theta_2+L_3S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_2S\theta_3) \ =$$

$$S\theta_1(L_2 S\theta_2+L_3 S(\theta_2+\theta_3))$$
$$P(z)=L_1+L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2=L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C(\theta_2+\theta_3)$$

De las ecuaciones correspondientes a $P(x)$ y $P(y)$ en el punto P se podrían crear dos nuevas ecuaciones con los elementos de la primera y tercera línea en la cuarta columna de T y multiplicándolos por $S\theta_1$ o $C\theta_1$, e igualando estos a los elementos correspondientes de la derecha:

$P(x)S\theta_1-P(y)C\theta_1=0$ (No usada)
Ecuación 1: $P(x)C\theta_1+P(y)S\theta_1=(L_2 S\theta_2+L_3 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_2 S\theta_3)$

Estas ecuaciones también se podrían extraer de los patrones ya calculados, al usar f_{11} y f_{13} en el desarrollo de la primera inversa.

Y modificando la ecuación de $P(z)$ del punto P en su forma completa, y sumando los cuadrados de ambas ecuaciones:

$P(z)=L_1+L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2=L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C(\theta_2+\theta_3)$
$P(z)-L_1=L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2$
Ecuación 2: $L_1-P(z)=-L_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 C\theta_2$

(Ecuación 1)^2+ (Ecuación 2)^2 = $(L_1-P(z))^2+(P(x)C\theta_1+P(y)S\theta_1)^2$ =
$(-L_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 C\theta_2)^2+(L_2 S\theta_2+L_3 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_2 S\theta_3)^2$ =
$(L_3 S\theta_2 S\theta_3-L_2 C\theta_2)^2-2(L_3 S\theta_2 S\theta_3-L_2 C\theta_2)(L_3 C\theta_3 C\theta_2)+(L_3 C\theta_3 C\theta_2)^2\ldots$
$\ldots+(L_2 S\theta_2+L_3 S\theta_2 C\theta_3)^2+2(L_2 S\theta_2+L_3 S\theta_2 C\theta_3)(L_3 C\theta_2 S\theta_3)+(L_3 C\theta_2 S\theta_3)^2$ =

$(L_3 S\theta_2 S\theta_3)^2-2(L_2 C\theta_2)(L_3 S\theta_2 S\theta_3)+(L_2 C\theta_2)^2\ldots$
$\ldots-2(L_3 S\theta_2 S\theta_3-L_2 C\theta_2)(L_3 C\theta_3 C\theta_2)+(L_3 C\theta_3 C\theta_2)^2\ldots$
$\ldots+(L_2 S\theta_2)^2+2(L_2 S\theta_2)(L_3 S\theta_2 C\theta_3)+(L_3 S\theta_2 C\theta_3)^2\ldots$
$\ldots+2(L_2 S\theta_2+L_3 S\theta_2 C\theta_3)(L_3 C\theta_2 S\theta_3)+(L_3 C\theta_2 S\theta_3)^2$ =

$L_2^2((C\theta_2)^2+(S\theta_2)^2)-2L_2 L_3 C\theta_2 S\theta_2 S\theta_3+(L_3 S\theta_2 S\theta_3)^2\ldots$
$\ldots+2L_2 L_3 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_2-2L_3 L_3 S\theta_2 S\theta_3 C\theta_3 C\theta_2+(L_3 C\theta_3 C\theta_2)^2\ldots$
$\ldots+2L_2 L_3 S\theta_2 S\theta_2 C\theta_3+(L_3 S\theta_2 C\theta_3)^2\ldots$
$\ldots+2L_2 L_3 S\theta_2 C\theta_2 S\theta_3+2L_3 L_3 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_2 S\theta_3+(L_3 C\theta_2 S\theta_3)^2$ =

$L_2^2+L_3^2 S\theta_2^2 S\theta_3^2+2L_2 L_3 C\theta_3(C\theta_2^2+S\theta_2^2)+L_3^2 C\theta_3^2 C\theta_2^2+L_3^2 S\theta_2^2 C\theta_3^2+L_3^2 C\theta_2^2 S\theta_3^2$ =
$L_2^2+L_3^2 S\theta_2^2 S\theta_3^2+2L_2 L_3 C\theta_3+L_3^2 C\theta_3^2 C\theta_2^2+L_3^2 S\theta_2^2 C\theta_3^2+L_3^2 C\theta_2^2 S\theta_3^2$ =
$L_2^2+L_3^2 S\theta_2^2(S\theta_3^2+C\theta_3^2)+2L_2 L_3 C\theta_3+L_3^2 C\theta_2^2(C\theta_3^2+S\theta_3^2)$ =
$L_2^2+L_3^2 S\theta_2^2+2L_2 L_3 C\theta_3+L_3^2 C\theta_2^2$ =
$L_2^2+L_3^2(C\theta_2^2+S\theta_2^2)+2L_2 L_3 C\theta_3$ =
$(L_1-P(z))^2+(P(x)C\theta_1+P(y)S\theta_1)^2=L_2^2+L_3^2+2L_2 L_3 C\theta_3$

$$\theta_3=\arccos(((L_1-P(z))^2+(P(x)C\theta_1+P(y)S\theta_1)^2-L_2^2-L_3^2)/2L_2 L_3) \quad *$$

Y ahora se sacará θ_2 a partir de la ecuación usada con anterioridad:

$$L_1-P(z)=-L_2\,C\theta_2+L_3\,S\theta_2\,S\theta_3-L_3\,C\theta_3\,C\theta_2=-C\theta_2(L_2+L_3\,C\theta_3)+S\theta_2(L_3\,S\theta_3)$$
$$(-(L_2+L_3\,C\theta_3))\,C\theta_2+(L_3\,S\theta_3)\,S\theta_2=L_1-P(z)$$

Y mediante la ecuación:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c\;\Leftrightarrow\;\theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Se obtiene:

$$\theta_2=atan2((L_3S\theta_3),-(L_2+\,L_3C\theta_3))\pm atan2(\sqrt{(L_2+\,L_3\,C\theta_3)^2+\,(L_3S\theta_3)^2-(L_1-P(z))^2},L_1-P(z))$$
*

Y queda por tanto, resuelto mediante soluciones analíticas.

1.2.2.3 Intento 2 - Primera matriz inversa y uso del punto

Si se toma la primera ecuación del conjunto de la primera inversa, con la cuarta columna:

$$f_{11}(p)=C\theta_1P_x+S\theta_1P_y=L_2S\theta_2+L_3S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_2S\theta_3=L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2$$
$$C\theta_1P_x+S\theta_1P_y=L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2$$
$$S(\theta_2+\theta_3)=(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_2S\theta_2)/L_3$$
$$\theta_2+\,\theta_3=\arcsin((C\theta_1P_x+\,S\theta_1P_y-L_2S\theta_2)/L_3)$$
$$\theta_3=\arcsin((C\theta_1P_x+\,S\theta_1P_y-L_2S\theta_2)/L_3)-\theta_2\quad *$$

Por tanto, se encuentra la segunda variable, θ_3 en función de θ_2 , o $\theta_2+\theta_3$ en función de valores, ya conocidos.
Y si ahora se sustituye el término $\theta_2+\theta_3$ en la segunda ecuación del conjunto de la primera inversa, con la primera columna:

$$f_{12}(n)=-P_z+L_1=-L_2C\theta_2+L_3S\theta_2S\theta_3-L_3C\theta_2C\theta_3=-L_2C\theta_2-L_3C(\theta_2+\theta_3)$$
$$-P_z+\,L_1=-L_3C(\arcsin((C\theta_1P_x+\,S\theta_1P_y-L_2S\theta_2)/L_3))-L_2C\theta_2$$

O también se puede sustituir:

$$-P_z+L_1=L_3(1-(S(\theta_2+\theta_3))^2)^{1/2}-L_2C\theta_2$$
$$-P_z+L_1=L_3(1-((C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_2S\theta_2)/L_3)^2)^{1/2}-L_2C\theta_2$$
$$(-P_z+L_1+L_2C\theta_2)/L_3=(1-((C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_2S\theta_2)/L_3)^2)^{1/2}$$
$$((-P_z+L_1+L_2C\theta_2)/L_3)^2=(1-((C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_2S\theta_2)/L_3)^2)$$

$$((L_1-P_z)^2+\,2(L_1-P_z)(L_2C\theta_2)+\,(L_2C\theta_2)^2)/L_3^2\;=$$
$$1-(((C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2-2(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)(L_2S\theta_2)+(L_2S\theta_2)^2)/L_3^2)$$

$$((L_1-P_z)^2+\,2(L_1-P_z)(L_2C\theta_2)+\,(L_2C\theta_2)^2)/L_3^2\;=$$
$$(L_3^2-((C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2-2(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)(L_2S\theta_2)+(L_2S\theta_2)^2)/L_3^2)$$

$$(L_1-P_z)^2+2(L_1-P_z)(L_2C\theta_2)+(L_2C\theta_2)^2 \quad = \\ L_3^2-((C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2-2(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)(L_2S\theta_2)+(L_2S\theta_2)^2)$$

$$(L_1-P_z)^2+2(L_1-P_z)(L_2C\theta_2)+(L_2C\theta_2)^2 \quad = \\ L_3^2-(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2+2(C\theta_1P_x-S\theta_1P_y)(L_2S\theta_2)-(L_2S\theta_2)^2$$

$$(L_1-P_z)^2-L_3^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2 \quad = \\ 2(C\theta_1P_x-S\theta_1P_y)(L_2S\theta_2)-L_2^2(C\theta_2^2+S\theta_2^2)-2(L_1-P_z)(L_2C\theta_2)$$

$$(L_1-P_z)^2-L_3^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2 \quad = \\ 2(C\theta_1P_x-S\theta_1P_y)(L_2S\theta_2)-L_2^2-2(L_1-P_z)(L_2C\theta_2)$$

$$(L_1-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2 \quad = \\ 2(C\theta_1P_x-S\theta_1P_y)(L_2S\theta_2)-2(L_1-P_z)(L_2C\theta_2)$$

$$(-2L_2(L_1-P_z))C\theta_2+(2L_2(C\theta_1P_x-S\theta_1P_y))S\theta_2=(L_1-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2 \\ (-(L_1-P_z))C\theta_2+(C\theta_1P_x-S\theta_1P_y)S\theta_2=((L_1-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2)/2L_2$$

Y se podría aplicar la ecuación

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \iff \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Y daría como resultado:

$$\theta_2=atan2(2L_2(C\theta_1P_x-S\theta_1P_y),-2L_2(L_1-P_z))... \\ ...\pm atan2(\sqrt{(-2L_2(L_1-P_z))^2+(2L_2(C\theta_1P_x-S\theta_1P_y))^2-((L_1-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2)^2},(L_1-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2) \quad = \\ atan2((C\theta_1P_x-S\theta_1P_y),-(L_1-P_z))... \\ ...\pm atan2(\sqrt{(2L_2(L_1-P_z))^2+(2L_2(C\theta_1P_x-S\theta_1P_y))^2-((L_1-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2)^2},(L_1-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2)$$

Y sustituyendo este valor en la ecuación anterior para θ_2 , podría encontrarse también el último ángulo buscado.

1.2.2.4 Intento 3 - División del problema en partes simples (pares de articulaciones)

En este caso se intentarán analizar los problemas por separado. De esta forma, se inicia la resolución del problema independizando las dos restantes articulaciones de la primera, que ya fue resuelto. Así, se va a independizar todo el tratamiento de matrices para resolver el problema simple representado a continuación.

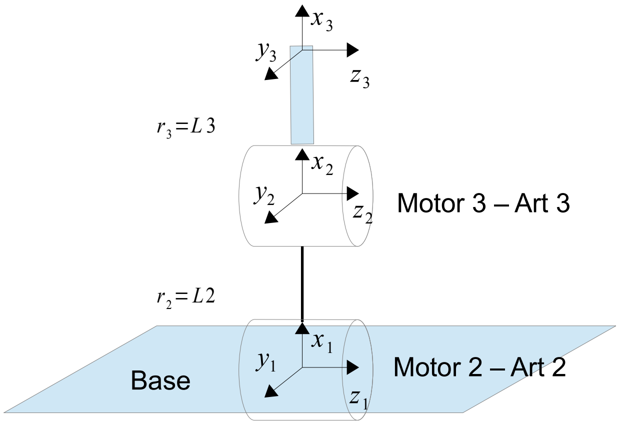


Ilustración 3: Brazo restante tras separar la articulación ya resuelta analíticamente

De esta forma el Origen de Coordenadas de este primer motor ($O - XYZ$) se considera en la Base virtual correspondiente al segundo motor del problema completo. Así, la matriz correspondiente a este primer motor determina cómo llegar a ese segundo motor a través del desplazamiento de una distancia d_1 sobre el eje Z:

$$ {}^{0}A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Por tanto, la componente z del punto P' a alcanzar tendrá que disminuirse en la cantidad correspondiente a esa diferencia de altura entre las Bases real y virtual.

De esta forma se simplifica en cálculo y las matrices resultantes.

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, se comenzará por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$ \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & 0 & 0 & 105 & 0 \\ 2-3 & 0 & 0 & 290 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & L_3 & 0 \end{array} $$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$ A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$ {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C(\theta_2-\pi/2) & -S(\theta_2-\pi/2) & 0 & r_2 C(\theta_2-\pi/2) \\ S(\theta_2-\pi/2) & C(\theta_2-\pi/2) & 0 & r_2 S(\theta_2-\pi/2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\theta_2-\pi/2) & S(\theta_2-\pi/2) & 0 & -r_2 \\ -S(\theta_2-\pi/2) & C(\theta_2-\pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la resta de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A-B)=\cos(A)\cos(B)+\sin(A)\sin(B)$ y, los elementos incluidos en estas $\sin(A-B)=\sin(A)\cos(B)-\cos(A)\sin(B)$ matrices serían:

$$\cos((\theta_2)-(\pi/2))=\cos(\theta_2)\cos(\pi/2)+\sin(\theta_2)\sin(\pi/2)=\cos(\theta_2)*0+\sin(\theta_2)*1=\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\theta_2)-(\pi/2))=\sin(\theta_2)\cos(\pi/2)-\cos(\theta_2)\sin(\pi/2)=\sin(\theta_2)*0-\cos(\theta_2)*1=-\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^{1}A_2$ y $[{}^{1}A_2]^{-1}$ anteriores se convierten en:

$$ {}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ -C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{1}A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$ T = {}^{1}A_3 = {}^{1}A_2\, {}^{2}A_3 $$

$$ \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} $$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$ T = {}^{1}A_3 = \begin{pmatrix} S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ -C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ \begin{pmatrix} S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & r_3 S(\theta_2+\theta_3) + r_2 S\theta_2 \\ -C(\theta_2+\theta_3) & S(\theta_2+\theta_3) & 0 & -r_3 C(\theta_2+\theta_3) - r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_2 = L_2$ y $r_3 = L_3$), y los ángulos deseados:

$$ P(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = $$

$$ \begin{pmatrix} S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 \\ -C(\theta_2+\theta_3) & S(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_3 C(\theta_2+\theta_3) - L_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} $$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ((0$_{u0'}$,0$_{v0'}$,0$_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P'(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P'(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ -C(\theta_2+\theta_3) & S(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ -L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto P' sería:

$$P'(x,y,z)=(P'_x\ ,\ P'_y\ ,\ P'_z)=(L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2\ ,\ -L_3C(\theta_2+\theta_3)-L_2C\theta_2\ ,\ 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).

Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^1A_2)^{-1}T={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 y θ_3 .

Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^1A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2 \\ -C(\theta_2+\theta_3) & S(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_3 C(\theta_2+\theta_3)-L_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_x \\ -C(\theta_2+\theta_3) & S(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ -C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$[{}^1A_2]^{-1}T=\begin{pmatrix} S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2 \\ C(\theta_2+\theta_3) & S(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_3 C(\theta_2+\theta_3)-L_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & P'_x \\ C(\theta_2+\theta_3) & S(\theta_2+\theta_3) & 0 & P'_y \\ 0 & 0 & 1 & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerarán las expresiones resultantes de tomar la equivalencia entre $P'^2_x+P'^2_y$ y sus correspondientes elementos de la matriz T :

$$P'^2_x+P'^2_y=(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2)^2+(-L_3 C(\theta_2+\theta_3)-L_2 C\theta_2)^2 =$$
$$P'^2_x+P'^2_y=(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2)^2+(-(L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2))^2 =$$
$$P'^2_x+P'^2_y=(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2)^2+(L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2)^2 =$$
$$(L_3 S(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3 S(\theta_2+\theta_3))(L_2 S\theta_2)+(L_2 S\theta_2)^2+(L_3 C(\theta_2+\theta_3))^2 \ldots$$
$$\ldots+2(L_3 C(\theta_2+\theta_3))(L_2 C\theta_2)+(L_2 C\theta_2)^2 =$$
$$L_3^2((S(\theta_2+\theta_3))^2+(C(\theta_2+\theta_3))^2)+2(L_3 S(\theta_2+\theta_3))(L_2 S\theta_2)+L_2((S\theta_2)^2+(C\theta_2)^2)+\ldots$$
$$\ldots+2(L_3 C(\theta_2+\theta_3))(L_2 C\theta_2) =$$
$$L_3^2+L_2^2+2(L_3 S(\theta_2+\theta_3))(L_2 S\theta_2)+2(L_3 C(\theta_2+\theta_3))(L_2 C\theta_2) =$$
$$L_3^2+L_2^2+2L_3 L_2(S(\theta_2+\theta_3)S\theta_2+C(\theta_2+\theta_3)C\theta_2) =$$

$$L_3^2+L_2^2+2L_3L_2C(\theta_2+\theta_3-\theta_2) \quad =$$
$$L_3^2+L_2^2+2L_3L_2C\theta_3=P'^2_x+P'^2_y$$

$$\theta_3=\arccos((P'^2_x+P'^2_y-L_3^2-L_2^2)/2L_3L_2) \quad *$$

Si ahora se toma la primera fila de la inversa $[{}^1A_2]^{-1}$ y se opera con la cuarta columna de T , y la segunda fila de $[{}^1A_2]^{-1}$, también con la cuarta columna de T , se obtiene:

$$S\theta_2P'_x-C\theta_2P'_y-L_2=L_3C\theta_3 \Leftrightarrow P'_yC\theta_2-P'_xS\theta_2=-(L_2+L_3C\theta_3)$$
$$C\theta_2P'_x+S\theta_2P'_y=L_3S\theta_3 \Leftrightarrow P'_yS\theta_2+P'_xC\theta_2=L_3S\theta_3$$

Y con la razón $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ y $a\sin\theta+b\cos\theta=d \Leftrightarrow \theta=atan2(d,c)-atan2(b,a)$:

$$\theta_2=atan2(L_3S\theta_3,-(L_2+L_3C\theta_3))-atan2(P'_x,P'_y)$$

Luego, ya se han obtenido las tres igualdades correspondientes a los tres ángulos de las 3 articulaciones:

$$\theta_1=arctg(P'_y/P'_x)=atan(P'_y,P'_x)=atan2(P'_y,P'_x)$$
$$\theta_3=\arccos((P'^2_x+P'^2_y-L_3^2-L_2^2)/2L_3L_2)$$
$$\theta_2=atan2(L_3S\theta_3,-(L_2+L_3C\theta_3))-atan2(P'_x,P'_y)$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta la diferencia de altura sobre la que se han obtenido las ecuaciones correspondientes a θ_2 y θ_3 , por lo que, a la hora de implementar el código deberá resolverse esa diferencia.
Por otra parte, también hay que considerar que el punto P' del problema simplificado es diferente al punto P en el problema completo. De hecho las componentes x', y' consideradas para el análisis son, en realidad:

$$x'=\sqrt{(x^2+y^2)}$$
$$y'=z-L1$$

1.2.2.5 Intento 4 - Aplicación de la resolución del Modelo SCARA (Análisis geométrico)

Dado que la primera articulación posiciona el brazo en el plano donde se sitúa el brazo, parece lógico pensar que las dos articulaciones restantes puedan ser resueltos de forma simple aplicando reglas trigonométricas.

En el modelo SCARA se puede hacer un cálculo simple para determinar los ángulos de los motores en este tipo de problemas con motores con ejes de rotación paralelos. Por tanto, se va a reutilizar ese mismo cálculo para determinar los ángulos restantes.

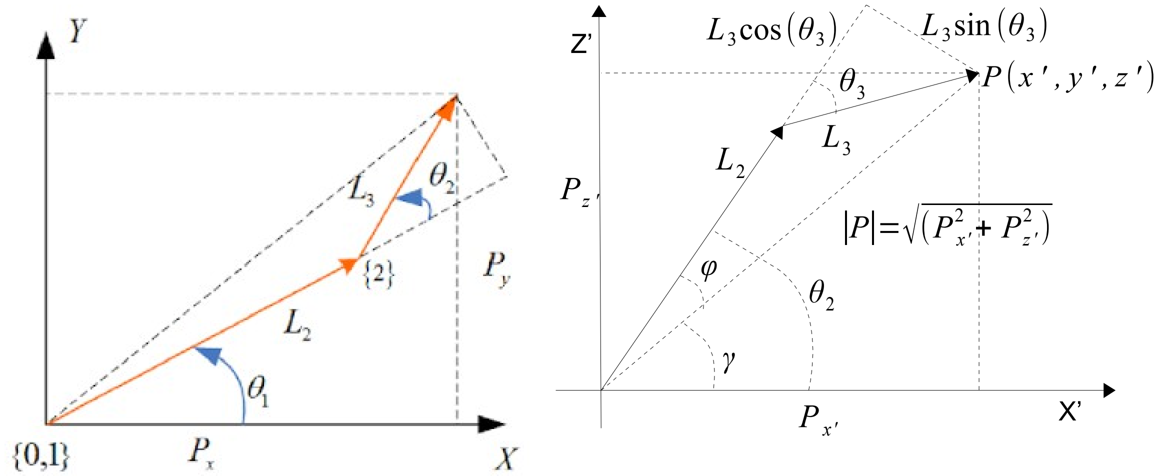


Ilustración 4: Izquierda: Modelo de brazo robot de tres grados de libertad – SCARA (1) (Pág. 80-81 [WWWbooks.googleDoc0]*) - Derecha: Esquema asociado a la solución a aplicar a los Ejemplos con motores paralelos entre sí*

$$\sqrt{P_{x'}^2+P_{z'}^2}=\sqrt{(L_2+L_3\cos(\theta_3))^2+(L_3\sin(\theta_3))^2}$$
$$P_{x'}^2+P_{z'}^2=(L_2+L_3\cos(\theta_3))^2+(L_3\sin(\theta_3))^2$$
$$P_{x'}^2+P_{z'}^2=L_2^2+L_3^2(\cos(\theta_3))^2+2L_2L_3\cos(\theta_3)+L_3^2(\sin(\theta_3))^2$$
$$P_{x'}^2+P_{z'}^2=L_2^2+L_3^2((\cos(\theta_3))^2+(\sin(\theta_3))^2)+2L_2L_3\cos(\theta_3)=L_2^2+L_3^2+2L_2L_3\cos(\theta_3)$$
$$\cos(\theta_3)=(P_{x'}^2+P_{z'}^2-L_2^2-L_3^2)/2L_2L_3$$

De donde se despeja:

$$\theta_3=\arccos((P_{x'}^2+P_{z'}^2-L_2^2-L_3^2)/2L_2L_3) \quad *$$

Y para el último ángulo ($\theta_1>0$, $\theta_2<0$, $\gamma>0$, $\varphi<0$):

$$\varphi=\arctan(L_3 sen(\theta_3)/(L_2+L_3\cos(\theta_3)))=atan2(L_3 sen(\theta_3),(L_2+L_3\cos(\theta_3)))$$
$$\gamma=\theta_2+\varphi=\arctan(P_{z'}/P_{x'})=atan2(P_{z'},P_{x'})$$
$$\theta_2=\gamma-\varphi=\arctan(P_{z'}/P_{x'})-\arctan(L_3\sin(\theta_3)/(L_2+L_3\cos(\theta_3)))= \quad *$$
$$atan2(P_{z'},P_{x'})-atan2(L_3\sin(\theta_3)/(L_2+L_3\cos(\theta_3)))$$

Y, como puede verse, en el Ejemplo 3-1: $d_1=L_1$, $r_2=L_2$, $r_3=L_3$ y $P_z=L_1+P_{z'}$

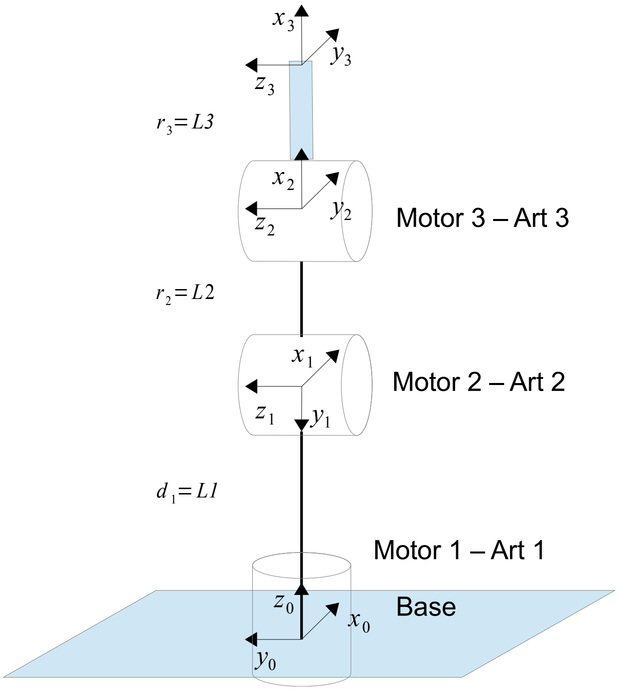
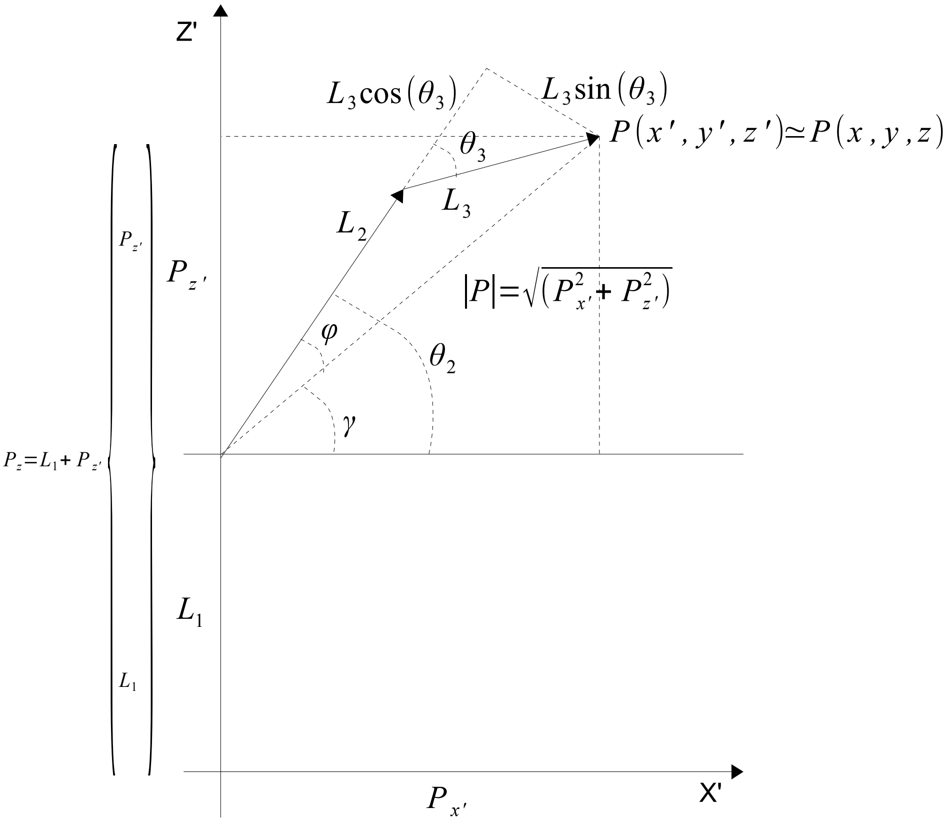


Ilustración 5: Brazo con tres motores, con el primer motor perpendicular al suelo



A partir de etas igualdades, hay que tener en cuenta la modificación de la altura una vez alcanzada el plano sobre el que se sitúa el brazo ($P_z=L_1+P_{z'}$) y que la base X' está en realidad en el plano XY y por tanto, tras el movimiento del primer motor $P_{xy}=P_{x'}=\sqrt{(P_x)^2+(P_y)^2}$.

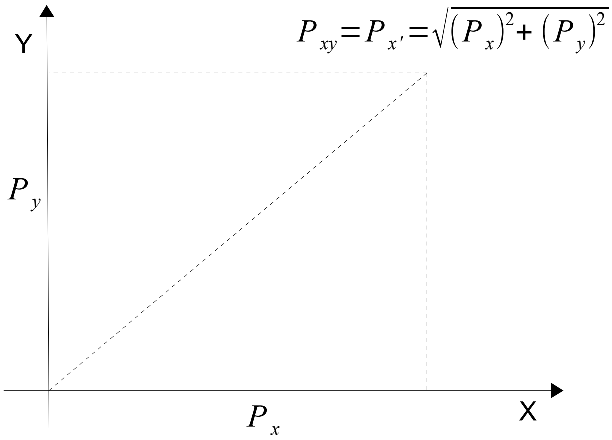


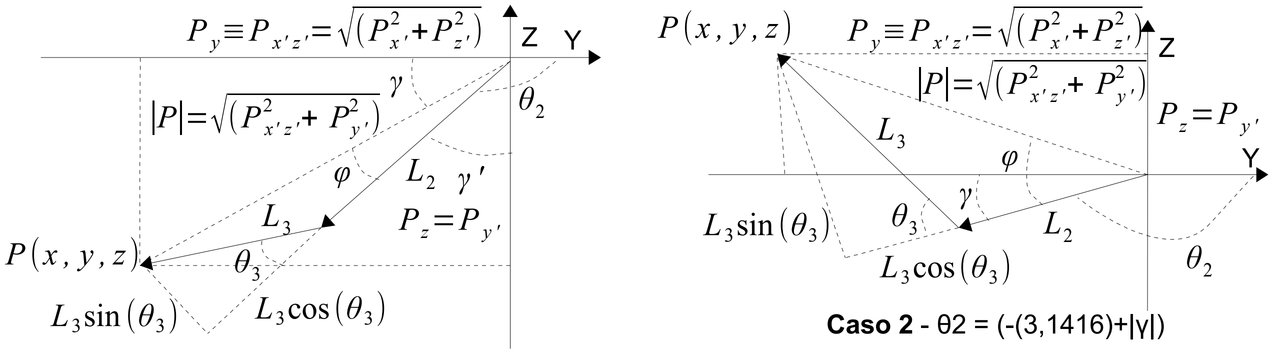
Ilustración 6: Modificación de ejes en el plano de la base del brazo

Así las ecuaciones generadas serán modificadas como:

$$\theta_1 = arctg\,(P_y / P_x) = atan(P_y, P_x) = atan2(P_y, P_x)$$
$$\theta_3 = \arccos((P_{xy}^2 + P_{z'}^2 - L_2^2 - L_3^2)/2\,L_2\,L_3) =$$
$$\arccos(((\sqrt{P_x^2 + P_y^2})^2 + (P_z - L_1)^2 - L_2^2 - L_3^2)/2\,L_2\,L_3) =$$
$$\arccos((P_x^2 + P_y^2 + (P_z - L_1)^2 - L_2^2 - L_3^2)/2\,L_2\,L_3)$$
$$\theta_2 = \gamma - \varphi = \arctan(P_{z'} / P_{xy}) - \arctan(L_3 \sin(\theta_3)/(L_2 + L_3 \cos(\theta_3))) =$$
$$atan2(P_{z'}, P_{xy}) - atan2(L_3 \sin(\theta_3), L_2 + L_3 \cos(\theta_3)) =$$
$$\arctan((P_z - L_1)/(\sqrt{((P_x)^2 + (P_y)^2)})) - \arctan(L_3 \sin(\theta_3)/(L_2 + L_3 \cos(\theta_3))) =$$
$$atan2((P_z - L_1), \sqrt{(P_x)^2 + (P_y)^2}) - atan2(L_3 \sin(\theta_3), L_2 + L_3 \cos(\theta_3))$$

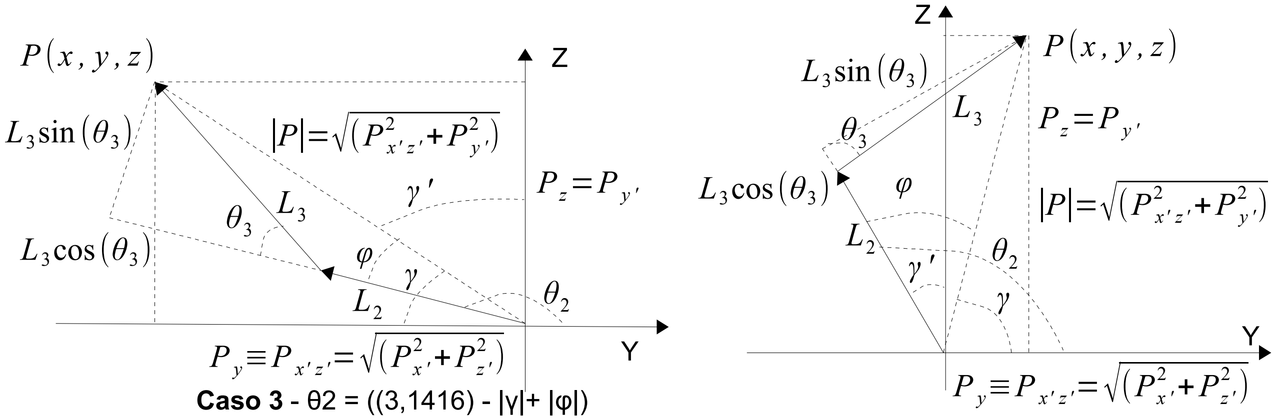
Dependiendo de la posición del brazo los ángulos que lo forman pueden ser calculados a través de la modificación del signo de cada componente en su cálculo (γ, φ). Por tanto, habría que tener en consideración cada caso para poder determinar cuál es el cálculo a realizar. Así se determinará el signo de cada elemento en la siguiente imagen.

Y puede también comprobarse que la solución obtenida resulta ser idéntica a la obtenida en el sistema de resolución anterior, teniendo en cuenta la corrección dependiente del cuadrante y de las restricciones de la arquitectura del brazo y de los motores montados.



Caso 1 - θ2 = - (3,1416) + |γ| + |φ|

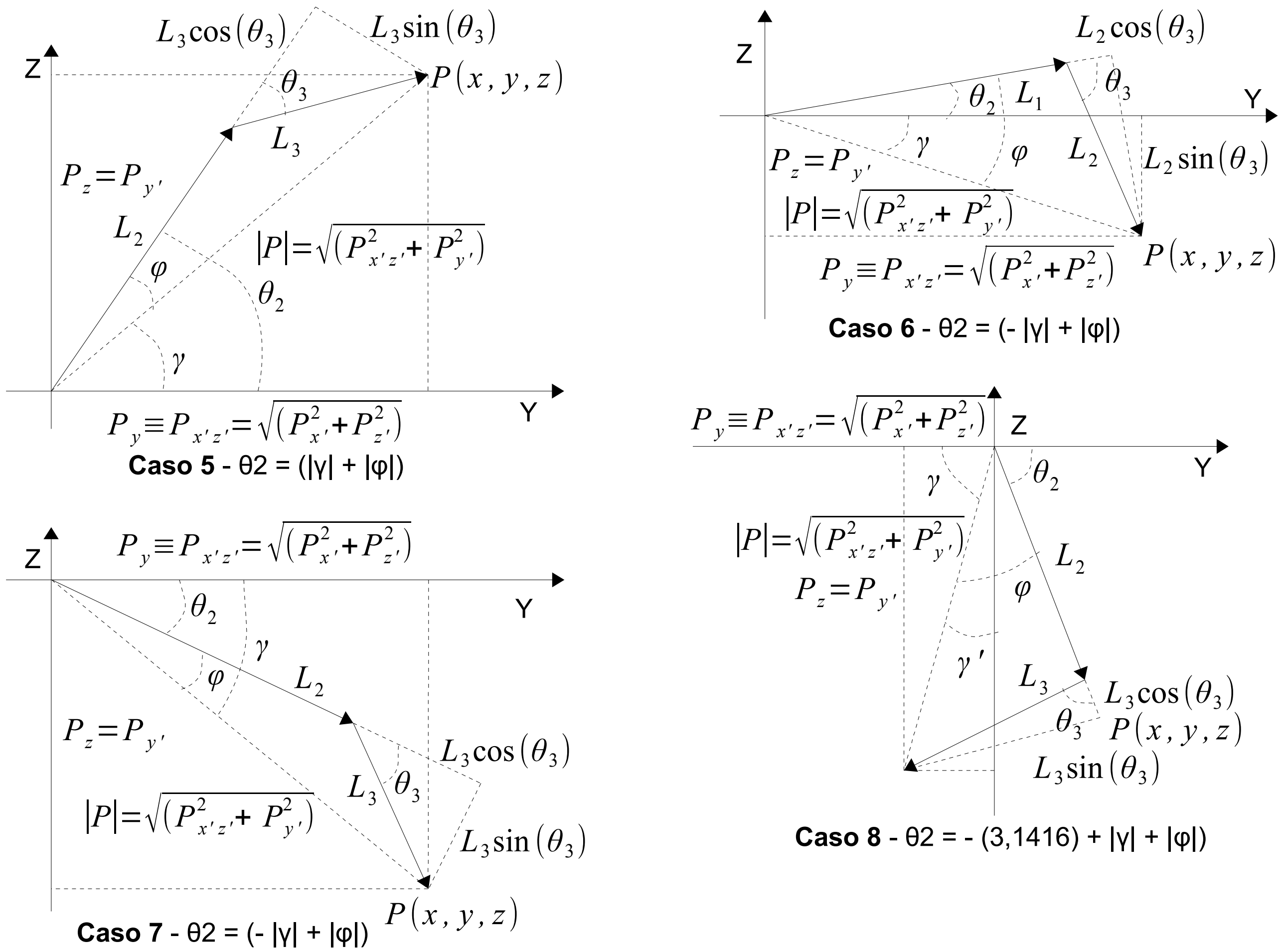
Caso 2 - θ2 = (-(3,1416)+|γ|)



Caso 3 - θ2 = ((3,1416) - |γ|+ |φ|)

Caso 4 - θ2 = (|γ| + |φ|)

Ilustración 7: Casos que determinan el signo de los ángulos θ, γ y φ en el modelo SCARA (1 de 2)



Caso 5 - θ2 = (|γ| + |φ|)

Caso 6 - θ2 = (- |γ| + |φ|)

Caso 7 - θ2 = (- |γ| + |φ|)

Caso 8 - θ2 = - (3,1416) + |γ| + |φ|)

Ilustración 8: Casos que determinan el signo de los ángulos θ, γ y φ en el modelo SCARA (2 de 2)

1.2.2.6 Intento 1 - Segunda matriz inversa y uso del punto (sin solución)

Se puede intentar extraer la segunda variable articular, θ_2 usando la igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3$$

Sustituyendo las matrices (con la matriz T sin simplificar y simplificada), quedará:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & -r_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & L_1\\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\dots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1C\theta_2C\theta_3-C\theta_1S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_1C\theta_2S\theta_3-C\theta_1C\theta_3S\theta_2 & -S\theta_1 & L_2C\theta_1C\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3\\ C\theta_2C\theta_3S\theta_1-S\theta_1S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_2S\theta_1S\theta_3-C\theta_3S\theta_1S\theta_2 & C\theta_1 & L_2C\theta_2S\theta_1+L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3\\ -C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2 & S\theta_2S\theta_3-C\theta_2C\theta_3 & 0 & L_1-L_2S\theta_2-L_3C\theta_2S\theta_3-L_3C\theta_3S\theta_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & -r_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & L_1\\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\dots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2) \\ S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2) \\ C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -L_1 C\theta_2-L_2 \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & -S\theta_2 & L_1 S\theta_2 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3+C\theta_1 C\theta_3 C\theta_2 & -S\theta_1 & P_x \\ S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 C\theta_2 & C\theta_1 & P_y \\ -S\theta_2 S\theta_3+C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_3 & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -L_1 C\theta_2-L_2 \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & -S\theta_2 & L_1 S\theta_2 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & P_x \\ S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & P_y \\ C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{21}=(C\theta_1 S\theta_2)x+(S\theta_2 S\theta_1)y+(C\theta_2)z+(-L_1 C\theta_2-L_2)t$$
$$f_{22}=(C\theta_1 C\theta_2)x+(S\theta_1 C\theta_2)y+(-S\theta_2)z+(-L_1 S\theta_2)t$$
$$f_{23}=(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y$$

...

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos y matrices se llegará a las ecuaciones:

$$f_{21}(n)=(C\theta_1S\theta_2)x+(S\theta_2S\theta_1)y+(C\theta_2)z+(-L_1C\theta_2-L_2)t \quad =$$
$$(C\theta_1S\theta_2)(C\theta_1S\theta_2C\theta_3+C\theta_1C\theta_2S\theta_3)\ldots$$
$$\ldots+(S\theta_2S\theta_1)(S\theta_2C\theta_3S\theta_1+S\theta_1C\theta_2S\theta_3)+(C\theta_2)(-S\theta_2S\theta_3+C\theta_3C\theta_2) \quad =$$
$$C\theta_3$$
$$f_{22}(n)=(C\theta_1C\theta_2)x+(S\theta_1C\theta_2)y+(-S\theta_2)z+(L_1S\theta_2)t \quad =$$
$$(C\theta_1C\theta_2)(C\theta_1S\theta_2C\theta_3+C\theta_1C\theta_2S\theta_3)\ldots$$
$$\ldots+(S\theta_1C\theta_2)(S\theta_2C\theta_3S\theta_1+S\theta_1C\theta_2S\theta_3)+(-S\theta_2)(-S\theta_2S\theta_3+C\theta_3C\theta_2) \quad =$$
$$S\theta_3$$
$$f_{23}(n)=(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y \quad =$$
$$(-S\theta_1)(C\theta_1S\theta_2C\theta_3+C\theta_1C\theta_2S\theta_3)+(C\theta_1)(S\theta_2C\theta_3S\theta_1+S\theta_1C\theta_2S\theta_3)=0$$

$$f_{21}(o)=(C\theta_1S\theta_2)x+(S\theta_2S\theta_1)y+(C\theta_2)z+(-L_1C\theta_2-L_2)t \quad =$$
$$(C\theta_1S\theta_2)(-C\theta_1S\theta_2S\theta_3+C\theta_1C\theta_3C\theta_2)\ldots$$
$$\ldots+(S\theta_2S\theta_1)(-S\theta_2S\theta_1S\theta_3+C\theta_3S\theta_1C\theta_2)+(C\theta_2)(-C\theta_2S\theta_3-S\theta_2C\theta_3) \quad =$$
$$-S\theta_3$$
$$f_{22}(o)=(C\theta_1C\theta_2)x+(S\theta_1C\theta_2)y+(-S\theta_2)z+(L_1S\theta_2)t \quad =$$
$$(C\theta_1C\theta_2)(-C\theta_1S\theta_2S\theta_3+C\theta_1C\theta_3C\theta_2)\ldots$$
$$\ldots+(S\theta_1C\theta_2)(-S\theta_2S\theta_1S\theta_3+C\theta_3S\theta_1C\theta_2)+(-S\theta_2)(-C\theta_2S\theta_3-S\theta_2C\theta_3) \quad =$$
$$C\theta_3$$
$$f_{23}(o)=(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y=(-S\theta_1)(-C\theta_1S\theta_2S\theta_3+C\theta_1C\theta_3C\theta_2)\ldots$$
$$\ldots+(C\theta_1)(-S\theta_2S\theta_1S\theta_3+C\theta_3S\theta_1C\theta_2)=0$$

$$f_{21}(a)=(C\theta_1S\theta_2)x+(S\theta_2S\theta_1)y+(C\theta_2)z+(-L_1C\theta_2-L_2)t \quad =$$
$$(C\theta_1S\theta_2)(-S\theta_1)+(S\theta_2S\theta_1)y+(C\theta_2)(C\theta_1)=0$$
$$f_{22}(a)=(C\theta_1C\theta_2)x+(S\theta_1C\theta_2)y+(-S\theta_2)z+(L_1S\theta_2)t \quad =$$
$$(C\theta_1C\theta_2)(-C\theta_1S\theta_2S\theta_3+C\theta_1C\theta_3C\theta_2)\ldots$$
$$\ldots+(S\theta_1C\theta_2)(-S\theta_2S\theta_1S\theta_3+C\theta_3S\theta_1C\theta_2)+(-S\theta_2)(-C\theta_2S\theta_3-S\theta_2C\theta_3) \quad =$$
$$0$$
$$f_{23}(a)=(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y=(-S\theta_1)(-C\theta_1S\theta_2S\theta_3+C\theta_1C\theta_3C\theta_2)\ldots$$
$$\ldots+(C\theta_1)(-S\theta_2S\theta_1S\theta_3+C\theta_3S\theta_1C\theta_2)=1$$

$$f_{21}(p)=(C\theta_1S\theta_2)x+(S\theta_2S\theta_1)y+(C\theta_2)z+(-L_1C\theta_2-L_2)t \quad =$$
$$(C\theta_1S\theta_2)(L_2C\theta_1S\theta_2+L_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1C\theta_2S\theta_3)\ldots$$
$$\ldots+(S\theta_2S\theta_1)(L_2S\theta_2S\theta_1+L_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1+L_3S\theta_1C\theta_2S\theta_3)\ldots$$
$$\ldots+(C\theta_2)(L_1+L_2C\theta_2-L_3S\theta_2S\theta_3+L_3C\theta_3C\theta_2)+(-L_1C\theta_2-L_2)=L_3C\theta_3$$
$$f_{22}(p)=(C\theta_1C\theta_2)x+(S\theta_1C\theta_2)y+(-S\theta_2)z+(L_1S\theta_2)t \quad =$$
$$(C\theta_1C\theta_2)(L_2C\theta_1S\theta_2+L_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_1C\theta_2S\theta_3)\ldots$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots+(S\theta_1 C\theta_2)(L_2 S\theta_2 S\theta_1+L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\ldots+(-S\theta_2)(L_1+L_2 C\theta_2-L_3 S\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 C\theta_2)+(L_1 S\theta_2)=L_3 S\theta_3\\
f_{23}(p)=(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y=&(-S\theta_1)(L_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\ldots+(C\theta_1)(S\theta_1 C\theta_2)(L_2 S\theta_2 S\theta_1+L_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+L_3 S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)
\end{aligned}
$$

En este caso, se utiliza sólo la última columna, relativa a $P(P_x, P_y, P_z)$ y con las dos matrices inversas ($f_{21}(p), f_{22}(p), f_{23}(p)$):

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x\\
. & . & . & P_y\\
. & . & . & P_z\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$
({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=
\begin{pmatrix}
C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -L_1 C\theta_2-L_2\\
C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & -S\theta_2 & L_1 S\theta_2\\
-S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x\\
. & . & . & P_y\\
. & . & . & P_z\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
$$

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & C\theta_1 S\theta_2 P_x+S\theta_2 S\theta_1 P_y+C\theta_2 P_z+(-L_1 C\theta_2-L_2)\\
. & . & . & C\theta_1 C\theta_2 P_x+S\theta_1 C\theta_2 P_y-S\theta_2 P_z+L_1 S\theta_2\\
. & . & . & -S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
. & . & . & f_{21}(p)\\
. & . & . & f_{22}(p)\\
. & . & . & f_{23}(p)\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
$$

$$
{}^2A_3=
\begin{pmatrix}
C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3\\
S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{21}(p)=C\theta_1 S\theta_2 P_x+S\theta_2 S\theta_1 P_y+C\theta_2 P_z+(-L_1 C\theta_2-L_2)=L_3 C\theta_3\\
&f_{22}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x+S\theta_1 C\theta_2 P_y-S\theta_2 P_z+L_1 S\theta_2=L_3 S\theta_3\\
&f_{23}(p)=-S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y=0\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Desde las dos primeras ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&f_{21}(p)=C\theta_1 S\theta_2 P_x+S\theta_2 S\theta_1 P_y+C\theta_2 P_z+(-L_1 C\theta_2-L_2)=L_3 C\theta_3\\
&f_{22}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x+S\theta_1 C\theta_2 P_y-S\theta_2 P_z+L_1 S\theta_2=L_3 S\theta_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&S\theta_2(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)+C\theta_2(P_z+(-L_1 C\theta_2-L_2))=L_3 C\theta_3\\
&-C\theta_2(-C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y)-S\theta_2(P_z-L_1)=L_3 S\theta_3
\end{aligned}
$$

Se podría obtener θ_2 en función de θ_3 mediante la razón:

$a\cos\theta-b\sin\theta=c$ y $a\sin\theta+b\cos\theta=d \Leftrightarrow \theta=atan2(d,c)-atan2(b,a)$:

$$\theta_2 = atan2(L_3 C\theta_3, L_3 S\theta_3) - atan2((P_z - L_1),(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y))$$

Pero resultaría una serie de ecuaciones complejas a la hora de encontrar una solución para θ_2 .

Si por otra parte, se escoge la segunda ecuación, junto con la cuarta columna (punto):

$$f_{22}(p) = C\theta_1 C\theta_2 P_x + S\theta_1 C\theta_2 P_y - S\theta_2 P_z + L_1 S\theta_2 = L_3 S\theta_3$$
$$C\theta_2(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2(L_1 - P_z) = L_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((C\theta_2(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) - S\theta_2(P_z - L_1))/L_3)$$

Esta ecuación podría ser usada junto con una equivalencia anterior ya encontrada (Intento 2):

$$-P_z + L_1 = L_3 C(\arcsin((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y - L_2 S\theta_2)/L_3)) - L_2 C\theta_2 \quad ...$$

También se podría definir θ_2 en función de θ_3 mediante:

$$C\theta_2(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2(L_1 - P_z) = L_3 S\theta_3$$

Y con la siguiente ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b,a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

$$\theta_2 = atan2((L_1 - P_z),(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)) \pm atan2(\sqrt{(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2 + (L_1 - P_z)^2 - (L_3 S\theta_3)^2}, c)$$

O, también podría ser usada en la primera de las ecuaciones del conjunto de dos inversas, obteniendo un resultado similar, con θ_2 en función de θ_3 :

$$f_{21}(p) = C\theta_1 S\theta_2 P_x + S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z + (-L_1 C\theta_2 - L_2) = L_3 C\theta_3$$
$$C\theta_2(P_z - L_1) + S\theta_2(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) = L_3 C\theta_3 + L_2$$

Y con la siguiente ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b,a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

$$\theta_2 = atan2((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y),(P_z - L_1))...$$
$$... \pm atan2(\sqrt{(P_z - L_1)^2 + (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2 - (L_3 C\theta_3 + L_2)^2}, L_3 C\theta_3 + L_2)$$

Pero estos resultados serían de difícil resolución al dejar el ángulo θ_3 en función de θ_2 , como en el caso anterior, o tener un ángulo difícil de despejar.

1.2.2.7 Intento 2 - Segunda matriz inversa y resto de columnas (sin solución)

Usando esta primera ecuación con la primera columna:

$$f_{21}(n) = (C\theta_1 S\theta_2)x + (S\theta_2 S\theta_1)y + (C\theta_2)z + (-L_1 C\theta_2 - L_2)t \ =$$
$$(C\theta_1 S\theta_2)(C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) + (S\theta_2 S\theta_1)(S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) + ...$$
$$...(C\theta_2)(-S\theta_2 S\theta_3 + C\theta_3 C\theta_2) = C\theta_3 \ =$$

$$C\theta_1 S\theta_2 C\theta_1 (S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_3) + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_1 (S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_3) - C\theta_2 (S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 C\theta_2) \ =$$
$$C\theta_1 S\theta_2 C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) + C\theta_2 C(\theta_2+\theta_3) \ =$$
$$S\theta_2 S(\theta_2+\theta_3) + C\theta_2 C(\theta_2+\theta_3) \ =$$
$$C(\theta_2-(\theta_2+\theta_3)) = C\theta_3$$
$C(-\theta_3)=C\theta_3$ **(Sin variable a despejar)**

La segunda columna genera un caso similar a este caso.

Y usando la primera ecuación con la tercera columna:

$$f_{21}(a) = (C\theta_1 S\theta_2)x + (S\theta_2 S\theta_1)y + (C\theta_2)z + (-L_1 C\theta_2 - L_2)t \ =$$
$$(C\theta_1 S\theta_2)(-S\theta_1) + (S\theta_2 S\theta_1)C\theta_1 = 0 \ =$$
$S\theta_2(C\theta_1(-S\theta_1) + S\theta_1 C\theta_1) = 0$ **(0=0)**

Y usando la segunda ecuación con la tercera columna:

$$f_{22}(a) = (C\theta_1 C\theta_2)x + (S\theta_1 C\theta_2)y + (-S\theta_2)z + (L_1 S\theta_2)t \ =$$
$(C\theta_1 C\theta_2)(-S\theta_1) + (S\theta_1 C\theta_2)C\theta_1 = 0$ **(0=0)**

Y usando la tercera ecuación con la primera columna:

$$f_{23}(n) = (-S\theta_1)x + (C\theta_1)y + (-L_2)t \ =$$
$$(-S\theta_1)(C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) + (C\theta_1)(S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) = 0 \ =$$
$(-S\theta_1)C\theta_1(S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_3) + C\theta_1 S\theta_1(S\theta_2 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_3) = 0$ **(0=0)**

Luego, cualquier otro elemento que se iguale de izquierda y derecha da “0=0”, tanto con la primera inversa, como con la segunda. Y por tanto, el único sistema de resolución es a través del uso de la matriz resultante de las inversas, y de la última columna de la matriz total del lado izquierdo (punto $P(P_x, P_y, P_z)$ e igualando a los elementos correspondientes de la resultante de operar las matrices del lado derecho.

1.2.2.8 Intento 3 - Segunda matriz inversa y simplificación de ángulo L_1 (sin solución)

Una posible simplificación sería definir $L_1=0$, ya que no modifica el tipo de giro. Sin embargo, la longitud eliminada debe ser contemplada a la hora de determinar el movimiento de la base del brazo ya que se modifica su alcance en altura.
Aún así se puede generar el análisis del problema con esta modificación, y suponiendo que el Origen de Coordenadas de la base ($O-XYZ$) esté situada sobre el siguiente motor.
Así, las ecuaciones para la primera inversa aplicadas al punto, quedarían:

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = L_2 S\theta_2 + L_3 S\theta_2 C\theta_3 + L_3 C\theta_2 S\theta_3 = L_2 S\theta_2 + L_3 S(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{12}(p) = (-S\theta_1)P_x + C\theta_1 P_y = -L_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 S\theta_3 - L_3 C\theta_2 C\theta_3 = -L_2 C\theta_2 - L_3 C(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{13}(p) = (-S\theta_1)P_x + C\theta_1 P_y = 0$$

Y para la segunda inversa aplicadas al punto, quedarían:

$$f_{21}(p) = C\theta_1 S\theta_2 P_x + S\theta_2 S\theta_1 P_y + (C\theta_2)P_z - L_2 t = L_3 C\theta_3$$

$$f_{22}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x+S\theta_1 C\theta_2 P_y+(-S\theta_2)P_z=L_3 S\theta_3$$
$$f_{23}(p)=(-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y=0$$

Usando ahora la primera ecuación del conjunto de la primera inversa, con la primera columna:

$$f_{11}(p)=C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y=L_2 S\theta_2+L_3 S\theta_2 C\theta_3+L_3 C\theta_2 S\theta_3=L_2 S\theta_2+L_3 S(\theta_2+\theta_3)$$

No parece tener ninguna conclusión útil.
Y de igual forma, tampoco la segunda ecuación $f_{12}(p)$.

Usando ahora la primera ecuación del conjunto de la primera inversa, con la primera columna, junto con la simplificación $L_1=0$:

$$f_{11}(n)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=S\theta_2 C\theta_3+C\theta_2 S\theta_3=S(\theta_2+\theta_3)$$
$$C\theta_1(C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)+S\theta_1(S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) \ =$$
$$C\theta_1 C\theta_1(S\theta_2 C\theta_3+C\theta_2 S\theta_3)+S\theta_1 S\theta_1(S\theta_2 C\theta_3+C\theta_2 S\theta_3) \ =$$
$$(S\theta_1^2+S\theta_1^2)(S\theta_2 C\theta_3+C\theta_2 S\theta_3)=(S\theta_2 C\theta_3+C\theta_2 S\theta_3)=S(\theta_2+\theta_3)$$

Luego, el resultado obtenido es precisamente el mismo que el del otro lado de la igualdad, lo que hace que el resultado obtenido no resulte útil.
Y si se usara la segunda ecuación del conjunto de la primera inversa, con la primera columna $f_{12}(n)$, el resultado sería similar.

Usando ahora la primera ecuación del conjunto de la segunda inversa, con la primera columna:

$$f_{21}(n)=C\theta_1 S\theta_2 P_x+S\theta_2 S\theta_1 P_y+(C\theta_2)P_z=C\theta_3 \ =$$
$$(C\theta_1 S\theta_2)(C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)+(S\theta_2 S\theta_1)(S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1+S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)+\ldots$$
$$\ldots C\theta_2(-S\theta_2 S\theta_3+C\theta_3 C\theta_2) \ =$$
$$C\theta_1 S\theta_2 C\theta_1(S\theta_2 C\theta_3+C\theta_2 S\theta_3)+S\theta_2 S\theta_1 S\theta_1(S\theta_2 C\theta_3+C\theta_2 S\theta_3)-C\theta_2(S\theta_2 S\theta_3-C\theta_3 C\theta_2) \ =$$
$$C\theta_1 S\theta_2 C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3)+S\theta_2 S\theta_1 S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3)+C\theta_2 C(\theta_2+\theta_3) \ =$$
$$S\theta_2 S(\theta_2+\theta_3)+C\theta_2 C(\theta_2+\theta_3) \ =$$
$$C(\theta_2-(\theta_2+\theta_3))=C(-\theta_3)=-C(\theta_3)=C\theta_3 \quad \textbf{(0=0)}$$

La segunda ecuación genera un caso similar a este caso.
Y de igual forma, la segunda columna también genera un caso similar a este caso.

Y usando la primera ecuación del conjunto de la segunda inversa con la tercera columna:

$$f_{21}=(C\theta_1 S\theta_2)x+(S\theta_2 S\theta_1)y+(C\theta_2)z$$
$$f_{21}(a)=(C\theta_1 S\theta_2)(-S\theta_1)+(S\theta_2 S\theta_1)C\theta_1=0 \ =$$
$$S\theta_2(C\theta_1(-S\theta_1)+S\theta_1 C\theta_1)=0 \quad \textbf{(0=0)}$$

La segunda ecuación genera un caso similar a este caso.

Y usando la segunda ecuación con la tercera columna:

$$f_{22}(a)=(C\theta_1 C\theta_2)x+(S\theta_1 C\theta_2)y+(-S\theta_2)z$$
$$f_{22}(a)=(C\theta_1 C\theta_2)(-S\theta_1)+(S\theta_1 C\theta_2)C\theta_1=0 \quad \textbf{(0=0)}$$

Luego, anular ese término en cualquiera de los elementos en los que esa variable estuviera incluida, no mejora ninguno de los resultados obtenidos con anterioridad.

Por tanto, mediante estos casos de sustitución de variables no quedarán determinados los ángulos en ambas articulaciones, necesarios para llegar al punto $P(x,y,z)$. Y por tanto, no quedaría resuelta la parte de Cinemática Inversa.

1.3 Caso 4-0 - Cuadrúpodo - Tres motores, con el primer motor paralelo al suelo, y el resto perpendicular al primero y paralelos al suelo

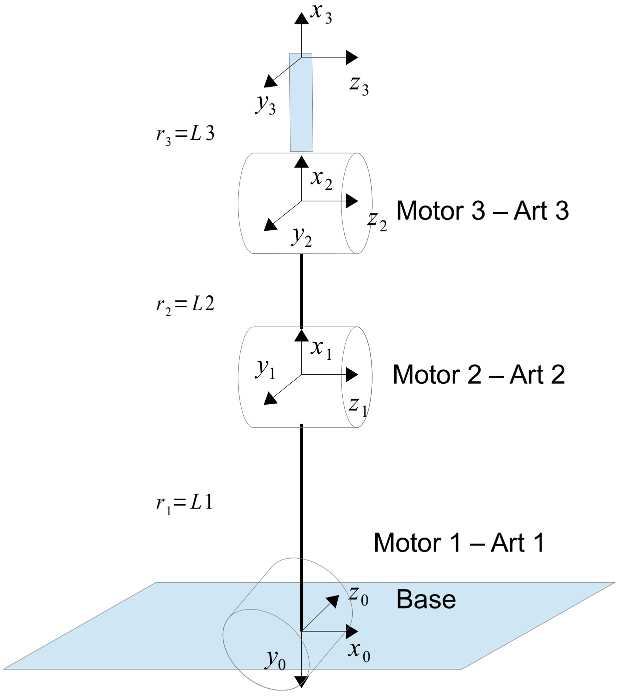


Ilustración 9: Brazo con tres motores, con el primer motor paralelo al suelo, y el resto perpendicular al primero

1.3.1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1-\pi/2 & 0 & r_1 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1-\pi/2 & 0 & L1 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & L3 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$ {}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C(\theta_1-\pi/2) & 0 & -S(\theta_1-\pi/2) & r_1 C(\theta_1-\pi/2) \\ S(\theta_1-\pi/2) & 0 & C(\theta_1-\pi/2) & r_1 S(\theta_1-\pi/2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ {}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\theta_1-\pi/2) & S(\theta_1-\pi/2) & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S(\theta_1-\pi/2) & C(\theta_1-\pi/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la resta de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas y $\cos(A-B)=\cos(A)\cos(B)+\sin(A)\sin(B)$, $\sin(A-B)=\sin(A)\cos(B)-\cos(A)\sin(B)$ los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((-\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)+\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)+1*\sin(\theta_2)=\sin(\theta_2)$$
$$\sin((-\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)-\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)-0*\sin(\theta_2)=-\cos(\theta_2)$$

Y las matrices $^0A_1$ y $[^0A_1]^{-1}$ afectadas anteriores se convierten en:

$$^0A_1=\begin{pmatrix} S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1S\theta_1 \\ -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & -r_1C\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^0A_3={}^0A_1{}^1A_2{}^2A_3$$
$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^0A_3={}^0A_1{}^1A_2{}^2A_3 \quad =$$
$$\begin{pmatrix} S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1S\theta_1 \\ -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & -r_1C\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} S\theta_1C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & r_2C\theta_2+S\theta_1(r_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ -C\theta_1C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 & r_2C\theta_2-C\theta_1(r_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -r_2S\theta_2-r_3S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_1=L_1$, $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & L_2C\theta_2+S\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ -C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 & L_2C\theta_2-C\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_2S\theta_2-L_3S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & L_2C\theta_2+S\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ -C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 & L_2C\theta_2-C\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_2S\theta_2-L_3S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_2C\theta_2+S\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ L_2C\theta_2-C\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ -L_2S\theta_2-L_3S(\theta_2+\theta_3) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z)=(L_2C\theta_2+S\theta_1L_3C(\theta_2+\theta_3),L_2C\theta_2-C\theta_1L_3C(\theta_2+\theta_3),-L_2S\theta_2-L_3S(\theta_2+\theta_3))$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

1.3.2 Cinemática Inversa

1.3.2.1 Resolución del primer ángulo θ_1

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^0A_1)^{-1}T={}^1A_3={}^1A_2\,{}^2A_3$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 y θ_3 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & r_2 C\theta_2+S\theta_1(r_3 C(\theta_2+\theta_3)) \\ -C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 & r_2 C\theta_2-C\theta_1(r_3 C(\theta_2+\theta_3)) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -r_2 S\theta_2-r_3 S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 & P_y \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_1=L_1$, $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$[{}^0A_1]^{-1}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - S\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & C\theta_1 & -L_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ -C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 + C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & S\theta_1 & L_2 C\theta_2 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 L_3 S\theta_2 S\theta_3 \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & -C\theta_2 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_3 & 0 & L_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 S\theta_3 - L_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & L_2 C\theta_2 + S\theta_1 (L_3 C(\theta_2+\theta_3)) \\ -C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 & L_2 C\theta_2 - C\theta_1 (L_3 C(\theta_2+\theta_3)) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_2 S\theta_2 - L_3 S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - S\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 + C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & S\theta_1 & P_y \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & -C\theta_2 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_3 & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 & P_y \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \ {}^1A_3 = {}^1A_2\,{}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & 0 & L_2 C\theta_2 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 S\theta_2 S\theta_3 \\ C\theta_2 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_2 & C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3 & 0 & L_2 S\theta_2 + L_3 S\theta_2 C\theta_3 + L_3 S\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2 C\theta_2 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2 S\theta_2 + L_3 S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_1 t$$
$$f_{12} = -z$$

$$f_{13}=C\theta_1 x+S\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}A=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p)\\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p)\\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$${}^1A_3={}^1A_2\,{}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_2C\theta_3-S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2 & 0 & L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3\\ C\theta_2S\theta_3+C\theta_3S\theta_2 & C\theta_2C\theta_3-S\theta_2S\theta_3 & 0 & L_3C\theta_2S\theta_3+L_3C\theta_3S\theta_2\\ 0 & 0 & 1 & L_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3C(\theta_2+\theta_3)\\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3S(\theta_2+\theta_3)\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones (Formato: fórmula = izquierda sin simplificar = izquierda simplificado = derecha sin simplificar = derecha simplificado):

$$f_{11}(n)=S\theta_1x-C\theta_1y-L_1t =$$
$$S\theta_1(S\theta_1C\theta_2C\theta_3-S\theta_1S\theta_2S\theta_3)-C\theta_1(-C\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1S\theta_2S\theta_3) =$$
$$S\theta_1(S\theta_1C(\theta_2+\theta_3))-C\theta_1(-C\theta_1C(\theta_2+\theta_3)) =$$
$$C\theta_2C\theta_3-S\theta_2S\theta_3=C(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{12}(n)=-z=-(-C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2)=-(-S(\theta_2+\theta_3))=C\theta_2S\theta_3+C\theta_3S\theta_2=S(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{13}(n)=C\theta_1x+S\theta_1y =$$
$$C\theta_1(S\theta_1C\theta_2C\theta_3-S\theta_1S\theta_2S\theta_3)+S\theta_1(-C\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1S\theta_2S\theta_3) =$$
$$C\theta_1(S\theta_1C(\theta_2+\theta_3))+S\theta_1(-C\theta_1C(\theta_2+\theta_3))=0$$

$$f_{11}(o)=S\theta_1x-C\theta_1y-L_1t =$$
$$S\theta_1(-S\theta_1C\theta_2S\theta_3-S\theta_1C\theta_3S\theta_2)-C\theta_1(C\theta_1C\theta_2S\theta_3+C\theta_1S\theta_2C\theta_3) =$$
$$S\theta_1(-S\theta_1S(\theta_2+\theta_3))-C\theta_1(C\theta_1S(\theta_2+\theta_3)) =$$
$$-C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2=-S(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{12}(o)=-z=-(-C\theta_2C\theta_3+S\theta_2S\theta_3)=-(-C(\theta_2+\theta_3))=C(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{13}(o)=C\theta_1x+S\theta_1y =$$
$$C\theta_1(-S\theta_1C\theta_2S\theta_3-S\theta_1C\theta_3S\theta_2)+S\theta_1(C\theta_1C\theta_2S\theta_3+C\theta_1S\theta_2C\theta_3) =$$
$$C\theta_1(-S\theta_1S(\theta_2+\theta_3))+S\theta_1(C\theta_1S(\theta_2+\theta_3))=0$$

$$f_{11}(a)=S\theta_1x-C\theta_1y-L_1t=S\theta_1C\theta_1-C\theta_1S\theta_1=0$$
$$f_{12}(a)=-z=0$$
$$f_{13}(a)=C\theta_1x+S\theta_1y=C\theta_1C\theta_1+S\theta_1S\theta_1=1$$

$$f_{11}(p)=S\theta_1x-C\theta_1y-L_1t=S\theta_1(-L_2C\theta_2+L_3S\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3)\ldots$$
$$\ldots-C\theta_1(L_2C\theta_2-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1L_3S\theta_2S\theta_3)-L_1 =$$
$$S\theta_1(L_2C\theta_2+S\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)))-C\theta_1(L_2C\theta_2-C\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)))-L_1 =$$

$$\begin{gathered}
L_2C\theta_2+L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3=L_2C\theta_2+L_3C(\theta_2+\theta_3)\\
f_{12}(p)=-z=-(L_2S\theta_2-L_3C\theta_2S\theta_3-L_3C\theta_3S\theta_2)=-(-L_2S\theta_2-L_3S(\theta_2+\theta_3)) \ =\\
L_2S\theta_2+L_3S\theta_2C\theta_3+L_3S\theta_3C\theta_2=L_2S\theta_2+L_3S(\theta_2+\theta_3)\\
f_{13}(p)=C\theta_1x+S\theta_1y=C\theta_1(-L_2C\theta_2+L_3S\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3)...\\
...+S\theta_1(L_2C\theta_2-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1L_3S\theta_2S\theta_3) \ =\\
C\theta_1(L_2C\theta_2+S\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)))...\\
...+S\theta_1(L_2C\theta_2-C\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)))=0
\end{gathered}$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x\\ . & . & . & P_y\\ . & . & . & P_z\\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Y de ello, se extraen las siguientes ecuaciones (sólo serían útiles los elementos de la última columna)...

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x\\ . & . & . & P_y\\ . & . & . & P_z\\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \ =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & S\theta_1P_x-C\theta_1P_y-L_1\\ . & . & . & -P_z\\ . & . & . & C\theta_1P_x+S\theta_1P_y\\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p)\\ . & . & . & f_{12}(p)\\ . & . & . & f_{13}(p)\\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^1A_3 \ =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & L_2C\theta_2+L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3\\ . & . & . & L_2S\theta_2+L_3S\theta_2C\theta_3+L_3S\theta_3C\theta_2\\ . & . & . & 0\\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & L_2C\theta_2+L_3C(\theta_2+\theta_3)\\ . & . & . & L_2S\theta_2+L_3S(\theta_2+\theta_3)\\ . & . & . & 0\\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered}
S\theta_1P_x-C\theta_1P_y=L_2C\theta_2+L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3=L_2C\theta_2+L_3C(\theta_2+\theta_3)\\
-P_Z=L_2S\theta_2+L_3C\theta_2S\theta_3+L_3C\theta_3S\theta_2=L_2S\theta_2+L_3S(\theta_2+\theta_3)\\
C\theta_1P_x+S\theta_1P_y=0\\
...
\end{gathered}$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x y P_y . Para ello, con la tercera ecuación:

$$\begin{gathered}
C\theta_1P_x+S\theta_1P_y=0\\
(C\theta_1P_x)/C\theta_1+(S\theta_1P_y)/C\theta_1=0\\
P_x+tg(\theta_1)P_y=0\\
tg(\theta_1)=-P_x/P_y\\
\theta_1=arctg(-P_x/P_y)=atan(-P_x,P_y)=atan2(-P_x,P_y) \quad *
\end{gathered}$$

Luego, ya se tiene la variable θ_1 .

1.3.2.2 Intento 1 para obtener el resto de ángulos θ_2 θ_3 - Elementos de T

Si ahora se tomaran las primeras ecuaciones:

$$S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 C\theta_2 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 S\theta_2 S\theta_3 = L_2 C\theta_2 + L_3 C(\theta_2+\theta_3)$$
$$-P_Z = L_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 S\theta_3 + L_3 C\theta_3 S\theta_2 = L_2 S\theta_2 + L_3 S(\theta_2+\theta_3)$$

Las dos igualdades por separado tienen un formato similar y sin una solución evidente.
Sin embargo, se pueden sumar sus cuadrados.

$$S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 C\theta_2 + L_3 C(\theta_2+\theta_3)$$
$$(S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y)^2 = (L_2 C\theta_2 + L_3 C(\theta_2+\theta_3))^2 = (L_2 C\theta_2)^2 + 2(L_2 C\theta_2)(L_3 C(\theta_2+\theta_3)) + (L_3 C(\theta_2+\theta_3))^2$$

$$(L_2 C\theta_2)^2 + 2(L_2 C\theta_2)(L_3 C(\theta_2+\theta_3)) + (L_3 C(\theta_2+\theta_3))^2$$

$$-P_Z = L_2 S\theta_2 + L_3 S(\theta_2+\theta_3)$$
$$(-P_Z)^2 = (L_2 S\theta_2 + L_3 S(\theta_2+\theta_3))^2 = (L_2 S\theta_2)^2 + 2(L_2 S\theta_2)(L_3 S(\theta_2+\theta_3)) + (L_3 S(\theta_2+\theta_3))^2$$

$$(S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y)^2 + (-P_Z)^2 \ =$$
$$(L_2 C\theta_2)^2 + 2(L_2 C\theta_2)(L_3 C(\theta_2+\theta_3)) + (L_3 C(\theta_2+\theta_3))^2 ...$$
$$... + (L_2 S\theta_2)^2 + 2(L_2 S\theta_2)(L_3 S(\theta_2+\theta_3)) + (L_3 S(\theta_2+\theta_3))^2 \ =$$
$$(L_2 C\theta_2)^2 + (L_2 S\theta_2)^2 ...$$
$$... + 2(L_2 C\theta_2)(L_3 C(\theta_2+\theta_3)) + (L_3 C(\theta_2+\theta_3))^2 + 2(L_2 S\theta_2)(L_3 S(\theta_2+\theta_3)) + (L_3 S(\theta_2+\theta_3))^2 \ =$$
$$(L_2)^2((C\theta_2)^2 + (S\theta_2)^2) ...$$
$$... + 2 L_2 C\theta_2 L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_3^2 C(\theta_2+\theta_3)^2 + 2 L_2 S\theta_2 L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_3^2 S(\theta_2+\theta_3)^2 \ =$$
$$(L_2)^2 + 2 L_2 L_3 (C\theta_2 C(\theta_2+\theta_3) + S\theta_2 S(\theta_2+\theta_3)) + L_3^2 (C(\theta_2+\theta_3)^2 + S(\theta_2+\theta_3)^2) \ =$$
$$(L_2)^2 + 2 L_2 L_3 C(\theta_2+\theta_3-\theta_2) + L_3^2 \ =$$
$$(S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y)^2 + (-P_Z)^2 = (L_2)^2 + L_3^2 + 2 L_2 L_3 C\theta_3$$

$$\theta_3 = \arccos(((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y)^2 + (-P_Z)^2)/((L_2)^2 + L_3^2 + 2 L_2 L_3)) \quad *$$

Y habiendo obtenido con ambos ángulos, θ_1 y θ_3 se podría intentar calcular θ_2 desde alguna de las igualdades anteriores, por ejemplo desde la primera igualdad.

$$S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 C\theta_2 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 S\theta_2 S\theta_3$$
$$(L_2 + L_3 C\theta_3) C\theta_2 - (L_3 S\theta_3) S\theta_2 = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y$$

Y usando ahora una de las ecuaciones trascendentes:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \ \Leftrightarrow \ \theta = atan2(b,a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Se obtendrá el ángulo θ_2 .

$$\theta_2 = atan2((-L_3 S\theta_3), (L_2 + L_3 C\theta_3)) ...$$

$$...\pm atan2(\sqrt{(L_2+L_3C\theta_3)^2+(-L_3S\theta_3)^2-(S\theta_1P_x-C\theta_1P_y)^2}, S\theta_1P_x-C\theta_1P_y) \quad *$$

Luego, ya se han calculado las tres variables articulares θ_1 , θ_2 y θ_3 :

$$\theta_1 = arctg(-P_x/P_y) = atan(-P_x, P_y) = atan2(-P_x, P_y)$$
$$\theta_3 = \arccos(((S\theta_1P_x-C\theta_1P_y)^2+(-P_Z)^2)/((L_2)^2+L_3^2+2L_2L_3))$$
$$\theta_2 = atan2((-L_3S\theta_3),(L_2+L_3C\theta_3))...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(L_2+L_3C\theta_3)^2+(-L_3S\theta_3)^2-(S\theta_1P_x-C\theta_1P_y)^2}, S\theta_1P_x-C\theta_1P_y)$$

Por tanto, quedaría resuelta la parte de Cinemática Inversa.

1.3.2.3 *Intento 2 - Segunda inversa*

Se podría usar la igualdad correspondiente a la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = {}^2A_3$$

Y sustituyendo las matrices, quedará:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1C\theta_2C\theta_3-S\theta_1S\theta_2S\theta_3 & -S\theta_1C\theta_2S\theta_3-S\theta_1C\theta_3S\theta_2 & C\theta_1 & -L_2C\theta_2+L_3S\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3 \\ -C\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1S\theta_2S\theta_3 & C\theta_1C\theta_2S\theta_3+C\theta_1S\theta_2C\theta_3 & S\theta_1 & L_2C\theta_2-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1L_3S\theta_2S\theta_3 \\ -C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2 & -C\theta_2C\theta_3+S\theta_2S\theta_3 & 0 & L_2S\theta_2-L_3C\theta_2S\theta_3-L_3C\theta_3S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1C\theta_2 & -C\theta_1C\theta_2 & -S\theta_2 & -L_1C\theta_2-L_2 \\ -S\theta_1S\theta_2 & C\theta_1S\theta_2 & -C\theta_2 & L_1S\theta_2 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1C\theta_2C\theta_3-S\theta_1S\theta_2S\theta_3 & -S\theta_1C\theta_2S\theta_3-S\theta_1C\theta_3S\theta_2 & C\theta_1 & -L_2C\theta_2+L_3S\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3 \\ -C\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1S\theta_2S\theta_3 & C\theta_1C\theta_2S\theta_3+C\theta_1S\theta_2C\theta_3 & S\theta_1 & L_2C\theta_2-L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1L_3S\theta_2S\theta_3 \\ -C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2 & -C\theta_2C\theta_3+S\theta_2S\theta_3 & 0 & L_2S\theta_2-L_3C\theta_2S\theta_3-L_3C\theta_3S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1C\theta_2 & -C\theta_1C\theta_2 & -S\theta_2 & -L_1C\theta_2-L_2 \\ -S\theta_1S\theta_2 & C\theta_1S\theta_2 & -C\theta_2 & L_1S\theta_2 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & L_2C\theta_2+S\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ -C\theta_1C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 & L_2C\theta_2-C\theta_1(L_3C(\theta_2+\theta_3)) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_2S\theta_2-L_3S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 C\theta_2 & -C\theta_1 C\theta_2 & -S\theta_2 & -L_1 C\theta_2 - L_2 \\ -S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_2 & L_1 S\theta_2 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -S\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - S\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 + C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & S\theta_1 & P_y \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & -C\theta_2 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_3 & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 C\theta_2 & -C\theta_1 C\theta_2 & -S\theta_2 & -L_1 C\theta_2 - L_2 \\ -S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_2 & L_1 S\theta_2 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & S\theta_1 & P_y \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la las multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{21} = (S\theta_1 C\theta_2)x - (C\theta_2 C\theta_1)y - (S\theta_2)z - (L_1 C\theta_2 + L_2)t$$
$$f_{22} = -(S\theta_1 S\theta_2)x + (C\theta_1 S\theta_2)y - (C\theta_2)z + (L_1 S\theta_2)t$$
$$f_{23} = (C\theta_1)x + (S\theta_1)y$$
$$...$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos y matrices se llegará a las ecuaciones (Formato: Fórmula = izquierda sin simplificar = izquierda simplificado = derecha):

$$\begin{aligned}
&f_{21}(n)=\ldots=C\theta_3\\
&f_{22}(n)=\ldots=S\theta_3\\
&f_{23}(n)=\ldots=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{21}(o)=\ldots=-S\theta_3\\
&f_{22}(o)=\ldots=C\theta_3\\
&f_{23}(o)=\ldots=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{21}(a)=\ldots=0\\
&f_{22}(a)=0\\
&f_{23}(a)=\ldots=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{21}(p)=(S\theta_1 C\theta_2)x-(C\theta_2 C\theta_1)y-(S\theta_2)z-(L_1 C\theta_2+L_2)t \quad =\\
&\qquad (S\theta_1 C\theta_2)(-L_2 C\theta_2+L_3 S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\qquad \ldots-(C\theta_2 C\theta_1)(L_2 C\theta_2-L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 L_3 S\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\qquad \ldots-(S\theta_2)(L_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 S\theta_2)-(L_1 C\theta_2+L_2) \quad =\\
&\qquad (S\theta_1 C\theta_2)(L_2 C\theta_2+S\theta_1(L_3 C(\theta_2+\theta_3)))\ldots\\
&\qquad \ldots-(C\theta_2 C\theta_1)(L_2 C\theta_2-C\theta_1(L_3 C(\theta_2+\theta_3)))\ldots\\
&\qquad \ldots-(S\theta_2)(-L_2 S\theta_2-L_3 S(\theta_2+\theta_3))-(L_1 C\theta_2+L_2)=L_3 C\theta_3\\
&f_{22}(p)=-(S\theta_1 S\theta_2)x+(C\theta_1 S\theta_2)y-(C\theta_2)z+(L_1 S\theta_2)t=\ldots=L_3 S\theta_3 \quad =\\
&\qquad -(S\theta_1 S\theta_2)(-L_2 C\theta_2+L_3 S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\qquad \ldots+(C\theta_1 S\theta_2)(L_2 C\theta_2-L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 L_3 S\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\qquad \ldots-(C\theta_2)(L_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 S\theta_2)+(L_1 S\theta_2) \quad =\\
&\qquad -(S\theta_1 S\theta_2)(L_2 C\theta_2+S\theta_1(L_3 C(\theta_2+\theta_3)))\ldots\\
&\qquad \ldots+(C\theta_1 S\theta_2)(L_2 C\theta_2-C\theta_1(L_3 C(\theta_2+\theta_3)))\ldots\\
&\qquad \ldots-(C\theta_2)(-L_2 S\theta_2-L_3 S(\theta_2+\theta_3))+(L_1 S\theta_2)=L_3 S\theta_3\\
&f_{23}(p)=(C\theta_1)x+(S\theta_1)y \quad =\\
&\qquad (C\theta_1)(-L_2 C\theta_2+L_3 S\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\qquad \ldots+(S\theta_1)(L_2 C\theta_2-L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3+C\theta_1 L_3 S\theta_2 S\theta_3) \quad =\\
&\qquad (C\theta_1)(L_2 C\theta_2+S\theta_1(L_3 C(\theta_2+\theta_3)))\ldots\\
&\qquad \ldots+(S\theta_1)(L_2 C\theta_2-C\theta_1(L_3 C(\theta_2+\theta_3)))=0
\end{aligned}$$

Si se escogiera cualquiera de las ecuaciones anteriores tras haber sido desarrolladas, una a una, no parecen tener una solución evidente ya que todas ellas contienen dos o más variables.

Sin embargo se puede hacer uso de estas mismas ecuaciones si no se hubiera desarrollado cada una de las componentes, haciendo uso del punto final de destino, ya conocido. Es decir, a través del uso de la matriz resultante de las inversas, y de la última columna de la matriz total del lado izquierdo ($P(P_x, P_y, P_z)$), e igualando a los elementos correspondientes de la resultante de operar las matrices del lado derecho.

Y en este caso, se utiliza sólo la última columna, relativa $P(x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} S\theta_1 C\theta_2 & -C\theta_1 C\theta_2 & -S\theta_2 & -L_1 C\theta_2 - L_2 \\ -S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_2 & L_1 S\theta_2 \\ C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & (S\theta_1 C\theta_2)P_x-(C\theta_1 C\theta_2)P_y-(S\theta_2)P_z-L_1 C\theta_2-L_2 \\ . & . & . & -(S\theta_1 S\theta_2)P_x+(C\theta_1 S\theta_2)P_y-(C\theta_2)P_z+L_1 S\theta_2 \\ . & . & . & (C\theta_1)P_x+S\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{21}(p) \\ . & . & . & f_{22}(p) \\ . & . & . & f_{23}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De este desarrollo se extraen las fórmulas:

$$\begin{gathered} f_{21}=(S\theta_1 C\theta_2)x-(C\theta_2 C\theta_1)y-(S\theta_2)z-(L_1 C\theta_2+L_2)t \\ f_{22}=-(S\theta_1 S\theta_2)x+(C\theta_1 S\theta_2)y-(C\theta_2)z+(L_1 S\theta_2)t \\ f_{23}=(C\theta_1)x+(S\theta_1)y \\ ... \end{gathered}$$

Y aplicándolas al punto:

$$\begin{aligned} & f_{21}(p)=(S\theta_1 C\theta_2)P_x-(C\theta_2 C\theta_1)P_y-(S\theta_2)P_z-(L_1 C\theta_2+L_2)=...=L_3 C\theta_3 \\ & f_{22}(p)=-(S\theta_1 S\theta_2)P_x+(C\theta_1 S\theta_2)P_y-(C\theta_2)P_z+(L_1 S\theta_2)=...=L_3 S\theta_3 \\ & f_{23}(p)=(C\theta_1)P_x+(S\theta_1)P_y=...=0 \end{aligned}$$

Y tomando la última igualdad:

$$f_{23}(p)=(C\theta_1)P_x+(S\theta_1)P_y=...=0$$

$$\begin{aligned} & (C\theta_1 P_x)/C\theta_1+(S\theta_1 P_y)/C\theta_1=0 \\ & P_x+tg(\theta_1)P_y=0 \\ & tg(\theta_1)=-P_x/P_y \\ & \theta_1=arctg(-P_x/P_y)=atan(-P_x,P_y)=atan2(-P_x,P_y) \quad * \end{aligned}$$

Si ahora se tomaran las dos primeras igualdades.

$$f_{21}(p)=(S\theta_1 C\theta_2)P_x-(C\theta_2 C\theta_1)P_y-(S\theta_2)P_z-(L_1 C\theta_2+L_2)=...=L_3 C\theta_3$$

$$(S\theta_1 C\theta_2)P_x-(C\theta_2 C\theta_1)P_y-(S\theta_2)P_z-(L_1 C\theta_2+L_2)=L_3 C\theta_3$$
$$C\theta_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)-S\theta_2 P_z-L_2=L_3 C\theta_3$$

$$f_{22}(p)=-(S\theta_1 S\theta_2)P_x+(C\theta_1 S\theta_2)P_y-(C\theta_2)P_z+(L_1 S\theta_2)=...=L_3 S\theta_3$$
$$-(S\theta_1 S\theta_2)P_x+(C\theta_1 S\theta_2)P_y-(C\theta_2)P_z+(L_1 S\theta_2)=L_3 S\theta_3$$
$$S\theta_2(-S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y+L_1)-C\theta_2 P_z=L_3 S\theta_3$$

Si ahora se suman sus cuadrados.

$$(C\theta_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)-S\theta_2 P_z-L_2)^2+(S\theta_2(-S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y+L_1)-C\theta_2 P_z)^2 \quad =$$
$$(L_3 C\theta_3)^2+(L_3 S\theta_3)^2$$

$$(C\theta_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)-(S\theta_2 P_z+L_2))^2+(S\theta_2(-S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y+L_1)-C\theta_2 P_z)^2 \quad =$$
$$L_3^2((C\theta_3)^2+(S\theta_3)^2)$$

$$(C\theta_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1))^2-2(C\theta_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1))((S\theta_2 P_z+L_2))+((S\theta_2 P_z+L_2))^2...$$
$$...+(S\theta_2(-S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y+L_1))^2-2(S\theta_2(-S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y+L_1))(C\theta_2 P_z)+(C\theta_2 P_z)^2 \quad =$$
$$L_3^2((C\theta_3)^2+(S\theta_3)^2)$$

$$(C\theta_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1))^2-2(C\theta_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1))((S\theta_2 P_z+L_2))+((S\theta_2 P_z+L_2))^2...$$
$$...+(S\theta_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1))^2+2(S\theta_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1))(C\theta_2 P_z)+(C\theta_2 P_z)^2 \quad =$$
$$L_3^2$$

$$(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)^2((C\theta_2)^2+(S\theta_2)^2)+((S\theta_2 P_z+L_2))^2+(C\theta_2 P_z)^2...$$
$$...+2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)(S\theta_2 C\theta_2 P_z-C\theta_2(S\theta_2 P_z+L_2)) \quad =$$
$$L_3^2$$

$$(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)^2+((S\theta_2 P_z)^2+2((S\theta_2 P_z)(L_2))+(L_2)^2)+(C\theta_2 P_z)^2...$$
$$...+2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)(S\theta_2 C\theta_2 P_z-C\theta_2 S\theta_2 P_z-C\theta_2 L_2) \quad =$$
$$L_3^2$$

$$(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)^2+(P_z)^2((S\theta_2)^2+(C\theta_2)^2)+2((S\theta_2 P_z)(L_2))+(L_2)^2...$$
$$...+2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)(-C\theta_2 L_2) \quad =$$
$$L_3^2$$

$$(-2L_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1))C\theta_2+(2L_2 P_z)S\theta_2=(L_3^2-(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)^2-(P_z)^2-L_2^2)$$

Y usando ahora una de las ecuaciones trascendentes:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \;\Leftrightarrow\; \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Se obtendrá el ángulo θ_2 .

$$\theta_2=atan2((2L_2 P_z),(-2L_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)))...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(-2L_2(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1))^2+(2L_2 P_z)^2-(L_3^2-(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)^2-(P_z)^2-L_2^2)^2},(L_3^2-(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_1)^2-(P_z)^2-L_2^2))$$

Y una vez calculada la variable θ_2 se puede intentar calcular θ_3 desde alguna de las dos ecuaciones anteriores.

$$f_{22}(p) = -(S\theta_1 S\theta_2) P_x + (C\theta_1 S\theta_2) P_y - (C\theta_2) P_z + (L_1 S\theta_2) = \ldots = L_3 S\theta_3$$
$$-(S\theta_1 S\theta_2) P_x + (C\theta_1 S\theta_2) P_y - (C\theta_2) P_z + (L_1 S\theta_2) = L_3 S\theta_3$$
$$S\theta_2(-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y + L_1) - C\theta_2 P_z = L_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((S\theta_2(-S\theta_1 P_x + C\theta_1 P_y + L_1) - C\theta_2 P_z)/L_3) \quad *$$

Por tanto, también quedaría resuelta la parte de Cinemática Inversa.

1.4 Caso 4-1 – Cuadrúpodo - Tres motores, con el primero paralelo al suelo, y el resto perpendicular al primero y paralelos al suelo (Cambio de Ejes)

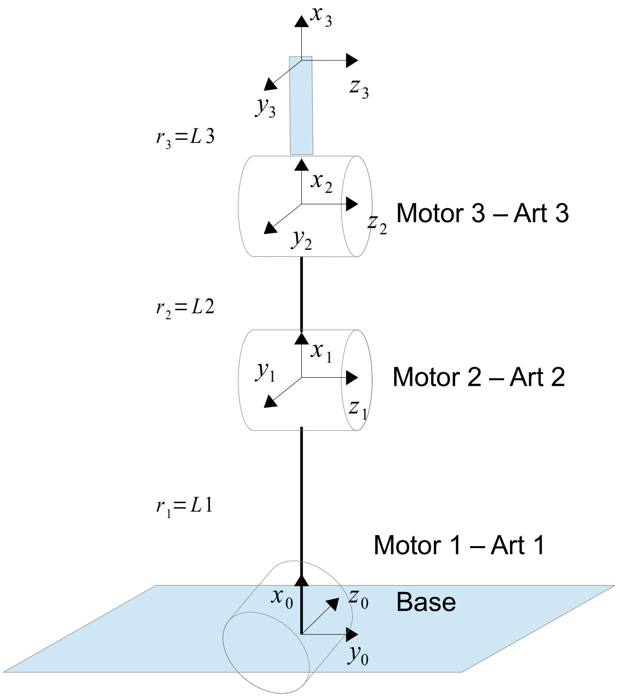


Ilustración 10: Brazo con tres motores, con el primero paralelo al suelo, y el resto perpendicular al primero

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & r_1 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & 18 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & 105 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & 290 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & L_1 & -\pi/2 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & L_3 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_i & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^{0}A_3={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^{0}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1C\theta_2C\theta_3-C\theta_1S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_1C\theta_2S\theta_3-C\theta_1C\theta_3S\theta_2 & -S\theta_1 & r_1C\theta_1+r_2C\theta_1C\theta_2+r_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3-r_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3 \\ C\theta_2C\theta_3S\theta_1-S\theta_1S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_2S\theta_1S\theta_3-C\theta_3S\theta_1S\theta_2 & C\theta_1 & r_1S\theta_1+r_2C\theta_2S\theta_1+r_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1-r_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3 \\ -C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2 & S\theta_2S\theta_3-C\theta_2C\theta_3 & 0 & -r_2S\theta_2-r_3C\theta_2S\theta_3-r_3C\theta_3S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1C(\theta_2+\theta_3) & -C\theta_1S(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(r_1+r_3C(\theta_2+\theta_3)+r_2C\theta_2) \\ S\theta_1C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(r_1+r_3C(\theta_2+\theta_3)+r_2C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -r_2S\theta_2-r_3S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_1=L_1$, $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1C\theta_2C\theta_3-C\theta_1S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_1C\theta_2S\theta_3-C\theta_1C\theta_3S\theta_2 & -S\theta_1 & L_1C\theta_1+L_2C\theta_1C\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3 \\ C\theta_2C\theta_3S\theta_1-S\theta_1S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_2S\theta_1S\theta_3-C\theta_3S\theta_1S\theta_2 & C\theta_1 & L_1S\theta_1+L_2C\theta_2S\theta_1+L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3 \\ -C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2 & S\theta_2S\theta_3-C\theta_2C\theta_3 & 0 & -L_2S\theta_2-L_3C\theta_2S\theta_3-L_3C\theta_3S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1C(\theta_2+\theta_3) & -C\theta_1S(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(L_1+L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2) \\ S\theta_1C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(L_1+L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_2S\theta_2-L_3S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al

Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_1 & L_1 C\theta_1 + L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & L_1 S\theta_1 + L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 & 0 & -L_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 S\theta_3 - L_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2) \\ S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_2 S\theta_2 - L_3 S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_1 C\theta_1 + L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ L_1 S\theta_1 + L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ -L_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 S\theta_3 - L_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C\theta_1(L_1 + L_3 C(\theta_2 + \theta_3) + L_2 C\theta_2) \\ S\theta_1(L_1 + L_3 C(\theta_2 + \theta_3) + L_2 C\theta_2) \\ -L_2 S\theta_2 - L_3 S(\theta_2 + \theta_3) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería (no simplificado y simplificado):

$$\begin{aligned} &P(x,y,z)=(L_1 C\theta_1 + L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \ , \quad \ldots \\ &L_1 S\theta_1 + L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \ , -L_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 S\theta_3 - L_3 C\theta_3 S\theta_2) \ = \\ &(C\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2) \ , \ S\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2) \ , \ -L_2 S\theta_2 - L_3 S(\theta_2+\theta_3)) \end{aligned}$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

1.4.1 Cinemática Inversa

1.4.1.1 Resolución del primer ángulo θ_1

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^0A_1)^{-1}T={}^1A_3={}^1A_2\,{}^2A_3$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_2 y θ_3 .

Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_1 & r_1 C\theta_1 + r_2 C\theta_1 C\theta_2 + r_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - r_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & r_1 S\theta_1 + r_2 C\theta_2 S\theta_1 + r_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - r_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 & 0 & -r_2 S\theta_2 - r_3 C\theta_2 S\theta_3 - r_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(r_1+r_3 C(\theta_2+\theta_3)+r_2 C\theta_2) \\ S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(r_1+r_3 C(\theta_2+\theta_3)+r_2 C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -r_2 S\theta_2 - r_3 S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_1 & P_x \\ C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & P_y \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_1=L_1$, $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_1 & L_1 C\theta_1 + L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & L_1 S\theta_1 + L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 & 0 & -L_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 S\theta_3 - L_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1 (L_1 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2) \\ S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1 (L_1 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_2 S\theta_2 - L_3 S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_1 & P_x \\ C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & P_y \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= {}^1A_3 = {}^1A_2\, {}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & 0 & L_2 C\theta_2 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 S\theta_2 S\theta_3 \\ C\theta_2 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_2 & C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3 & 0 & L_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 S\theta_3 + L_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_1 x + S\theta_1 y - L_1 t$$
$$f_{12} = -z$$
$$f_{13} = -S\theta_1 x + C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p)\\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p)\\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p)\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$${}^{1}A_3={}^{1}A_2\,{}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_2C\theta_3-S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2 & 0 & L_2C\theta_2+L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3\\ C\theta_2S\theta_3+C\theta_3S\theta_2 & C\theta_2C\theta_3-S\theta_2S\theta_3 & 0 & L_2S\theta_2+L_3C\theta_2S\theta_3+L_3S\theta_2C\theta_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2\\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones (Formato:
$f_{ij}(s)=Izquierda$ sin $sinplificar=izquierda\ simplificado \quad =$
$derecha$ sin $simplificar=derecha\ simplificado$):

$$\begin{aligned}
f_{11}(n)&=C\theta_1(C\theta_1C\theta_2C\theta_3-C\theta_1S\theta_2S\theta_3)+S\theta_1(C\theta_2C\theta_3S\theta_1-S\theta_1S\theta_2S\theta_3) \quad =\\
&\quad C\theta_1(C\theta_1C(\theta_2+\theta_3))+S\theta_1(S\theta_1C(\theta_2+\theta_3)) \quad =\\
&\quad C\theta_2C\theta_3-S\theta_2S\theta_3=C(\theta_2+\theta_3)\\
f_{12}(n)&=-(-C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2)=-(-S(\theta_2+\theta_3))=C\theta_2S\theta_3+C\theta_3S\theta_2=S(\theta_2+\theta_3)\\
f_{13}(n)&=-S\theta_1(C\theta_1C\theta_2C\theta_3-C\theta_1S\theta_2S\theta_3)+C\theta_1(C\theta_2C\theta_3S\theta_1-S\theta_1S\theta_2S\theta_3) \quad =\\
&\quad -S\theta_1(C\theta_1C(\theta_2+\theta_3))+C\theta_1(S\theta_1C(\theta_2+\theta_3))=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}(o)&=C\theta_1(-C\theta_1C\theta_2S\theta_3-C\theta_1C\theta_3S\theta_2)+S\theta_1(-C\theta_2S\theta_1S\theta_3-C\theta_3S\theta_1S\theta_2) \quad =\\
&\quad C\theta_1(-C\theta_1S(\theta_2+\theta_3))+S\theta_1(-S\theta_1S(\theta_2+\theta_3)) \quad =\\
&\quad -C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2=-S(\theta_2+\theta_3)\\
f_{12}(o)&=-(S\theta_2S\theta_3-C\theta_2C\theta_3)=-(-C(\theta_2+\theta_3))=C\theta_2C\theta_3-S\theta_2S\theta_3=C(\theta_2+\theta_3)\\
f_{13}(o)&=-S\theta_1(-C\theta_1C\theta_2S\theta_3-C\theta_1C\theta_3S\theta_2)+C\theta_1(-C\theta_2S\theta_1S\theta_3-C\theta_3S\theta_1S\theta_2)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}(a)&=C\theta_1(-S\theta_1)+S\theta_1C\theta_1=C\theta_1(-S\theta_1)+S\theta_1C\theta_1=0\\
f_{12}(a)&=0\\
f_{13}(a)&=-S\theta_1(-S\theta_1)+C\theta_1C\theta_1=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}(p)&=C\theta_1(L_1C\theta_1+L_2C\theta_1C\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3)+\ldots\\
&\quad \ldots+S\theta_1(L_1S\theta_1+L_2C\theta_2S\theta_1+L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3)-L_1 \quad =\\
&\quad C\theta_1(C\theta_1(L_1+L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2))+\ldots\\
&\quad \ldots+S\theta_1(S\theta_1(L_1+L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2))-L_1 \quad =\\
&\quad \ldots=L_2C\theta_2+L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3=L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2\\
f_{12}(p)&=-(-L_2S\theta_2-L_3C\theta_2S\theta_3-L_3C\theta_3S\theta_2)=-(-L_2S\theta_2-L_3S(\theta_2+\theta_3)) \quad =\\
&\quad L_2S\theta_2+L_3C\theta_2S\theta_3+L_3S\theta_2C\theta_3=L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2\\
f_{13}(p)&=-S\theta_1(L_1C\theta_1+L_2C\theta_1C\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3)\ldots\\
&\quad \ldots+C\theta_1(L_1S\theta_1+L_2C\theta_2S\theta_1+L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3)-L_1=0 \quad =\\
&\quad -S\theta_1(C\theta_1(L_1+L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2))\ldots\\
&\quad \ldots+C\theta_1(S\theta_1(L_1+L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2))-L_1=0
\end{aligned}$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y \\ . & . & . & -P_z+L_1 \\ . & . & . & (-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^1A_3=\begin{pmatrix} . & . & . & L_2C\theta_2+L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3 \\ . & . & . & L_2S\theta_2+L_3C\theta_2S\theta_3+L_3S\theta_2C\theta_3 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2 \\ . & . & . & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

(Formato: $f_{ij}(p)$ = Izquierda = derecha sin simplificar = derecha simplificado)

$$f_{11}(p)=C\theta_1P_x+S\theta_1P_y=L_2C\theta_2+L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3=L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2$$
$$f_{12}(p)=-P_z=L_2S\theta_2+L_3C\theta_2S\theta_3+L_3S\theta_2C\theta_3=L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2$$
$$f_{13}(p)=(-S\theta_1)P_x+C\theta_1P_y=0$$

...

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x y P_y . Para ello, con la tercera ecuación:

$$(-S\theta_1)P_x+C\theta_1P_y=0$$
$$((-S\theta_1)P_x+C\theta_1P_y)/C\theta_1=0$$
$$-tg(\theta_1)P_x+P_y=0$$
$$\theta_1=arctg(P_y/P_x)=atan(P_y,P_x)=atan2(P_y,P_x) \quad *$$

Por tanto, ya se ha obtenido el ángulo θ_1 .

Otra posibilidad hubiera sido tomar los dos elementos correspondientes a la primera y segunda fila de la cuarta columna de T también presentado como componentes del punto P. Se podría haber operado de la siguiente forma:

(Formato: no simplificado y simplificado)

$$\begin{aligned}&P(x,y,z)=(L_1 C\theta_1+L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3\ ,\quad ...\\&L_1 S\theta_1+L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3\ ,\quad ...\\&-L_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 S\theta_2)\ =\\&(C\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2)\ ,\ S\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2)\ ,\ ...\\&-L_2 S\theta_2-L_3 S(\theta_2+\theta_3))\end{aligned}$$

(Formato: no simplificado)

$$\begin{aligned}&P(y)/P(x)=(L_1 S\theta_1+L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)...\\&.../(L_1 C\theta_1+L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\ =\\&P(y)/P(x)=S\theta_1(L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C\theta_2 C\theta_3-L_3 S\theta_2 S\theta_3)...\\&.../C\theta_1(L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C\theta_2 C\theta_3-L_3 S\theta_2 S\theta_3)\ =\\&P(y)/P(x)=S\theta_1/C\theta_1\end{aligned}$$

(Formato: simplificado)

$$\begin{aligned}&P(y)/P(x)=(S\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2))...\\&.../(C\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2))\ =\\&P(y)/P(x)=S\theta_1/C\theta_1\end{aligned}$$

Por tanto, en ambos casos:

$$\theta_1=atan2(P(y),P(x))\quad *$$

Luego, se puede comprobar que existen varias formas analíticas de determinar el valor de los ángulos, lo que da a entender que existen varios elementos que son linealmente dependientes. Y eso hace pensar que el número de ecuaciones que puedan ser utilizadas para el cálculo de los diferentes ángulos podría ser mucho más reducido que lo que, aparentemente se podría pensar. De hecho, la existencia de una línea completa con un valor “0” o “1”, además de otros elementos que también lo son, ya reducen inicialmente el número de posibles combinaciones que acaben siendo una ecuación utilizable.

1.4.1.2 Intento 1 para obtener el resto de ángulos θ_2 θ_3 - Elementos de T, o primera inversa (sin solución)

Si se parte del punto P definido mediante los elementos de la última columna de la matriz T que definen cada una de sus componentes.

(Formato: no simplificado y simplificado)

$$\begin{aligned}&P(x,y,z)=(L_1 C\theta_1+L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3\ ,\quad ...\\&L_1 S\theta_1+L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3\ ,\quad ...\\&-L_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 S\theta_2)\ =\\&(C\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2)\ ,\ S\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2)\ ,\ ...\\&-L_2 S\theta_2-L_3 S(\theta_2+\theta_3))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P(x)=L_1 C\theta_1+L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3=C\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2)\\&P(y)=L_1 S\theta_1+L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3=S\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2)\\&P(z)=-L_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 S\theta_2=-L_2 S\theta_2-L_3 S(\theta_2+\theta_3)\end{aligned}$$

De las ecuaciones correspondientes a $P(x)$ y $P(y)$ en el punto P se podrían crear dos nuevas ecuaciones con los elementos de la primera y tercera línea en la cuarta columna de T y multiplicándolos por $S\theta_1$ o $C\theta_1$, e igualando estos a los elementos correspondientes de la derecha:

$$P(x)S\theta_1 - P(y)C\theta_1 = 0 \quad \text{(No usada)}$$
$$P(x)C\theta_1 + P(y)S\theta_1 = ...$$
$$(C\theta_1(L_1 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2))C\theta_1 + (S\theta_1(L_1 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2))S\theta_1 = ...$$

No parece tener solución.

Como en casos anteriores, estas ecuaciones también se podrían haber intentado extraer de los patrones ya calculados, al usar f_{11} y f_{13} en el desarrollo de la primera inversa. Sin embargo, hay algunas diferencias ya que el término L_1 se encuentra en una posición diferente, por la arquitectura del brazo, lo que provoca un cálculo ligeramente distinto. De hecho, la última ecuación hubiera sido:

$$P(x)C\theta_1 + P(y)S\theta_1 = ...$$

Y en ese caso no hubiera coincidido con "Ecuación 1" por lo que, no se hubiera podido igualar a los términos correspondientes de la derecha en ${}^1A_2\,{}^2A_3$.

Sin embargo se puede hacer esa misma operación, restando L_1 en ambos lados de la igualdad, para poder llegar a la igualdad con el lado de la derecha deseado:

$$P(x)C\theta_1 + P(y)S\theta_1 - L_1 \quad =$$
$$(C\theta_1(L_1 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2))C\theta_1 + (S\theta_1(L_1 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2))S\theta_1 - L_1 = ...$$
$$... = L_2 C\theta_2 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 S\theta_2 S\theta_3$$

Ecuación 1: $P(x)C\theta_1 + P(y)S\theta_1 = L_1 + L_2 C\theta_2 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 S\theta_2 S\theta_3$

No parece tener solución.

Si se suman los cuadrados de ambas componentes $P(x)$ y $P(y)$:

$$(P(x))^2 + (P(y))^2 = ...$$
$$(C\theta_1(L_1 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2))^2 + (S\theta_1(L_1 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2))^2 = ...$$

$$(P(x))^2 + (P(y))^2 = (L_1 + L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2)^2 \quad =$$
$$\theta_3 = \arccos((((P(x))^2 + (P(y))^2)^{1/2} - L_1 - L_2 C\theta_2)/L_3) - \theta_2$$

Y quedaría θ_3 en función de θ_2 .

No parece tener solución.

El producto de las otras parejas de componentes ($(P(x))^2 + (P(z))^2$ y $(P(y))^2 + (P(z))^2$) tampoco parecen tener solución por el formato de las ecuaciones, dado que tienen menos elementos en común y por haber sido usada $P(z)$ para calcular θ_1 .

Utilizando ahora la ecuación de $P(z)$ del punto P en su forma completa, y sumando los cuadrados de ambas ecuaciones:

$P(z)=-L_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 S\theta_2=-L_2 S\theta_2-L_3 S(\theta_2+\theta_3)$
Ecuación 2: $-P(z)=L_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 S\theta_2$

(Ecuación 2)^2+ (Ecuación 1)^2 = $(-P(z))^2+(P(x)C\theta_1+P(y)S\theta_1)^2$ =
$(L_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 S\theta_2)^2+(L_1+L_2 C\theta_2+L_3 C\theta_2 C\theta_3-L_3 S\theta_2 S\theta_3)^2$ =

No parece tener solución.

Se puede intentar con la tercera ecuación de la primera inversa:

$-P(x)S\theta_1+P(y)C\theta_1$ =
$-(C\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2))S\theta_1+(S\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2))C\theta_1=0$
Ecuación 3: $-P(x)S\theta_1+P(y)C\theta_1=0$

(Ecuación 2)^2+ (Ecuación 3)^2 = $(-P(z))^2+(-P(x)S\theta_1+P(y)C\theta_1)^2$ =
$(L_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2 S\theta_3+L_3 C\theta_3 S\theta_2)^2$ =

No parece tener solución.

1.4.1.3 Intento 2 - Primera matriz inversa y uso del punto

Si se toma la primera ecuación del conjunto de la primera inversa, con la cuarta columna:

$f_{11}(p)=C\theta_1(L_1 C\theta_1+L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)...$
$...+S\theta_1(L_1 S\theta_1+L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L_1$ =
$C\theta_1(C\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2))...$
$...+S\theta_1(S\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2))-L_1$ =
$...=L_2 C\theta_2+L_3 C\theta_2 C\theta_3-L_3 S\theta_2 S\theta_3=L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2$

$f_{11}(p)=C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y=L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2$
$C(\theta_2+\theta_3)=(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y-L_2 C\theta_2)/L_3$
$\theta_2+\theta_3=\arccos((C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y-L_2 C\theta_2)/L_3)$
$\theta_3=\arccos((C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y-L_2 C\theta_2)/L_3)-\theta_2$ *

Por tanto, se encuentra la segunda variable, θ_3 en función de θ_2 , o $\theta_2+\theta_3$ en función de valores, ya conocidos.
Y si ahora se sustituye el término $C(\theta_2+\theta_3)$ en la segunda ecuación del conjunto de la primera inversa, con la primera columna:

$f_{12}(p)=-P_z=L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2$

$-P_z=L_3(1-(C(\theta_2+\theta_3))^2)^{1/2}+L_2 S\theta_2$
$-P_z=L_3(1-((C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y-L_2 C\theta_2)/L_3)^2)^{1/2}+L_2 S\theta_2$
$(-P_z-L_2 S\theta_2)/L_3=(1-((C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y-L_2 C\theta_2)/L_3)^2)^{1/2}$

$$((-P_z-L_2 S\theta_2)/L_3)^2=(1-((C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y-L_2 C\theta_2)/L_3)^2)$$

$$((L_1-P_z)^2-2(L_1-P_z)(L_2 S\theta_2)+(L_2 S\theta_2)^2)/L_3^2 \quad = \\ 1-(((C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2-2(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)(L_2 C\theta_2)+(L_2 C\theta_2)^2)/L_3^2)$$

$$((L_1-P_z)^2-2(L_1-P_z)(L_2 S\theta_2)+(L_2 S\theta_2)^2)/L_3^2 \quad = \\ (L_3^2-((C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2-2(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)(L_2 C\theta_2)+(L_2 C\theta_2)^2)/L_3^2)$$

$$(-P_z)^2-2(-P_z)(L_2 S\theta_2)+(L_2 S\theta_2)^2 \quad = \\ L_3^2-((C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2-2(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)(L_2 C\theta_2)+(L_2 C\theta_2)^2)$$

$$(-P_z)^2-2(-P_z)(L_2 S\theta_2)+(L_2 S\theta_2)^2 \quad = \\ L_3^2-((C\theta_1 P_x)^2+2(C\theta_1 P_x)(S\theta_1 P_y)+(S\theta_1 P_y)^2-2(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)(L_2 C\theta_2)+(L_2 C\theta_2)^2)$$

$$(-P_z)^2-2(-P_z)(L_2 S\theta_2)+(L_2 S\theta_2)^2 \quad = \\ L_3^2-(C\theta_1 P_x)^2-2(C\theta_1 P_x)(S\theta_1 P_y)-(S\theta_1 P_y)^2+2(C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y)(L_2 C\theta_2)-(L_2 C\theta_2)^2$$

$$(-P_z)^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x)^2+2(C\theta_1 P_x)(S\theta_1 P_y)+(S\theta_1 P_y)^2 \quad = \\ 2(C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y)(L_2 C\theta_2)-L_2^2(S\theta_2^2+C\theta_2^2)+2(-P_z)(L_2 S\theta_2)$$

$$(-P_z)^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x)^2+2(C\theta_1 P_x)(S\theta_1 P_y)+(S\theta_1 P_y)^2 \quad = \\ 2(C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y)(L_2 C\theta_2)-L_2^2+2(-P_z)(L_2 S\theta_2)$$

$$(-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x)^2+2(C\theta_1 P_x)(S\theta_1 P_y)+(S\theta_1 P_y)^2 \quad = \text{(deshaciendo el cuadrado)} \\ (-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2 \quad = \\ 2(C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y)(L_2 C\theta_2)+2(-P_z)(L_2 S\theta_2)$$

$$2L_2(C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y)C\theta_2+2L_2(-P_z)S\theta_2=(-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2 \\ (C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y)C\theta_2+(-P_z)S\theta_2=((-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2)/2L_2$$

Y se podría aplicar la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \iff \theta=\mathit{atan2}(b,a)\pm\mathit{atan2}(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Y daría como resultado:

$$\theta_2=\mathit{atan2}(2L_2(-P_z),2L_2(C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y))\ldots \\ \ldots\pm\mathit{atan2}(\sqrt{(2L_2(C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y))^2+(2L_2(-P_z))^2-((-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2)^2},(-P_z)^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2) \quad = \\ \mathit{atan2}(-P_z,(C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y))\ldots \\ \ldots\pm\mathit{atan2}(\sqrt{((C\theta_1 P_x-S\theta_1 P_y))^2+P_z^2-((P_z^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2)/2L_2)^2},(P_z^2+L_2^2-L_3^2+(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2)/2L_2) \quad *$$

Y sustituyendo este valor en la ecuación anterior para θ_3 , podría encontrarse también el último ángulo buscado.

1.4.1.4 *Intento 3 - Segunda matriz inversa y uso del punto (sin solución)*

Se puede intentar extraer la segunda variable articular, θ_2 usando la igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3$$

Sustituyendo las matrices (con la matriz T sin simplificar y simplificada), quedará:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_1 & L_1 C\theta_1 + L_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & L_1 S\theta_1 + L_2 C\theta_2 S\theta_1 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 & 0 & -L_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 S\theta_3 - L_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -C\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 & C\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2) \\ S\theta_1 C(\theta_2+\theta_3) & -S\theta_1 S(\theta_2+\theta_3) & C\theta_1 & S\theta_1(L_1+L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2) \\ -S(\theta_2+\theta_3) & -C(\theta_2+\theta_3) & 0 & -L_2 S\theta_2 - L_3 S(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & -S\theta_2 & -L_1 C\theta_2 - L_2 \\ -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_2 & L_1 S\theta_2 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_1 & P_x \\ C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_1 & P_y \\ -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 & 0 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$
\begin{aligned}
&f_{21}=(C\theta_1 C\theta_2)x+(C\theta_2 S\theta_1)y+(-S\theta_2)z+(L_1 S\theta_2-L_2)t\\
&f_{22}=(-C\theta_1 S\theta_2)x+(-S\theta_1 S\theta_2)y+(-C\theta_2)z+(L_1 C\theta_2)t\\
&f_{23}=(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$
({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p)\\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p)\\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p)\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Desde estos formatos y matrices se llegará a las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f_{21}(n)=&(C\theta_1 C\theta_2)x+(C\theta_2 S\theta_1)y+(-S\theta_2)z+(L_1 S\theta_2-L_2)t \;=\\
&(C\theta_1 C\theta_2)(C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\ldots+(C\theta_2 S\theta_1)(C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)+(-S\theta_2)(-C\theta_2 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_2) \;=\\
&C\theta_3\\
f_{22}(n)=&(-C\theta_1 S\theta_2)x+(-S\theta_1 S\theta_2)y+(-C\theta_2)z+(L_1 C\theta_2)t \;=\\
&(-C\theta_1 S\theta_2)(C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\ldots+(-S\theta_1 S\theta_2)(C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)+(-C\theta_2)(-C\theta_2 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_2) \;=\\
&S\theta_3\\
f_{23}(n)=&(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y \;=\\
&(-S\theta_1)(C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)+(C\theta_1)(C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{21}(o)=&(C\theta_1 C\theta_2)x+(C\theta_2 S\theta_1)y+(-S\theta_2)z+(L_1 S\theta_2-L_2)t \;=\\
&(C\theta_1 C\theta_2)(-C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)\ldots\\
&\ldots+(C\theta_2 S\theta_1)(-C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)+(-S\theta_2)(S\theta_2 S\theta_3-C\theta_2 C\theta_3) \;=\\
&-S\theta_3\\
f_{22}(o)=&(-C\theta_1 S\theta_2)x+(-S\theta_1 S\theta_2)y+(-C\theta_2)z+(L_1 C\theta_2)t \;=\\
&(-C\theta_1 S\theta_2)(-C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)\ldots\\
&\ldots+(-S\theta_1 S\theta_2)(-C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)+(-C\theta_2)(S\theta_2 S\theta_3-C\theta_2 C\theta_3) \;=\\
&C\theta_3\\
f_{23}(o)=&(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y=(-S\theta_1)(-C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)\ldots\\
&\ldots+(C\theta_1)(-C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{21}(a)=&(C\theta_1 C\theta_2)x+(C\theta_2 S\theta_1)y+(-S\theta_2)z+(L_1 S\theta_2-L_2)t \;=\\
&(C\theta_1 C\theta_2)(-S\theta_1)+(C\theta_2 S\theta_1)y+(-S\theta_2)(C\theta_1)=0\\
f_{22}(a)=&(-C\theta_1 S\theta_2)x+(-S\theta_1 S\theta_2)y+(-C\theta_2)z+(L_1 C\theta_2)t \;=\\
&(-C\theta_1 S\theta_2)(-C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)\ldots\\
&\ldots+(-S\theta_1 S\theta_2)(-C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)+(-C\theta_2)(S\theta_2 S\theta_3-C\theta_2 C\theta_3) \;=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&0\\
&f_{23}(a)=(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y=(-S\theta_1)(-C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)\dots\\
&\qquad \dots+(C\theta_1)(-C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{21}(p)=(C\theta_1 C\theta_2)x+(C\theta_2 S\theta_1)y+(-S\theta_2)z+(L_1 S\theta_2-L_2)t\ =\\
&\qquad (C\theta_1 C\theta_2)(L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\dots\\
&\qquad \dots+(C\theta_2 S\theta_1)(L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\dots\\
&\qquad \dots+(-S\theta_2)(L_1-L_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 S\theta_2)+(L_1 S\theta_2-L_2)=L_3 C\theta_3\\
&f_{22}(p)=(-C\theta_1 S\theta_2)x+(-S\theta_1 S\theta_2)y+(-C\theta_2)z+(L_1 C\theta_2)t\ =\\
&\qquad (-C\theta_1 S\theta_2)(L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\dots\\
&\qquad \dots+(-S\theta_1 S\theta_2)(L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\dots\\
&\qquad \dots+(-C\theta_2)(L_1-L_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2 S\theta_3-L_3 C\theta_3 S\theta_2)+(L_1 C\theta_2)=L_3 S\theta_3\\
&f_{23}(p)=(-S\theta_1)x+(C\theta_1)y=(-S\theta_1)(L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3-L_3 C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\dots\\
&\qquad \dots+(C\theta_1)(-S\theta_1 S\theta_2)(L_2 C\theta_2 S\theta_1+L_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-L_3 S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)
\end{aligned}
$$

En este caso, se utiliza sólo la última columna, relativa a $P(x,y,z)$ y con las dos matrices inversas ($f_{21}(p), f_{22}(p), f_{23}(p)$):

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x\\
. & . & . & P_y\\
. & . & . & P_z\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$
({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=
\begin{pmatrix}
C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & -S\theta_2 & L_1 S\theta_2-L_2\\
-C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_2 & L_1 C\theta_2\\
-S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x\\
. & . & . & P_y\\
. & . & . & P_z\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
$$

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & C\theta_1 C\theta_2 P_x+C\theta_2 S\theta_1 P_y+(-S\theta_2)P_z+(L_1 S\theta_2-L_2)\\
. & . & . & (-C\theta_1)S\theta_2 P_x+(-S\theta_1)S\theta_2 P_y+(-C\theta_2)P_z+L_1 C\theta_2\\
. & . & . & (-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
. & . & . & f_{21}(p)\\
. & . & . & f_{22}(p)\\
. & . & . & f_{23}(p)\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
$$

$$
{}^2A_3=
\begin{pmatrix}
C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3\\
S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{21}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x+C\theta_2 S\theta_1 P_y+(-S\theta_2)P_z+(L_1 S\theta_2-L_2)=L_3 C\theta_3\\
&f_{22}(p)=(-C\theta_1)S\theta_2 P_x+(-S\theta_1)S\theta_2 P_y+(-C\theta_2)P_z+L_1 C\theta_2=L_3 S\theta_3\\
&f_{23}(p)=(-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y=0\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Desde las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21}(p) &= C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + (-S\theta_2) P_z + (L_1 S\theta_2 - L_2) \;= \\ & C\theta_2 (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2 (L_1 - P_z) - L_2 = L_3 C\theta_3 \\ f_{22}(p) &= (-C\theta_1) S\theta_2 P_x + (-S\theta_1) S\theta_2 P_y + (-C\theta_2) P_z + L_1 C\theta_2 = L_3 S\theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C\theta_2 (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2 (L_1 - P_z) = L_3 C\theta_3 + L_2 \\ & S\theta_2 (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y) - C\theta_2 (P_z - L_1) = L_3 S\theta_3 \end{aligned}$$

Se podría obtener θ_3 en función de θ_2

$$\begin{aligned} & L_3 S\theta_3 / L_3 C\theta_3 = (S\theta_2 (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y) - C\theta_2 (P_z - L_1)) / (C\theta_2 (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2 (L_1 - P_z) - L_2) \\ & tg(\theta_3) = (S\theta_2 (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y) - C\theta_2 (P_z - L_1)) / (C\theta_2 (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2 (L_1 - P_z) - L_2) \\ & \theta_3 = arctg((S\theta_2 (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y) - C\theta_2 (P_z - L_1)) / (C\theta_2 (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2 (L_1 - P_z) - L_2)) \end{aligned}$$

Pero resultaría una serie de ecuaciones complejas a la hora de encontrar una solución para θ_2 .

Si por otra parte, se escoge la segunda ecuación, junto con la cuarta columna (punto):

$$\begin{aligned} & f_{22}(p) = (-C\theta_1) S\theta_2 P_x + (-S\theta_1) S\theta_2 P_y + (-C\theta_2) P_z + L_1 C\theta_2 = L_3 S\theta_3 \\ & S\theta_2 (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y) - C\theta_2 (P_z - L_1) = L_3 S\theta_3 \\ & \theta_3 = \arcsin((S\theta_2 (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y) - C\theta_2 (P_z - L_1)) / L_3) \end{aligned}$$

Que podría ser usada con las anteriores equivalencias encontradas. Pero sería de difícil resolución al dejar el ángulo θ_3 en función de θ_2 , como en el caso anterior.

Si ahora desde las dos primeras ecuaciones se sumaran sus cuadrados:

$$\begin{aligned} f_{21}(p) &= C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + (-S\theta_2) P_z + (L_1 S\theta_2 - L_2) \;= \\ & C\theta_2 (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2 (L_1 - P_z) - L_2 = L_3 C\theta_3 \\ f_{22}(p) &= (-C\theta_1) S\theta_2 P_x + (-S\theta_1) S\theta_2 P_y + (-C\theta_2) P_z + L_1 C\theta_2 = L_3 S\theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C\theta_2 (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2 (L_1 - P_z) = L_3 C\theta_3 + L_2 \\ & S\theta_2 (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y) - C\theta_2 (P_z - L_1) = L_3 S\theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (f_{21}(p))^2 + (f_{22}(p))^2 = \ldots \\ & (C\theta_2 (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) + S\theta_2 (L_1 - P_z))^2 + (S\theta_2 (-C\theta_1 P_x - S\theta_1 P_y) - C\theta_2 (P_z - L_1))^2 \ldots \\ & \ldots = (L_3 C\theta_3 + L_2)^2 + (L_3 S\theta_3)^2 \end{aligned}$$

No parece tener solución

1.4.1.5 Intento 4 - División del problema en partes simples (pares de articulaciones)

En este caso se intentarán analizar los problemas por separado. De esta forma, se inicia la resolución del problema independizando las dos restantes articulaciones de la primera, que ya fue resuelto. Así, se va a independizar todo el tratamiento de matrices para resolver el problema simple representado a continuación.

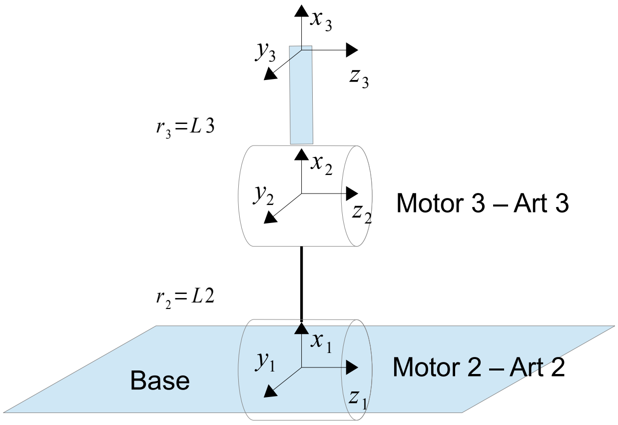


Ilustración 11: Brazo restante tras separar la articulación ya resuelta analíticamente

De esta forma el Origen de Coordenadas de este primer motor ($O-XYZ$) se considera en la Base virtual correspondiente al segundo motor del problema completo. Así, la matriz correspondiente a este primer motor determina cómo llegar a ese segundo motor a través del desplazamiento de una distancia r_1 sobre los ejes X,Y del primer motor:

$$^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las componentes x e y del punto P' a alcanzar tendrá que disminuirse en la cantidad correspondiente a esa diferencia de altura relativa entre las Bases real y virtual.

De esta forma se simplifica en cálculo y las matrices resultantes.

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, se comenzará por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & 105 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & 290 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & L_3 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$ {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^{1}A_3={}^{1}A_2\,{}^{2}A_3$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^1A_3=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & r_3C(\theta_2+\theta_3)+r_2C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & r_3S(\theta_2+\theta_3)+r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo $((0_{u0'},0_{v0'},0_{w0'})$ - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P'(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P'(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2 \\ L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto P' sería:

$$P'(x,y,z)=(P'_x\ ,\ P'_y\ ,\ P'_z)=(L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2\ ,\ L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2\ ,\ 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^1A_2)^{-1}T={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 y θ_3 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^1A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_x \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$[{}^1A_2]^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2\\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2\\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2\\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & P'_x\\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & P'_y\\ 0 & 0 & 1 & P'_z\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3C\theta_3\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3S\theta_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerarán las expresiones resultantes de tomar la equivalencia entre $P'^2_x+P'^2_y$ y sus correspondientes elementos de la matriz T :

$$\begin{aligned}
&P'^2_x+P'^2_y=(L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2)^2+(L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2)^2 \quad = \\
&(L_3C(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3C(\theta_2+\theta_3))(L_2C\theta_2)+(L_2C\theta_2)^2+(L_3S(\theta_2+\theta_3))^2\ldots \\
&\ldots+2(L_3S(\theta_2+\theta_3))(L_2S\theta_2)+(L_2S\theta_2)^2 \quad = \\
&L_3^2((C(\theta_2+\theta_3))^2+(S(\theta_2+\theta_3))^2)+2(L_3C(\theta_2+\theta_3))(L_2C\theta_2)+L_2((C\theta_2)^2+(S\theta_2)^2)+\ldots \\
&\ldots+2(L_3S(\theta_2+\theta_3))(L_2S\theta_2) \quad = \\
&L_3^2+L_2^2+2(L_3C(\theta_2+\theta_3))(L_2C\theta_2)+2(L_3S(\theta_2+\theta_3))(L_2S\theta_2) \quad = \\
&L_3^2+L_2^2+2L_3L_2(C(\theta_2+\theta_3)C\theta_2+S(\theta_2+\theta_3)S\theta_2) \quad = \\
&L_3^2+L_2^2+2L_3L_2C(\theta_2+\theta_3-\theta_2) \quad = \\
&L_3^2+L_2^2+2L_3L_2C\theta_3=P'^2_x+P'^2_y
\end{aligned}$$

$$\theta_3=\arccos((P'^2_x+P'^2_y-L_3^2-L_2^2)/2L_3L_2) \quad *$$

Si ahora se toma la primera fila de la inversa $[{}^1A_2]^{-1}$ y se opera con la cuarta columna de T , y la segunda fila de $[{}^1A_2]^{-1}$, también con la cuarta columna de T , se obtiene:

$$\begin{aligned}
&-S\theta_2P'_x+C\theta_2P'_y=L_3S\theta_3 \;\Leftrightarrow\; P'_yC\theta_2-P'_xS\theta_2=L_3S\theta_3 \\
&C\theta_2P'_x+S\theta_2P'_y-L_2=r_3C\theta_3 \;\Leftrightarrow\; P'_yS\theta_2+P'_xC\theta_2=L_2+L_3C\theta_3
\end{aligned}$$

Y con la razón $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ y $a\sin\theta+b\cos\theta=d \Leftrightarrow \theta=atan2(d,c)-atan2(b,a)$:

$$\theta_2=atan2(L_2+L_3C\theta_3, L_3S\theta_3)-atan2(P'_x, P'_y)$$

Luego, ya se han obtenido las tres igualdades correspondientes a los tres ángulos de las 3 articulaciones:

$\theta_1=0$ (No hay movimiento en esta componente, sino sólo en el plano YZ)
$\theta_3=\arccos((P'^2_x+P'^2_y-L_3^2-L_2^2)/2L_3L_2)$
$\theta_2=atan2(L_2+L_3C\theta_3, L_3S\theta_3)-atan2(P'_x, P'_y)$

Sin embargo, hay que tener en cuenta las diferencias de alturas relativas (atendiendo a sus diferentes componentes), sobre las que se han obtenido las ecuaciones correspondientes a θ_2 y θ_3, por lo que, a la hora de implementar el código, debería resolverse esa diferencia.
Por otra parte, también hay que considerar que el punto P' del problema simplificado es diferente al punto P en el problema completo. De hecho, las componentes (x', y') consideradas para el análisis son, en realidad, las que se calculen a través de cálculo geométrico.
Pero en este caso, y dado que se trata de encontrar un modelo que permita resolver este problema sin necesidad de realizar ese cálculo geométrico, se puede calcular mediante la aplicación de un modelo basado en Denavit-Hartenberg.
Y precisamente, el cálculo resulta sencillo dado que, ya se tienen los datos y ecuaciones para resolver ese problema, en este caso, la ecuación que define el primer ángulo θ_1 y la matriz correspondiente al primer motor, ahora desacoplado del problema completo:

$$\theta_1 = arctg(P_y / P_x) = atan(P_y, P_x) = atan2(P_y, P_x)$$

Y para el punto P', respecto al Origen de Coordenadas O' ($O'-UVW$), se calculará dónde se encuentra O' :

$$^{0}A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el desplazamiento de O' ($O'-UVW$) respecto a O ($O-XYZ$), determinará la posición del punto P' respecto a O' ($O'-UVW$):

$$P' = (P'_x, P'_y, P'_z) = (P_x - r_1 C\theta_1, P_y - r_1 S\theta_1, P_z) = (P_x - L_1 C\theta_1, P_y - L_1 S\theta_1, P_z)$$

Sin embargo, conociendo la arquitectura del problema, se ve que las componentes tienen que ser transformadas en nuevas componentes, ya que no coinciden con la visión real de las mismas, aplicadas a un brazo real, y menos aún, si se trata de una de las patas de un cuadrúpedo.
Y por tanto, la componente x será la componente de movimiento lateral del brazo (componente lateral de cada pata del cuadrúpedo, al caminar), la componente y será la componente de movimiento frontal del brazo (componente frontal en la dirección del movimiento de cada pata del cuadrúpedo, al caminar), y la componente z será la componente correspondiente a la altura (altura del cuerpo del cuadrúpedo para cada pata, al caminar). Y por ello, el primer motor determinará las componentes x y z del brazo cuando éste está haciendo los movimientos correspondientes a una paso real del cuadrúpedo. Mientras que la componente y es la que determina el avance del mismo.
De esta forma, y de cara al cálculo de las mismas, las ecuaciones y datos serían:

$$\theta_1 = arctg(P_y / P_x) = atan(P_y, P_x) = atan2(P_y, P_x)$$

$$P'=(P'_x, P'_y, P'_z)=(P_x-L_1 C\theta_1, P_y, P_z-L_1 S\theta_1)$$

Y dará como resultado el conjunto de ecuaciones:

$$\theta_1=arctg(P_y/P_x)=atan(P_y, P_x)=atan2(P_y, P_x)$$
$$P'=(P'_x, P'_y, P'_z)=(P_x-L_1 C\theta_1, P_y, P_z-L_1 S\theta_1)$$
$$\theta_3=\arccos((P'^2_x+P'^2_y-L_3^2-L_2^2)/2 L_3 L_2)$$
$$\theta_2=atan2(L_2+L_3 C\theta_3, L_3 S\theta_3)-atan2(P'_x, P'_y)$$

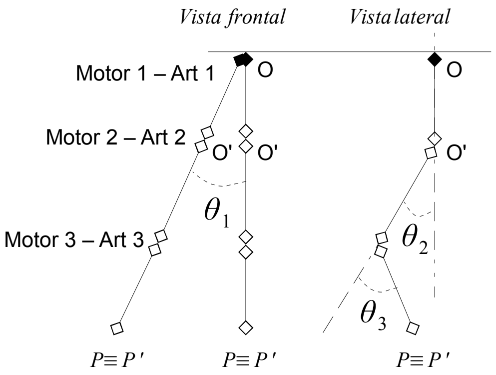


Ilustración 12: Vistas frontal y lateral del Brazo con tres motores trabajando como Pata de Cuadrúpedo

Así quedaría resuelto el problema, al tener las ecuaciones necesarias para el cálculo de todas las variables articulares.
Y como modelo de resolución de este tipo de problemas, cuando no se pueda resolver de otra forma, parece razonable desacoplar los elementos por pares, de tal forma que puedan ser calculados de forma sencilla a través del uso del punto final a alcanzar y de los puntos finales intermedios calculados con las matrices correspondientes a las articulaciones anteriores, simplemente con la resta lógica de sus componentes.

1.5 Caso 4-2 - Tres motores, con el primero paralelo al suelo, y el resto paralelos al primero

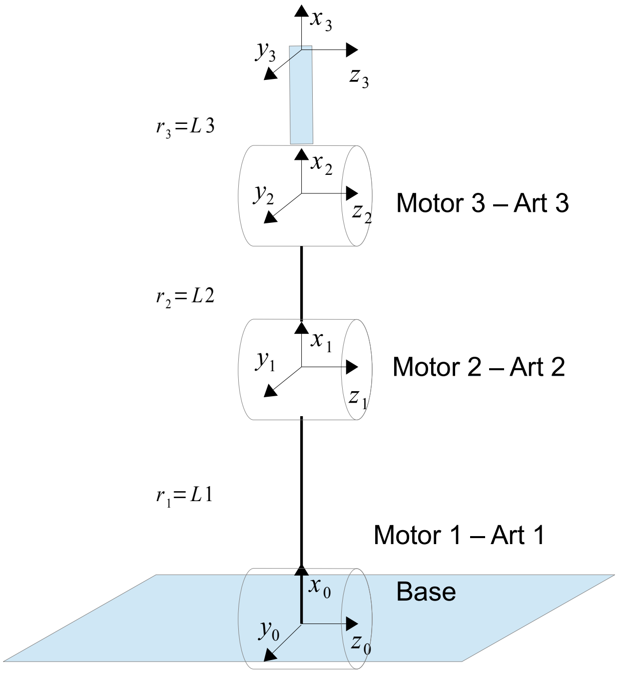


Ilustración 13: Brazo con tres motores, con el primer motor paralelo al suelo y el resto paralelo al primero

1.5.1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & r_1 & 0 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & L1 & 0 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & L3 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3 \;=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & r_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & r_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2-C\theta_2S\theta_1) & -C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)-S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & 0 & \dots \\ C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & r_1C\theta_1-r_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+r_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+r_2C\theta_1C\theta_2-r_2C\theta_2S\theta_1 \\ \dots & \dots & \dots & r_1C\theta_1+r_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+r_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+r_2C\theta_1C\theta_2+r_2C\theta_2S\theta_1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & r_2C(\theta_1+\theta_2)+r_1C\theta_1+r_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & r_2S(\theta_1+\theta_2)+r_1S\theta_1+r_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_1=L_1$, $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2-C\theta_2S\theta_1) & -C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)-S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & 0 & \dots \\ C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & L_1C\theta_1-L_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+L_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+L_2C\theta_1C\theta_2-L_2C\theta_2S\theta_1 \\ \dots & \dots & \dots & L_1C\theta_1+L_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+L_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+L_2C\theta_1C\theta_2+L_2C\theta_2S\theta_1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2-C\theta_2S\theta_1) & -C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)-S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & 0 & ... \\ C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1) & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} ... & ... & ... & L_1C\theta_1-L_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+L_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+L_2C\theta_1C\theta_2-L_2C\theta_2S\theta_1 \\ ... & ... & ... & L_1C\theta_1+L_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+L_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+L_2C\theta_1C\theta_2+L_2C\theta_2S\theta_1 \\ ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z)=(L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\ ,\ L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\ ,\ 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

1.5.2 Cinemática Inversa

1.5.2.1 *Resolución del primer ángulo* θ_1

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).

Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3$$
$$({}^0A_1)^{-1}\,T={}^1A_3={}^1A_2\,{}^2A_3$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\,T={}^2A_3$$

En este caso, para ejecutar el procedimiento general, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_2 y θ_3 . Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2-C\theta_2S\theta_1) & -C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)-S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & 0 & ... \\ C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1) & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} ... & ... & ... & r_1C\theta_1-r_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+r_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+r_2C\theta_1C\theta_2-r_2C\theta_2S\theta_1 \\ ... & ... & ... & r_1C\theta_1+r_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+r_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+r_2C\theta_1C\theta_2+r_2C\theta_2S\theta_1 \\ ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & r_2C(\theta_1+\theta_2)+r_1C\theta_1+r_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & r_2S(\theta_1+\theta_2)+r_1S\theta_1+r_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & P_x \\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_1=L_1$, $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2-C\theta_2S\theta_1) & -C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)-S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & 0 & ... \\ C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1) & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} ... & ... & ... & L_1C\theta_1-L_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+L_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+L_2C\theta_1C\theta_2-L_2C\theta_2S\theta_1 \\ ... & ... & ... & L_1C\theta_1+L_3C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+L_3C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+L_2C\theta_1C\theta_2+L_2C\theta_2S\theta_1 \\ ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & P_x \\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \ {}^1A_3 = {}^1A_2\,{}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_2 & 0 & L_2 C\theta_2 + L_3 C\theta_2 C\theta_3 - L_3 S\theta_2 S\theta_3 \\ C\theta_2 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_2 & C\theta_2 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_3 & 0 & L_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 S\theta_3 + L_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_1 x + S\theta_1 y - L_1 t$$
$$f_{12} = -S\theta_1 x + C\theta_1 y$$
$$f_{13} = z$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^1A_3 = {}^1A_2\,{}^2A_3 = \begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 C(\theta_2+\theta_3) + L_2 C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3) + L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n) = C\theta_1 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + S\theta_1(-S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)) = C(\theta_2+\theta_3)$$
$$f_{12}(n) = -S\theta_1 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) + C\theta_1(-S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)) = S(\theta_2+\theta_3)$$

$$f_{13}(n)=0=0$$

$$\begin{aligned}
&f_{11}(o)=C\theta_1(-S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))+S\theta_1 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=-S(\theta_2+\theta_3)\\
&f_{12}(o)=-S\theta_1(-S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))+C\theta_1 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=C(\theta_2+\theta_3)\\
&f_{13}(o)=0=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{11}(a)=0=0\\
&f_{12}(a)=0=0\\
&f_{13}(a)=1=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{11}(p)=C\theta_1(L_2 C(\theta_1+\theta_2)+L_1 C\theta_1+L_3 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))...\\
&...+S\theta_1(L_2 S(\theta_1+\theta_2)+L_1 S\theta_1+L_3 S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))-L_1=L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2\\
&f_{12}(p)=-S\theta_1(L_2 C(\theta_1+\theta_2)+L_1 C\theta_1+L_3 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))...\\
&...+C\theta_1(L_2 S(\theta_1+\theta_2)+L_1 S\theta_1+L_3 S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))=L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2\\
&f_{13}(p)=0=0
\end{aligned}$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y-L_1 \\ . & . & . & (-S\theta_1)P_x+C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^1A_3=\begin{pmatrix} . & . & . & L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2 \\ . & . & . & L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&f_{11}(p)=C\theta_1(L_2 C(\theta_1+\theta_2)+L_1 C\theta_1+L_3 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))...\\
&...+S\theta_1(L_2 S(\theta_1+\theta_2)+L_1 S\theta_1+L_3 S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))-L_1=C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y-L_1 \quad =\\
&L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2\\
&f_{12}(p)=-S\theta_1(L_2 C(\theta_1+\theta_2)+L_1 C\theta_1+L_3 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))+...\\
&...+C\theta_1(L_2 S(\theta_1+\theta_2)+L_1 S\theta_1+L_3 S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))=-S\theta_1 P_x+C\theta_1 P_y \quad =
\end{aligned}$$

$$L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2$$
$$f_{13}(p)=0=0$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x y P_y .

1.5.2.1.1 Intento 1 - elementos T(1,4) y T(2,4) de la matriz T (solución dependiente)

Para ello se podría usar una de las ecuaciones de la matriz T (elemento T(1,4)):

$$P_x=L_2 C(\theta_1+\theta_2)+L_1 C\theta_1+L_3 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$
$$(P_x-L_2 C(\theta_1+\theta_2)-L_1 C\theta_1)/L_3=C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$
$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\text{arccos}((P_x-L_2 C(\theta_1+\theta_2)-L_1 C\theta_1)/L_3)$$
$$\theta_3=\text{arccos}((P_x-L_2 C(\theta_1+\theta_2)-L_1 C\theta_1)/L_3)-\theta_1-\theta_2$$

Se obtiene el ángulo θ_3 en función de los otros dos ángulos, θ_1 y θ_2 .

Y podría obtenerse una ecuación similar si se hubiera tomado el elemento T(1,3):

$$P_y=L_2 S(\theta_1+\theta_2)+L_1 S\theta_1+L_3 S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$
$$(P_y-L_2 S(\theta_1-\theta_2)-L_1 S\theta_1)/L_3=S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$
$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\text{arcsin}((P_y-L_2 S(\theta_1-\theta_2)-L_1 S\theta_1)/L_3)$$
$$\theta_3=\text{arcsin}((P_y-L_2 S(\theta_1-\theta_2)-L_1 S\theta_1)/L_3)-\theta_1-\theta_2$$

No parece una solución útil por la dependencia de otras variables pero podría ser útil si se busca un procedimiento iterativo.

1.5.2.1.2 Intento 2 - Suma de los cuadrados de los elementos T(1,4) y T(2,4) de la matriz T (sin solución)

Se puede calcular la suma de los cuadrados de las ecuaciones de la matriz T (elementos T(1,4) y T(2,4)). Para ello, se hará una modificación de las igualdades y se anularán los términos dependientes de θ_3 mediante su suma de cuadrados:

$$P_x=L_2 C(\theta_1+\theta_2)+L_1 C\theta_1+L_3 C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$
$$(P_x-L_2 C(\theta_1+\theta_2)-L_1 C\theta_1)/L_3=C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

$$P_y=L_2 S(\theta_1+\theta_2)+L_1 S\theta_1+L_3 S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$
$$(P_y-L_2 S(\theta_1+\theta_2)-L_1 S\theta_1)/L_3=S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

$$((P_x-L_2 C(\theta_1+\theta_2)-L_1 C\theta_1)/L_3)^2+((P_y-L_2 S(\theta_1+\theta_2)-L_1 S\theta_1)/L_3)^2 \quad =$$
$$(C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))^2+(S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))^2=1$$

$$((P_x-L_2 C(\theta_1+\theta_2)-L_1 C\theta_1)/L_3)^2+((P_y-L_2 S(\theta_1+\theta_2)-L_1 S\theta_1)/L_3)^2=1$$

$$(P_x-L_2C(\theta_1+\theta_2)-L_1C\theta_1)^2+(P_y-L_2S(\theta_1+\theta_2)-L_1S\theta_1)^2=L_3^2$$

$$\begin{gathered}(P_x-L_2C(\theta_1+\theta_2))^2-2(P_x-L_2C(\theta_1+\theta_2))(L_1C\theta_1)+(L_1C\theta_1)^2\ldots\\ \ldots+(P_y-L_2S(\theta_1+\theta_2))^2-2(P_y-L_2S(\theta_1+\theta_2))(L_1S\theta_1)+(L_1S\theta_1)^2=L_3^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(P_x)^2-2(P_x)(L_2C(\theta_1+\theta_2))+(L_2C(\theta_1+\theta_2))^2-2(P_x-L_2C(\theta_1+\theta_2))(L_1C\theta_1)+(L_1C\theta_1)^2\ldots\\ \ldots+(P_y)^2-2(P_y)(L_2S(\theta_1+\theta_2))+(L_2S(\theta_1+\theta_2))^2-2(P_y-L_2S(\theta_1+\theta_2))(L_1S\theta_1)+(L_1S\theta_1)^2=L_3^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(P_x)^2+(P_y)^2+(L_1)^2+(L_2)^2-2(P_x)(L_2C(\theta_1+\theta_2))-2(P_x-L_2C(\theta_1+\theta_2))(L_1C\theta_1)\ldots\\ \ldots-2(P_y)(L_2S(\theta_1+\theta_2))-2(P_y-L_2S(\theta_1+\theta_2))(L_1S\theta_1)=L_3^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(P_x)^2+(P_y)^2+(L_1)^2+(L_2)^2-2P_xL_2C(\theta_1+\theta_2)-2P_xL_1C\theta_1+2L_1L_2C(\theta_1+\theta_2)C\theta_1\ldots\\ \ldots-2P_yL_2S(\theta_1+\theta_2)-2P_yL_1S\theta_1+2L_1L_2S(\theta_1+\theta_2)S\theta_1=L_3^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(P_x)^2+(P_y)^2+(L_1)^2+(L_2)^2-2P_xL_2C(\theta_1+\theta_2)-2P_xL_1C\theta_1+2L_1L_2(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)C\theta_1\ldots\\ \ldots-2P_yL_2S(\theta_1+\theta_2)-2P_yL_1S\theta_1+2L_1L_2(S\theta_1C\theta_2+C\theta_1S\theta_2)S\theta_1=L_3^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(P_x)^2+(P_y)^2+(L_1)^2+(L_2)^2-2P_xL_2C(\theta_1+\theta_2)-2P_xL_1C\theta_1-2L_1L_2S\theta_1S\theta_2C\theta_1\ldots\\ \ldots-2P_yL_2S(\theta_1+\theta_2)-2P_yL_1S\theta_1+2L_1L_2C\theta_2((S\theta_1)^2+(C\theta_1)^2)+2L_1L_2C\theta_1S\theta_2S\theta_1=L_3^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(P_x)^2+(P_y)^2+(L_1)^2+(L_2)^2-L_3^2\ =\\ 2P_xL_2C(\theta_1+\theta_2)+2P_xL_1C\theta_1+2P_yL_2S(\theta_1+\theta_2)+2P_yL_1S\theta_1-2L_1L_2C\theta_2\end{gathered}$$

No parece tener solución.

Errores cometidos con cierta frecuencia por un error de interpretación del problema:
Según "EIR2015: "Cinemática directa e inversa -- parte 2" [WWWyoutubeDoc84] (Tiempo: 36:30 y 56:45) , "EIR2015: Cinemática directa e inversa -- parte 3" [WWWyoutubeDoc85] (Tiempo: 32:55):

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L1 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & L2 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & L1 & 0 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{gathered}P_x=L_1C\theta_1+L_2C(\theta_1+\theta_2)\\ P_y=L_1S\theta_1+L_2S(\theta_1+\theta_2)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(P_x)^2=(L_1C\theta_1+L_2C(\theta_1+\theta_2))^2\ =\\ (P_x)^2=(L_1C\theta_1)^2+2(L_1C\theta_1)(L_2C(\theta_1+\theta_2))+(L_2C(\theta_1+\theta_2))^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(P_y)^2=(L_1S\theta_1+L_2S(\theta_1+\theta_2))^2\\ (P_y)^2=(L_1S\theta_1)^2+2(L_1S\theta_1)(L_2S(\theta_1+\theta_2))+(L_2S(\theta_1+\theta_2))^2\end{gathered}$$

$$(P_x)^2+(P_y)^2=(L_1 C\theta_1)^2+2(L_1 C\theta_1)(L_2 C(\theta_1+\theta_2))+(L_2 C(\theta_1+\theta_2))^2...$$
$$...+(L_1 S\theta_1)^2+2(L_1 S\theta_1)(L_2 S(\theta_1+\theta_2))+(L_2 S(\theta_1+\theta_2))^2$$

$$(P_x)^2+(P_y)^2=(L_1)^2((C\theta_1)^2+(S\theta_1)^2)+2(L_1 C\theta_1)(L_2 C(\theta_1+\theta_2))+...$$
$$...+(L_2)^2((C(\theta_1+\theta_2))^2+(S(\theta_1+\theta_2))^2)+2(L_1 S\theta_1)(L_2 S(\theta_1+\theta_2))$$

$$(P_x)^2+(P_y)^2=(L_1)^2+2(L_1 C\theta_1)(L_2 C(\theta_1+\theta_2))+(L_2)^2+2(L_1 S\theta_1)(L_2 S(\theta_1+\theta_2))$$

$$(P_x)^2+(P_y)^2=(L_1)^2+(L_2)^2+2(L_1 C\theta_1)(L_2 C(\theta_1+\theta_2))+2(L_1 S\theta_1)(L_2 S(\theta_1+\theta_2))$$

$$(P_x)^2+(P_y)^2=(L_1)^2+(L_2)^2+2 L_1 L_2(C\theta_1 C(\theta_1+\theta_2)+S\theta_1 S(\theta_1+\theta_2))$$
$$(P_x)^2+(P_y)^2=L_1^2+2 L_1 L_2 C\theta_2+L_2^2$$
$$C\theta_2=((P_x)^2+(P_y)^2-L_1^2-L_2^2)/2 L_1 L_2$$

Y despejando:

$$\theta_2=\arccos(((P_x)^2+(P_y)^2-L_1^2-L_2^2)/2 L_1 L_2)$$

También se podría haber usado una de las la ecuaciones trascendentes

$$\cos\theta=b \Leftrightarrow \theta=\pm atan2(\sqrt{1-b^2}, b)$$

$$\theta_2=\pm atan2(\sqrt{1-(((P_x)^2+(P_y)^2-L_1^2-L_2^2)/2 L_1 L_2)^2}, ((P_x)^2+(P_y)^2-(L_1)^2-L_2^2)/2 L_1 L_2)$$

De hecho, de ninguna forma queda determinado porque el extremo del brazo no responde al punto deseado dado que, el autor supone el punto en el Origen de Coordenadas situado en el propio motor, y no en el extremo del segmento que comienza, precisamente, en ese motor, y al que va sujeto.
En cuanto al algoritmo de DH, hace coincidir los Sistemas de Coordenadas 0 y 1 en el mismo motor y con la misma orientación, en el mismo punto. Por tanto, no hay modificaciones de distancias, ni de ángulos. Y en última instancia, se olvida del último Sistemas de Coordenadas, definido sobre el extremo de L3, el último segmento del brazo.

De hecho, la solución encontrada lo será de un modelo de dos articulaciones, pero no de tres articulaciones.

1.5.2.1.3 Intento 3 - Dos primeras filas de la primera inversa (solución dependiente)

Se pueden usar las dos ecuaciones que provienen de multiplicar las dos primeras filas de la primera inversa por la cuarta columna de T (simplificada), junto con alguna de las ecuaciones trascendentes:

$$C\theta_1 P_y-S\theta_1 P_x=L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2$$
$$C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y-L_1=L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2$$

Y usando la siguiente ecuación trascendente:

$$a\cos\theta - b\sin\theta = c \text{ y } a\sin\theta + b\cos\theta = d \Leftrightarrow \theta = atan2(d, c) - atan2(b, a)$$

Se obtiene:

$$\theta_1 = atan2(L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2+L_1, L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2) - atan2(P_x, P_y)$$

Luego, se deja θ_1 en función de θ_2 y θ_3 .
Se podría dar un valor a dos de los ángulos (θ_2 positivo , θ_3 negativo = tercio del ángulo total) para determinar las soluciones del tercero (θ_1). Por ejemplo, un valor para θ_2 que sea relativamente positivo (sobre la línea de L1) para que obligue a θ_3 a que sea relativamente negativo sobre la línea de L2 (codo arriba). Pero no garantiza la posible solución.
O puede usarse un modelo similar a FABRIK para determinar numéricamente la más aceptable de las aproximaciones, pero supondría un exceso de cálculo que relentizaría su ejecución, además de no poder garantizar la posible solución.

No parece una solución útil por la dependencia de otras variables, pero podría ser útil si se busca un procedimiento iterativo.

1.5.2.1.4 Intento 4 - Segunda ecuación no simplificada de la primera inversa (sin solución)

Para ello, se podría usar la segunda ecuación no simplificada de la primera inversa, correspondiente a la segunda componente del punto $f_{12}(p)$:

$$\begin{aligned}
&f_{12}(p) = -S\theta_1(L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))+\dots\\
&\dots+C\theta_1(L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)) = -S\theta_1P_x+C\theta_1P_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-S\theta_1(L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))+C\theta_1(L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)) \quad =\\
&-S\theta_1(L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))+C\theta_1(L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)) \quad =\\
&-S\theta_1(L_2(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))+C\theta_1(L_2(S\theta_1C\theta_2+C\theta_1S\theta_2)+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)) \quad =\\
&S\theta_1L_2(S\theta_1S\theta_2-C\theta_1C\theta_2)-S\theta_1L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\dots\\
&\dots+C\theta_1L_2(S\theta_1C\theta_2+C\theta_1S\theta_2)+C\theta_1L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \quad =\\
&L_2S\theta_2((S\theta_1)^2+(C\theta_1)^2)-S\theta_1L_2C\theta_1C\theta_2-S\theta_1L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\dots\\
&\dots+C\theta_1L_2S\theta_1C\theta_2+C\theta_1L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \quad =\\
&L_2S\theta_2-L_3S\theta_1C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+L_3C\theta_1S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \quad =\dots= \quad L_2S\theta_2-L_3S(2\theta_1+\theta_2+\theta_3)
\end{aligned}$$

O, continuando con el desarrollo:

$$\begin{aligned}
&=\dots=\\
&L_2S\theta_2-L_3S\theta_1(S\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1S\theta_2C\theta_3+C\theta_1C\theta_2S\theta_3-S\theta_1S\theta_2S\theta_3)\dots\\
&\dots+L_3C\theta_1(S\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1S\theta_2C\theta_3+C\theta_1C\theta_2S\theta_3-S\theta_1S\theta_2S\theta_3) \quad =\\
&L_2S\theta_2-L_3S\theta_1(S\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1S\theta_2C\theta_3+C\theta_1C\theta_2S\theta_3-S\theta_1S\theta_2S\theta_3)\dots\\
&\dots+L_3C\theta_1(S\theta_1C\theta_2C\theta_3+C\theta_1S\theta_2C\theta_3+C\theta_1C\theta_2S\theta_3-S\theta_1S\theta_2S\theta_3) \quad =\\
&L_2S\theta_2-L_3[S\theta_1C\theta_1(S(\theta_2+\theta_3)+C(\theta_2+\theta_3))+C\theta_1C\theta_1(S(\theta_2+\theta_3))-S\theta_1S\theta_1(C(\theta_2-\theta_3))] \quad =\\
&L_2S\theta_2-L_3[S\theta_1C\theta_1S(\theta_2+\theta_3)+S\theta_1C\theta_1C(\theta_2+\theta_3)+C\theta_1C\theta_1S(\theta_2+\theta_3)-S\theta_1S\theta_1C(\theta_2-\theta_3)]
\end{aligned}$$

No parece tener solución.

Y sería similar al uso de $f_{11}(p)$.

$$f_{11}(p)=C\theta_1(L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))...$$
$$...+S\theta_1(L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))-L_1=C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_1$$

No parece tener solución.

1.5.2.1.5 Intento 5 - Suma de los cuadrados de la primera inversa (sin solución)

Se pueden usar las dos ecuaciones que provienen de multiplicar las dos primeras filas de la primera inversa por la cuarta columna de T (simplificada), junto con los mismos elementos de la matriz resultante de la derecha.
Segunda fila por cuarta columna:

$$-S\theta_1P_x+C\theta_1P_y=L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2$$
$$-S\theta_1P_x+C\theta_1P_y=L_3(S\theta_2C\theta_3+C\theta_2S\theta_3)+L_2S\theta_2=L_3S\theta_2C\theta_3+L_3C\theta_2S\theta_3+L_2S\theta_2 \quad =$$
$$-S\theta_1P_x+C\theta_1P_y=L_3S\theta_2(C\theta_3+L_2)+L_3C\theta_2S\theta_3$$
$$C\theta_1P_y-S\theta_1P_x=S\theta_2(L_3C\theta_3+L_2)+L_3C\theta_2S\theta_3$$

Y sucede lo mismo con la primera fila por la cuarta columna:

$$C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_1=L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2$$
$$C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_1=L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2=L_3(C\theta_2C\theta_3-S\theta_2S\theta_3)+L_2C\theta_2 \quad =$$
$$C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_1=L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3+L_2C\theta_2=C\theta_2(L_3C\theta_3+L_2)-L_3S\theta_2S\theta_3$$
$$C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_1=L_3C\theta_2C\theta_3-L_3S\theta_2S\theta_3+L_2C\theta_2=C\theta_2(L_3C\theta_3+L_2)-L_3S\theta_2S\theta_3$$

Y la suma de los cuadrados ...:

$$C\theta_1P_y-S\theta_1P_x=L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2$$
$$C\theta_1P_x+S\theta_1P_y-L_1=L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2$$
$$C\theta_1P_x+S\theta_1P_y=L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2+L_1$$

$$(C\theta_1P_y-S\theta_1P_x)^2+(C\theta_1P_x+S\theta_1P_y)^2=(L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2)^2+(L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2+L_1)^2$$

$$(C\theta_1P_y)^2-2(C\theta_1P_y)(S\theta_1P_x)+(S\theta_1P_x)^2+(C\theta_1P_x)^2+2(C\theta_1P_x)(S\theta_1P_y)+(S\theta_1P_y)^2 \quad =$$
$$(L_3S(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3S(\theta_2+\theta_3))(L_2S\theta_2)+(L_2S\theta_2)^2...$$
$$...+(L_3C(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3C(\theta_2+\theta_3))(L_2C\theta_2+L_1)+(L_2C\theta_2+L_1)^2$$

$$(P_y)^2((C\theta_1)^2(S\theta_1)^2)-2(C\theta_1P_y)(S\theta_1P_x)+(P_x)^2((S\theta_1)^2+(C\theta_1)^2)+2(C\theta_1P_x)(S\theta_1P_y) \quad =$$
$$(L_3S(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3S(\theta_2+\theta_3))(L_2S\theta_2)+(L_2S\theta_2)^2...$$
$$...+(L_3C(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3C(\theta_2+\theta_3))(L_2C\theta_2+L_1)+(L_2C\theta_2+L_1)^2$$

$$(P_y)^2+(P_x)^2 \quad =$$
$$(L_3S(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3S(\theta_2+\theta_3))(L_2S\theta_2)+(L_2S\theta_2)^2...$$
$$...+(L_3C(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3C(\theta_2+\theta_3))(L_2C\theta_2+L_1)+(L_2C\theta_2)^2+2(L_2C\theta_2)(L_1)+(L_1)^2$$

$$(P_y)^2+(P_x)^2=(L_3 S(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3 S(\theta_2+\theta_3))(L_2 S\theta_2)+(L_2 S\theta_2)^2 ...$$
$$...+(L_3 C(\theta_2+\theta_3))^2+2 L_2 L_3 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_2+2 L_3 C(\theta_2+\theta_3) L_1+(L_2 C\theta_2)^2+2 L_1 L_2 C\theta_2+(L_1)^2$$

$$(P_y)^2+(P_x)^2=(L_3)^2((S(\theta_2+\theta_3))^2+(C(\theta_2+\theta_3))^2)+2(L_3 S(\theta_2+\theta_3))(L_2 S\theta_2)+(L_2)^2((S\theta_2)^2+(C\theta_2)^2) ...$$
$$...+2 L_2 L_3 C(\theta_2+\theta_3) C\theta_2+2 L_3 C(\theta_2+\theta_3) L_1+2 L_1 L_2 C\theta_2+(L_1)^2$$

$$(P_y)^2+(P_x)^2=(L_3)^2+2 L_2 L_3 C(\theta_2+\theta_3-\theta_2)+(L_2)^2 ...$$
$$...+2 L_3 C(\theta_2+\theta_3) L_1+2 L_1 L_2 C\theta_2+(L_1)^2$$

$$(P_y)^2+(P_x)^2-(L_1)^2-(L_2)^2-(L_3)^2=2 L_2 L_3 C\theta_3+2 L_1 L_3 C(\theta_2+\theta_3)+2 L_1 L_2 C\theta_2 \quad =$$
$$(P_y)^2+(P_x)^2-(L_1)^2-(L_2)^2-(L_3)^2=2 L_2 L_3 C\theta_3+2 L_1 L_3 (C\theta_2 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_3)+2 L_1 L_2 C\theta_2 \quad =$$
$$(P_y)^2+(P_x)^2-(L_1)^2-(L_2)^2-(L_3)^2=2 L_2 L_3 C\theta_3+2 L_1 L_3 C\theta_2 C\theta_3-2 L_1 L_3 S\theta_2 S\theta_3+2 L_1 L_2 C\theta_2$$
$$(P_y)^2+(P_x)^2-(L_1)^2-(L_2)^2-(L_3)^2=2 L_2 L_3 C\theta_3+2 L_1 L_3 C\theta_2 C\theta_3-2 L_1 L_3 S\theta_2 S\theta_3+2 L_1 L_2 C\theta_2$$

No parece tener solución.

1.5.2.1.6 Intento 6 - Suma de los cuadrados del punto en la segunda matriz inversa (sin solución)

Segunda matriz inversa y uso del punto

Se puede intentar usar la segunda inversa mediante la igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3$$

Sustituyendo las matrices (con la matriz T sin simplificar y simplificada), quedará:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3(C\theta_1 C\theta_2-S\theta_1 S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1 S\theta_2-C\theta_2 S\theta_1) & -C\theta_3(C\theta_1 S\theta_2+C\theta_2 S\theta_1)-S\theta_3(C\theta_1 C\theta_2-S\theta_1 S\theta_2) & 0 & ... \\ C\theta_3(C\theta_1 S\theta_2+C\theta_2 S\theta_1)+S\theta_3(C\theta_1 C\theta_2-S\theta_1 S\theta_2) & C\theta_3(C\theta_1 C\theta_2-S\theta_1 S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1 S\theta_2+C\theta_2 S\theta_1) & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} ... & ... & ... & L_1 C\theta_1-L_3 C\theta_3(C\theta_1 S\theta_2+C\theta_2 S\theta_1)+L_3 C\theta_3(C\theta_1 C\theta_2-S\theta_1 S\theta_2)+L_2 C\theta_1 C\theta_2-L_2 C\theta_2 S\theta_1 \\ ... & ... & ... & L_1 C\theta_1+L_3 C\theta_3(C\theta_1 S\theta_2+C\theta_2 S\theta_1)+L_3 C\theta_3(C\theta_1 C\theta_2-S\theta_1 S\theta_2)+L_2 C\theta_1 C\theta_2+L_2 C\theta_2 S\theta_1 \\ ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & S(\theta_1+\theta_2) & 0 & -L_2-L_1C\theta_2 \\ -S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & P_x \\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$\begin{aligned} &f_{21}=C(\theta_1+\theta_2)x+S(\theta_1+\theta_2)y-(L_2+L_1C\theta_2)t \\ &f_{22}=-S(\theta_1+\theta_2)x+C(\theta_1+\theta_2)y+L_1S\theta_2t \\ &f_{23}=s \\ &... \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos y matrices se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21}(n)=C(\theta_1+\theta_2)x+S(\theta_1+\theta_2)y-(L_2+L_1C\theta_2)t \;&= \\ (C(\theta_1+\theta_2))(C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))... \\ ...+(S(\theta_1+\theta_2))(S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))=C\theta_3 \\ f_{22}(n)=-S(\theta_1+\theta_2)x+C(\theta_1+\theta_2)y+L_1S\theta_2t \;&= \\ (-S(\theta_1+\theta_2))(C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))... \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad ...+\left(C(\theta_1+\theta_2)\right)\left(S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\right)=S\theta_3\\
&f_{23}(n)=s=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{21}(o)=C(\theta_1+\theta_2)x+S(\theta_1+\theta_2)y-(L_2+L_1C\theta_2)t \;=\\
&\qquad (C(\theta_1+\theta_2))(-S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))...\\
&\qquad ...+(S(\theta_1+\theta_2))(C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))=-S\theta_3\\
&f_{22}(o)=-S(\theta_1+\theta_2)x+C(\theta_1+\theta_2)y+L_1S\theta_2t \;=\\
&\qquad (-S(\theta_1+\theta_2))(-S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))...\\
&\qquad ...+(C(\theta_1+\theta_2))(C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))=C\theta_3\\
&f_{23}(o)=s=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{21}(a)=C(\theta_1+\theta_2)x+S(\theta_1+\theta_2)y-(L_2+L_1C\theta_2)t=0=0\\
&f_{22}(a)=-S(\theta_1+\theta_2)x+C(\theta_1+\theta_2)y+L_1S\theta_2t=0=0\\
&f_{23}(a)=s=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{21}(p)=C(\theta_1+\theta_2)x+S(\theta_1+\theta_2)y-(L_2+L_1C\theta_2)t \;=\\
&\qquad (C(\theta_1+\theta_2))(L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))...\\
&\qquad ...+(S(\theta_1+\theta_2))(L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))... \;=\\
&...-(L_2+L_1C\theta_2)(-C\theta_2S\theta_3-C\theta_3S\theta_2)=L_3C\theta_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{22}(p)=-S(\theta_1+\theta_2)x+C(\theta_1+\theta_2)y+L_1S\theta_2t \;=\\
&\qquad (-S(\theta_1+\theta_2))(L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3))...\\
&\qquad ...+(C(\theta_1+\theta_2))(L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3))=L_3S\theta_3\\
&f_{23}(p)=s=0
\end{aligned}
$$

En este caso, se utiliza sólo la última columna, relativa a P(x,y,z) y con las dos matrices inversas ($f_{21}(p), f_{22}(p), f_{23}(p)$):

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x\\
. & . & . & P_y\\
. & . & . & P_z\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$
({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=
\begin{pmatrix}
C(\theta_1+\theta_2) & S(\theta_1+\theta_2) & 0 & -L_2-L_1C\theta_2\\
-S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_1S\theta_2\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x\\
. & . & . & P_y\\
. & . & . & P_z\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
$$

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1+L_3C(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\\
. & . & . & L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1+L_3S(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\\
. & . & . & 0\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
. & . & . & f_{21}(p)\\
. & . & . & f_{22}(p)\\
. & . & . & f_{23}(p)\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
$$

$$ {}^{2}A_{3} = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ \begin{aligned} & f_{21}(p) = C(\theta_1+\theta_2)P_x + S(\theta_1+\theta_2)P_y - (L_2 + L_1 C\theta_2) = L_3 C\theta_3 \\ & f_{22}(p) = -S(\theta_1+\theta_2)P_x + C(\theta_1+\theta_2)P_y + L_1 S\theta_2 = L_3 S\theta_3 \\ & f_{23}(p) = s = 0 \\ & \ldots \end{aligned} $$

Desde las dos primeras ecuaciones:

$$ \begin{aligned} & f_{21}(p) = C(\theta_1+\theta_2)P_x + S(\theta_1+\theta_2)P_y - (L_2 + L_1 C\theta_2) = L_3 C\theta_3 \\ & f_{22}(p) = -S(\theta_1+\theta_2)P_x + C(\theta_1+\theta_2)P_y + L_1 S\theta_2 = L_3 S\theta_3 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} & C(\theta_1+\theta_2)P_x + S(\theta_1+\theta_2)P_y - (L_2 + L_1 C\theta_2) = L_3 C\theta_3 \\ & -S(\theta_1+\theta_2)P_x + C(\theta_1+\theta_2)P_y + L_1 S\theta_2 = L_3 S\theta_3 \end{aligned} $$

Se podría elevar al cuadrado ambas ecuaciones:

$$ \begin{aligned} & C(\theta_1+\theta_2)P_x + S(\theta_1+\theta_2)P_y - (L_2 + L_1 C\theta_2) = L_3 C\theta_3 \\ & (C(\theta_1+\theta_2)P_x + S(\theta_1+\theta_2)P_y - (L_2 + L_1 C\theta_2))^2 = (L_3 C\theta_3)^2 \\ & (C(\theta_1+\theta_2)P_x + S(\theta_1+\theta_2)P_y)^2 - 2(C(\theta_1+\theta_2)P_x + S(\theta_1+\theta_2)P_y)(L_2 + L_1 C\theta_2) + (L_2 + L_1 C\theta_2)^2 \ldots \\ & \ldots = (L_3 C\theta_3)^2 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} & (C(\theta_1+\theta_2)P_x)^2 + 2(C(\theta_1+\theta_2)P_x)(S(\theta_1+\theta_2)P_y) + (S(\theta_1+\theta_2)P_y)^2 \ldots \\ & \ldots - 2(C(\theta_1+\theta_2)P_x + S(\theta_1+\theta_2)P_y)(L_2 + L_1 C\theta_2) + (L_2)^2 + 2(L_2)(L_1 C\theta_2) + (L_1 C\theta_2)^2 = (L_3 C\theta_3)^2 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} & (C(\theta_1+\theta_2)P_x)^2 + 2P_x P_y C(\theta_1+\theta_2)S(\theta_1+\theta_2) + (S(\theta_1+\theta_2)P_y)^2 \ldots \\ & \ldots - 2P_x L_2 C(\theta_1+\theta_2) - 2P_x L_1 C(\theta_1+\theta_2)C\theta_2 - 2P_y L_2 S(\theta_1+\theta_2) - 2P_y L_1 S(\theta_1+\theta_2)C\theta_2 \ldots \\ & \ldots + (L_2)^2 + 2L_1 L_2 C\theta_2 + (L_1 C\theta_2)^2 = (L_3 C\theta_3)^2 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} & -S(\theta_1+\theta_2)P_x + C(\theta_1+\theta_2)P_y + L_1 S\theta_2 = L_3 S\theta_3 \\ & (C(\theta_1+\theta_2)P_y + L_1 S\theta_2 - S(\theta_1+\theta_2)P_x)^2 = (L_3 S\theta_3)^2 \\ & (C(\theta_1+\theta_2)P_y)^2 + 2(C(\theta_1+\theta_2)P_y)(L_1 S\theta_2) + (L_1 S\theta_2)^2 - 2(C(\theta_1+\theta_2)P_y + L_1 S\theta_2)(S(\theta_1+\theta_2)P_x) \ldots \\ & \ldots + (S(\theta_1+\theta_2)P_x)^2 = (L_3 S\theta_3)^2 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} & (C(\theta_1+\theta_2)P_y)^2 + 2P_y L_1 C(\theta_1+\theta_2)S\theta_2 + (L_1 S\theta_2)^2 - 2P_x P_y C(\theta_1+\theta_2)S(\theta_1+\theta_2) \ldots \\ & \ldots - 2L_1 P_x S\theta_2 S(\theta_1+\theta_2) + (S(\theta_1+\theta_2)P_x)^2 = (L_3 S\theta_3)^2 \end{aligned} $$

Y ahora se suman:

$$ \begin{aligned} & (C(\theta_1+\theta_2)P_x)^2 + 2P_x P_y C(\theta_1+\theta_2)S(\theta_1+\theta_2) + (S(\theta_1+\theta_2)P_y)^2 \ldots \\ & \ldots - 2P_x L_2 C(\theta_1+\theta_2) - 2P_x L_1 C(\theta_1+\theta_2)C\theta_2 - 2P_y L_2 S(\theta_1+\theta_2) - 2P_y L_1 S(\theta_1+\theta_2)C\theta_2 \ldots \\ & \ldots + (L_2)^2 + 2L_1 L_2 C\theta_2 + (L_1 C\theta_2)^2 = (L_3 C\theta_3)^2 \end{aligned} $$

$$(C(\theta_1+\theta_2)P_y)^2+2P_yL_1C(\theta_1+\theta_2)S\theta_2+(L_1S\theta_2)^2-2P_xP_yC(\theta_1+\theta_2)S(\theta_1+\theta_2)\ldots$$
$$\ldots-2L_1P_xS\theta_2S(\theta_1+\theta_2)+(S(\theta_1+\theta_2)P_x)^2=(L_3S\theta_3)^2$$

$$L_3^2((S\theta_3)^2+(C\theta_3)^2)=(P_x)^2((C(\theta_1+\theta_2))^2+(C(\theta_1+\theta_2))^2)+(P_y)^2((S(\theta_1+\theta_2))^2+(C(\theta_1+\theta_2))^2)\ldots$$
$$\ldots-2P_xL_2C(\theta_1+\theta_2)-2P_xL_1C(\theta_1+\theta_2-\theta_2)-(2P_yL_1S(\theta_1+\theta_2-\theta_2))+(L_1)^2((S\theta_2)^2+(C\theta_2)^2)\ldots$$
$$\ldots-2P_yL_2S(\theta_1+\theta_2)+(L_2)^2+2L_1L_2C\theta_2$$

$$L_3^2=(P_x)^2+(P_y)^2+(L_1)^2+(L_2)^2-2P_xL_2C(\theta_1+\theta_2)-2P_xL_1C(\theta_1)-(2P_yL_1S(\theta_1))$$
$$\ldots-2P_yL_2S(\theta_1+\theta_2)+2L_1L_2C\theta_2$$

$$L_3^2-(P_x)^2-(P_y)^2-(L_1)^2-(L_2)^2=-2P_xL_2C(\theta_1+\theta_2)-2P_xL_1C(\theta_1)-(2P_yL_1S(\theta_1))$$
$$\ldots-2P_yL_2S(\theta_1+\theta_2)+2L_1L_2C\theta_2$$

No parece tener solución.

1.5.2.1.7 Intento 7 – A través del cálculo derivado del modelo SCARA – Solución iterativa de un paso (Solución Geométrica)

En este caso el esquema a resolver se encuentra en la siguiente imagen. Y en ella se ve un doble esquema del modelo SCARA.

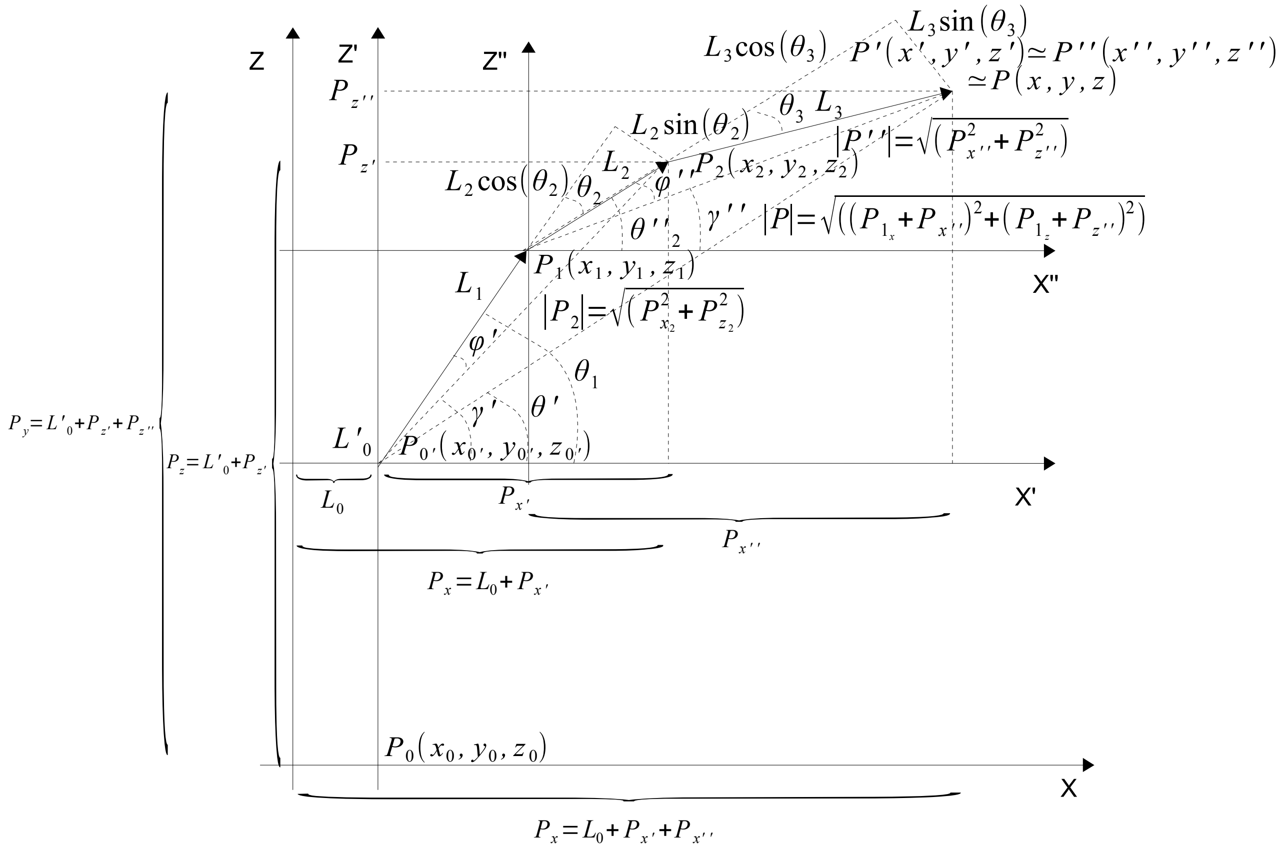


Ilustración 14: Esquema asociado a la solución a aplicar al Ejemplo 4-2, con motores paralelos entre sí

En este doble esquema del modelo SCARA se va a aplicar el mismo modelo de solución ya utilizado con anterioridad basado en la teoría del coseno, resultando la siguientes igualdades.

Para la primera parte del esquema ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$ donde $\theta_3 = Cte$ al no tener componentes x, y):

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{P_{x'}^2 + P_{y'}^2}\right)^2 = (L_1 + L_2\cos(\theta_2))^2 + (L_2\sin(\theta_2))^2 \\
&P_{x'}^2 + P_{y'}^2 = L_1^2 + L_2^2(\cos(\theta_2))^2 + 2L_1L_2\cos(\theta_2) + L_2^2(\sin(\theta_2))^2 \\
&P_{x'}^2 + P_{y'}^2 = L_1^2 + L_2^2((\cos(\theta_2))^2 + (\sin(\theta_2))^2) + 2L_1L_2\cos(\theta_2) \\
&\cos(\theta_2) = (P_{x'}^2 + P_{y'}^2 - L_1^2 - L_2^2)/2L_1L_2
\end{aligned}$$

De donde se despeja:

$$\theta_2 = \arccos((P_{x'}^2 + P_{y'}^2 - L_1^2 - L_2^2)/2L_1L_2)$$

Y para el último ángulo:

$$\begin{aligned}
&\varphi' = \arctan(L_2\,sen(\theta'_2)/(L_1 + L_2\cos(\theta'_2))) = atan2(L_2\,sen(\theta'_2), L_1 + L_2\cos(\theta'_2)) \\
&\gamma' = \theta'_2 + \varphi' = \arctan(P_{y'}/P_{x'}) = atan2(P_{y'}, P_{x'}) \\
&\theta'_2 = \gamma' - \varphi' = \arctan(P_{y'}/P_{x'}) - \arctan(L_2\sin(\theta'_2)/(L_1 + L_2\cos(\theta'_2))) = \\
&\qquad atan2(P_{y'}, P_{x'}) - atan2(L_2\,sen(\theta'_2), L_1 + L_2\cos(\theta'_2))
\end{aligned}$$

Y para la segunda parte del esquema ($\theta_1, \theta''_2, \theta_3$ donde $\theta_1 = Cte$ al no tener componentes x,y):

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{P_{x''}^2 + P_{y''}^2}\right)^2 = (L_2 + L_3\cos(\theta_3))^2 + (L_3\sin(\theta_3))^2 \\
&P_{x''}^2 + P_{y''}^2 = L_2^2 + L_3^2(\cos(\theta_3))^2 + 2L_2L_3\cos(\theta_3) + L_3^2(\sin(\theta_3))^2 \\
&P_{x''}^2 + P_{y''}^2 = L_2^2 + L_3^2((\cos(\theta_3))^2 + (\sin(\theta_3))^2) + 2L_2L_3\cos(\theta_3) \\
&\cos(\theta_3) = (P_{x''}^2 + P_{y''}^2 - L_2^2 - L_3^2)/2L_2L_3
\end{aligned}$$

De donde se despeja:

$$\theta_3 = \arccos((P_{x''}^2 + P_{y''}^2 - L_2^2 - L_3^2)/2L_2L_3)$$

Y para el último ángulo:

$$\begin{aligned}
&\varphi' = \arctan(L_2\,sen(\theta'_2)/(L_1 + L_2\cos(\theta'_2))) = atan2(L_2\,sen(\theta'_2), L_1 + L_2\cos(\theta'_2)) \\
&\gamma' = \theta'_2 + \varphi' = \arctan(P_{y''}/P_{x''}) = atan2(P_{x''}, P_{y''}) \\
&\theta'_2 = \gamma' - \varphi' = \arctan(P_{y'}/P_{x'}) - \arctan(L_2\sin(\theta'_2)/(L_1 + L_2\cos(\theta'_2))) = \\
&\qquad atan2(P_{y'}, P_{x'}) - atan2(L_2\,sen(\theta'_2), L_1 + L_2\cos(\theta'_2))
\end{aligned}$$

Además se dan una serie de igualdades entre los dos esquemas de pares, y simplificaciones:

$$\begin{aligned}
&|\theta_1| = |\gamma'| + |\varphi'| \\
&|\theta''_2| = |\gamma''| + |\varphi''| \\
&|P_2| = \sqrt{(P_{x_2}^2 + P_{y_2}^2)} \\
&|P| = \sqrt{((P_1 + P_{x''})^2 + (P_1 + P_{z''})^2)}
\end{aligned}$$

$$\gamma'' = \arctan(P_{y''}/P_{x''}) = atan2(P_{y''}, P_{x''})$$
$$\theta' = \arctan((P_1 + P_{z''})/(P_1 + P_{x''})) = atan2((P_1 + P_{z''}), (P_1 + P_{x''}))$$

Por tanto, el problema queda reducido a una secuencia de ecuaciones en función de los puntos P, P' y P'' (Punto final de destino en relación a los diferentes Orígenes de Coordenadas del conjunto completo, primer motor y segundo motor). Y esto representa en sí mismo un nuevo problema, dado que los puntos aquí definidos son puntos respecto a los Orígenes de Coordenadas de los elementos anteriores en el brazo, y aún no han sido calculados.
Por ejemplo, en la tercera articulación respecto a la segunda, no se conoce el punto de partida, y en la segunda respecto a la primera, no se conoce el punto final. Luego, estas ecuaciones son linealmente dependientes, como ya se ha visto en el cálculo de cinemática inversa en los intentos de resolución anteriores.

La solución, en primera aproximación, podría ser que, conocido el último Origen de Coordenadas situado en el punto final, se tomara el punto de la segunda articulación (P_1) de tal forma que el ángulo θ_1 , sea proporcional al ángulo del punto final respecto al Origen de Coordenadas base (θ' - $O-XYZ$), como lo es la relación de proporcionalidad de la suma de los segmentos ($L_1 + L_2 + L_3$) respecto a la distancia del punto final de destino respecto al Origen de Coordenadas de la base, mediante una igualdad del tipo:

$$|\theta_1| = ((L_1 + L_2 + L_3)/|P|)|\theta'|$$

Así, si la longitud de los segmentos es muy superior a la distancia del punto al Origen de Coordenadas de la base, el ángulo correspondiente al primer segmento (θ_1) sería mucho más amplio que si esa distancia fuera similar a la suma de las longitudes de los segmentos.
Otra posibilidad es que fuera necesario predefinir un ángulo, más o menos pronunciado, para evitar algún obstáculo, por ejemplo, en el caso de la última articulación, en cuyo caso, se optaría por realizar ese cálculo con algún coeficiente para aumentar un ángulo en detrimento de otros;

$$|\theta_3| = (k(L_1 + L_2 + L_3)/|P|)|\theta'| \quad \text{(Con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

Y una mejora de esta solución sería:

$$L' = L_1 + L_2 + L_3$$
$$\theta = |\arccos(P_{xy}/L')|$$
$$\theta_3 = k(L_3/L')\theta_{O'}$$

Eso haría que, con un modelo de “codo arriba”, los diferentes ángulos tengan una cierta proporcionalidad y sigan siendo todos, además, de tipo “codo arriba”.
Por otra parte, este modelo se acerca a la posibilidad de utilizar modelos iterativos de corrección de errores, y sin embargo, no se necesita la corrección, dado que la primera aproximación ya permite realizar un cálculo de ángulos que permitan alcanzar el punto deseado con un cierto equilibrio entre los diferentes ángulos.
Además, este sistema permitiría tomar la decisión de si se desea acercarse al punto desde una posición más elevada, o no, en el primer segmento o en el segundo segmento, que podría servir para evitar obstáculos, dependiendo del entorno de uso del brazo.
Puede verse un análisis sobre las posibles soluciones en "Robotics 1 - Prof. De Luca Lecture 18 (7 Nov 2014) – Inverse kinematics" [WWWyoutubeDoc91] (Tiempo= 49:32).
Y en último caso, esta solución podría mejorarse en un proceso iterativo o dejarse sin mejora más

allá de una iteración de un único paso, siempre y cuando se conozca el entorno de trabajo, y se ajuste a las necesidades.

1.5.2.1.8 Intento 8 – División del problema en partes simples (pares de articulaciones)

En este caso se intentará analizar los problemas por separado y mediante análisis basado en álgebra matricial. De esta forma, se inicia la resolución del problema independizando las dos últimas articulaciones de la primera. Así, se va a independizar todo el tratamiento de matrices para resolver el problema simple representado a continuación.

1.5.2.1.8.1 Par de motores 2-3

Se empezará por analizar el segundo y tercer motor, dejando el primer motor para una aproximación posterior.

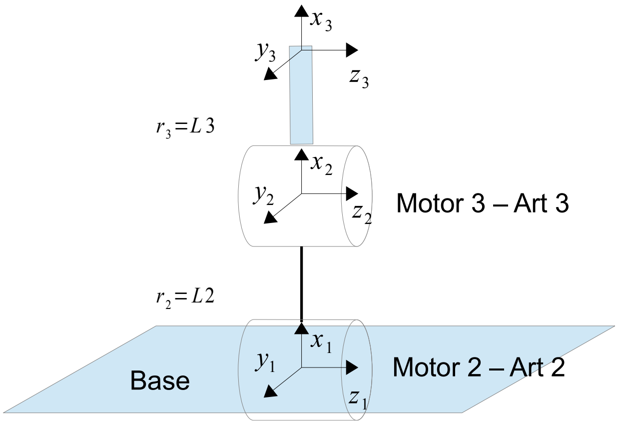


Ilustración 15: Brazo restante tras separar la articulación ya resuelta analíticamente

De esta forma, el Origen de Coordenadas de este segundo motor (P_1) se considera en la Base virtual situada en el mismo segundo motor del problema completo ($O-XYZ$). Así, la matriz correspondiente al primer motor determina cómo llegar a ese segundo motor a través del desplazamiento de una distancia r_1 sobre el plano de movimiento compuestos por los ejes Y, Z :

$$^0A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

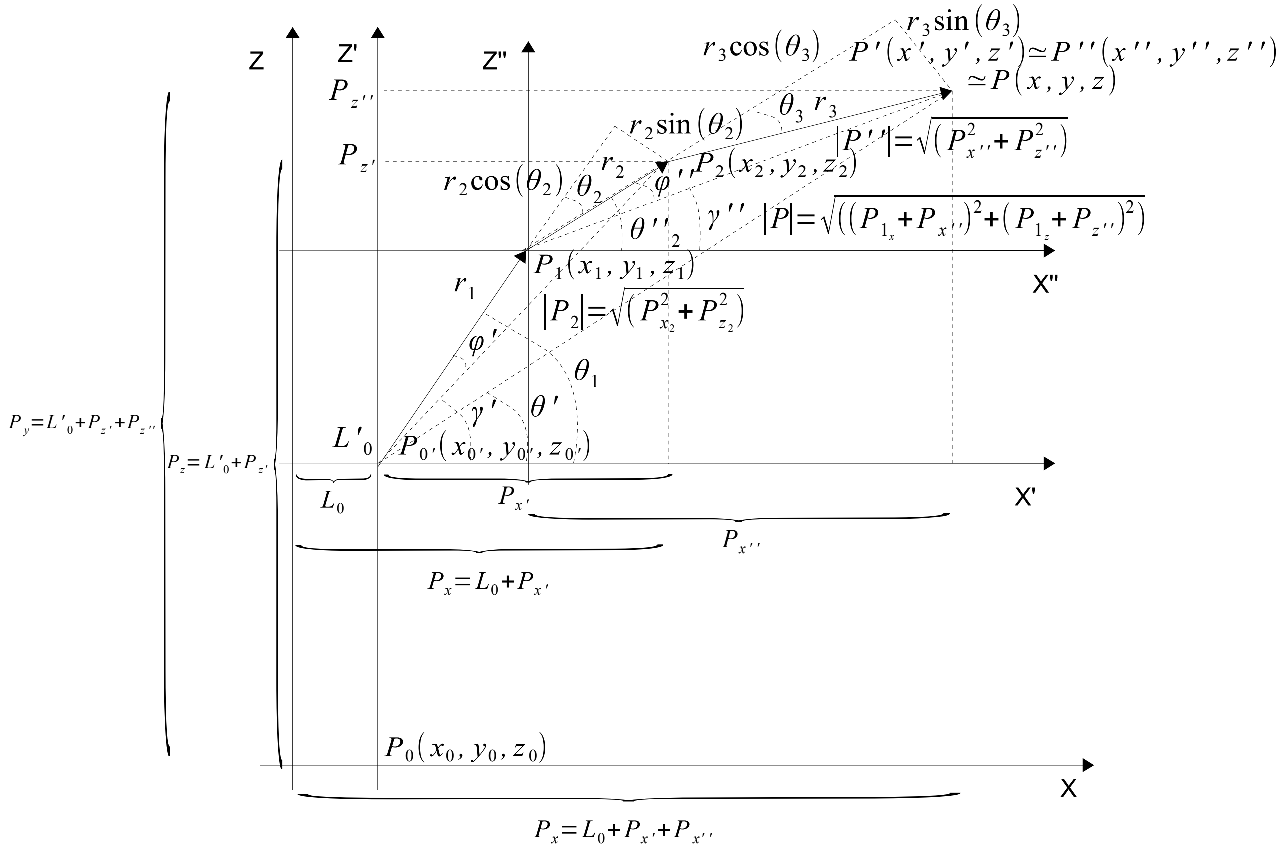


Ilustración 16: Esquema asociado a la solución a aplicar al Ejemplo 4-2, con motores paralelos entre sí

Por tanto, la componente z' del punto P' a alcanzar tendrá que disminuirse en la cantidad correspondiente a esa diferencia de altura entre las Bases real y virtual ($r_1 S\theta_1$). Y lo mismo pasa en cuanto al desplazamiento horizontal sobre el plano de movimiento ($r_1 C\theta_1$).
De esta forma se simplifica en cálculo y las matrices resultantes.

Para resolver el problema, se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, se comenzará por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & 105 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & 290 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L_2 & 0 \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & L_3 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^{1}A_3={}^{1}A_2\,{}^{2}A_3$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^{1}A_{3}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & r_3 C(\theta_2+\theta_3)+r_2 C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & r_3 S(\theta_2+\theta_3)+r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ($(0_{u0'},0_{v0'},0_{w0'})$ - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P'(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P'(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_3 C(\theta_2+\theta_3)+L_2 C\theta_2 \\ L_3 S(\theta_2+\theta_3)+L_2 S\theta_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto P' sería:

$$P'(x,y,z)=(P'_x\ ,\ P'_y\ ,\ P'_z)=(L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2\ ,\ L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2\ ,\ 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^1A_2)^{-1}T={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 y θ_3 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^1A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_x \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\qquad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_2=L_2$ y $r_3=L_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$[{}^1A_2]^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2 \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_2+\theta_3) & 0 & P'_x \\ S(\theta_2+\theta_3) & C(\theta_2+\theta_3) & 0 & P'_y \\ 0 & 0 & 1 & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerarán las expresiones resultantes de tomar la equivalencia entre $P'^2_x+P'^2_y$ y sus correspondientes elementos de la matriz T :

$$P'^2_x+P'^2_y=(L_3C(\theta_2+\theta_3)+L_2C\theta_2)^2+(L_3S(\theta_2+\theta_3)+L_2S\theta_2)^2 \; =$$
$$(L_3C(\theta_2+\theta_3))^2+2(L_3C(\theta_2+\theta_3))(L_2C\theta_2)+(L_2C\theta_2)^2+(L_3S(\theta_2+\theta_3))^2\ldots$$
$$\ldots+2(L_3S(\theta_2+\theta_3))(L_2S\theta_2)+(L_2S\theta_2)^2 \; =$$
$$L_3^2((C(\theta_2+\theta_3))^2+(S(\theta_2+\theta_3))^2)+2(L_3C(\theta_2+\theta_3))(L_2C\theta_2)+L_2((C\theta_2)^2+(S\theta_2)^2)+\ldots$$
$$\ldots+2(L_3S(\theta_2+\theta_3))(L_2S\theta_2) \; =$$
$$L_3^2+L_2^2+2(L_3C(\theta_2+\theta_3))(L_2C\theta_2)+2(L_3S(\theta_2+\theta_3))(L_2S\theta_2) \; =$$
$$L_3^2+L_2^2+2L_3L_2(C(\theta_2+\theta_3)C\theta_2+S(\theta_2+\theta_3)S\theta_2) \; =$$
$$L_3^2+L_2^2+2L_3L_2C(\theta_2+\theta_3-\theta_2) \; =$$
$$L_3^2+L_2^2+2L_3L_2C\theta_3=P'^2_x+P'^2_y$$

$$\theta_3=\arccos((P'^2_x+P'^2_y-L_3^2-L_2^2)/2L_3L_2) \quad *$$

Si ahora se toma la primera fila de la inversa $[{}^1A_2]^{-1}$ y se opera con la cuarta columna de T , y la segunda fila de $[{}^1A_2]^{-1}$, también con la cuarta columna de T , se obtiene:

$$-S\theta_2P'_x+C\theta_2P'_y=L_3S\theta_3 \Leftrightarrow P'_yC\theta_2-P'_xS\theta_2=L_3S\theta_3$$
$$C\theta_2P'_x+S\theta_2P'_y-L_2=L_3C\theta_3 \Leftrightarrow P'_yS\theta_2+P'_xC\theta_2=L_2+L_3C\theta_3$$

Y con la razón $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ y $a\sin\theta+b\cos\theta=d \Leftrightarrow \theta=atan2(d,c)-atan2(b,a)$:

$$\theta_2=atan2(L_2+L_3C\theta_3,L_3S\theta_3)-atan2(P'_x,P'_y)$$

Luego, ya se han obtenido las tres igualdades correspondientes a los dos ángulos de las 3 articulaciones:

$\theta_1=Cte$ (Componente predeterminada con movimiento sólo en el plano X'Z')
$\theta_3=\arccos((P'^2_x+P'^2_y-L_3^2-L_2^2)/2L_3L_2)$
$\theta_2=atan2(L_2+L_3C\theta_3,L_3S\theta_3)-atan2(P'_x,P'_y)$

Sin embargo, hay que tener en cuenta la diferencia de altura y de desplazamiento horizontal sobre el plano de movimiento sobre los que se han obtenido las ecuaciones correspondientes a θ_2 y θ_3 , por lo que, a la hora de implementar el código deberá resolverse esa diferencia.
Por otra parte, también hay que considerar que el punto P' del problema simplificado es diferente al punto P en el problema completo. De hecho las componentes x', y' consideradas para el análisis son, en realidad:

$$x'=x-L_1 C\theta_1$$
$$y'=z-L_1 S\theta_1$$

El problema en este caso es plantear el ángulo θ_1 ya que de este ángulo dependerá el resultado del anterior cálculo de los ángulos θ_2 y θ_3 .
Y de igual forma a como se determinó en el "Intento 7" del "Caso 4-2", el ángulo deberá plantearse a través de alguna asignación razonada.
La solución, en primera aproximación, podría ser que, conocido del último Origen de Coordenadas situado en el punto final ($O'-UVW$), se tomara el punto de la segunda articulación (P_1) de tal forma que el ángulo θ_1 , sea proporcional al ángulo del punto final respecto al Origen de Coordenadas base (θ' - $O-XYZ$), como lo es la relación de proporcionalidad de la suma de los segmentos ($L_1+L_2+L_3$) respecto a la distancia del punto final de destino P respecto al Origen de Coordenadas de la base ($O-XYZ$), mediante una igualdad del tipo (regla de tres):

$$|\theta_1|=((L_1+L_2+L_3)/|P|)|\theta'| \text{ o}$$
$$|\theta_1|=(k(L_1+L_2+L_3)/|P|)|\theta'| \text{ (con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

Y una mejora de esta solución sería:

$$L'=L_1+L_2+L_3$$
$$\theta=|\arccos(P_{xy}/L')|$$
$$\theta_3=k(L_3/L')\theta_{O'}$$

Así, si la longitud de los segmentos es muy superior a la distancia del punto al Origen de Coordenadas de la base ($O-XYZ$), el ángulo correspondiente al primer segmento (θ_1) sería mucho más amplio que si esa distancia fuera similar a la suma de las longitudes de los segmentos.

1.5.2.1.8.2 Par de motores 1-2

Ahora se va a analizar el primer y segundo motor, dejando el tercer motor para una aproximación posterior.

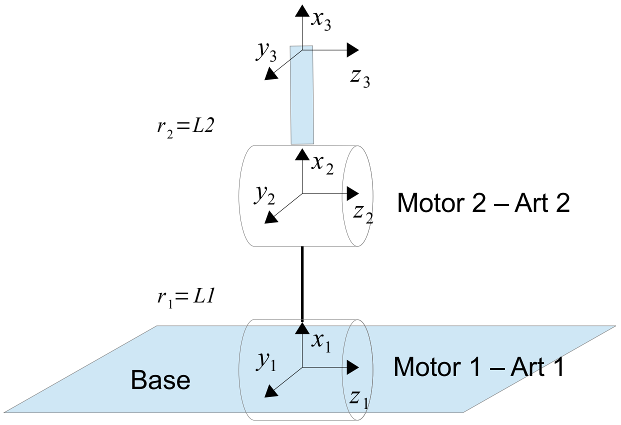


Ilustración 17: Brazo restante tras separar la articulación ya resuelta analíticamente

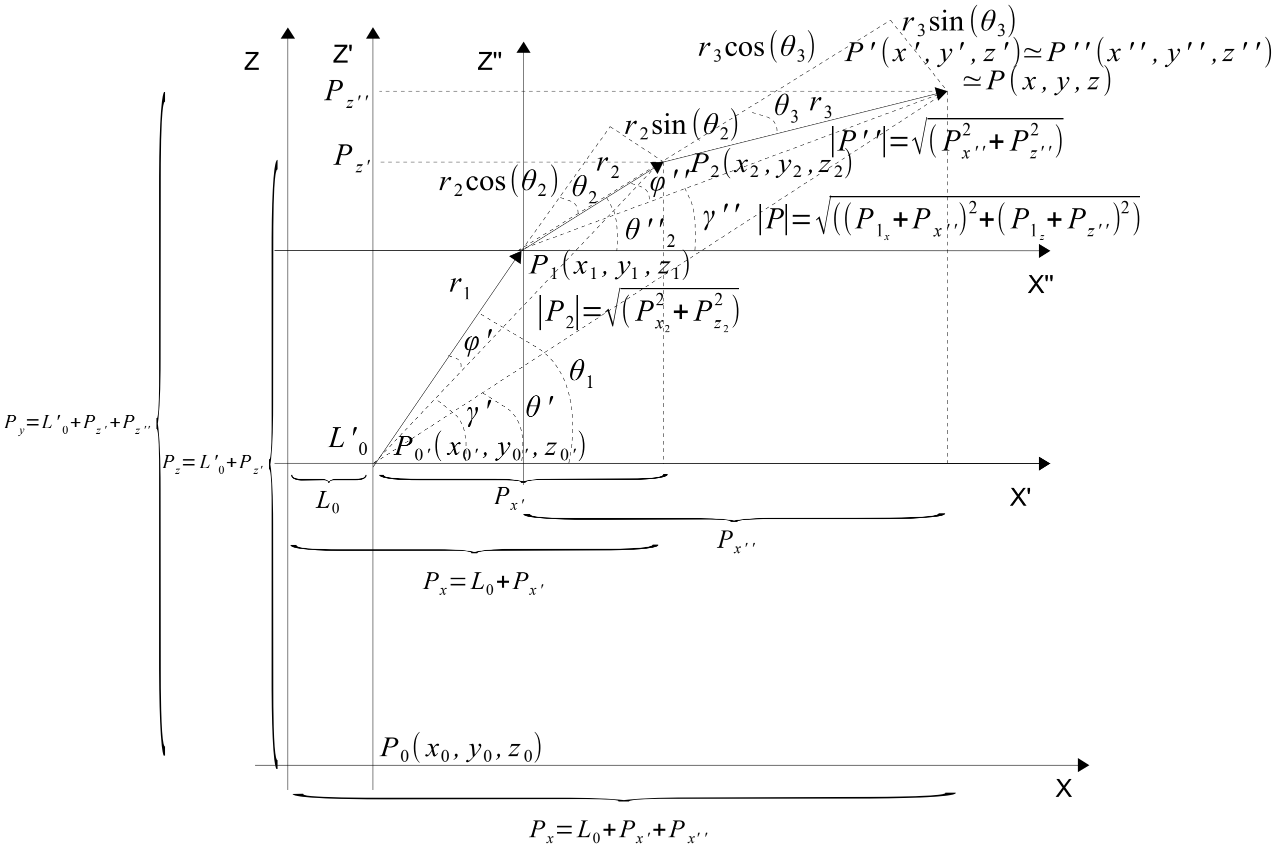


Ilustración 18: Esquema asociado a la solución a aplicar al Ejemplo 4-2, con motores paralelos entre sí

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, se comenzará por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.

Para ello, se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & r_1 & 0 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & r_2 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & L_1 & 0 \\ 1-2 & \theta_2 & 0 & L_2 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^0A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & r_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & r_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema

$O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^{1}A_3={}^{1}A_2\,{}^{2}A_3$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^{0}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & r_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & r_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & -S(\theta_1+\theta_2) & 0 & r_2C(\theta_1+\theta_2)+r_1C\theta_1 \\ S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & 0 & r_2S(\theta_1+\theta_2)+r_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_1=L_1$ y $r_2=L_2$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & -S(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1 \\ S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto $P_2(x_2,y_2,z_2)$ correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base L'_0 ($O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_2(x_2,y_2,z_2)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & -S(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1 \\ S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1 \\ L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto $P_2(x_2,y_2,z_2)$ sería:

$$P_2(x_2,y_2,z_2)=(P_{2_x}\ ,\ P_{2_y}\ ,\ P_{2_z})=(L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1\ ,\ L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1\ ,\ 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^1A_2)^{-1}T={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 y θ_2 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -r_1 \\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^1A_2=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & -S(\theta_1+\theta_2) & 0 & r_2C(\theta_1+\theta_2)+r_1C\theta_1 \\ S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & 0 & r_2S(\theta_1+\theta_2)+r_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & r_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_1=L_1$ y $r_2=L_2$, se llega a la siguiente igualdad:

$$[{}^0A_1]^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & -L_1\\ -S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & -S(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1\\ S(\theta_1+\theta_2) & C(\theta_1+\theta_2) & 0 & L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2C\theta_2\\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2S\theta_2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora se considerarán las expresiones resultantes de tomar la equivalencia entre $P'^2_x+P'^2_y$ y sus correspondientes elementos de la matriz T :

$$\begin{aligned}
&P^2_{2_x}+P^2_{2_y}=(L_2C(\theta_1+\theta_2)+L_1C\theta_1)^2+(L_2S(\theta_1+\theta_2)+L_1S\theta_1)^2 \quad =\\
&(L_2C(\theta_1+\theta_2))^2+2(L_2C(\theta_1+\theta_2))(L_1C\theta_1)+(L_1C\theta_1)^2+(L_2S(\theta_1+\theta_2))^2\ldots\\
&\ldots+2(L_2S(\theta_1+\theta_2))(L_1S\theta_1)+(L_1S\theta_1)^2 \quad =\\
&L_2^2((C(\theta_1+\theta_2))^2+(S(\theta_1+\theta_2))^2)+2(L_2C(\theta_1+\theta_2))(L_1C\theta_1)+L_1((C\theta_1)^2+(S\theta_1)^2)+\ldots\\
&\ldots+2(L_2S(\theta_1+\theta_2))(L_1S\theta_1) \quad =\\
&L_2^2+L_1^2+2(L_2C(\theta_1+\theta_2))(L_1C\theta_1)+2(L_2S(\theta_1+\theta_2))(L_1S\theta_1) \quad =\\
&L_2^2+L_1^2+2L_2L_1(C(\theta_1+\theta_2)C\theta_1+S(\theta_1+\theta_2)S\theta_1) \quad =\\
&L_2^2+L_1^2+2L_2L_1C(\theta_1+\theta_2-\theta_1) \quad =\\
&L_2^2+L_1^2+2L_2L_1C\theta_2=P^2_{2_x}+P^2_{2_y}
\end{aligned}$$

$$\theta_2=\arccos((P^2_{2_x}+P^2_{2_y}-L_2^2-L_1^2)/2L_2L_1) \quad *$$

Si ahora se toma la primera fila de la inversa $[{}^0A_1]^{-1}$ y se opera con la cuarta columna de T , y la segunda fila de $[{}^0A_1]^{-1}$, también con la cuarta columna de T , se obtiene:

$$\begin{aligned}
&-S\theta_1P_{2_x}+C\theta_1P_{2_y}=L_2S\theta_2 \Leftrightarrow P_{2_y}C\theta_1-P_{2_x}S\theta_1=L_2S\theta_2\\
&C\theta_1P_{2_x}+S\theta_1P_{2_y}-L_1=L_2C\theta_2 \Leftrightarrow P_{2_y}S\theta_1+P_{2_x}C\theta_1=L_1+L_2C\theta_2
\end{aligned}$$

Y con la razón $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ y $a\sin\theta+b\cos\theta=d \Leftrightarrow \theta=atan2(d,c)-atan2(b,a)$:

$$\theta_1=atan2(L_1+L_2C\theta_2, L_2S\theta_2)-atan2(P_{2_x}, P_{2_y})$$

Luego, ya se han obtenido las tres igualdades correspondientes a los dos ángulos de las 3 articulaciones:

$$\begin{aligned}
&\theta_2=\arccos((P^2_{2_x}+P^2_{2_y}-L_2^2-L_1^2)/2L_2L_1)\\
&\theta_1=atan2(L_1+L_2C\theta_2, L_2S\theta_2)-atan2(P_{2_x}, P_{2_y})
\end{aligned}$$

Por otra parte, también hay que considerar que el punto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del problema simplificado es diferente al punto P en el problema completo.

El problema en este caso es plantear el ángulo θ_3 ya que de este ángulo dependerá el resultado del anterior cálculo de los ángulos θ_1 y θ_2 .
Y de igual forma a como se determinó en el Intento 7 o en el apartado anterior, el ángulo deberá plantearse a través de alguna asignación razonada.

Una posibilidad es que fuera necesario predefinir un ángulo, más o menos pronunciado, para evitar algún obstáculo, por ejemplo, en el caso de la última articulación, en cuyo caso, se optaría por realizar ese cálculo con algún coeficiente para aumentar un ángulo en detrimento de otros;

$$|\theta_3|=(k(L_1+L_2+L_3)/|P|)|\theta'| \quad \text{(Con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

Y una mejora de esta solución sería:

$$L'=L_1+L_2+L_3$$
$$\theta=|\arccos(P_{xy}/L')|$$
$$\theta_3=k(L_3/L')\theta_{O'}$$

Eso haría que, con un modelo de "codo arriba", los diferentes ángulos tengan una cierta proporcionalidad y sigan siendo todos, además, de tipo "codo arriba".
Por otra parte, este modelo se acerca a la posibilidad de utilizar modelos iterativos de corrección de errores, y sin embargo, no se necesita la corrección, dado que la primera aproximación ya permite realizar un cálculo de ángulos que permitan alcanzar el punto deseado con un cierto equilibrio entre los diferentes ángulos.
Además, este sistema permitiría tomar la decisión de si se desea acercarse al punto desde una posición más elevada, o no, en el primer segmento o en el segundo segmento, que podría servir para evitar obstáculos, dependiendo del entorno de uso del brazo.
Puede verse un análisis sobre las posibles soluciones en "Robotics 1 - Prof. De Luca Lecture 18 (7 Nov 2014) – Inverse kinematics" [WWWyoutubeDoc91] (Tiempo= 49:32).
Y en último caso, esta solución podría mejorarse en un proceso iterativo o dejarse sin mejora más allá de una iteración de un único paso, siempre y cuando se conozca el entorno de trabajo, y se ajuste a las necesidades.

Falta localizar el punto $P_2(x_2,y_2,z_2)\equiv P_2(P_{2_x},P_{2_y},P_{2_z})$, desde la matriz ${}^2A_3$, ya que se conoce el punto final P y la matriz con el ángulo θ_3 , por alguna necesidad específica ($|\theta_3|=(k(L_1+L_2+L_3)/|P|)|\theta'|$ con k variable, por ejemplo, k=1.3). Y de no ser necesario se podría hacer que fuera una aproximación equilibrada como $|\theta_3|=((L_1+L_2+L_3)/|P|)|\theta'|$ con $\theta'=\arctan(P_y/P_x)$.

$$T={}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & P_x-P_{2_x} \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & P_y-P_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3C\theta_3=P_x-P_{2_x}$$
$$P_{2_x}=P_x-L_3C\theta_3=P_x-L_3C((k(L_1+L_2+L_3)/|P|)\theta')$$

$$L_3S\theta_3=P_y-P_{2_y}$$

$$P_{2_y} = P_y - L_3 S\theta_3 = P_x - L_3 S((k(L_1 + L_2 + L_3)/|P|)\theta')$$

Luego ya se ha encontrado el punto $P_2(x_2, y_2, z_2) \equiv (P_{2_x}, P_{2_y}, P_{2_z})$:

$$P_2(x_2, y_2, z_2) \equiv (P_{2_x}, P_{2_y}, P_{2_z}) \ = \\ (P_x - L_3 C((k(L_1 + L_2 + L_3)/|P|)\theta'), P_x - L_3 S((k(L_1 + L_2 + L_3)/|P|)\theta'), 0)$$

En resumen:

$$\begin{aligned} &\theta_2 = \arccos((P_{2_x}^2 + P_{2_y}^2 - L_2^2 - L_1^2)/2 L_2 L_1) \\ &\theta_1 = atan2(L_1 + L_2 C\theta_2, L_2 S\theta_2) - atan2(P_{2_x}, P_{2_y}) \\ &|\theta_3| = (k(L_1 + L_2 + L_3)/|P|)|\theta'| \\ &P_2(x_2, y_2, z_2) \ = \\ &\qquad (P_x - L_3 C((k(L_1 + L_2 + L_3)/|P|)\theta'), P_x - L_3 S((k(L_1 + L_2 + L_3)/|P|)\theta'), 0) \end{aligned}$$

1.5.2.1.9 Análisis de la orientación y del ángulo de ataque

Puesto que se está implementando un modelo analítico de resolución en lugar de un modelo geométrico, sería interesante realizar este análisis mediante álgebra matricial, como también se ha hecho a la hora de resolver los dos últimos motores.

Para ello se debe aplicar el mismo tratamiento que en la resolución de matrices a través del algoritmo de Denavit-Hartenberg. De hecho, se aplicarán las matrices necesarias para su creación:

$$T = \begin{pmatrix} [R]_{3x3} & [p]_{3x1} \\ [F]_{1x3} & [W]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} [Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1} \\ [Perspectiva]_{1x3} & [Escalado]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} =$$

$$\begin{pmatrix} [R]_{3x3} & [p]_{3x1} \\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} [Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1} \\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4}$$

$$[R]_{3x3} = ([n]_{3x1} \quad [o]_{3x1} \quad [a]_{3x1}) \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

Los vectores [n] ($\vec{n}$), [o] ($\vec{o}$), [a] ($\vec{a}$), son vectores ortogonales unitarios, donde [n] es un vector unitario que representaría la dirección del eje x^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0), [o] es un vector unitario que representaría la dirección del eje y^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0) y [a] es un vector unitario que representaría la dirección del eje z^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0).

Como ejemplo, en el caso de ser una única rotación alrededor del eje X:

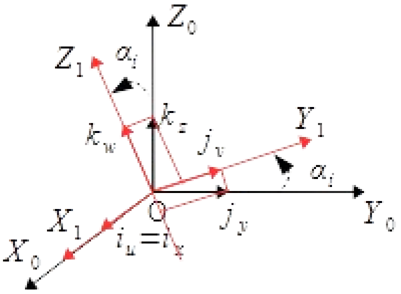


Ilustración 19: Relación de rotación de un ángulo α sobre el eje X en un sistema de coordenadas

$$P(x,y,z)=[P_x,P_y,P_z]^T=P_x\vec{i}_x+P_y\vec{j}_y+P_z\vec{k}_z$$
$$P(u,v,w)=[P_u,P_v,P_w]^T=P_u\vec{i}_u+P_v\vec{j}_v+P_w\vec{k}_w$$
$$\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{pmatrix}=R(x,\alpha)\begin{pmatrix}P_u\\P_v\\P_w\end{pmatrix}$$

Aplicando el producto tensorial, producto de Kronecker:

$$R(x,\alpha)=\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}P_u & P_v & P_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{i}_x\vec{i}_u & \vec{i}_x\vec{j}_v & \vec{i}_x\vec{k}_w\\ \vec{j}_y\vec{i}_u & \vec{j}_y\vec{j}_v & \vec{j}_y\vec{k}_w\\ \vec{k}_z\vec{i}_u & \vec{k}_z\vec{j}_v & \vec{k}_z\vec{k}_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i\\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i\end{pmatrix}$$

Si se interpreta este resultado, se ve que el primer elemento (fila 1-columna 1) vale "1" precisamente por realizarse un giro al rededor del eje X, y que las componentes dependientes del ángulo (fila 2-columna 2 ; fila 2-columna 3 ; fila 3-columna 2 ; fila 3-columna 3), lo son por contemplar la relación de los vectores unitarios $\vec{j}_v,\vec{k}_w$ respecto a las otras dos componentes $\vec{j}_y,\vec{k}_z$.

Y aplicado al problema:

$$R=\begin{pmatrix}\vec{i}_x\vec{i}_u & \vec{i}_x\vec{j}_v & \vec{i}_x\vec{k}_w\\ \vec{j}_y\vec{i}_u & \vec{j}_y\vec{j}_v & \vec{j}_y\vec{k}_w\\ \vec{k}_z\vec{i}_u & \vec{k}_z\vec{j}_v & \vec{k}_z\vec{k}_w\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2-C\theta_2S\theta_1) & -C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)-S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & 0\\ C\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1)+S\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2) & C\theta_3(C\theta_1C\theta_2-S\theta_1S\theta_2)-S\theta_3(C\theta_1S\theta_2+C\theta_2S\theta_1) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & -S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0\\ S(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & C(\theta_1+\theta_2+\theta_3) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

De esta forma, se puede determinar la relación de ángulos deseada. De hecho, cualquiera de los ángulos podría ser predefinido, simplificando así las ecuaciones resultantes. Por ejemplo, si se predetermina que el ángulo de ataque al punto final deseado sea un ángulo determinado $\theta_3=Cte$, éste ángulo determinará el resto de ángulos reduciendo el número de variables articulares y, por tanto, simplificando el problema.

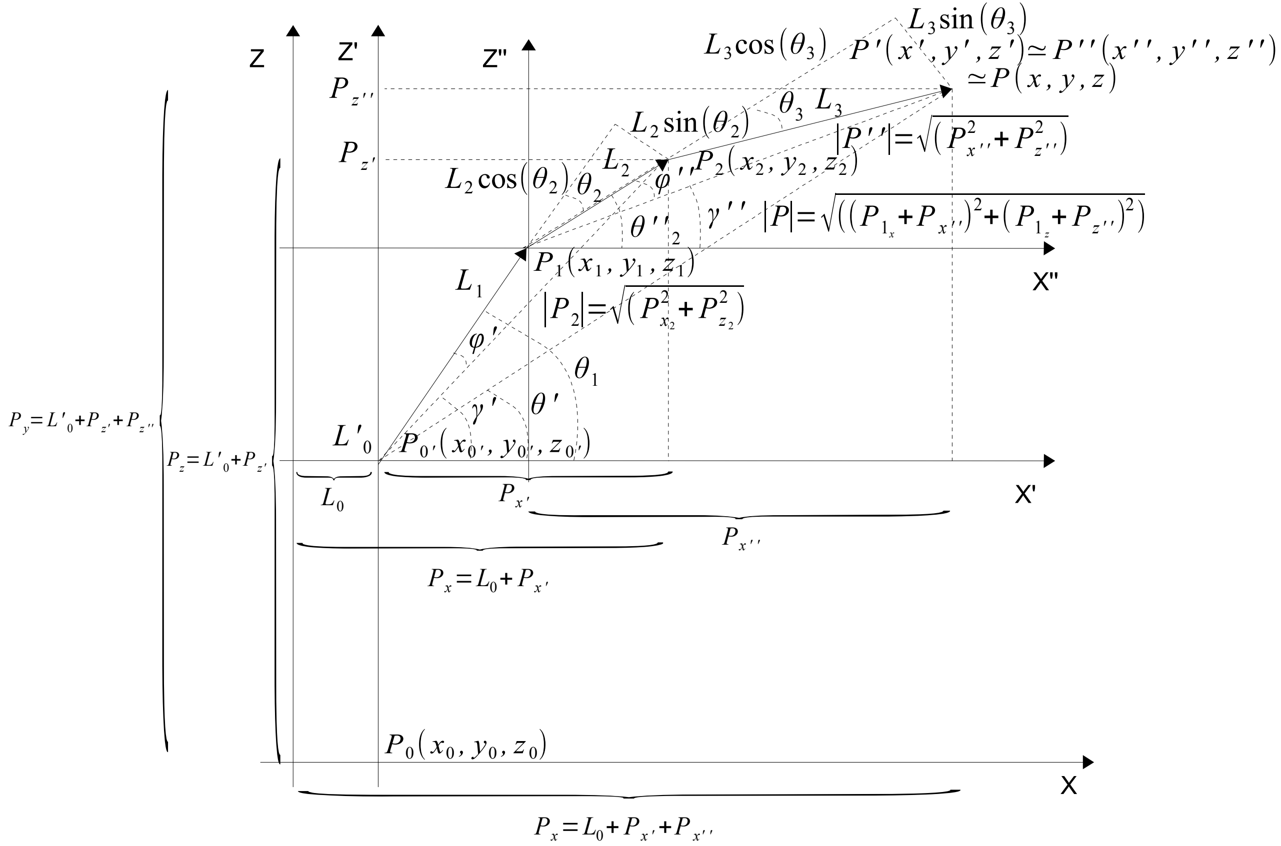


Ilustración 20: Brazo con tres motores, con diferentes opciones de desacoplo prefijando diferentes ángulos

Así se puede observar que si, por ejemplo, se prefija el ángulo θ_3 a un valor mayor, se reducirá el valor correspondiente a los ángulos θ_1 y θ_2 .

Sin embargo, hay que considerar que el ángulo que verá un observador no será el ángulo θ_3 sino la relación de ángulos del Origen de Coordenadas de la última articulación ($O'-UVW$) respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($O-XYZ$). Eso significa que será esta última matriz de rotación la que se tendría que tener en cuenta.

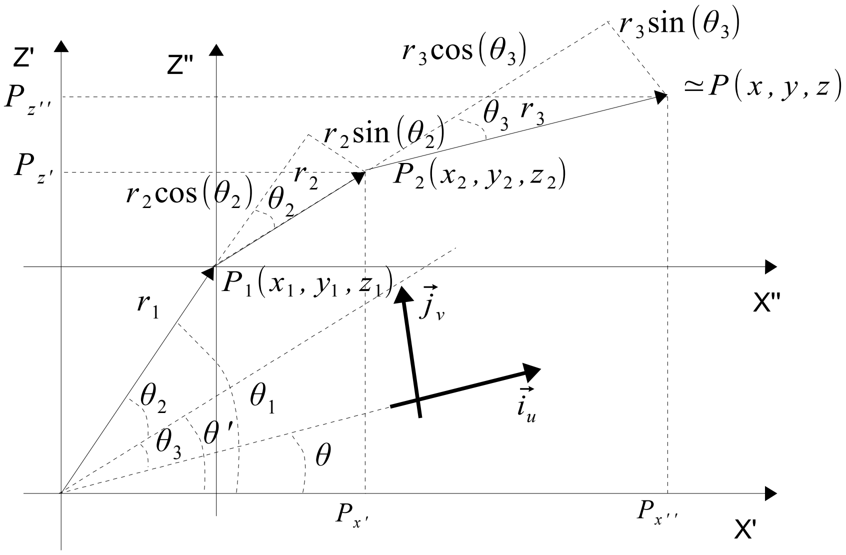


Ilustración 21: Relación de los Orígenes de Coordenadas del punto final de destino y de la Base

1.6 Caso 5-0 – Hexápodo - Cuatro motores, con el primero perpendicular al suelo, y con codo

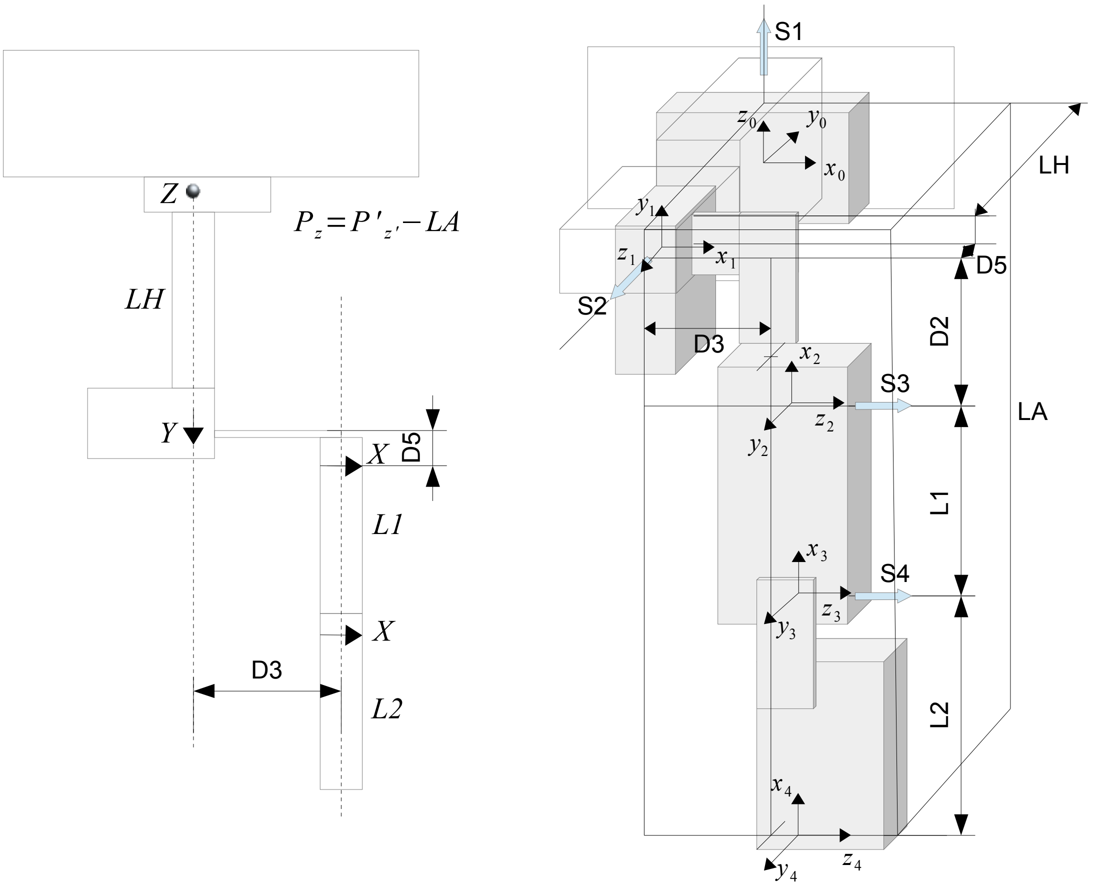


Ilustración 22: Brazo con cuatro motores, con el primero perpendicular al suelo, un codo y los motores con Orígenes de Coordenadas desplazados en sus ejes

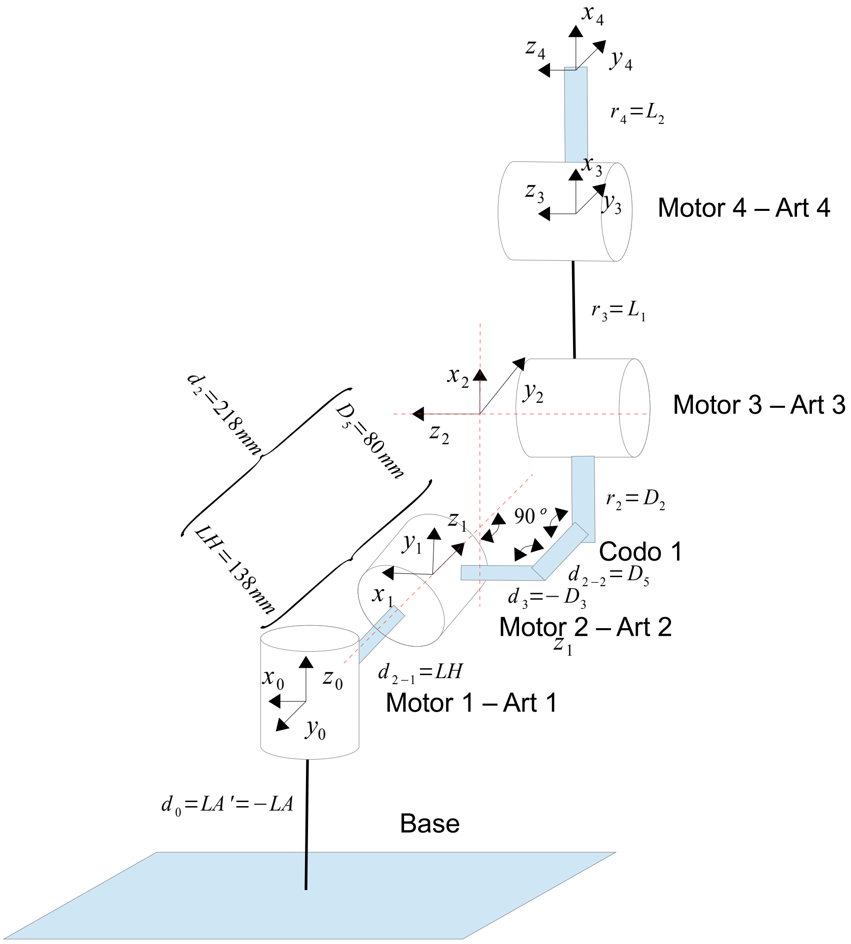


Ilustración 23: Brazo con cuatro motores, con el primero perpendicular al suelo, y con codo

1.6.1 Cinemática Directa, con giro de 90º

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \theta_2+\pi/2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \theta_2+\pi/2 & D5+LH & D2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & -D3 & L1 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L2 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y

$\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^1A_2$ y $[{}^1A_2]^{-1}$ afectadas anteriores se convierten en:

$$ {}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^0A_4={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4$$
$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^0A_4={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4 \;=$$
$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$
$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4-C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \cdots$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & d_2 S\theta_1+d_3 C\theta_1 C\theta_2-r_2 C\theta_1 S\theta_2+r_3 S\theta_1 S\theta_3+r_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)+r_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-r_3 C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 \\ . & . & . & d_3 C\theta_2 S\theta_1-d_2 C\theta_1-r_3 C\theta_1 S\theta_3-r_2 S\theta_1 S\theta_2-r_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-r_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-r_3 C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 \\ . & . & . & r_2 C\theta_2+d_3 S\theta_2+r_3 C\theta_2 C\theta_3+r_4 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-r_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & d_2 S\theta_1 + d_3 C\theta_1 C\theta_2 - r_2 C\theta_1 S\theta_2 + r_3 S\theta_1 S\theta_3 + r_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) + r_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - r_3 C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 \\ . & . & . & d_3 C\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 - r_3 C\theta_1 S\theta_3 - r_2 S\theta_1 S\theta_2 - r_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - r_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - r_3 C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 \\ . & . & . & r_2 C\theta_2 + d_3 S\theta_2 + r_3 C\theta_2 C\theta_3 + r_4 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - r_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2 = D_5 + LH$, $r_2 = D_2$, $d_3 = -D_3$, $r_3 = L_1$ y $r_4 = L_2$), y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo $((0_{u0'}, 0_{v0'}, 0_{w0'})$ - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x, y, z)$ - $O - XYZ$), se aplicaría:

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) + S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - S\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & S\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - C\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & d_2 S\theta_1 + d_3 C\theta_1 C\theta_2 - r_2 C\theta_1 S\theta_2 + r_3 S\theta_1 S\theta_3 + r_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) + r_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - r_3 C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 \\ . & . & . & d_3 C\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 - r_3 C\theta_1 S\theta_3 - r_2 S\theta_1 S\theta_2 - r_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - r_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - r_3 C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 \\ . & . & . & r_2 C\theta_2 + d_3 S\theta_2 + r_3 C\theta_2 C\theta_3 + r_4 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - r_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) + S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - S\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & S\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - C\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C(\theta_3 + \theta_4) C\theta_2 & -S(\theta_3 + \theta_4) C\theta_2 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & d_2 S\theta_1 + d_3 C\theta_1 C\theta_2 - r_2 C\theta_1 S\theta_2 + r_3 S\theta_1 S\theta_3 + r_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) + r_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - r_3 C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 \\ . & . & . & d_3 C\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 - r_3 C\theta_1 S\theta_3 - r_2 S\theta_1 S\theta_2 - r_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - r_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - r_3 C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 \\ . & . & . & r_2 C\theta_2 + d_3 S\theta_2 + r_3 C\theta_2 C\theta_3 + r_4 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - r_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x, y, z) = (P_x \ , \ P_y \ , \ P_z)$$

Y se encuentran las siguientes igualdades:

$$P_x = d_2 S\theta_1 + d_3 C\theta_1 C\theta_2 - r_2 C\theta_1 S\theta_2 + r_3 S\theta_1 S\theta_3 + r_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) \dots$$
$$\dots + r_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - r_3 C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2$$

$$P_y = d_3 C\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 - r_3 C\theta_1 S\theta_3 - r_2 S\theta_1 S\theta_2 - r_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) \dots$$
$$\dots - r_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - r_3 C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2$$

$$P_z = r_2 C\theta_2 + d_3 S\theta_2 + r_3 C\theta_2 C\theta_3 + r_4 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - r_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes y ángulos definidos, para así determinar el punto alcanzado.

Por otra parte, puesto que el problema cinemático directo, resuelto a través ecuaciones homogéneas contiene en el caso de un brazo de 4DOF, 12 ecuaciones, y se buscan sólo 4 relaciones que incluyan las variables articulares (una por cada grado de libertad), existirán, necesariamente ciertas interdependencias entre las 12 expresiones.
Además, la submatriz de rotación tiene 9 elementos, y por tanto, 9 ecuaciones posibles. Sin embargo, habrá 3 ecuaciones menos por la necesaria relación de ortonormalidad de sus elementos, y otras 3 menos por la existencia de tres vectores unitarios con los que se opera para calcular las matrices homogéneas ("Robotics 1 - Prof. De Luca Lecture 12 (24 Oct 2014) - Minimal representations of orientation (Euler and roll-pitch-yaw angles) - Homogeneous transformations" [WWWyoutubeDoc89]). Por tanto, quedan 3 variables independientes en esa submatriz que pueden ser evaluadas.

1.6.2 Cinemática Inversa

1.6.2.1 Intento 1 - Resolución del primer ángulo θ_1 - Elementos de T, o primera inversa (Sin solución)

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^0A_1)^{-1}T={}^1A_4={}^1A_2{}^2A_3{}^3A_4$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_4={}^2A_3{}^3A_4$$
$$({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^3A_4$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación, será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 , y así sucesivamente con θ_3 y θ_4 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_4=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4-C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & d_2 S\theta_1+d_3 C\theta_1 C\theta_2-r_2 C\theta_1 S\theta_2+r_3 S\theta_1 S\theta_3+r_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)+r_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-r_3 C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 \\ . & . & . & d_3 C\theta_2 S\theta_1-d_2 C\theta_1-r_3 C\theta_1 S\theta_3-r_2 S\theta_1 S\theta_2-r_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-r_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-r_3 C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 \\ . & . & . & r_2 C\theta_2+d_3 S\theta_2+r_3 C\theta_2 C\theta_3+r_4 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-r_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & d_2 S\theta_1+d_3 C\theta_1 C\theta_2-r_2 C\theta_1 S\theta_2+r_3 S\theta_1 S\theta_3+r_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)+r_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-r_3 C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 \\ . & . & . & d_3 C\theta_2 S\theta_1-d_2 C\theta_1-r_3 C\theta_1 S\theta_3-r_2 S\theta_1 S\theta_2-r_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-r_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-r_3 C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 \\ . & . & . & r_2 C\theta_2+d_3 S\theta_2+r_3 C\theta_2 C\theta_3+r_4 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-r_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4-C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_2=D_5+LH$, $r_2=D_2$, $d_3=-D_3$, $r_3=L_1$ y $r_4=L_2$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & (D_5+LH)S\theta_1 - D_3 C\theta_1 C\theta_2 - D_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_1 S\theta_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2) + L_2 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L_1 C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 \\ . & . & . & -D_3 C\theta_2 S\theta_1 - (D_5+LH)C\theta_1 - L_1 C\theta_1 S\theta_3 - D_2 S\theta_1 S\theta_2 - L_2 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2) - L_2 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L_1 C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 \\ . & . & . & D_2 C\theta_2 - D_3 S\theta_2 + L_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_2 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4) & -C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4) & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & (D_5+LH)S\theta_1 + L_2 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) + L_2 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) + L_1 S\theta_1 S\theta_3 - D_2 S\theta_2 C\theta_1 - D_3 C\theta_2 C\theta_1 - L_1 S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3 \\ . & . & . & -D_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_2 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L_1 C\theta_1 S\theta_3 - (D_5+LH)C\theta_1 - D_3 C\theta_2 S\theta_1 - L_1 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & . & D_2 C\theta_2 - D_3 S\theta_2 + L_1 C\theta_2 C\theta_3 + L_2 C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4) & -C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4) & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$^1A_4 = {}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -D_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & D_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & D_5+LH \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_1 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_1 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & -D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_2 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_2 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 - C\theta_3 C\theta_4 S\theta_2 & C\theta_3 S\theta_2 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 & . \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & . \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -D_3C\theta_2-D_2S\theta_2-L_1C\theta_3S\theta_2-L_2C\theta_3C\theta_4S\theta_2+L_2S\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & D_2C\theta_2-D_3S\theta_2+L_1C\theta_2C\theta_3+L_2C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_2C\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & (D_5+LH)+L_1S\theta_3+L_2C\theta_3S\theta_4+L_2C\theta_4S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 & S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 & C\theta_2 & . \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & S\theta_2 & . \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -D_3C\theta_2-D_2S\theta_2-L_1C\theta_3S\theta_2-L_2C\theta_3C\theta_4S\theta_2+L_2S\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & D_2C\theta_2-D_3S\theta_2+L_1C\theta_2C\theta_3+L_2C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_2C\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & (D_5+LH)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L_1S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=C\theta_1x+S\theta_1y$$
$$f_{12}=z$$
$$f_{13}=S\theta_1x-C\theta_1y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^1A_4={}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4=\begin{pmatrix} S\theta_2S\theta_3S\theta_4-C\theta_3C\theta_4S\theta_2 & C\theta_3S\theta_2S\theta_4+C\theta_4S\theta_2S\theta_3 & C\theta_2 & . \\ C\theta_2C\theta_3C\theta_4-C\theta_2S\theta_3S\theta_4 & -C\theta_2C\theta_3S\theta_4-C\theta_2C\theta_4S\theta_3 & S\theta_2 & . \\ C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3 & C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -D_3C\theta_2-D_2S\theta_2-L_1C\theta_3S\theta_2-L_2C\theta_3C\theta_4S\theta_2+L_2S\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & D_2C\theta_2-D_3S\theta_2+L_1C\theta_2C\theta_3+L_2C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_2C\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & (D_5+LH)+L_1S\theta_3+L_2C\theta_3S\theta_4+L_2C\theta_4S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 & S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 & C\theta_2 & . \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & S\theta_2 & . \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -D_3C\theta_2-D_2S\theta_2-L_1C\theta_3S\theta_2-L_2C\theta_3C\theta_4S\theta_2+L_2S\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & D_2C\theta_2-D_3S\theta_2+L_1C\theta_2C\theta_3+L_2C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_2C\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & (D_5+LH)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L_1S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones (Formato: $f_{ij}(s)=Izquierda$ sin $sinplificar$ $=$ $derecha$ sin $simplificar=derecha\ simplificado$):

$$f_{11}(n)=C\theta_1x+S\theta_1y\ \ =$$
$$C\theta_1(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3))\ldots$$
$$\ldots+S\theta_1(-C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3))\ \ =$$
$$S\theta_2S\theta_3S\theta_4-C\theta_3C\theta_4S\theta_2=-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2$$
$$f_{12}(n)=z=C\theta_2C\theta_3C\theta_4-C\theta_2S\theta_3S\theta_4=C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2$$
$$f_{13}(n)=S\theta_1x-C\theta_1y\ \ =$$
$$S\theta_1(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3))\ldots$$
$$\ldots-C\theta_1y(-C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3))\ \ =$$
$$C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3=S(\theta_3+\theta_4)$$

$$f_{11}(o)=C\theta_1x+S\theta_1y\ \ =$$
$$C\theta_1(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3))\ldots$$
$$S\theta_1(S\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3))\ \ =$$
$$C\theta_3S\theta_2S\theta_4+C\theta_4S\theta_2S\theta_3=S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2$$
$$f_{12}(o)=z=-C\theta_2C\theta_3S\theta_4-C\theta_2C\theta_4S\theta_3=-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2$$
$$f_{13}(o)=S\theta_1x-C\theta_1y\ \ =$$
$$S\theta_1(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3))\ldots$$
$$\ldots-C\theta_1(S\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3))\ \ =$$
$$C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4=C(\theta_3+\theta_4)$$

$$f_{11}(a)=C\theta_1x+S\theta_1y=C\theta_1(C\theta_2C\theta_1)+S\theta_1(C\theta_2S\theta_1)=C\theta_2$$
$$f_{12}(a)=z=S\theta_2$$
$$f_{13}(a)=S\theta_1x-C\theta_1y=S\theta_1(C\theta_2C\theta_1)-C\theta_1(C\theta_2S\theta_1)=0$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1x+S\theta_1y\ \ =$$
$$C\theta_1((D_5+LH)S\theta_1+L_2C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3)+L_2S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3)+L_1S\theta_1S\theta_3-D_2S\theta_2C\theta_1-D_3C\theta_2C\theta_1-L_1S\theta_2C\theta_1C\theta_3)+\ldots$$
$$\ldots+S\theta_1(-D_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-L_2S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)-L_1C\theta_1S\theta_3-(D_5+LH)C\theta_1-D_3C\theta_2S\theta_1-L_1S\theta_2C\theta_3S\theta_1)\ \ =$$
$$-D_3C\theta_2-D_2S\theta_2-L_1C\theta_3S\theta_2-L_2C\theta_3C\theta_4S\theta_2+L_2S\theta_2S\theta_3S\theta_4$$
$$f_{12}(p)=z=D_2C\theta_2-D_3S\theta_2+L_1C\theta_2C\theta_3+L_2C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_2C\theta_2S\theta_3S\theta_4$$
$$f_{13}(p)=S\theta_1x-C\theta_1y\ \ =$$
$$S\theta_1((D_5+LH)S\theta_1+L_2C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3)+L_2S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3)+L_1S\theta_1S\theta_3-D_2S\theta_2C\theta_1-D_3C\theta_2C\theta_1-L_1S\theta_2C\theta_1C\theta_3)\ldots$$
$$\ldots-C\theta_1(-D_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-L_2S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)-L_1C\theta_1S\theta_3-(D_5+LH)C\theta_1-D_3C\theta_2S\theta_1-L_1S\theta_2C\theta_3S\theta_1)\ \ =$$
$$(D_5+LH)+L_1S\theta_3+L_2C\theta_3S\theta_4+L_2C\theta_4S\theta_3\ \ =$$
$$(D_5+LH)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L_1S\theta_3$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^1A_4=\begin{pmatrix} . & . & . & -D_3C\theta_2-D_2S\theta_2-L_1C\theta_3S\theta_2-L_2C\theta_3C\theta_4S\theta_2+L_2S\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & D_2C\theta_2-D_3S\theta_2+L_1C\theta_2C\theta_3+L_2C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_2C\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & (D_5+LH)+L_1S\theta_3+L_2C\theta_3S\theta_4+L_2C\theta_4S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -D_3C\theta_2-D_2S\theta_2-L_1C\theta_3S\theta_2-L_2C\theta_3C\theta_4S\theta_2+L_2S\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & D_2C\theta_2-D_3S\theta_2+L_1C\theta_2C\theta_3+L_2C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_2C\theta_2S\theta_3S\theta_4 \\ . & . & . & (D_5+LH)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L_1S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

(Formato: $f_{ij}(p)$ = Izquierda = derecha sin simplificar = derecha simplificado)

$$f_{11}(p)=C\theta_1P_x+S\theta_1P_y = -D_3C\theta_2-D_2S\theta_2-L_1C\theta_3S\theta_2-L_2C\theta_3C\theta_4S\theta_2+L_2S\theta_2S\theta_3S\theta_4$$

$$f_{12}(p)=P_z=D_2C\theta_2-D_3S\theta_2+L_1C\theta_2C\theta_3+L_2C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_2C\theta_2S\theta_3S\theta_4$$

$$f_{13}(p)=S\theta_1P_x-C\theta_1P_y=(D_5+LH)+L_1S\theta_3+L_2C\theta_3S\theta_4+L_2C\theta_4S\theta_3 = (D_5+LH)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L_1S\theta_3$$

...

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 y θ_4 , en función de las componentes presentes del punto conocido, P_x , P_y y P_z .
En este caso, los cálculos que podrían ser realizados sobre las componentes del punto (P_x^2 , P_y^2 y P_z^2 , $P_x^2+P_y^2$, $P_x^2+P_z^2$, $P_y^2+P_z^2$ o $P_x^2+P_y^2+P_z^2$) no parecen llegar a ninguna igualdad que pueda ayudar a resolver el problema.
Además, en el caso de utilizar las igualdades derivadas de la primera inversa, se encuentran 4 variables y sólo tres ecuaciones derivadas de la posición del punto $P(P_x,P_y,P_z)$ ($f_{ij}(p)$).
Por tanto, no parece haber una solución evidente para las variables articulares dado que, en todo

caso, se podría llegar a una serie de variables interdependientes.

1.6.2.2 Intento 2 - Segunda matriz inversa y uso del punto (solución dependiente)

Se puede intentar extraer la segunda variable articular, θ_2 usando la igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_4={}^2A_3{}^3A_4$$

Sustituyendo las matrices (con la matriz T sin simplificar y simplificada), quedará:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -D_2 \\ 0 & 0 & 1 & -(D_5+LH) \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4-C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} .\ .\ . & (D_5+LH)S\theta_1+L_2 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3)+L_2 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3)+L_1 S\theta_1 S\theta_3-D_2 S\theta_2 C\theta_1-D_3 C\theta_2 C\theta_1-L_1 S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3 \\ .\ .\ . & -D_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_2 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L_1 C\theta_1 S\theta_3-(D_5+LH)C\theta_1-D_3 C\theta_2 S\theta_1-L_1 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ .\ .\ . & D_2 C\theta_2-D_3 S\theta_2+L_1 C\theta_2 C\theta_3+L_2 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-L_2 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ .\ .\ . & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -D_2 \\ 0 & 0 & 1 & -(D_5+LH) \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4-C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} .\ .\ . & (D_5+LH)S\theta_1+L_2 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3)+L_2 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3)+L_1 S\theta_1 S\theta_3-D_2 S\theta_2 C\theta_1-D_3 C\theta_2 C\theta_1-L_1 S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3 \\ .\ .\ . & -D_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_2 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L_1 C\theta_1 S\theta_3-(D_5+LH)C\theta_1-D_3 C\theta_2 S\theta_1-L_1 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ .\ .\ . & D_2 C\theta_2-D_3 S\theta_2+L_1 C\theta_2 C\theta_3+L_2 C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4) \\ .\ .\ . & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -D_2 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -(D_5+LH) \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4-C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -D_2 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -(D_5+LH) \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4) & -C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4) & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$${}^2A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_1 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_1 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & -D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_2 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_2 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3 & 0 & L_1 C\theta_3 + L_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & L_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_3 S\theta_4 + L_2 C\theta_4 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & -D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2 C(\theta_3+\theta_4) + L_1 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2 S(\theta_3+\theta_4) + L_1 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & -D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{21} = (-C\theta_1 S\theta_2)x + (-S\theta_2 S\theta_1)y + (C\theta_2)z + (-D_2)t$$
$$f_{22} = (S\theta_1)x + (-C\theta_1)y + (-(D_5 + LH))t$$
$$f_{23} = (C\theta_1 C\theta_2)x + (S\theta_1 C\theta_2)y + (S\theta_2)z$$
$$...$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_4 =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3 & 0 & L_1 C\theta_3 + L_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & L_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_3 S\theta_4 + L_2 C\theta_4 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & -D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2C(\theta_3+\theta_4)+L_1C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2S(\theta_3+\theta_4)+L_1S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & -D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos y matrices se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
f_{21}(n)=&(-C\theta_1S\theta_2)x+(-S\theta_2S\theta_1)y+(C\theta_2)z+(-D_2)t \;=\\
&(-C\theta_1S\theta_2)(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3))...\\
&...+(-S\theta_2S\theta_1)(-C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3))...\\
&...+(C\theta_2)(C\theta_2C\theta_3C\theta_4-C\theta_2S\theta_3S\theta_4) \;=\\
&C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4=C(\theta_3+\theta_4)\\
f_{22}(n)=&(S\theta_1)x+(-C\theta_1)y+(-(D_5+LH))t \;=\\
&(S\theta_1)(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3))\\
&...+(-C\theta_1)(-C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)) \;=\\
&C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3=S(\theta_3+\theta_4)\\
f_{23}(n)=&(C\theta_1C\theta_2)x+(S\theta_1C\theta_2)y+(S\theta_2)z \;=\\
&(C\theta_1C\theta_2)(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3))...\\
&...+(S\theta_1C\theta_2)(-C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)) \;=\\
&0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(o)=&(-C\theta_1S\theta_2)x+(-S\theta_2S\theta_1)y+(C\theta_2)z+(-D_2)t \;=\\
&(-C\theta_1S\theta_2)(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3))...\\
&...+(-S\theta_2S\theta_1)(S\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)) \;=\\
&-C\theta_3S\theta_4-C\theta_4S\theta_3=-S(\theta_3+\theta_4)\\
f_{22}(o)=&(S\theta_1)x+(-C\theta_1)y+(-(D_5+LH))t \;=\\
&(S\theta_1)(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3))...\\
&...+(-C\theta_1)(S\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)) \;=\\
&C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4=C(\theta_3+\theta_4)\\
f_{23}(o)=&(C\theta_1C\theta_2)x+(S\theta_1C\theta_2)y+(S\theta_2)z\\
&(C\theta_1C\theta_2)(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+S\theta_2C\theta_1S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-S\theta_2C\theta_1C\theta_3))...\\
&...+(S\theta_1C\theta_2)(S\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3))...\\
&...+(S\theta_2)(-C\theta_2C\theta_3S\theta_4-C\theta_2C\theta_4S\theta_3)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(a)=&(-C\theta_1S\theta_2)x+(-S\theta_2S\theta_1)y+(C\theta_2)z+(-D_2)t \;=\\
&(-C\theta_1S\theta_2)(C\theta_2C\theta_1)+(-S\theta_1S\theta_2)(C\theta_2S\theta_1)=0\\
f_{22}(a)=&(S\theta_1)x+(-C\theta_1)y+(-(D_5+LH))t \;=\\
&(S\theta_1)(C\theta_2C\theta_1)+(-C\theta_1)(C\theta_2S\theta_1)=0\\
f_{23}(a)=&(C\theta_1C\theta_2)x+(S\theta_1C\theta_2)y+(S\theta_2)z \;=\\
&(C\theta_1C\theta_2)(C\theta_2C\theta_1)+(S\theta_1C\theta_2)(C\theta_2S\theta_1)+(S\theta_2)(S\theta_2)=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(p)=&(-C\theta_1S\theta_2)x+(-S\theta_2S\theta_1)y+(C\theta_2)z+(-D_2)t \;=\\
&(-C\theta_1S\theta_2)(L_2C\theta_1C\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3)...\\
&...+(-S\theta_2S\theta_1)(L_2C\theta_2S\theta_1+L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3)...\\
&...+(C\theta_2)(L_1-L_2S\theta_2-L_3C\theta_2S\theta_3-L_3C\theta_3S\theta_2) \;=\\
&L_1C\theta_3+L_2C\theta_3C\theta_4-L_2S\theta_3S\theta_4=L_2C(\theta_3+\theta_4)+L_1C\theta_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{22}(p)=(S\theta_1)x+(-C\theta_1)y+(-(D_5+LH))t \quad &= \\
&(S\theta_1)(L_2C\theta_1C\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3)... \\
&...+(-C\theta_1)(L_2C\theta_2S\theta_1+L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3)+(-(D_5+LH)) \quad = \\
&L_1S\theta_3+L_2C\theta_3S\theta_4+L_2C\theta_4S\theta_3=L_2S(\theta_3+\theta_4)+L_1S\theta_3 \\
f_{23}(p)=(C\theta_1C\theta_2)x+(S\theta_1C\theta_2)y+(S\theta_2)z \quad &= \\
&(C\theta_1C\theta_2)(L_2C\theta_1C\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2C\theta_3-L_3C\theta_1S\theta_2S\theta_3)... \\
&...+(S\theta_1C\theta_2)(L_2C\theta_2S\theta_1+L_3C\theta_2C\theta_3S\theta_1-L_3S\theta_1S\theta_2S\theta_3)... \\
&...+(S\theta_2)(L_1-L_2S\theta_2-L_3C\theta_2S\theta_3-L_3C\theta_3S\theta_2)=-D_3
\end{aligned}
$$

En este caso, se utiliza sólo la última columna, relativa a $P(P_x,P_y,P_z)$ y con las dos matrices inversas ($f_{21}(p),f_{22}(p),f_{23}(p)$):

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x \\
. & . & . & P_y \\
. & . & . & P_z \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$
({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix}
-C\theta_1S\theta_2 & -S\theta_2S\theta_1 & C\theta_2 & -D_2 \\
S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -(D_5+LH) \\
C\theta_1C\theta_2 & S\theta_1C\theta_2 & S\theta_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x \\
. & . & . & P_y \\
. & . & . & P_z \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & -C\theta_1S\theta_2P_x-S\theta_2S\theta_1P_y+C\theta_2P_z-D_2 \\
. & . & . & S\theta_1P_x-C\theta_1P_y-(D_5+LH) \\
. & . & . & C\theta_1C\theta_2P_x+S\theta_1C\theta_2P_y+S\theta_2P_z \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
. & . & . & f_{21}(p) \\
. & . & . & f_{22}(p) \\
. & . & . & f_{23}(p) \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
{}^2A_4=\begin{pmatrix}
C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L_1C\theta_3 \\
S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_1S\theta_3 \\
0 & 0 & 1 & -D_3 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_2C\theta_4 \\
S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_2S\theta_4 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4 & -C\theta_3S\theta_4-C\theta_4S\theta_3 & 0 & L_1C\theta_3+L_2C\theta_3C\theta_4-L_2S\theta_3S\theta_4 \\
C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3 & C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4 & 0 & L_1S\theta_3+L_2C\theta_3S\theta_4+L_2C\theta_4S\theta_3 \\
0 & 0 & 1 & -D_3 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2C(\theta_3+\theta_4)+L_1C\theta_3 \\
S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2S(\theta_3+\theta_4)+L_1S\theta_3 \\
0 & 0 & 1 & -D_3 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{21}(p)=-C\theta_1S\theta_2P_x-S\theta_2S\theta_1P_y+C\theta_2P_z-D_2=L_1C\theta_3+L_2C\theta_3C\theta_4-L_2S\theta_3S\theta_4 \quad &= \\
&L_2C(\theta_3+\theta_4)+L_1C\theta_3 \\
f_{22}(p)=S\theta_1P_x-C\theta_1P_y-(D_5+LH)=L_1S\theta_3+L_2C\theta_3S\theta_4+L_2C\theta_4S\theta_3 \quad &=
\end{aligned}
$$

$$L_2 S(\theta_3+\theta_4)+L_1 S\theta_3$$
$$f_{23}(p)=(C\theta_1 C\theta_2)P_x+(S\theta_1 C\theta_2)P_y+(S\theta_2)P_z=-D_3$$
$$\dots$$

En este caso, se puede considerar la tercera igualdad. Y desde ella parece evidente que se podnrá una variable articular en función de la segunda.
Puede tenerse θ_1 en función de θ_2 :

$$f_{23}(p)=(C\theta_1 C\theta_2)P_x+(S\theta_1 C\theta_2)P_y+(S\theta_2)P_z=-D_3$$
$$C\theta_1(C\theta_2 P_x)+S\theta_1(C\theta_2 P_y)=-(D_3+S\theta_2 P_z)$$

Y mediante la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Leftrightarrow \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Se llega a:

$$\theta_1=atan2((C\theta_2 P_y),(C\theta_2 P_x))...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(C\theta_2 P_x)^2+(C\theta_2 P_y)^2-(-(D_3+S\theta_2 P_z))^2},(-(D_3+S\theta_2 P_z)))$$

O puede tenerse θ_2 en función de θ_1 :

$$f_{23}(p)=(C\theta_1 C\theta_2)P_x+(S\theta_1 C\theta_2)P_y+(S\theta_2)P_z=-D_3$$
$$C\theta_2(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)+S\theta_2(P_z)=-D_3$$

Y mediante la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Leftrightarrow \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Se llega a:

$$\theta_2=atan2(P_z,C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)\pm atan2(\sqrt{(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2+(P_z)^2-(-D_3)^2},-D_3)$$

Parece lógico pensar que sera la lógica del problema la que determinará cuál de las dos opciones resulta más interesante.

En cuanto a los dos ángulos restantes, se reproduce una situación característica puesto que son dos motores con sus ejes de giro paralelos.
Así, si se toman las dos primeras ecuaciones.

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 P_x-S\theta_2 S\theta_1 P_y+C\theta_2 P_z-D_2=L_1 C\theta_3+L_2 C\theta_3 C\theta_4-L_2 S\theta_3 S\theta_4 \quad =$$
$$L_2 C(\theta_3+\theta_4)+L_1 C\theta_3$$
$$-C\theta_1 S\theta_2 P_x-S\theta_2 S\theta_1 P_y+C\theta_2 P_z-D_2=L_1 C\theta_3+L_2 C\theta_3 C\theta_4-L_2 S\theta_3 S\theta_4$$
$$C\theta_3(L_1+L_2 C\theta_4)+S\theta_3(-L_2 S\theta_4)=-C\theta_1 S\theta_2 P_x-S\theta_2 S\theta_1 P_y+C\theta_2 P_z-D_2$$

$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-(D_5+LH)=L_1 S\theta_3+L_2 C\theta_3 S\theta_4+L_2 C\theta_4 S\theta_3 \quad =$$
$$L_2 S(\theta_3+\theta_4)+L_1 S\theta_3$$
$$S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-(D_5+LH)=L_1 S\theta_3+L_2 C\theta_3 S\theta_4+L_2 C\theta_4 S\theta_3$$
$$(S\theta_3)C\theta_4+(C\theta_3)S\theta_4=(S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-(D_5+LH)-L_1 S\theta_3)/L_2$$

Y mediante la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Leftrightarrow \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Se llega a las siguientes igualdades:

$$\theta_3=atan2((-L_2S\theta_4),(L_1+L_2C\theta_4))...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(L_1+L_2C\theta_4)^2+(-L_2S\theta_4)^2-(-C\theta_1S\theta_2P_x-S\theta_2S\theta_1P_y+C\theta_2P_z-D_2)^2},(-C\theta_1S\theta_2P_x-S\theta_2S\theta_1P_y+C\theta_2P_z-D_2))$$

$$\theta_4=atan2((C\theta_3),(S\theta_3))...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(S\theta_3)^2+(C\theta_3)^2-(S\theta_1P_x-C\theta_1P_y-(D_5+LH)-L_1S\theta_3)/L_2^2},(S\theta_1P_x-C\theta_1P_y-(D_5+LH)-L_1S\theta_3)/L_2)$$

Por lo que el resultado sería dependiente, θ_3 en función de θ_4 , o θ_4 en función de θ_3 .

Pero estos resultados serían de difícil resolución al dejar unos ángulos en función de otros, como en el caso anterior, lo que obligaría a tomar otro tipo de decisiones, como pueden ser los planos y ángulos de ataque sobre el punto final de destino.

De hecho, tal y como están montados los motores en el hexápodo, los motores θ_1 y θ_2 están relacionados con el alcance del punto en el sentido del movimiento del hexápodo, mientras que los ángulos θ_3 y θ_4 están relacionados con el ajuste al punto final de destino que marca el punto de apoyo de la pata, y que dará soporte al peso del cuerpo del hexápodo. Por tanto, el ángulo θ_1 del primer motor podría ser predeterminado para que avance un ángulo suficiente como para que asegure el avance de la pata, mientras que el ángulo θ_3 podría ser predefinido para equilibrar los dos motores finales en el alcance del punto de apoyo, o que sean muy pronunciados para levantar la pata y que no se tropiece con ningún obstáculo.
Luego, sí parecen cumplir con las necesidades del hexápodo con unas simples predeterminaciones sobre ciertos ángulos.

1.6.2.3 Intento 3 - Tercera matriz inversa y uso del punto (sin solución)

Se puede intentar extraer la segunda variable articular, θ_2 usando la igualdad:

$$\left({}^2A_3\right)^{-1}\left({}^1A_2\right)^{-1}\left({}^0A_1\right)^{-1}T={}^3A_4$$

Sustituyendo las matrices (con la matriz T sin simplificar y simplificada), quedará:

$$\left({}^2A_3\right)^{-1}\left({}^1A_2\right)^{-1}\left({}^0A_1\right)^{-1}T \;=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -D_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\left(D_5+LH\right) \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4\left(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3\right)+S\theta_4\left(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3\right) & C\theta_4\left(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3\right)-S\theta_4\left(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3\right) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4\left(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\right)-S\theta_4\left(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3\right) & S\theta_4\left(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\right)-C\theta_4\left(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3\right) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4-C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & \left(D_5+LH\right)S\theta_1+L_2 C\theta_4\left(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3\right)+L_2 S\theta_4\left(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3\right)+L_1 S\theta_1 S\theta_3-D_2 S\theta_2 C\theta_1-D_3 C\theta_2 C\theta_1-L_1 S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3 \\ . & . & . & -D_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_4\left(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\right)-L_2 S\theta_4\left(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3\right)-L_1 C\theta_1 S\theta_3-\left(D_5+LH\right)C\theta_1-D_3 C\theta_2 S\theta_1-L_1 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & . & D_2 C\theta_2-D_3 S\theta_2+L_1 C\theta_2 C\theta_3+L_2 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-L_2 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -D_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\left(D_5+LH\right) \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4\left(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3\right)+S\theta_4\left(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3\right) & C\theta_4\left(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3\right)-S\theta_4\left(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3\right) & C\theta_2 C\theta_1 & . \\ -C\theta_4\left(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\right)-S\theta_4\left(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3\right) & S\theta_4\left(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\right)-C\theta_4\left(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3\right) & C\theta_2 S\theta_1 & . \\ C\theta_2 C\left(\theta_3+\theta_4\right) & -C\theta_2 S\left(\theta_3+\theta_4\right) & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & \left(D_5+LH\right)S\theta_1+L_2 C\theta_4\left(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3\right)+L_2 S\theta_4\left(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3\right)+L_1 S\theta_1 S\theta_3-D_2 S\theta_2 C\theta_1-D_3 C\theta_2 C\theta_1-L_1 S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3 \\ . & . & . & -D_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_4\left(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\right)-L_2 S\theta_4\left(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3\right)-L_1 C\theta_1 S\theta_3-\left(D_5+LH\right)C\theta_1-D_3 C\theta_2 S\theta_1-L_1 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & . & D_2 C\theta_2-D_3 S\theta_2+L_1 C\theta_2 C\theta_3+L_2 C\theta_2 C\left(\theta_3+\theta_4\right) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_2 C\theta_3 & -r_3-r_2 C\theta_3-d_2 S\theta_3 \\ C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & r_2 S\theta_3-d_2 C\theta_3 \\ C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & S\theta_2 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4\left(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3\right)+S\theta_4\left(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3\right) & C\theta_4\left(C\theta_3 S\theta_1+S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3\right)-S\theta_4\left(S\theta_1 S\theta_3-S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3\right) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4\left(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\right)-S\theta_4\left(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3\right) & S\theta_4\left(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\right)-C\theta_4\left(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3\right) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4-C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_2 C\theta_3 & -r_3-r_2 C\theta_3-d_2 S\theta_3 \\ C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & r_2 S\theta_3-d_2 C\theta_3 \\ C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & S\theta_2 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C\theta_2 C(\theta_3 + \theta_4) & -C\theta_2 S(\theta_3 + \theta_4) & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_2 C\theta_3 & -L_1 - D_2 C\theta_3 - (D_5 + LH) S\theta_3 \\ C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & D_2 S\theta_3 - (D_5 + LH) C\theta_3 \\ C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & S\theta_2 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 - C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_2 C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_2 C\theta_4 S\theta_3 & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2 & -C\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2 & C\theta_2 C\theta_3 & -L_1 - D_2 C\theta_3 - (D_5 + LH) S\theta_3 \\ C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & D_2 S\theta_3 - (D_5 + LH) C\theta_3 \\ C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & S\theta_2 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + S\theta_2 C\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - S\theta_2 C\theta_1 C\theta_3) & C\theta_2 C\theta_1 & P_x \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & C\theta_2 S\theta_1 & P_y \\ C\theta_2 C(\theta_3 + \theta_4) & -C\theta_2 S(\theta_3 + \theta_4) & S\theta_2 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^3A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_2 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_2 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\dots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{31}(n) & f_{31}(o) & f_{31}(a) & f_{31}(p) \\ f_{32}(n) & f_{32}(o) & f_{32}(a) & f_{32}(p) \\ f_{33}(n) & f_{33}(o) & f_{33}(a) & f_{33}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$\begin{aligned} f_{31} &= (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)x + (-C\theta_1 S\theta_3 - C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)y + (C\theta_2 C\theta_3)z \dots \\ &\qquad \dots + (-L_1 - D_2 C\theta_3 - (D_5 + LH) S\theta_3)t \\ f_{32} &= (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)x + (S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 - C\theta_1 C\theta_3)y + (-C\theta_2 S\theta_3)z \dots \\ &\qquad \dots + (D_2 S\theta_3 - (D_5 + LH) C\theta_3)t \\ f_{33} &= (C\theta_1 C\theta_2)x + (C\theta_2 S\theta_1)y + (S\theta_2)z + (D_3)t \\ &\dots \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^{2}A_3)^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{31}(n) & f_{31}(o) & f_{31}(a) & f_{31}(p)\\ f_{32}(n) & f_{32}(o) & f_{32}(a) & f_{32}(p)\\ f_{33}(n) & f_{33}(o) & f_{33}(a) & f_{33}(p)\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_2C\theta_4\\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_2S\theta_4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos y matrices se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&f_{31}(n)=...=C\theta_4\\
&f_{32}(n)=...=S\theta_4\\
&f_{23}(n)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{31}(o)=...=-S\theta_4\\
&f_{32}(o)=...=C\theta_4\\
&f_{23}(o)=...=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{21}(a)=...=0\\
&f_{22}(a)=...=0\\
&f_{23}(a)=...=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{21}(p)=(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)x+(-C\theta_1 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)y+(C\theta_2 C\theta_3)z\,...\\
&\qquad ...+(-L_1-D_2C\theta_3-(D_5+LH)S\theta_3)t\ =\\
&\qquad (S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3 S\theta_2)P_x+(-C\theta_1 S\theta_3-C\theta_3 S\theta_1 S\theta_2)P_y+(C\theta_2 C\theta_3)P_z\,...\\
&\qquad ...+(-L_1-D_2C\theta_3-(D_5+LH)S\theta_3)\ =\\
&\qquad L_2C\theta_4\\
&f_{22}(p)=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)x+(S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3)y+(-C\theta_2 S\theta_3)z\,...\\
&\qquad ...+(D_2S\theta_3-(D_5+LH)C\theta_3)t\ =\\
&\qquad (C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)P_x+(S\theta_1 S\theta_2 S\theta_3-C\theta_1 C\theta_3)P_y+(-C\theta_2 S\theta_3)P_z\,...\\
&\qquad ...+(D_2S\theta_3-(D_5+LH)C\theta_3)\ =\\
&\qquad L_2S\theta_4\\
&f_{23}(p)=(C\theta_1 C\theta_2)x+(C\theta_2 S\theta_1)y+(S\theta_2)z+(D_3)t\ =\\
&\qquad (C\theta_1 C\theta_2)P_x+(C\theta_2 S\theta_1)P_y+(S\theta_2)P_z+(D_3)\ =\\
&\qquad 0
\end{aligned}$$

En este caso, se utiliza sólo la última columna, relativa a $P(P_x, P_y, P_z)$ y con las dos matrices inversas ($f_{31}(p), f_{32}(p), f_{33}(p)$):

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x\\ . & . & . & P_y\\ . & . & . & P_z\\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, se puede considerar la tercera igualdad. Y desde ella parece evidente que se determinará una variable articular en función de la segunda. Puede tenerse θ_1 en función de θ_2 o θ_2 en función de θ_1 , como ya se definiera en el intento anterior:

$$(C\theta_1 C\theta_2)P_x+(C\theta_2 S\theta_1)P_y+(S\theta_2)P_z+(D_3)=0$$
$$C\theta_1(C\theta_2 P_x)+S\theta_1(C\theta_2 P_y)=-(S\theta_2)P_z-(D_3)$$
$$C\theta_2(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)+S\theta_2(P_z)=-(D_3)$$

Y mediante la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Leftrightarrow \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Se llega a:

$$\theta_1=atan2((C\theta_2 P_y),(C\theta_2 P_x))...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(C\theta_2 P_x)^2+(C\theta_2 P_y)^2-(-(S\theta_2)P_z-(D_3))^2},(-(S\theta_2)P_z-(D_3)))$$

$$\theta_2=atan2((P_z),(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y))\pm atan2(\sqrt{(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2+(P_z)^2-(-(D_3))^2},(-(D_3)))$$

Por lo que el resultado sería dependiente, θ_1 en función de θ_2 , o θ_2 en función de θ_1 .

Y por otra parte, los otros dos ángulos serían complicados de despejar. Luego resultaría sin una solución evidente.

1.6.2.4 Intento 4 - Análisis del Problema y Solución Desacoplada

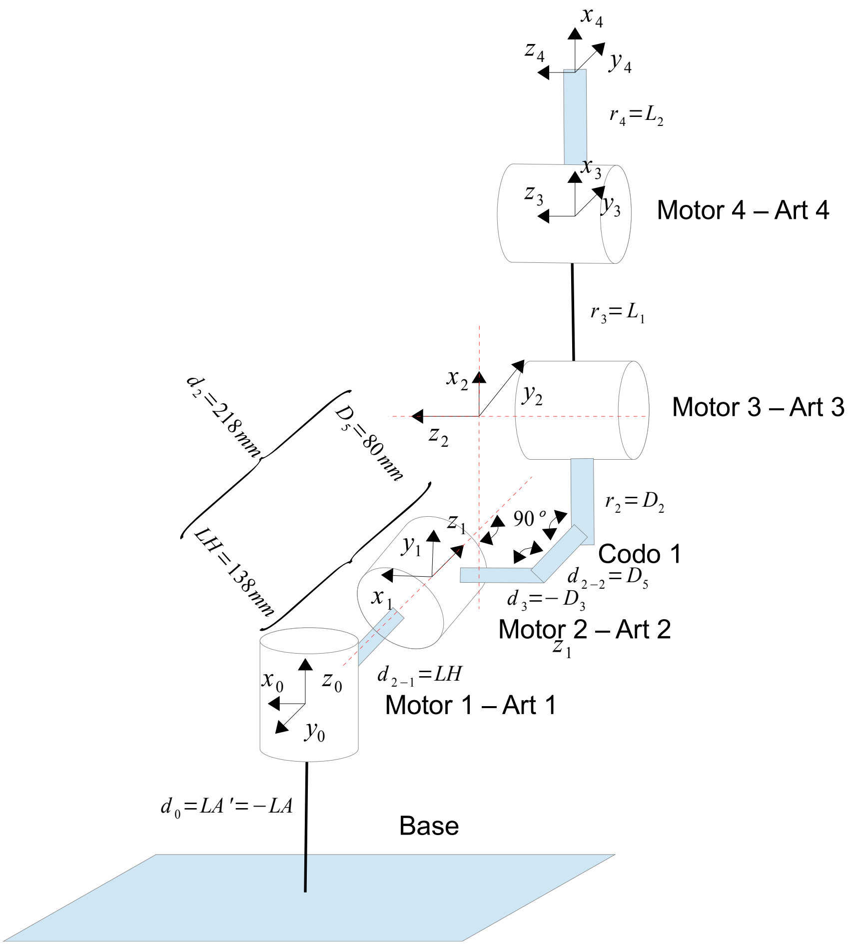


Ilustración 24: Brazo con cuatro motores, con el primero perpendicular al suelo, y con codo

Como se ha visto con anterioridad, los motores correspondientes a esta arquitectura no tienen una solución evidente, ni tampoco fácil. Los dos últimos motores son interdependientes, así como los dos primeros.

Por ello se va a tratar de aplicar una solución basada en el desacoplamiento en subproblemas, y de esta forma, tratar de resolver subproblemas más sencillos, con una solución alcanzable a través de un modelo analítico.

En este caso, se va a realizar un análisis previo del problema, para elegir un desacople acertado con los diferentes subproblemas que lo componen.

Se puede deducir que los dos primeros motores determinan la dirección de movimiento del brazo definiendo un plano de ataque hacia el punto final de destino, mientras que los dos últimos parecen realizar el ajuste dentro del plano de ataque hacia el propio punto final de destino.

Por tanto, se podrían tratar como dos grupos de motores distintos.

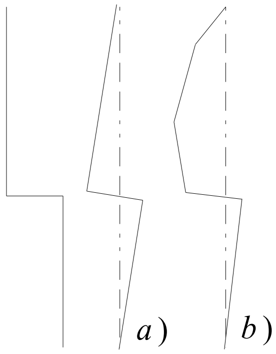


Ilustración 25: Soluciones posibles de acceso al punto de destino del Brazo de prueba para presentación de TFG

Por otra parte, a la hora de encontrar una solución, es previsible la existencia de infinitas soluciones, dependiendo de los ángulos escogidos en las diferentes articulaciones. De hecho, en la opción a) se podría acceder al punto sin hacer uso del motor de la articulación 2, al acceder al punto sólo mediante el uso de las verticales, mientras que en la opción b) se utilizan todos los motores, al acceder al punto de destino con el brazo inclinado sobre un plano de ataque oblicuo.
Por tanto, habrá que determinar cómo se quiere acceder al punto deseado para restringir, de alguna forma, el ángulo de ataque al punto.

De esta forma, se empezará el análisis de los dos primeros motores como primer grupo de motores, y los dos últimos motores como segundo grupo.
Además, también se podría determinar que las distancias d_{2-1} y d_{2-2} podrían agruparse en una única distancia y tomar como Origen de Coordenadas del segundo motor el mismo Origen de Coordenadas del primero ($O-XYZ$), haciendo que ambos coincidan, puesto que no parece afectar a los resultados obtenidos, ni variar el movimiento.

1.6.2.4.1 Subproblema desacoplado de articulaciones 1-2

Se comenzará con el primer grupo de motores.

1.6.2.4.1.1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \theta_2+\pi/2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 0 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \theta_2+\pi/2 & D5+LH & D2 & \pi/2 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y la matriz ${}^{1}A_2$ anterior afectada se convierte en:

$$ {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$ T={}^{0}A_2={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2 $$

$$ \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} $$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$ T={}^{0}A_2={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ \begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & d_2 S\theta_1 - r_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 & C\theta_2 S\theta_1 & -d_2 C\theta_1 - r_2 S\theta_1 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2=D_5+LH$ y $r_2=D_2$), y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$ P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \\ 1 \end{pmatrix} = $$

$$ \begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & (D_5+LH)S\theta_1 - D_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 & C\theta_2 S\theta_1 & -(D_5+LH)C\theta_1 - D_2 S\theta_1 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & D_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = $$

$$\begin{pmatrix} (D_5+LH)S\theta_1-D_2C\theta_1S\theta_2 \\ -(D_5+LH)C\theta_1-D_2S\theta_1S\theta_2 \\ D_2C\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=((D_5+LH)S\theta_1-D_2C\theta_1S\theta_2,-(D_5+LH)C\theta_1-D_2S\theta_1S\theta_2,D_2C\theta_2)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes y ángulos definidos, para así determinar el punto alcanzado.

1.6.2.4.1.2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).

La matriz calculada en Cinemática Directa se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo.

Sin embargo, en este punto aparece un elemento no considerado hasta ahora, la determinación de las longitudes con las que se calcularán, tanto las ecuaciones de los ángulos, como la posición del punto intermedio $P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})$. De esta forma, será a través del propio modelo como se determinen esas distancias. Así, las diferentes posibilidades se muestran en la siguiente imagen.

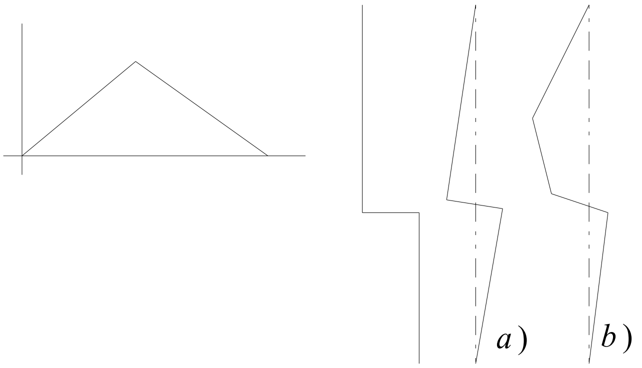


Ilustración 26: Soluciones posibles de acceso al punto de destino del Brazo de prueba para presentación de TFG

Puesto que hay infinitas soluciones, la decisión de cómo se ataca al punto de destino estará en manos de quien plantee el modelo a resolver.

1 Plano Vertical

Se podría optar porque la solución fuera como en el caso **a)**, lo que permitiría el acceso al punto desde la vertical, y por tanto, sin hacer uso del segundo motor. En este caso los parámetros a utilizar estarían en función del plano X,Y (parámetros $d_2=D_5+LH$, $r_2=D_2$ y $d_3=-D_3$), y el ángulo θ_1 vendría dado por las distancias en ese plano. De esta forma el ángulo θ_1 se calcularía:

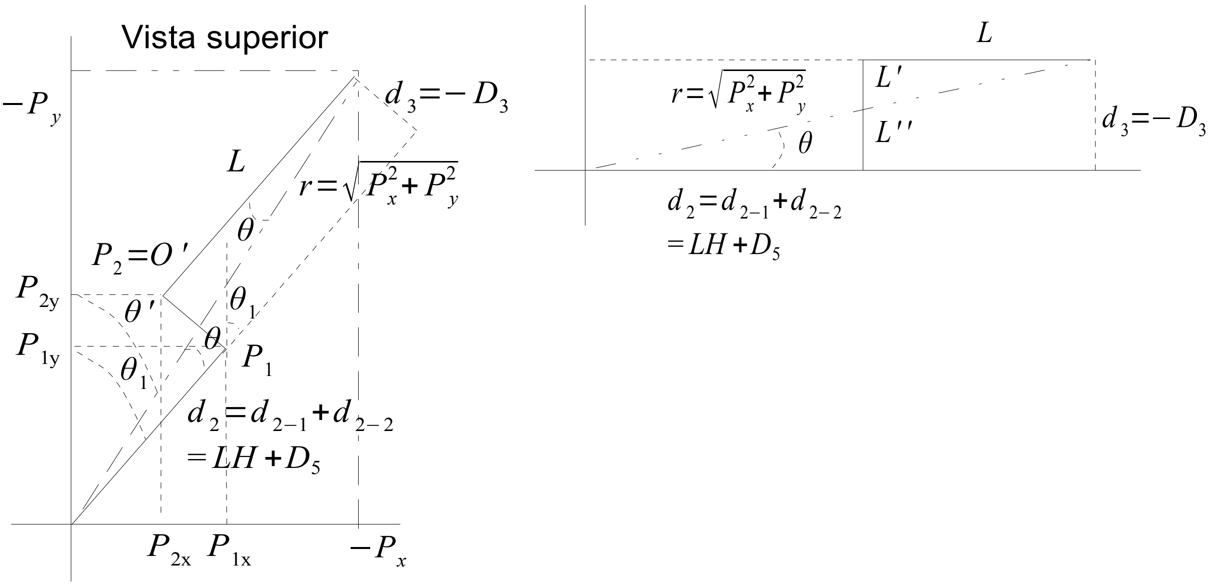


Ilustración 27: Cálculo de θ_1 *para plano de ataque vertical*

$$r=\sqrt{P_x^2+P_y^2}$$
$$\sin(\theta)=d_3/\sqrt{P_x^2+P_y^2}=|-D_3|/\sqrt{P_x^2+P_y^2}$$
$$\theta=\arcsin\left(|-D_3|/\sqrt{P_x^2+P_y^2}\right)$$

$$\sin(\theta')=P_x/\sqrt{P_x^2+P_y^2}$$
$$\theta'=\arcsin\left(P_x/\sqrt{P_x^2+P_y^2}\right)$$

$$\theta_1=\theta'-\theta=\arcsin\left(P_x/\sqrt{P_x^2+P_y^2}\right)-\arcsin\left(|-D_3|/\sqrt{P_x^2+P_y^2}\right)$$
$$\theta_2=0$$

Y en cuanto a las longitudes que servirán para la resolución del resto de motores, P'_{xy} representará la componente en el plano X,Y (suma en el plano X,Y de las longitudes L_1 y L_2), mientras que, la componente P'_z se calculará como la altura en relación al nuevo origen de Coordenadas, situado en el motor 3:

$$tg(\theta)=L''/d_2=L''/(LH+D_5)$$
$$L''=(LH+D_5)\,tg(\theta)$$

$$d_3=-D_3=L'+L''$$
$$L'=L_3-L''=-D_3-(LH+D_5)\,tg(\theta)$$

$$tg(\theta)=L'/L$$
$$L=L'/tg(\theta)$$

$$P'_{xy}=L=L'/tg(\theta)=(-D_3-(LH+D_5)\,tg(\theta))/tg(\theta)$$
$$P'_z=P_z-d_0-D_2=P_z-LA-D_2$$

Y, aún queda resolver un problema con la localización del Origen de Coordenadas del tercer motor a la hora de calcular los ángulos θ_3 y θ_4 (P_1), y la localización del punto que sirva como

Origen de Coordenadas para la resolución del segundo grupo de motores, en el mismo plano de ataque (P_2).

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = ((LH+D_5)\sin(\theta_1), (LH+D_5)\cos(\theta_1), |-LA|+D_2)$$
$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = ((LH+D_5)\sin(\theta_1)-|-D_3|\cos(\theta_1), (LH+D_5)\cos(\theta_1)+|-D_3|\sin(\theta_1), |-LA|+D_2)$$

Por tanto, la localización del punto final de destino P respecto al Origen de Coordenadas real del segundo grupo de motores $O'-UVW$ (P_1) sería:

$$P'(P'_x, P'_y, P'_z) = P(P_x, P_y, P_z) - P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) \;=$$
$$(P_x-(LH+D_5)\sin(\theta_1), P_y-(LH+D_5)\cos(\theta_1), P_z-LA-D_2)$$

Y la localización del punto final de destino P respecto al Origen de Coordenadas virtual del segundo grupo de motores (P_2) sería:

$$P''(P''_x, P''_y, P''_z) = P(P_x, P_y, P_z) - P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) \;=$$
$$(P_x-((LH+D_5)\sin(\theta_1)-|-D_3|\cos(\theta_1)), P_y-((LH+D_5)\cos(\theta_1)+|-D_3|\sin(\theta_1)), P_z-(LA+D_2)) \;=$$
$$(P_x-(LH+D_5)\sin(\theta_1)+|-D_3|\cos(\theta_1), P_y-(LH+D_5)\cos(\theta_1)-|-D_3|\sin(\theta_1), P_z-LA-D_2)$$

En resumen:

$$\theta_1 = \theta' - \theta = \arcsin(P_x/\sqrt{P_x^2+P_y^2}) - \arcsin(|-D_3|/\sqrt{P_x^2+P_y^2})$$
$$\theta_2 = 0$$
$$P'_{xy} = L = L'/tg(\theta) = (-D_3-(LH+D_5)tg(\theta))/tg(\theta)$$
$$P'_z = P_z - LA - D_2$$
$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = ((LH+D_5)\sin(\theta_1), (LH+D_5)\cos(\theta_1), |-LA|+D_2)$$
$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = ((LH+D_5)\sin(\theta_1)-|-D_3|\cos(\theta_1), (LH+D_5)\cos(\theta_1)+|-D_3|\sin(\theta_1), |-LA|+D_2)$$

P respecto a P_1 :

$$P'(P'_x, P'_y, P'_z) = (P_x-(LH+D_5)\sin(\theta_1), P_y-(LH+D_5)\cos(\theta_1), P_z-LA-D_2)$$

P respecto a P_2 :

$$P''(P''_x, P''_y, P''_z) \;=$$
$$(P_x-(LH+D_5)\sin(\theta_1)+|-D_3|\cos(\theta_1), P_y-(LH+D_5)\cos(\theta_1)-|-D_3|\sin(\theta_1), P_z-LA-D_2)$$

Luego ya se han calculado los ángulos θ_1 y θ_2 y se tiene la longitud L de la distancia en la base para el siguiente grupo de motores, en el caso de aproximación al punto de destino por un plano vertical, así como la relación de puntos y distancias necesarias.

2 Plano Oblicuo

También se podría optar porque la solución fuera como en el caso **b)**, lo que permitiría el acceso al punto desde un plano oblicuo, y por tanto, haciendo uso del segundo motor. En este caso los parámetros a utilizar estarían en función del plano X, Y y del ángulo de ataque que se definiera por diseño (parámetros $d_2 = D_5 + LH$, $r_2 = D_2$ y $d_3 = -D_3$).
De esta forma el ángulo θ_1 se calcularía como resultado de la opción del ángulo de ataque escogido en el segundo grupo de motores.

En este caso, habrá que despejar θ_1 en función de θ_2 , donde este segundo angulo θ_2

determinará un mayor o menor ángulo de ataque desde la vertical sobre el punto de destino. Así si se busca una mayor acercamiento del ángulo de ataque a la horizontal, se necesita aumentar θ_2 , y si, como en el caso anterior, como caso extremo, se quiere que el ángulo de ataque sea vertical, $\theta_2=0$.

Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en la igualdad del tipo:

$$({}^0A_1)^{-1}T={}^1A_2$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación, será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 , y así sucesivamente con θ_3 y θ_4 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_2=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C\theta_1S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1C\theta_2 & d_2S\theta_1-r_2C\theta_1S\theta_2 \\ -S\theta_1S\theta_2 & -C\theta_1 & C\theta_2S\theta_1 & -d_2C\theta_1-r_2S\theta_1S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_2=D_5+LH$ y $r_2=D_2$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -C\theta_1S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1C\theta_2 & (D_5+LH)S\theta_1-D_2C\theta_1S\theta_2 \\ -S\theta_1S\theta_2 & -C\theta_1 & C\theta_2S\theta_1 & -(D_5+LH)C\theta_1-D_2S\theta_1S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & D_2C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$
{}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -D_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & D_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & D_5 + LH \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^{0}A_1)^{-1}T$:

$$
\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$
\begin{aligned}
&f_{11} = C\theta_1 x + S\theta_1 y \\
&f_{12} = z \\
&f_{13} = S\theta_1 x - C\theta_1 y
\end{aligned}
$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$
({}^{0}A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -D_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & D_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & D_5 + LH \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones (Formato: $f_{ij}(s) = Izquierda \sin sinplificar$ = $derecha \sin simplificar = derecha\ simplificado$):

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(n) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1(-C\theta_1 S\theta_2) + S\theta_1(-S\theta_1 S\theta_2) = S\theta_2 \\
&f_{12}(n) = z = C\theta_2 \\
&f_{13}(n) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1(-C\theta_1 S\theta_2) - C\theta_1(-S\theta_1 S\theta_2) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(o) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1 S\theta_1 + S\theta_1(-C\theta_1) = 0 \\
&f_{12}(o) = z = 0 \\
&f_{13}(o) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1 S\theta_1 - C\theta_1(-C\theta_1) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(a) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1(C\theta_2 C\theta_1) + S\theta_1(C\theta_2 S\theta_1) = C\theta_2 \\
&f_{12}(a) = z = S\theta_2 \\
&f_{13}(a) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1(C\theta_2 C\theta_1) - C\theta_1(C\theta_2 S\theta_1) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{11}(p) = C\theta_1 x + S\theta_1 y \quad = \\
C\theta_1((D_5 + LH)S\theta_1 - D_2 C\theta_1 S\theta_2) + S\theta_1(-(D_5 + LH)C\theta_1 - D_2 S\theta_1 S\theta_2) \quad =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-D_2 S\theta_2\\
&f_{12}(p)=z=D_2 C\theta_2\\
&f_{13}(p)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1 x-C\theta_1 y \quad =\\
&\qquad S\theta_1((D_5+LH)S\theta_1-D_2 C\theta_1 S\theta_2)-C\theta_1(-(D_5+LH)C\theta_1-D_2 S\theta_1 S\theta_2) \quad =\\
&\qquad D_5+LH
\end{aligned}
$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$:

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_{1x}\\
. & . & . & P_{1y}\\
. & . & . & P_{1z}\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$
({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix}
C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0\\
S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_{1x}\\
. & . & . & P_{1y}\\
. & . & . & P_{1z}\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y}\\
. & . & . & P_{1z}\\
. & . & . & S\theta_1 P_{1x}-C\theta_1 P_{1y}\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
. & . & . & f_{11}(p)\\
. & . & . & f_{12}(p)\\
. & . & . & f_{13}(p)\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
={}^1A_2=
\begin{pmatrix}
. & . & . & -D_2 S\theta_2\\
. & . & . & D_2 C\theta_2\\
. & . & . & D_5+LH\\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(p)=C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y}=-D_2 S\theta_2\\
&f_{12}(p)=P_{1z}=D_2 C\theta_2\\
&f_{13}(p)=S\theta_1 P_{1x}-C\theta_1 P_{1y}=D_5+LH
\end{aligned}
$$

...

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 y θ_2 , en función de las componentes presentes del punto conocido, P_{1x} , P_{1y} y P_{1z} .
De la tercera igualdad se puede obtener θ_1 :

$$
\begin{aligned}
&f_{13}(p)=S\theta_1 P_{1x}-C\theta_1 P_{1y}=D_5+LH\\
&C\theta_1(-P_{1y})+S\theta_1(P_{1x})=(D_5+LH)
\end{aligned}
$$

Y mediante la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \;\Leftrightarrow\; \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Se llega a:

$$\theta_1=atan2((P_{1x}),(-P_{1y}))\pm atan2(\sqrt{(-P_{1y})^2+(P_{1x})^2-(D_5+LH)^2},(D_5+LH)) \quad *$$

Y de segunda igualdad se puede obtener θ_2 :

$$f_{12}(p)=P_{1z}=D_2 C\theta_2$$
$$D_2 C\theta_2=P_{1z}$$
$$\theta_2=\text{arccos}(P_{1z}/D_2) \quad *$$

Luego ya se tienen las dos igualdades correspondientes a los ángulos θ_1 y θ_2 , para llegar al punto $P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto.

Pero, en el caso de querer determinar por diseño del problema un ángulo θ_2 de forma previa al cálculo del resto de ángulos, se calcularía de forma, también diferente. Así, con la primera ecuación:

$$f_{11}(p)=C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y}=-D_2 S\theta_2$$
$$C\theta_1(P_{1x})+S\theta_1(P_{1y})=(-D_2 S\theta_2)$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_1 :

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \;\Leftrightarrow\; \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$
$$\theta_1=atan2((P_{1y}),(P_{1x}))\pm atan2(\sqrt{(P_{1x})^2+(P_{1y})^2-(-D_2 S\theta_2)^2},(-D_2 S\theta_2)) \quad *$$

De esta forma se tendría θ_1 en función de θ_2 .
Y en este caso, θ_2 se establecería de forma previa, a la hora de generar el propio diseño del modelo.

Pero, aún queda resolver un problema con las distancias como ocurriera el en caso a). En este caso, se trataría de encontrar, por una parte, la distancia entre el punto final de destino P y el punto intermedio, el Origen de Coordenadas del motor 3 en el problema completo (P_1), y por otra, la distancia del propio motor 3 (P_2 , punto donde se determinará el comienzo del brazo a analizar en el segundo grupo de motores) y el punto final de destino P . Por tanto, como P_1 ya se ha calculado con anterioridad, será:

$$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=((D_5+LH)S\theta_1-D_2 C\theta_1 S\theta_2,-(D_5+LH)C\theta_1-D_2 S\theta_1 S\theta_2,D_2 C\theta_2)$$

Y una vez determinado este punto P_1 , se calculará el punto en el que se encuentra el Origen de Coordenadas virtual situado en el motor 3, $O'-UVW$, respecto del Origen de Coordenadas de la base, $O-XYZ$, y desde el que se calcularán los nuevos datos del segundo grupo de motores (P_2):

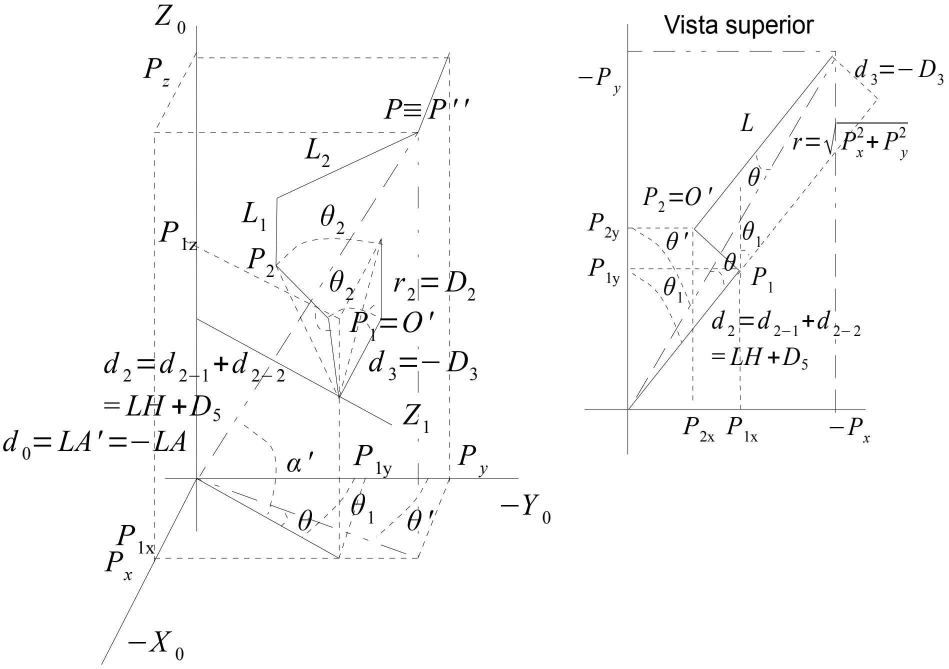


Ilustración 28: Cálculo de O' *para plano de ataque oblicuo*

Para ello, se calculará como la posición relativa al segundo Origen de Coordenadas (O') a través del conjunto de matrices correspondiente al primer conjunto de motores, teniendo en cuenta que la distancia $-D_3$ está situada a lo largo del eje Z_2 :

$$P_2(P_{2x},P_{2y},P_{2z})=\begin{pmatrix}r_x\\r_y\\r_z\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}r_u\\r_v\\r_w\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_x&o_x&a_x&P_{1x}\\n_y&o_y&a_y&P_{1y}\\n_z&o_z&a_z&P_{1z}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-D_3\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-C\theta_1S\theta_2&S\theta_1&C\theta_1C\theta_2&(LH+D_5)S\theta_1-D_2C\theta_1S\theta_2\\-S\theta_2S\theta_1&-C\theta_1&S\theta_1C\theta_2&-D_2S\theta_2S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1\\C\theta_2&0&S\theta_2&L_1+D_2C\theta_2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-D_3\\1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}(C\theta_1C\theta_2(-D_3))+((LH+D_5)S\theta_1-D_2C\theta_1S\theta_2)\\(S\theta_1C\theta_2(-D_3))+(-D_2S\theta_2S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1)\\(S\theta_2(-D_3))+(|-LA|+D_2C\theta_2)\\1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}C\theta_1C\theta_2(-D_3)+(LH+D_5)S\theta_1-D_2C\theta_1S\theta_2\\S\theta_1C\theta_2(-D_3)-D_2S\theta_2S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1\\S\theta_2(-D_3)+|-LA|+D_2C\theta_2\\1\end{pmatrix}$$

Y por tanto:

$$\vec{P}_2\equiv O'\equiv\vec{P}_1+(-\overrightarrow{D}_3)\equiv P_2(P_{2x},P_{2y},P_{2z})\ =$$
$$(C\theta_1C\theta_2(-D_3)+(LH+D_5)S\theta_1-D_2C\theta_1S\theta_2,\ldots,\ldots)$$

$$\begin{gathered}(\ldots, S\theta_1 C\theta_2(-D_3)-D_2 S\theta_2 S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1, \ldots)\\(\ldots, \ldots, S\theta_2(-D_3)+(-LA)+D_2 C\theta_2)\end{gathered}$$

Por tanto, la localización del punto final de destino P respecto al Origen de Coordenadas real del segundo grupo de motores $O'-UVW$ (P_1) sería:

$$\begin{gathered}P'(P'_x, P'_y, P'_z)=P(P_x, P_y, P_z)-P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) =\\P(P_x, P_y, P_z)-((LH+D_5)S\theta_1-D_2 C\theta_1 S\theta_2, -D_2 S\theta_2 S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1, L_1+D_2 C\theta_2) =\\(P_x-((LH+D_5)S\theta_1-D_2 C\theta_1 S\theta_2), P_y-(-D_2 S\theta_2 S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1), P_z-(|-LA|+D_2 C\theta_2)) =\\(P_x-(LH+D_5)S\theta_1+D_2 C\theta_1 S\theta_2, P_y+D_2 S\theta_2 S\theta_1+(LH+D_5)C\theta_1, P_z-|-LA|-D_2 C\theta_2)\end{gathered}$$

Y la localización del punto final de destino P respecto al Origen de Coordenadas virtual del segundo grupo de motores (P_2) sería:

$$\begin{gathered}P''(P''_x, P''_y, P''_z)=P(P_x, P_y, P_z)-P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})=P(P_x, P_y, P_z)\ldots\\\ldots-(C\theta_1 C\theta_2(-D_3)+(LH+D_5)S\theta_1-D_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots, \ldots)\\(\ldots, S\theta_1 C\theta_2(-D_3)-D_2 S\theta_2 S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1, \ldots)\\(\ldots, \ldots, S\theta_2(-D_3)+|-LA|+D_2 C\theta_2) =\\(P_x-(C\theta_1 C\theta_2(-D_3)+(LH+D_5)S\theta_1-D_2 C\theta_1 S\theta_2), \ldots, \ldots)\\(\ldots, P_y-(S\theta_1 C\theta_2(-D_3)-D_2 S\theta_2 S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1), \ldots)\\(\ldots, \ldots, P_z-(S\theta_2(-D_3)+|-LA|+D_2 C\theta_2)) =\\(P_x-C\theta_1 C\theta_2(-D_3)-(LH+D_5)S\theta_1+D_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots, \ldots)\\(\ldots, P_y-S\theta_1 C\theta_2(-D_3)+D_2 S\theta_2 S\theta_1+(LH+D_5)C\theta_1, \ldots)\\(\ldots, P_z-S\theta_2(-D_3)-|-LA|-D_2 C\theta_2)\end{gathered}$$

En resumen:

$$\theta_1=atan2(P_{1y}, P_{1x})\pm atan2(\sqrt{(P_{1x})^2+(P_{1y})^2-(-D_2 S\theta_2)^2}, -D_2 S\theta_2)$$

θ_2 Por elección en el diseño del modelo.

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})=((LH+D_5)S\theta_1-D_2 C\theta_1 S\theta_2, -D_2 S\theta_2 S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1, |-LA|+D_2 C\theta_2)$$

$$\begin{gathered}P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})=(C\theta_1 C\theta_2(-D_3)+(LH+D_5)S\theta_1-D_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots, \ldots)\\(\ldots, S\theta_1 C\theta_2(-D_3)-D_2 S\theta_2 S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1, S\theta_2(-D_3)+|-LA|+D_2 C\theta_2)\end{gathered}$$

P respecto a P_1 :

$$\begin{gathered}P'=(P'_x, P'_y, P'_z) =\\(P_x-(LH+D_5)S\theta_1+D_2 C\theta_1 S\theta_2, P_y+D_2 S\theta_2 S\theta_1+(LH+D_5)C\theta_1, P_z-|-LA|-D_2 C\theta_2)\end{gathered}$$

P respecto a P_2 :

$$\begin{gathered}P''(P''_x, P''_y, P''_z)=(P_x-C\theta_1 C\theta_2(-D_3)-(LH+D_5)S\theta_1+D_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots)\\(\ldots, P_y-S\theta_1 C\theta_2(-D_3)+D_2 S\theta_2 S\theta_1+(LH+D_5)C\theta_1, P_z-S\theta_2(-D_3)-|-LA|-D_2 C\theta_2)\end{gathered}$$

Y de esta forma ya se tienen los dos ángulos, en este caso con θ_1 en función de θ_2 , y el punto que representa el Origen de Coordenadas desde el motor 3 (P_2) para simplificar el cálculo posterior del segundo grupo de motores.

1.6.2.4.2 Subproblema desacoplado de articulaciones 3-4

Una vez determinados los parámetros de los primeros dos motores, se va a resolver el siguiente grupo de motores.
Ya se habían obtenido las dos igualdades correspondientes a los dos ángulos de las dos primeras articulaciones θ_1 y θ_2, las componentes del punto de destino P en función del nuevo Origen de Coordenadas O' (P'), las componentes del punto intermedio que será el Origen de Coordenadas real del segundo grupo de motores (P_1) y las componentes del punto que servirá de base para el segundo grupo de motores que será su origen de Coordenadas virtual (P_2).

Para el caso de un plano de ataque vertical:

$\theta_1=\theta'-\theta=\arcsin(P_x/\sqrt{P_x^2+P_y^2})-\arcsin(|-D_3|/\sqrt{P_x^2+P_y^2})$
$\theta_2=0$
$P'_{xy}=L=L'/tg(\theta)=(-D_3-(LH+D_5)tg(\theta))/tg(\theta)$
$P'_z=P_z-LA-D_2$
$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=((LH+D_5)\sin(\theta_1),(LH+D_5)\cos(\theta_1),|-LA|+D_2)$
$P_2(P_{2x},P_{2y},P_{2z})=((LH+D_5)\sin(\theta_1)-|-D_3|\cos(\theta_1),(LH+D_5)\cos(\theta_1)+|-D_3|\sin(\theta_1),|-LA|+D_2)$
P respecto a P_1 :
$P'(P'_x,P'_y,P'_z)=(P_x-(LH+D_5)\sin(\theta_1),P_y-(LH+D_5)\cos(\theta_1),P_z-LA-D_2)$
P respecto a P_2 :
$P''(P''_x,P''_y,P''_z)$ =
$(P_x-(LH+D_5)\sin(\theta_1)+|-D_3|\cos(\theta_1),P_y-(LH+D_5)\cos(\theta_1)-|-D_3|\sin(\theta_1),P_z-LA-D_2)$
Componente xy en segundo grupo: $P'_{xy}=L=(L_3-L_2 tg(\theta))/tg(\theta)$ =
$\sqrt{(P_x-(LH+D_5)\sin(\theta_1)+(-D_3)\cos(\theta_1))^2+(P_y-(LH+D_5)\cos(\theta_1)-(-D_3)\sin(\theta_1))^2}$
Componente z en segundo grupo: $P'_z=P_z-|-LA|-D_2$

Para el caso de un plano de ataque oblicuo:

$\theta_1=atan2(P_{1y},P_{1x})\pm atan2(\sqrt{(P_{1x})^2+(P_{1y})^2-(-D_2S\theta_2)^2},-D_2S\theta_2)$
θ_2 Por elección en el diseño del modelo.
$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=((LH+D_5)S\theta_1-D_2C\theta_1S\theta_2,-D_2S\theta_2S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1,|-LA|+D_2C\theta_2)$
$P_2(P_{2x},P_{2y},P_{2z})=(C\theta_1C\theta_2(-D_3)+(LH+D_5)S\theta_1-D_2C\theta_1S\theta_2,...,...)$
$(...,S\theta_1C\theta_2(-D_3)-D_2S\theta_2S\theta_1-(LH+D_5)C\theta_1,S\theta_2(-D_3)+|-LA|+D_2C\theta_2)$
P respecto a P_1 :
$P'=(P'_x,P'_y,P'_z)$ =
$(P_x-(LH+D_5)S\theta_1+D_2C\theta_1S\theta_2,P_y+D_2S\theta_2S\theta_1+(LH+D_5)C\theta_1,P_z-|-LA|-D_2C\theta_2)$
P respecto a P_2 :
$P''(P''_x,P''_y,P''_z)=(P_x-C\theta_1C\theta_2(-D_3)-(LH+D_5)S\theta_1+D_2C\theta_1S\theta_2,...)$
$(...,P_y-S\theta_1C\theta_2(-D_3)+D_2S\theta_2S\theta_1+(LH+D_5)C\theta_1,P_z-S\theta_2(-D_3)-|-LA|-D_2C\theta_2)$
Componente xy en segundo grupo: $P''_{xy}=L$ =
$\sqrt{(P_x-C\theta_1C\theta_2|-D_3|-(LH+D_5)S\theta_1+D_2C\theta_1S\theta_2)^2+(P_y-S\theta_1C\theta_2|-D_3|+D_2S\theta_2S\theta_1+(LH+D_5)C\theta_1)^2}$
Componente z en segundo grupo: $P''_z=P_z-S\theta_2|-D_3|-|-LA|-D_2C\theta_2$

Si se observa ambos casos, en realidad, el plano vertical se obtiene con un ángulo $\theta_2=0$, por tanto, no es necesario seguir con los dos casos, sino que se puede seguir analizando un caso genérico, en este caso, con un plano de ataque oblicuo.

Para resolver el problema para los dos motores restantes, podría usarse la resolución realizada en el "Intento 7" del "Caso 4-2", pero es un modelo de resolución geométrico por lo que es preferible no usarlo ya que se están definiendo soluciones analíticas, siempre que sea posible. Por tanto, se resolverá mediante el procedimiento ya usado en el "Intento 8". También hay que destacar que la solución es similar a la del "Caso 3-0".

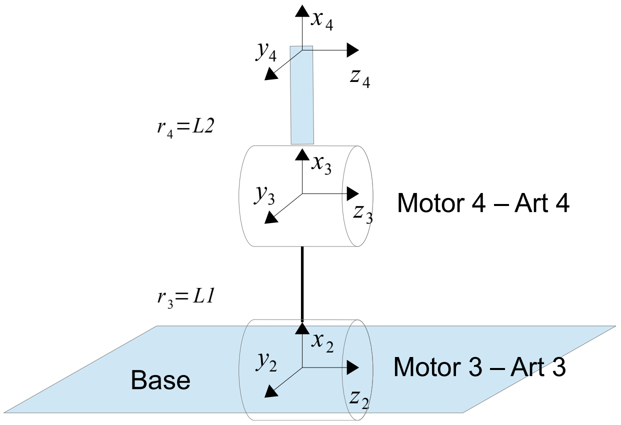


Ilustración 29: Análisis de los dos últimos motores en el último grupo de motores del Brazo tras desacoplar los dos primeros

De esta forma, el Origen de Coordenadas se considera en la Base virtual ($O-XYZ$) correspondiente al tercer motor del problema completo (primer motor en paralelo).

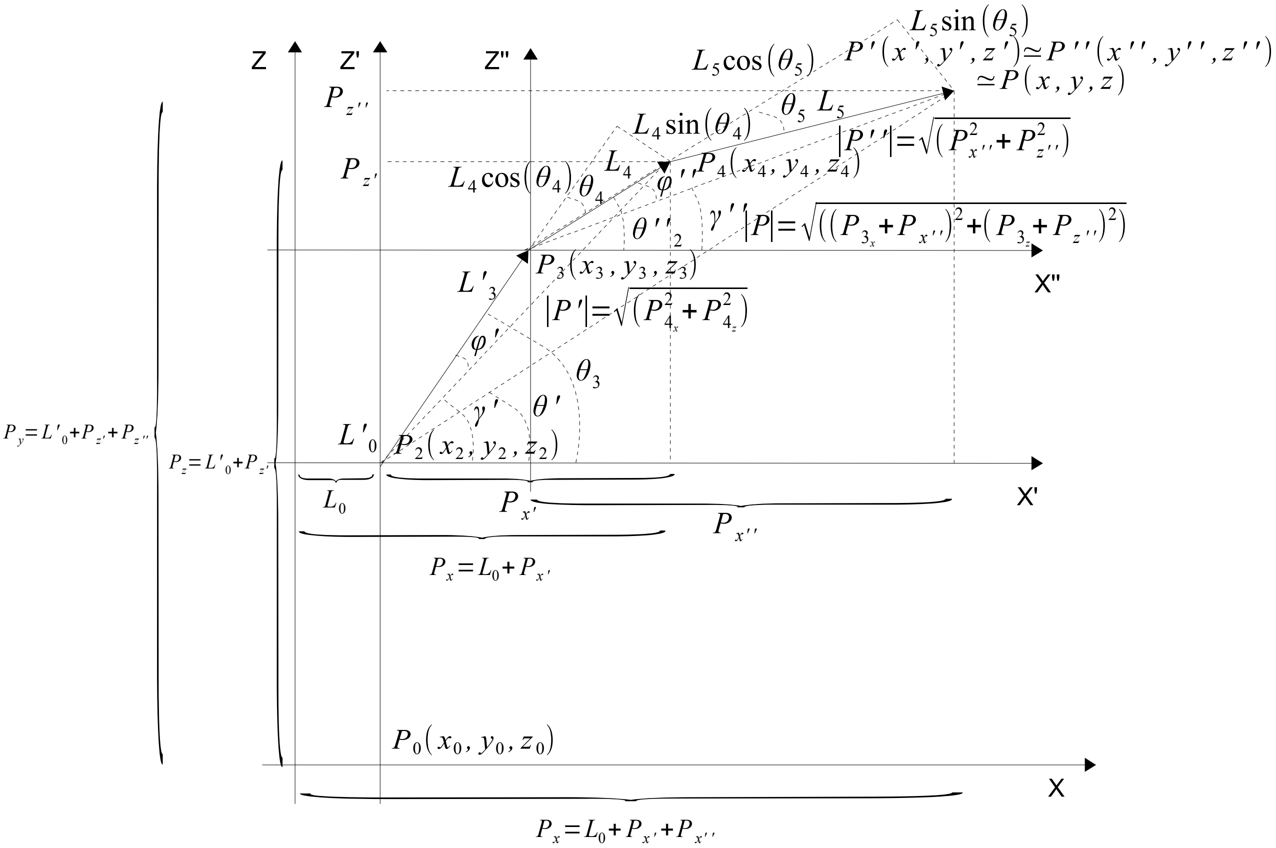


Ilustración 30: Esquema asociado a la solución a aplicar del Ejemplo 4-2, con tres motores paralelos entre sí

Como este caso resulta ser una simplificación del "Caso 4-2", puesto que tiene un motor menos y ambos motores siguen teniendo sus ejes paralelos, la imagen anterior podría ser usada también para mostrar el problema actual, siempre que se elimine la parte correspondiente al tercer motor, y por tanto, el punto P_3 , el ángulo θ_3 y la distancia L'_3 . Así, los ángulos θ_4 y θ_5 pasarían a ser θ_3 y θ_4 .

1.6.2.4.2.1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & -D3 & L1 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L2 & 0 \end{array}$$

Sin embargo, como ya se ha indicado, el desplazamiento lateral de la articulación 3 ya ha sido tenido en cuenta a la hora de calcular el plano de ataque sobre el punto de destino ($d_3 = -D_3$), por lo que no se incluirá en este análisis y, por tanto, la matriz de parámetros de DH quedará:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & 0 & L1 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L2 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = [{}^{i-1}A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$ {}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^2A_3]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T = {}^2A_4 = {}^2A_3\,{}^3A_4$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T = {}^2A_4 = {}^2A_3\,{}^3A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 + r_4 C\theta_3 C\theta_4 - r_4 S\theta_3 S\theta_4 \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & r_3 S\theta_3 + r_4 C\theta_3 S\theta_4 + r_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 C(\theta_3+\theta_4) + r_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 S(\theta_3+\theta_4) + r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_3 = L_1$ y $r_4 = L_2$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3 & 0 & L_1 C\theta_3 + L_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & L_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_3 S\theta_4 + L_2 C\theta_4 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2 C(\theta_3+\theta_4) + L_1 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2 S(\theta_3+\theta_4) + L_1 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P''(x,y,z)$ - $O - XYZ$), se aplicaría:

$$P'''(P'''_x, P'''_y, P'''_z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P''_x \\ n_y & o_y & a_y & P''_y \\ n_z & o_z & a_z & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3 & 0 & L_1 C\theta_3 + L_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & L_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_3 S\theta_4 + L_2 C\theta_4 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2 C(\theta_3+\theta_4) + L_1 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2 S(\theta_3+\theta_4) + L_1 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_1 C\theta_3 + L_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ L_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_3 S\theta_4 + L_2 C\theta_4 S\theta_3 S\theta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 C(\theta_3+\theta_4) + L_1 C\theta_3 \\ L_2 S(\theta_3+\theta_4) + L_1 S\theta_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto P'' sería:

$$P''(x,y,z) = P''(P''_x \ , \ P''_y \ , \ P''_z) \ = \\ (L_1 C\theta_3 + L_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 S\theta_3 S\theta_4 \ , \ L_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_3 S\theta_4 + L_2 C\theta_4 S\theta_3 S\theta_4 \ , \ 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.
Es interesante comentar que la componente P''_z resulta nula por estar este segundo grupo de motores en el plano de ataque del punto final de destino.

1.6.2.4.2.2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$T = {}^2A_4 = {}^2A_3 {}^3A_4$$
$$({}^2A_3)^{-1} T = {}^3A_4 = {}^3A_4$$

En este caso, para ejecutar el procedimiento general, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_3 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_4 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^3A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^2A_3]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^2A_4=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P''_x \\ n_y & o_y & a_y & P''_y \\ n_z & o_z & a_z & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 + r_4 C\theta_3 C\theta_4 - r_4 S\theta_3 S\theta_4 \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & r_3 S\theta_3 + r_4 C\theta_3 S\theta_4 + r_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 C(\theta_3+\theta_4) + r_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 S(\theta_3+\theta_4) + r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3 & 0 & P''_x \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & P''_y \\ 0 & 0 & 1 & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & P''_x \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & P''_y \\ 0 & 0 & 1 & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_3=L_1$ y $r_4=L_2$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^2A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3 & 0 & L_1 C\theta_3 + L_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & L_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_3 S\theta_4 + L_2 C\theta_4 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2 C(\theta_3+\theta_4) + L_1 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2 S(\theta_3+\theta_4) + L_1 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & -C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3 & 0 & P''_x \\ C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4 & 0 & P''_y \\ 0 & 0 & 1 & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L_1 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & P''_x \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & P''_y \\ 0 & 0 & 1 & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_2C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_2S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $(^1A_2)^{-1}(^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $(^2A_3)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=C\theta_3x+S\theta_3y-L_1t$$
$$f_{12}=-S\theta_3x+C\theta_3y$$
$$f_{13}=z$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$(^2A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_2C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_2S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_3x+S\theta_3y-L_1t=C\theta_3(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)+S\theta_3(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3)=C\theta_4$$
$$f_{12}(n)=-S\theta_3x+C\theta_3y=-S\theta_3(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)+C\theta_3(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3)=S\theta_4$$
$$f_{13}(n)=z=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_3x+S\theta_3y-L_1t=C\theta_3(-C\theta_3S\theta_4-C\theta_4S\theta_3)+S\theta_3(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)=-S\theta_4$$
$$f_{12}(o)=-S\theta_3x+C\theta_3y=-S\theta_3(-C\theta_3S\theta_4-C\theta_4S\theta_3)+C\theta_3(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)=C\theta_4$$
$$f_{13}(o)=z=0$$

$$f_{11}(a)=C\theta_3x+S\theta_3y-L_1t=0$$
$$f_{12}(a)=-S\theta_3x+C\theta_3y=0$$
$$f_{13}(a)=z=1$$

$$
\begin{aligned}
& f_{11}(p)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L_1 t=C\theta_3(L_1 C\theta_3+L_2 C\theta_3 C\theta_4-L_2 S\theta_3 S\theta_4)\ldots \\
& \ldots+S\theta_3(L_1 S\theta_3+L_2 C\theta_3 S\theta_4+L_2 C\theta_4 S\theta_3)-L_1=L_2 C\theta_4 \\
& f_{12}(p)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=-S\theta_3(L_1 C\theta_3+L_2 C\theta_3 C\theta_4-L_2 S\theta_3 S\theta_4)\ldots \\
& \ldots+C\theta_3(L_1 S\theta_3+L_2 C\theta_3 S\theta_4+L_2 C\theta_4 S\theta_3)=L_2 S\theta_4 \\
& f_{13}(p)=z+D_3 t=0
\end{aligned}
$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P''(P''_x, P''_y, P''_z)$:

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & P''_x \\
. & . & . & P''_y \\
. & . & . & P''_z \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$
({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix}
C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L_1 \\
-S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
. & . & . & P''_x \\
. & . & . & P''_y \\
. & . & . & P''_z \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}=
$$

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & C\theta_3 P''_x+S\theta_3 P''_y-L_1 \\
. & . & . & (-S\theta_3)P''_x+C\theta_3 P''_y \\
. & . & . & P''_z \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
. & . & . & f_{11}(p) \\
. & . & . & f_{12}(p) \\
. & . & . & f_{13}(p) \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}={}^3A_4=\begin{pmatrix}
. & . & . & L_4 C\theta_4 \\
. & . & . & L_4 S\theta_4 \\
. & . & . & 0 \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
& f_{11}(p)=C\theta_3 P''_x+S\theta_3 P''_y-L_1=L_2 C\theta_4 \\
& f_{12}(p)=-S\theta_3 P''_x+C\theta_3 P''_y=L_2 S\theta_4 \\
& f_{13}(p)=P''_z=0
\end{aligned}
$$

Con estas igualdades se puede intentar determinar los ángulos θ_3 y θ_4 .

Se podrían usar las igualdades recién extraídas pero, por separado, dejarían el ángulo θ_3 en función de θ_4 , o θ_4 en función de θ_3 . Este resultado sería correcto si se tuviera algún tipo de condición respecto a los ángulos de ataque al punto final de destino. Sin embargo, como no es el resultado deseado, se considerarán las expresiones resultantes de tomar la equivalencia entre $P''^2_x+P''^2_y$ y sus correspondientes elementos de la matriz T (anteriormente calculados en el apartado de Cinemática Directa), sistema de ecuaciones que parece similar al que se obtendría de repetir ese proceso con $(f_{11}(p))^2+(f_{21}(p))^2$:

$$
\begin{aligned}
& P''^2_x+P''^2_y=(L_2 C(\theta_3+\theta_4)+L_1 C\theta_3)^2+(L_2 S(\theta_3+\theta_4)+L_1 S\theta_3)^2 \;= \\
& (L_2 C(\theta_3+\theta_4))^2+2(L_2 C(\theta_3+\theta_4))(L_1 C\theta_3)+(L_1 C\theta_3)^2+(L_2 S(\theta_3+\theta_4))^2\ldots \\
& \qquad\qquad \ldots+2(L_2 S(\theta_3+\theta_4))(L_1 S\theta_3)+(L_1 S\theta_3)^2 \;= \\
& L_2^2((C(\theta_3+\theta_4))^2+(S(\theta_3+\theta_4))^2)+2(L_2 C(\theta_3+\theta_4))(L_1 C\theta_3)+L_1((C\theta_3)^2+(S\theta_3)^2)+\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&...+2(L_2 S(\theta_3+\theta_4))(L_1 S\theta_3) \quad = \\
&L_2^2+L_1^2+2(L_2 C(\theta_3+\theta_4))(L_1 C\theta_3)+2(L_2 S(\theta_3+\theta_4))(L_1 S\theta_3) \quad = \\
&L_2^2+L_1^2+2L_2 L_1(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_3+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_3) \quad = \\
&L_2^2+L_1^2+2L_2 L_1 C(\theta_3+\theta_4-\theta_3) \quad = \\
&L_2^2+L_1^2+2L_2 L_1 C\theta_3=P''^2_x+P''^2_y
\end{aligned}
$$

$$\theta_4=\arccos((P''^2_x+P''^2_y-L_2^2-L_1^2)/2L_2 L_1) \quad *$$

Si ahora se toma la primera fila de la inversa $[{}^2A_3]^{-1}$ y se opera con la cuarta columna de T , y la segunda fila de $[{}^2A_3]^{-1}$, también con la cuarta columna de T , se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&-S\theta_3 P''_x+C\theta_3 P''_y=L_2 S\theta_4 \Leftrightarrow P''_y C\theta_3-P''_x S\theta_3=L_2 S\theta_4 \\
&C\theta_3 P''_x+S\theta_3 P''_y-L_1=L_2 C\theta_4 \Leftrightarrow P''_y S\theta_3+P''_x C\theta_3=L_1+L_2 C\theta_4
\end{aligned}
$$

Y con la razón $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ y $a\sin\theta+b\cos\theta=d \Leftrightarrow \theta=atan2(d,c)-atan2(b,a)$:

$$\theta_3=atan2(L_1+L_2 C\theta_4, L_2 S\theta_4)-atan2(P''_x, P''_y)$$

O también a través de:

$$-S\theta_3 P''_x+C\theta_3 P''_y=L_2 S\theta_4 \Leftrightarrow P''_y C\theta_3-P''_x S\theta_3=L_2 S\theta_4 \Leftrightarrow P''_y C\theta_3+(-P''_x)S\theta_3=L_2 S\theta_4$$

Y mediante la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Leftrightarrow \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Se llegaría a:

$$\theta_3=atan2((-P''_x),(P''_y))\pm atan2(\sqrt{(P''_y)^2+(-P''_x)^2-(L_2 S\theta_4)^2},(L_2 S\theta_4)) \quad *$$

Luego, ya se han obtenido las igualdades correspondientes a los dos ángulos de las dos articulaciones:

$$
\begin{aligned}
&\theta_4=\arccos((P''^2_x+P''^2_y-L_2^2-L_1^2)/2L_2 L_1) \\
&\theta_3=atan2((-P''_x),(P''_y))\pm atan2(\sqrt{(P''_y)^2+(-P''_x)^2-(L_2 S\theta_4)^2},(L_2 S\theta_4))
\end{aligned}
$$

De esta forma, quedará determinado el conjunto de ángulos del subproblema.

1.6.2.4.3 Acoplamiento de las Soluciones de ambos Subproblemas

Una vez tratados los dos grupos de motores por separado, se deben unir los resultados parciales correspondientes a la Cinemática Inversa.
Para ello se tomarán los dos grupos de ecuaciones establecidas en los apartados anteriores.

Primer Grupo (motores 1-2) y Plano Oblicuo (como caso particular sería en un plano vertical, con $\theta_2=0$):

θ_2 Por elección en el diseño del modelo

$\theta_1 = atan2(P_{1y}, P_{1x}) \pm atan2(\sqrt{(P_{1x})^2 + (P_{1y})^2 - (-D_2 S\theta_2)^2}, -D_2 S\theta_2)$

$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = ((LH + D_5) S\theta_1 - D_2 C\theta_1 S\theta_2, -D_2 S\theta_2 S\theta_1 - (LH + D_5) C\theta_1, |-LA| + D_2 C\theta_2)$

$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = (C\theta_1 C\theta_2(-D_3) + (LH + D_5) S\theta_1 - D_2 C\theta_1 S\theta_2, ..., ...)$

$(..., S\theta_1 C\theta_2(-D_3) - D_2 S\theta_2 S\theta_1 - (LH + D_5) C\theta_1, ...)$

$(..., ..., S\theta_2(-D_3) + (-LA) + D_2 C\theta_2)$

P respecto a P_1 ($P - P_1$):

$P'(P'_x, P'_y, P'_z)$ =

$(P_x - (LH + D_5) S\theta_1 + D_2 C\theta_1 S\theta_2, P_y + D_2 S\theta_2 S\theta_1 + (LH + D_5) C\theta_1, P_z - |-LA| - D_2 C\theta_2)$

P respecto a P_2 ($P - P_2$):

$P''(P''_x, P''_y, P''_z) = (P_x - C\theta_1 C\theta_2(-D_3) - (LH + D_5) S\theta_1 + D_2 C\theta_1 S\theta_2, ...)$

$(..., P_y - S\theta_1 C\theta_2(-D_3) + D_2 S\theta_2 S\theta_1 + (LH + D_5) C\theta_1, P_z - S\theta_2(-D_3) - |-LA| - D_2 C\theta_2)$

Componente xy en segundo grupo: $P''_{xy} = L$ =

$\sqrt{(P_x - C\theta_1 C\theta_2(-D_3) - (LH + D_5) S\theta_1 + D_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + (P_y - S\theta_1 C\theta_2(-D_3) + D_2 S\theta_2 S\theta_1 + (LH + D_5) C\theta_1)^2}$

Componente z en segundo grupo: $P''_z = P_z - S\theta_2(-D_3) - |-LA| - D_2 C\theta_2$

Segundo Grupo (motores 3-4) y Plano único:

P respecto a P_2 en el Sistema de Coordenadas de los motores 3-4 calculado por DH, en Cinemática Directa:

$P''(x, y, z) = P''(P''_x , P''_y , P''_z)$ =

$(L_1 C\theta_3 + L_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 S\theta_3 S\theta_4 , L_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_3 S\theta_4 + L_2 C\theta_4 S\theta_3 S\theta_4 , 0)$

$\theta_4 = \arccos((P''^2_x + P''^2_y - L_2^2 - L_1^2) / 2 L_2 L_1)$

$\theta_3 = atan2((-P''_x), (P''_y)) \pm atan2(\sqrt{(P''_y)^2 + (-P''_x)^2 - (L_2 S\theta_4)^2}, (L_2 S\theta_4))$

Ahora, habrá que acoplar los diferentes resultados obtenidos desde el análisis de las dos partes desacopladas.

Resultaría interesante plantear que no hubiera necesidades sobre el ángulo del plano de ataque que cumplir, y por tanto, se puede iniciar por determinar que el plano de ataque hacia el punto final de destino fuera vertical y, como consecuencia, $\theta_2 = 0$.

De ser así, las ecuaciones correspondientes al primer grupo de motores quedarían como:

$\theta_2 = 0$

$\theta_1 = atan2(P_{1y}, P_{1x}) \pm atan2(\sqrt{(P_{1x})^2 + (P_{1y})^2}, 0)$

$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = ((LH + D_5) S\theta_1, -(LH + D_5) C\theta_1, |-LA| + D_2)$

$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = (C\theta_1(-D_3) + (LH + D_5) S\theta_1, ..., ...)$

$(..., S\theta_1(-D_3) - (LH + D_5) C\theta_1, ...)$

$(..., ..., (-LA) + D_2)$

P respecto a P_1 ($P - P_1$):

$P'(P'_x, P'_y, P'_z)$ =

$(P_x - (LH + D_5) S\theta_1, P_y + (LH + D_5) C\theta_1, P_z - |-LA| - D_2)$

P respecto a P_2 ($P - P_2$):

$P''(P''_x, P''_y, P''_z) = (P_x - C\theta_1(-D_3) - (LH + D_5) S\theta_1, ...)$

$(..., P_y - S\theta_1(-D_3) + (LH + D_5) C\theta_1, P_z - |-LA| - D_2)$

Componente xy en segundo grupo: $P''_{xy} = L$ =

$$\sqrt{(P_x - C\theta_1(-D_3) - (LH + D_5)\,S\theta_1)^2 + (P_y - S\theta_1(-D_3) + (LH + D_5)C\theta_1)^2}$$

Componente z en segundo grupo: $P''_z = P_z - |-LA| - D_2$

Y las del segundo grupo de motores:

P respecto a P_2 en el Sistema de Coordenadas de los motores 3-4 calculado por DH, en Cinemática Directa:

$$P''(x,y,z) = P''(P''_x\ ,\ P''_y\ ,\ P''_z)\ =$$
$$(L_1 C\theta_3 + L_2 C\theta_3 C\theta_4 - L_2 S\theta_3 S\theta_4\ ,\ L_1 S\theta_3 + L_2 C\theta_3 S\theta_4 + L_2 C\theta_4 S\theta_3 S\theta_4\ ,\ 0)$$
$$\theta_4 = \arccos((P''^2_x + P''^2_y - L_2^2 - L_1^2)/2\,L_2 L_1)$$
$$\theta_3 = atan2((-P''_x),(P''_y)) \pm atan2(\sqrt{(P''_y)^2 + (-P''_x)^2 - (L_2 S\theta_4)^2},(L_2 S\theta_4))$$

Así quedaría resuelto el problema, al tener las ecuaciones necesarias para el cálculo de todas las variables articulares.

Y como modelo de resolución de este tipo de problemas, cuando no se pueda resolver mediante un modelo geométrico o analítico simples, parece razonable desacoplar los elementos por partes, de tal forma que puedan ser calculados de forma sencilla a través del uso del punto final de destino y de los puntos finales intermedios, calculados con las matrices correspondientes a las articulaciones anteriores, y con la resta lógica de sus componentes.

1.6.2.4.4 Análisis de la orientación y del plano y ángulo de ataque

Puesto que se está implementando un modelo analítico de resolución en lugar de un modelo geométrico, sería interesante realizar este análisis mediante álgebra matricial, como también se ha hecho a la hora de resolver los dos grupos de motores.

Para ello se debe aplicar el mismo tratamiento que en la resolución de matrices a través del algoritmo de Denavit-Hartenberg. De hecho, se aplicarán las matrices necesarias para su creación:

$$T = \begin{pmatrix} [R]_{3x3} & [p]_{3x1} \\ [F]_{1x3} & [W]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} [Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1} \\ [Perspectiva]_{1x3} & [Escalado]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} =$$
$$\begin{pmatrix} [R]_{3x3} & [p]_{3x1} \\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} [Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1} \\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4}$$
$$[R]_{3x3} = ([n]_{3x1}\ \ [o]_{3x1}\ \ [a]_{3x1}) \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

Los vectores [n] ($\vec{n}$), [o] ($\vec{o}$), [a] ($\vec{a}$), son vectores ortogonales unitarios, donde [n] es un vector unitario que representaría la dirección del eje x^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0), [o] es un vector unitario que representaría la dirección del eje y^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0) y [a] es un vector unitario que representaría la dirección del eje z^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0).

Como ejemplo, en el caso de ser una única rotación alrededor del eje X:

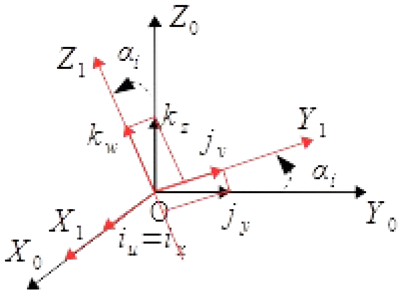


Ilustración 31: Relación de rotación de un ángulo α sobre el eje X en un sistema de coordenadas

$$P(x,y,z) = [P_x, P_y, P_z]^T = P_x \vec{i}_x + P_y \vec{j}_y + P_z \vec{k}_z$$
$$P(u,v,w) = [P_u, P_v, P_w]^T = P_u \vec{i}_u + P_v \vec{j}_v + P_w \vec{k}_w$$
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = R(x,\alpha) \begin{pmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{pmatrix}$$

Aplicando el producto tensorial, producto de Kronecker:

$$R(x,\alpha) = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} P_u & P_v & P_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}_x \vec{i}_u & \vec{i}_x \vec{j}_v & \vec{i}_x \vec{k}_w \\ \vec{j}_y \vec{i}_u & \vec{j}_y \vec{j}_v & \vec{j}_y \vec{k}_w \\ \vec{k}_z \vec{i}_u & \vec{k}_z \vec{j}_v & \vec{k}_z \vec{k}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i \end{pmatrix}$$

Si se interpreta este resultado, se ve que el primer elemento (fila 1-columna 1) vale "1" precisamente por realizarse un giro al rededor del eje X , y que las componentes dependientes del ángulo (fila 2-columna 2 ; fila 2-columna 3 ; fila 3-columna 2 ; fila 3-columna 3), lo son por contemplar la relación de los vectores unitarios $\vec{j}_v, \vec{k}_w$ respecto a las otras dos componentes $\vec{j}_y, \vec{k}_z$.

Y aplicado al problema, en el primer grupo de motores, se determinaría el plano sobre el que se calculará, más tarde, el ángulo de ataque sobre el punto final de destino:

$$R = \begin{pmatrix} \vec{i}_x \vec{i}_u & \vec{i}_x \vec{j}_v & \vec{i}_x \vec{k}_w \\ \vec{j}_y \vec{i}_u & \vec{j}_y \vec{j}_v & \vec{j}_y \vec{k}_w \\ \vec{k}_z \vec{i}_u & \vec{k}_z \vec{j}_v & \vec{k}_z \vec{k}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 \\ -S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_1 & C\theta_2 S\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 \end{pmatrix}$$

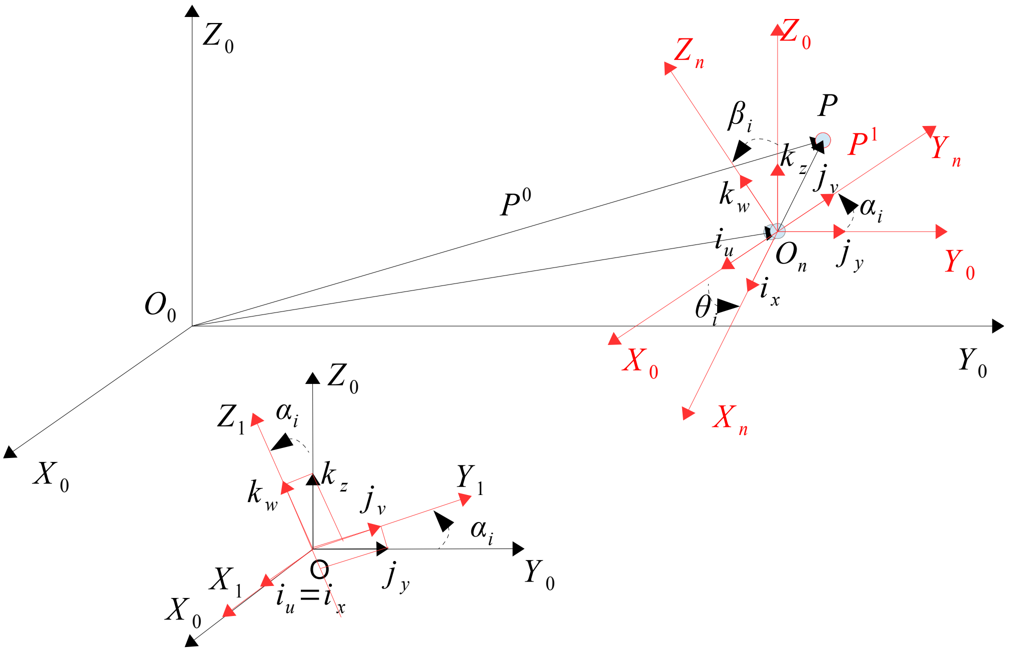


Ilustración 32: Relación de traslación y rotación entre sistemas de coordenadas con rotación de uno a los sistemas de coordenadas

Así, se puede determinar la relación de ángulos deseada. De hecho, cualquiera de los ángulos podría ser predefinido, simplificando así las ecuaciones resultantes. Por ejemplo, si se predetermina que el ángulo del plano de ataque al punto final deseado sea un ángulo determinado $\theta_2 = Cte$, éste ángulo determinará el resto de ángulos reduciendo el número de variables articulares y, por tanto, simplificando el problema.

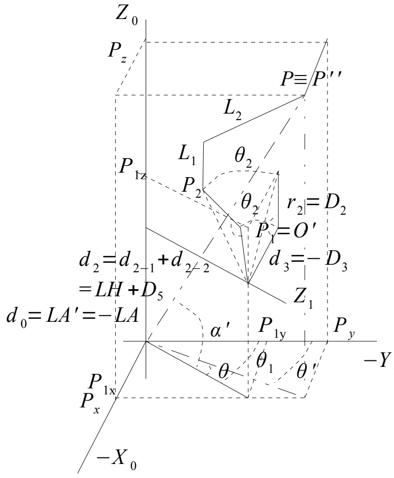


Ilustración 33: Definición del plano de ataque sobre el punto final de destino, con diferentes opciones de desacoplo prefijando diferentes ángulos

Así se puede observar que si, por ejemplo, se prefija el ángulo θ_2 a cualquier valor deseado, se reducirá el rango de valores correspondiente al ángulo θ_1 para determinar el plano de ataque hacia el punto final de destino. Así, sólo quedará un plano sobre el que alcanzar el punto y, por tanto, el resto del brazo sólo se moverá en un único plano a través del cual se alcanzará el punto mediante el uso de dos únicas componentes relativas al plano.

Una vez determinado el plano de ataque, se tratará también de determinar el ángulo de ataque al punto final de destino.

Aplicado al segundo grupo de motores restante:

$$R=\begin{pmatrix} \vec{i}_x\vec{i}_u & \vec{i}_x\vec{j}_v & \vec{i}_x\vec{k}_w \\ \vec{j}_y\vec{i}_u & \vec{j}_y\vec{j}_v & \vec{j}_y\vec{k}_w \\ \vec{k}_z\vec{i}_u & \vec{k}_z\vec{j}_v & \vec{k}_z\vec{k}_w \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4 & -C\theta_3S\theta_4-C\theta_4S\theta_3 & 0 \\ C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3 & C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, se puede determinar la relación de ángulos deseada. Pero no podrá ser predeterminado ninguno de los ángulos restantes puesto que sólo se cuenta con dos motores para alcanzar el punto final.

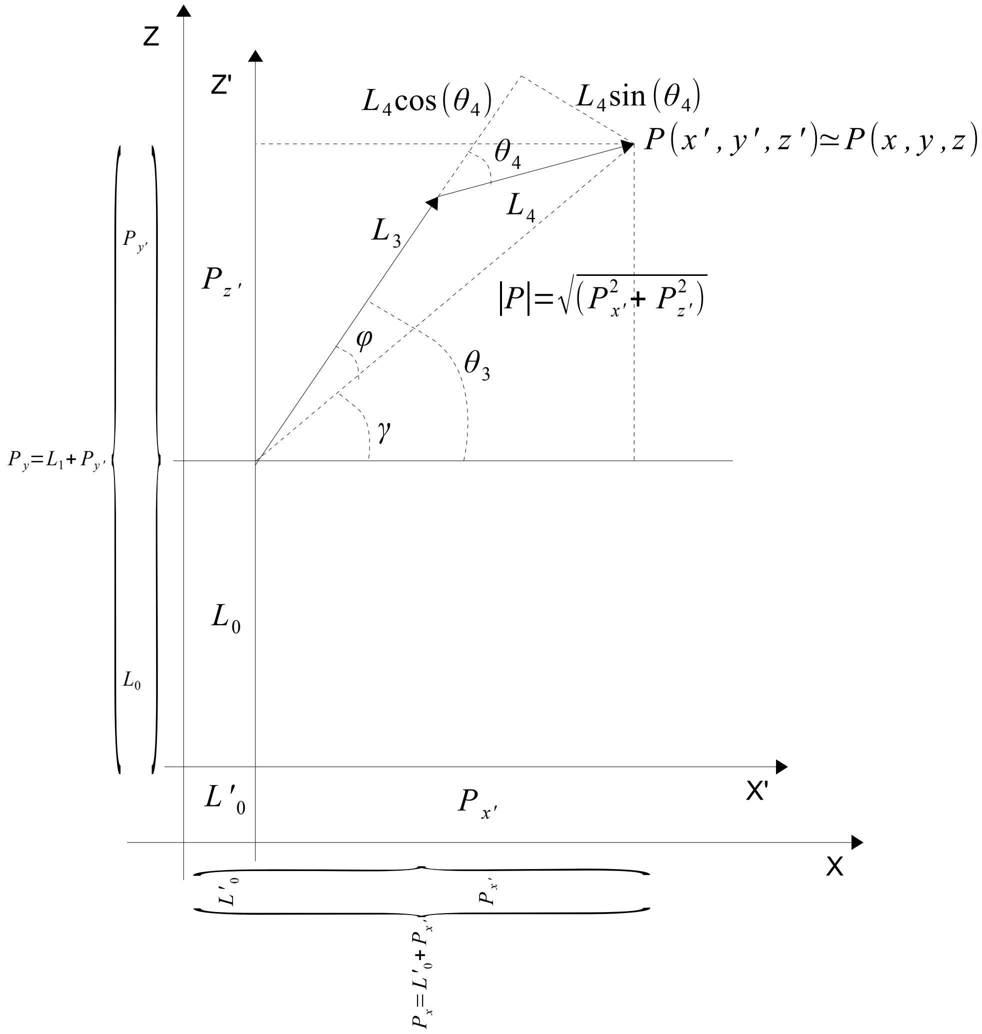


Ilustración 35: Dos últimos motores del brazo desacoplados