UNIVERSIDAD DE BURGOS

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Grado en Ingeniería Informática

Trabajo de Final de Grado
ROBÓTICA: Modelado de Cinemática Directa e Inversa basado en el Algoritmo de Denavit-Hartenberg – Desacoplamiento de Subproblemas

Documentación Técnica
Desarrollo Teórico – Brazo (Caso 1-0)

Presentado por Jaime Sáiz de la Peña

en Universidad de Burgos —
19/01/2023

Tutores:

José Manuel Sáiz Diez

Raúl Marticorena Sánchez

Índice de contenido

Illustration Index

1 Casos planteados

Casos analizados – Motor de cada articulación respecto al anterior y a la base

	Arti-1	Arti-2	Arti-3	Arti-4	Arti-5	
Caso 3-0	Perpen	Perpen				DH
Caso 3-1	Perpen	Perpen	Paralelo			DH+Geométrico
Caso 4-0	Paralelo	Perpen	Paralelo			Cuadrúpodo resuelto por DH
Caso 4-1	Paralelo	Perpen	Paralelo			Cambio de ejes sobre Caso 4-0
Caso 4-2	Paralelo	Paralelo	Paralelo			
Caso 5-0	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo		
Caso 1-0...	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo	Paralelo	
… Arti. 1	Perpen	Fija	Fija	Fija	Fija	DH
… Arti. 2 *	Fija	Perpen	Fija	Fija	Fija	DH-Sin giro de 90º
… Arti. 2	Fija	Perpen	Fija	Fija	Fija	DH-Con giro de 90º
… Arti. 3	Fija	Fija	Perpen	Fija	Fija	DH
… Arti. 4	Fija	Fija	Fija	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 5	Fija	Fija	Fija	Fija	Paralelo	DH
… Arti. 1-2	Perpen	Perpen	Fija	Fija	Fija	DH
… Arti. 2-3 *	Fija	Perpen	Perpen	Fija	Fija	DH-Sin giro de 90º
… Arti. 2-3	Fija	Perpen	Perpen	Fija	Fija	DH-Con giro de 90º
… Arti. 3-4	Fija	Fija	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 4-5	Fija	Fija	Fija	Paralelo	Paralelo	DH
… Arti. 1-2-3	Perpen	Perpen	Perpen	Fija	Fija	DH
… Arti. 1-3-4	Perpen	Fija	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 2-3-4	Fija	Perpen	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 3-4-5	Fija	Fija	Perpen	Paralelo	Paralelo	DH
… Arti. 1-2-3-4	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo	Fija	DH
… Arti. 2-3-4-5	Fija	Perpen	Perpen	Paralelo	Paralelo	DH
… Arti. Desacopladas 1-2 + 3-4-5	Perpen	Perpen	Perpen	Paralelo	Paralelo	**Brazo** resuelto por DH y Acoplamiento, con plano y ángulo de ataque
Caso 7-0-Pierna	Perpen	Paralelo	Paralelo	Paralelo	Perpen	**Humanoide** resuelto por DH
Caso 7-0-Brazo	Perpen	Paralelo	Paralelo			**Humanoide** resuelto por DH

1 Caso 1-0 – Brazo de Pruebas para la Presentación del TFG

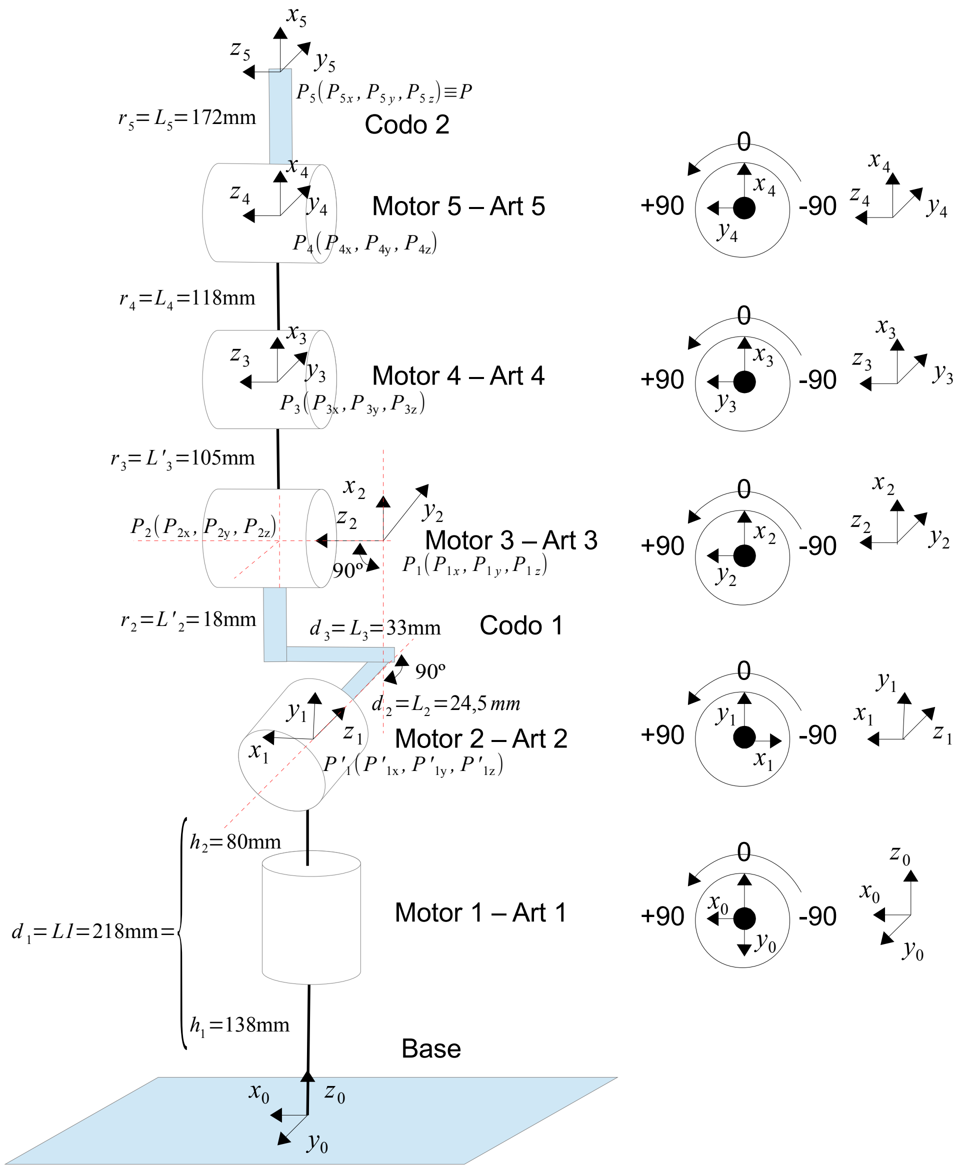

Ilustración 1: Brazo de prueba para presentación de TFG

1 Cinemática Directa, sin giro de 90º

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$
\begin{array}{lllll}
Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\
0-1 & 0 & d_1 & 0 & \pi/2 \\
1-2 & \pi/2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\
2-3 & 0 & d_3 & r_3 & 0 \\
3-4 & 0 & 0 & r_4 & 0 \\
4-5 & 0 & 0 & r_5 & 0
\end{array}
=
\begin{array}{lllll}
Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\
0-1 & 0 & L_1 & 0 & \pi/2 \\
1-2 & \pi/2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\
2-3 & 0 & L_3 & L'_3 & 0 \\
3-4 & 0 & 0 & L_4 & 0 \\
4-5 & 0 & 0 & L_5 & 0
\end{array}
$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$
A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}
$$

$$
-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}
$$

$$
-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}
$$

$$
A^{-1} = [{}^{i-1}A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$
{}^0A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^1A_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [^{3}A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^{4}A_5]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5 =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ...$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1 = L_1$, $d_2 = L_2$, $r_2 = L'_2$, $d_3 = L_3$, $r_3 = L'_3$, $r_4 = L_4$ y $r_5 = L_5$), y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ($(0_{u0'}, 0_{v0'}, 0_{w0'})$ - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x, y, z)$ - $O - XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_5 C\theta_5 (C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3) + S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)) + L_5 S\theta_5 (C\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) - S\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3)) + L_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3) + L_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) + L'_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3 \\ L'_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 - L_5 C\theta_5 (C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) + S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)) - L_5 S\theta_5 (C\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)) - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) + L'_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ L_1 - L_3 C\theta_2 + L'_2 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 - L_5 S(\theta_3 + \theta_4) S\theta_2 S\theta_5 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 S\theta_2 - L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3 + \theta_4) C\theta_5 S\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z) = (P_x \ , \ P_y \ , \ P_z)$$

Y se encuentran las siguientes igualdades (sin simplificar):

$$P_x = L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 C\theta_2 + L_3 C\theta_1 S\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 \ldots$$
$$\ldots + L_5 C\theta_5 (C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3) + S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3)) \ldots$$
$$\ldots + L_5 S\theta_5 (C\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) - S\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3)) \ldots$$
$$\ldots + L_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3) + L_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) + L'_3 C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3$$

...

$$P_y = L'_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 S\theta_2 \ldots$$
$$\ldots - L_5 C\theta_5 (C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) + S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)) \ldots$$
$$\ldots - L_5 S\theta_5 (C\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)) \ldots$$
$$\ldots - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 - C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) + L'_3 C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1$$

...

$$P_z = L_1 - L_3 C\theta_2 + L'_2 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 - L_5 S(\theta_3 + \theta_4) S\theta_2 S\theta_5 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 S\theta_2 \ldots$$
$$\ldots - L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3 + \theta_4) C\theta_5 S\theta_2 \quad =$$
$$P_z = L_1 - L_3 C\theta_2 + L'_2 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 - L_5 S(\theta_3 + \theta_4) S\theta_2 S\theta_5 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 S\theta_2 \ldots$$
$$\ldots - L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3 + \theta_4) C\theta_5 S\theta_2 \quad =$$
$$P_z = L_1 - L_3 C\theta_2 + L'_2 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 + L_4 S\theta_2 C(\theta_3 + \theta_4) + L_5 S\theta_2 C(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes y ángulos definidos, para así determinar el punto alcanzado.

Por otra parte, puesto que el problema cinemático directo, resuelto a través ecuaciones homogéneas contiene en el caso de un brazo de 5DOF, 12 ecuaciones, y se buscan sólo 5 relaciones que incluyan las variables articulares (una por cada grado de libertad), existirán, necesariamente ciertas interdependencias entre las 12 expresiones.

2 Cinemática Directa, con giro de 90º

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & 0 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & 0 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & 0 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & 0 & 0 & r_5 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & 0 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & 0 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & 0 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & 0 & 0 & L_5 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{3}A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{4}A_5]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^{1}A_2$ y $[{}^{1}A_2]^{-1}$ anteriores se convierten en:

$$^{1}A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$, $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$) , y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} \quad =$$

(No se muestran las tres primeras columnas de T)

$$\begin{pmatrix} \cdots & L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2+L'_3S\theta_1S\theta_3+L_5C\theta_5(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3))+L_5S\theta_5(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3))+L_4C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+L_4S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-L'_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3 \\ \cdots & -L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1-L'_3C\theta_1S\theta_3+L_3S\theta_1C\theta_2-L_5C\theta_5(C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)+S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3))-L_5S\theta_5(C\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)-S\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1))-L_4C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-L_4S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)-L'_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1 \\ \cdots & L_1+L_3S\theta_2+L'_2C\theta_2+L'_3C\theta_3C\theta_2-L_5S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2S\theta_5+L_4C\theta_3C\theta_4C\theta_2-L_4C\theta_2S\theta_3S\theta_4+L_5C(\theta_3+\theta_4)C\theta_5C\theta_2 \\ \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z)=(P_x\ ,\ P_y\ ,\ P_z)$$

Y se encuentran las siguientes igualdades (sin simplificar):

$$P_x=L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3...$$
$$...+L_5 C\theta_5(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3))...$$
$$...+L_5 S\theta_5(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3))...$$
$$...+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3$$
...

$$P_y=-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2...$$
$$...-L_5 C\theta_5(C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)+S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))...$$
$$...-L_5 S\theta_5(C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1))...$$
$$...-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1$$
...

$$P_z=L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2-L_5 S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 S\theta_5+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2...$$
$$...-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4+L_5 C(\theta_3+\theta_4)C\theta_5 C\theta_2\quad =$$
$$P_z=L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4)+L_5 C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes y ángulos definidos, para así determinar el punto alcanzado.
Se puede comprobar que las ecuaciones obtenidas no cambian de formato respecto a las del apartado anterior, aunque se tenga en cuenta el giro de $\pi/2$. Lo que sí parece cambiar es alguno de los elementos que las forman en cuanto a la función trigonométrica utilizada, o alguno de los signos.

Por otra parte, puesto que el problema cinemático directo, resuelto a través ecuaciones homogéneas contiene en el caso de un brazo de 5DOF, 12 ecuaciones, y se buscan sólo 5 relaciones que incluyan las variables articulares (una por cada grado de libertad), existirán, necesariamente ciertas interdependencias entre las 12 expresiones.

3 Cinemática Inversa, con giro de 90º

1 *Intento 1 - Elementos de T, o primera inversa (sin solución)*

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$T={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5={}^0A_5$$
$$({}^0A_1)^{-1}T={}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5={}^1A_5$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5={}^2A_5$$

$$({}^{2}A_3)^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T={}^{3}A_4\,{}^{4}A_5\,{}^{5}A_6={}^{3}A_5$$
$$({}^{3}A_4)^{-1}({}^{2}A_3)^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T={}^{4}A_5\,{}^{5}A_6={}^{4}A_5$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 , y así sucesivamente con θ_3 , θ_4 y θ_5 . Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C(PI/2+\theta_2) & 0 & S(PI/2+\theta_2) & r_2C(PI/2+\theta_2) \\ S(PI/2+\theta_2) & 0 & -C(PI/2+\theta_2) & r_2S(PI/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y la matriz ${}^{1}A_2$ anterior se convierte en:

$$ {}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1 = L_1$, $d_2 = L_2$, $r_2 = L'_2$, $d_3 = L_3$, $r_3 = L'_3$, $r_4 = L_4$ y $r_5 = L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$ ({}^{0}A_1)^{-1}\, T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ ({}^{0}A_1)^{-1}\, T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots \quad \text{(No se muestran las tres primeras columnas de T)} $$

$$ \begin{pmatrix} \ldots & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_5 C\theta_5 (C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)) + L_5 S\theta_5 (C\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - S\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)) + L_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + L_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ \ldots & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_5 C\theta_5 (C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) + S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)) - L_5 S\theta_5 (C\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)) - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ \ldots & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 S\theta_5 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 C\theta_2 \\ \ldots & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ {}^{1}A_5 = {}^{1}A_2\, {}^{2}A_3\, {}^{3}A_4\, {}^{4}A_5 = $$

$$ \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ \begin{pmatrix} -S\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & S\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C\theta_2 & \ldots \\ C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & S\theta_2 & \ldots \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \ldots $$

$$ \begin{pmatrix} \ldots & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 S\theta_5 - L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 C\theta_5 \\ \ldots & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 S\theta_5 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 C\theta_2 \\ \ldots & L_2 + L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ \ldots & 1 \end{pmatrix} = $$

Donde f'_{ij} son los elementos de la matriz T y f_{ij} son los elementos de la matriz resultante del uso de la primera inversa ($({}^{0}A_1)^{-1}\, T$).

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^{0}A_1)^{-1}\, T$). Así, en primer lugar, se va a realizar el análisis utilizando la primera inversa:

$$ ({}^{0}A_1)^{-1}\, T = {}^{1}A_2\, {}^{2}A_3\, {}^{3}A_4\, {}^{4}A_5 = {}^{1}A_5 $$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^0A_1)^{-1}\,T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{11} &= C\theta_1 x + S\theta_1 y \\ f_{12} &= z - L_1 t \\ f_{13} &= S\theta_1 x - C\theta_1 y \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^1A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones (sin desarrollar f'_{ij}):

$$\begin{aligned} f_{11}(n) &= C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1 f'_{11}(n) + S\theta_1 f'_{12}(n) = -S\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ f_{12}(n) &= z - L_1 t = f'_{13}(n) = C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ f_{13}(n) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1 f'_{11}(n) - C\theta_1 f'_{12}(n) = S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11}(o) &= C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1 f'_{11}(o) + S\theta_1 f'_{12}(o) = S\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ f_{12}(o) &= z - L_1 t = f'_{13}(o) = -C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ f_{13}(o) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1 f'_{11}(o) - C\theta_1 f'_{12}(o) = C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11}(a) &= C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1 f'_{11}(a) + S\theta_1 f'_{12}(a) = C\theta_2 \\ f_{12}(a) &= z - L_1 t = f'_{13}(a) = S\theta_2 \\ f_{13}(a) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1 f'_{11}(a) - C\theta_1 f'_{12}(a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{11}(p) &= C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1 f'_{11}(p) + S\theta_1 f'_{12}(p) = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 - \ldots \\ &\quad \ldots + L_5 S(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 S\theta_5 - L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + \ldots \\ &\quad \ldots - L_5 C(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 C\theta_5 \\ f_{12}(p) &= z - L_1 t = f'_{13}(p) = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 S\theta_5 + \ldots \end{aligned}$$

$$...+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 C\theta_2$$
$$f_{13}(p) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1 f'_{11}(p) - C\theta_1 f'_{12}(p) = L_2 + L_4 S(\theta_3+\theta_4) + ...$$
$$...+L_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)$$

Donde se puede ver la complejidad del cálculo si se intenta reemplazar los datos correspondientes a x e y ($f'_{ij}(p)$) en alguna de las igualdades $f_{ij}(p)$:

$$f_{13}(p) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1 f'_{11}(p) - C\theta_1 f'_{12}(p) = ...$$
$$S\theta_1(L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_5 C\theta_5(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)) + L_5 S\theta_5(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)) + L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$
$$...-C\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_5 C\theta_5(C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) + S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)) - L_5 S\theta_5(C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)) - L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y \\ . & . & . & P_z - L_1 \\ . & . & . & S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^1A_5 =$$

$$\begin{pmatrix} ... & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 S\theta_5 - L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 C\theta_5 \\ ... & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 S\theta_5 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 C\theta_2 \\ ... & L_2 + L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ ... & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 S\theta_5 + ...$$
$$...-L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 C\theta_5$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 - L'_3 C\theta_3 C\theta_2 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 S\theta_5 + ...$$
$$...+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 C\theta_2$$
$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

2 Intento 2 - Segunda inversa (sin solución)

Como no se ha llegado a ningún resultado concluyente, se va a repetir el cálculo con la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5={}^2A_5$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_5={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y sustituyendo los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$, $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -L'_2 - L_1 C\theta_2 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_2 \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & S\theta_2 & -L_1 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_5 \quad =$$

$${}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+C\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+C\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde f'_{ij} son los elementos de la matriz T .

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$). Así, en este caso, se va a realizar el análisis utilizando la primera y la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = {}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = {}^2A_5$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{21} = -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2)t$$
$$f_{22} = S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t$$
$$f_{23} = C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^2A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
f_{21}(n) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2)t \quad = \\
&\quad -C\theta_1 S\theta_2 f'_{11}(n) - S\theta_2 S\theta_1 f'_{12}(n) + C\theta_2 f'_{13}(n) = C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\
f_{22}(n) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t = S\theta_1 f'_{11}(n) - C\theta_1 f'_{12}(n) = S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\
f_{23}(n) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \quad = \\
&\quad C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(n) + C\theta_2 S\theta_1 f'_{12}(n) + S\theta_2 f'_{13}(n) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(o) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2)t \quad = \\
&\quad -C\theta_1 S\theta_2 f'_{11}(o) - S\theta_2 S\theta_1 f'_{12}(o) + C\theta_2 f'_{13}(o) = -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\
f_{22}(o) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t = S\theta_1 f'_{11}(o) - C\theta_1 f'_{12}(o) = C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\
f_{23}(o) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z + L_1 C\theta_2 t \quad = \\
&\quad C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(o) + C\theta_2 S\theta_1 f'_{12}(o) + S\theta_2 f'_{13}(o) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(a) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2)t \quad = \\
&\quad -C\theta_1 S\theta_2 f'_{11}(a) - S\theta_2 S\theta_1 f'_{12}(a) + C\theta_2 f'_{13}(a) = 0 \\
f_{22}(a) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t = S\theta_1 f'_{11}(a) - C\theta_1 f'_{12}(a) = 0 \\
f_{23}(a) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \quad = \\
&\quad C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(a) + C\theta_2 S\theta_1 f'_{12}(a) + S\theta_2 f'_{13}(a) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(p) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2)t \quad = \\
&\quad C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(p) - S\theta_2 S\theta_1 f'_{12}(p) + C\theta_2 f'_{13}(p) - (L'_2 + L_1 C\theta_2) \quad = \\
&\quad L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\
f_{22}(p) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t = S\theta_1 f'_{11}(p) - C\theta_1 f'_{12}(p) - L_2 \quad = \\
&\quad L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\
f_{23}(p) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \quad = \\
&\quad C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(p) + C\theta_2 S\theta_1 f'_{12}(p) + S\theta_2 f'_{13}(p) - L_1 S\theta_2 = L_3
\end{aligned}$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix}-S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2\\ 0 & 0 & 1 & -d_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -d_1\\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}. & . & . & P_x\\ . & . & . & P_y\\ . & . & . & P_z\\ . & . & . & 1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}. & . & . & C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 S\theta_2)\\ . & . & . & S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2\\ . & . & . & C\theta_1 S\theta_2 P_x + S\theta_2 S\theta_1 P_y - C\theta_2 P_z + L_1 C\theta_2\\ . & . & . & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}. & . & . & f_{11}(p)\\ . & . & . & f_{12}(p)\\ . & . & . & f_{13}(p)\\ . & . & . & 1\end{pmatrix}={}^2A_5 =$$

$$\begin{pmatrix}\ldots & L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3+L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\\ \ldots & L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\\ \ldots & L_3\\ \ldots & 1\end{pmatrix}$$

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) \quad =$$
$$L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3+L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_2 P_y - L_2 = L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{23}(p)=C\theta_1 S\theta_2 P_x + S\theta_2 S\theta_1 P_y - C\theta_2 P_z + L_1 C\theta_2 = L_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

3 Intento 3 - Tercera inversa (sin solución)

Como no se ha llegado a ningún resultado concluyente, se va a repetir el cálculo con la tercera inversa:

$$({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^3A_4\,{}^4A_5\,{}^5A_6={}^3A_5$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix}C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -d_1\\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix}-S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2\\ 0 & 0 & 1 & -d_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$[{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix}C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3\\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -d_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_5={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5=\begin{pmatrix}n_x & o_x & a_x & P_x\\ n_y & o_y & a_y & P_y\\ n_z & o_z & a_z & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$, $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ldots$$

$$\ldots\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & C\theta_3 C\theta_2 & -L'_3 - L'_2 C\theta_3 - L_2 S\theta_3 - L_1 C\theta_3 C\theta_2 \\ C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & L'_2 S\theta_3 - L_2 C\theta_3 + L_1 C\theta_2 S\theta_3 \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & S\theta_2 & -L_1 S\theta_2 - L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ldots$$

$$\ldots\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^3A_5={}^3A_4\,{}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde f'_{ij} son los elementos de la matriz T .

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias

$({}^{0}A_1)^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $[{}^{2}A_3]^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T$. Así, en este caso, se va a realizar el análisis utilizando la primera, la segunda y la tercera inversa:

$$[{}^{2}A_3]^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T={}^{3}A_4{}^{4}A_5={}^{3}A_5$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{31}(n) & f_{31}(o) & f_{31}(a) & f_{31}(p) \\ f_{32}(n) & f_{32}(o) & f_{32}(a) & f_{32}(p) \\ f_{33}(n) & f_{33}(o) & f_{33}(a) & f_{33}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$[{}^{2}A_3]^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{31}(n) & f_{31}(o) & f_{31}(a) & f_{31}(p) \\ f_{32}(n) & f_{32}(o) & f_{32}(a) & f_{32}(p) \\ f_{33}(n) & f_{33}(o) & f_{33}(a) & f_{33}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{31}&=(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)x+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)y+C\theta_3 C\theta_2 z-...\\ &...-(L'_3+L'_2 C\theta_3+L_2 S\theta_3+L_1 C\theta_3 C\theta_2)t\\ f_{32}&=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)x-(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)y-C\theta_2 S\theta_3 z+...\\ &...+(L'_2 S\theta_3-L_2 C\theta_3+L_1 C\theta_2 S\theta_3)t\\ f_{33}&=C\theta_1 C\theta_2 x+S\theta_1 C\theta_2 y+S\theta_2 z-(L_1 S\theta_2-L_3)t \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$[{}^{2}A_3]^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{31}(n) & f_{31}(o) & f_{31}(a) & f_{31}(p) \\ f_{32}(n) & f_{32}(o) & f_{32}(a) & f_{32}(p) \\ f_{33}(n) & f_{33}(o) & f_{33}(a) & f_{33}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^{3}A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{31}(n)&=(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)x+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)y+C\theta_3 C\theta_2 z...\\ &...-(L'_3+L'_2 C\theta_3+L_2 S\theta_3+L_1 C\theta_3 C\theta_2)t \quad =\\ &...(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)f'_{11}(n)...\\ ...&+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)f'_{12}(n)+C\theta_3 C\theta_2 f'_{13}(n)=C(\theta_4+\theta_5)\\ f_{32}(n)&=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)x-(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)y-C\theta_2 S\theta_3 z...\\ &...+(L'_2 S\theta_3-L_2 C\theta_3+L_1 C\theta_2 S\theta_3)t=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)f'_{11}(n)...\\ &...-(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)f'_{12}(n)-C\theta_2 S\theta_3 f'_{13}(n)=S(\theta_4+\theta_5) \end{aligned}$$

$$f_{33}(n)=C\theta_1 C\theta_2 x+S\theta_1 C\theta_2 y+S\theta_2 z+(-L_1 S\theta_2-L_3)t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(n)+S\theta_1 C\theta_2 f'_{12}(n)+S\theta_2 f'_{13}(n)=0$$

$$f_{31}(o)=(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)x+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)y+C\theta_3 C\theta_2 z\ldots$$
$$\ldots-(L'_3+L'_2 C\theta_3+L_2 S\theta_3+L_1 C\theta_3 C\theta_2)t\ldots$$
$$\ldots=(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)f'_{11}(o)\ldots$$
$$\ldots+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)f'_{12}(o)+C\theta_3 C\theta_2 f'_{13}(o)=-S(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{32}(o)=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)x-(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)y-C\theta_2 S\theta_3 z\ldots$$
$$\ldots+(L'_2 S\theta_3-L_2 C\theta_3+L_1 C\theta_2 S\theta_3)t=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)f'_{11}(o)\ldots$$
$$\ldots-(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)f'_{12}(o)-C\theta_2 S\theta_3 f'_{13}(o)=C(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{33}(o)=C\theta_1 C\theta_2 x+S\theta_1 C\theta_2 y+S\theta_2 z+(-L_1 S\theta_2-L_3)t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(o)+S\theta_1 C\theta_2 f'_{12}(o)+S\theta_2 f'_{13}(o)=0$$

$$f_{31}(a)=(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)x+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)y+C\theta_3 C\theta_2 z\ldots$$
$$\ldots-(L'_3+L'_2 C\theta_3+L_2 S\theta_3+L_1 C\theta_3 S\theta_2)t=(S\theta_1 S\theta_3+C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3)f'_{11}(a)\ldots$$
$$\ldots+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)f'_{12}(a)+C\theta_3 C\theta_2 f'_{13}(a)=0$$
$$f_{32}(a)=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)x-(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)y-C\theta_2 S\theta_3 z\ldots$$
$$\ldots+(L'_2 S\theta_3-L_2 C\theta_3+L_1 C\theta_2 S\theta_3)t=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)f'_{11}(a)\ldots$$
$$\ldots-(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)f'_{12}(a)-C\theta_2 S\theta_3 f'_{13}(a)=0$$
$$f_{33}(a)=C\theta_1 C\theta_2 x+S\theta_1 C\theta_2 y+S\theta_2 z+(-L_1 S\theta_2-L_3)t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(a)+S\theta_1 C\theta_2 f'_{12}(a)+S\theta_2 f'_{13}(a)=1$$

$$f_{31}(p)=(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)x+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)y+C\theta_3 C\theta_2 z\ldots$$
$$\ldots-(L'_3+L'_2 C\theta_3+L_2 S\theta_3+L_1 C\theta_3 C\theta_2)t\ldots$$
$$\ldots=(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)f'_{11}(p)\ldots$$
$$\ldots+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)f'_{12}(p)+C\theta_3 C\theta_2 f'_{13}(p) \quad =$$
$$L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4$$
$$f_{32}(p)=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)x-(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)y-C\theta_2 S\theta_3 z\ldots$$
$$\ldots+(L'_2 S\theta_3-L_2 C\theta_3+L_1 C\theta_2 S\theta_3)t=(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)f'_{11}(p)\ldots$$
$$\ldots-(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)f'_{12}(p)-C\theta_2 S\theta_3 f'_{13}(p) \quad =$$
$$\ldots L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4$$
$$f_{33}(p)=C\theta_1 C\theta_2 x+S\theta_1 C\theta_2 y+S\theta_2 z+(-L_1 S\theta_2-L_3)t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(p)+S\theta_1 C\theta_2 f'_{12}(p)+S\theta_2 f'_{13}(p)=0$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$[^2A_3]^{-1}(^1A_2)^{-1}(^0A_1)^{-1}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & (S\theta_1 S\theta_3 + C\theta_1 C\theta_2 C\theta_3) P_x + (C\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3) P_y + C\theta_3 S\theta_2 P_z - (L'_3 + L'_2 C\theta_3 + L_2 S\theta_3 + L_1 C\theta_3 S\theta_2) t \\ . & . & . & (C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 C\theta_2 S\theta_3) P_x - (C\theta_1 C\theta_3 + C\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) P_y - S\theta_2 S\theta_3 P_z + (L'_2 S\theta_3 - L_2 C\theta_3 + L_1 S\theta_2 S\theta_3) t \\ . & . & . & C\theta_1 S\theta_2 P_x + S\theta_1 S\theta_2 P_y - C\theta_2 P_z + (L_1 C\theta_2 - L_3) t \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^3A_5 = \begin{pmatrix} \ldots & L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4 \\ \ldots & L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4 \\ \ldots & 0 \\ \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{31}(p) &= (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) P_x + (-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3) P_y + C\theta_3 C\theta_2 P_z \ldots \\ &\ldots - (L'_3 + L'_2 C\theta_3 + L_2 S\theta_3 + L_1 C\theta_3 C\theta_2) t = L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4 \\ f_{32}(p) &= (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) P_x - (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) P_y - C\theta_2 S\theta_3 P_z \ldots \\ &\ldots + (L'_2 S\theta_3 - L_2 C\theta_3 + L_1 C\theta_2 S\theta_3) t = L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4 \\ f_{33}(p) &= C\theta_1 C\theta_2 P_x + S\theta_1 C\theta_2 P_y + S\theta_2 P_z + (-L_1 S\theta_2 - L_3) t = 0 \end{aligned}$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

4 *Intento 4 - Cuarta inversa (sin solución)*

Como no se ha llegado a ningún resultado concluyente, se va a repetir el cálculo con la cuarta inversa:

$$({}^3A_4)^{-1} ({}^2A_3)^{-1} ({}^1A_2)^{-1} ({}^0A_1)^{-1} T = {}^4A_5 {}^5A_6 = {}^4A_5$$

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^2A_3]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^3A_4]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_5 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$, $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^3A_4)^{-1}({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots$$

$$\cdots\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1S\theta_2 & -C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 & C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & \cdots \\ C(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1S\theta_2 & -C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2S\theta_1 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & \cdots \\ C\theta_1C\theta_2 & S\theta_1C\theta_2 & -S\theta_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}\cdots$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & -L_4-L'_2C(\theta_3+\theta_4)-L_2S(\theta_3+\theta_4)-L'_3C\theta_4-L_1C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 \\ \cdots & L'_2S(\theta_3+\theta_4)-L_2C(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_4+L_1S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 \\ \cdots & -L_1S\theta_2-L_3 \\ \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$${}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde f'_{ij} son los elementos de la matriz T .

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^3A_4)^{-1}({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$. Así, en este caso, se va a realizar el análisis utilizando la primera, la segunda, la tercera y la cuarta inversa:

$$({}^3A_4)^{-1}({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^4A_5$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{41}(n) & f_{41}(o) & f_{41}(a) & f_{41}(p) \\ f_{42}(n) & f_{42}(o) & f_{42}(a) & f_{42}(p) \\ f_{43}(n) & f_{43}(o) & f_{43}(a) & f_{43}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^3A_4)^{-1}({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{41}(n) & f_{41}(o) & f_{41}(a) & f_{41}(p) \\ f_{42}(n) & f_{42}(o) & f_{42}(a) & f_{42}(p) \\ f_{43}(n) & f_{43}(o) & f_{43}(a) & f_{43}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{41} = & (S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1 - C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)x + (-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1 - S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)y + \ldots \\ & \ldots + (C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z + \ldots \\ & \ldots + (-L_4 - L'_2 C(\theta_3+\theta_4) - L_2 S(\theta_3+\theta_4) - L'_3 C\theta_4 - L_1 C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t \\ f_{42} = & (C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 S\theta_1 - S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)x + (-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 - S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 S\theta_1)y + \ldots \\ & \ldots + (-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z + (L'_2 S(\theta_3+\theta_4) - L_2 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_4 + L_1 S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t \\ f_{43} = & C\theta_1 C\theta_2 x + S\theta_1 C\theta_2 y - S\theta_2 z + (-L_1 S\theta_2 - L_3)t \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^3A_4)^{-1}({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{41}(n) & f_{41}(o) & f_{41}(a) & f_{41}(p) \\ f_{42}(n) & f_{42}(o) & f_{42}(a) & f_{42}(p) \\ f_{43}(n) & f_{43}(o) & f_{43}(a) & f_{43}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^4A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{41}(n) = & (S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1 - C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)x + (-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1 - S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)y + \ldots \\ & \ldots + (C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z \ldots \\ & \ldots - (L_4 + L'_2 C(\theta_3+\theta_4) + L_2 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_4 + L_1 C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t \quad = \\ & (S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1 - C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2) f'_{11}(n) + \ldots \\ & \ldots (-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1 - S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1) f'_{12}(n) + (C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2) f'_{13}(n) = C\theta_5 \\ f_{42}(n) = & (-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1 - S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)x + (-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 + S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1)y + \ldots \\ & \ldots + (-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z + \ldots \\ & \ldots + (L'_2 S(\theta_3+\theta_4) - L_2 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_4 + L_1 S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t \ldots \quad = \\ & (-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1 - S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1) f'_{11}(n) + \ldots \\ & \ldots + (-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 + S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1) f'_{12}(n) + (-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2) f'_{13}(n) \quad = \\ & S\theta_5 \\ f_{43}(n) = & C\theta_1 C\theta_2 x + S\theta_1 C\theta_2 y - S\theta_2 z + (-L_1 S\theta_2 - L_3)t \quad = \\ & C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(n) + S\theta_1 C\theta_2 f'_{12}(n) - S\theta_2 f'_{13}(n) = 0 \end{aligned}$$

$$f_{41}(o)=(S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)x+(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)y+...$$
$$...+(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z...$$
$$...-(L_4+L'_2C(\theta_3+\theta_4)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_4+L_1C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t \quad =$$
$$(S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)f'_{11}(o)+...$$
$$...(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)f'_{12}(o)+(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)f'_{13}(o)=-S\theta_5$$
$$f_{42}(o)=(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)x+(-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1)y+...$$
$$...+(-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z+...$$
$$...+(L'_2S(\theta_3+\theta_4)-L_2C(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_4+L_1S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t... \quad =$$
$$(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)f'_{11}(o)+...$$
$$...+(-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1)f'_{12}(o)+(-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)f'_{13}(o) \quad =$$
$$C\theta_5$$
$$f_{43}(o)=C\theta_1 C\theta_2 x+S\theta_1 C\theta_2 y-S\theta_2 z+(-L_1 S\theta_2-L_3)t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(o)+S\theta_1 C\theta_2 f'_{12}(o)-S\theta_2 f'_{13}(o)=0$$

$$f_{41}(a)=(S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)x+(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)y+...$$
$$...+(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z...$$
$$...-(L_4+L'_2C(\theta_3+\theta_4)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_4+L_1C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t \quad =$$
$$(S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)f'_{11}(a)+...$$
$$...(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)f'_{12}(a)+(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)f'_{13}(a)=0$$
$$f_{42}(a)=(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)x+(-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1)y+...$$
$$...+(-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z+...$$
$$...+(L'_2S(\theta_3+\theta_4)-L_2C(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_4+L_1S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t... \quad =$$
$$(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)f'_{11}(a)+...$$
$$...+(-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1)f'_{12}(a)+(-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)f'_{13}(a)=0$$
$$f_{43}(a)=C\theta_1 C\theta_2 x+S\theta_1 C\theta_2 y-S\theta_2 z+(-L_1 S\theta_2-L_3)t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(a)+S\theta_1 C\theta_2 f'_{12}(a)-S\theta_2 f'_{13}(a)=1$$

$$f_{41}(p)=(S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)x+(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)y+...$$
$$...+(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z...$$
$$...-(L_4+L'_2C(\theta_3+\theta_4)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_4+L_1C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t \quad =$$
$$(S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)f'_{11}(p)+...$$
$$...(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)f'_{12}(p)+(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)f'_{13}(p)...$$
$$...-(L_4+L'_2C(\theta_3+\theta_4)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_4+L_1C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)=L_5C\theta_5$$
$$f_{42}(p)=(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)x+(-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1)y+...$$
$$...+(-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)z+...$$
$$...+(L'_2S(\theta_3+\theta_4)-L_2C(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_4+L_1S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)t \quad =$$
$$(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)f'_{11}(p)+...$$
$$...+(-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1)f'_{12}(p)+(-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)f'_{13}(p)...$$
$$...+(L'_2S(\theta_3+\theta_4)-L_2C(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_4+L_1S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)=L_5S\theta_5$$
$$f_{43}(p)=C\theta_1 C\theta_2 x+S\theta_1 C\theta_2 y+C\theta_2 z+(-L_1 S\theta_2-L_3)t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2 f'_{11}(p)+S\theta_1 C\theta_2 f'_{12}(p)-S\theta_2 f'_{13}(p)+(-L_1 S\theta_2-L_3)=0$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^{3}A_4)^{-1}({}^{2}A_3)^{-1}({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\dots$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & (S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1+C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 C\theta_2)P_x+(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)P_y+(C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2)P_z-(L_4+L'_2C(\theta_3+\theta_4)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_4+L_1C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2) \\ . & . & . & (C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)P_x+(-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 S\theta_1)P_y+(-S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2)P_z+(L'_2S(\theta_3+\theta_4)-L_2C(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_4+L_1S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2) \\ . & . & . & C\theta_1 S\theta_2 P_x+S\theta_1 S\theta_2 P_y+C\theta_2 P_z+(L_1C\theta_2-L_3) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & f_{41}(p) \\ . & . & . & f_{42}(p) \\ . & . & . & f_{43}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^{4}A_5=\begin{pmatrix} \dots & L_5C\theta_5 \\ \dots & L_5S\theta_5 \\ \dots & 0 \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{41}(p)=(S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)P_x+(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)P_y\dots$$
$$\dots+(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)P_z-(L_4+L'_2C(\theta_3+\theta_4)+L_2S(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_4+L_1C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)=L_5C\theta_5$$
$$f_{42}(p)=(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)P_x+(-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1)P_y\dots$$
$$+(-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)P_z+(L'_2S(\theta_3+\theta_4)-L_2C(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_4+L_1S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)=L_5S\theta_5$$
$$f_{43}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x+S\theta_1 C\theta_2 P_y-S\theta_2 P_z+(-L_1S\theta_2-L_3)=0$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, tampoco resulta posible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

5 Intento 5 – Aproximación mediante el prefijado de primer ángulo

En este caso se intentará resolver el problema analizando el comportamiento de los motores y generando un comportamiento conocido.
Si se analiza el brazo, se ve que el primer motor tiene una dirección de giro perpendicular a la base, mientras que el resto de motores adecuarán su comportamiento como consecuencia de ese pimer ángulo para ajustar su posición y alcanzar el punto deseado.
Eso parece llevar a que se podría generar el primer ángulo como si fuera un problema y resuelto mediante:

$$\theta_1=arctg(P_y/P_x)=atan(P_x,P_y)=atan2(P_y,P_x)$$

Sin embargo, hay que ver que el siguiente motor está perpendicular al primero modificando el plano de localización del punto, lo que provoca que el brazo varíe su entorno de trabajo.
Además el tercer motor está desplazado de este plano por lo que varía aún más su alcance.

Aún así, si se prefijara el primer ángulo y el resto de motores tuviera una dependencia de ese ángulo, rectificarían la posición del extremo para ajustarse a ese punto deseado.

Por tanto, el resultado del análisis se debería desarrollar y chequear bajo estas consideraciones.

Una vez calculado θ_1 se partirá de la igualdad f_{43} .

$$f_{43}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x+S\theta_1 C\theta_2 P_y-S\theta_2 P_z+(-L_1 S\theta_2-L_3)=0$$

Y se podrá despejar θ_2 :

$$C\theta_1 C\theta_2 P_x+S\theta_1 C\theta_2 P_y-S\theta_2 P_z+(-L_1 S\theta_2-L_3)=0$$

$$-S\theta_2(P_z+L_1)+C\theta_2(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)=L_3$$

Y aplicando la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Leftrightarrow \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

$$\theta_2=atan2((P_z+L_1),(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y))\pm atan2(\sqrt{(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y)^2+(P_z+L_1)^2-(L_3)^2},L_3)$$

Por tanto, ya se ha calculado también el segundo ángulo θ_2

Una vez calculado θ_1 y θ_2 se partirá de la igualdad $f_{42}(p)$.

$$\begin{aligned}&f_{42}(p)=(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)P_x+(-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1)P_y\ldots\\&+(-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)P_z+(L'_2 S(\theta_3+\theta_4)-L_2 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_4+L_1 S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)=L_5 S\theta_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1 P_x-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 P_x-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 P_y-S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1 P_y\ldots\\&-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 P_z+L'_2 S(\theta_3+\theta_4)-L_2 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_4+L_1 S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2=L_5 S\theta_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&C(\theta_3+\theta_4)(C\theta_2 S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_2)\ldots\\&\ldots+S(\theta_3+\theta_4)(-C\theta_1 P_x+C\theta_2 S\theta_1 P_y-S\theta_2 P_z+L'_2+L_1 S\theta_2)+L'_3 S\theta_4=L_5 S\theta_5\end{aligned}$$

$$\theta_5=\arcsin(C(\theta_3+\theta_4)(-S\theta_2 S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_2)+S(\theta_3+\theta_4)(-C\theta_1 P_x-S\theta_2 S\theta_1 P_y-C\theta_2 P_z+L'_2+L_1 C\theta_2)+L'_3 S\theta_4)/L_5$$

Y se obtiene el ángulo θ_5 en función de θ_3 y θ_4 .
Por tanto, quedará un ángulo en función de otros dos ángulos pendientes de calcular.
Eso hará que haya que encontrar otra relación que mejore este cálculo.
En el caso de coger la igualdad $f_{41}(p)$, resulta semejante:

$$\begin{aligned}&f_{41}(p)=(S(\theta_3+\theta_4)S\theta_1-C(\theta_3+\theta_4)C\theta_1 S\theta_2)P_x+(-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_1-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_1)P_y\ldots\\&\ldots+(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)P_z-(L_4+L'_2 C(\theta_3+\theta_4)+L_2 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_4+L_1 C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2)=L_5 C\theta_5\end{aligned}$$

Y si se coge cada una de las igualdades de la tercera inversa $f_{31}(p)$ y $f_{32}(p)$ por separado, también resulta una dependencia entre ángulos pendientes de calcular:

$$f_{31}(p)=(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)P_x+(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)P_y+C\theta_3 C\theta_2 P_z\ldots$$

$$
\begin{aligned}
&\ldots-(L'_3+L'_2C\theta_3+L_2S\theta_3+L_1C\theta_3C\theta_2)t=L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4\\
f_{32}(p)=&(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)P_x-(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)P_y-C\theta_2S\theta_3P_z\ldots\\
&\ldots+(L'_2S\theta_3-L_2C\theta_3+L_1C\theta_2S\theta_3)t=L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4
\end{aligned}
$$

Y lo mismo pasa con las igualdades $f_{21}(p)$ y $f_{22}(p)$ de la segunda inversa, también por separado:

$$
\begin{aligned}
f_{21}(p)=&-C\theta_1S\theta_2P_x-S\theta_2S\theta_1P_y+C\theta_2P_z-(L'_2+L_1C\theta_2) \quad =\\
&L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3+L_5C(\theta_3+\theta_4+C\theta_5)\\
f_{22}(p)=&S\theta_1P_x-C\theta_2P_y-L_2=L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+C\theta_5)
\end{aligned}
$$

E incluso con las igualdades $f_{11}(p)$ y $f_{12}(p)$ de la primera inversa:

$$
\begin{aligned}
f_{11}(p)=&C\theta_1P_x+S\theta_1P_y=-L'_2S\theta_2+L_3C\theta_2-L'_3S\theta_2C\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2S\theta_5+\ldots\\
&\ldots-L_4S\theta_2C\theta_3C\theta_4+L_4S\theta_2S\theta_3S\theta_4-L_5C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2C\theta_5\\
f_{12}(p)=&P_z-L_1=L'_2C\theta_2+L_3S\theta_2-L'_3C\theta_3C\theta_2-L_5S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2S\theta_5+\ldots\\
&\ldots+L_4C\theta_3C\theta_4C\theta_2-L_4C\theta_2S\theta_3S\theta_4+L_5C(\theta_3+\theta_4)C\theta_5C\theta_2
\end{aligned}
$$

Sin embargo, se podrían tomar las igualdades de la tercera inversa $f_{31}(p)$ y $f_{32}(p)$ de forma conjunta.

$$
\begin{aligned}
f_{31}(p)=&(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)P_x+(-S\theta_2C\theta_3S\theta_1-C\theta_1S\theta_3)P_y+C\theta_3C\theta_2P_z\ldots\\
&\ldots-(L'_3+L'_2C\theta_3+L_2S\theta_3+L_1C\theta_3C\theta_2)t=L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4\\
f_{32}(p)=&(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)P_x-(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)P_y-C\theta_2S\theta_3P_z\ldots\\
&\ldots+(L'_2S\theta_3-L_2C\theta_3+L_1C\theta_2S\theta_3)t=L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4
\end{aligned}
$$

Estos términos presentan a la derecha:

$$
\begin{aligned}
f_{31}(p)&=\ldots C(\theta_4+\theta_5)\ldots\\
f_{32}(p)&=\ldots S(\theta_4+\theta_5)\ldots
\end{aligned}
$$

Por tanto, se podría elevar al cuadrado y sumar, con lo que se eliminaría la dependencia de θ_5 y dejando sólo términos con θ_3 y θ_4 .

$$
\begin{aligned}
&((S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)P_x+(-S\theta_2C\theta_3S\theta_1-C\theta_1S\theta_3)P_y+C\theta_3C\theta_2P_z-(L'_3+L'_2C\theta_3+L_2S\theta_3+L_1C\theta_3C\theta_2)-L_4C\theta_4)/L_5=C(\theta_4+\theta_5)\\
&((C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)P_x-(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)P_y-C\theta_2S\theta_3P_z+(L'_2S\theta_3-L_2C\theta_3+L_1C\theta_2S\theta_3)-L_4S\theta_4)/L_5=S(\theta_4+\theta_5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&((S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)P_x+(-S\theta_2C\theta_3S\theta_1-C\theta_1S\theta_3)P_y+C\theta_3C\theta_2P_z-(L'_3+L'_2C\theta_3+L_2S\theta_3+L_1C\theta_3C\theta_2)-L_4C\theta_4)^2\ldots\\
&\ldots+((C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)P_x-(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)P_y-C\theta_2S\theta_3P_z+(L'_2S\theta_3-L_2C\theta_3+L_1C\theta_2S\theta_3)-L_4S\theta_4)^2=(L_5)^2
\end{aligned}
$$

Aún así, seguiría habiendo una dependencia entre los ángulos θ_3 y θ_4 , que habría que calcular dando un valor razonable a alguno de ellos.

El problema es la gran cantidad de términos con ambas variables articulares y, por tanto, la gran complejidad a la hora de despejar cualquiera de las variables.

Aún así, podría encontrarse una solución de forma más sencilla, dado que los tres últimos motores trabajan en un único plano, como ya pasara en alguno de los ejemplos analizados con anterioridad, por lo que el error cometido en predeterminar uno de los ángulos (o con un limitado número de iteraciones en su corrección) se corregiría con el ajuste de los dos motores restantes.

De esta forma, como esta corrección en el problema restante de tres motores también se produce respecto a la elección del ángulo del primer motor, por ser inicialmente aproximadas, podrían llegarse a determinar todos los ángulos del ejercicio con la seguridad de alcanzar el punto deseado sin error alguno.

Sin embargo, esta solución supone un alto conocimiento de la arquitectura del brazo, de las posibles soluciones aplicadas a otros problemas ya conocidos, de los problemas que se puedan producir en la aplicación de esas soluciones, y de cómo acoplar las soluciones que se hayan utilizado.

6 Intento 6 - División del problema en partes simples (articulaciones únicas)

En este caso, se intentarán analizar los problemas por separado, desacoplando completamente el problema, dejando una única articulación en cada caso, y colocando el punto final en la siguiente articulación.
De esta forma, se inicia la resolución del problema independizando las articulaciones cuyos ángulos no puedan ser calculados, a través del desacople de articulaciones, y posibilitando, por tanto, el cálculo de puntos basándose en la posición de los puntos anteriores.
Así, se va a independizar todo el tratamiento de matrices para resolver cada problema simple representado a continuación.
Para cada par de articulaciones se va a tomar la primera articulación como aquella en la que se encuentre un motor, y la segunda, como aquella en la que se encuentre el punto final virtual sobre el que posicionar el extremo del segundo segmento.

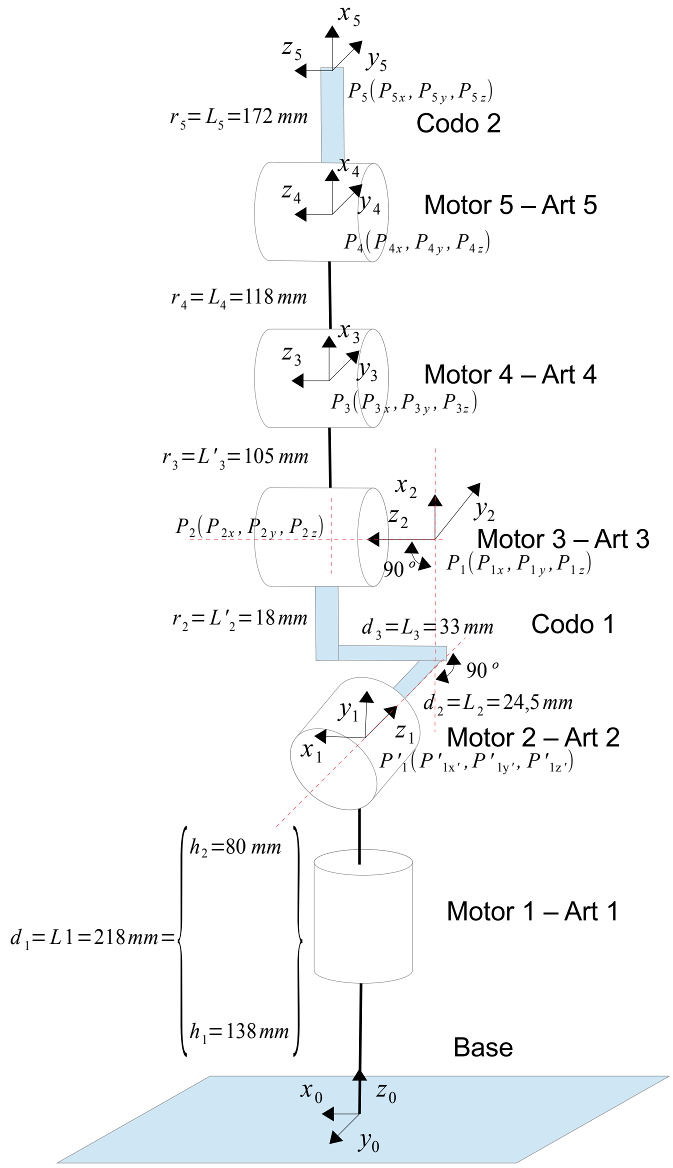

Ilustración 2: Brazo de prueba para presentación de TFG (Articulaciones únicas)

1 Articulación 1 con extremo en articulación 2

1 Cinemática Directa

Se iniciará con la primera articulación (Motor 1), donde el motor "Motor 1" girará, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "2" se posicione en el punto parcial deseado P_1 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establece el eje Z , el origen de coordenadas de la articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = [{}^{i-1}A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$ {}^0A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1\text{x}} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1\text{y}} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1\text{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^{0}A_1$.

$$T={}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1=L_1$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ($(0_{u0'},0_{v0'},0_{w0'})$ - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=(0,0,L_1)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Por seguir con el método, aunque en el caso de un único motor es inmediato, se va a seguir con el procedimiento establecido.
Sin embargo, en este caso, el cálculo se realiza de forma inmediata.

$$({}^0A_1)^{-1}\,T = I$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y el valor $d_1 = L_1$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^0A_1)^{-1}\,T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_1\,x + S\theta_1\,y$$
$$f_{12} = z - L_1\,t$$
$$f_{13} = S\theta_1\,x - C\theta_1\,y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1 C\theta_1+S\theta_1 S\theta_1=1$$
$$f_{12}(n)=z-L_1 t=0$$
$$f_{13}(n)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1 C\theta_1-C\theta_1 S\theta_1=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=0$$
$$f_{12}(o)=z-L_1 t=1$$
$$f_{13}(o)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=0$$

$$f_{11}(a)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1 S\theta_2-S\theta_1 C\theta_2=0$$
$$f_{12}(a)=z-L_1 t=0$$
$$f_{13}(a)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1 S\theta_1+C\theta_1 C\theta_1=1$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=0$$
$$f_{12}(p)=z-L_1 t=L_1-L_1=0$$
$$f_{13}(p)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=0$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{1x} \\ . & . & . & P_{1y} \\ . & . & . & P_{1z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_{1x} \\ . & . & . & P_{1y} \\ . & . & . & P_{1z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y} \\ . & . & . & P_{1z}-L_1 \\ . & . & . & S\theta_1 P_{1x}-C\theta_1 P_{1y} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y}=0$$

$$P_{1z} - L_1 = 0$$
$$S\theta_1 P_{1x} - C\theta_1 P_{1y} = 0$$
$$\ldots$$

Ahora hay que calcular el valor de θ_1 en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{1x} y P_{1y}. Para ello, con la tercera ecuación:

$$S\theta_1 P_{1x} - C\theta_1 P_{1y} = 0$$
$$(S\theta_1 P_{1x} - C\theta_1 P_{1y}) / C\theta_1 = 0$$
$$tg\theta_1 P_{1x} - P_{1y} = 0$$

$$\theta_1 = arctg(P_{1y} / P_{1x})$$

Y en resumen:

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = (0, 0, L_1)$$
$$\theta_1 = arctg(P_{1y} / P_{1x})$$

2 Articulación 2 con extremo en articulación 3, sin giro de 90º

1 Cinemática Directa

Se iniciará con la primera articulación (Motor 2), donde el motor "Motor 2" girará, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "3" se posicione en el punto parcial deseado P_2, punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establece el eje Z, el origen de coordenadas de la articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = [{}^{i-1}A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^1A_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^1A_2$.

$$T = {}^1A_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2 = L_2$, $r_2 = L'_2$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L'_2S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_2(P_{2x},P_{2y},P_{2z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_2(P_{2x},P_{2y},P_{2z})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L'_2S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & L'_2C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & L'_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{2z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_2(P_{2x},P_{2y},P_{2z})=(L'_2C\theta_2,L'_2S\theta_2,L_2)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Por seguir con el método, aunque en el caso de un único motor es inmediato, se va a seguir con el procedimiento establecido.
Sin embargo, en este caso, el cálculo se realiza de forma inmediata.

$$({}^1A_2)^{-1}T=I$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L'_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L'_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores de $d_2 = L_2$ y $r_2 = L'_2$ se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^0A_1)^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L'_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^1A_2)^{-1} T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_2 x + S\theta_2 y - L'_2 t$$
$$f_{12} = z - L_2 t$$
$$f_{13} = S\theta_2 x - C\theta_2 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1} T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_2 x+S\theta_2 y-L'_2 t=C\theta_2 C\theta_2+S\theta_2 S\theta_2=1$$
$$f_{12}(n)=z-L_2 t=0$$
$$f_{13}(n)=S\theta_2 x-C\theta_2 y=S\theta_2 C\theta_2-C\theta_2 S\theta_2=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_2 x+S\theta_2 y-L'_2 t=0$$
$$f_{12}(o)=z-L_2 t=1$$
$$f_{13}(o)=S\theta_2 x-C\theta_2 y=0$$

$$f_{11}(a)=C\theta_2 x+S\theta_2 y-L'_2 t=C\theta_2 S\theta_2-S\theta_2 C\theta_2=0$$
$$f_{12}(a)=z-L_2 t=0$$
$$f_{13}(a)=S\theta_2 x-C\theta_2 y=S\theta_2 S\theta_2+C\theta_2 C\theta_2=1$$

$$f_{11}(p)=C\theta_2 x+S\theta_2 y-L'_2 t=L'_2(C\theta_2^2+S\theta_2^2)-L'_2=L'_2-L'_2=0$$
$$f_{12}(p)=z-L_2 t=L_2-L_2=0$$
$$f_{13}(p)=S\theta_2 x-C\theta_2 y=S\theta_2 S\theta_2+C\theta_2 C\theta_2=1$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{2x} \\ . & . & . & P_{2y} \\ . & . & . & P_{2z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^1A_2)^{-1} T=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_{2x} \\ . & . & . & P_{2y} \\ . & . & . & P_{2z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_2 P_{2x}+S\theta_2 P_{2y}-L'_2 \\ . & . & . & P_{2z}-L_2 \\ . & . & . & S\theta_2 P_{2x}-C\theta_2 P_{2y} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_2 P_{2x}+S\theta_2 P_{2y}-L'_2=0$$
$$P_{2z}-L_2=0$$
$$S\theta_2 P_{2x}-C\theta_2 P_{2y}=0$$
$$\cdots$$

Ahora hay que calcular el valor de θ_2 en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{2x} y P_{2y} . Para ello, con la tercera ecuación:

$$S\theta_2 P_{2x}-C\theta_2 P_{2y}=0$$
$$(S\theta_2 P_{2x}-C\theta_2 P_{2y})/C\theta_2=0$$
$$tg\theta_2 P_{2x}-P_{2y}=0$$

$$\theta_2 = arctg(P_{2y}/P_{2x})$$

Y si se coge la primera ecuación:

$$C\theta_2 P_{2x} + S\theta_2 P_{2y} - L'_2 = 0$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_2 :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

$$\theta_2 = atan2(P_{2y}, P_{2x}) \pm atan2(\sqrt{P_{2x}^2 + P_{2y}^2 - L'^2_2}, L'_2)$$

Parece ser que el ángulo θ_2 tiene dos soluciones diferentes.

Y en resumen:

$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = (L'_2 C\theta_2, L'_2 S\theta_2, L_2)$$
$$\theta_2 = arctg(P_{2y}/P_{2x})$$
$$\theta_2 = atan2(P_{2y}, P_{2x}) \pm atan2(\sqrt{P_{2x}^2 + P_{2y}^2 - L'^2_2}, L'_2)$$

3 Articulación 2 con extremo en articulación 3, con giro de 90º

1 Cinemática Directa

Se iniciará con la primera articulación (Motor 2), donde el motor "Motor 2" girará, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "3" se posicione en el punto parcial deseado P_2 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establece el eje Z , el origen de coordenadas de la articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^1A_2$ y $[{}^1A_2]^{-1}$ afectadas anteriores se convierten en:

$$ {}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{1}A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Y se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector r en el sistema (O) XYZ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema (O') UVW:

$$ \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} $$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^{1}A_2$.

$$ T = {}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2 = L_2$, $r_2 = L'_2$), y los ángulos deseados:

$$ P(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = $$

$$ \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} $$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$ - $O - XYZ$), se aplicaría:

$$ P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = $$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -L'_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{2z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = (-L'_2 S\theta_2, L'_2 C\theta_2, L_2)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.
Al igual que en casos anteriores, se puede comprobar que las ecuaciones obtenidas no cambian de formato respecto a las del apartado anterior, aunque se tenga en cuenta el giro de $\pi/2$. Lo que sí parece cambiar es alguno de los elementos que las forman en cuanto a la función trigonométrica utilizada, o incluso alguno de los signos. Y parece suceder lo mismo en los siguientes cálculos.

2 Cinemática Inversa

Por seguir con el método, aunque en el caso de un único motor es inmediato, se va a seguir con el procedimiento establecido.
Sin embargo, en este caso, el cálculo se realiza de forma inmediata.

$$({}^1A_2)^{-1} T = I$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1 = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores de $d_2 = L_2$ y $r_2 = L'_2$ se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^{1}A_2)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t$$
$$f_{12}=z-L_2 t$$
$$f_{13}=C\theta_2 x+S\theta_2 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^{1}A_2)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=(-S\theta_2)(-S\theta_2)+C\theta_2 C\theta_2=S\theta_2 S\theta_2+C\theta_2 C\theta_2=1$$
$$f_{12}(n)=z-L_2 t=0$$
$$f_{13}(n)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=-C\theta_2 S\theta_2+S\theta_2 C\theta_2=0$$

$$f_{11}(o)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=0$$
$$f_{12}(o)=z-L_2 t=1$$
$$f_{13}(o)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=0$$

$$f_{11}(a)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=S\theta_2 C\theta_2-C\theta_2 S\theta_2=0$$
$$f_{12}(a)=z-L_2 t=0$$
$$f_{13}(a)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=C\theta_2 C\theta_2+S\theta_2 S\theta_2=1$$

$$f_{11}(p)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=L'_2(-S\theta_2^2+C\theta_2^2)-L'_2=L'_2-L'_2=0$$
$$f_{12}(p)=z-L_2 t=L_2-L_2=0$$
$$f_{13}(p)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=C\theta_2 C\theta_2+S\theta_2 S\theta_2=1$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{2x} \\ . & . & . & P_{2y} \\ . & . & . & P_{2z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^1A_2)^{-1}T = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_{2x} \\ . & . & . & P_{2y} \\ . & . & . & P_{2z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -S\theta_2 P_{2x} + C\theta_2 P_{2y} - L'_2 \\ . & . & . & P_{2z} - L_2 \\ . & . & . & C\theta_2 P_{2x} + S\theta_2 P_{2y} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} -S\theta_2 P_{2x} + C\theta_2 P_{2y} - L'_2 = 0 \\ P_{2z} - L_2 = 0 \\ C\theta_2 P_{2x} + S\theta_2 P_{2y} = 0 \\ \ldots \end{gathered}$$

Ahora hay que calcular el valor de θ_2 en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{2x} y P_{2y} . Para ello, con la tercera ecuación:

$$\begin{gathered} C\theta_2 P_{2x} + S\theta_2 P_{2y} = 0 \\ (C\theta_2 P_{2x} + S\theta_2 P_{2y}) / C\theta_2 = 0 \\ P_{2x} + tg\theta_2 P_{2y} = 0 \end{gathered}$$

$$\theta_2 = arctg(-P_{2x}/P_{2y})$$

Y si se coge la primera ecuación:

$$\begin{gathered} -S\theta_2 P_{2x} + C\theta_2 P_{2y} - L'_2 = 0 \\ C\theta_2 P_{2y} + (-P_{2x}) S\theta_2 - L'_2 = 0 \end{gathered}$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_2 :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

$$\theta_2 = atan2(-P_{2x}, P_{2y}) \pm atan2(\sqrt{P_{2y}^2 + (-P_{2x})^2 - L'^2_2}, L'_2)$$

Parece ser que el ángulo θ_2 tiene dos soluciones diferentes.

Y en resumen:

$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = (-L'_2 S\theta_2, L'_2 C\theta_2, L_2)$$
$$\theta_2 = arctg(-P_{2x}/P_{2y})$$
$$\theta_2 = atan2(-P_{2x}, P_{2y}) \pm atan2\left(\sqrt{P_{2y}^2 + (-P_{2x})^2 - L'^2_2}, L'_2\right)$$

4 Articulación 3 con extremo en articulación 4

1 Cinemática Directa

Se iniciará con la primera articulación (Motor 3), donde el motor "Motor 3" girará, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "4" se posicione en el punto parcial deseado P_3 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establece el eje Z , el origen de coordenadas de la articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^2A_3$.

$$T={}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_3=L_3$ y $r_3=L'_3$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de

Coordenadas de la Base ($P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ P_{3z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = (L'_3 C\theta_3, L'_3 S\theta_3, L_3)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Por seguir con el método, aunque en el caso de un único motor es inmediato, se va a seguir con el procedimiento establecido.
Sin embargo, en este caso, el cálculo se realiza de forma inmediata.

$$({}^2A_3)^{-1} T = I$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^2A_3]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_3 = L_3$ y $r_3 = L'_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^2A_3)^{-1}T = \begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^2A_3)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t$$
$$f_{12} = -S\theta_3 x + C\theta_3 y$$
$$f_{13} = z - L_3 t$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^2A_3)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = C\theta_3 C\theta_3 + S\theta_3 S\theta_3 = 1$$
$$f_{12}(n) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = -S\theta_3 C\theta_3 + C\theta_3 S\theta_3 = 0$$
$$f_{13}(n) = z - L_3 t = 0$$

$$f_{11}(o) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = C\theta_3(-S\theta_3) + S\theta_3 C\theta_3 = 0$$
$$f_{12}(o) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = -S\theta_3(-S\theta_3) + C\theta_3 C\theta_3 = 1$$
$$f_{13}(o) = z - L_3 t = 0$$

$$f_{11}(a) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = 0$$
$$f_{12}(a) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = 0$$
$$f_{13}(a) = z - L_3 t = 1$$

$$f_{11}(p)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t=C\theta_3 L'_3 C\theta_3+S\theta_3 L'_3 S\theta_3-L'_3=L'_3-L'_3=0$$
$$f_{12}(p)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=-S\theta_3 L'_3 C\theta_3+C\theta_3 L'_3 S\theta_3=0$$
$$f_{13}(p)=z-L_3 t=L_3-L_3=0$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{3x} \\ . & . & . & P_{3y} \\ . & . & . & P_{3z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^2A_3)^{-1} T=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_{3x} \\ . & . & . & P_{3y} \\ . & . & . & P_{3z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_3 P_{3x}+S\theta_3 P_{3y}-L'_3 \\ . & . & . & -S\theta_3 P_{3x}+C\theta_3 P_{3y} \\ . & . & . & P_{3z}-L_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=I=\begin{pmatrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_3 P_{3x}+S\theta_3 P_{3y}-L'_3=0$$
$$-S\theta_3 P_{3x}+C\theta_3 P_{3y}=0$$
$$P_{3z}-L_3=0$$
$$\ldots$$

Ahora hay que calcular el valor de θ_3 en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{3x} y P_{3y} . Para ello, con la segunda ecuación:

$$-S\theta_3 P_{3x}+C\theta_3 P_{3y}=0$$
$$(S\theta_3 P_{3x}-C\theta_3 P_{3y})/C\theta_3=0$$
$$tg\theta_3 P_{3x}-P_{3y}=0$$

$$\theta_3=arctg(P_{3y}/P_{3x})$$

Y si se coge la primera ecuación:

$$C\theta_3 P_{3x}+S\theta_3 P_{3y}-L'_3=0$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo: θ_3

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \iff \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

$$\theta_3=atan2(P_{3y},P_{3x})\pm atan2(\sqrt{P_{3x}^2+P_{3y}^2-L'^2_3},L'_3)$$

Parece ser que el ánguloti θ_3 ene dos soluciones diferentes.

Y en resumen:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = (L'_3 C\theta_3, L'_3 S\theta_3, L_3)$$
$$\theta_3 = arctg(P_{3y} / P_{3x})$$
$$\theta_3 = atan2(P_{3y}, P_{3x}) \pm atan2(\sqrt{P_{3x}^2 + P_{3y}^2 - L'^2_3}, L'_3)$$

5 Articulación 4 con extremo en articulación 5

1 Cinemática Directa

Se iniciará con la primera articulación (Motor 4), donde el motor "Motor 4" girará, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "5" se posicione en el punto parcial deseado P_4 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establece el eje Z , el origen de coordenadas de la articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1} p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{3}A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4\mathrm{x}} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4\mathrm{y}} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4\mathrm{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^{3}A_4$.

$$T={}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetro $r_4=L_4$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4\mathrm{x}} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4\mathrm{y}} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4\mathrm{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al

Origen de Coordenadas del extremo del brazo ($(0_{u0'},0_{v0'},0_{w0'})$ - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_4 C\theta_4 \\ L_4 S\theta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{4x} \\ P_{4y} \\ P_{4z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})=(L_4 C\theta_4, L_4 S\theta_4, 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Por seguir con el método, aunque en el caso de un único motor es inmediato, se va a seguir con el procedimiento establecido.
Sin embargo, en este caso, el cálculo se realiza de forma inmediata.

$$({}^3A_4)^{-1}T=I$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^3A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y el valor $r_4 = L_4$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^3A_4)^{-1}T = \begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^3A_4)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t$$
$$f_{12} = -S\theta_4 x + C\theta_4 y$$
$$f_{13} = z$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^3A_4)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n) = C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t = C\theta_4 C\theta_4 + S\theta_4 S\theta_4 = 1$$
$$f_{12}(n) = -S\theta_4 x + C\theta_4 y = -S\theta_4 C\theta_4 + C\theta_4 S\theta_4 = 0$$
$$f_{13}(n) = z = 0$$

$$f_{11}(o) = C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t = C\theta_4(-S\theta_4) + S\theta_4 C\theta_4 = 0$$
$$f_{12}(o) = -S\theta_4 x + C\theta_4 y = -S\theta_4(-S\theta_4) + C\theta_4 C\theta_4 = 1$$
$$f_{13}(o) = z = 0$$

$$f_{11}(a) = C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t = 0$$
$$f_{12}(a) = -S\theta_4 x + C\theta_4 y = 0$$
$$f_{13}(a) = z = 1$$

$$f_{11}(p) = C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t = C\theta_4 L_4 C\theta_4 + S\theta_4 L_4 S\theta_4 - L_4 = L_4 - L_4 = 0$$

$$f_{12}(p) = -S\theta_4 x + C\theta_4 y = -S\theta_4 L_4 C\theta_4 + C\theta_4 L_4 S\theta_4 = 0$$
$$f_{13}(p) = z = 0$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{4x} \\ . & . & . & P_{4y} \\ . & . & . & P_{4z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^3A_4)^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_{4x} \\ . & . & . & P_{4y} \\ . & . & . & P_{4z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_4 P_{4x} + S\theta_4 P_{4y} - L_4 \\ . & . & . & -S\theta_4 P_{4x} + C\theta_4 P_{4y} \\ . & . & . & P_{4z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_4 P_{4x} + S\theta_4 P_{4y} - L_4 = 0$$
$$-S\theta_4 P_{4x} + C\theta_4 P_{4y} = 0$$
$$P_{4z} = 0$$
$$\ldots$$

Ahora hay que calcular el valor de θ_4 en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{4x} y P_{4y} . Para ello, con la segunda ecuación:

$$-S\theta_4 P_{4x} + C\theta_4 P_{4y} = 0$$
$$(S\theta_4 P_{4x} - C\theta_4 P_{4y}) / C\theta_4 = 0$$
$$tg\theta_4 P_{4x} - P_{4y} = 0$$

$$\theta_4 = arctg(P_{4y} / P_{4x})$$

Y si se coge la primera ecuación:

$$C\theta_4 P_{4x} + S\theta_4 P_{4y} - L_4 = 0$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo: θ_4

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \iff \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

$$\theta_4 = atan2(P_{4y}, P_{4x}) \pm atan2(\sqrt{P_{4x}^2 + P_{4y}^2 - L_4^2}, L_4)$$

Parece ser que el ángulo θ_4 tiene dos soluciones diferentes.

Y en resumen:

$$P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z}) = (L_4 C\theta_4, L_4 S\theta_4, 0)$$
$$\theta_4 = arctg(P_{4y} / P_{4x})$$
$$\theta_4 = atan2(P_{4y}, P_{4x}) \pm atan2(\sqrt{P_{4x}^2 + P_{4y}^2 - L_4^2}, L_4)$$

6 Articulación 5 con extremo en articulación 6 (Punto extremo del brazo)

1 Cinemática Directa

Se iniciará con la primera articulación (Motor 5), donde el motor "Motor 5" girará, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "6" se posicione en el punto parcial deseado P_5 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establece el eje Z , el origen de coordenadas de la articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1} p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{4}A_5]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^{4}A_5$.

$$T={}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetro $r_5=L_5$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al

Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_5 C\theta_5 \\ L_5 S\theta_5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{5x} \\ P_{5y} \\ P_{5z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z}) = (L_5 C\theta_5, L_5 S\theta_5, 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Por seguir con el método, aunque en el caso de un único motor es inmediato, se va a seguir con el procedimiento establecido.
Sin embargo, en este caso, el cálculo se realiza de forma inmediata.

$$({}^4A_5)^{-1} T = I$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^4A_5]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^3A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y el valor $r_5 = L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^4A_5)^{-1}T = \begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -L_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^4A_5)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_5 x + S\theta_5 y - L_5 t$$
$$f_{12} = -S\theta_5 x + C\theta_5 y$$
$$f_{13} = z$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^4A_5)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n) = C\theta_5 x + S\theta_5 y - L_5 t = C\theta_5 C\theta_5 + S\theta_5 S\theta_5 = 1$$
$$f_{12}(n) = -S\theta_5 x + C\theta_5 y = -S\theta_5 C\theta_5 + C\theta_5 S\theta_5 = 0$$
$$f_{13}(n) = z = 0$$

$$f_{11}(o) = C\theta_5 x + S\theta_5 y - L_5 t = C\theta_5(-S\theta_5) + S\theta_5 C\theta_5 = 0$$
$$f_{12}(o) = -S\theta_5 x + C\theta_5 y = -S\theta_5(-S\theta_5) + C\theta_5 C\theta_5 = 1$$
$$f_{13}(o) = z = 0$$

$$f_{11}(a) = C\theta_5 x + S\theta_5 y - L_5 t = 0$$
$$f_{12}(a) = -S\theta_5 x + C\theta_5 y = 0$$
$$f_{13}(a) = z = 1$$

$$f_{11}(p) = C\theta_5 x + S\theta_5 y - L_5 t = C\theta_5 L_5 C\theta_5 + S\theta_5 L_5 S\theta_5 - L_5 = L_5 - L_5 = 0$$
$$f_{12}(p) = -S\theta_5 x + C\theta_5 y = -S\theta_5 L_5 C\theta_5 + C\theta_5 L_5 S\theta_5 = 0$$

$$f_{13}(p) = z = 0$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{5x} \\ . & . & . & P_{5y} \\ . & . & . & P_{5z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^4A_5)^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -L_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_{5x} \\ . & . & . & P_{5y} \\ . & . & . & P_{5z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_5 P_{5x} + S\theta_5 P_{5y} - L_5 \\ . & . & . & -S\theta_5 P_{5x} + C\theta_5 P_{5y} \\ . & . & . & P_{5z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} C\theta_5 P_{5x} + S\theta_5 P_{5y} - L_5 = 0 \\ -S\theta_5 P_{5x} + C\theta_5 P_{5y} = 0 \\ P_{5z} = 0 \\ \dots \end{gathered}$$

Ahora hay que calcular el valor de θ_5 en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{5x} y P_{5y} . Para ello, con la segunda ecuación:

$$\begin{gathered} -S\theta_5 P_{5x} + C\theta_5 P_{5y} = 0 \\ (S\theta_5 P_{5x} - C\theta_5 P_{5y}) / C\theta_5 = 0 \\ tg\theta_5 P_{5x} - P_{5y} = 0 \end{gathered}$$

$$\theta_5 = arctg\,(P_{5y} / P_{5x})$$

Y si se coge la primera ecuación:

$$C\theta_5 P_{5x} + S\theta_5 P_{5y} - L_5 = 0$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo: θ_5

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \iff \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

$$\theta_5 = atan2(P_{5y}, P_{5x}) \pm atan2(\sqrt{P_{5x}^2 + P_{5y}^2 - L_5^2}, L_5)$$

Parece ser que el ángulo θ_5 tiene dos soluciones diferentes.

Y en resumen:

$$P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z})=(L_5 C\theta_5, L_5 S\theta_5, 0)$$
$$\theta_5=arctg(P_{5y}/P_{5x})$$
$$\theta_5=atan2(P_{5y}, P_{5x})\pm atan2(\sqrt{P_{5x}^2+P_{5y}^2-L_5^2}, L_5)$$

7 Resumen de cálculo de variables y análisis geométrico

El conjunto de ecuaciones que determinan el brazo serán:

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})=(0, 0, L_1)$$
$$\theta_1=arctg(P_{1y}/P_{1x})$$

$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})=(-L'_2 S\theta_2, L'_2 C\theta_2, L_2)$$
$$\theta_2=arctg(-P_{2x}/P_{2y})$$
$$\theta_2=atan2(-P_{2x}, P_{2y})\pm atan2(\sqrt{P_{2y}^2+(-P_{2x})^2-L'^2_2}, L'_2)$$

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})=(L'_3 C\theta_3, L'_3 S\theta_3, L_3)$$
$$\theta_3=arctg(P_{3y}/P_{3x})$$
$$\theta_3=atan2(P_{3y}, P_{3x})\pm atan2(\sqrt{P_{3x}^2+P_{3y}^2-L'^2_3}, L'_3)$$

$$P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})=(L_4 C\theta_4, L_4 S\theta_4, 0)$$
$$\theta_4=arctg(P_{4y}/P_{4x})$$
$$\theta_4=atan2(P_{4y}, P_{4x})\pm atan2(\sqrt{P_{4x}^2+P_{4y}^2-L_4^2}, L_4)$$

$$P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z})=(L_5 C\theta_5, L_5 S\theta_5, 0)$$
$$\theta_5=arctg(P_{5y}/P_{5x})$$
$$\theta_5=atan2(P_{5y}, P_{5x})\pm atan2(\sqrt{P_{5x}^2+P_{5y}^2-L_5^2}, L_5)$$

Hay que tener en cuenta que la relación entre las componentes de los puntos $P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$, $P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$, $P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$, $P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})$ y $P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z})$, ahora sí podría ser utilizada puesto que estos puntos están definidos en relación a su base en cada articulación por separado por lo que, ya no existe una intersección de los diferentes subproblemas y, por tanto, de sus correspondientes longitudes.

Por otra parte, en cuanto a las componentes, éstas dependen de los ángulos, y los ángulos dependen de las componentes. Como consecuencia, aún existe una interdependencia difícil de resolver.

Sin embargo, las distintas longitudes de los segmentos y las diferentes componentes de los puntos mantienen una cierta relación que se va a analizar.
Estos puntos serían las coordenadas de un punto situado en el origen de Coordenadas de la articulación inmediatamente superior respecto a la base en cada subproblema. Eso supone que son coordenadas locales a cada Origen de Coordenadas de la Base en cada subproblema.
Como las diferentes articulaciones están unidas se debería encontrar una relación entre todos ellos y con el punto final, pero desde el Origen de Coordenadas del Sistema Base de la primera articulación.

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = (0, 0, L_1)$$
$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = (-L'_2 S\theta_2, L'_2 C\theta_2, L_2)$$
$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = (L'_3 C\theta_3, L'_3 S\theta_3, L_3)$$
$$P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z}) = (L_4 C\theta_4, L_4 S\theta_4, 0)$$
$$P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z}) = (L_5 C\theta_5, L_5 S\theta_5, 0)$$

Así, el punto $P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = (0, 0, L_1)$ determinaría las coordenadas del Origen de Coordenadas de la Articulación 2 respecto a la Base O. De hecho, la primera articulación tiene el eje de rotación perpendicular al suelo, por lo que ese Origen de Coordenadas no cambiará de posición.

En cuanto al punto, $P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = (-L'_2 S\theta_2, L'_2 C\theta_2, L_2)$ este punto determinaría las coordenadas del Origen de Coordenadas de la Articulación 3 respecto a su Base, el Origen de Coordenadas de la Articulación 2. Y en este caso, en el sistema de coordenadas local, ese punto girará sobre una circunferencia con eje, el mismo que el eje de rotación del Motor 2 y con un radio L'_2 , pero a una distancia L'_2 alejado del motor sobre su mismos eje.

En cuanto al punto $P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = (L'_3 C\theta_3, L'_3 S\theta_3, L_3)$, este punto determinaría las coordenadas del Origen de Coordenadas de la Articulación 4 respecto a su Base, el Origen de Coordenadas de la Articulación 3. Y como en el caso anterior, en el sistema de coordenadas local, ese punto girará sobre una circunferencia con eje, el mismo que el eje de rotación del Motor 3 y con un radio L'_3 , pero a una distancia L_3 alejado del Origen de Coordenadas asignado al Motor 3, sobre su mismos eje.

En cuanto al punto $P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z}) = (L_4 C\theta_4, L_4 S\theta_4, 0)$, este punto determinaría las coordenadas del Origen de Coordenadas de la Articulación 5 respecto a su Base, el Origen de Coordenadas de la Articulación 4. Y como en el caso anterior, en el sistema de coordenadas local, ese punto girará sobre una circunferencia con eje, el mismo que el eje de rotación del Motor 4 y con un radio L_4 .

Y en cuanto al punto, $P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z}) = (L_5 C\theta_5, L_5 S\theta_5, 0)$ este punto determinaría las coordenadas del Origen de Coordenadas del extremo del brazo respecto a su Base, el Origen de Coordenadas de la Articulación 5. Y como en el caso anterior, en el sistema de coordenadas local, ese punto girará sobre una circunferencia con eje, el mismo que el eje de rotación del Motor 5 y con un radio L_5 .

Pero, en conclusión, la dependencia de los ángulos de las diferentes articulaciones hace inapropiado este sistema, salvo para comprobar lo adecuado del sistema y su posible cálculo.
También, hace posible tratar un modelo complejo por partes para activar o no determinados motores, con lo que se comprobará el comportamiento de las diferentes articulaciones trabajando por separado.
De hecho, el problema completo sigue sin tener solución ya que no hay aún un conjunto de ecuaciones que lo definan por completo.

7 Intento 7 - División del problema en partes simples (pares de articulaciones)

En este caso, se intentarán analizar los problemas por separado, pero con algún grado de

acoplamiento entre las diferentes articulaciones.
De esta forma, se inicia la resolución del problema independizando las articulaciones cuyos ángulos no puedan ser calculados dentro de un conjunto complejo de articulaciones.
Así, se va a independizar todo el tratamiento de matrices para resolver cada problema simple representado a continuación.
Para cada par de articulaciones se va a tomar la primera articulación como aquella en la que se encuentre el Origen de Coordenadas inicial, y la tercera, como aquella en la que se encuentre el punto final virtual sobre el que posicionar el extremo del segundo segmento. Eso supone la utilización de dos motores en cada subproblema.

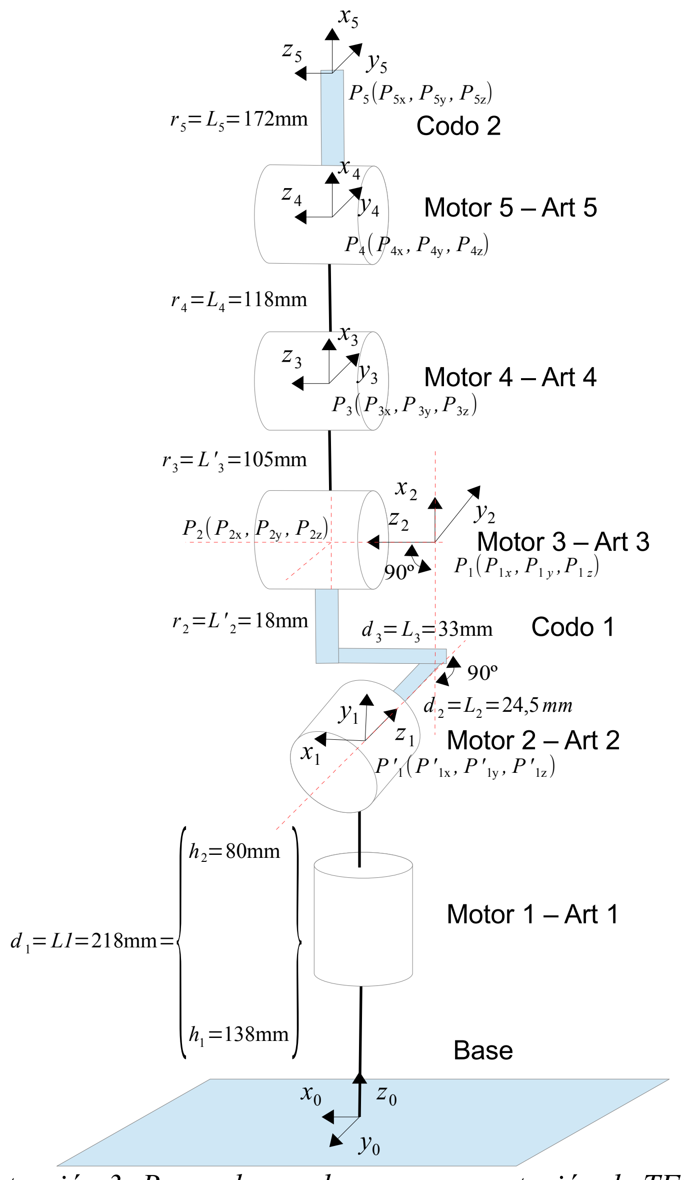

Ilustración 3: Brazo de prueba para presentación de TFG (División en pares simples)

1 Par de articulaciones 1-2, sin giro de 90º

1 Cinemática Directa

Se iniciará con las dos primeras articulaciones (motores 1 y 2), donde los motores "Motor 1" y "Motor 2" girarán, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "3" se posicione en el punto parcial deseado P_1 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Este par de articulaciones representan un problema similar al "Caso 3-0" con dos motores perpendiculares, luego se va a reutilizar el trabajo allí mostrado.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^0A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^0A_1 {}^1A_2$.

$$T={}^0A_2={}^0A_1 {}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$T={}^0A_2=\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 S\theta_2 & d_2 S\theta_1 + r_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ C\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 S\theta_2 & r_2 C\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & d_1 + r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1=L_1$, $d_2=L_2$ y $r_2=L'_2$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 S\theta_2 & L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ C\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L_1+L'_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 S\theta_2 & L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ C\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L_1+L'_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ L'_2 C\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1 \\ L_1+L'_2 S\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=(L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 C\theta_2,\, L'_2 C\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1,\, L_1+L'_2 S\theta_2)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias, incluidas en la igualdad:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T={}^1A_2$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 S\theta_2 & d_2 S\theta_1 + r_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ C\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 S\theta_2 & r_2 C\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & d_1 + r_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 S\theta_2 & P_{1x} \\ C\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 S\theta_2 & P_{1y} \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$ y $r_2=L'_2$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 S\theta_2 & L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 C\theta_2 \\ C\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L_1 + L'_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 S\theta_2 & P_{1x} \\ C\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 S\theta_2 & P_{1y} \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L'_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^{0}A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$
\begin{aligned}
&f_{11} = C\theta_1 x + S\theta_1 y\\
&f_{12} = z - L_1 t\\
&f_{13} = S\theta_1 x - C\theta_1 y
\end{aligned}
$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & L'_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(n) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1 C\theta_1 C\theta_2 + S\theta_1 C\theta_2 S\theta_1 = C\theta_2\\
&f_{12}(n) = z - L_1 t = S\theta_2 = S\theta_2\\
&f_{13}(n) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1 C\theta_1 C\theta_2 - C\theta_1 C\theta_2 S\theta_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(o) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1 S\theta_1 + S\theta_1(-C\theta_1) = C\theta_1 S\theta_2 - C\theta_1 S\theta_1 = 0 = 0\\
&f_{12}(o) = z - L_1 t = 0 = 0\\
&f_{13}(o) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1 S\theta_1 - C\theta_1(-C\theta_1) = 1 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(a) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1 C\theta_1 S\theta_2 + S\theta_1 S\theta_1 S\theta_2 = S\theta_2(C\theta_1 C\theta_1 + S\theta_1 S\theta_1) = S\theta_2 = S\theta_2\\
&f_{12}(a) = z - L_1 t = -C\theta_2 = -C\theta_2\\
&f_{13}(a) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1 C\theta_1 S\theta_2 - C\theta_1 S\theta_1 S\theta_2 = 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{11}(p) = C\theta_1 x + S\theta_1 y &= C\theta_1(L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 C\theta_2) + S\theta_1(L'_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1)\ldots \quad =\\
&\ldots C\theta_1 L_2 S\theta_1 + C\theta_1 L'_2 C\theta_1 C\theta_2 + S\theta_1 L'_2 C\theta_2 S\theta_1 - S\theta_1 L_2 C\theta_1 \ldots \quad =\\
&\ldots L'_2 C\theta_2((C\theta_1)^2 + (S\theta_1)^2) = L'_2 C\theta_2 = L'_2 C\theta_2\\
f_{12}(p) = z - L_1 t &= L_1 + L'_2 S\theta_2 - L_1 = L'_2 S\theta_2 = L'_2 S\theta_2\\
f_{13}(p) = S\theta_1 x - C\theta_1 y &= S\theta_1(L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 C\theta_2) - C\theta_1(L'_2 C\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1)\ldots \quad =\\
&S\theta_1 L_2 S\theta_1 + S\theta_1 L'_2 C\theta_1 C\theta_2 - C\theta_1 L'_2 C\theta_2 S\theta_1 + C\theta_1 L_2 C\theta_1 \ldots \quad =\\
&\ldots L_2((S\theta_1)^2 + (C\theta_1)^2) + S\theta_1 L'_2 C\theta_1 C\theta_2 - C\theta_1 L'_2 C\theta_2 S\theta_1 = L_2 = L_2
\end{aligned}
$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{1x} \\ . & . & . & P_{1y} \\ . & . & . & P_{1z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_{1x} \\ . & . & . & P_{1y} \\ . & . & . & P_{1z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y} \\ . & . & . & P_{1z}-L_1 \\ . & . & . & S\theta_1 P_{1x}-C\theta_1 P_{1y} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^{1}A_2=\begin{pmatrix} . & . & . & L'_2 C\theta_2 \\ . & . & . & L'_2 S\theta_2 \\ . & . & . & L_2 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y}=L'_2 C\theta_2 \\ P_{1z}-L_1=L'_2 S\theta_2 \\ S\theta_1 P_{1x}-C\theta_1 P_{1y}=L_2 \\ \dots \end{gathered}$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 y θ_2, en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{1x} y P_{1y}. Para ello, con la tercera ecuación:

$$\begin{gathered} S\theta_1 P_{1x}-C\theta_1 P_{1y}=L_2 \\ -P_{1y} C\theta_1+P_{1x} S\theta_1=L_2 \end{gathered}$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_1:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Leftrightarrow \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

$$\theta_1=atan2(P_{1x},-P_{1y})\pm atan2(\sqrt{(-P_{1y})^2+(P_{1x})^2-(L_2)^2},L_2)$$

Y con la primera ecuación:

$$\begin{gathered} C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y}=L'_2 C\theta_2 \\ \theta_2=\arccos((C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y})/L'_2) \end{gathered}$$

O también desde la segunda ecuación:

$$\begin{gathered} P_{1z}-L_1=L'_2 S\theta_2 \\ \theta_2=\arcsin((P_{1z}-L_1)/L'_2) \end{gathered}$$

Luego, ya estarán determinados los ángulos necesarios en ambas articulaciones, para llegar al punto $P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto.

Y en resumen:

$$\begin{gathered} P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=(L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 C\theta_2,\ L'_2 C\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1,\ L_1+L'_2 S\theta_2) \\ \theta_1=atan2(P_{1x},-P_{1y})\pm atan2(\sqrt{(-P_{1y})^2+(P_{1x})^2-(L_2)^2},L_2) \\ \theta_2=\arccos((C\theta_1 P_{1x}+S\theta_1 P_{1y})/L'_2) \end{gathered}$$

2 Par de articulaciones 1-2, con giro de 90º

1 Cinemática Directa

Se iniciará con las dos primeras articulaciones (motores 1 y 2), donde los motores "Motor 1" y "Motor 2" girarán, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "3" se posicione en el punto parcial deseado P_1 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Este par de articulaciones representan un problema similar al "Caso 3-0" con dos motores perpendiculares, luego se va a reutilizar el trabajo allí mostrado.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^{1}A_2$ y $[{}^{1}A_2]^{-1}$ afectadas anteriores se convierten en:

$${}^{1}A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^{0}A_1 {}^{1}A_2$.

$$T={}^{0}A_2={}^{0}A_1{}^{1}A_2=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$T={}^{0}A_2=\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & d_2 S\theta_1 - r_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & d_1 + r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1=L_1$, $d_2=L_2$ y $r_2=L'_2$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})=(L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

Ahora resultaría interesante saber cuál es la posición del punto $P_2(P_{2x},P_{2y},P_{2z})$ ($O'-UVW$), en relación al origen de Coordenadas de la Base (($P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})$ - $O-XYZ$)). Para ello, se debe considerar la distancia L_3 (d_3) sobre el eje X_1 de la segunda articulación.

Así las ecuaciones a ejecutar darían:

$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (C\theta_1 C\theta_2 L_3) + (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2) \\ (S\theta_1 C\theta_2 L_3) + (-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1) \\ (S\theta_2 L_3) + (L_1 + L'_2 C\theta_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{2z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto:

$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = (C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots, \ldots)$$
$$(\ldots, S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2)$$

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias, incluidas en la igualdad:

$$({}^0A_1)^{-1} T = {}^1A_2$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^1A_2 = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_2=\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & d_2 S\theta_1 - r_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & d_1 + r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & P_{1x} \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & P_{1y} \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$ y $r_2=L'_2$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & P_{1x} \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & P_{1y} \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^{1}A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^{0}A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=C\theta_1 x + S\theta_1 y$$
$$f_{12}=z - L_1 t$$
$$f_{13}=S\theta_1 x - C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p)\\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p)\\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}={}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2S\theta_2\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2C\theta_2\\ 0 & 1 & 0 & L_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&f_{11}(n)=C\theta_1x+S\theta_1y=-C\theta_1C\theta_1S\theta_2-S\theta_1S\theta_2S\theta_1=-S\theta_2\\
&f_{12}(n)=z-L_1t=C\theta_2\\
&f_{13}(n)=S\theta_1x-C\theta_1y=-S\theta_1C\theta_1S\theta_2+C\theta_1S\theta_2S\theta_1=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{11}(o)=C\theta_1x+S\theta_1y=C\theta_1S\theta_1+S\theta_1(-C\theta_1)=C\theta_1S\theta_1-C\theta_1S\theta_1=0=0\\
&f_{12}(o)=z-L_1t=0=0\\
&f_{13}(o)=S\theta_1x-C\theta_1y=S\theta_1S\theta_1-C\theta_1(-C\theta_1)=1=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{11}(a)=C\theta_1x+S\theta_1y=C\theta_1C\theta_1C\theta_2+S\theta_1S\theta_1C\theta_2=C\theta_2(C\theta_1C\theta_1+S\theta_1S\theta_1)=C\theta_2\\
&f_{12}(a)=z-L_1t=S\theta_2\\
&f_{13}(a)=S\theta_1x-C\theta_1y=S\theta_1C\theta_1C\theta_2-C\theta_1S\theta_1C\theta_2=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{11}(p)=C\theta_1x+S\theta_1y=C\theta_1(L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2)+S\theta_1(-L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1)\ldots\quad=\\
&\qquad\ldots C\theta_1L_2S\theta_1-C\theta_1L'_2C\theta_1S\theta_2-S\theta_1L'_2S\theta_2S\theta_1-S\theta_1L_2C\theta_1\ldots\quad=\\
&\qquad\ldots-L'_2S\theta_2((C\theta_1)^2+(S\theta_1)^2)=-L'_2S\theta_2\\
&f_{12}(p)=z-L_1t=L_1+L'_2C\theta_2-L_1=L'_2C\theta_2\\
&f_{13}(p)=S\theta_1x-C\theta_1y=S\theta_1(L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2)+C\theta_1(L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1)\ldots\quad=\\
&\qquad S\theta_1L_2S\theta_1-S\theta_1L'_2C\theta_1S\theta_2+C\theta_1L'_2S\theta_2S\theta_1+C\theta_1L_2C\theta_1\ldots\quad=\\
&\qquad\ldots L_2((S\theta_1)^2+(C\theta_1)^2)-S\theta_1L'_2C\theta_1S\theta_2+C\theta_1L'_2S\theta_2S\theta_1=L_2
\end{aligned}$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{1x}\\ . & . & . & P_{1y}\\ . & . & . & P_{1z}\\ . & . & . & 1\end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -L_1\\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_{1x}\\ . & . & . & P_{1y}\\ . & . & . & P_{1z}\\ . & . & . & 1\end{pmatrix}\quad=$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1P_{1x}+S\theta_1P_{1y}\\ . & . & . & P_{1z}-L_1\\ . & . & . & S\theta_1P_{1x}-C\theta_1P_{1y}\\ . & . & . & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p)\\ . & . & . & f_{12}(p)\\ . & . & . & f_{13}(p)\\ . & . & . & 1\end{pmatrix}={}^1A_2=\begin{pmatrix} . & . & . & -L'_2S\theta_2\\ . & . & . & L'_2C\theta_2\\ . & . & . & L_2\\ . & . & . & 1\end{pmatrix}$$

$$C\theta_1 P_{1x} + S\theta_1 P_{1y} = -L'_2 S\theta_2$$
$$P_{1z} - L_1 = L'_2 C\theta_2$$
$$S\theta_1 P_{1x} - C\theta_1 P_{1y} = L_2$$
$$\dots$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 y θ_2, en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{1x} y P_{1y}. Para ello, con la tercera ecuación:

$$S\theta_1 P_{1x} - C\theta_1 P_{1y} = L_2$$
$$-P_{1y} C\theta_1 + P_{1x} S\theta_1 = L_2$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_1 :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

$$\theta_1 = atan2(P_{1x}, -P_{1y}) \pm atan2(\sqrt{(-P_{1y})^2 + (P_{1x})^2 - (L_2)^2}, L_2)$$

Y con la primera ecuación:

$$C\theta_1 P_{1x} + S\theta_1 P_{1y} = -L'_2 S\theta_2$$
$$\theta_2 = \arcsin((C\theta_1 P_{1x} + S\theta_1 P_{1y})/(-L'_2))$$

O también desde la segunda ecuación:

$$P_{1z} - L_1 = L'_2 C\theta_2$$
$$\theta_2 = \arcsin((P_{1z} - L_1)/L'_2)$$

Luego, ya estarán determinados los ángulos necesarios en ambas articulaciones, para llegar al punto $P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto.

Y en resumen:

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2)$$
$$P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = (C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, \dots, \dots)$$
$$(\dots, S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2)$$
$$\theta_1 = atan2(P_{1x}, -P_{1y}) \pm atan2(\sqrt{(-P_{1y})^2 + (P_{1x})^2 - (L_2)^2}, L_2)$$
$$\theta_2 = \arcsin((C\theta_1 P_{1x} + S\theta_1 P_{1y})/(-L'_2))$$

3 Par de articulaciones 2-3

1 Cinemática Directa

Se iniciará con las siguientes dos articulaciones (motores 2 y 3), donde los motores "Motor 2" y "Motor 3" girarán para que el Origen de Coordenadas de la articulación "4" se posicione en el punto parcial deseado P_3 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & r_2 S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^1A_2{}^2A_3$.

$$T={}^1A_3={}^1A_2{}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & r_2S\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2C\theta_3 & -C\theta_2S\theta_3 & S\theta_2 & r_2C\theta_2+d_3S\theta_2+r_3C\theta_2C\theta_3 \\ C\theta_3S\theta_2 & -S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_2 & r_2S\theta_2-d_3C\theta_2+r_3C\theta_3S\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & d_2+r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2=L_2$, $d_3=L_3$, $r_2=L'_2$ y $r_3=L'_3$), y los ángulos deseados:

$$P_3(P_{3x},P_{3y},P_{3z})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2C\theta_3 & -C\theta_2S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2C\theta_2+L_3S\theta_2+L'_3C\theta_2C\theta_3 \\ C\theta_3S\theta_2 & -S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_2 & L'_2S\theta_2-L_3C\theta_2+L'_3C\theta_3S\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2+L'_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo $((0_{u0'},0_{v0'},0_{w0'})$ - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 & L'_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_2 C\theta_3 \\ L'_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ P_{3z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = (L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_2 C\theta_3 , L'_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 , L_2 + L'_3 S\theta_3)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias, incluidas en la igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1} T = {}^2A_3$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^1A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_2 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 + d_3 S\theta_2 + r_3 C\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 & r_2 S\theta_2 - d_3 C\theta_2 + r_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & d_2 + r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{2x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{2y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & P_{2x} \\ C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 & P_{2y} \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_2 = L_2$, $d_3 = L_3$, $r_2 = L'_2$ y $r_3 = L'_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1} T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_2 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 & L'_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_2 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & P_{2x} \\ C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 & P_{2y} \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^1A_2)^{-1} T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=C\theta_2 x+S\theta_2 y-L'_2 t$$
$$f_{12}=z-L_2 t$$
$$f_{13}=S\theta_2 x-C\theta_2 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_2 x+S\theta_2 y-L'_2 t=C\theta_2(C\theta_2 C\theta_3)+S\theta_2(C\theta_3 S\theta_2)=C\theta_3$$
$$f_{12}(n)=z-L_2 t=S\theta_3$$
$$f_{13}(n)=S\theta_2 x-C\theta_2 y=S\theta_2(C\theta_2 C\theta_3)-C\theta_2(C\theta_3 S\theta_2)=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_2 x+S\theta_2 y-L'_2 t=C\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)+S\theta_2(-S\theta_2 S\theta_3)=0$$
$$f_{12}(o)=z-L_2 t=C\theta_3$$
$$f_{13}(o)=S\theta_2 x-C\theta_2 y=S\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)-C\theta_2(-S\theta_2 S\theta_3)=0$$

$$f_{11}(a)=C\theta_2 x+S\theta_2 y-L'_2 t=C\theta_2(S\theta_2)+S\theta_2(-C\theta_2)=0$$
$$f_{12}(a)=z-L_2 t=0$$
$$f_{13}(a)=S\theta_2 x-C\theta_2 y=S\theta_2(S\theta_2)-C\theta_2(-C\theta_2)=1$$

$$f_{11}(p)=C\theta_2 x+S\theta_2 y-L'_2 t=C\theta_2(L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_2 C\theta_3)...$$
$$...+S\theta_2(L'_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 S\theta_2)-L'_2(L_2+L'_3 S\theta_3)=L'_3 C\theta_3$$
$$f_{12}(p)=z-L_2 t=L_2+L'_3 S\theta_3-L_2 t=L'_3 S\theta_3$$
$$f_{13}(p)=S\theta_2 x-C\theta_2 y=S\theta_2(L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_2 C\theta_3)...$$
$$-C\theta_2(L'_2 S\theta_2-L_3 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 S\theta_2)=L_3$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{3x} \\ . & . & . & P_{3y} \\ . & . & . & P_{3z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^1A_2)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ S\theta_2 & -C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_{3x} \\ . & . & . & P_{3y} \\ . & . & . & P_{3z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_2 P_{2x} + S\theta_2 P_{2y} - L'_2 \\ . & . & . & P_{2z} - L'_2 \\ . & . & . & S\theta_2 P_{2x} - C\theta_2 P_{2y} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_3 = \begin{pmatrix} . & . & . & L'_3 C\theta_3 \\ . & . & . & L'_3 S\theta_3 \\ . & . & . & L_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered} C\theta_2 P_{3x} + S\theta_2 P_{3y} - L'_2 = L'_3 C\theta_3 \\ P_{3z} - L'_2 = L'_3 S\theta_3 \\ S\theta_2 P_{3x} - C\theta_2 P_{3y} = L_3 \\ \ldots \end{gathered}$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_2 y θ_3 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{3x} y P_{3y} . Para ello, con la tercera ecuación:

$$\begin{gathered} S\theta_2 P_{3x} - C\theta_2 P_{3y} = L_3 \\ -P_{3y} C\theta_2 + P_{3x} S\theta_2 = L_3 \end{gathered}$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_2 :

$$a \cos\theta + b \sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

$$\theta_2 = atan2(P_{3x}, -P_{3y}) \pm atan2(\sqrt{(-P_{3y})^2 + (P_{3x})^2 - (L_3)^2}, L_3)$$

Y con la primera ecuación:

$$\begin{gathered} C\theta_2 P_{3x} + S\theta_2 P_{3y} - L'_2 = L'_3 C\theta_3 \\ \theta_3 = \arccos((C\theta_2 P_{3x} + S\theta_2 P_{3y} - L'_2)/L'_3) \end{gathered}$$

O también desde la segunda ecuación:

$$\begin{gathered} P_{3z} - L'_2 = L'_3 S\theta_3 \\ \theta_3 = \arcsin((P_{3z} - L'_2)/L'_3) \end{gathered}$$

Luego, ya estarán determinados los ángulos necesarios en ambas articulaciones, para llegar al punto $P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto.

Y en resumen:

$$\begin{gathered} P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = (L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_2 C\theta_3, L'_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2, L_2 + L'_3 S\theta_3) \\ \theta_2 = atan2(P_{3x}, -P_{3y}) \pm atan2(\sqrt{(-P_{3y})^2 + (P_{3x})^2 - (L_3)^2}, L_3) \\ \theta_3 = \arccos((C\theta_2 P_{3x} + S\theta_2 P_{3y} - L'_2)/L'_3) \end{gathered}$$

4 Par de articulaciones 2-3, con giro de 90º

1 Cinemática Directa

Se iniciará con las siguientes dos articulaciones (motores 2 y 3), donde los motores "Motor 2" y

"Motor 3" girarán para que el Origen de Coordenadas de la articulación "4" se posicione en el punto parcial deseado P_2 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^{1}A_2$ y $[{}^{1}A_2]^{-1}$ afectadas anteriores se convierten en:

$${}^{1}A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^{1}A_2{}^{2}A_3$.

$$T={}^{1}A_3={}^{1}A_2{}^{2}A_3=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 C\theta_3 & S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2+r_3 C\theta_2-r_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2+r_3 S\theta_2+r_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_2+r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2=L_2$, $d_3=L_3$, $r_2=L'_2$ y $r_3=L'_3$), y los ángulos deseados:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 C\theta_3 & S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ((0$_{u0'}$,0$_{v0'}$,0$_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 C\theta_3 & S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{3x} \\ P_{3y} \\ P_{3z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = (-L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \,,\, L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \,,\, L_2 + L'_3 S\theta_3)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias, incluidas en la igualdad:

$$({}^{1}A_2)^{-1}T={}^{2}A_3$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix}-S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2\\ 0 & 0 & 1 & -d_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad {}^{2}A_3=\begin{pmatrix}C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3\\ 0 & 0 & 1 & d_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\\ 1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_x & o_x & a_x & P_{3x}\\ n_y & o_y & a_y & P_{3y}\\ n_z & o_z & a_z & P_{3z}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}$$

$$T={}^{1}A_3=\begin{pmatrix}-S\theta_2C\theta_3 & S\theta_2S\theta_3 & C\theta_2 & -r_2S\theta_2+r_3C\theta_2-r_3S\theta_2C\theta_3\\ C\theta_3C\theta_2 & -C\theta_2S\theta_3 & S\theta_2 & r_2C\theta_2+r_3S\theta_2+r_3C\theta_3C\theta_2\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_2+r_3S\theta_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_x & o_x & a_x & P_{3x}\\ n_y & o_y & a_y & P_{3y}\\ n_z & o_z & a_z & P_{3z}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-S\theta_2C\theta_3 & S\theta_2S\theta_3 & C\theta_2 & P_{3x}\\ C\theta_3C\theta_2 & -C\theta_2S\theta_3 & S\theta_2 & P_{3y}\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & P_{3z}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_2=L_2$, $d_3=L_3$, $r_2=L'_2$ y $r_3=L'_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{1}A_2)^{-1}T=\begin{pmatrix}-S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2\\ 0 & 0 & 1 & -d_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-S\theta_2C\theta_3 & S\theta_2S\theta_3 & C\theta_2 & -L'_2S\theta_2+L_3C\theta_2-L'_3S\theta_2C\theta_3\\ C\theta_3C\theta_2 & -C\theta_2S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2C\theta_2+L_3S\theta_2+L'_3C\theta_3C\theta_2\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2+L'_3S\theta_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix}-S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2\\ 0 & 0 & 1 & -d_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-S\theta_2C\theta_3 & S\theta_2S\theta_3 & C\theta_2 & P_{3x}\\ C\theta_3C\theta_2 & -C\theta_2S\theta_3 & S\theta_2 & P_{3y}\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & P_{3z}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$${}^{2}A_3=\begin{pmatrix}C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3C\theta_3\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3S\theta_3\\ 0 & 0 & 1 & L_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^1A_2)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t$$
$$f_{12}=z-L_2 t$$
$$f_{13}=C\theta_2 x+S\theta_2 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=-S\theta_2(-S\theta_2 C\theta_3)+C\theta_2(C\theta_3 C\theta_2)=C\theta_3$$
$$f_{12}(n)=z-L_2 t=S\theta_3$$
$$f_{13}(n)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=C\theta_2(-S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_2(C\theta_3 C\theta_2)=0$$

$$f_{11}(o)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=-S\theta_2(S\theta_2 S\theta_3)+C\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)=-S\theta_3$$
$$f_{12}(o)=z-L_2 t=C\theta_3$$
$$f_{13}(o)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=C\theta_2(S\theta_2 S\theta_3)+S\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)=0$$

$$f_{11}(a)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=-S\theta_2(C\theta_2)+C\theta_2(S\theta_2)=0$$
$$f_{12}(a)=z-L_2 t=0$$
$$f_{13}(a)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=C\theta_2(C\theta_2)+S\theta_2(S\theta_2)=1$$

$$f_{11}(p)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=S\theta_2(L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3)...$$
$$...+C\theta_2(L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)-L'_2(L_2+L'_3 S\theta_3)=L'_3 C\theta_3$$
$$f_{12}(p)=z-L_2 t=L_2+L'_3 S\theta_3-L_2 t=L'_3 S\theta_3$$
$$f_{13}(p)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=-C\theta_2(L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3)...$$
$$+S\theta_2(L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)=L_3$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{3x} \\ . & . & . & P_{3y} \\ . & . & . & P_{3z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^1A_2)^{-1}T = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_{3x} \\ . & . & . & P_{3y} \\ . & . & . & P_{3z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -S\theta_2 P_{2x} + C\theta_2 P_{2y} - L'_2 \\ . & . & . & P_{2z} - L'_2 \\ . & . & . & C\theta_2 P_{2x} + S\theta_2 P_{2y} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_3 = \begin{pmatrix} . & . & . & L'_3 C\theta_3 \\ . & . & . & L'_3 S\theta_3 \\ . & . & . & L_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$-S\theta_2 P_{3x} + C\theta_2 P_{3y} - L'_2 = L'_3 C\theta_3$$
$$P_{3z} - L'_2 = L'_3 S\theta_3$$
$$C\theta_2 P_{3x} + S\theta_2 P_{3y} = L_3$$
$$\ldots$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_2 y θ_3, en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{3x} y P_{3y}. Para ello, con la tercera ecuación:

$$C\theta_2 P_{3x} + S\theta_2 P_{3y} = L_3$$
$$P_{3x} C\theta_2 + P_{3y} S\theta_2 = L_3$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_2 :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

$$\theta_2 = atan2(P_{3x}, -P_{3y}) \pm atan2(\sqrt{(-P_{3y})^2 + (P_{3x})^2 - (L_3)^2}, L_3)$$

Y con la primera ecuación:

$$-S\theta_2 P_{3x} + C\theta_2 P_{3y} - L'_2 = L'_3 C\theta_3$$
$$\theta_3 = \arccos((-S\theta_2 P_{3x} + C\theta_2 P_{3y} - L'_2)/L'_3)$$

O también desde la segunda ecuación:

$$P_{3z} - L'_2 = L'_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((P_{3z} - L'_2)/L'_3)$$

Luego, ya estarán determinados los ángulos necesarios en ambas articulaciones, para llegar al punto $P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto.

Y en resumen:

$$P_3(P_{3x},P_{3y},P_{3z})=(-L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3\,,\,L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2\,,\,L_2+L'_3 S\theta_3)$$
$$\theta_2=atan2(P_{3x},-P_{3y})\pm atan2(\sqrt{(-P_{3y})^2+(P_{3x})^2-(L_3)^2}\,,\,L_3)$$
$$\theta_3=\arccos((-S\theta_2 P_{3x}+C\theta_2 P_{3y}-L'_2)/L'_3)$$

5 Par de articulaciones 3-4

1 Cinemática Directa

Se iniciará con las siguientes dos articulaciones (motores 3 y 4), donde los motores "Motor 3" y "Motor 4" girarán para que el Origen de Coordenadas de la articulación "5" se posicione en el punto parcial deseado P_4 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \end{matrix} \;=\; \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^3A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^2A_3{}^3A_4$.

$$T={}^2A_4={}^2A_3{}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 C(\theta_3+\theta_4)+r_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 S(\theta_3+\theta_4)+r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2=L_2$, $d_3=L_3$, $r_2=L'_2$ y $r_3=L'_3$), y los ángulos deseados:

$$P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 C\theta_3 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_3 & -C\theta_2 & L'_2 S\theta_2 - L_3 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ($(0_{u0'},0_{v0'},0_{w0'})$ - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 \\ L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 \\ L_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{4x} \\ P_{4y} \\ P_{4z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3, L_3)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias, incluidas en la igualdad:

$$({}^2A_3)^{-1} T = {}^3A_4$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .

Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^2A_4=\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 C(\theta_3+\theta_4)+r_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 S(\theta_3+\theta_4)+r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & P_{4x} \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & P_{4y} \\ 0 & 0 & 1 & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$ y $r_4=L_4$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^2A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & P_{4x} \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & P_{4y} \\ 0 & 0 & 1 & P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^2A_3)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t$$
$$f_{12} = -S\theta_3 x + C\theta_3 y$$
$$f_{13} = z - L_3 t$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^2A_3)^{-1} T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^3A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = C\theta_3((C(\theta_3+\theta_4))) + S\theta_3(S(\theta_3+\theta_4)) = C\theta_4$$
$$f_{12}(n) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = -S\theta_3(C(\theta_3+\theta_4)) + C\theta_3(S(\theta_3+\theta_4)) = S\theta_4$$
$$f_{13}(n) = z - L_3 t = 0$$

$$f_{11}(o) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = C\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4)) + S\theta_3(C(\theta_3+\theta_4)) = -S\theta_4$$
$$f_{12}(o) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = -S\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4)) + C\theta_3(C(\theta_3+\theta_4)) = C\theta_4$$
$$f_{13}(o) = z - L_3 t = 0$$

$$f_{11}(a) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = 0$$
$$f_{12}(a) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = 0$$
$$f_{13}(a) = z - L_3 t = 1$$

$$f_{11}(p) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = C\theta_3(L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3)...$$
$$... + S\theta_3(L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3) - L'_3 = L_4 C\theta_4$$
$$f_{12}(p) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = -S\theta_3(L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3)...$$
$$... + C\theta_3(L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3) = L_4 S\theta_4$$
$$f_{13}(p) = z - L_3 t = L_3 - L_3 = 0$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{4x} \\ . & . & . & P_{4y} \\ . & . & . & P_{4z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^2A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_{4x} \\ . & . & . & P_{4y} \\ . & . & . & P_{4z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_3 P_{3x}+S\theta_3 P_{3y}-L'_3 \\ . & . & . & -S\theta_3 P_{3x}+C\theta_3 P_{3y} \\ . & . & . & P_{3z}-L_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^3A_4=\begin{pmatrix} . & . & . & L_4 C\theta_4 \\ . & . & . & L_4 S\theta_4 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_3 P_{4x}+S\theta_3 P_{4y}-L'_3=L_4 C\theta_4$$
$$-S\theta_3 P_{4x}+C\theta_3 P_{4y}=L_4 S\theta_4$$
$$P_{4z}-L_3=0$$
$$\dots$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_3 y θ_4, en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{4x} y P_{4y}. Para ello, se puede calcular la suma de los cuadrados de las primeras componentes del punto en T:

$$P_{4x}^2+P_{4y}^2=(L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3)^2+(L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3)^2 =$$
$$(L_4C(\theta_3+\theta_4))^2+2(L_4C(\theta_3+\theta_4))(L'_3C\theta_3)+(L'_3C\theta_3)^2\dots$$
$$\dots+(L_4S(\theta_3+\theta_4))^2+2(L_4S(\theta_3+\theta_4))(L'_3S\theta_3)+(L'_3S\theta_3)^2 =$$
$$(L_4)^2((C(\theta_3+\theta_4))^2+(S(\theta_3+\theta_4))^2)+(L'_3)^2((S\theta_3)^2+(C\theta_3)^2)\dots$$
$$\dots+2(L_4C(\theta_3+\theta_4))(L'_3C\theta_3)+2(L_4S(\theta_3+\theta_4))(L'_3S\theta_3) =$$
$$(L_4)^2+(L'_3)^2+2(L_4C(\theta_3+\theta_4))(L'_3C\theta_3)+2(L_4S(\theta_3+\theta_4))(L'_3S\theta_3) =$$
$$(L_4)^2+(L'_3)^2+2L_4L'_3(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_3+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_3) =$$
$$(L_4)^2+(L'_3)^2+2L_4L'_3C(\theta_3+\theta_4-\theta_3) =$$
$$P_{4x}^2+P_{4y}^2=(L_4)^2+(L'_3)^2+2L_4L'_3C\theta_4$$

$$\theta_4=\arccos(((L_4)^2+(L'_3)^2-P_{4x}^2-P_{4y}^2)/2L_4L'_3)$$

Y con la segunda ecuación:

$$-S\theta_3 P_{4x}+C\theta_3 P_{4y}=L_4 S\theta_4$$
$$P_{4y}C\theta_3+(-P_{4x})S\theta_3=L_4 S\theta_4$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_3 :

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Leftrightarrow \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

$$\theta_3=atan2(-P_{4x},P_{4y})\pm atan2(\sqrt{(P_{4y})^2+(-P_{4x})^2-(L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4)$$

O también, desde la primera ecuación:

$$C\theta_3 P_{4x}+S\theta_3 P_{4y}-L'_3=L_4 C\theta_4$$
$$C\theta_3 P_{4x}+S\theta_3 P_{4y}-L'_3=L_4 C\theta_4$$

$$\theta_3=atan2(P_{4y},P_{4x})\pm atan2(\sqrt{(P_{4x})^2+(P_{4y})^2-(L_4 C\theta_4+L'_3)^2}, L_4 C\theta_4+L'_3)$$

Luego, ya estarán determinados los ángulos necesarios en ambas articulaciones, para llegar al punto $P_4(P_{4x},P_{4y},P_{4z})$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto.

Y en resumen:

$$P_4(P_{4x},P_{4y},P_{4z})=(L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3, L_3)$$
$$\theta_4=\arccos(((L_4)^2+(L'_3)^2-P_{4x}^2-P_{4y}^2)/2\,L_4 L'_3)$$
$$\theta_3=atan2(-P_{4x},P_{4y})\pm atan2(\sqrt{(P_{4y})^2+(-P_{4x})^2-(L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4)$$

6 Par de articulaciones 4-5

1 Cinemática Directa

Se iniciará con las siguientes dos articulaciones (motores 4 y 5), donde los motores "Motor 4" y "Motor 5" girarán para que el Origen de Coordenadas de la articulación "6" se posicione en el punto parcial deseado P_5, punto final a alcanzar con el extremo del brazo.

Para ello, se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^{T} & -R^{T}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^3A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^4A_5]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^3A_4{}^4A_5$.

$$T={}^3A_5={}^3A_4\,{}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & r_5C(\theta_4+\theta_5)+r_4C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & r_5S(\theta_4+\theta_5)+r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$), y los ángulos deseados:

$$P_5(P_{5x},P_{5y},P_{5z})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P_5(P_{5x},P_{5y},P_{5z})$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P_5(P_{5x},P_{5y},P_{5z})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{5x} \\ P_{5y} \\ P_{5z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_5(P_{5x},P_{5y},P_{5z})=(L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4,\,L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4,\,0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias, incluidas en la igualdad:

$$({}^{3}A_{4})^{-1}T={}^{4}A_{5}$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^{3}A_{4}]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{4}A_{5}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{3}A_{4}=\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & r_5 C(\theta_4+\theta_5)+r_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & r_5 S(\theta_4+\theta_5)+r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{5x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{5y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & P_{5x} \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & P_{5y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{3}A_{4})^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & P_{5x} \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & P_{5y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$
{}^4A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^3A_4)^{-1}T$:

$$
\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t \\
f_{12} &= -S\theta_4 x + C\theta_4 y \\
f_{13} &= z
\end{aligned}
$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$
({}^3A_4)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^4A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
f_{11}(n) &= C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t = C\theta_4(C(\theta_4+\theta_5)) + S\theta_4(S(\theta_4+\theta_5)) = C\theta_5 \\
f_{12}(n) &= -S\theta_4 x + C\theta_4 y = -S\theta_4(C(\theta_4+\theta_5)) + C\theta_4(S(\theta_4+\theta_5)) = S\theta_5 \\
f_{13}(n) &= z = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{11}(o) &= C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t = C\theta_4(-S(\theta_4+\theta_5)) + S\theta_4(C(\theta_4+\theta_5)) = -S\theta_5 \\
f_{12}(o) &= -S\theta_4 x + C\theta_4 y = -S\theta_4(-S(\theta_4+\theta_5)) + C\theta_4(C(\theta_4+\theta_5)) = C\theta_5 \\
f_{13}(o) &= z = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{11}(a) &= C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t = 0 \\
f_{12}(a) &= -S\theta_4 x + C\theta_4 y = 0 \\
f_{13}(a) &= z = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{11}(p) &= C\theta_4 x + S\theta_4 y - L_4 t \quad = \\
&\quad C\theta_4(L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4) + S\theta_4(L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4) - L_4 \quad = \\
&\quad C\theta_4(L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4) + S\theta_4(L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4) - L_4 = L_5 C\theta_5 \\
f_{12}(p) &= -S\theta_4 x + C\theta_4 y \quad =
\end{aligned}
$$

$$-S\theta_4(L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4)+C\theta_4(L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4)=L_5S\theta_5$$
$$f_{13}(p)=z=0$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P_5(P_{5x},P_{5y},P_{5z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_{5x} \\ . & . & . & P_{5y} \\ . & . & . & P_{5z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^3A_4)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_{5x} \\ . & . & . & P_{5y} \\ . & . & . & P_{5z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_4P_{5x}+S\theta_4P_{5y}-L_4 \\ . & . & . & -S\theta_4P_{5x}+C\theta_4P_{5y} \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^3A_4=\begin{pmatrix} . & . & . & L_5C\theta_5 \\ . & . & . & L_5S\theta_5 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_4P_{5x}+S\theta_4P_{5y}-L_4=L_5C\theta_5$$
$$-S\theta_4P_{5x}+C\theta_4P_{5y}=L_5S\theta_5$$
$$...$$
$$...$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_{5x} y P_{5y} . Para ello, se puede calcular la suma de los cuadrados de las primeras componentes del punto en T:

$$P_{5x}^2+P_{5y}^2=(L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4)^2+(L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4)^2 \;=$$
$$(L_5C(\theta_4+\theta_5))^2+2(L_5C(\theta_4+\theta_5))(L_4C\theta_4)+(L_4C\theta_4)^2...$$
$$...+(L_5S(\theta_4+\theta_5))^2+2(L_5S(\theta_4+\theta_5))(L_4S\theta_4)+(L_4S\theta_4)^2 \;=$$
$$L_5^2+L_4^2+2(L_5C(\theta_4+\theta_5))(L_4C\theta_4)+2(L_5S(\theta_4+\theta_5))(L_4S\theta_4) \;=$$
$$L_5^2+L_4^2+2L_4L_5(C(\theta_4+\theta_5)C\theta_4+S(\theta_4+\theta_5)S\theta_4) \;=$$
$$L_5^2+L_4^2+2L_4L_5C(\theta_4+\theta_5-\theta_4) \;=$$
$$P_{5x}^2+P_{5y}^2=L_5^2+L_4^2+2L_4L_5C\theta_5$$

$$\theta_5=\arccos((P_{5x}^2+P_{5y}^2-L_5^2-L_4^2)/2L_4L_5)$$

Y con la segunda ecuación:

$$-S\theta_4P_{5x}+C\theta_4P_{5y}=L_5S\theta_5$$
$$P_{5y}C\theta_4+(-P_{5x})S\theta_4=L_5S\theta_5$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo: θ_4

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(b,a) \pm atan2\left(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c\right)$$

$$\theta_4 = atan2(-P_{5x}, P_{5y}) \pm atan2\left(\sqrt{(P_{5y})^2 + (-P_{5x})^2 - (L_5 S\theta_5)^2}, L_5 S\theta_5\right)$$

O también, desde la primera ecuación:

$$C\theta_4 P_{5x} + S\theta_4 P_{5y} - L_4 = L_5 C\theta_5$$
$$C\theta_4 P_{5x} + S\theta_4 P_{5y} = L_5 C\theta_5 + L_4$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_4 :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(b,a) \pm atan2\left(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c\right)$$

$$\theta_4 = atan2(P_{5y}, P_{5x}) \pm atan2\left(\sqrt{(P_{5x})^2 + (P_{5y})^2 - (L_5 C\theta_5 + L_4)^2}, L_5 C\theta_5 + L_4\right)$$

O también a través de la suma de los cuadrados de las primeras componentes de la primera inversa con T ($f_{11}(p)$ y $f_{12}(p)$):

$$\begin{aligned}
&(f_{11}(p))^2 + (f_{12}(p))^2 = (C\theta_4 P_{5x} + S\theta_4 P_{5y} - L_4)^2 + (-S\theta_4 P_{5x} + C\theta_4 P_{5y})^2 \;=\\
&(C\theta_4 P_{5x})^2 + 2(C\theta_4 P_{5x})(S\theta_4 P_{5y} - L_4) + (S\theta_4 P_{5y} - L_4)^2 \ldots\\
&\ldots + 2(-S\theta_4 P_{5x})(C\theta_4 P_{5y}) + (C\theta_4 P_{5y})^2 \;=\\
&P_{5x}^2 + 2\,C\theta_4 P_{5x} S\theta_4 P_{5y} - 2\,C\theta_4 P_{5x} L_4 + (S\theta_4 P_{5y})^2 - 2(S\theta_4 P_{5y})(L_4) + (L_4)^2 \ldots\\
&\ldots - 2\,S\theta_4 P_{5x} C\theta_4 P_{5y} + (C\theta_4 P_{5y})^2 \;=\\
&P_{5x}^2 + P_{5y}^2 + L_4^2 + 2C\theta_4 P_{5x} S\theta_4 P_{5y} - 2C\theta_4 P_{5x} L_4 - 2S\theta_4 P_{5y} L_4 - 2\,S\theta_4 P_{5x} C\theta_4 P_{5y} \;=\\
&P_{5x}^2 + P_{5y}^2 + L_4^2 - 2\,P_{5x} L_4 C\theta_4 + 2\,P_{5x} L_4 S\theta_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(f_{11}(p))^2 + (f_{12}(p))^2 = P_{5x}^2 + P_{5y}^2 + L_4^2 - 2\,P_{5x} L_4 C\theta_4 + 2\,P_{5x} L_4 S\theta_4 \;=\\
&(L_5 C\theta_5)^2 + (L_5 S\theta_5)^2 = L_5^2
\end{aligned}$$

$$P_{5x}^2 + P_{5y}^2 + L_4^2 - 2\,P_{5x} L_4 C\theta_4 + 2\,P_{5x} L_4 S\theta_4 = L_5^2$$

$$(-2\,P_{5x} L_4) C\theta_4 + 2\,P_{5x} L_4 S\theta_4 = L_5^2 - P_{5x}^2 - P_{5y}^2 - L_4^2$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_4 :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(b,a) \pm atan2\left(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c\right)$$

$$\theta_4 = atan2(2\,P_{5x} L_4, -2\,P_{5x} L_4) \pm atan2\left(\sqrt{(-2\,P_{5x} L_4)^2 + (2\,P_{5x} L_4)^2 - (L_5^2 - P_{5x}^2 - P_{5y}^2 - L_4^2)^2}, L_5^2 - P_{5x}^2 - P_{5y}^2 - L_4^2\right)$$

Luego, ya estarán determinados los ángulos necesarios en ambas articulaciones, para llegar al punto $P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z})$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto.

Y en resumen:

$$P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z}) = (L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4, L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4, 0)$$
$$\theta_5 = \arccos((P_{5x}^2 + P_{5y}^2 - L_5^2 - L_4^2)/2 L_4 L_5)$$
$$\theta_4 = atan2(-P_{5x}, P_{5y}) \pm atan2(\sqrt{(P_{5y})^2 + (-P_{5x})^2 - (L_5 S\theta_5)^2}, L_5 S\theta_5)$$

7 Resumen de pares y cálculo de variables

El conjunto de ecuaciones que determinan el brazo serán:

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2)$$
$$\theta_1 = atan2(P_{1x}, -P_{1y}) \pm atan2(\sqrt{(-P_{1y})^2 + (P_{1x})^2 - (L_2)^2}, L_2)$$
$$\theta_2 = \arcsin((C\theta_1 P_{1x} + S\theta_1 P_{1y})/(-L'_2))$$

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z}) = (-L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3, L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2, L_2 + L'_3 S\theta_3)$$
$$\theta_2 = atan2(P_{3x}, -P_{3y}) \pm atan2(\sqrt{(-P_{3y})^2 + (P_{3x})^2 - (L_3)^2}, L_3)$$
$$\theta_3 = \arccos((-S\theta_2 P_{3x} + C\theta_2 P_{3y} - L'_2)/L'_3)$$

$$P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3, L_3)$$
$$\theta_4 = \arccos(((L_4)^2 + (L'_3)^2 - P_{4x}^2 - P_{4y}^2)/2 L_4 L'_3)$$
$$\theta_3 = atan2(-P_{4x}, P_{4y}) \pm atan2(\sqrt{(P_{4y})^2 + (-P_{4x})^2 - (L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4)$$

$$P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z}) = (L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4, L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4, 0)$$
$$\theta_5 = \arccos((P_{5x}^2 + P_{5y}^2 - L_5^2 - L_4^2)/2 L_4 L_5)$$
$$\theta_4 = atan2(-P_{5x}, P_{5y}) \pm atan2(\sqrt{(P_{5y})^2 + (-P_{5x})^2 - (L_5 S\theta_5)^2}, L_5 S\theta_5)$$

Hay que tener en cuenta que la relación entre las componentes de los puntos $P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$, $P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})$, $P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})$ y $P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z})$, no puede ser utilizada, puesto que estos puntos están definidos en relación a su base, en cada par de articulaciones por lo que existe una intersección entre los diferentes subproblemas y, por tanto, entre sus correspondientes longitudes.

Además, en cuanto a las componentes, éstas dependen de los ángulos, y los ángulos dependen de las componentes. Como consecuencia, existe una interdependencia difícil de resolver.

Pero, en conclusión, como en el caso anterior de desacoplamiento completo, la dependencia de los ángulos de las diferentes articulaciones hace inapropiado este sistema, salvo para comprobar lo adecuado del sistema y su posible cálculo.
También, hace posible tratar un modelo complejo por partes para activar o no determinados motores, con lo que se comprobará el comportamiento de las diferentes articulaciones trabajando por pares.
De hecho, el problema completo sigue sin tener solución ya que no hay aún un conjunto de ecuaciones que lo definan por completo.

8 Intento 8 - División del problema en subproblemas (elección de tres articulaciones cualesquiera), con giro de 90º

En este caso, se intentarán analizar los problemas por separado, pero con algún grado mayor de acoplamiento entre las diferentes articulaciones.
De esta forma, se inicia la resolución del problema independizando las articulaciones cuyos ángulos no puedan ser calculados dentro de un conjunto complejo de articulaciones.
Así, se va a independizar todo el tratamiento de matrices para resolver cada problema simple representado a continuación.
Para cada tres articulaciones se va a tomar la primera articulación como aquella en la que se encuentre el Origen de Coordenadas inicial, la segunda, determinará otro giro, normalmente sobre un eje diferente, la tercera, igualmente determinará otro giro, normalmente, también sobre un eje diferente, y la cuarta, como aquella en la que se encuentre el punto final virtual sobre el que posicionar el extremo del tercer segmento. Eso supone la utilización de tres motores en cada subproblema.

1 Subproblema de articulaciones 1-2-3

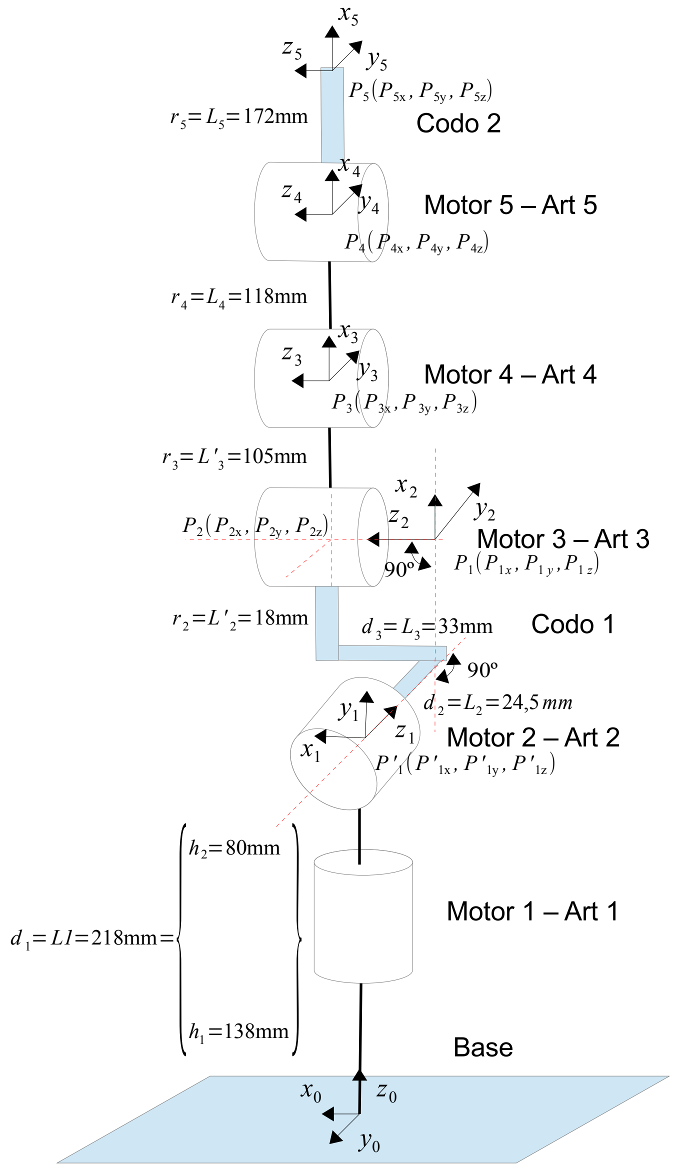

Ilustración 4: Brazo de prueba para presentación de TFG (Art. 1-2-3)

En este subproblema se plantea resolver la cinemática con los primeros tres motores.
Eso supone resolver una articulación con desplazamiento perpendicular respecto al eje de giro en el segundo motor, uno de los principales problemas de este brazo.
Por otra parte, este subproblema tendrá unas características específicas al tener 5 motores, de los que dos de ellos están en una posición fija, por defecto (motores 4 y 5).

1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & r_1 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 218 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & 24{,}5 & 18 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & 33 & 105 & 0 \end{array} =$$

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^0A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices $^1A_2$ y $[^1A_2]^{-1}$ anteriores se convierten en:

$$^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1 = L_1$, $d_2 = L_2$, $r_2 = L'_2$, $d_3 = L_3$ y $r_3 = L'_3 + L_4 + L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar, o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_3 = L'_3$) , y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ($(0_{u0'}, 0_{v0'}, 0_{w0'})$ - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x, y, z)$ - $O - XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z) = (P_x\ ,\ P_y\ ,\ P_z)$$

Y se encuentran las siguientes igualdades:

$$P_x = L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3$$
$$P_y = -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1$$
$$P_z = L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$

2 Cinemática Inversa

1 Resolución del primer ángulo θ_1

1 Intento 1 - Elementos de T, o primera inversa (con solución forzada)

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática

Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$T = {}^0A_1 \, {}^1A_2 \, {}^2A_3 = {}^0A_3$$
$$({}^0A_1)^{-1} \, T = {}^1A_2 \, {}^2A_3 = {}^1A_3$$
$$({}^1A_2)^{-1} ({}^0A_1)^{-1} \, T = {}^2A_3 = {}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 , y así sucesivamente con θ_3 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_3 = {}^0A_1 \, {}^1A_2 \, {}^2A_3 = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2)) = \cos(\pi/2)\cos(\theta_2) - \sin(\pi/2)\sin(\theta_2) = 0*\cos(\theta_2) - 1*\sin(\theta_2) = -\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2)) = \sin(\pi/2)\cos(\theta_2) + \cos(\pi/2)\sin(\theta_2) = 1*\cos(\theta_2) + 0*\sin(\theta_2) = \cos(\theta_2)$$

Y la matriz ${}^1A_2$ anterior se convierte en:

$$
{}^{1}A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$ y $r_3=L'_3+L_4+L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar (o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_3=L'_3$), se llega a la siguiente igualdad:

$$
({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ldots
$$

$$
\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
{}^{1}A_3={}^{1}A_2\,{}^{2}A_3 \quad =
$$

$$
\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} -S\theta_2 C\theta_3 & S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^{0}A_1)^{-1}\,T$). Así, en primer lugar, se va a realizar el análisis utilizando la primera inversa:

$$
({}^{0}A_1)^{-1}\,T={}^{1}A_2\,{}^{2}A_3={}^{1}A_3
$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$
\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}=C\theta_1 x+S\theta_1 y$$
$$f_{12}=z-L_1 t$$
$$f_{13}=S\theta_1 x-C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^1A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_1(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3) = -S\theta_2 C\theta_3$$
$$f_{12}(n)=C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{13}(n)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)-C\theta_1(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3) = S\theta_3$$

$$f_{11}(o)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)+S\theta_1(-C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1\theta_3) = S\theta_2 S\theta_3$$
$$f_{12}(o)=z-L_1 t=-C\theta_2 S\theta_3$$
$$f_{13}(o)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-C\theta_1(-C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1\theta_3)=C\theta_3$$

$$f_{11}(a)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)+S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=C\theta_2$$
$$f_{12}(a)=z-L_1 t=S\theta_2$$
$$f_{13}(a)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)-C\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=0$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$
$$...+S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) = -L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$
$$f_{12}(p)=z-L_1 t=f'_{13}(p)=L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2-L_1 = L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{13}(p)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$
$$...-C\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) =$$

$L_2 + L'_3 S\theta_3$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y \\ . & . & . & P_z - L_1 \\ . & . & . & S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^1A_3 = \begin{pmatrix} . & . & . & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & . & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ . & . & . & L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L'_3 S\theta_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la tercera ecuación quedaría:

$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L'_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2) / L'_3)$$

Y usando ahora la primera ecuación:

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$
$$L_3 C\theta_2 + (-L'_2 - L'_3 C\theta_3) S\theta_2 = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((-L'_2 - L'_3 C\theta_3), L_3) ...$$
$$... \pm atan2(\sqrt{(L_3)^2 + ((-L'_2 - L'_3 C\theta_3))^2 - (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2}, C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)$$

O también con la segunda ecuación:

$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2(L_3, (L'_2 + L'_3 C\theta_3)) \pm atan2(\sqrt{((L'_2 + L'_3 C\theta_3))^2 + L_3^2 - (P_z - L_1)^2}, P_z - L_1)$$

Luego quedarían determinados los ángulos correspondientes, siempre y cuando se predefiniera, al menos, el ángulo de orientación θ_1 .

2 Intento 2 - Segunda inversa (con solución forzada)

Como no se ha llegado a ningún resultado concluyente, se va a repetir el cálculo con la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = {}^2A_3 = {}^2A_3$$

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_3 = {}^0A_1\, {}^1A_2\, {}^2A_3 = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y sustituyendo los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$ y $r_3=L'_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -L'_2 - L_1 C\theta_2 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_2 \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & S\theta_2 & -L_1 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$). Así, en este caso, se va a realizar el análisis utilizando la primera y la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21} &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) t \\ f_{22} &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t \\ f_{23} &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^{2}A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21}(n) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) t \quad = \\ &\quad C\theta_1 C\theta_2 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) - S\theta_2 S\theta_1 (-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3) \ldots \\ &\quad \ldots + S\theta_2 (C\theta_3 C\theta_2) = C\theta_3 \\ f_{22}(n) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t = S\theta_1 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) \ldots \\ &\quad \ldots - C\theta_1 (-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3) = S\theta_3 \\ f_{23}(n) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \quad = \\ &\quad C\theta_1 C\theta_2 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + C\theta_2 S\theta_1 (-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3) \ldots \\ &\quad \ldots + S\theta_2 (C\theta_3 C\theta_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{21}(o) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) t \quad = \\ &\quad -C\theta_1 S\theta_2 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - S\theta_2 S\theta_1 (-C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) \ldots \\ &\quad \ldots + C\theta_2 (-C\theta_2 S\theta_3) = -S\theta_3 \\ f_{22}(o) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t = S\theta_1 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) \ldots \\ &\quad \ldots - C\theta_1 (-C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) = C(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) \\ f_{23}(o) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z + L_1 C\theta_2 t \quad = \\ &\quad C\theta_1 C\theta_2 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) + S\theta_1 C\theta_2 (-C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) \ldots \end{aligned}$$

$$...+S\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)=0$$

$$f_{21}(a)=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2(C\theta_1 C\theta_2)+C\theta_2 S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)+S\theta_2(S\theta_2)=0$$
$$f_{22}(a)=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)-C\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=0$$
$$f_{23}(a)=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad =$$
$$C\theta_1 S\theta_2(C\theta_1 C\theta_2)+S\theta_2 S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)-C\theta_2(S\theta_2)=1$$

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad =$$
$$-C\theta_1 S\theta_2(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$
$$...+C\theta_2(L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)-(L'_2+L_1 C\theta_2)=L'_3 C\theta_3$$
$$f_{22}(p)=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t \quad =$$
$$S\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$
$$...-C\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)...$$
$$...-L_2=L'_3 S\theta_2$$
$$f_{23}(p)=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$
$$...+C\theta_2 S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)...$$
$$...+S\theta_2(L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)-L_1 S\theta_2=L_3$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & -C\theta_1 S\theta_2 P_x-S\theta_2 S\theta_1 P_y+C\theta_2 P_z-(L'_2+L_1 C\theta_2) \\ . & . & . & S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_2 \\ . & . & . & C\theta_1 C\theta_2 P_x+C\theta_2 S\theta_1 P_y+S\theta_2 P_z-L_1 S\theta_2 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^2A_3 \quad =$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & L'_3 C\theta_3 \\ . & . & . & L'_3 S\theta_3 \\ . & . & . & L_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 P_x-S\theta_2 S\theta_1 P_y+C\theta_2 P_z-(L'_2+L_1 C\theta_2)=L'_3 C\theta_3$$

$$f_{22}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L'_3 S\theta_3$$
$$f_{23}(p) = C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la segunda ecuación quedaría:

$$f_{22}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L'_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2) / L'_3)$$

Y usando ahora la tercera ecuación:

$$f_{23}(p) = C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$
$$(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) C\theta_2 + (P_z - L_1) S\theta_2 = L_3$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \iff \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((P_z - L_1), (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)) \pm atan2(\sqrt{(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2 + (P_z - L_1)^2 - L_3^2}, L_3)$$

Luego quedarían determinados los ángulos correspondientes, siempre y cuando se predefiniera, al menos, el ángulo de orientación θ_1 .

2 Subproblema de articulaciones 1-3-4

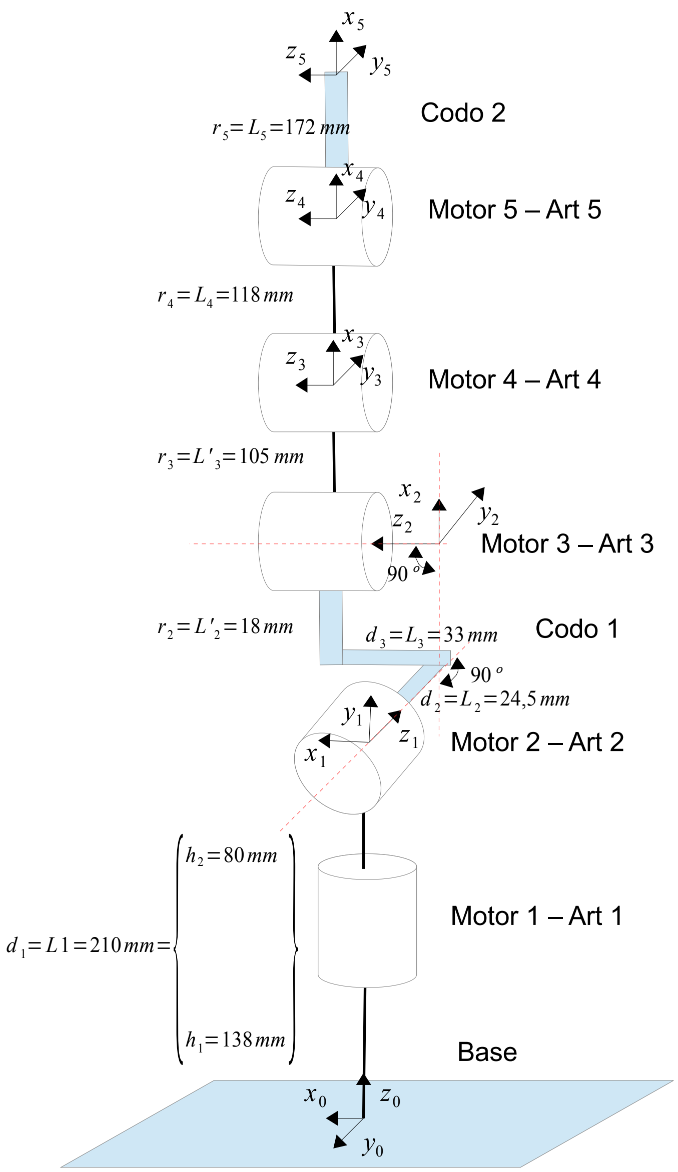

Ilustración 5: Brazo de prueba para presentación de TFG (Art. 1-3-4)

En este subproblema se plantea resolver la cinemática con el primer motor perpendicular al suelo y los dos siguientes, paralelos entre sí, y perpendiculares al primero, y sobre el que se podría aplicar el modelo SCARA.
Eso supone resolver un desplazamiento perpendicular del plano de ataque de los dos últimos motores, respecto al eje de giro en el primer motor, uno de los principales problemas de este brazo.
Por otra parte, este subproblema es similar al "Caso 3-1" y, por tanto, se aplicará un análisis similar, además de contemplar las características específicas del problema actual con los 5 motores, de los que dos de ellos están en una posición fija, por defecto (motores 2 y 5).

1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.

Para ello, se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 218 & 0 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & 33 & 105 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & 118 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \end{matrix}$$

Hay que considerar la gran diferencia respecto al caso completo:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^{0}A_1\,{}^{2}A_5={}^{0}A_1\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^{0}A_1\,{}^{2}A_5={}^{0}A_1\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$ y $r_4=L_4+L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar, o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_4=L_4$), y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de

Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z)=(P_x \ , \ P_y \ , \ P_z)$$

Y se encuentran las siguientes igualdades:

$$P_x = L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3$$
$$P_y = -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1$$
$$P_z = L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$

2 Cinemática Inversa

1 Resolución del primer ángulo θ_1

1 Intento 1 - Elementos de T, o primera inversa (con solución forzada)

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$T={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3={}^0A_3$$
$$({}^0A_1)^{-1}\,T={}^1A_2\,{}^2A_3={}^1A_3$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\,T={}^2A_3={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 , y así sucesivamente con θ_3 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y la matriz ${}^1A_2$ anterior se convierte en:

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$ y $r_3=L'_3+L_4+L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar (o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_3=L'_3$), se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\dots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^{1}A_3={}^{1}A_2\,{}^{2}A_3 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 C\theta_3 & S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2+L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}\dots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^{0}A_1)^{-1}T$). Así, en primer lugar, se va a realizar el análisis utilizando la primera inversa:

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T={}^{1}A_2\,{}^{2}A_3={}^{1}A_3$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}=C\theta_1 x+S\theta_1 y$$
$$f_{12}=z-L_1 t$$
$$f_{13}=S\theta_1 x-C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^1A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
f_{11}(n) &= C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_1(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3) \;=\\
&\quad -S\theta_2 C\theta_3\\
f_{12}(n) &= C\theta_3 C\theta_2\\
f_{13}(n) &= S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)-C\theta_1(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3) \;=\\
&\quad S\theta_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}(o) &= C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)+S\theta_1(-C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1\theta_3) \;=\\
&\quad S\theta_2 S\theta_3\\
f_{12}(o) &= z-L_1 t=-C\theta_2 S\theta_3\\
f_{13}(o) &= S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-C\theta_1(-C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1\theta_3)=C\theta_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}(a) &= C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)+S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=C\theta_2\\
f_{12}(a) &= z-L_1 t=S\theta_2\\
f_{13}(a) &= S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)-C\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}(p) &= C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...\\
&\quad ...+S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) \;=\\
&\quad -L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3\\
f_{12}(p) &= z-L_1 t=f'_{13}(p)=L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2-L_1 \;=\\
&\quad L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2\\
f_{13}(p) &= S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...\\
&\quad ...-C\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) \;=\\
&\quad L_2+L'_3 S\theta_3
\end{aligned}$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y \\ . & . & . & P_z - L_1 \\ . & . & . & S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^1A_3 = \begin{pmatrix} . & . & . & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & . & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ . & . & . & L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L'_3 S\theta_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la tercera ecuación quedaría:

$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L'_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2) / L'_3)$$

Y usando ahora la primera ecuación:

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$
$$L_3 C\theta_2 + (-L'_2 - L'_3 C\theta_3) S\theta_2 = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((-L'_2 - L'_3 C\theta_3), L_3)...$$
$$... \pm atan2(\sqrt{(L_3)^2 + ((-L'_2 - L'_3 C\theta_3))^2 - (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2}, C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)$$

O también con la segunda ecuación:

$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \;\Leftrightarrow\; \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2=atan2(L_3,(L'_2+L'_3C\theta_3))\pm atan2(\sqrt{((L'_2+L'_3C\theta_3))^2+L_3^2-(P_z-L_1)^2},P_z-L_1)$$

Luego quedarían determinados los ángulos correspondientes, siempre y cuando se predefiniera, al menos, el ángulo de orientación θ_1 .

2 Intento 2 - Segunda inversa (con solución forzada)

Como no se ha llegado a ningún resultado concluyente, se va a repetir el cálculo con la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3={}^2A_3$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y sustituyendo los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$ y $r_3=L'_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -L'_2 - L_1 C\theta_2 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_2 \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & S\theta_2 & -L_1 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$). Así, en este caso, se va a realizar el análisis utilizando la primera y la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = {}^2A_3$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21} &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2)t \\ f_{22} &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t \\ f_{23} &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^2A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
f_{21}(n)&=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad = \\
&C\theta_1 C\theta_2(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)-S\theta_2 S\theta_1(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)... \\
&...+S\theta_2(C\theta_3 C\theta_2)=C\theta_3 \\
f_{22}(n)&=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)... \\
&...-C\theta_1(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)=S\theta_3 \\
f_{23}(n)&=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad = \\
&C\theta_1 C\theta_2(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+C\theta_2 S\theta_1(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3)... \\
&...+S\theta_2(C\theta_3 C\theta_2)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(o)&=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad = \\
&-C\theta_1 S\theta_2(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_2 S\theta_1(-C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)... \\
&...+C\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)=-S\theta_3 \\
f_{22}(o)&=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)... \\
&...-C\theta_1(-C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)=C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\
f_{23}(o)&=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z+L_1 C\theta_2 t \quad = \\
&C\theta_1 C\theta_2(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)+S\theta_1 C\theta_2(-C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)... \\
&...+S\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(a)&=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad = \\
&C\theta_1 C\theta_2(C\theta_1 C\theta_2)+C\theta_2 S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)+S\theta_2(S\theta_2)=0 \\
f_{22}(a)&=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)-C\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=0 \\
f_{23}(a)&=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad = \\
&C\theta_1 S\theta_2(C\theta_1 C\theta_2)+S\theta_2 S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)-C\theta_2(S\theta_2)=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21}(p)&=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad = \\
&-C\theta_1 S\theta_2(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)... \\
&...+C\theta_2(L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)-(L'_2+L_1 C\theta_2)=L'_3 C\theta_3 \\
f_{22}(p)&=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t \quad = \\
&S\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)... \\
&...-C\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)... \\
&...-L_2=L'_3 S\theta_2 \\
f_{23}(p)&=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad = \\
&C\theta_1 C\theta_2(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)... \\
&...+C\theta_2 S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)... \\
&...+S\theta_2(L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)-L_1 S\theta_2=L_3
\end{aligned}$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) \\ . & . & . & S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 \\ . & . & . & C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_3 =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & L'_3 C\theta_3 \\ . & . & . & L'_3 S\theta_3 \\ . & . & . & L_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) = L'_3 C\theta_3$$
$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L'_3 S\theta_3$$
$$f_{23}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la segunda ecuación quedaría:

$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L'_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2)/L'_3)$$

Y usando ahora la tercera ecuación:

$$f_{23}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$
$$(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) C\theta_2 + (P_z - L_1) S\theta_2 = L_3$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \iff \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((P_z - L_1), (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)) \pm atan2(\sqrt{(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2 + (P_z - L_1)^2 - L_3^2}, L_3)$$

Luego quedarían determinados los ángulos correspondientes, siempre y cuando se predefiniera, al menos, el ángulo de orientación θ_1 .

3 Subproblema de articulaciones 2-3-4

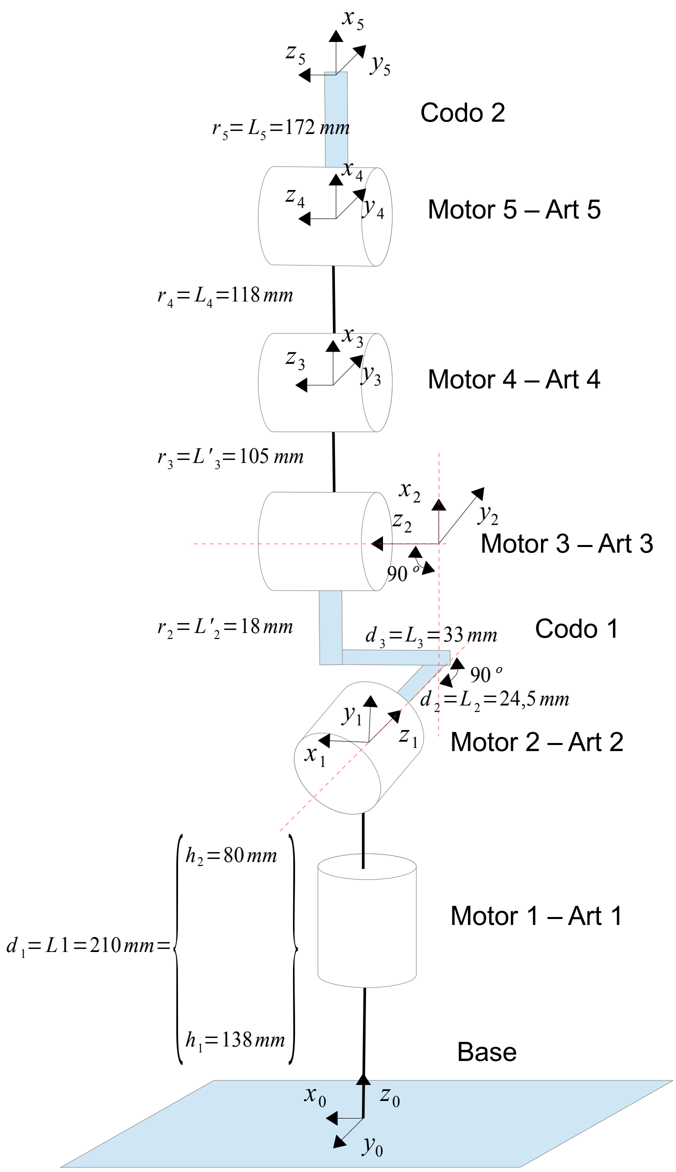

Ilustración 6: Brazo de prueba para presentación de TFG (Art. 2-3-4)

En este subproblema se plantea resolver la cinemática con el primer motor paralelo al suelo y los dos siguientes, paralelos entre sí, perpendiculares al primero, pero también paralelos al suelo, y sobre el que se podría aplicar el modelo SCARA.
Eso supone resolver un desplazamiento perpendicular del plano de ataque de los dos últimos motores, respecto al eje de giro en el primer motor, uno de los principales problemas de este brazo. Por otra parte, este subproblema es similar al "Caso 4-0" y, por tanto, se aplicará un análisis similar, además de contemplar las características específicas del problema actual con los 5 motores, de los que dos de ellos están en una posición fija, por defecto (motores 1 y 5).

1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & 24{,}5 & 18 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & 33 & 105 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & 118 & 0 \end{array} =$$

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \end{array}$$

Hay que considerar la gran diferencia respecto al caso completo:

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^1A_2$ y $[{}^1A_2]^{-1}$ anteriores se convierten en:

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^1A_4={}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4$$
$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T = {}^{1}A_4 = {}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2 = L_2$, $r_2 = L'_2$, $d_3 = L_3$, $r_3 = L'_3$ y $r_4 = L_4 + L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar, o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_4 = L_4$), y los ángulos deseados. También se podía introducir $d_1 = L_1$ como parte del segundo motor para parecerse al ejemplo real, pero resulta más sencillo considerar como base el segundo motor.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x, y, z)$ - $O - XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z) = (P_x \;,\; P_y \;,\; P_z)$$

Y se encuentran las siguientes igualdades:

$$P_x = L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3$$
$$P_y = -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1$$
$$P_z = L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$

2 Cinemática Inversa

1 Resolución del primer ángulo θ_1

1 Intento 1 - Elementos de T, o primera inversa (con solución forzada)

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$T={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3={}^0A_3$$
$$({}^0A_1)^{-1}\,T={}^1A_2\,{}^2A_3={}^1A_3$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\,T={}^2A_3={}^2A_3$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 , y así sucesivamente con θ_3 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -d_1\\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2C(\pi/2+\theta_2)\\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2S(\pi/2+\theta_2)\\ 0 & 1 & 0 & d_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3\\ 0 & 0 & 1 & d_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x\\ n_y & o_y & a_y & P_y\\ n_z & o_z & a_z & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x\\ r_y\\ r_z\\ 1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x\\ n_y & o_y & a_y & P_y\\ n_z & o_z & a_z & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y la matriz ${}^1A_2$ anterior se convierte en:

$$ {}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$ y $r_3=L'_3+L_4+L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar (o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_3=L'_3$), se llega a la siguiente igualdad:

$$ ({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ ({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ldots $$

$$ \begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ {}^1A_3={}^1A_2\,{}^2A_3 \quad = $$

$$ \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ \begin{pmatrix} -S\theta_2 C\theta_3 & S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2+L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^0A_1)^{-1}T$). Así, en primer lugar, se va a realizar el análisis utilizando la primera inversa:

$$ ({}^0A_1)^{-1}T={}^1A_2\,{}^2A_3={}^1A_3 $$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11} = C\theta_1 x + S\theta_1 y$$
$$f_{12} = z - L_1 t$$
$$f_{13} = S\theta_1 x - C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^1A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + S\theta_1(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3) = -S\theta_2 C\theta_3$$
$$f_{12}(n) = C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{13}(n) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) - C\theta_1(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3) = S\theta_3$$

$$f_{11}(o) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) + S\theta_1(-C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 \theta_3) = S\theta_2 S\theta_3$$
$$f_{12}(o) = z - L_1 t = -C\theta_2 S\theta_3$$
$$f_{13}(o) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - C\theta_1(-C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 \theta_3) = C\theta_3$$

$$f_{11}(a) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1(C\theta_1 C\theta_2) + S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2) = C\theta_2$$
$$f_{12}(a) = z - L_1 t = S\theta_2$$
$$f_{13}(a) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1(C\theta_1 C\theta_2) - C\theta_1(S\theta_1 C\theta_2) = 0$$

$$f_{11}(p) = C\theta_1 x + S\theta_1 y = C\theta_1(L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)\ldots$$

$$\ldots + S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) =$$
$$-L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$
$$f_{12}(p) = z - L_1 t = f'_{13}(p) = L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 - L_1 =$$
$$L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{13}(p) = S\theta_1 x - C\theta_1 y = S\theta_1(L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)\ldots$$
$$\ldots - C\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) =$$
$$L_2 + L'_3 S\theta_3$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y \\ . & . & . & P_z - L_1 \\ . & . & . & S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^1A_3 = \begin{pmatrix} . & . & . & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & . & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ . & . & . & L_2 + L'_3 S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L'_3 S\theta_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la tercera ecuación quedaría:

$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L'_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2) / L'_3)$$

Y usando ahora la primera ecuación:

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$

$$L_3 C\theta_2 + (-L'_2 - L'_3 C\theta_3) S\theta_2 = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(b,a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((-L'_2 - L'_3 C\theta_3), L_3)...$$
$$... \pm atan2(\sqrt{(L_3)^2 + ((-L'_2 - L'_3 C\theta_3))^2 - (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2}, C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)$$

O también con la segunda ecuación:

$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(b,a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2(L_3, (L'_2 + L'_3 C\theta_3)) \pm atan2(\sqrt{((L'_2 + L'_3 C\theta_3))^2 + L_3^2 - (P_z - L_1)^2}, P_z - L_1)$$

Luego quedarían determinados los ángulos correspondientes, siempre y cuando se predefiniera, al menos, el ángulo de orientación θ_1 .

2 Intento 2 - Segunda inversa (con solución forzada)

Como no se ha llegado a ningún resultado concluyente, se va a repetir el cálculo con la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1} ({}^0A_1)^{-1} T = {}^2A_3 = {}^2A_3$$

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_3={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y sustituyendo los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$ y $r_3=L'_3$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -L'_2-L_1 C\theta_2 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_2 \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & S\theta_2 & -L_1 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3+S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T$). Así, en este caso, se va a realizar el análisis utilizando la primera y la segunda inversa:

$$({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T={}^{2}A_3$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x,y,z son los elementos de la matriz T):

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21} &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2)t \\ f_{22} &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t \\ f_{23} &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21}(n) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2)t \quad = \\ &\quad C\theta_1 C\theta_2 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) - S\theta_2 S\theta_1 (-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3)\ldots \\ &\quad \ldots + S\theta_2 (C\theta_3 C\theta_2) = C\theta_3 \\ f_{22}(n) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t = S\theta_1 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)\ldots \\ &\quad \ldots - C\theta_1 (-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3) = S\theta_3 \\ f_{23}(n) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \quad = \\ &\quad C\theta_1 C\theta_2 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + C\theta_2 S\theta_1 (-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3)\ldots \\ &\quad \ldots + S\theta_2 (C\theta_3 C\theta_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{21}(o) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2)t \quad = \\ &\quad -C\theta_1 S\theta_2 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - S\theta_2 S\theta_1 (-C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)\ldots \\ &\quad \ldots + C\theta_2 (-C\theta_2 S\theta_3) = -S\theta_3 \\ f_{22}(o) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t = S\theta_1 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\ldots \\ &\quad \ldots - C\theta_1 (-C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) = C(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_{23}(o) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z + L_1 C\theta_2 t \quad = \\
&C\theta_1 C\theta_2 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) + S\theta_1 C\theta_2 (-C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) \ldots \\
&\ldots + S\theta_2 (-C\theta_2 S\theta_3) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{21}(a) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) t \quad = \\
&C\theta_1 C\theta_2 (C\theta_1 C\theta_2) + C\theta_2 S\theta_1 (S\theta_1 C\theta_2) + S\theta_2 (S\theta_2) = 0 \\
f_{22}(a) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t = S\theta_1 (C\theta_1 C\theta_2) - C\theta_1 (S\theta_1 C\theta_2) = 0 \\
f_{23}(a) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \quad = \\
&C\theta_1 S\theta_2 (C\theta_1 C\theta_2) + S\theta_2 S\theta_1 (S\theta_1 C\theta_2) - C\theta_2 (S\theta_2) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{21}(p) &= -C\theta_1 S\theta_2 x - S\theta_2 S\theta_1 y + C\theta_2 z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) t \quad = \\
&-C\theta_1 S\theta_2 (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) \ldots \\
&\ldots + C\theta_2 (L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2) - (L'_2 + L_1 C\theta_2) = L'_3 C\theta_3 \\
f_{22}(p) &= S\theta_1 x - C\theta_1 y - L_2 t \quad = \\
&S\theta_1 (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) \ldots \\
&\ldots - C\theta_1 (-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) \ldots \\
&\ldots - L_2 = L'_3 S\theta_2 \\
f_{23}(p) &= C\theta_1 C\theta_2 x + C\theta_2 S\theta_1 y + S\theta_2 z - L_1 S\theta_2 t \quad = \\
&C\theta_1 C\theta_2 (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) \ldots \\
&\ldots + C\theta_2 S\theta_1 (-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) \ldots \\
&\ldots + S\theta_2 (L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2) - L_1 S\theta_2 = L_3
\end{aligned}
$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x, y, z)$:

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & P_x \\
. & . & . & P_y \\
. & . & . & P_z \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$
({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & -C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) \\
. & . & . & S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 \\
. & . & . & C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_3 \quad =
$$

$$
\begin{pmatrix}
. & . & . & L'_3 C\theta_3 \\
. & . & . & L'_3 S\theta_3 \\
. & . & . & L_3 \\
. & . & . & 1
\end{pmatrix}
$$

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) = L'_3 C\theta_3$$
$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L'_3 S\theta_3$$
$$f_{23}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la segunda ecuación quedaría:

$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L'_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2)/L'_3)$$

Y usando ahora la tercera ecuación:

$$f_{23}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$
$$(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) C\theta_2 + (P_z - L_1) S\theta_2 = L_3$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((P_z - L_1), (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)) \pm atan2(\sqrt{(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2 + (P_z - L_1)^2 - L_3^2}, L_3)$$

Luego quedarían determinados los ángulos correspondientes, siempre y cuando se predefiniera, al menos, el ángulo de orientación θ_1 .

4 Subproblema de articulaciones 3-4-5

En este subproblema se plantea resolver la cinemática con los tres motores paralelos al suelo y entre sí, y sobre el que se podría aplicar el modelo SCARA.

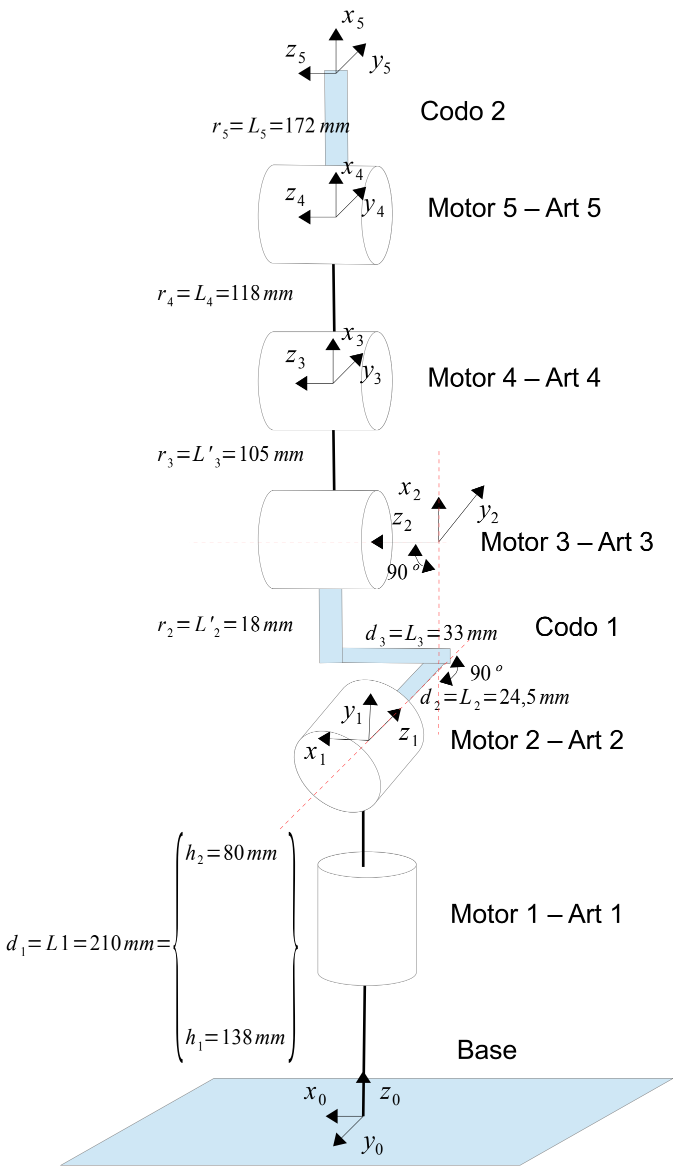

Ilustración 7: Brazo de prueba para presentación de TFG (Art. 3-4-5)

Se plantean dos casos:

- Plano de ataque vertical: Se buscará el acceso al punto de destino a través de un plano vertical en el que se incluyan el punto base de los tres motores y el punto de destino, ya que todos los motores tienen los ejes paralelos.
- Plano de ataque oblicuo: Se buscará el acceso al punto de destino a través de un plano oblicuo en el que se incluyan el punto base de los tres motores y el punto de destino, ya que todos los motores tienen los ejes paralelos. Si se fuerza a que el ángulo sea nulo, este caso tendría que ser equivalente al plano de ataque vertical.

En cualquier caso, tanto el punto base como el punto de destino estarán en el mismo plano de ataque por lo que, se analizará como si fuera un grupo de motores independientes al resto. Así, se pueden definir dos puntos a considerar, el punto P_1 en el que localizar el Origen de Coordenadas de estos tres últimos motores, como así ocurre en el problema completo a resolver, Y el punto P_2 en el que localizar el punto base de este grupo de motores para que esté en el mismo plano de ataque que el punto de destino P .

Por otra parte, dentro del "Caso 4-2" se han hecho una serie de análisis para resolver la Cinemática Inversa, algunos de los cuales podrían ser usados en este caso:

- Intento 1 - elementos T(1,4) y T(1,3) de la matriz T (solución dependiente)
- Intento 3 - Dos primeras filas de la primera inversa (solución dependiente)
- Intento 7 – A través del cálculo derivado del modelo SCARA – Solución iterativa de un paso
- Intento 8 – División del problema en partes simples (pares de articulaciones)

Cualquiera de estas soluciones podría ser razonable a la hora de encontrar la solución del problema actual. Sin embargo, se plantea un problema a resolver, antes de determinar la solución más razonable. En cualquiera de estos casos habrá 3 variables articulares a determinar (θ_3 , θ_4 y θ_5), y sin embargo, todas las soluciones plantearían una cierta dependencia entre estas variables. Para resolver este nuevo problema, se presenta una nueva posibilidad de configuración que debería ser resuelta por el propio diseño del modelo. En este caso, también se podría determinar el ángulo de ataque de los motores hacia el punto final de destino.

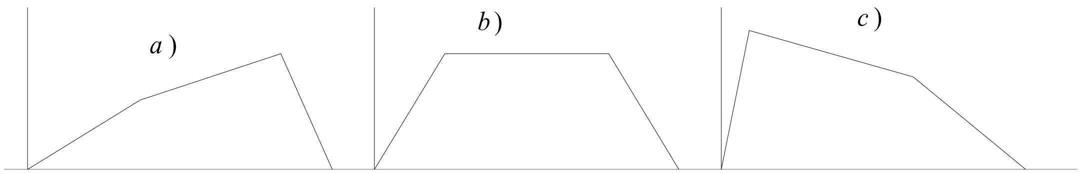

Ilustración 8: Diferentes ángulos de ataque al punto de destino para tres motores paralelos

De esta forma, se podría escoger un ángulo de ataque más plano, o más o menos agudo, siempre que el modelo a resolver cuente con más de dos elementos en paralelo, lo que supondría la posibilidad de evitar elementos que impidieran un acceso adecuado. Y junto con la posibilidad de configurar el plano de ataque al punto de destino, daría aún más posibilidades de interactuar correctamente con el elemento sobre el que se trabajara.
A efectos de resolución del problema todo dependerá de las necesidades del robot y de su entorno de trabajo, pero también podrían ser considerados otros aspectos para tomar esta decisión, como puede ser el par de los motores. En este caso, si se quisiera utilizar la arquitectura más adecuada para tener una mayor carga útil, debería hacerse un nuevo análisis de fuerzas, pero todo indica, que la solución más adecuada podría ser la b), al tener los ángulos de los motores más equilibrados entre todos ellos, y no hacer que uno de ellos trabaje con un ángulo más forzado, lo que le resultaría más costoso, por soportar un par mayor.

Por tanto, inicialmente se va a resolver la Cinemática Directa para estos tres motores como ya se hiciera en el "Caso 4-2". Y después se resolverá la Cinemática Inversa y la elección del tipo de solución para el ángulo de ataque al punto de destino.

1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto,

por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

Art	θ_i	d_i	r_i	α_i
$2-3$	θ_3	$L3$	$L'3$	0
$3-4$	θ_4	0	$L4$	0
$4-5$	θ_5	0	$L5$	0

Sin embargo, como ya se ha indicado, el desplazamiento lateral de la articulación 3 ya ha sido tenido en cuenta a la hora de calcular el plano de ataque sobre el punto de destino, por lo que no se incluirá en este análisis y, por tanto, la matriz de parámetros de DH quedará:

Art	θ_i	d_i	r_i	α_i
$2-3$	θ_3	0	$L'3$	0
$3-4$	θ_4	0	$L4$	0
$4-5$	θ_5	0	$L5$	0

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$^{2}A_{3}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ^{3}A_{4}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{4}A_{5}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^{2}A_{3}]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [^{3}A_{4}]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^{4}A_{5}]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^{2}A_{5}={}^{2}A_{3}\,{}^{3}A_{4}\,{}^{4}A_{5}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^{2}A_{5}={}^{2}A_{3}\,{}^{3}A_{4}\,{}^{4}A_{5} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) - S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & 0 & ... \\ C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & r_3 C\theta_3 - r_5 C\theta_5 (C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + r_5 C\theta_5 (C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + r_4 C\theta_3 C\theta_4 - r_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & r_3 C\theta_3 + r_5 C\theta_5 (C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + r_5 C\theta_5 (C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + r_4 C\theta_3 C\theta_4 + r_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & r_4 C(\theta_3+\theta_4) + r_3 C\theta_3 + r_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & r_4 S(\theta_3+\theta_4) + r_3 S\theta_3 + r_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_3 = L'_3$, $r_4 = L_4$ y $r_5 = L_5$), y los ángulos deseados:

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5 (C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5 (C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5 (C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) - S\theta_5 (C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & 0 & \cdots \\ C\theta_5 (C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5 (C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5 (C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5 (C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & L'_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_5 (C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5 (C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 - L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & L'_3 C\theta_3 + L_5 C\theta_5 (C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5 (C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P''(P''_x, P''_y, P''_z)$ - $O - XYZ$), se aplicaría:

$$P''(P''_x, P''_y, P''_z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) - S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & 0 & \ldots \\ C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 - L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 + L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L'_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 - L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ L'_3 C\theta_3 + L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$\begin{gathered} P''(P''_x, P''_y, P''_z) \;=\; \\ (L'_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 - L_4 C\theta_4 S\theta_3, \ldots \\ L'_3 C\theta_3 + L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 C\theta_4 S\theta_3, 0) \;=\; \\ (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5), L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5), 0) \end{gathered}$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$\begin{gathered} T = {}^2A_5 = {}^2A_3 \, {}^3A_4 \, {}^4A_5 \\ ({}^2A_3)^{-1} T = {}^3A_5 = {}^3A_4 \, {}^4A_5 \\ ({}^3A_4)^{-1} ({}^2A_3)^{-1} T = {}^4A_5 \end{gathered}$$

En este caso, para ejecutar el procedimiento general, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_3 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_4 y θ_5 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^3A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)-S\theta_5(C\theta_3S\theta_4-C\theta_4S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3)-S\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4) & 0 & \ldots \\ C\theta_5(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3)+S\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)-S\theta_5(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & r_3C\theta_3-r_5C\theta_5(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3)+r_5C\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)+r_4C\theta_3C\theta_4-r_4C\theta_4S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & r_3C\theta_3+r_5C\theta_5(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3)+r_5C\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)+r_4C\theta_3C\theta_4+r_4C\theta_4S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & r_4C(\theta_3+\theta_4)+r_3C\theta_3+r_5C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & r_4S(\theta_3+\theta_4)+r_3S\theta_3+r_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & P_x \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_3=L'_3$, $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^2A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) - S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & 0 & \ldots \\ C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 - L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 + L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & P_x \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$^3A_5 = {}^3A_4\,{}^4A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 C\theta_5 - S\theta_4 S\theta_5 & -C\theta_4 S\theta_5 - C\theta_5 S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 + L_5 C\theta_4 C\theta_5 - L_5 S\theta_4 S\theta_5 \\ C\theta_4 S\theta_5 + C\theta_5 S\theta_4 & C\theta_4 C\theta_5 - S\theta_4 S\theta_5 & 0 & L_4 S\theta_4 + L_5 C\theta_4 S\theta_5 + L_5 S\theta_4 C\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^2A_3)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t$$
$$f_{12}=-S\theta_3 x+C\theta_3 y$$
$$f_{13}=z$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^2A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$${}^3A_5={}^3A_4{}^4A_5=\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t=C\theta_3 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)+S\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))=C(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{12}(n)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=-S\theta_3 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)+C\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))=S(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{13}(n)=z=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t=C\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))+S\theta_3 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)=-S(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{12}(o)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=-S\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))+C\theta_3 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)=C(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{13}(o)=z=0$$

$$f_{11}(a)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t=0$$
$$f_{12}(a)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=0$$
$$f_{13}(a)=z=1$$

$$f_{11}(p)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t=C\theta_3(L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3+L_5C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))...$$
$$...+S\theta_3(L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))-L'_3=L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4$$
$$f_{12}(p)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=-S\theta_3(L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3+L_5C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))...$$
$$...+C\theta_3(L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))=L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4$$
$$f_{13}(p)=z=0$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P''(x'',y'',z'')\simeq P''(P''_x,P''_y,P''_z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P''_x \\ . & . & . & P''_y \\ . & . & . & P''_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P''_x \\ . & . & . & P''_y \\ . & . & . & P''_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_3 P''_x + S\theta_3 P''_y - L'_3 \\ . & . & . & (-S\theta_3) P''_x + C\theta_3 P''_y \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^{3}A_5=\begin{pmatrix} . & . & . & L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4 \\ . & . & . & L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p)=C\theta_3(L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3+L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))...$$
$$...+S\theta_3(L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))-L'_3=C\theta_3 P'_x+S\theta_3 P'_y-L'_3 \quad =$$
$$L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4$$
$$f_{12}(p)=-S\theta_3(L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3+L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))+...$$
$$...+C\theta_3(L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))=-S\theta_3 P'_x+C\theta_3 P'_y \quad =$$
$$L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4$$
$$f_{13}(p)=0$$

Ahora, habría que calcular los valores de θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P''_x y P''_y .
Como este problema es similar al estudiado en el "Caso 4-2" se van a utilizar los resultados allí obtenidos.
En el "Intento 1", la solución no resulta útil dado que, define el ángulo θ_5 en función de los otros dos ángulos, θ_3 y θ_4 , y por tanto, mantiene dos incógnitas por definir.
En el "Intento 3", la solución tampoco resulta útil dado que, también define el ángulo θ_3 en función de los otros dos ángulos, θ_4 y θ_5 , y por tanto, mantiene dos incógnitas por definir.
En cuanto al "Intento 7", podría ser usado, pero es un modelo de resolución geométrico por lo que es preferible no usarlo ya que, se están definiendo soluciones analíticas, siempre que sea posible.
Y por tanto, se resolverá mediante el procedimiento ya usado en el "Intento 8"

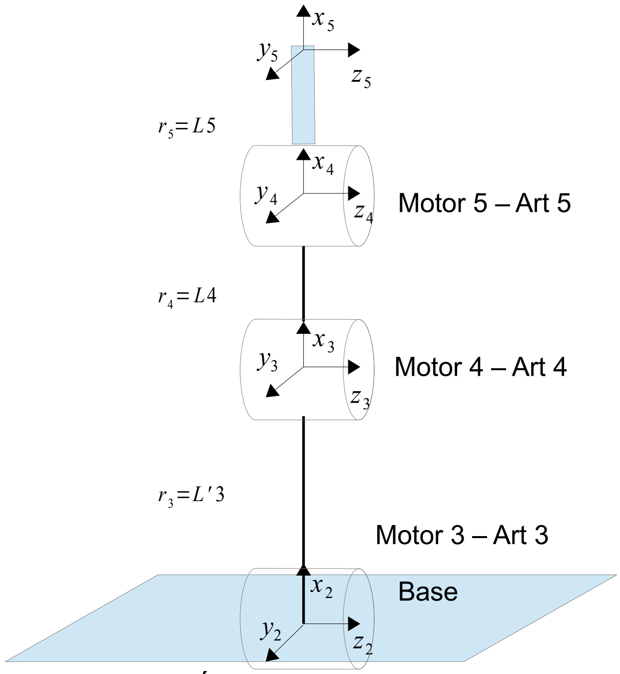

Ilustración 9: Último grupo de motores del Brazo tras desacoplar los dos primeros

En este caso se intentará analizar los problemas por separado. De esta forma, se inicia la resolución del problema independizando las dos últimas articulaciones de la primera de este segundo grupo de articulaciones (tercera articulación del problema completo) . Así, se va a independizar todo el tratamiento de matrices para resolver el problema simple representado a continuación, ya resuelto en el "Intento 8" aunque, en este caso, será con las articulaciones 4 y 5.

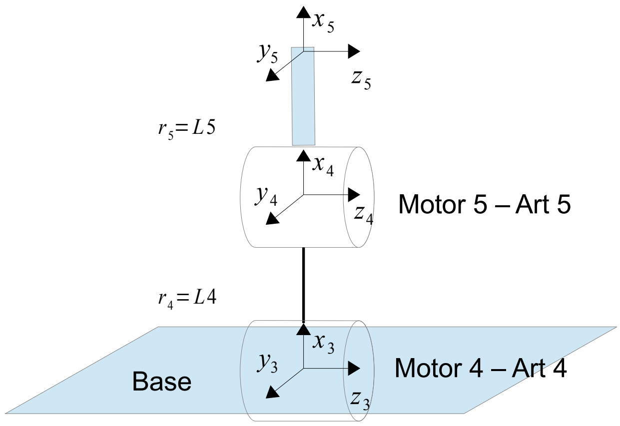

Ilustración 10: Análisis de los dos últimos motores en el último grupo de motores del Brazo tras desacoplar los dos primeros

De esta forma, el Origen de Coordenadas se considera en la Base virtual correspondiente al cuarto motor del problema completo (segundo motor en paralelo). Así, la matriz correspondiente al tercer motor determina cómo llegar a ese cuarto motor a través del desplazamiento de una distancia r_3 sobre el plano de movimiento compuesto por los ejes X', Z' :

$$
{}^{2}A_{3}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3\,C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3\,S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

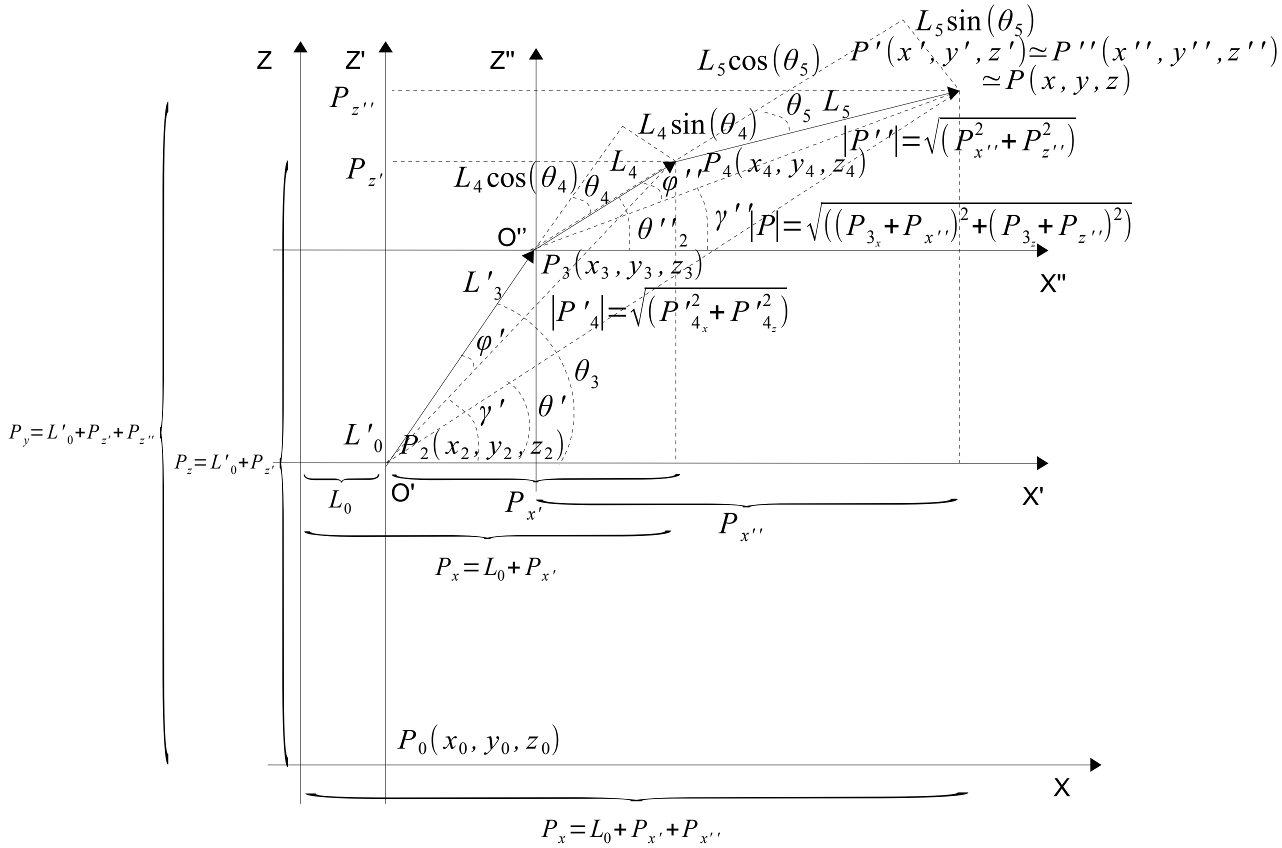

Ilustración 11: Esquema asociado a la solución a aplicar del Ejemplo 4-2, con motores paralelos entre sí

Por tanto, la componente z'' del punto P'' a alcanzar tendrá que disminuirse en la cantidad correspondiente a esa diferencia de altura entre las Bases real y virtual ($r_3 S\theta_3$). Y lo mismo ocurre en cuanto al desplazamiento horizontal sobre el plano de movimiento ($r_3 C\theta_3$).
De esta forma, se simplifica en cálculo y las matrices resultantes.

Para resolver el problema, se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, se comenzará por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$
\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{array}
=
\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & 0 & 0 & 105 & 0 \\ 4-5 & 0 & 0 & 290 & 0 \end{array}
=
\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{array}
$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^{3}A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^{3}A_5={}^{3}A_4\,{}^{4}A_5$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T = {}^3A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & r_5 C(\theta_4+\theta_5)+r_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & r_5 S(\theta_4+\theta_5)+r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_4 = L_4$ y $r_5 = L_5$), y los ángulos deseados:

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P'_x \\ n_y & o_y & a_y & P'_y \\ n_z & o_z & a_z & P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P'' correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo ($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$ - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base de los dos últimos motores ($P''(x, y, z)$ respecto a $P_3(x_3, y_3, z_3)$ $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P''(P''_x, P''_y, P''_z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P''_x \\ n_y & o_y & a_y & P''_y \\ n_z & o_z & a_z & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto P'' sería:

$$P''(x,y,z)=(P''_x\ ,\ P''_y\ ,\ P''_z)=(L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4\ ,\ L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4\ ,\ 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.
Es interesante comentar que la componente P''_z resulta nula por estar este segundo grupo de motores en el plano de ataque del punto final de destino.

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$({}^3A_4)^{-1}T={}^4A_5$$

En este caso, será necesario resolver la igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 y θ_3 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^3A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P''_x \\ n_y & o_y & a_y & P''_y \\ n_z & o_z & a_z & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^3A_5=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P''_x \\ n_y & o_y & a_y & P''_y \\ n_z & o_z & a_z & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & P''_x \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & P''_y \\ 0 & 0 & 1 & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$[{}^3A_4]^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & P''_x \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & P''_y \\ 0 & 0 & 1 & P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerarán las expresiones resultantes de tomar la equivalencia entre $P''^2_x+P''^2_y$ y sus correspondientes elementos de la matriz T :

$$\begin{aligned}
&P''^2_x+P''^2_y=(L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4)^2+(L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4)^2 \ = \\
&(L_5C(\theta_4+\theta_5))^2+2(L_5C(\theta_4+\theta_5))(L_4C\theta_4)+(L_4C\theta_4)^2+(L_5S(\theta_4+\theta_5))^2... \\
&...+2(L_5S(\theta_4+\theta_5))(L_4S\theta_4)+(L_4S\theta_4)^2 \ = \\
&L_5^2((C(\theta_4+\theta_5))^2+(S(\theta_4+\theta_5))^2)+2(L_5C(\theta_4+\theta_5))(L_4C\theta_4)+L_4((C\theta_4)^2+(S\theta_4)^2)+... \\
&...+2(L_5S(\theta_4+\theta_5))(L_4S\theta_4) \ = \\
&L_5^2+L_4^2+2(L_5C(\theta_4+\theta_5))(L_4C\theta_4)+2(L_5S(\theta_4+\theta_5))(L_4S\theta_4) \ = \\
&L_5^2+L_4^2+2L_5L_4(C(\theta_4+\theta_5)C\theta_4+S(\theta_4+\theta_5)S\theta_4) \ = \\
&L_5^2+L_4^2+2L_5L_4C(\theta_4+\theta_5-\theta_4) \ = \\
&L_5^2+L_4^2+2L_5L_4C\theta_5=P''^2_x+P''^2_y
\end{aligned}$$

$$\theta_5=\arccos((P''^2_x+P''^2_y-L_5^2-L_4^2)/2L_5L_4) \quad *$$

Si ahora se toma la primera fila de la inversa $[{}^3A_4]^{-1}$ y se opera con la cuarta columna de T , y la segunda fila de $[{}^3A_4]^{-1}$, también con la cuarta columna de T , se obtiene:

$$-S\theta_4P''_x+C\theta_4P''_y=L_5S\theta_5 \ \Leftrightarrow \ P''_yC\theta_4-P''_xS\theta_4=L_5S\theta_5$$
$$C\theta_4P''_x+S\theta_4P''_y-L_4=L_5C\theta_5 \ \Leftrightarrow \ P''_yS\theta_4+P''_xC\theta_4=L_4+L_5C\theta_5$$

Y con la razón $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ y $a\sin\theta+b\cos\theta=d \ \Leftrightarrow \ \theta=atan2(d,c)-atan2(b,a)$:

$$\theta_4 = atan2(L_4 + L_5 C\theta_5, L_5 S\theta_5) - atan2(P''_x, P''_y)$$

Luego, ya se han obtenido las igualdades correspondientes a los dos ángulos de las dos articulaciones:

θ_3 Por determinar
$$\theta_5 = \arccos((P''^2_x + P''^2_y - L_5^2 - L_4^2)/2 L_5 L_4)$$
$$\theta_4 = atan2(L_4 + L_5 C\theta_5, L_5 S\theta_5) - atan2(P''_x, P''_y)$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta la diferencia de altura y de desplazamiento horizontal en el plano de movimiento, sobre los que se han obtenido las ecuaciones correspondientes a θ_4 y θ_5 , por lo que, a la hora de implementar el código deberá resolverse esa diferencia.
Por otra parte, también hay que considerar que el punto P'' del problema simplificado es diferente al punto P en el subproblema completo. De hecho las componentes x'', y'' consideradas para el análisis serán determinados, en realidad, sobre el Origen de Coordenadas virtual del punto base del segundo grupo de motores P_3 :

$$x'' = x - L'_3 C\theta_3$$
$$y'' = z - L'_3 S\theta_3$$

El problema, en este caso, es plantear el ángulo θ_3 ya que de este ángulo dependerá el resultado del anterior cálculo de los ángulos θ_4 y θ_5 .
Y de igual forma a como se determinó en el "Intento 7" del "Caso 4-2", el ángulo podría plantearse a través de alguna asignación razonada. Por ejemplo, para equilibrar este ángulo de forma proporcional a la relación entre la suma de todas las longitudes de los segmentos ($L'_3 + L_4 + L_5$) y la distancia entre los dos puntos P ($O' - UVW$) y $P2$ ($O - XYZ$), mediante una simple razón de proporcionalidad (regla de tres), como por ejemplo:

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = \left|\arccos({}^{O'}P_{xy} / L')\right|$$
$$\theta_3 = k(L_3 / L')\theta_{O'} \quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

Con θ' , como el ángulo correspondiente a vector del punto P respecto al eje X' (P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa) .
Por tanto, dado que ya se han calculado $P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$ y $P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$ al analizar el caso del par de articulaciones 1-2 (apartado "Par de articulaciones 1-2, con giro de 90º", dentro del apartado "Caso 1-0 – Brazo de Pruebas para la Presentación del TFG"):

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2)$$
$$P'_2(P'_{2x}, P'_{2y}, P'_{2z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 - L_3 C\theta_1 S\theta_2, \ldots, \ldots)$$
$$(\ldots, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L_3 S\theta_2 S\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2 + L_3 C\theta_2)$$

El punto final a alcanzar P respecto al punto P_2 será:

$$P''(P''_x, P''_y, P''_z) =$$
$$(L'_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 - L_4 C\theta_4 S\theta_3, \ldots$$
$$L'_3 C\theta_3 + L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 C\theta_4 S\theta_3, 0) =$$
$$(L_4 C(\theta_3 + \theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5), L_4 S(\theta_3 + \theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5), 0)$$

Y, como consecuencia, se llega a:

$$|P|=\sqrt{((P_{3_x}+P_{x''})^2+(P_{3_y}+P_{y''})^2+(P_{3_z}+P_{z'})^2)} =$$
$$\sqrt{(P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2+(P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1)^2+(L_1+L'_2 C\theta_2+L_3 C\theta_2)^2}$$

Además, se podría rotar el plano de ataque sobre el eje compuesto por los puntos P y P_2 ($\vec{PP_2}$) y se observaría que la relación de ángulos θ_3 , θ_4 y θ_5 no cambiaría por lo que, se puede considerar que las componentes de P respecto de P_2 permitirán localizar θ' como:

$$\theta'=arctg(P_z-(L_1+L'_2 C\theta_2+L_3 C\theta_2))/...$$
$$...\sqrt{(P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2+(P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1)^2}$$

De esta forma, quedará determinado el conjunto de ángulos de una forma equilibrada y sin un número indeterminado de iteraciones.

Puede verse un análisis sobre las posibles soluciones en "Robotics 1 - Prof. De Luca Lecture 18 (7 Nov 2014) – Inverse kinematics" [WWWyoutubeDoc91] (Tiempo= 49:32).

9 Intento 9 - División del problema en subproblemas (elección de cuatro articulaciones cualesquiera), con giro de 90º

1 Subproblema de articulaciones 1-2-3-4

En este subproblema se plantea resolver la cinemática con el primer motor perpendicular al suelo y los dos siguientes, paralelos entre sí y al suelo, y perpendiculares entre sí, y el último, paralelo al anterior.
Eso supone resolver un desplazamiento perpendicular del plano de ataque de los dos últimos motores, respecto al eje de giro en el segundo motor, uno de los principales problemas de este brazo.

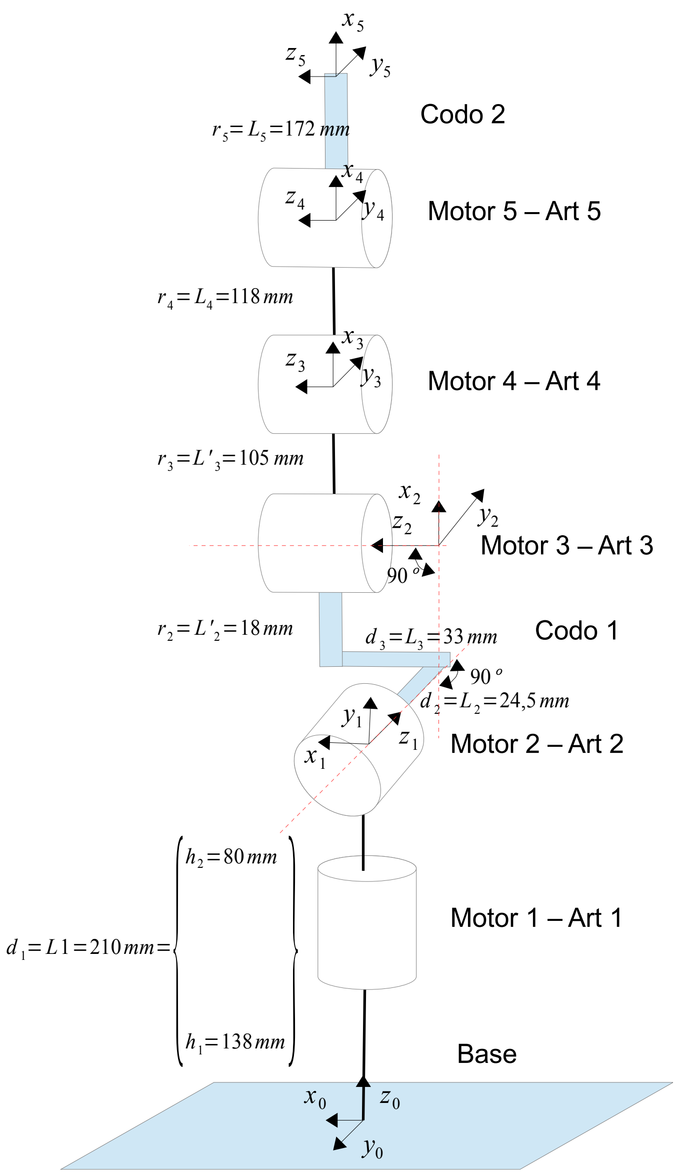

Ilustración 12: Brazo de prueba para presentación de TFG (Art. 1-2-3-4)

1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 218 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & 24{,}5 & 18 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & 33 & 105 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & 118 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \end{matrix}$$

Hay que considerar la gran diferencia respecto al caso completo:

$$\begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{matrix}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = [{}^{i-1}A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$ {}^0A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ {}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^2A_3]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^1A_2$ y $[{}^1A_2]^{-1}$ afectadas anteriores se convierten en:

$$
{}^{1}A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$
T={}^{0}A_4={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4
$$

$$
P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$
T={}^{0}A_4={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4 \;=
$$

$$
\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots
$$

$$
\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) & C\theta_1 C\theta_2 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_1 C\theta_2 & . \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \ldots
$$

$$
\begin{pmatrix} . & . & . & L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & . & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & . & L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}
$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$ y $r_4=L_4+L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar, o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_4=L_4$), y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) & C\theta_1 C\theta_2 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_1 C\theta_2 & . \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & . & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & . & L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z)=(P_x\ ,\ P_y\ ,\ P_z)$$

Y se encuentran las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} P_x &= L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)\dots \\ &\quad \dots+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ P_y &= -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)\dots \\ &\quad \dots-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ P_z &= L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 S\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \end{aligned}$$

2 Cinemática Inversa

1 Resolución del primer ángulo θ_1

1 Intento 1 - Elementos de T, o primera inversa (con solución forzada)

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$\begin{gathered} T={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4={}^0A_4 \\ ({}^0A_1)^{-1}T={}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4={}^1A_4 \\ ({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3\,{}^3A_4={}^2A_4 \\ ({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^3A_4 \end{gathered}$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_1 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para

resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 , y así sucesivamente con θ_3 y θ_4 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y la matriz ${}^1A_2$ anterior se convierte en:

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$ y $r_4=L_4+L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar (o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_4=L_4$), se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{0}A_{1})^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$({}^{0}A_{1})^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ldots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) & . & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & . & . \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & . & . \\ 0 & 0 & . & . \end{pmatrix}\ldots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & S\theta_2 & L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^{1}A_{4}={}^{1}A_{2}\,{}^{2}A_{3}\,{}^{3}A_{4} =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 & S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3-L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4+L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_2+L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_{2})^{-1}({}^{0}A_{1})^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^{0}A_{1})^{-1}T$). Así, en primer lugar, se va a realizar el análisis utilizando la primera inversa:

$$({}^{0}A_{1})^{-1}T={}^{1}A_{2}\,{}^{2}A_{3}\,{}^{3}A_{4}={}^{1}A_{4}$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p)\\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p)\\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}=C\theta_1 x+S\theta_1 y$$
$$f_{12}=z-L_1 t$$
$$f_{13}=S\theta_1 x-C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p)\\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p)\\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}={}^1A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3))...$$
$$...+S\theta_1(-C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))=-C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2$$
$$f_{12}(n)=z-L_1 t=C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2=C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2$$
$$f_{13}(n)=S\theta_1 x-C\theta_1 y\;=$$
$$S\theta_1(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3))...$$
$$...-C\theta_1(-C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))=S(\theta_3+\theta_4)$$

$$f_{11}(o)=C\theta_1 x+S\theta_1 y\,...\;=$$
$$C\theta_1(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3))...$$
$$...+S\theta_1(S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))=S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2$$
$$f_{12}(o)=z-L_1 t=-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2=-S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2$$
$$f_{13}(o)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3))...$$
$$...-C\theta_1(S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))=C(\theta_3+\theta_4)$$
$$f_{11}(a)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)+S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=C\theta_2$$
$$f_{12}(a)=z-L_1 t=S\theta_2$$
$$f_{13}(a)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)-C\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=0$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1 x+S\theta_1 y\;=$$
$$C\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$
$$...+S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)\;=$$
$$L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3-L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4+L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4$$
$$f_{12}(p)=z-L_1 t\;=$$
$$L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4-L_1\;=$$
$$L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4$$
$$f_{13}(p)=S\theta_1 x-C\theta_1 y\;=$$
$$S\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...\;=$$

$$...-C\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) =$$
$$L_2 + L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^0A_1)^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y \\ . & . & . & P_z - L_1 \\ . & . & . & S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^1A_4 =$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 - L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & L_2 + L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 - L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4$$
$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 y θ_4 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que, existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la tercera ecuación quedaría:

$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L'_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2) / L'_3)$$

Y usando ahora la primera ecuación:

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$

$$L_3 C\theta_2 + (-L'_2 - L'_3 C\theta_3) S\theta_2 = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((-L'_2 - L'_3 C\theta_3), L_3)...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(L_3)^2 + ((-L'_2 - L'_3 C\theta_3))^2 - (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2}, C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)$$

O también con la segunda ecuación:

$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_1 = L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2(L_3, (L'_2 + L'_3 C\theta_3)) \pm atan2(\sqrt{((L'_2 + L'_3 C\theta_3))^2 + L_3^2 - (P_z - L_1)^2}, P_z - L_1)$$

Luego quedarían determinados los ángulos correspondientes, siempre y cuando se predefiniera, al menos, el ángulo de orientación θ_1 .

2 Intento 2 - Segunda inversa (con solución forzada)

Como no se ha llegado a ningún resultado concluyente, se va a repetir el cálculo con la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1} T = {}^2A_3 = {}^2A_3$$

$$[{}^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_3={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$ y $r_4=L_4+L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar (o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_4=L_4$), se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) & . & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & . & . \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & . & . \\ 0 & 0 & . & . \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & S\theta_2 & L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & -S\theta_2 S\theta_1 & C\theta_2 & -L'_2-L_1 C\theta_2 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_2 \\ C\theta_1 C\theta_2 & S\theta_1 C\theta_2 & S\theta_2 & -L_1 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) & . & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & . & . \\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & . & . \\ 0 & 0 & . & . \end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & S\theta_2 & L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$${}^{2}A_3\,{}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$). Así, en este caso, se va a realizar el análisis utilizando la primera y la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_4$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{21}=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t$$
$$f_{22}=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t$$
$$f_{23}=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^2A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21}(n)=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad = \\ C\theta_1 C\theta_2(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3))... \\ ...-S\theta_2 S\theta_1(-C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))... \end{aligned}$$

$$...+S\theta_2(C\theta_3 C\theta_2)=C(\theta_3+\theta_4)$$

$$f_{22}(n)=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3))...$$

$$...-C\theta_1(-C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)) \quad =$$

$$S(\theta_3+\theta_4)$$

$$f_{23}(n)=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad =$$

$$C\theta_1 C\theta_2(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3))...$$

$$...+C\theta_2 S\theta_1(-C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))...$$

$$...+S\theta_2(C\theta_3 C\theta_2)=0$$

$$f_{21}(o)=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad =$$

$$-C\theta_1 S\theta_2(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3))...$$

$$...-S\theta_2 S\theta_1(S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))...$$

$$...+C\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)=-S(\theta_3+\theta_4)$$

$$f_{22}(o)=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3))...$$

$$...-C\theta_1(S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)) \quad =$$

$$C(\theta_3+\theta_4)$$

$$f_{23}(o)=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z+L_1 C\theta_2 t \quad =$$

$$C\theta_1 C\theta_2(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3))...$$

$$...+S\theta_1 C\theta_2(S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))...$$

$$...+S\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)=0$$

$$f_{21}(a)=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad =$$

$$C\theta_1 C\theta_2(C\theta_1 C\theta_2)+C\theta_2 S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)+S\theta_2(S\theta_2)=0$$

$$f_{22}(a)=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)-C\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=0$$

$$f_{23}(a)=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad =$$

$$C\theta_1 S\theta_2(C\theta_1 C\theta_2)+S\theta_2 S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)-C\theta_2(S\theta_2)=1$$

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad =$$

$$-C\theta_1 S\theta_2(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$

$$-S\theta_2 S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)...$$

$$...+C\theta_2(L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4) \quad =$$

$$r_4 C(\theta_3+\theta_4)+r_3 C\theta_3$$

$$f_{22}(p)=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t \quad =$$

$$S\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$

$$...-C\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)...$$

$$...-L_2=r_4 S(\theta_3+\theta_4)+r_3 S\theta_3$$

$$f_{23}(p)=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad =$$

$$C\theta_1 C\theta_2(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$$

$$...+C\theta_2 S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)...$$

$$...+S\theta_2(L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4)-L_1 S\theta_2 \quad =$$

$$L_3$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar: $P(x, y, z)$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) \\ . & . & . & S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 \\ . & . & . & C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_3{}^3A_4 =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{21}(p) = -C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) = L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L_3 C\theta_3$$
$$f_{22}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L_3 S\theta_3$$
$$f_{23}(p) = C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 y θ_4 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la tercera ecuación quedaría:

$$f_{23}(p) = C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$
$$(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) C\theta_2 + (P_z - L_1) S\theta_2 = L_3$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \iff \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((P_z - L_1), (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)) \pm atan2(\sqrt{((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y))^2 + ((P_z - L_1))^2 - L_3^2}, L_3)$$

Y con la primera y segunda ecuaciones:

$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L_3 S\theta_3$$

De la segunda ecuación:

$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L_3 S\theta_3$$
$$\theta_4=\arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 - L_3 S\theta_3)/L_4)-\theta_3$$

de forma similar, con la primera ecuación:

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2+L_1 C\theta_2)=L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L_3 C\theta_3$$
$$\theta_4=\arccos((-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2+L_1 C\theta_2)-L_3 C\theta_3)/L_4)-\theta_3$$

De hecho, si se hace un resumen de las diferentes partes del problema:

- El ángulo θ_1 se ha predeterminado mediante P_x y P_y :
  $\theta_1=atan(P_y/P_x)$
- θ_2 mediante la ecuación:
  $\theta_2=atan2((P_z-L_1),(C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y))\pm atan2(\sqrt{((C\theta_1 P_x+S\theta_1 P_y))^2+((P_z-L_1))^2-L_3^2}, L_3)$
- θ_3 aparentemente no se podría calcular
- θ_4 quedaría en función de θ_3 mediante la ecuación:
  $\theta_4=\arccos((-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2+L_1 C\theta_2)-L_3 C\theta_3)/L_4)-\theta_3$

Sin embargo, los motores 3 y 4 se pueden resolver a través de un modelo SCARA, siempre y cuando se conozcan los datos de la posición del extremo del brazo y de la base del mismo.
El extremo del brazo sería el correspondiente al punto a alcanzar en el problema.
En cuanto al punto base de la articulación 3, se podría calcular, como en el caso "Par de articulaciones 1-2, con giro de 90º" calculando las matrices expuestas en la igualdad:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso la matriz T se calcularía a partir de las dos primeras articulaciones:

$${}^0A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_2={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2$$

$$T={}^{0}A_2=\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & d_2 S\theta_1 - r_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & d_1 + r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Datos: $d_1=L_1$, $d_2=L_2$ y $r_2=L'_2$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})=(L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2)$$

Por tanto, como sí se conoce la posición de la base de la articulación 3, y también la posición a alcanzar por el extremo del brazo en la articulación 4 (L_4+L_5 , L_4 o la resta de los puntos/vectores que intervienen en el cálculo (P_4-P_3)), ya tenemos la posibilidad de resolver el problema.

E incluso, como los tres últimos motores del problema completo son paralelos entre sí, se podría aplicar la solución comentada en "Subproblema de articulaciones 3-4-5" como reflejo del apartado "Intento 7 – A través del cálculo derivado del modelo SCARA – Solución iterativa de un paso" en el "Caso 4-2 - Tres motores, con el primero paralelo al suelo, y el resto paralelos al primero".

Por otra parte, existe la posibilidad de que el problema se plantee como suma de dos partes, una parte de aproximación al punto, y otra de orientación o manipulación.
En este caso, las ecuaciones a plantear serían sólo de la primera parte, puesto que esa segunda parte podría ser desacoplada de la primera para ser calculada de forma independiente.
Esto sería, en realidad, la aplicación del modelo utilizado en este apartado para su resolución. Y

podría, además, permitir el uso de las variables incluidas en la matriz de orientación, no utilizada hasta ahora en el cálculo de las variables articulares.
La importancia de esta simplificación sería importante ya que, las ecuaciones a utilizar resultarían significativamente más simples.

2 Subproblema de articulaciones 2-3-4-5

En este subproblema se plantea resolver la cinemática del problema completo pero sin el primer motor perpendicular al suelo.
Eso supone resolver un desplazamiento perpendicular del plano de ataque de los tres últimos motores, respecto al eje de giro en el primer motor, uno de los principales problemas de este brazo.

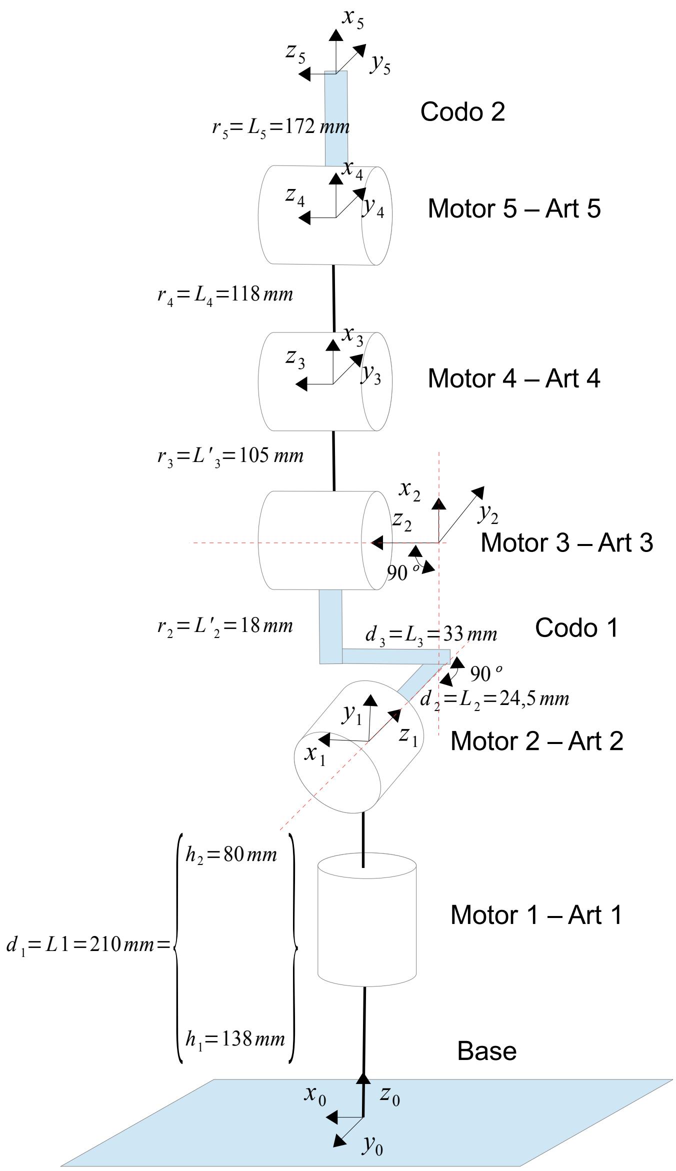

Ilustración 13: Brazo de prueba para presentación de TFG (Art. 2-3-4-5)

1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & 24{,}5 & 18 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & 33 & 105 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & 118 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & 120 & 0 \end{array} =$$

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{array}$$

Hay que considerar la gran diferencia respecto al caso completo:

$$\begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^3A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^1A_2$ y $[{}^1A_2]^{-1}$ afectadas anteriores se convierten en:

$${}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^1A_5={}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T={}^1A_5={}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

$$\ldots \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & S\theta_2 & \ldots \\ S\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -C\theta_2 & \ldots \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & r'_2 C\theta_2+d_3 S\theta_2+r'_3 C\theta_2 C\theta_3-r_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 S\theta_5+r_4 C\theta_2 C\theta_3 C\theta_4-r_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4+r_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 C\theta_5 \\ \ldots & r'_2 S\theta_2-d_3 C\theta_2+r'_3 C\theta_3 S\theta_2-r_5 S(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 S\theta_5+r_4 C\theta_3 C\theta_4 S\theta_2-r_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4+r_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 S\theta_2 \\ \ldots & d_2+r_4 S(\theta_3+\theta_4)+r'_3 S\theta_3+r_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$, $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar, pero sin tener en cuenta la distancia $d_1=L_1$, que sí habrá que tener en consideración cuando se proponga el punto a alcanzar y las correspondientes ecuaciones de los ángulos), y los ángulos deseados.

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base ($P(x,y,z)$ - $O-XYZ$), se aplicaría:

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & S\theta_2 & \ldots \\ S\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -C\theta_2 & \ldots \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & L'_2C\theta_2+L_3S\theta_2+L'_3C\theta_2C\theta_3-L_5S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2S\theta_5+L_4C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_4C\theta_2S\theta_3S\theta_4+L_5C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2C\theta_5 \\ \ldots & L'_2S\theta_2-L_3C\theta_2+L'_3C\theta_3S\theta_2-L_5S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2S\theta_5+L_4C\theta_3C\theta_4S\theta_2-L_4S\theta_2S\theta_3S\theta_4+L_5C(\theta_3+\theta_4)C\theta_5S\theta_2 \\ \ldots & L_2+L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ \ldots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L'_2C\theta_2+L_3S\theta_2+L'_3C\theta_2C\theta_3-L_5S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2S\theta_5+L_4C\theta_2C\theta_3C\theta_4-L_4C\theta_2S\theta_3S\theta_4+L_5C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2C\theta_5 \\ L'_2S\theta_2-L_3C\theta_2+L'_3C\theta_3S\theta_2-L_5S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2S\theta_5+L_4C\theta_3C\theta_4S\theta_2-L_4S\theta_2S\theta_3S\theta_4+L_5C(\theta_3+\theta_4)C\theta_5S\theta_2 \\ L_2+L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\\1\end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P(x,y,z)=(P_x\ ,\ P_y\ ,\ P_z)$$

Y se encuentran las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&P_x=L'_2C\theta_2+L_3S\theta_2+L'_3C\theta_2C\theta_3-L_5S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2S\theta_5+L_4C\theta_2C\theta_3C\theta_4\ldots \\
&\qquad\ldots-L_4C\theta_2S\theta_3S\theta_4+L_5C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2C\theta_5 \\
&P_y=L'_2S\theta_2-L_3C\theta_2+L'_3C\theta_3S\theta_2-L_5S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2S\theta_5+L_4C\theta_3C\theta_4S\theta_2-\ldots \\
&\qquad\ldots-L_4S\theta_2S\theta_3S\theta_4+L_5C(\theta_3+\theta_4)C\theta_5S\theta_2 \\
&P_z=L_2+L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)
\end{aligned}$$

2 Cinemática Inversa

1 Resolución del primer ángulo θ_2

1 Intento 1 - Elementos de T, o primera inversa (con solución forzada)

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$\begin{gathered}
T={}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5={}^1A_5 \\
({}^1A_2)^{-1}T={}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5={}^2A_5 \\
({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}T={}^3A_4\,{}^4A_5={}^3A_4 \\
({}^3A_4)^{-1}({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}T={}^4A_5
\end{gathered}$$

En este caso, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_3 , y así sucesivamente con θ_4 y θ_5 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$
{}^{1}A_{2}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{2}A_{3}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{3}A_{4}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{4}A_{5}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
T={}^{0}A_{3}={}^{0}A_{1}\,{}^{1}A_{2}\,{}^{2}A_{3}\,{}^{3}A_{4}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$
\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)
$$
$$
\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)
$$

Y las matrices ${}^{1}A_{2}$ y $[{}^{1}A_{2}]^{-1}$ anteriores se convierten en:

$$
{}^{1}A_{2}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{1}A_{2}]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$ y $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar (sin tener en consideración $d_1=L_1$, que sí habrá que considerar a la hora de analizar los datos para el punto final de destino) se llega a la siguiente igualdad:

$$
({}^{0}A_{1})^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\dots$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & S\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C\theta_2 & . \\ C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & S\theta_2 & . \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}\dots$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 S\theta_5 - L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 C\theta_5 \\ . & . & . & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 S\theta_5 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 C\theta_2 \\ . & . & . & L_2 + L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^{2}A_5 = {}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5 =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}\dots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^{1}A_2)^{-1}T$). Así, en primer lugar, se va a realizar el análisis utilizando la primera inversa:

$$({}^{1}A_2)^{-1}T = {}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5 = {}^{2}A_5$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^{1}A_2)^{-1}T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t\\
&f_{12}=z-L_2 t\\
&f_{13}=C\theta_2 x+S\theta_2 y
\end{aligned}
$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$
({}^1A_2)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p)\\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p)\\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p)\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^2A_5
$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(n)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=-S\theta_2(-S\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))\ldots\\
&\qquad\ldots+C\theta_2(C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))=C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\\
&f_{12}(n)=z-L_1 t=S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\\
&f_{13}(n)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=C\theta_2(-S\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))+S\theta_2(C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(o)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=-S\theta_2(S\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))\ldots =\\
&\qquad\ldots+C\theta_2(-C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))=-S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\\
&f_{12}(o)=z-L_2 t=C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\\
&f_{13}(o)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=C\theta_2(S\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))+S\theta_2(-C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5))=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(a)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t=-S\theta_2(C\theta_2)+C\theta_2(S\theta_2)=0\\
&f_{12}(a)=z-L_2 t=0\\
&f_{13}(a)=C\theta_2 x+S\theta_2 y=C\theta_2(C\theta_2)+S\theta_2(S\theta_2)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_{11}(p)=-S\theta_2 x+C\theta_2 y-L'_2 t \quad =\\
&-S\theta_2(-L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_5-L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4+L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4-L_5 C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 C\theta_5)\ldots\\
&\ldots+C\theta_2(L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2-L_5 S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 S\theta_5+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4+L_5 C(\theta_3+\theta_4)C\theta_5 C\theta_2)\ldots\\
&\qquad\ldots-L'_2=L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3+L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\\
&f_{12}(p)=z-L_2 t=L_2+L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)-L'_2 \quad =\\
&\qquad L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\\
&f_{13}(p)=C\theta_2 x+S\theta_2 y \quad =\\
&C\theta_2(-L'_2 S\theta_2+L_3 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 S\theta_5-L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4+L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4-L_5 C(\theta_3+\theta_4)S\theta_2 C\theta_5)\ldots \quad =\\
&\ldots+S\theta_2(L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2-L_5 S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 S\theta_5+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4+L_5 C(\theta_3+\theta_4)C\theta_5 C\theta_2) \quad =\\
&\qquad L_3
\end{aligned}
$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$
\begin{pmatrix} . & . & . & P_x\\ . & . & . & P_y\\ . & . & . & P_z\\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}
$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^1A_2)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2 \\ 0 & 0 & 1 & -L_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & -S\theta_2 P_x + C\theta_2 P_y - L'_2 \\ . & . & . & P_z - L_2 \\ . & . & . & C\theta_2 P_x + S\theta_2 P_y \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_5 =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ . & . & . & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ . & . & . & L_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p) = -S\theta_2 P_x + C\theta_2 P_y - L'_2 = L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{12}(p) = P_z - L_2 = L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{13}(p) = C\theta_2 P_x + S\theta_2 P_y = L_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_2 , θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que, existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la tercera ecuación quedaría:

$$f_{13}(p) = S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y = L_2 + L'_3 S\theta_3$$
$$\theta_3 = \arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2) / L'_3)$$

Y usando ahora la primera ecuación:

$$f_{11}(p) = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y = -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3$$
$$L_3 C\theta_2 + (-L'_2 - L'_3 C\theta_3) S\theta_2 = C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((-L'_2 - L'_3 C\theta_3), L_3)...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{(L_3)^2 + ((-L'_2 - L'_3 C\theta_3))^2 - (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)^2}, C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)$$

O también con la segunda ecuación:

$$f_{12}(p)=P_z-L_1=L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$
$$f_{12}(p)=P_z-L_1=L'_2 C\theta_2+L_3 S\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \iff \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2=atan2(L_3,(L'_2+L'_3 C\theta_3))\pm atan2(\sqrt{((L'_2+L'_3 C\theta_3))^2+L_3^2-(P_z-L_1)^2},P_z-L_1)$$

Luego quedarían determinados los ángulos correspondientes, siempre y cuando se predefiniera, al menos, el ángulo de orientación θ_1 .

2 Intento 2 - Segunda inversa (con solución forzada)

Como no se ha llegado a ningún resultado concluyente, se va a repetir el cálculo con la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3={}^2A_3$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^0A_3={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$, $r_2=L'_2$, $d_3=L_3$, $r_3=L'_3$ y $r_4=L_4+L_5$ para una aproximación al punto a alcanzar (o cuando se calcule la posición de la siguiente articulación, $r_4=L_4$), se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix}-S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2\\ 0 & 0 & 1 & -d_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -L_1\\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}T \quad =$$

$$\begin{pmatrix}-S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -L'_2\\ 0 & 0 & 1 & -L_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -L_1\\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix}C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3) & . & .\\ -C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3) & . & .\\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & . & .\\ 0 & 0 & . & .\end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix}. & . & C\theta_1C\theta_2 & L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2+L'_3S\theta_1S\theta_3+L_4C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+L_4S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-L'_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3\\ . & . & S\theta_1C\theta_2 & -L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1-L'_3C\theta_1S\theta_3+L_3S\theta_1C\theta_2-L_4C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-L_4S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)-L'_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1\\ . & . & S\theta_2 & L_1+L_3S\theta_2+L'_2C\theta_2+L'_3C\theta_3C\theta_2+L_4C\theta_3C\theta_4C\theta_2-L_4C\theta_2S\theta_3S\theta_4\\ . & . & 0 & 1\end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix}-C\theta_1S\theta_2 & -S\theta_2S\theta_1 & C\theta_2 & -L'_2-L_1C\theta_2\\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_2\\ C\theta_1C\theta_2 & S\theta_1C\theta_2 & S\theta_2 & -L_1S\theta_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix}C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3) & . & .\\ -C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3) & . & .\\ C(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4)C\theta_2 & . & .\\ 0 & 0 & . & .\end{pmatrix} \quad \ldots$$

$$\begin{pmatrix}. & . & C\theta_1C\theta_2 & L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2+L'_3S\theta_1S\theta_3+L_4C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+L_4S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-L'_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3\\ . & . & S\theta_1C\theta_2 & -L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1-L'_3C\theta_1S\theta_3+L_3S\theta_1C\theta_2-L_4C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-L_4S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)-L'_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1\\ . & . & S\theta_2 & L_1+L_3S\theta_2+L'_2C\theta_2+L'_3C\theta_3C\theta_2+L_4C\theta_3C\theta_4C\theta_2-L_4C\theta_2S\theta_3S\theta_4\\ . & . & 0 & 1\end{pmatrix} \quad =$$

$${}^2A_3\,{}^3A_4=\begin{pmatrix}C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3C\theta_3\\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3S\theta_3\\ 0 & 0 & 1 & L_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4C\theta_4\\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4S\theta_4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix}C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4C(\theta_3+\theta_4)+L_3C\theta_3\\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4S(\theta_3+\theta_4)+L_3S\theta_3\\ 0 & 0 & 1 & L_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso ($({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T$). Así, en este caso, se va a realizar el análisis utilizando la primera y la segunda inversa:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_4$$

En esta igualdad se puede realizar el cálculo de la parte izquierda, e igualarlo a la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} & f_{21}=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \\ & f_{22}=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t \\ & f_{23}=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \end{aligned}$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^2A_5$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{21}(n)=&-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad = \\ & C\theta_1 C\theta_2(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3))\ldots \\ & \ldots-S\theta_2 S\theta_1(-C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))\ldots \\ & \ldots+S\theta_2(C\theta_3 C\theta_2)=C(\theta_3+\theta_4) \\ f_{22}(n)=&S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3))\ldots \\ & \ldots-C\theta_1(-C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)) \quad = \\ & S(\theta_3+\theta_4) \\ f_{23}(n)=&C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad = \\ & C\theta_1 C\theta_2(C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3))\ldots \\ & \ldots+C\theta_2 S\theta_1(-C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))\ldots \\ & \ldots+S\theta_2(C\theta_3 C\theta_2)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{21}(o)=&-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad = \\ & -C\theta_1 S\theta_2(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3))\ldots \\ & \ldots-S\theta_2 S\theta_1(S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))\ldots \\ & \ldots+C\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)=-S(\theta_3+\theta_4) \end{aligned}$$

$$f_{22}(o)=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3))\ldots$$
$$\ldots-C\theta_1(S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)) \;=$$
$$C(\theta_3+\theta_4)$$
$$f_{23}(o)=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z+L_1 C\theta_2 t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2(C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3))\ldots$$
$$\ldots+S\theta_1 C\theta_2(S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3))\ldots$$
$$\ldots+S\theta_2(-C\theta_2 S\theta_3)=0$$

$$f_{21}(a)=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2(C\theta_1 C\theta_2)+C\theta_2 S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)+S\theta_2(S\theta_2)=0$$
$$f_{22}(a)=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t=S\theta_1(C\theta_1 C\theta_2)-C\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)=0$$
$$f_{23}(a)=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad =$$
$$C\theta_1 S\theta_2(C\theta_1 C\theta_2)+S\theta_2 S\theta_1(S\theta_1 C\theta_2)-C\theta_2(S\theta_2)=1$$

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 x-S\theta_2 S\theta_1 y+C\theta_2 z-(L'_2+L_1 C\theta_2)t \quad =$$
$$-C\theta_1 S\theta_2(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)\ldots$$
$$-S\theta_2 S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)\ldots$$
$$\ldots+C\theta_2(L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4)=r_4 C(\theta_3+\theta_4)+r_3 C\theta_3$$
$$f_{22}(p)=S\theta_1 x-C\theta_1 y-L_2 t \quad =$$
$$S\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)\ldots$$
$$\ldots-C\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)\ldots$$
$$\ldots-L_2=r_4 S(\theta_3+\theta_4)+r_3 S\theta_3$$
$$f_{23}(p)=C\theta_1 C\theta_2 x+C\theta_2 S\theta_1 y+S\theta_2 z-L_1 S\theta_2 t \quad =$$
$$C\theta_1 C\theta_2(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)\ldots$$
$$\ldots+C\theta_2 S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)\ldots$$
$$\ldots+S\theta_2(L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4)-L_1 S\theta_2=L_3$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar $P(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

De ello, se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & P_x \\ . & . & . & P_y \\ . & . & . & P_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \quad =$$
$$\begin{pmatrix} . & . & . & -C\theta_1 S\theta_2 P_x-S\theta_2 S\theta_1 P_y+C\theta_2 P_z-(L'_2+L_1 C\theta_2) \\ . & . & . & S\theta_1 P_x-C\theta_1 P_y-L_2 \\ . & . & . & C\theta_1 C\theta_2 P_x+C\theta_2 S\theta_1 P_y+S\theta_2 P_z-L_1 S\theta_2 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^2A_3\,{}^3A_4 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) = L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L_3 C\theta_3$$
$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L_3 S\theta_3$$
$$f_{23}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_1 , θ_2 , θ_3 y θ_4 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, P_x , P_y y P_z .
Y como puede apreciarse, resulta imposible dado que existe una dependencia completa y compleja entre los diferentes ángulos de los motores.

Se podría predeterminar que θ_1 estuviera en la dirección del punto utilizando para aproximarse al plano de ataque ($\theta_1 = atan(P_y / P_x)$) y que se alcanzara el punto destino a través de los otros motores. De hecho, una vez predeterminado, la tercera ecuación quedaría:

$$f_{23}(p)=C\theta_1 C\theta_2 P_x + C\theta_2 S\theta_1 P_y + S\theta_2 P_z - L_1 S\theta_2 = L_3$$
$$(C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y) C\theta_2 + (P_z - L_1) S\theta_2 = L_3$$

Y con la ecuación trascendente:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

Daría como resultado:

$$\theta_2 = atan2((P_z - L_1), (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)) \pm atan2(\sqrt{((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y))^2 + ((P_z - L_1))^2 - L_3^2}, L_3)$$

Y con la primera y segunda ecuaciones:

$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L_3 S\theta_3$$

De la segunda ecuación:

$$f_{22}(p)=S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 = L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L_3 S\theta_3$$
$$\theta_4 = \arcsin((S\theta_1 P_x - C\theta_1 P_y - L_2 - L_3 S\theta_3)/L_4) - \theta_3$$

de forma similar, con la primera ecuación:

$$f_{21}(p)=-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) = L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L_3 C\theta_3$$
$$\theta_4 = \arccos((-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) - L_3 C\theta_3)/L_4) - \theta_3$$

De hecho, si se hace un resumen de las diferentes partes del problema:

- El ángulo θ_1 se ha predeterminado mediante P_x y P_y :
  $\theta_1 = atan(P_y / P_x)$
- θ_2 mediante la ecuación:

$$\theta_2 = atan2((P_z - L_1), (C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y)) \pm atan2(\sqrt{((C\theta_1 P_x + S\theta_1 P_y))^2 + ((P_z - L_1))^2 - L_3^2}, L_3)$$

- θ_3 aparentemente no se podría calcular
- θ_4 quedaría en función de θ_3 mediante la ecuación:

$$\theta_4 = \arccos((-C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) - L_3 C\theta_3)/L_4) - \theta_3$$

Sin embargo, los motores 3 y 4 se pueden resolver a través de un modelo SCARA, siempre y cuando se conozcan los datos de la posición del extremo del brazo y de la base del mismo.
El extremo del brazo sería el correspondiente al punto a alcanzar en el problema.
En cuanto al punto base de la articulación 3, se podría calcular, como en el caso "Par de articulaciones 1-2, con giro de 90º" calculando las matrices expuestas en la igualdad:

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso la matriz T se calcularía a partir de las dos primeras articulaicones:

$$^0A_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^0A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [^1A_2]^{-1} = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_2 = {}^0A_1 {}^1A_2$$

$$T = {}^0A_2 = \begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & d_2 S\theta_1 - r_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & d_1 + r_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Datos: $d_1 = L_1$, $d_2 = L_2$ y $r_2 = L'_2$

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto sería:

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}, P_{3z})=(L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2)$$

Por tanto, como sí se conoce la posición de la base de la articulación 3, y también la posición a alcanzar por el extremo del brazo en la articulación 4 ($L_4 + L_5$, L_4 o la resta de los puntos/vectores que intervienen en el cálculo ($P_4 - P_3$)), ya tenemos la posibilidad de resolver el problema.

E incluso, como los tres últimos motores del problema completo son paralelos entre sí, se podría aplicar la solución comentada en "Subproblema de articulaciones 3-4-5" como reflejo del apartado "Intento 7 – A través del cálculo derivado del modelo SCARA – Solución iterativa de un paso" en el "Caso 4-2 - Tres motores, con el primero paralelo al suelo, y el resto paralelos al primero". Puede verse un análisis sobre las posibles soluciones en "Robotics 1 - Prof. De Luca Lecture 18 (7 Nov 2014) – Inverse kinematics" [WWWyoutubeDoc91] (Tiempo= 49:32).

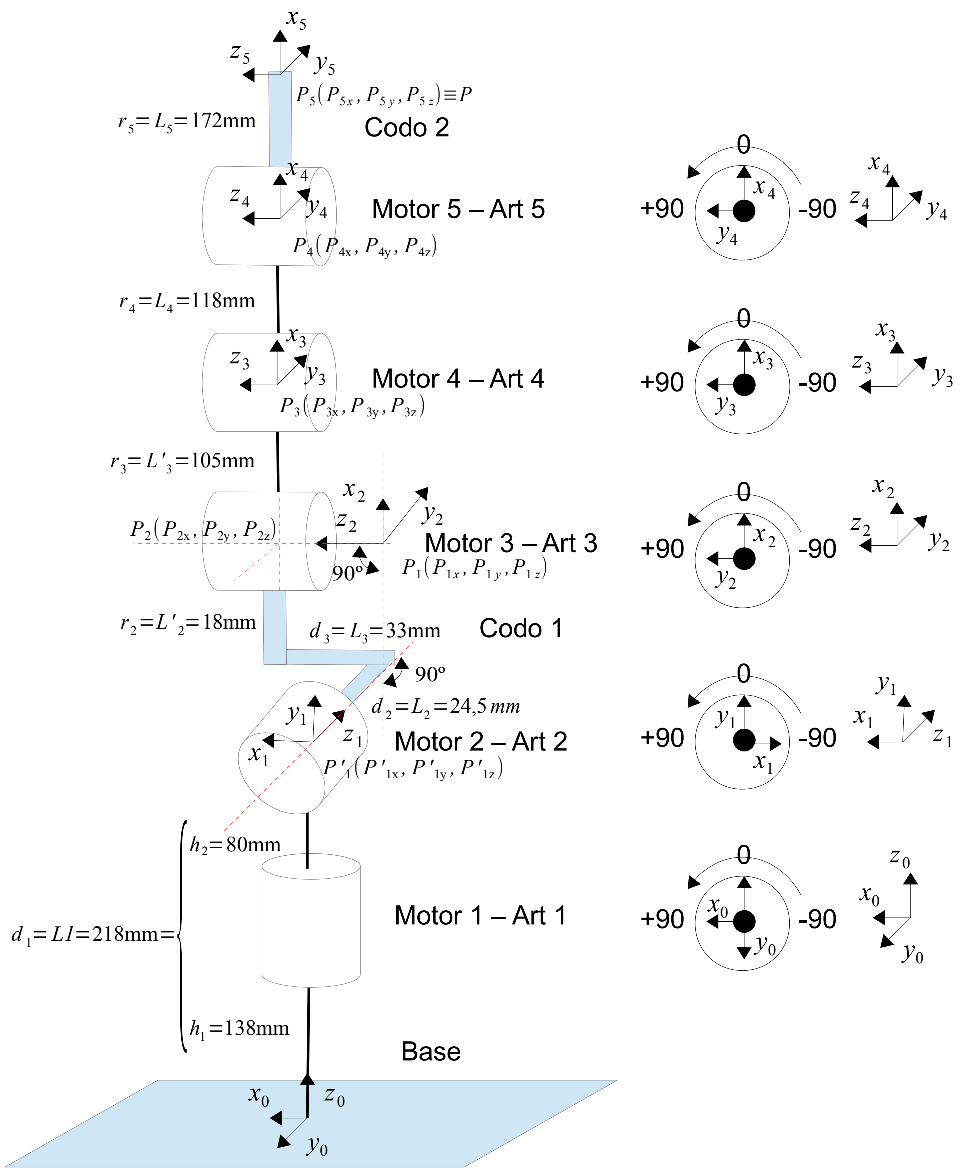

Ilustración 14: Brazo de prueba para presentación de TFG (Problema desacoplado)

Parece evidente que los problemas con una cantidad elevada de motores son, en su gran mayoría, inabordables desde el punto de vista analítico, y muy difícilmente desde el punto de vista geométrico.
Por ello se va a tratar de aplicar una solución basada en el desacoplamiento en subproblemas, y de esta forma, tratar de resolver subproblemas más sencillos, con una solución alcanzable a través de un modelo analítico.
En este caso, se va a realizar un análisis previo del problema, para elegir un desacople acertado con los diferentes subproblemas que lo componen.

Parece lógico pesar que los motores 3, 4 y 5 son capaces de alcanzar cualquier punto, una vez localizado el plano de ataque, en el que se pueda localizar el punto destino. Y también parece razonable pensar que los motores 1 y 2 permitirán, junto con una correcta elección de longitudes, localizar los ángulos necesarios para que, a través del grupo de motores 3, 4 y 5, pueda ser alcanzado el plano de ataque, y dentro de éste, el punto final de destino.

Por tanto, se van a tratar ambos grupos de motores por separado.

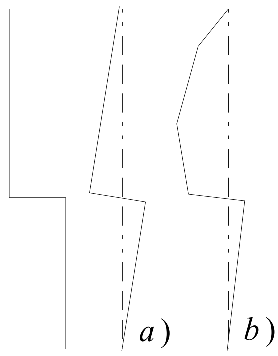

Ilustración 15: Soluciones posibles de acceso al punto de destino del Brazo de prueba para presentación de TFG

Por otra parte, a la hora de encontrar una solución, es previsible la existencia de infinitas soluciones, dependiendo de los ángulos escogidos en las diferentes articulaciones. De hecho, en la opción a) se podría acceder al punto sin hacer uso del motor de la articulación 2, al acceder al punto sólo mediante el uso de las verticales, mientras que en la opción b) se utilizan todos los motores, al acceder al punto de destino con el brazo inclinado sobre un plano de ataque oblicuo.
Por tanto, habrá que determinar cómo se quiere acceder al punto deseado para restringir, de alguna forma, el ángulo de ataque al punto.
Este análisis está de acuerdo con el análisis realizado en "Robotics 1 - Prof. De Luca Lecture 19 (10 Nov 2014) – Inverse kinematics – Solution Methods" [WWWyoutubeDoc92] (Tiempo: 12:00) en el que se describen como condiciones suficientes para resolver un modelo de este tipo que haya 3 articulaciones rotacionales consecutivas con ejes paralelos.

1 Subproblema desacoplado de articulaciones 1-2

1 Cinemática Directa

Se iniciará con las dos primeras articulaciones (motores 1 y 2), donde los motores "Motor 1" y "Motor 2" girarán, para que el Origen de Coordenadas de la articulación "3" se posicione en el punto parcial deseado P_1 , primer punto intermedio que permita alcanzar el punto final de destino con el extremo del brazo.

En este caso, se va a tomar como base el apartado "Par de articulaciones 1-2, con giro de 90º", en "7 Intento 7 - División del problema en partes simples (pares de articulaciones)", dentro del apartado "Caso 1-0 – Brazo de Pruebas para la Presentación del TFG", ya que representan el mismo problema.

Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^0A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1A_2=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & 0 & S(\pi/2+\theta_2) & r_2 C(\pi/2+\theta_2) \\ S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -C(\pi/2+\theta_2) & r_2 S(\pi/2+\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^0A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} C(\pi/2+\theta_2) & S(\pi/2+\theta_2) & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ S(\pi/2+\theta_2) & -C(\pi/2+\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso los ángulos son la suma de dos ángulos, luego, aplicando las razones trigonométricas $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)$ y $\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)$, los elementos incluidos en estas matrices serían:

$$\cos((\pi/2)+(\theta_2))=\cos(\pi/2)\cos(\theta_2)-\sin(\pi/2)\sin(\theta_2)=0*\cos(\theta_2)-1*\sin(\theta_2)=-\sin(\theta_2)$$
$$\sin((\pi/2)+(\theta_2))=\sin(\pi/2)\cos(\theta_2)+\cos(\pi/2)\sin(\theta_2)=1*\cos(\theta_2)+0*\sin(\theta_2)=\cos(\theta_2)$$

Y las matrices ${}^1A_2$ y $[{}^1A_2]^{-1}$ afectadas anteriores se convierten en:

$${}^1A_2=\begin{pmatrix}-S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2S\theta_2\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2\\ 0 & 1 & 0 & d_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad [{}^1A_2]^{-1}=\begin{pmatrix}-S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2\\ 0 & 0 & 1 & -d_2\\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$\begin{pmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\\ 1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_x & o_x & a_x & P_x\\ n_y & o_y & a_y & P_y\\ n_z & o_z & a_z & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^0A_1\,{}^1A_2$.

$$T={}^0A_2={}^0A_1\,{}^1A_2=\begin{pmatrix}C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0\\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & d_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2S\theta_2\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2\\ 0 & 1 & 0 & d_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}-C\theta_1S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1C\theta_2 & d_2S\theta_1-r_2C\theta_1S\theta_2\\ -S\theta_2S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1C\theta_2 & -r_2S\theta_2S\theta_1-d_2C\theta_1\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & d_1+r_2C\theta_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P(x,y,z)=\begin{pmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\\ 1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C\theta_1S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1C\theta_2 & L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2\\ -S\theta_2S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1C\theta_2 & -L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1+L'_2C\theta_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}n_x & o_x & a_x & P_x\\ n_y & o_y & a_y & P_y\\ n_z & o_z & a_z & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\\ r_w\\ 1\end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de

Coordenadas de la Base del problema completo (${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x}, {}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1z})$: P_1 respecto a $O-XYZ$), se aplicaría:

$$ {}^{O}P_1({}^{O}P_{1x}, {}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O}P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O}P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O}P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} $$

$$ \begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{O}P_{1x} \\ {}^{O}P_{1y} \\ {}^{O}P_{1z} \\ 1 \end{pmatrix} $$

Y por tanto, el punto sería:

$$ {}^{O}P_1({}^{O}P_{1x}, {}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2) $$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).

En este caso, se va a tomar como base el apartado "Par de motores 1-2", en "Intento 8 – División del problema en partes simples (pares de articulaciones)", dentro de "Caso 4.2", ya que representan el mismo problema, siempre que se tenga en cuenta el desplazamiento en el plano X, Y del resto de los motores (plano de ataque) hasta alcanzar el punto final de destino. Por tanto, esa distancia en el plano X, Y será la distancia total del punto P en el plano de la Base.

La matriz calculada en Cinemática Directa se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio, una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo.
Sin embargo, en este punto aparece un elemento no considerado hasta ahora, la determinación de las longitudes con las que se calcularán, tanto las ecuaciones de los ángulos, como la posición del punto intermedio ${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x}, {}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1z})$. De esta forma, será el propio modelo el que determine cómo se definirán esas distancias. Así, las diferentes posibilidades se muestran en la siguiente imagen.

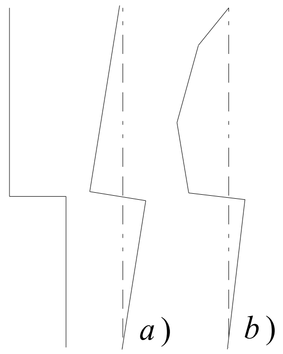

Ilustración 16: Soluciones posibles de acceso al punto de destino del Brazo de prueba para presentación de TFG

Puesto que hay infinitas soluciones, la decisión de cómo se ataca al punto de destino estará en manos de quien plantee el modelo a resolver.

1 Plano Vertical

Se podría optar porque la solución fuera como en el caso **a)**, lo que permitiría el acceso al punto desde la vertical, y por tanto, sin hacer uso del segundo motor. En este caso los parámetros a utilizar estarían en función del plano X, Y (parámetros $d_1 = L_1$, $d_2 = L_2$ y $r_2 = L'_2$), y el ángulo θ_1 vendría dado por las distancias en ese plano. De esta forma el ángulo θ_1 se calcularía:

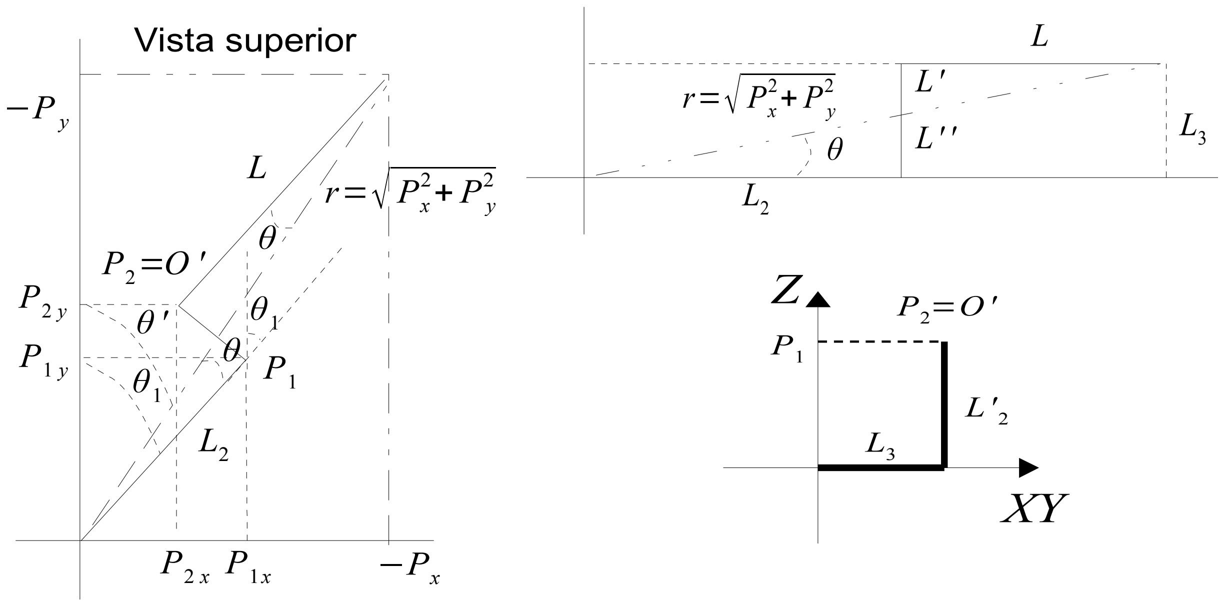

Ilustración 17: Cálculo de θ_1 para plano de ataque vertical

$$r=\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2}$$

$$\sin(\theta)=L_3/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2}$$

$$\theta=\arcsin\left(L_3/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2}\right)$$

$$\sin(\theta')={}^{O}P_x/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2}$$

$$\theta'=\arcsin\left({}^{O}P_x/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2}\right)$$

$$\theta_1=\theta'+\theta=\arcsin\left({}^{O}P_x/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2}\right)+\arcsin\left(L_3/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2}\right)$$
$$\theta_2=0$$

Y en cuanto a las longitudes que servirán para la resolución del resto de motores, P'_{xy} representará la componente en el plano X,Y (suma en el plano X,Y de las longitudes L'_3, L_4 y L_5), mientras que, la componente P'_z se calculará como la altura en relación al nuevo origen de Coordenadas, situado en el motor 3:

$$tg(\theta)=L''/L_2$$
$$L''=L_2 tg(\theta)$$

$$L_3=L'+L''$$
$$L'=L_3-L''=L_3-L_2 tg(\theta)$$

$$tg(\theta)=L'/L$$
$$L=L'/tg(\theta)$$

$${}^{O}P_{xy}=L=L'/tg(\theta)=(L_3-L_2 tg(\theta))/tg(\theta)$$

Y, aún queda resolver un problema con la localización del Origen de Coordenadas del tercer motor a la hora de calcular los ángulos θ_3, θ_4 y θ_5 (${}^{O}P_1$), y la localización del punto que sirva como Origen de Coordenadas para la resolución del segundo grupo de motores, en el mismo plano de ataque (${}^{O}P_2$).

$${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x},{}^{O}P_{1y},{}^{O}P_{1z})=(L_2\sin(\theta_1),L_2\cos(\theta_1),L_1+L'_2)$$
$${}^{O}P_2({}^{O}P_{2x},{}^{O}P_{2y},{}^{O}P_{2z})=(L_2\sin(\theta_1)-L_3\cos(\theta_1),L_2\cos(\theta_1)+L_3\sin(\theta_1),L_1+L'_2)$$

Por tanto, la localización del punto final de destino P respecto al Origen de Coordenadas real del segundo grupo de motores $O'-UVW$ (${}^{1}P$: ${}^{O}P$ respecto a ${}^{O}P_1$) sería:

(${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x},{}^{O}P_{1y},{}^{O}P_{1z})$: P_1 respecto a $O-XYZ$)

$${}^{1}P={}^{1}P({}^{1}P_x,{}^{1}P_y,{}^{1}P_z)={}^{O}P({}^{O}P_x,{}^{O}P_y,{}^{O}P_z)-{}^{O}P_1(P_{1x},P_{1y},P_{1z}) =$$
$$({}^{O}P_x-L_2\sin(\theta_1),{}^{O}P_y-L_2\cos(\theta_1),{}^{O}P_z-L_1-L'_2)$$

Y la localización del punto final de destino P respecto al Origen de Coordenadas virtual del segundo grupo de motores ${}^{O}P_2$ (${}^{2}P$: ${}^{O}P$ respecto a ${}^{O}P_2$) sería:

$${}^{2}P={}^{2}P({}^{2}P_x,{}^{2}P_y,{}^{2}P_z)={}^{O}P(P_x,P_y,P_z)-{}^{O}P_2(P_{2x},P_{2y},P_{2z}) =$$
$$({}^{O}P_x-(L_2\sin(\theta_1)-L_3\cos(\theta_1)),{}^{O}P_y-(L_2\cos(\theta_1)+L_3\sin(\theta_1)),{}^{O}P_z-(L_1+L'_2)) =$$
$$({}^{O}P_x-L_2\sin(\theta_1)+L_3\cos(\theta_1),{}^{O}P_y-L_2\cos(\theta_1)-L_3\sin(\theta_1),{}^{O}P_z-L_1-L'_2)$$

En resumen:

$$\theta_1=\theta'+\theta=\arcsin\left({}^{O}P_x/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2}\right)+\arcsin\left(L_3/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2}\right)$$
$$\theta_2=0$$
$${}^{O}P_{xy}=L=L'/tg(\theta)=(L_3-L_2 tg(\theta))/tg(\theta)$$

${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x}, {}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1z}) = (L_2 \sin(\theta_1), L_2 \cos(\theta_1), L_1 + L'_2)$
${}^{O}P_2({}^{O}P_{2x}, {}^{O}P_{2y}, {}^{O}P_{2z}) = (L_2 \sin(\theta_1) - L_3 \cos(\theta_1), L_2 \cos(\theta_1) + L_3 \sin(\theta_1), L_1 + L'_2)$
${}^{O}P$ respecto a ${}^{O}P_1$:
${}^{1}P = {}^{1}P({}^{1}P_x, {}^{1}P_y, {}^{1}P_z) = ({}^{O}P_x - L_2 \sin(\theta_1), {}^{O}P_y - L_2 \cos(\theta_1), {}^{O}P_z - L_1 - L'_2)$
${}^{O}P$ respecto a ${}^{O}P_2$:
${}^{2}P = {}^{2}P({}^{2}P_x, {}^{2}P_y, {}^{2}P_z) = ({}^{O}P_x - L_2 \sin(\theta_1) + L_3 \cos(\theta_1), {}^{O}P_y - L_2 \cos(\theta_1) - L_3 \sin(\theta_1), {}^{O}P_z - L_1 - L'_2)$

Luego ya se han calculado los ángulos θ_1 y θ_2 y se tiene la longitud L de la distancia en la base para el siguiente grupo de motores, en el caso de aproximación al punto de destino por un plano vertical, así como la relación de puntos y distancias necesarias.

2 Plano Oblicuo

También se podría optar porque la solución fuera como en el caso **b)**, lo que permitiría el acceso al punto desde un plano oblicuo, y por tanto, haciendo uso del segundo motor. En este caso los parámetros a utilizar estarían en función del plano X, Y y del ángulo de ataque que se definiera por diseño (parámetros $d_1 = L_1$, $d_2 = L_2$ y $r_2 = L'_2$).
De esta forma, el ángulo θ_1 se calcularía como resultado de la elección del ángulo de ataque escogido en el segundo grupo de motores.

En este caso, habrá que despejar θ_1 en función de θ_2 , donde este segundo angulo θ_2 determinará un mayor o menor ángulo del plano de ataque, desde la vertical, sobre el punto de destino. Así si se busca una mayor acercamiento del ángulo del plano de ataque a la horizontal, se necesita aumentar θ_2 , y si, como en el caso anterior, como caso extremo, se quiere que el ángulo de ataque sea vertical, $\theta_2 = 0$.

Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias, incluidas en la igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1} T = {}^{1}A_2$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i . Así, se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^{0}A_1]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{1}A_2 = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^{0}A_2=\begin{pmatrix}-C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & d_2 S\theta_1 - r_2 C\theta_1 S\theta_2\\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 S\theta_1 - d_2 C\theta_1\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & d_1 + r_2 C\theta_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_x & o_x & a_x & P_x\\ n_y & o_y & a_y & P_y\\ n_z & o_z & a_z & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & P_x\\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & P_y\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_1=L_1$, $d_2=L_2$ y $r_2=L'_2$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix}C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -L_1\\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2\\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -L_1\\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & P_x\\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & P_y\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & P_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$${}^{1}A_2=\begin{pmatrix}-S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2\\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2 C\theta_2\\ 0 & 1 & 0 & L_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^{0}A_1)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix}f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p)\\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p)\\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p)\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=C\theta_1 x+S\theta_1 y$$
$$f_{12}=z-L_1 t$$
$$f_{13}=S\theta_1 x-C\theta_1 y$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^1A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -L'_2S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L'_2C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=-C\theta_1 C\theta_1 S\theta_2-S\theta_1 S\theta_2 S\theta_1=-S\theta_2$$
$$f_{12}(n)=z-L_1 t=C\theta_2$$
$$f_{13}(n)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=-S\theta_1 C\theta_1 S\theta_2+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_1=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1 S\theta_1+S\theta_1(-C\theta_1)=C\theta_1 S\theta_1-C\theta_1 S\theta_1=0=0$$
$$f_{12}(o)=z-L_1 t=0=0$$
$$f_{13}(o)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1 S\theta_1-C\theta_1(-C\theta_1)=1=1$$

$$f_{11}(a)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1 C\theta_1 C\theta_2+S\theta_1 S\theta_1 C\theta_2=C\theta_2(C\theta_1 C\theta_1+S\theta_1 S\theta_1)=C\theta_2$$
$$f_{12}(a)=z-L_1 t=S\theta_2$$
$$f_{13}(a)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1 C\theta_1 C\theta_2-C\theta_1 S\theta_1 C\theta_2=0$$

$$f_{11}(p)=C\theta_1 x+S\theta_1 y=C\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2)+S\theta_1(-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1)\ldots\quad=$$
$$\ldots C\theta_1 L_2 S\theta_1-C\theta_1 L'_2 C\theta_1 S\theta_2-S\theta_1 L'_2 S\theta_2 S\theta_1-S\theta_1 L_2 C\theta_1\ldots\quad=$$
$$\ldots-L'_2 S\theta_2((C\theta_1)^2+(S\theta_1)^2)=-L'_2 S\theta_2$$
$$f_{12}(p)=z-L_1 t=L_1+L'_2 C\theta_2-L_1=L'_2 C\theta_2$$
$$f_{13}(p)=S\theta_1 x-C\theta_1 y=S\theta_1(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2)+C\theta_1(L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1)\ldots\quad=$$
$$S\theta_1 L_2 S\theta_1-S\theta_1 L'_2 C\theta_1 S\theta_2+C\theta_1 L'_2 S\theta_2 S\theta_1+C\theta_1 L_2 C\theta_1\ldots\quad=$$
$$\ldots L_2((S\theta_1)^2+(C\theta_1)^2)-S\theta_1 L'_2 C\theta_1 S\theta_2+C\theta_1 L'_2 S\theta_2 S\theta_1=L_2$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar ${}^OP_1({}^OP_{1x},{}^OP_{1y},{}^OP_{1z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & {}^OP_{1x} \\ . & . & . & {}^OP_{1y} \\ . & . & . & {}^OP_{1z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^0A_1)^{-1}\,T=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & {}^OP_{1x} \\ . & . & . & {}^OP_{1y} \\ . & . & . & {}^OP_{1z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}\quad=$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_1 P_{1x} + S\theta_1 P_{1y} \\ . & . & . & P_{1z} - L_1 \\ . & . & . & S\theta_1 P_{1x} - C\theta_1 P_{1y} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^1A_2 = \begin{pmatrix} . & . & . & -L'_2 S\theta_2 \\ . & . & . & L'_2 C\theta_2 \\ . & . & . & L_2 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_1 {}^O P_{1x} + S\theta_1 {}^O P_{1y} = -L'_2 S\theta_2$$
$${}^O P_{1z} - L_1 = L'_2 C\theta_2$$
$$S\theta_1 {}^O P_{1x} - C\theta_1 {}^O P_{1y} = L_2$$
$$\ldots$$

Ahora, en una situación normal, se calcularían los valores de θ_1 y θ_2, en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, ${}^O P_{1x}$ y ${}^O P_{1y}$, comenzando por θ_1. Para ello, con la tercera ecuación:

$$S\theta_1 {}^O P_{1x} - C\theta_1 {}^O P_{1y} = L_2$$
$$-{}^O P_{1y} C\theta_1 + {}^O P_{1x} S\theta_1 = L_2$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinaría el ángulo θ_1:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

$$\theta_1 = atan2({}^O P_{1x}, -{}^O P_{1y}) \pm atan2(\sqrt{(-{}^O P_{1y})^2 + ({}^O P_{1x})^2 - (L_2)^2}, L_2)$$

Y con la primera ecuación:

$$C\theta_1 {}^O P_{1x} + S\theta_1 {}^O P_{1y} = -L'_2 S\theta_2$$
$$\theta_2 = \arcsin((C\theta_1 {}^O P_{1x} + S\theta_1 {}^O P_{1y}) / (-L'_2))$$

O también desde la segunda ecuación:

$${}^O P_{1z} - L_1 = L'_2 C\theta_2$$
$$\theta_2 = \arcsin(({}^O P_{1z} - L_1) / L'_2)$$

Luego, ya estarían determinados los ángulos necesarios en ambas articulaciones, para llegar al punto ${}^O P_1({}^O P_{1x}, {}^O P_{1y}, {}^O P_{1z})$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto.

Pero, en el caso de querer determinar por diseño del problema un ángulo θ_2 de forma previa al cálculo del resto de ángulos, se calcularía de forma diferente. Así, con la primera ecuación:

$$C\theta_1 {}^O P_{1x} + S\theta_1 {}^O P_{1y} = -L'_2 S\theta_2$$

Y se determinará el ángulo θ_1 a través de la siguiente ecuación trascendente :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Leftrightarrow \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$
$$\theta_1 = atan2({}^O P_{1y}, {}^O P_{1x}) \pm atan2(\sqrt{({}^O P_{1x})^2 + ({}^O P_{1y})^2 - (-L'_2 S\theta_2)^2}, -L'_2 S\theta_2) \quad *$$

De esta forma, θ_2 se establecería de forma previa, a la hora de generar el propio diseño del modelo, y se obtendría θ_1 en función de θ_2 .

Pero, aún queda resolver un problema con las distancias como ocurriera el en caso a). En este caso, se trataría de encontrar, por una parte, la distancia entre el punto final de destino P y el punto intermedio ${}^{O}P_1$, el Origen de Coordenadas del motor 3 en el problema completo, y por otra, la distancia del propio motor 3 (${}^{O}P_2$, punto donde se determinará el comienzo del brazo a analizar en el segundo grupo de motores) y el punto final de destino ${}^{O}P$. Por tanto, como ${}^{O}P_1$ ya se ha calculado con anterioridad en la resolución de la Cinemática Directa, será:

$$^{O}P_1({}^{O}P_{1x}, {}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2) \quad *$$

Y una vez determinado este punto ${}^{O}P_1$, se calculará el punto en el que se encuentra el Origen de Coordenadas virtual situado en el motor 3 ($O'-UVW$) respecto del Origen de Coordenadas de la base, $O-XYZ$, y desde el que se calcularán los nuevos datos del segundo grupo de motores (${}^{O}P_2$):

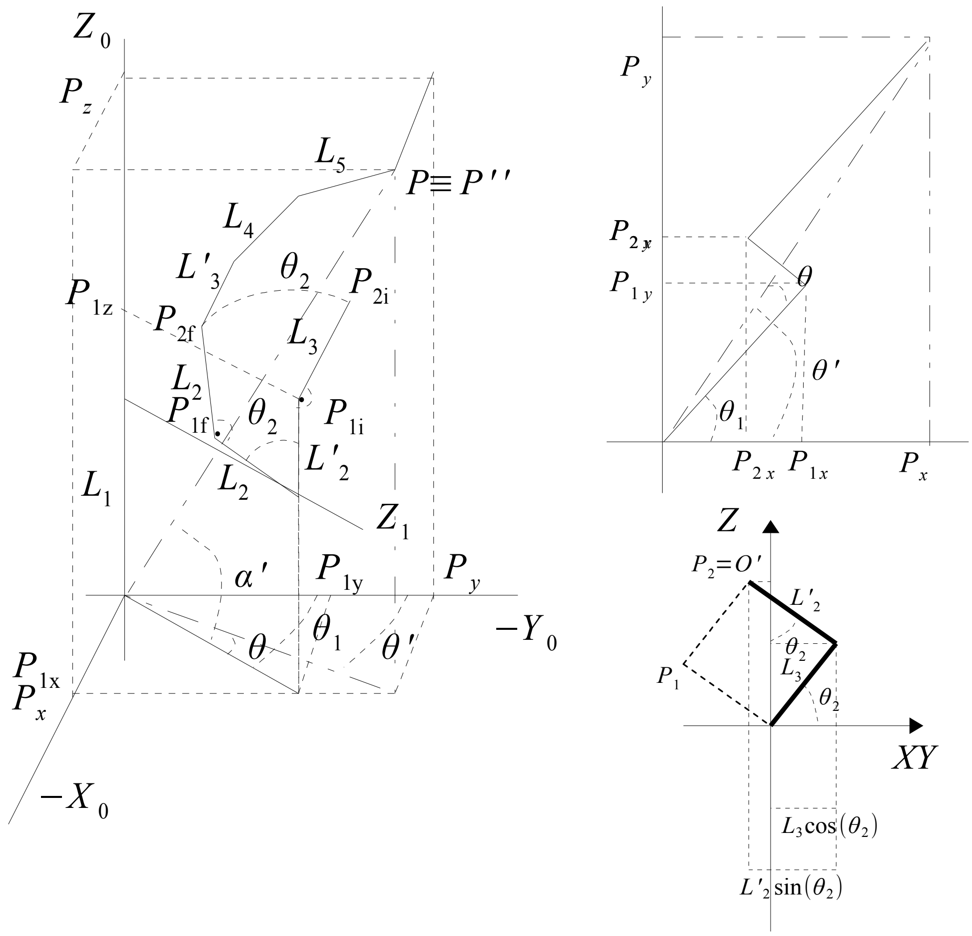

Ilustración 18: Cálculo de O' para plano de ataque oblicuo

Para ello, se calculará la posición relativa al segundo Origen de Coordenadas (O') a través del conjunto de matrices correspondiente al primer conjunto de motores, teniendo en cuenta que la distancia L_3 está situada a lo largo del eje Z_2 (coincide con el eje X_1):

$$^{O}P_2(^{O}P_{2x}, ^{O}P_{2y}, ^{O}P_{2z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & ^{O}P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & ^{O}P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & ^{O}P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (C\theta_1 C\theta_2 L_3) + (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2) \\ (S\theta_1 C\theta_2 L_3) + (-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1) \\ (S\theta_2 L_3) + (L_1 + L'_2 C\theta_2) \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto:

$$^{O}\vec{P}_2 \equiv O' \equiv \vec{P}_1 + \vec{L}_3 \equiv {}^{O}P_2(^{O}P_{2x}, ^{O}P_{2y}, ^{O}P_{2z}) =$$
$$(C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2) \quad *$$

Por tanto, la localización del punto final de destino ^{O}P respecto al Origen de Coordenadas del segundo grupo de motores $O' - UVW$ (^{1}P : ^{O}P respecto a P_1) sería:

$$^{1}P = {}^{1}P(^{1}P_x, ^{1}P_y, ^{1}P_z) = {}^{O}P(^{O}P_x, ^{O}P_y, ^{O}P_z) - {}^{O}P_1(^{O}P_{1x}, ^{O}P_{1y}, ^{O}P_{1z}) =$$
$$^{O}P(^{O}P_x, ^{O}P_y, ^{O}P_z) - (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2) =$$
$$(^{O}P_x - (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2), {}^{O}P_y - (-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1), {}^{O}P_z - (L_1 + L'_2 C\theta_2)) =$$
$$(^{O}P_x - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, {}^{O}P_y + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, {}^{O}P_z - L_1 - L'_2 C\theta_2)$$

Y la localización del punto final de destino P respecto al Origen de Coordenadas virtual del segundo grupo de motores $^{O}P_2$ (^{2}P : ^{O}P respecto a $^{O}P_2$)) sería:

$$^{2}P = {}^{2}P(^{2}P_x, ^{2}P_y, ^{2}P_z) = {}^{O}P(^{O}P_x, ^{O}P_y, ^{O}P_z) - {}^{O}P_2(^{O}P_{2x}, ^{O}P_{2y}, ^{O}P_{2z}) = {}^{O}P(^{O}P_x, ^{O}P_y, ^{O}P_z)...$$
$$...-(C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2) =$$
$$(^{O}P_x - (C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2), {}^{O}P_y - (S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1), ...)$$
$$(..., {}^{O}P_z - (S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2)) =$$
$$(^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, {}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, ...)$$
$$(..., {}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)$$

En resumen:

$\theta_1 = atan2({}^O P_{1y}, {}^O P_{1x}) \pm atan2(\sqrt{({}^O P_{1x})^2 + ({}^O P_{1y})^2 - (-L'_2 S\theta_2)^2}, -L'_2 S\theta_2)$

θ_2 Por elección en el diseño del modelo.

${}^O P_1({}^O P_{1x}, {}^O P_{1y}, {}^O P_{1z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2)$

${}^O P_2({}^O P_{2x}, {}^O P_{2y}, {}^O P_{2z}) = (C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, ..., ...)$

$(..., S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2)$

P respecto a P_1 :

${}^1P = {}^1P({}^1P_x, {}^1P_y, {}^1P_z) = ({}^O P_x - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, {}^O P_y + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, {}^O P_z - L_1 - L'_2 C\theta_2)$

P respecto a P_2 :

${}^2P = {}^2P({}^2P_x, {}^2P_y, {}^2P_z) = ({}^O P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, ...)$

$(..., {}^O P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, {}^O P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)$

Y de esta forma ya se tienen los dos ángulos, en este caso con θ_1 en función de θ_2, y el punto que representa el Origen de Coordenadas desde el tercer motor (${}^O P_2$) para simplificar el cálculo posterior del segundo grupo de motores.

Sin embargo, aunque sí parece calcular los ángulos correctamente cuando el modelo oblicuo se ejecuta con $\theta_2 = 0$, no se calculan bien cuando $\theta_2 \neq 0$, y como consecuencia, los puntos calculados mediante las ecuaciones derivadas de los parámetros de Denavit-Hartenberg tampoco coinciden.

3 Alternativa al modelo de plano oblicuo (Producto de Vectores Directores)

Sin embargo, cuando no se tiene en consideración el resto de motores, sólo se considera un punto P_2 cualquiera como punto de destino, y no se considera la necesidad de que ese punto (P_2) y el propio punto final de destino (P) se encuentren en el mismo plano, alcanzable con el segundo grupo de motores.

De esta forma, utilizando los puntos calculados:

$${}^O P_1({}^O P_{1x}, {}^O P_{1y}, {}^O P_{1z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2)$$

$${}^O P_2({}^O P_{2x}, {}^O P_{2y}, {}^O P_{2z}) = (C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2)$$

Se pueden usar características de rectas y planos perpendiculares. En este caso, que el producto de los vectores directores de dos rectas perpendiculares es nula. Por tanto, si se utiliza la recta que pasa por los puntos P y P_2 en el plano formado por el segundo grupo de motores y la recta formada por los puntos P_1 y P_2 :

$$(P - P_2)(P_2 - P_1) = 0$$

$$(P_x - P_{2x})(P_{2x} - P_{1x}) + (P_y - P_{2y})(P_{2y} - P_{1y}) + (P_z - P_{2z})(P_{2z} - P_{1z}) = 0$$

$$(P_x - (C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2))((C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2) - (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2))...$$
$$... + (P_y - (S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1))((S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1) - (-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1))...$$
$$... + (P_z - (S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2))((S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2) - (L_1 + L'_2 C\theta_2)) = 0$$

$$(P_x - (C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2))(C\theta_1 C\theta_2 L_3)...$$

$$...+(P_y-(S\theta_1 C\theta_2 L_3-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1))(S\theta_1 C\theta_2 L_3)...$$
$$...+(P_z-(S\theta_2 L_3+L_1+L'_2 C\theta_2))(S\theta_2 L_3)=0$$

$$P_x(C\theta_1 C\theta_2 L_3)-(C\theta_1 C\theta_2 L_3)^2-(L_2 S\theta_1)(C\theta_1 C\theta_2 L_3)+(L'_2 C\theta_1 S\theta_2)(C\theta_1 C\theta_2 L_3)...$$
$$...+P_y(S\theta_1 C\theta_2 L_3)-(S\theta_1 C\theta_2 L_3)^2+(L'_2 S\theta_2 S\theta_1)(S\theta_1 C\theta_2 L_3)+(L_2 C\theta_1)(S\theta_1 C\theta_2 L_3)...$$
$$...+P_z(S\theta_2 L_3)-(S\theta_2 L_3)^2-L_1(S\theta_2 L_3)-(L'_2 C\theta_2)(S\theta_2 L_3)=0$$

$$P_x(C\theta_1 C\theta_2 L_3)-(L_2 S\theta_1)(C\theta_1 C\theta_2 L_3)+(L'_2 C\theta_1 S\theta_2)(C\theta_1 C\theta_2 L_3)...$$
$$...+P_y(S\theta_1 C\theta_2 L_3)+(L'_2 S\theta_2 S\theta_1)(S\theta_1 C\theta_2 L_3)+(L_2 C\theta_1)(S\theta_1 C\theta_2 L_3)...$$
$$...+P_z(S\theta_2 L_3)-(S\theta_2 L_3)^2-L_1(S\theta_2 L_3)-(L'_2 C\theta_2)(S\theta_2 L_3)-(C\theta_2 L_3)^2=0$$

$$P_x L_3 C\theta_1 C\theta_2+P_y L_3 S\theta_1 C\theta_2+P_z L_3 S\theta_2-L_1 L_3 S\theta_2-(L_3)^2=0$$

$$(P_x L_3 C\theta_2)C\theta_1+(P_y L_3 C\theta_2)S\theta_1=-P_z L_3 S\theta_2+L_1 L_3 S\theta_2+(L_3)^2$$

$$P_x C\theta_1+P_y S\theta_1=(-P_z L_3 S\theta_2+L_1 L_3 S\theta_2+(L_3)^2)/L_3 C\theta_2$$

$$P_x C\theta_1+P_y S\theta_1=(-P_z S\theta_2+L_1 S\theta_2+L_3)/C\theta_2$$

Y utilizando una de las ecuaciones trascendentes:

$$a\cos\theta+b\sin\theta=c \Leftrightarrow \theta=atan2(b,a)\pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2},c)$$

$$\theta_1=atan2(P_y,P_x)...$$
$$...\pm atan2(\sqrt{P_x^2+P_y^2-((-P_z S\theta_2+L_1 S\theta_2+L_3)/C\theta_2)^2},(-P_z S\theta_2+L_1 S\theta_2+L_3)/C\theta_2)$$

De esta forma, se determina el ángulo θ_1 en función de θ_2 , y atendiendo a la necesidad de que los vectores directores de las dos rectas sean perpendiculares.
Así, el modelo asegura que el plano de ataque contiene el punto final de destino y el Origen de Coordenadas del segundo grupo de motores (P_2) , y que el ángulo θ_1 permite acceder a ambos puntos con ese ángulo θ_2 predeterminado.

2 Subproblema desacoplado de articulaciones 3-4-5

Una vez determinados los parámetros de los primeros dos motores, se va a resolver el siguiente grupo de motores. Y se hará de forma similar a como se hiciera, en el "Caso 4-2 - Tres motores, con el primero paralelo al suelo, y el resto paralelos al primero", y que también fuera realizado en el apartado "Subproblema de articulaciones 3-4-5", en "Intento 8 - División del problema en subproblemas (elección de tres articulaciones cualesquiera), con giro de 90º", y dentro de "Caso 1-0 – Brazo de Pruebas para la Presentación del TFG".

Ya se habían obtenido las dos igualdades correspondientes a los dos ángulos de las dos primeras articulaciones θ_1 y θ_2 , las componentes del punto de destino P en función del nuevo Origen de Coordenadas O' (P') , las componentes del punto intermedio que será el Origen de Coordenadas real del segundo grupo de motores (P_1) y las componentes del punto que servirá de base para el segundo grupo de motores que será su origen de Coordenadas virtual (P_2) .

Para el caso de un plano de ataque vertical:

$$\theta_1=\theta'+\theta=\arcsin({}^{O}P_x/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2})+\arcsin(L_3/\sqrt{({}^{O}P_x)^2+({}^{O}P_y)^2})$$
$$\theta_2=0$$
$${}^{O}P_{xy}=L=L'/tg(\theta)=(L_3-L_2 tg(\theta))/tg(\theta)$$
$${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x},{}^{O}P_{1y},{}^{O}P_{1z})=(L_2\sin(\theta_1),L_2\cos(\theta_1),L_1+L'_2)$$
$${}^{O}P_2({}^{O}P_{2x},{}^{O}P_{2y},{}^{O}P_{2z})=(L_2\sin(\theta_1)-L_3\cos(\theta_1),L_2\cos(\theta_1)+L_3\sin(\theta_1),L_1+L'_2)$$
${}^{O}P$ respecto a ${}^{O}P_1$:
$${}^{1}P={}^{1}P({}^{1}P_x,{}^{1}P_y,{}^{1}P_z)=({}^{O}P_x-L_2\sin(\theta_1),{}^{O}P_y-L_2\cos(\theta_1),{}^{O}P_z-L_1-L'_2)$$
${}^{O}P$ respecto a ${}^{O}P_2$:
$${}^{2}P={}^{2}P({}^{2}P_x,{}^{2}P_y,{}^{2}P_z)=({}^{O}P_x-L_2\sin(\theta_1)+L_3\cos(\theta_1),{}^{O}P_y-L_2\cos(\theta_1)-L_3\sin(\theta_1),{}^{O}P_z-L_1-L'_2)$$
Componente xy en segundo grupo: ${}^{O}P_{xy}=L=(L_3-L_2 tg(\theta))/tg(\theta)$ =
$$\sqrt{({}^{O}P_x-L_2\sin(\theta_1)+L_3\cos(\theta_1))^2+({}^{O}P_y-L_2\cos(\theta_1)-L_3\sin(\theta_1))^2}$$
Componente z en segundo grupo: ${}^{O'}P_z={}^{2}P_z={}^{O}P_z-L_1-L'_2$

Para el caso de un plano de ataque oblicuo:

$$\theta_1=atan2({}^{O}P_{1y},{}^{O}P_{1x})\pm atan2(\sqrt{({}^{O}P_{1x})^2+({}^{O}P_{1y})^2-(-L'_2 S\theta_2)^2},-L'_2 S\theta_2)$$
θ_2 Por elección en el diseño del modelo.
$${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x},{}^{O}P_{1y},{}^{O}P_{1z})=(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2,-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1,L_1+L'_2 C\theta_2)$$
$${}^{O}P_2({}^{O}P_{2x},{}^{O}P_{2y},{}^{O}P_{2z})=(C\theta_1 C\theta_2 L_3+L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2,\ldots,\ldots)$$
$$(\ldots,S\theta_1 C\theta_2 L_3-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1,S\theta_2 L_3+L_1+L'_2 C\theta_2)$$
P respecto a P_1 :
$${}^{1}P={}^{1}P({}^{1}P_x,{}^{1}P_y,{}^{1}P_z)=({}^{O}P_x-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2,{}^{O}P_y+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1,{}^{O}P_z-L_1-L'_2 C\theta_2)$$
P respecto a P_2 :
$${}^{2}P={}^{2}P({}^{2}P_x,{}^{2}P_y,{}^{2}P_z)=({}^{O}P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2,\ldots)$$
$$(\ldots,{}^{O}P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1,{}^{O}P_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2)$$
Componente xy en segundo grupo: $P''_{xy}=L$ =
$$\sqrt{({}^{O}P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2+({}^{O}P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1)^2}$$
Componente z en segundo grupo: ${}^{O'}P_z={}^{2}P_z={}^{O}P_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2$

Además, se podría rotar el plano de ataque sobre el eje compuesto por los puntos ${}^{O}P$ y ${}^{O}P_2$, y se observaría que la relación de ángulos θ_3 , θ_4 y θ_5 no cambiaría.

Si se observa ambos casos, en realidad, el plano vertical se obtiene con un ángulo $\theta_2=0$, por tanto, no es necesario seguir con los dos casos, sino que se puede seguir analizando un caso genérico, en este caso, con un plano de ataque oblicuo.

Por otra parte, dentro del "Caso 4-2" se han hecho una serie de análisis para resolver la Cinemática Inversa, algunos de los cuales podrían ser usados en este caso:

- Intento 1 - elementos T(1,4) y T(1,3) de la matriz T (solución dependiente)
- Intento 3 - Dos primeras filas de la primera inversa (solución dependiente)
- Intento 7 – A través del cálculo derivado del modelo SCARA – Solución iterativa de un paso

• Intento 8 – División del problema en partes simples (pares de articulaciones)

Cualquiera de estas soluciones podría ser razonable a la hora de encontrar la solución del problema actual. Sin embargo, se plantea un problema a resolver, antes de determinar la solución más razonable. En cualquiera de estos casos habrá 3 variables articulares a determinar (θ_3 , θ_4 y θ_5), y sin embargo, todas las soluciones plantearían una cierta dependencia entre estas variables. Para resolver este nuevo problema, se presenta una nueva posibilidad de configuración que debería ser resuelta por el propio diseño del modelo. En este caso, también se podría determinar el ángulo de ataque de los motores hacia el punto final de destino.

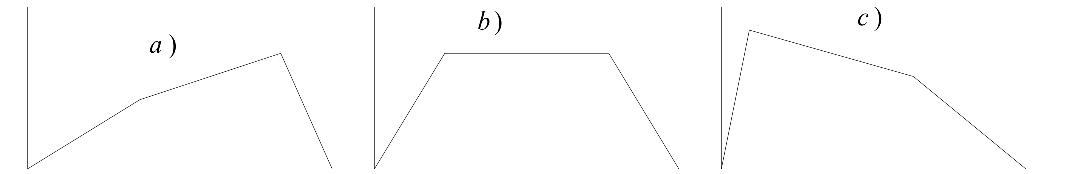

Ilustración 19: Diferentes ángulos de ataque al punto de destino para tres motores paralelos

De esta forma, se podría escoger un ángulo de ataque más plano, o más o menos agudo, siempre que el modelo a resolver cuente con más de dos elementos en paralelo, lo que supondría la posibilidad de evitar elementos que impidieran un acceso adecuado. Y junto con la posibilidad de configurar el plano de ataque al punto de destino, daría aún más posibilidades de interactuar correctamente con el elemento sobre el que se trabajara.
A efectos de resolución del problema todo dependerá de las necesidades del robot y de su entorno de trabajo, pero también podrían ser considerados otros aspectos para tomar esta decisión, como puede ser el par de los motores. En este caso, si se quisiera utilizar la arquitectura más adecuada para tener una mayor carga útil, debería hacerse un nuevo análisis de fuerzas, pero todo indica, que la solución más adecuada podría ser la b), al tener los ángulos de los motores más equilibrados entre todos ellos, y no hacer que uno de ellos trabaje con un ángulo más forzado, lo que le resultaría más costoso, por soportar un par mayor.

Por tanto, inicialmente se va a resolver la Cinemática Directa para estos tres motores como ya se hiciera en el "Caso 4-2". Y después se resolverá la Cinemática Inversa y la elección del tipo de solución para el ángulo de ataque al punto de destino.

1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{array}$$

Sin embargo, como ya se ha indicado, el desplazamiento lateral de la tercera articulación ya ha sido tenido en cuenta a la hora de calcular el plano de ataque sobre el punto de destino, por lo que no se incluirá en este análisis y, por tanto, la matriz de parámetros de DH quedará:

Art	θ_i	d_i	r_i	α_i
$2-3$	θ_3	0	L'_3	0
$3-4$	θ_4	0	L_4	0
$4-5$	θ_5	0	L_5	0

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\text{x}4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^2A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
{}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
[{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [{}^{3}A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
[{}^{4}A_5]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de Cinemática Directa en las que se representa las Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$, a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$
T={}^{2}A_5={}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5
$$

$$
\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$
T={}^{2}A_5={}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5 \;=
$$

$$
\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4-S\theta_3 S\theta_4)-S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4-C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4+C\theta_4 S\theta_3)-S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4-S\theta_3 S\theta_4) & 0 & \ldots \\ C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4+C\theta_4 S\theta_3)+S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4-S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4-S\theta_3 S\theta_4)-S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4+C\theta_4 S\theta_3) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \cdots
$$

$$
\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & r_3 C\theta_3-r_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4+C\theta_4 S\theta_3)+r_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4-S\theta_3 S\theta_4)+r_4 C\theta_3 C\theta_4-r_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & r_3 C\theta_3+r_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4+C\theta_4 S\theta_3)+r_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4-S\theta_3 S\theta_4)+r_4 C\theta_3 C\theta_4+r_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & r_4 C(\theta_3+\theta_4)+r_3 C\theta_3+r_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & r_4 S(\theta_3+\theta_4)+r_3 S\theta_3+r_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio, una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_3 = L'_3$, $r_4 = L_4$ y $r_5 = L_5$), y los ángulos deseados:

$$P(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) - S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & 0 & \ldots \\ C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \ldots$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 - L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 + L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P'_x \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P'_y \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base del segundo grupo de motores $O' - X'Y'Z'$, donde se localiza el punto P_2 , y en función de las variables locales del segundo subproblema con los tres últimos motores ($'P^{O'}$¿), se aplicaría:

$$^{O'}P'(x,y,z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P_x \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P_y \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) - S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & 0 & \ldots \\ C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \ldots$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 - L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 + L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3+L_5C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3+L_5C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{O'}P'_x \\ {}^{O'}P'_y \\ {}^{O'}P'_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa en el Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$ y en función de las variables locales del segundo subproblema con los tres últimos motores (${}^{O'}P'$), sería (Incompleto):

$${}^{O'}P'({}^{O'}P'_x, {}^{O'}P'_y, {}^{O'}P'_z) = (L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3+L_5C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ , \ldots\ , \ldots)$$
$$(\ldots\ , L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ , 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

En este punto, hay que considerar que este segundo grupo de motores no es independiente del primer grupo, y que, por tanto, cuando se vayan a determinar las distancias entre el punto final de destino y los puntos intermedios (P_3 , P_4), habrá que considerar el desplazamiento inicial del Origen de Coordenadas virtual de este segundo grupo de motores.
Este aspecto se tendrá en cuenta en el acoplamiento de las partes que conforman el problema completo.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$T = {}^2A_5 = {}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5$$
$$({}^2A_3)^{-1}T = {}^3A_5 = {}^3A_4\,{}^4A_5$$
$$({}^3A_4)^{-1}({}^2A_3)^{-1}T = {}^4A_5$$

En este caso, para ejecutar el procedimiento general, será necesario resolver la primera igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_3 . Y a continuación será necesario resolver la segunda igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, y obtener θ_4 y θ_5 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^3A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^4A_5]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P'_x \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P'_y \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^2A_5=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P'_x \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P'_y \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) - S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & 0 & \ldots \\ C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & r_3 C\theta_3 - r_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + r_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + r_4 C\theta_3 C\theta_4 - r_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & r_3 C\theta_3 + r_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + r_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + r_4 C\theta_3 C\theta_4 + r_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & r_4 C(\theta_3+\theta_4) + r_3 C\theta_3 + r_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & r_4 S(\theta_3+\theta_4) + r_3 S\theta_3 + r_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & {}^{O'}P'_x \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & {}^{O'}P'_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_3=L'_3$, $r_4=L_4$ y $r_5=L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^{2}A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) - S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & 0 & \ldots \\ C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 - L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 - L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & L'_3 C\theta_3 + L_5 C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + L_5 C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + L_4 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 C\theta_4 S\theta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & {}^{O'}P'_x \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & {}^{O'}P'_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= {}^{3}A_5 = {}^{3}A_4\,{}^{4}A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 C\theta_5 - S\theta_4 S\theta_5 & -C\theta_4 S\theta_5 - C\theta_5 S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 + L_5 C\theta_4 C\theta_5 - L_5 S\theta_4 S\theta_5 \\ C\theta_4 S\theta_5 + C\theta_5 S\theta_4 & C\theta_4 C\theta_5 - S\theta_4 S\theta_5 & 0 & L_4 S\theta_4 + L_5 C\theta_4 S\theta_5 + L_5 S\theta_4 C\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias $({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}\ldots$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^{2}A_3)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11} = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t$$
$$f_{12} = -S\theta_3 x + C\theta_3 y$$
$$f_{13} = z$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^2A_3)^{-1} T = \begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$${}^3A_5 = {}^3A_4\,{}^4A_5 = \begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desde estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = C\theta_3 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) + S\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) = C(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{12}(n) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = -S\theta_3 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) + C\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) = S(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{13}(n) = z = 0$$

$$f_{11}(o) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = C\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) + S\theta_3 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) = -S(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{12}(o) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = -S\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) + C\theta_3 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) = C(\theta_4+\theta_5)$$
$$f_{13}(o) = z = 0$$

$$f_{11}(a) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = 0$$
$$f_{12}(a) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = 0$$
$$f_{13}(a) = z = 1$$

$$f_{11}(p) = C\theta_3 x + S\theta_3 y - L'_3 t = C\theta_3(L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))\ldots$$
$$\ldots + S\theta_3(L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) - L'_3 = L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4$$
$$f_{12}(p) = -S\theta_3 x + C\theta_3 y = -S\theta_3(L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5))\ldots$$
$$\ldots + C\theta_3(L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)) = L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4$$
$$f_{13}(p) = z = 0$$

Y en este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar (

$^{O'}P' (^{O'}P'_x , ^{O'}P'_y , ^{O'}P'_z)$) se extraen las siguientes ecuaciones, por ser las que más fácilmente aporten la solución de los ángulos de giro buscados...:

$$({}^0A_1)^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & . & ^{O'}P'_x \\ . & . & . & ^{O'}P'_y \\ . & . & . & ^{O'}P'_z \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_3 P''_x + S\theta_3 P''_y - L'_3 \\ . & . & . & (-S\theta_3) P''_x + C\theta_3 P''_y \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} = {}^3A_5 = \begin{pmatrix} . & . & . & L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4 \\ . & . & . & L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{11}(p) = C\theta_3 \, {}^{O'}P'_x + S\theta_3 \, {}^{O'}P'_y - L'_3 = L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4$$
$$f_{12}(p) = -S\theta_3 \, {}^{O'}P'_x + C\theta_3 \, {}^{O'}P'_y = L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4$$
$$f_{13}(p) = {}^{O'}P'_z = 0$$

Ahora, habría que calcular los valores de θ_3 , θ_4 y θ_5 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, $^{O'}P'_x$ y $^{O'}P'_y$.
En el "Intento 1", la solución no resulta útil dado que, define el ángulo θ_5 en función de los otros dos ángulos, θ_3 y θ_4 , y por tanto, mantiene dos incógnitas por definir.
En el "Intento 3", la solución tampoco resulta útil dado que, también define el ángulo θ_3 en función de los otros dos ángulos, θ_4 y θ_5 , y por tanto, mantiene dos incógnitas por definir.
En cuanto al "Intento 7", podría ser usado, pero es un modelo de resolución geométrico por lo que es preferible no usarlo, ya que se están definiendo soluciones analíticas, siempre que sea posible.
Y por tanto, se resolverá mediante el procedimiento ya usado en el "Intento 8"

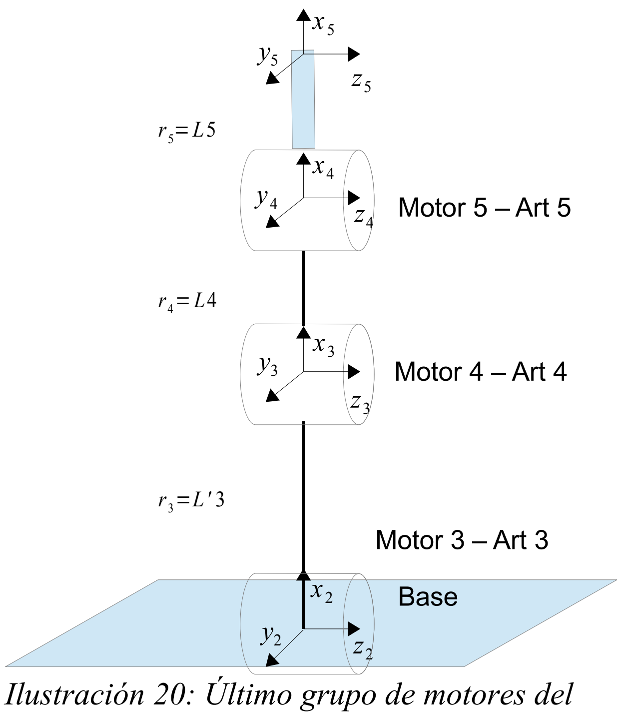

Ilustración 20: Último grupo de motores del Brazo tras desacoplar los dos primeros

Puede verse un análisis sobre las posibles soluciones en "Robotics 1 - Prof. De Luca Lecture 18 (7 Nov 2014) – Inverse kinematics" [WWWyoutubeDoc91] (Tiempo= 49:32).

1 Par de motores 4-5

En este caso se intentará analizar los problemas por separado. De esta forma, se inicia la resolución del problema independizando las dos últimas articulaciones de la primera de este segundo grupo de articulaciones (tercera articulación del problema completo) . Así, se va a independizar todo el tratamiento de matrices para resolver el problema simple representado a continuación, ya resuelto en el "Intento 8" aunque, en nuestro caso, será con las articulaciones 4 y 5.

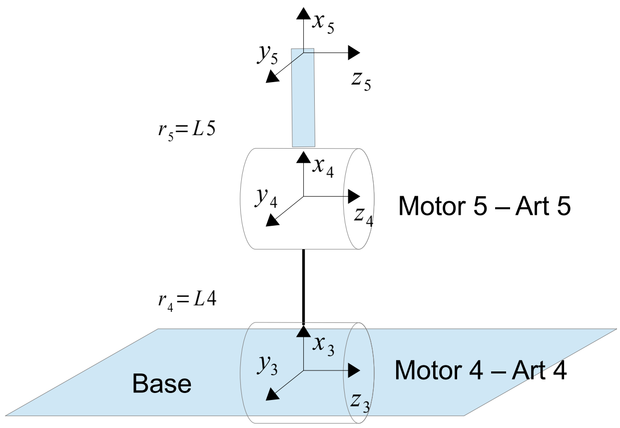

Ilustración 21: Análisis de los dos últimos motores en el último grupo de motores del Brazo tras desacoplar los dos primeros

De esta forma, el Origen de Coordenadas se considera en la Base virtual correspondiente al cuarto motor del problema completo (segundo motor en paralelo). Así, la matriz correspondiente al tercer motor determina cómo llegar a ese cuarto motor a través del desplazamiento de una distancia r_3 sobre el plano de movimiento compuesto por los ejes X', Z' :

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

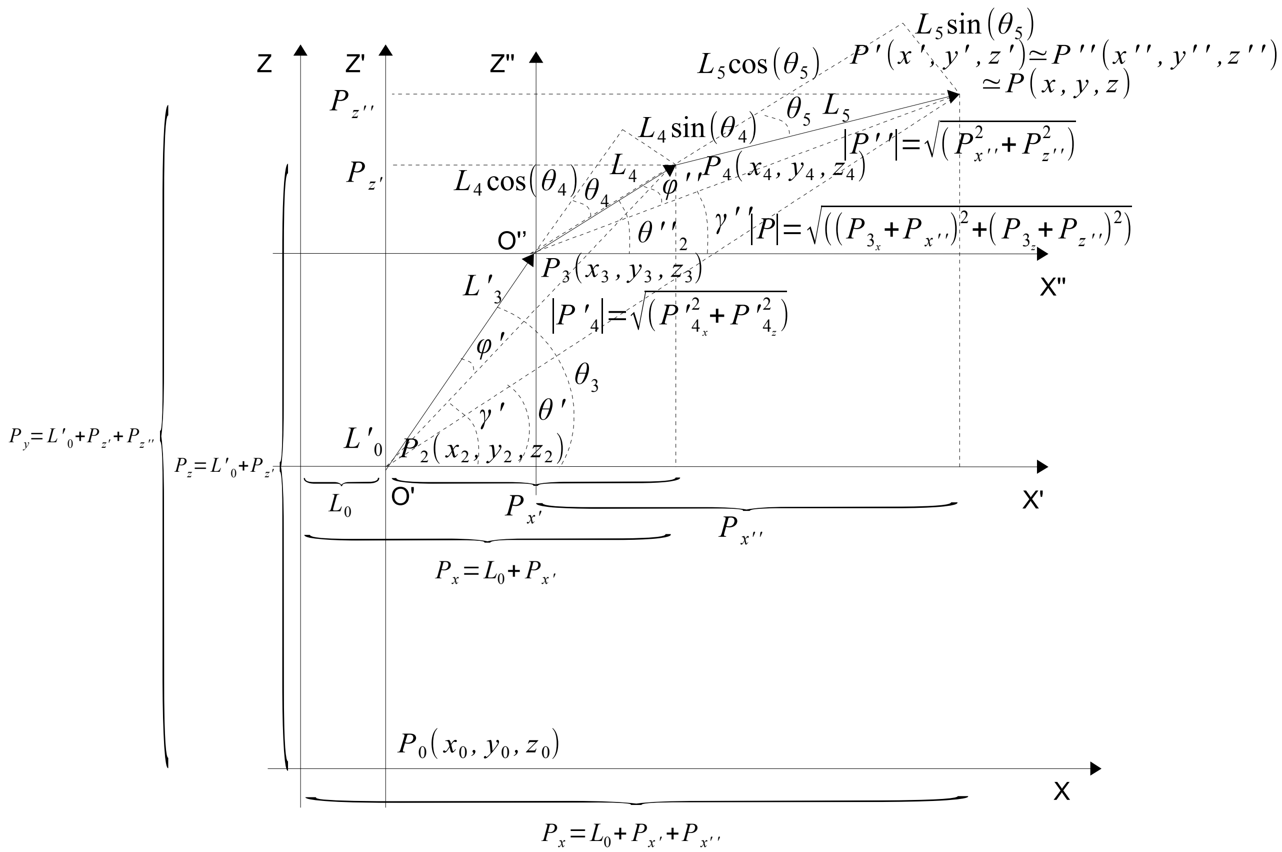

Ilustración 22: Esquema asociado a la solución a aplicar del Ejemplo 4-2, con tres motores paralelos entre sí

Por tanto, la componente ${}^{O''}P_z$ del punto P a alcanzar tendrá que disminuirse en la cantidad correspondiente a la diferencia de altura entre las Bases real y virtual ($r_3 S\theta_3$). Y lo mismo ocurre en cuanto al desplazamiento horizontal sobre el plano de movimiento ($r_3 C\theta_3$).
De esta forma, se simplifica en cálculo y las matrices resultantes.

1 Cinemática Directa

Para resolver el problema se comienza por desarrollar la parte de Cinemática Directa y, por tanto, se comenzará por determinar los parámetros de Denavit-Hartenberg.
Para ello, se establecen los ejes Z , los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & r_5 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & 0 & 0 & 105 & 0 \\ 4-5 & 0 & 0 & 290 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & \theta_5 & 0 & L_5 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p=\begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p=\begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p=\begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=[{}^{i-1}A_i]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^4A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^3A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$T={}^3A_5={}^3A_4\,{}^4A_5$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O''}P_x \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O''}P_y \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O''}P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y calculamos la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$T = {}^3A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & r_5 C(\theta_4+\theta_5) + r_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & r_5 S(\theta_4+\theta_5) + r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $r_4 = L_4$ y $r_5 = L_5$), y los ángulos deseados:

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 C(\theta_4+\theta_5) + L_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 S(\theta_4+\theta_5) + L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O''}P_x \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O''}P_y \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O''}P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P correspondiente al Origen de Coordenadas del extremo del brazo (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O' - UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base de los dos últimos motores P_3 , con las variables locales correspondientes al subconjunto de motores, e independiente (${}^3P''$: ${}^{O''}P''$: P respecto a P_3 con coordenadas de O'') , se aplicaría:

$$^{O''}P''(^{O''}P''_x, ^{O''}P''_y, ^{O''}P''_z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & ^{O''}P''_x \\ n_y & o_y & a_y & ^{O''}P''_y \\ n_z & o_z & a_z & ^{O''}P''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4 \\ L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^{O''}P''_x \\ ^{O''}P''_y \\ ^{O''}P''_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto $^{3}P''$ (P respecto a P_3 , base de los últimos dos motores, en el Sistema de Coordenadas local $O''-X''Y''Z''$) sería:

$$^{O''}P''(^{O''}P''_x\ ,\ ^{O''}P''_y\ ,\ ^{O''}P''_z) = (L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4\ ,\ L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4\ ,\ 0)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.
Es interesante comentar que la componente $^{O''}P''_z$ resulta nula por estar este segundo grupo de motores en el plano de ataque del punto final de destino.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias en las igualdades del tipo:

$$(^{3}A_4)^{-1} T = {}^{4}A_5$$

En este caso, será necesario resolver la igualdad para que, de ella se sacaran las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_2 y θ_3 .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$^{3}A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ^{4}A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[^{3}A_4]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O''}P_x^{''} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O''}P_y^{''} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O''}P_z^{''} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^1A_3 = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O''}P_x^{''} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O''}P_y^{''} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O''}P_z^{''} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & P_x^{''} \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & P_y^{''} \\ 0 & 0 & 1 & P_z^{''} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $r_4 = L_4$ y $r_5 = L_5$, se llega a la siguiente igualdad:

$$[{}^3A_4]^{-1} T = \begin{pmatrix} C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & -L_2 \\ -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4 \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -L_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_4+\theta_5) & 0 & {}^{O''}P_x^{''} \\ S(\theta_4+\theta_5) & C(\theta_4+\theta_5) & 0 & {}^{O''}P_y^{''} \\ 0 & 0 & 1 & {}^{O''}P_z^{''} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^4A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerarán las expresiones resultantes de tomar la equivalencia entre $P_x^{''2} + P_y^{''2}$ y sus correspondientes elementos de la matriz T :

$$\begin{aligned}
&P_x^{''2}+P_y^{''2} = (L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4)^2+(L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4)^2 \quad = \\
&(L_5C(\theta_4+\theta_5))^2+2(L_5C(\theta_4+\theta_5))(L_4C\theta_4)+(L_4C\theta_4)^2+(L_5S(\theta_4+\theta_5))^2 \ldots \\
&\qquad \ldots +2(L_5S(\theta_4+\theta_5))(L_4S\theta_4)+(L_4S\theta_4)^2 \quad = \\
&L_5^2((C(\theta_4+\theta_5))^2+(S(\theta_4+\theta_5))^2)+2(L_5C(\theta_4+\theta_5))(L_4C\theta_4)+L_4((C\theta_4)^2+(S\theta_4)^2)+\ldots \\
&\qquad \ldots +2(L_5S(\theta_4+\theta_5))(L_4S\theta_4) \quad = \\
&L_5^2+L_4^2+2(L_5C(\theta_4+\theta_5))(L_4C\theta_4)+2(L_5S(\theta_4+\theta_5))(L_2S\theta_4) \quad = \\
&L_5^2+L_4^2+2L_5L_4(C(\theta_4+\theta_5)C\theta_4+S(\theta_4+\theta_5)S\theta_4) \quad = \\
&L_5^2+L_4^2+2L_5L_4C(\theta_4+\theta_5-\theta_4) \quad =
\end{aligned}$$

$$L_5^2+L_4^2+2\,L_5 L_4 C\theta_5=({}^{O''}P''_x)^2+({}^{O''}P''_y)^2$$

$$\theta_5=\arccos((({}^{O''}P''_x)^2+({}^{O''}P''_y)^2-L_5^2-L_4^2)/2\,L_5 L_4) \quad *$$

Si ahora se toma la primera fila de la inversa $[{}^3A_4]^{-1}$ y se opera con la cuarta columna de T, y la segunda fila de $[{}^3A_4]^{-1}$, también con la cuarta columna de T, se obtiene:

$$-S\theta_4{}^{O''}P''_x+C\theta_4{}^{O''}P''_y=L_5 S\theta_5 \Leftrightarrow {}^{O''}P''_y C\theta_4-{}^{O''}P''_x S\theta_4=L_5 S\theta_5$$
$$C\theta_4{}^{O''}P''_x+S\theta_4{}^{O''}P''_y-L_4=L_5 C\theta_5 \Leftrightarrow {}^{O''}P''_y S\theta_4+{}^{O''}P''_x C\theta_4=L_4+L_5 C\theta_5$$

Y con la razón $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ y $a\sin\theta+b\cos\theta=d \Leftrightarrow \theta=atan2(d\,,c)-atan2(b\,,a)$:

$$\theta_4=atan2(L_4+L_5 C\theta_5,\,L_5 S\theta_5)-atan2({}^{O''}P''_x,{}^{O''}P''_y)$$

Luego, ya se han obtenido las igualdades correspondientes a los dos ángulos de las dos articulaciones:

θ_3 Por determinar
$$\theta_5=\arccos((({}^{O''}P''_x)^2+({}^{O''}P''_y)^2-L_5^2-L_4^2)/2\,L_5 L_4)$$
$$\theta_4=atan2(L_4+L_5 C\theta_5,\,L_5 S\theta_5)-atan2({}^{O''}P''_x,{}^{O''}P''_y)$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta la diferencia de altura y de desplazamiento horizontal en el plano de movimiento, sobre los que se han obtenido las ecuaciones correspondientes a θ_4 y θ_5 , por lo que, a la hora de implementar el código deberá resolverse esa diferencia.
Por otra parte, también hay que considerar que el punto ${}^{O''}P''$ (${}^{O''}P''$: ${}^3P''$) del problema simplificado en función de las componentes del Sistema de Coordenadas local $O''-X''Y''Z''$) es diferente al punto ${}^{O'}P'$ (${}^{O'}P'$: ${}^2P'$) en el subproblema completo en función de las componentes del Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$). De hecho, las componentes x'',y'' consideradas para el análisis serán determinados, en realidad, sobre el Origen de Coordenadas virtual del punto base del segundo grupo de motores P_2 ($O'-X'Y'Z'$):

$$x''=x'-L'_3 C\theta_3$$
$$y''=z'-L'_3 S\theta_3$$

El problema, en este caso, es plantear el ángulo θ_3 ya que de este ángulo dependerá el resultado del anterior cálculo de los ángulos θ_4 y θ_5 .
Y de igual forma a como se determinó en el Intento 7, el ángulo podría plantearse a través de alguna asignación razonada. Por ejemplo, para equilibrar este ángulo de forma proporcional a la relación entre la suma de todas las longitudes de los segmentos (L'_3 , L_4 y L_5) y la distancia entre los dos puntos ${}^{O'}P'$ y P_2 ($O'-X'Y'Z'$), mediante una simple razón de proporcionalidad (regla de tres):

$$L'=L'_3+L_4+L_5$$
$$\theta_{O'}=|\arccos({}^{O'}P_{xy}/L')|$$
$$\theta_3=k(L_3/L')\theta_{O'} \quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

Con θ' , como el ángulo correspondiente a vector del punto ${}^{O'}P'$ respecto al eje X' (${}^{O'}P'$

respecto a P_2 ($O'-X'Y'Z'$) por DH en Cinemática Directa) .
Por tanto, P respecto a P_2 (base de los últimos tres motores - $O'-X'Y'Z'$), como la resta entre ambos, y con datos del problema completo (${}^{O'}P$), es:

$$
\begin{aligned}
{}^{O'}P={}^{O'}P({}^{O'}P_x,{}^{O'}P_y,{}^{O'}P_z)=&({}^{O}P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2,\ldots)\\
&(\ldots,{}^{O}P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1,{}^{O}P_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2)
\end{aligned}
$$

Y que P_3 respecto a la Base del problema completo, y en función de las componentes del problema completo, en Cinemática Directa por DH:

$$
\begin{aligned}
{}^{O}P_3({}^{O}P_{3x},{}^{O}P_{3y},{}^{O}P_{3z})=&(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3,\ldots,\ldots)\\
&(\ldots,-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1,\ldots)\\
&(\ldots,\ldots,L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)
\end{aligned}
$$

Y que P respecto a P_3 (${}^{3}P$), como la resta entre ambos, y con datos del problema completo:

$$
\begin{aligned}
&{}^{3}P({}^{3}P_x,{}^{3}P_y,{}^{3}P_z)={}^{O}P({}^{O}P_x,{}^{O}P_y,{}^{O}P_z)-{}^{O}P_3({}^{O}P_{3x},{}^{O}P_{3y},{}^{O}P_{3z}) =\\
&({}^{O}P_x-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2-L_3 C\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3,\ldots)\\
&\qquad(\ldots,{}^{O}P_y+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1+L'_3 C\theta_1 S\theta_3-L_3 S\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1,\ldots)\\
&\qquad(\ldots,\ldots,{}^{O}P_z-L_1-L_3 S\theta_2-L'_2 C\theta_2-L'_3 C\theta_3 C\theta_2)
\end{aligned}
$$

Se llega a:

$$
\begin{aligned}
&|{}^{2}P_{x'y'}|=\sqrt{(({}^{2}P_x)^2+({}^{2}P_y)^2)}\ \text{(Base x'y') =}\\
&\qquad\sqrt{(({}^{O}P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2+({}^{O}P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1)^2)}\\
&\theta'=arctg({}^{2}P_x)/|{}^{2}P_{x'y'}| =\\
&\qquad arctg({}^{O}P_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2)/\sqrt{(({}^{O}P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2+({}^{O}P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1)^2)}\\
&|P|=\sqrt{((({}^{2}P_x)^2+({}^{2}P_y)^2)+(P'_{4z})^2)}=\sqrt{((|{}^{2}P_{x'y'}|)^2+(P'_{4z})^2)} =\\
&\qquad\sqrt{((|{}^{2}P_{x'y'}|)^2+({}^{O}P_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2)^2)}
\end{aligned}
$$

De esta forma, quedará determinado el conjunto de ángulos de una forma equilibrada y sin un número indeterminado de iteraciones.

Aunque este mecanismo es razonable, y también lo sería la elección del par de articulaciones 4-5, podría pensarse que lo más recomendable fuera escoger el par de articulaciones 1-2 dado que, probablemente, resolverá más problemas la predeterminación del ángulo θ_5 por ser le último ángulo que determina el ángulo de ataque al punto final de destino y, por tanto, podrá evitar obstáculos de forma más clara.

2 Par de motores 3-4

1 Cinemática Directa

Se iniciará con las dos articulaciones (motores 3 y 4), donde los motores "Motor 3" y "Motor 4" girarán para que el Origen de Coordenadas de la articulación "5" se posicione en el punto parcial deseado P_4 , punto que permita alcanzar el punto final deseado con el extremo del brazo.

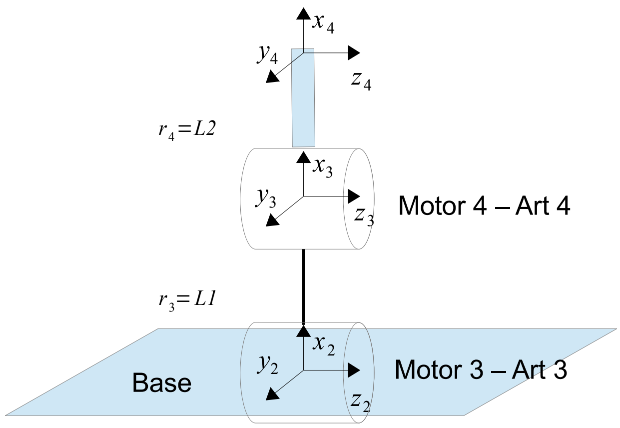

Ilustración 23: Análisis de los dos últimos motores en el último grupo de motores del Brazo tras desacoplar los dos primeros

De esta forma, el Origen de Coordenadas se considera en la Base virtual correspondiente al tercer motor del problema completo (primer motor en paralelo). Así, la matriz correspondiente al quinto motor determinará cómo llegar al punto final de destino a través del desplazamiento de una distancia r_5 con un ángulo θ_5 sobre el plano de movimiento compuesto por los ejes X'', Z'' :

$$^{4}A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

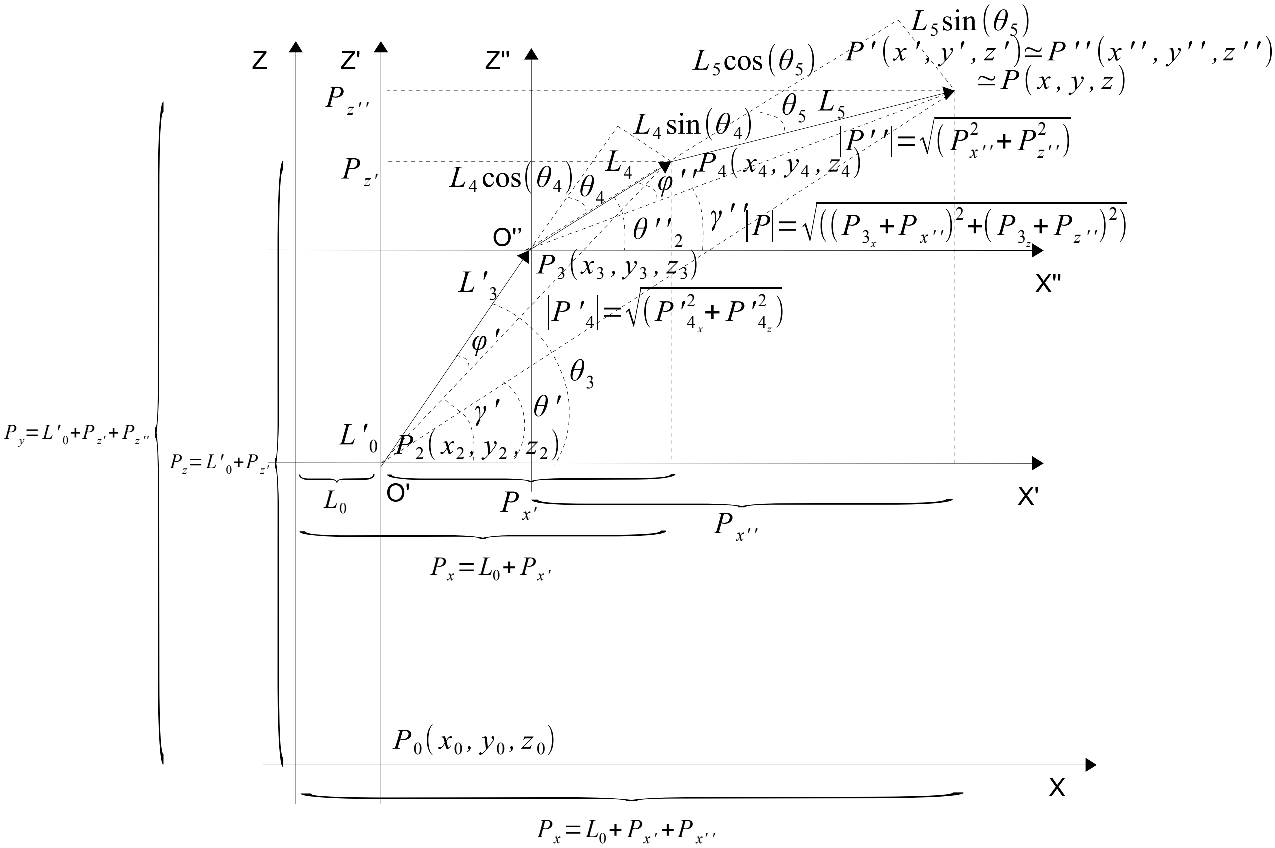

Ilustración 24: Esquema asociado a la solución a aplicar del Ejemplo 4-2, con tres motores paralelos entre sí

Para ello, se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A={}^{i-1}A_i=\begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = [{}^{i-1}A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$${}^2A_3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3A_4 = \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[{}^2A_3]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^3A_4]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de Cinemática Directa en las que se representan las coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'},r_{v0'},r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$ (${}^2P_4'$: ${}^{O'}P_4'$: P_4 respecto a P_2) :

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P_{4x}' \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P_{4y}' \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P_{4z}' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (producto no conmutativo), en este caso ${}^2A_3\,{}^3A_4$.

$$T={}^2A_4={}^2A_3\,{}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4C(\theta_3+\theta_4)+r_3C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4S(\theta_3+\theta_4)+r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_2=L_2$, $d_3=L_3$, $r_2=L'_2$ y $r_3=L'_3$), y los ángulos deseados:

$${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4\mathrm{x}},{}^{O'}P'_{4\mathrm{y}},{}^{O'}P'_{4\mathrm{z}})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_2C\theta_3 & -C\theta_2S\theta_3 & S\theta_2 & L'_2C\theta_2+L_3S\theta_2+L'_3C\theta_2C\theta_3 \\ C\theta_3S\theta_2 & -S\theta_2S\theta_3 & -C\theta_2 & L'_2S\theta_2-L_3C\theta_2+L'_3C\theta_3S\theta_2 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L_2+L'_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P'_{4\mathrm{x}} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P'_{4\mathrm{y}} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P'_{4\mathrm{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si se quisiera saber cuáles son las coordenadas del punto P_4 (($0_{u0'}$,$0_{v0'}$,$0_{w0'}$) - $O'-UVW$), respecto al Origen de Coordenadas de la Base P_2 ($O-XYZ$) en este subproblema con el tercer y cuarto motor , se aplicaría:

$${}^{O'}P_4({}^{O'}P_{4\mathrm{x}},{}^{O'}P_{4\mathrm{y}},{}^{O'}P_{4\mathrm{z}})=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P'_{4\mathrm{x}} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P'_{4\mathrm{y}} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P'_{4\mathrm{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3 \\ L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3 \\ L_3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^{O'}P'_{4\mathrm{x}} \\ {}^{O'}P'_{4\mathrm{y}} \\ {}^{O'}P'_{4\mathrm{z}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, el punto P_4 respecto al punto P_2 , como Origen de su Sistema de Coordenadas del segundo grupo de motores (Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$), a través del desarrollo por álgebra matricial, y en función de las variables correspondientes a las dos primeras articulaciones del segundo subgrupo de motores, sería:

$$^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3, L_3)$$

Donde habría que sustituir los valores de las longitudes definidas, y los ángulos deseados.

Sin embargo, hay un aspecto a tener en consideración que variará el resultado obtenido. Al inicializar los parámetros de Denavit-Hartenberg junto con las matrices, se ha considerado la distancia entre los puntos a lo largo del eje Z_2 o X_1 P_1 y P_2 ($d_3 = L_3$). Y en realidad esa distancia no debería tenerse en cuenta, puesto que se considera un sistema de 3 ejes paralelos, independiente del anterior grupo de motores. Así, esta distancia y, por tanto, el acoplamiento entre los dos grupos de motores se deberá tener en cuenta al finalizar el estudio.

De esta forma, si no se tuviera en cuenta la distancia L_3 , y se calcularan las igualdades sin esa distancia, los resultados obtenidos variarían notablemente:

$$^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P'_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P'_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P'_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 \\ L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{O'}P'_{4x} \\ {}^{O'}P'_{4y} \\ {}^{O'}P'_{4z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3, 0)$$

Y como se puede apreciar, la componente ${}^{O'}P'_{4z}$ resultaría nula puesto que la distancia L_3 recorre, precisamente el eje Z_2 del tercer motor del problema completo (primer motor del segundo grupo de motores), perpendicular al plano de ataque sobre el que se mueven todos los segmentos del brazo.

Además, hay que destacar la diferente consideración de las distancias en ejes diferentes cuando se tratan motores diferentes. Y se debe a la diferente disposición de los Sistemas de Ejes fijados en los correspondientes motores.

2 Cinemática Inversa

Una vez realizada la parte de Cinemática Directa, se puede empezar a determinar el valor de los ángulos para que el extremo del brazo se posicione en el punto del espacio deseado (Cinemática Inversa).
Para ello, se van a utilizar las matrices directas e inversas ya calculadas, dado que se tienen que resolver las ecuaciones necesarias, incluidas en la igualdad:

$$({}^2A_3)^{-1} T = {}^3A_4$$

Por tanto, de esta igualdad se sacarán las ecuaciones necesarias para resolver el sistema de ecuaciones en función de θ_i .
Para ello se partirá de los siguientes elementos, ya mostrados:

$$[{}^2A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P'_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P'_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P'_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T={}^2A_4=\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 C(\theta_3+\theta_4)+r_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & r_4 S(\theta_3+\theta_4)+r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O'}P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O'}P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O'}P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & {}^{O'}P'_{4x} \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & {}^{O'}P'_{4y} \\ 0 & 0 & 1 & {}^{O'}P'_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo las diferentes matrices, y los valores $d_3=L_3$ (se debería considerar nulo y replantear su consideración al unir los resultados parciales), $r_3=L'_3$ y $r_4=L_4$, se llega a la siguiente igualdad:

$$({}^2A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3 \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4) & -S(\theta_3+\theta_4) & 0 & {}^{O'}P'_{4x} \\ S(\theta_3+\theta_4) & C(\theta_3+\theta_4) & 0 & {}^{O'}P'_{4y} \\ 0 & 0 & 1 & {}^{O'}P'_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$${}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se considerará la matriz de patrones, resultante de la multiplicación de las inversas necesarias

$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}...$ y la matriz total T del lado izquierdo, en este caso $({}^2A_3)^{-1}T$:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta matriz se deduce que el formato final para todos los elementos de una misma línea de la matriz resultante sigue los siguientes patrones (las variables x, y, z son los elementos de la matriz T):

$$f_{11}=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t$$
$$f_{12}=-S\theta_3 x+C\theta_3 y$$
$$f_{13}=z-L_3 t$$

Y con ello se pueden reescribir las matrices anteriores como:

$$({}^2A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} f_{11}(n) & f_{11}(o) & f_{11}(a) & f_{11}(p) \\ f_{12}(n) & f_{12}(o) & f_{12}(a) & f_{12}(p) \\ f_{13}(n) & f_{13}(o) & f_{13}(a) & f_{13}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^3A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y aplicando estos formatos se llegará a las ecuaciones:

$$f_{11}(n)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t=C\theta_3((C(\theta_3+\theta_4)))+S\theta_3(S(\theta_3+\theta_4))=C\theta_4$$
$$f_{12}(n)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=-S\theta_3(C(\theta_3+\theta_4))+C\theta_3(S(\theta_3+\theta_4))=S\theta_4$$
$$f_{13}(n)=z-L_3 t=0$$

$$f_{11}(o)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t=C\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4))+S\theta_3(C(\theta_3+\theta_4))=-S\theta_4$$
$$f_{12}(o)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=-S\theta_3(-S(\theta_3+\theta_4))+C\theta_3(C(\theta_3+\theta_4))=C\theta_4$$
$$f_{13}(o)=z-L_3 t=0$$

$$f_{11}(a)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t=0$$
$$f_{12}(a)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=0$$
$$f_{13}(a)=z-L_3 t=1$$

$$f_{11}(p)=C\theta_3 x+S\theta_3 y-L'_3 t=C\theta_3(L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3)...$$
$$...+S\theta_3(L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3)-L'_3=L_4 C\theta_4$$
$$f_{12}(p)=-S\theta_3 x+C\theta_3 y=-S\theta_3(L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3)...$$
$$...+C\theta_3(L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3)=L_4 S\theta_4$$
$$f_{13}(p)=z-L_3 t=L_3-L_3=0$$

En este caso, utilizando sólo la última columna, relativa al punto a alcanzar ${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z})$:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & {}^{O'}P'_{4x} \\ . & . & . & {}^{O'}P'_{4y} \\ . & . & . & {}^{O'}P'_{4z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Se extraen las siguientes ecuaciones...

$$({}^{2}A_3)^{-1}T=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -L'_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} . & . & . & {}^{O'}P'_{4x} \\ . & . & . & {}^{O'}P'_{4y} \\ . & . & . & {}^{O'}P'_{4z} \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & C\theta_3\,{}^{O'}P'_{4x}+S\theta_3\,{}^{O'}P'_{4y}-L'_3 \\ . & . & . & -S\theta_3\,{}^{O'}P'_{4x}+C\theta_3\,{}^{O'}P'_{4y} \\ . & . & . & {}^{O'}P'_{4z}-L_3 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} . & . & . & f_{11}(p) \\ . & . & . & f_{12}(p) \\ . & . & . & f_{13}(p) \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}={}^{3}A_4=\begin{pmatrix} . & . & . & L_4C\theta_4 \\ . & . & . & L_4S\theta_4 \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

$$C\theta_3\,{}^{O'}P'_{4x}+S\theta_3\,{}^{O'}P'_{4y}-L'_3=L_4C\theta_4$$
$$-S\theta_3\,{}^{O'}P'_{4x}+C\theta_3\,{}^{O'}P'_{4y}=L_4S\theta_4$$
$${}^{O'}P'_{4z}-L_3=0$$
$$\cdots$$

Ahora hay que calcular los valores de θ_3 y θ_4 , en función de las componentes presentes del punto conocido, en este caso, ${}^{O'}P'_{4x}$ y ${}^{O'}P'_{4y}$. Para ello, se puede calcular la suma de los cuadrados de las primeras componentes del punto en T:

$$({}^{O'}P'_{4x})^2+({}^{O'}P'_{4y})^2=(L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3)^2+(L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3)^2 =$$
$$(L_4C(\theta_3+\theta_4))^2+2(L_4C(\theta_3+\theta_4))(L'_3C\theta_3)+(L'_3C\theta_3)^2...$$
$$...+(L_4S(\theta_3+\theta_4))^2+2(L_4S(\theta_3+\theta_4))(L'_3S\theta_3)+(L'_3S\theta_3)^2 =$$
$$(L_4)^2((C(\theta_3+\theta_4))^2+(S(\theta_3+\theta_4))^2)+(L'_3)^2((S\theta_3)^2+(C\theta_3)^2)...$$
$$...+2(L_4C(\theta_3+\theta_4))(L'_3C\theta_3)+2(L_4S(\theta_3+\theta_4))(L'_3S\theta_3) =$$
$$(L_4)^2+(L'_3)^2+2(L_4C(\theta_3+\theta_4))(L'_3C\theta_3)+2(L_4S(\theta_3+\theta_4))(L'_3S\theta_3) =$$
$$(L_4)^2+(L'_3)^2+2L_4L'_3(C(\theta_3+\theta_4)C\theta_3+S(\theta_3+\theta_4)S\theta_3) =$$
$$(L_4)^2+(L'_3)^2+2L_4L'_3C(\theta_3+\theta_4-\theta_3) =$$
$$({}^{O'}P'_{4x})^2+({}^{O'}P'_{4y})^2=(L_4)^2+(L'_3)^2+2L_4L'_3C\theta_4$$

$$\theta_4=\arccos((({}^{O'}P'_{4x})^2+({}^{O'}P'_{4y})^2-(L_4)^2-(L'_3)^2)/2L_4L'_3)$$

Y con la segunda ecuación:

$$-S\theta_3\,{}^{O'}P'_{4x}+C\theta_3\,{}^{O'}P'_{4y}=L_4S\theta_4$$
$${}^{O'}P'_{4y}C\theta_3+(-{}^{O'}P'_{4x})S\theta_3=L_4S\theta_4$$

Y a través de la siguiente ecuación trascendente se determinará el ángulo θ_3 :

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \;\Leftrightarrow\; \theta = atan2(b, a) \pm atan2(\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c)$$

$$\theta_3 = atan2(-{}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P_{4y})' \pm atan2(\sqrt{({}^{O'}P'_{4y})^2+(-{}^{O'}P'_{4x})^2-(L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4)$$

O también, desde la primera ecuación:

$$C\theta_3\,{}^{O'}P'_{4x} + S\theta_3\,{}^{O'}P'_{4y} - L'_3 = L_4 C\theta_4$$
$${}^{O'}P'_{4x} C\theta_3 + {}^{O'}P'_{4y} S\theta_3 = L_4 C\theta_4 + L'_3$$

$$\theta_3 = atan2({}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4x}) \pm atan2(\sqrt{({}^{O'}P'_{4x})^2+({}^{O'}P'_{4y})^2-(L_4 C\theta_4 + L'_3)^2}, L_4 C\theta_4 + L'_3)$$

Luego, ya estarán determinados los ángulos necesarios en ambas articulaciones, para llegar al punto $P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})$ en función, únicamente, de las componentes del propio punto $P_4(P_{4x}, P_{4y}, P_{4z})$ respecto a un Origen de Coordenadas local e independiente $O'-X'Y'Z'$ (${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z})$).

Y, en resumen, por álgebra matricial:

$${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3, L_3)$$
$$\theta_4 = \arccos((({}^{O'}P'_{4x})^2+({}^{O'}P'_{4y})^2-(L_4)^2-(L'_3)^2)/2 L_4 L'_3)$$
$$\theta_3 = atan2(-{}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}) \pm atan2(\sqrt{({}^{O'}P'_{4y})^2+(-{}^{O'}P'_{4x})^2-(L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4)$$

Hay que recordar que la componente ${}^{O'}P'_{4z}$ resultaría nula puesto que la distancia L_3 se considerará como punto de partida del segundo grupo de motores y, por tanto, volverá a ser contemplada al acoplar los resultados obtenidos de forma parcial. Por tanto, en resumen:

$${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3, 0)$$
$$\theta_4 = \arccos((({}^{O'}P'_{4x})^2+({}^{O'}P'_{4y})^2-(L_4)^2-(L'_3)^2)/2 L_4 L'_3)$$
$$\theta_3 = atan2(-{}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}) \pm atan2(\sqrt{({}^{O'}P'_{4y})^2+(-{}^{O'}P'_{4x})^2-(L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4)$$

Y también hay que recordar que ${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z})$ está calculado respecto al Origen de Coordenadas del subproblema completo e independiente (Sistema de Coordenadas $O-XYZ$) que define el segundo grupo de motores, y por tanto, en función de las variables correspondientes al Sistema de Coordenadas del segundo grupo de motores e independiente del primer grupo de motores, y no del Origen de Coordenadas virtual situado en $P_2(P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$ (Base del Sistema de Coordenadas $O'-X'Y'Z'$), y por tanto, también en función de las variables correspondientes al Sistema de Coordenadas del primer grupo de motores. Por tanto, de cara a calcular estos ángulos θ_3 y θ_4 se debería calcular la posición relativa de ${}^{O}P_4({}^{O}P_{4x}, {}^{O}P_{4y}, {}^{O}P_{4z})$ respecto a ${}^{O}P_2({}^{O}P_{2x}, {}^{O}P_{2y}, {}^{O}P_{2z})$ (${}^{2}P_4({}^{2}P_{4x}, {}^{2}P_{4y}, {}^{2}P_{4z})$).

Quedaría pendiente de resolver el ángulo θ_5 atendiendo a su determinación por el diseño del problema y la determinación del punto P_4 en función del punto final de destino P y del ángulo θ_5 con los que se podría determinar los ángulos θ_3 y θ_4 . Y para ello, se puede calcular, como ya se hizo en el apartado "Par de motores 1-2", en "Intento 8 - División del problema en partes simples (pares de articulaciones)", y dentro de "Caso 4-2 - Tres motores, con el primero paralelo al suelo, y el resto paralelos al primero".

θ_5 se resolvería por elección en el diseño del modelo. Por ejemplo:

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = |\arccos(P'_{4xy} / L')|$$
$$\theta_5 / \theta_{O'} = L_5 / L'$$
$$\theta_5 = k(L_5 / L')\theta_{O'} \quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

Con el ángulo θ' que se resolvería mediante:

P respecto a ${}^O P_2$, base de los últimos tres motores (${}^2 P$):
$${}^2 P_4({}^2 P_{4x}, {}^2 P_{4y}, {}^2 P_{4z}) = ({}^O P_x + C\theta_1 S\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots)$$
$$(\ldots, {}^O P_y + S\theta_1 S\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, {}^O P_z - C\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)$$
$$|{}^2 P_{x'y'}| = \sqrt{(({}^2 P_x)^2 + ({}^2 P_y)^2)} \quad \text{(Base x'y')} =$$
$$\sqrt{(({}^O P_x + C\theta_1 S\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^O P_y + S\theta_1 S\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)}$$
$$\theta' = arctg\,({}^2 P_z) / |{}^2 P_{x'y'}| =$$
$$arctg\,({}^O P_z - C\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2) / \sqrt{({}^O P_x + C\theta_1 S\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^O P_y + S\theta_1 S\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2}$$
$$|P| = \sqrt{((({}^2 P_x)^2 + ({}^2 P_y)^2) + ({}^2 P_{4z})^2)} = \sqrt{((|{}^2 P_{x'y'}|)^2 + ({}^2 P_{4z})^2)}$$

Y en cuanto al cálculo del punto $P_4(P_{4_x}, P_{4_y}, P_{4_z})$ en función del punto final de destino $P(P_x, P_y, P_z)$, punto que también coincide con $P_5(P_{5x}, P_{5y}, P_{5z})$ (${}^O P_4({}^O P_{4x}, {}^O P_{4y}, {}^O P_{4z})$), y del ángulo θ_5, en el Sistema de Coordenadas del problema completo:

$$T = {}^4 A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & {}^O P_x - {}^4 P_{5x} \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & {}^O P_y - {}^4 P_{5y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_5 C\theta_5 = {}^O P_x - {}^O P_{4x}$$
$${}^O P_{4x} = {}^O P_x - L_5 C\theta_5$$

$$L_5 S\theta_5 = {}^O P_y - {}^O P_{4y}$$
$${}^O P_{4x} = {}^O P_x - L_5 C\theta_5$$

Donde:

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = |\arccos({}^{O'} P_{xy} / L')|$$
$$\theta_5 = k(L_5 / L')\theta_{O'} \quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

Luego, ya se ha encontrado el punto ${}^2 P_4({}^2 P_{4x}, {}^2 P_{4y}, {}^2 P_{4z})$ como resta del punto final de destino (${}^O P$) menos el último segmento del brazo con un ángulo dado (θ_5):

$$ {}^{2}P_4({}^{2}P_{4\mathrm{x}}, {}^{2}P_{4\mathrm{y}}, {}^{2}P_{4\mathrm{z}}) = ({}^{O}P_x - L_5 C\theta_5, {}^{O}P_y - L_5 S\theta_5, 0) \quad * $$

Donde:

$$ L' = L'_3 + L_4 + L_5 $$
$$ \theta_{O'} = \left|\arccos\left({}^{O'}P_{xy} / L'\right)\right| $$
$$ \theta_5 = k(L_5 / L')\theta_{O'} \quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)} $$

También se podría calcular la posición del punto ${}^{O}P_3({}^{O}P_{3\mathrm{x}}, {}^{O}P_{3\mathrm{y}}, {}^{O}P_{3\mathrm{z}})$ respecto a la Base del problema completo, como resultado intermedio a la hora de realizar su codificación y pruebas. Para ello, se podría calcular su localización en Cinemática Directa considerando el primer grupo de motores junto con el tercer motor (primer motor del segundo grupo de motores), una vez calculado el ángulo θ_3 , como ya se hizo en el apartado "Subproblema de articulaciones 1-2-3" dentro de "Intento 8 - División del problema en subproblemas (elección de tres articulaciones cualesquiera), con giro de 90º".

$$ \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & d_1 & r_1 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \end{array} = \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & 218 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & 24{,}5 & 18 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & 33 & 105 & 0 \end{array} = $$

$$ \begin{array}{lllll} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \end{array} $$

$$ \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_{1\mathrm{x}} \\ n_y & o_y & a_y & P_{1\mathrm{y}} \\ n_z & o_z & a_z & P_{1\mathrm{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} $$

$$ T = {}^{0}A_3 = {}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3 \quad = $$

$$ \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ \begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{O}P_3({}^{O}P_{3\mathrm{x}}, {}^{O}P_{3\mathrm{y}}, {}^{O}P_{3\mathrm{z}}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O}P_{3\mathrm{x}} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O}P_{3\mathrm{y}} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O}P_{3\mathrm{z}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = $$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y, por tanto:

$$\begin{aligned} {}^{O}P_3({}^{O}P_{3x}, {}^{O}P_{3y}, {}^{O}P_{3z}) = &(L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3, \dots, \dots) \\ &(\dots, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1, \dots) \\ &(\dots, \dots, L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2) \end{aligned}$$

Otra opción posible hubiera sido calcular la posición del cuarto motor mediante los tres primeros motores y usando la posición relativa del cuarto motor (${}^{O}P_3({}^{O}P_{3x}, {}^{O}P_{3y}, {}^{O}P_{3z})$) respecto al tercero sobre su eje X_2 (L'_3) y sobre su eje Z_2 (L_3).

$${}^{O}P_3({}^{O}P_{3x}, {}^{O}P_{3y}, {}^{O}P_{3z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O}P_{1x} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O}P_{1y} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O}P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{L'_3} \\ \boldsymbol{L_3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 \\ -S\theta_2 S\theta_1 & -C\theta_1 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & L_1 + L'_2 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{L'_3} \\ \boldsymbol{L_3} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L'_3 S\theta_1 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2) \\ -L'_3 C\theta_1 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 + (-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1) \\ L_3 S\theta_2 + (L_1 + L'_2 C\theta_2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero resultaría errónea, dado que al no calcular esa posición con el giro del tercer motor, su posición estaría mal calculada, por presuponer un ángulo fijo, cosa que no ocurre.

Y, en cuanto al punto ${}^{O}P_4({}^{O}P_{4x}, {}^{O}P_{4y}, {}^{O}P_{4z})$ respecto a la Base del problema completo a través de álgebra matricial, el desarrollo sería similar. Para ello se podría calcular su localización en Cinemática Directa considerando el primer grupo de motores junto con el tercer motor (primero del segundo grupo de motores) y con el cuarto motor (segundo del segundo grupo de motores), una vez calculados los ángulos θ_3 y θ_4 , como ya se hizo en el apartado "Subproblema de articulaciones 1-2-3-4" dentro de "Intento 9 - División del problema en subproblemas (elección de cuatro articulaciones cualesquiera), con giro de 90º".

$$
\begin{array}{lllll}
Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\
0-1 & \theta_1 & d_1 & 0 & \pi/2 \\
1-2 & \pi/2+\theta_2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\
2-3 & \theta_3 & d_3 & r_3 & 0 \\
3-4 & \theta_4 & 0 & r_4 & 0
\end{array}
=
\begin{array}{lllll}
Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\
0-1 & \theta_1 & 218 & 0 & \pi/2 \\
1-2 & \pi/2+\theta_2 & 24{,}5 & 18 & \pi/2 \\
2-3 & \theta_3 & 33 & 105 & 0 \\
3-4 & \theta_4 & 0 & 118 & 0
\end{array}
=
$$

$$
\begin{array}{lllll}
Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\
0-1 & \theta_1 & L_1 & 0 & \pi/2 \\
1-2 & \pi/2+\theta_2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\
2-3 & \theta_3 & L_3 & L'_3 & 0 \\
3-4 & \theta_4 & 0 & L_4 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O}P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O}P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O}P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
T = {}^{0}A_4 = {}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4 \quad =
$$

$$
\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots
$$

$$
\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =
$$

$$
\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) & C\theta_1 C\theta_2 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_1 C\theta_2 & . \\ C(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \quad \ldots
$$

$$
\begin{pmatrix} . & . & . & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & . & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & . & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{O}P_4({}^{O}P_{4x}, {}^{O}P_{4y}, {}^{O}P_{4z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & {}^{O}P_{4x} \\ n_y & o_y & a_y & {}^{O}P_{4y} \\ n_z & o_z & a_z & {}^{O}P_{4z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad =
$$

$$
\begin{pmatrix} C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) & C\theta_4(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - S\theta_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) & C\theta_1 C\theta_2 & . \\ -C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_4(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - C\theta_4(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) & S\theta_1 C\theta_2 & . \\ C(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 & -S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 & S\theta_2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix} \quad \ldots
$$

$$\begin{pmatrix} . & . & . & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + L_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ . & . & . & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ . & . & . & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + L_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{O}P_{4x} \\ {}^{O}P_{4y} \\ {}^{O}P_{4z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned} {}^{O}P_{4x} &= L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) \ldots \\ &\quad \ldots + L_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ {}^{O}P_{4y} &= -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) \ldots \\ &\quad \ldots - L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ {}^{O}P_{4z} &= L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \end{aligned}$$

Se puede observar una diferencia entre este punto ${}^{O}P_4({}^{O}P_{4x}, {}^{O}P_{4y}, {}^{O}P_{4z})$ y el calculado como la resta del punto final menos el cálculo de la posición del motor anterior como resultado de aplicar el giro del ángulo θ_5 . Esta diferencia se debe a que, en este segundo caso, no se ha considerado que el plano de ataque tiene una posición relativa respecto a la parte del brazo del primer grupo de motores. Eso lleva a cometer un error por ser una parte incompleta del problema. Por tanto, el procedimiento correcto sería el utilizado en el último desarrollo para realizar el cálculo para la localización del punto ${}^{O}P_4({}^{O}P_{4x}, {}^{O}P_{4y}, {}^{O}P_{4z})$, siempre que ya se sepan los valores correspondientes a los ángulos θ_3 y θ_4 .

Por tanto, algunas de las igualdades anteriores serían:

$$\begin{aligned} &\theta_4 = \arccos((({}^{O'}P'_{4x})^2 + ({}^{O'}P'_{4y})^2 - (L_4)^2 - (L'_3)^2)/2 L_4 L'_3) \\ &\theta_3 = atan2(-{}^{2}P_{4x}, {}^{2}P_{4y}) \pm atan2\left(\sqrt{({}^{2}P_{4y})^2 + (-{}^{2}P_{4x})^2 - (L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4\right) \\ &|{}^{2}P_{x'y'}| = \sqrt{(({}^{2}P_x)^2 + ({}^{2}P_y)^2)} \quad \text{(Base x'y')} = \\ &\qquad \sqrt{(({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)} \\ &\theta' = arctg({}^{2}P_x)/|{}^{2}P_{x'y'}| \quad = \\ &\qquad arctg({}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)/\sqrt{(({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)} \\ &|P| = \sqrt{((({}^{2}P_x)^2 + ({}^{2}P_y)^2) + (P'_{4z})^2)} = \sqrt{((|{}^{2}P_{x'y'}|)^2 + (P'_{4z})^2)} \end{aligned}$$

Otra opción posible hubiera sido calcular la posición del quinto motor mediante los cuatro primeros motores y usando la posición relativa del quinto motor (${}^{O}P_4({}^{O}P_{4x}, {}^{O}P_{4y}, {}^{O}P_{4z})$) respecto al cuarto sobre su eje X_3 .

$$T = {}^{0}A_3 = {}^{0}A_1 \, {}^{1}A_2 \, {}^{2}A_3 \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{O}P_4(^{O}P_{4x}, {}^{O}P_{4y}, {}^{O}P_{4z}) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & ^{O}P_{3x} \\ n_y & o_y & a_y & ^{O}P_{3y} \\ n_z & o_z & a_z & ^{O}P_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 & C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3 & C\theta_1 C\theta_2 & L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\ -S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3 & -C\theta_1 C\theta_3 + S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3 & S\theta_1 C\theta_2 & -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\ C\theta_3 C\theta_2 & -C\theta_2 S\theta_3 & S\theta_2 & L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{L_4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_4(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) \\ L_4(-S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 - C\theta_1 S\theta_3) + (-L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) \\ L_4 C\theta_3 C\theta_2 + (L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero resultaría errónea, dado que al no calcular esa posición con el giro del cuarto motor, su posición estaría mal calculada, por presuponer un ángulo fijo, cosa que no ocurre.

En resumen:

P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa en el Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$:

$$^{O'}P'_4(^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ \ldots\ ,\ \ldots)$$
$$(\ldots\ ,\ L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ 0)$$

P respecto a P_1 en el Sistema de Coordenadas local con Origen de Coordenadas en P_1 pero con datos del problema completo:

$$^{1}P = (^{1}P_x, {}^{1}P_y, {}^{1}P_z) = (^{O}P_x, {}^{O}P_y, {}^{O}P_z) - (^{O}P_{1x}, {}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1z}) =$$
$$(^{O}P_x - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, {}^{O}P_y + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, {}^{O}P_z - L_1 - L'_2 C\theta_2)$$

P respecto a P_2 en el Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$ pero con datos del problema completo:

$$^{2}P(^{2}P_x, {}^{2}P_y, {}^{2}P_z) = (^{O}P_x + C\theta_1 S\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots)$$
$$(\ldots, {}^{O}P_y + S\theta_1 S\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, {}^{O}P_z - C\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)$$

P_4 respecto a la Base del segundo grupo de motores, con $L_3=0$ en el Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$ (Incompleto):

$$^{2}P'_4(^{2}P'_{4x}, {}^{2}P'_{4y}, {}^{2}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3, L_3)$$

P_4 respecto a la Base del problema completo, como resta de P (Incompleto):

$$^{O}P_4(^{O}P_{4x}, {}^{O}P_{4y}, {}^{O}P_{4z}) = (^{O}P_x - L_5 C\theta_5, {}^{O}P_y - L_5 S\theta_5, 0)$$

Donde:

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = \left|\arccos\left({}^{O'}P_{xy} / L'\right)\right|$$
$$\theta_5 = k\left(L_5 / L'\right)\theta_{O'} \quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

P respecto a P_2 en el Sistema de Coordenadas local $O' - X'Y'Z'$ pero con datos del problema completo:

$$
\begin{aligned}
{}^2P_4\left({}^2P_{4x}, {}^2P_{4y}, {}^2P_{4z}\right) &= \left({}^OP_x, {}^OP_y, {}^OP_z\right) - \left({}^OP_{4x}, {}^OP_{4y}, {}^OP_{4z}\right) - \left({}^OP_{2x}, {}^OP_{2y}, {}^OP_{2z}\right) = \\
&\left({}^OP_x - L_5 C\theta_5 + C\theta_1 S\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots\right) \\
&\left(\ldots, {}^OP_y + S\theta_1 S\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1 - L_5 S\theta_5, \ldots\right) \\
&\left(\ldots, \ldots, {}^OP_z - C\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2\right)
\end{aligned}
$$

Donde:

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = \left|\arccos\left({}^{O'}P_{xy} / L'\right)\right|$$
$$\theta_5 = k\left(L_5 / L'\right)\theta_{O'} \quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

P_3 respecto a la Base del problema completo, en Cinemática Directa por DH:

$$
\begin{aligned}
{}^OP_3\left({}^OP_{3_x}, {}^OP_{3_y}, {}^OP_{3_z}\right) &= \left(L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3, \ldots, \ldots\right) \\
&\left(\ldots, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1, \ldots\right) \\
&\left(\ldots, \ldots, L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2\right)
\end{aligned}
$$

P_4 respecto a la Base del problema completo, en Cinemática Directa por DH:

$$
\begin{aligned}
{}^OP_{4x} &= L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_4 C\theta_4\left(S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3\right)\ldots \\
&\ldots + L_4 S\theta_4\left(C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3\right) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3 \\
{}^OP_{4y} &= -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_4\left(C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\right)\ldots \\
&\ldots - L_4 S\theta_4\left(C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3\right) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1 \\
{}^OP_{4z} &= L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\theta_4 = \arccos\left(\left(\left({}^{O'}P'_{4x}\right)^2 + \left({}^{O'}P'_{4y}\right)^2 - \left(L_4\right)^2 - \left(L'_3\right)^2\right) / 2 L_4 L'_3\right) \\
&\theta_3 = atan2\left(-{}^2P_{4x}, {}^2P_{4y}\right) \pm atan2\left(\sqrt{\left({}^2P_{4y}\right)^2 + \left(-{}^2P_{4x}\right)^2 - \left(L_4 S\theta_4\right)^2}, L_4 S\theta_4\right) \\
&\left|{}^2P_{x'y'}\right| = \sqrt{\left(\left({}^2P_x\right)^2 + \left({}^2P_y\right)^2\right)} \quad \text{(Base x'y')=} \\
&\qquad \sqrt{\left(\left({}^OP_x + C\theta_1 S\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2\right)^2 + \left({}^OP_y + S\theta_1 S\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1\right)^2\right)} \\
&\theta' = arctg\left({}^2P_z\right) / \left|{}^2P_{x'y'}\right| = \\
&\qquad arctg\left({}^OP_z - C\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2\right) / \sqrt{\left({}^OP_x + C\theta_1 S\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2\right)^2 + \left({}^OP_y + S\theta_1 S\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1\right)^2} \\
&|P| = \sqrt{\left(\left(\left({}^2P_x\right)^2 + \left({}^2P_y\right)^2\right) + \left({}^2P_{4z}\right)^2\right)} = \sqrt{\left(\left(\left|{}^2P_{x'y'}\right|\right)^2 + \left({}^2P_{4z}\right)^2\right)}
\end{aligned}
$$

3 Acoplamiento de las Soluciones de ambos Subproblemas

Una vez tratados los dos grupos de motores por separado, se deben unir los resultados parciales correspondientes a la Cinemática Inversa.
Para ello se tomarán los dos grupos de ecuaciones establecidas en los apartados anteriores.

Primer Grupo (motores 1-2) y Plano Oblicuo (como caso particular sería en un plano vertical, con

$\theta_2=0$):

$\theta_1=atan2({}^{O}P_{1y},{}^{O}P_{1x})\pm atan2(\sqrt{({}^{O}P_{1x})^2+({}^{O}P_{1y})^2-(-L'_2 S\theta_2)^2},-L'_2 S\theta_2)$
θ_2 Por elección en el diseño del modelo.
${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x},{}^{O}P_{1y},{}^{O}P_{1z})=(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2,-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1,L_1+L'_2 C\theta_2)$
${}^{O}P_2({}^{O}P_{2x},{}^{O}P_{2y},{}^{O}P_{2z})=(C\theta_1 C\theta_2 L_3+L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2,\ldots,\ldots)$
$(\ldots,S\theta_1 C\theta_2 L_3-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1,S\theta_2 L_3+L_1+L'_2 C\theta_2)$
P respecto a P_1 :
${}^{1}P={}^{1}P({}^{1}P_x,{}^{1}P_y,P^{1}{}_{z})=({}^{O}P_x-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2,{}^{O}P_y+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1,{}^{O}P_z-L_1-L'_2 C\theta_2)$
P respecto a P_2 :
${}^{2}P={}^{2}P({}^{2}P_x,{}^{2}P_y,{}^{2}P_z)=({}^{O}P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2,\ldots)$
$(\ldots,{}^{O}P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1,{}^{O}P_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2)$
Componente xy en segundo grupo: ${}^{O'}P_{xy}=L$ =
$\sqrt{({}^{O}P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2+({}^{O}P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1)^2}$
Componente z en segundo grupo: ${}^{O'}P_z={}^{O}P_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2$

Segundo Grupo (motores 3-4-5 con análisis de motores **4-5**) y Plano único (Sin análisis de plano y ángulo de ataque):

P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa en el Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$ y en función de las variables locales del segundo subproblema :
${}^{O'}P'({}^{O'}P'_x,{}^{O'}P'_y,{}^{O'}P'_z)=(L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3+L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ \ldots\ ,\ \ldots)$
$(\ldots\ ,\ L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ 0)$
P respecto a P_3 , base de los últimos dos motores:
${}^{O''}P''({}^{O''}P''_x\ ,\ {}^{O''}P''_y\ ,\ {}^{O''}P''_z)=(L_5 C(\theta_4+\theta_5)+L_4 C\theta_4\ ,\ L_5 S(\theta_4+\theta_5)+L_4 S\theta_4\ ,\ 0)$

θ_3 Por elección en el diseño del modelo. Por ejemplo:

$$L'=L'_3+L_4+L_5$$
$$\theta_{O'}=\left|\arccos({}^{O'}P_{xy}/L')\right|$$
$$\theta_3=k(L_3/L')\theta_{O'}\quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3))}$$

P_3 respecto al Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$
$P_3(x,y,z)=(L'_3 C\theta_3,L'_3 C\theta_3,0)$
$\theta_5=\arccos((({}^{O''}P''_x)^2+({}^{O''}P''_y)^2-L_5^2-L_4^2)/2L_5 L_4)$
$\theta_4=atan2(L_4+L_5 C\theta_5,L_5 S\theta_5)-atan2({}^{O''}P''_x,{}^{O''}P''_y)$
P respecto a P_2 (base de los últimos tres motores - $O'-X'Y'Z'$), como la resta entre ambos, y con datos del problema completo (${}^{O'}P$)
${}^{O'}P={}^{O'}P({}^{O'}P_x,{}^{O'}P_y,{}^{O'}P_z)=({}^{O}P_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2,\ldots)$
$(\ldots,{}^{O}P_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1,{}^{O}P_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2)$
P_3 respecto a la Base del problema completo, y en función de las componentes del problema completo, en Cinemática Directa por DH:
${}^{O}P_3({}^{O}P_{3x},{}^{O}P_{3y},{}^{O}P_{3z})=(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3,\ldots,\ldots)$
$(\ldots,-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1,\ldots)$
$(\ldots,\ldots,L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)$

P respecto a P_3 (${}^3P$), como la resta entre ambos, y con datos del problema completo:

$${}^3P({}^3P_x, {}^3P_y, {}^3P_z) = {}^OP({}^OP_x, {}^OP_y, {}^OP_z) - {}^OP_3({}^OP_{3x}, {}^OP_{3y}, {}^OP_{3z}) \ =$$
$$({}^OP_x - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3, ...)$$
$$(..., {}^OP_y + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1 + L'_3 C\theta_1 S\theta_3 - L_3 S\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1, ...)$$
$$(..., ..., {}^OP_z - L_1 - L_3 S\theta_2 - L'_2 C\theta_2 - L'_3 C\theta_3 C\theta_2)$$
$$|P_{x'y'}| = \sqrt{(({}^3P_x)^2 + ({}^3P_y)^2)} \ \text{(Base xy)} =$$
$$\sqrt{(({}^OP_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^OP_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)}$$
$$\theta' = arctg({}^OP_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)/|P_{x'y'}|$$
$$|P| = \sqrt{(({}^3P_x)^2 + ({}^3P_y)^2 + ({}^3P_z)^2)} = \sqrt{((P_{x'y'})^2 + ({}^3P_z)^2)} = \sqrt{((P_{x'y'})^2 + ({}^OP_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)^2)}$$

Segundo Grupo (motores 3-4-5 con análisis de motores **3-4**) y Plano único (Con análisis de plano y ángulo de ataque):

P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa en el Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$:

$${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \ , \ ... \ , ...)$$
$$(... \ , \ L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \ , \ 0)$$

P_4 respecto a la Base del segundo grupo de motores, con $L_3 = 0$ (Incompleto):

$${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3, L_3)$$
$$\theta_4 = \arccos((({}^{O'}P'_{4x})^2 + ({}^{O'}P'_{4y})^2 - (L_4)^2 - (L'_3)^2)/2 L_4 L'_3)$$
$$\theta_3 = atan2(-{}^2P_{4x}, {}^2P_{4y}) \pm atan2(\sqrt{({}^2P_{4y})^2 + (-{}^2P_{4x})^2 - (L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4)$$
$$|{}^2P_{x'y'}| = \sqrt{(({}^2P_x)^2 + ({}^2P_y)^2)} \ \text{(Base x'y')} =$$
$$\sqrt{(({}^OP_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^OP_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)}$$
$$\theta' = arctg({}^2P_x)/|{}^2P_{x'y'}| \ =$$
$$arctg({}^OP_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)/\sqrt{(({}^OP_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^OP_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)}$$
$$|P| = \sqrt{((({}^2P_x)^2 + ({}^2P_y)^2) + (P'_{4z})^2)} = \sqrt{((|{}^2P_{x'y'}|)^2 + (P'_{4z})^2)} \ =$$
$$\sqrt{((|{}^2P_{x'y'}|)^2 + ({}^OP_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)^2)}$$

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = |\arccos({}^{O'}P_{xy}/L')|$$
$$\theta_5 = k(L_5/L')\theta_{O'}$$

P_4 respecto a la Base del problema completo, como resta de P (Incompleto):

$${}^OP_4({}^OP_{4x}, {}^OP_{4y}, {}^OP_{4z}) = ({}^OP_x - L_5 C\theta_5, {}^OP_y - L_5 S\theta_5, 0)$$

P_3 respecto a la Base del problema completo, en Cinemática Directa por DH:

$${}^OP_3({}^OP_{3x}, {}^OP_{3y}, {}^OP_{3z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3, ..., ...)$$
$$(..., -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1, ...)$$
$$(..., ..., L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2)$$

P_4 respecto a la Base del problema completo, en Cinemática Directa por DH:

$${}^OP_{4x} = L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) ...$$
$$... + L_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3$$
$${}^OP_{4y} = -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) ...$$
$$... - L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1$$

$$^{O}P_{4z}=L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4$$

Sin embargo, a la hora de realizar el acoplamiento de los dos grupos de motores, aún queda pendiente resolver un ajuste de los dos grupos, ya que la base del segundo grupo de motores podría ser P_1 o P_2 , y además los cálculos del segundo grupo de motores se han hecho como si fuera un sistema independiente cuando, en realidad, será dependiente de las variables calculadas en el primer grupo.

Si se supone P_2 como su Origen de Coordenadas, el resultado de $^{2}P_3$ determinará unas igualdades sensiblemente diferentes:

$$
\begin{aligned}
&^{O}P_2(^{O}P_{2x},{}^{O}P_{2y},{}^{O}P_{2z})=(C\theta_1 C\theta_2 L_3+L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2,\ldots,\ldots)\\
&\qquad(\ldots,S\theta_1 C\theta_2 L_3-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1,S\theta_2 L_3+L_1+L'_2 C\theta_2)\\
&^{O}P_3(^{O}P_{3x},{}^{O}P_{3y},{}^{O}P_{3z})=(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3,\ldots,\ldots)\\
&\qquad(\ldots,-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1,\ldots)\\
&\qquad(\ldots,\ldots,L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&^{2}P_{3x}={}^{O}P_{3x}-{}^{O}P_{2x}=L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3\ldots\\
&\qquad\ldots-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2=L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3\\
&^{2}P_{3y}={}^{O}P_{3y}-{}^{O}P_{2y}=-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\ldots\\
&\qquad-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1=-L'_3 C\theta_1 S\theta_3-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\\
&^{2}P_{3z}={}^{O}P_{3z}-{}^{O}P_{2z}=L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2=L'_3 C\theta_3 C\theta_2
\end{aligned}
$$

Si se supone P_2 como su Origen de Coordenadas, el resultado de $^{2}P_4$ determinará unas igualdades sensiblemente diferentes:

$$
\begin{aligned}
&^{O}P_2(^{O}P_{2x},{}^{O}P_{2y},{}^{O}P_{2z})=(C\theta_1 C\theta_2 L_3+L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2,\ldots,\ldots)\\
&\qquad(\ldots,S\theta_1 C\theta_2 L_3-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1,S\theta_2 L_3+L_1+L'_2 C\theta_2)\\
&^{O}P_{4x}=L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)\ldots\\
&\qquad\ldots+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3\\
&^{O}P_{4y}=-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)\ldots\\
&\qquad\ldots-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\\
&^{O}P_{4z}=L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2+L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2-L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4\\
&^{O}P_2(^{O}P_{2x},{}^{O}P_{2y},{}^{O}P_{2z})=(C\theta_1 C\theta_2 L_3+L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2,\ldots,\ldots)\\
&\qquad(\ldots,S\theta_1 C\theta_2 L_3-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1,S\theta_2 L_3+L_1+L'_2 C\theta_2)\\
&^{2}P_{4x}={}^{O}P_{4x}-{}^{O}P_{2x}=L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)\ldots\\
&\qquad\ldots+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1\ldots\\
&\qquad\ldots+L'_2 C\theta_1 S\theta_2\ =\\
&\qquad L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)+L_4 S\theta_4(C\theta_3 S\theta_1+C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3)\ldots\\
&\qquad\ldots-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3\\
&^{2}P_{4y}={}^{O}P_{4y}-{}^{O}P_{2y}=-L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2\ldots\\
&\qquad\ldots-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1\ldots\\
&\qquad\ldots-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1\ =\\
&\qquad-L'_3 C\theta_1 S\theta_3-L_4 C\theta_4(C\theta_1 S\theta_3+S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1)-L_4 S\theta_4(C\theta_1 C\theta_3-S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3)\ldots\\
&\qquad\ldots-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}P_{4z} = {}^{O}P_{4z} - {}^{O}P_{2z} &= L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 \ldots \\
&\ldots - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2 \;= \\
&L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4
\end{aligned}
$$

Como puede apreciarse, los términos que se restan por estar incluidos en ${}^{O}P_2({}^{O}P_{2x}, {}^{O}P_{2y}, {}^{O}P_{2z})$ son exactamente iguales a los términos que se encuentran en las componentes de ${}^{O}P_4({}^{0}P_{4x}, {}^{0}P_{4y}, {}^{0}P_{4z})$ y su simplificación, inmediata. Es normal que resulten ser los mismos términos ya que, en ambos casos se han ido sumando nuevas articulaciones a otras ya existentes, con la incorporación de nuevos productos de matrices por las nuevas articulaciones. Y cuando se eliminan articulaciones en el extremo inicial del brazo, matemáticamente, la resta los puntos en la base se traduce en el producto por las inversas de sus matrices.
Esta equivalencia matemática entre la resta de los puntos en la base y la multiplicación por sus inversas tiene cierto paralelismo con la idea del desacoplo des estructuras y su posterior acoplo de resultados, utilizado para el análisis de este tipo de arquitecturas.

El cambio mencionado tiene como consecuencia una modificación en algunas de las igualdades anteriores, ya que se definirán en el Sistema de Coordenadas local ${}^{O}P_2({}^{2}P_{2x}, {}^{2}P_{2y}, {}^{2}P_{2z})$ pero con datos del problema completo...

P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa en el Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$:

$$
\begin{aligned}
{}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) &= (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ \ldots\ ,\ \ldots) \\
&(\ldots\ ,\ L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ 0)
\end{aligned}
$$

P_4 respecto a la Base del segundo grupo de motores, con $L_3=0$ (Incompleto):

$$
{}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3\ ,\ L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3\ ,\ L_3)
$$

$$
\begin{aligned}
&\theta_4 = \arccos((({}^{O'}P'_{4x})^2 + ({}^{O'}P'_{4y})^2 - (L_4)^2 - (L'_3)^2)/2 L_4 L'_3) \\
&\theta_3 = atan2(-{}^{2}P_{4x}, {}^{2}P_{4y}) \pm atan2(\sqrt{({}^{2}P_{4y})^2 + (-{}^{2}P_{4x})^2 - (L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4) \\
&|{}^{2}P_{x'y'}| = \sqrt{(({}^{2}P_x)^2 + ({}^{2}P_y)^2)} \quad \text{(Base x'y')} = \\
&\qquad \sqrt{(({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)} \\
&\theta' = arctg({}^{2}P_x)/|{}^{2}P_{x'y'}| \quad = \\
&\qquad arctg({}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)/\sqrt{(({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)} \\
&|P| = \sqrt{((({}^{2}P_x)^2 + ({}^{2}P_y)^2) + (P'_{4z})^2)} = \sqrt{((|{}^{2}P_{x'y'}|)^2 + (P'_{4z})^2)} \quad = \\
&\sqrt{((|{}^{2}P_{x'y'}|)^2 + ({}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\theta_3 = atan2(-P'_{4x}, P'_{4y}) \pm atan2(\sqrt{(P'_{4y})^2 + (-P'_{4x})^2 - (L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4) \\
&|P'_{4_{x'y'}}| = \sqrt{(P'^2_{4x} + P'^2_{4y})} \quad \text{(Base xy)} \\
&\theta' = arctg(P'_{4z})/|P'_{4_{x'y'}}| \\
&|P| = \sqrt{((|P'_{4_{x'y'}}|)^2 + (P'_{4z})^2)}
\end{aligned}
$$

Por tanto, los dos grupos de motores tendrán las siguientes igualdades...

Primer Grupo (motores 1-2) y Plano Oblicuo (como caso particular sería en un plano vertical, con $\theta_2=0$):

θ_2 Por elección en el diseño del modelo.
$\theta_1 = atan2({}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1x}) \pm atan2(\sqrt{({}^{O}P_{1x})^2 + ({}^{O}P_{1y})^2 - (-L'_2 S\theta_2)^2}, -L'_2 S\theta_2)$
${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x}, {}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, L_1 + L'_2 C\theta_2)$
${}^{O}P_2({}^{O}P_{2x}, {}^{O}P_{2y}, {}^{O}P_{2z}) = (C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots, \ldots)$
$(\ldots, S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1, S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2)$
P respecto a P_1 :
${}^{1}P = {}^{1}P({}^{1}P_x, {}^{1}P_y, {}^{1}P_z) = ({}^{O}P_x - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, {}^{O}P_y + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, {}^{O}P_z - L_1 - L'_2 C\theta_2)$
P respecto a P_2 :
${}^{2}P = {}^{2}P({}^{2}P_x, {}^{2}P_y, {}^{2}P_z) = ({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots)$
$(\ldots, {}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, {}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)$
Componente xy en segundo grupo: ${}^{O'}P_{xy} = L =$
$\sqrt{({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2}$
Componente z en segundo grupo: ${}^{O'}P_z = {}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2$

Segundo Grupo (motores 3-4-5 con análisis de motores 4-5) y Plano único (Sin análisis de plano y ángulo de ataque):

P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa en el Sistema de Coordenadas local $O' - X'Y'Z'$ y en función de las variables locales del segundo subproblema:
${}^{O'}P'({}^{O'}P'_x, {}^{O'}P'_y, {}^{O'}P'_z) = (L_4 C(\theta_3 + \theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5), \ldots, \ldots)$
$(\ldots, L_4 S(\theta_3 + \theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5), 0)$
P respecto a P_3 , base de los últimos dos motores:
${}^{O''}P''({}^{O''}P''_x, {}^{O''}P''_y, {}^{O''}P''_z) = (L_5 C(\theta_4 + \theta_5) + L_4 C\theta_4, L_5 S(\theta_4 + \theta_5) + L_4 S\theta_4, 0)$

θ_3 Por elección en el diseño del modelo. Por ejemplo:

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = |\arccos({}^{O'}P_{xy} / L')|$$
$$\theta_3 = k(L_3 / L')\theta_{O'} \quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

P_3 respecto al Sistema de Coordenadas local $O' - X'Y'Z'$
$P_3(x, y, z) = (L'_3 C\theta_3, L'_3 C\theta_3, 0)$
$\theta_5 = \arccos((({}^{O''}P''_x)^2 + ({}^{O''}P''_y)^2 - L_5^2 - L_4^2) / 2 L_5 L_4)$
$\theta_4 = atan2(L_4 + L_5 C\theta_5, L_5 S\theta_5) - atan2({}^{O''}P''_x, {}^{O''}P''_y)$
P respecto a P_2 (base de los últimos tres motores - $O' - X'Y'Z'$), como la resta entre ambos, y con datos del problema completo (${}^{O'}P$)
${}^{O'}P = {}^{O'}P({}^{O'}P_x, {}^{O'}P_y, {}^{O'}P_z) = ({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2, \ldots)$
$(\ldots, {}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1, {}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)$
P_3 respecto a la Base del problema completo, y en función de las componentes del problema completo, en Cinemática Directa por DH:
${}^{O}P_3({}^{O}P_{3x}, {}^{O}P_{3y}, {}^{O}P_{3z}) = (L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3, \ldots, \ldots)$
$(\ldots, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1, \ldots)$
$(\ldots, \ldots, L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2)$
P respecto a P_3 (${}^{3}P$), como la resta entre ambos, y con datos del problema completo:
${}^{3}P({}^{3}P_x, {}^{3}P_y, {}^{3}P_z) = {}^{O}P({}^{O}P_x, {}^{O}P_y, {}^{O}P_z) - {}^{O}P_3({}^{O}P_{3x}, {}^{O}P_{3y}, {}^{O}P_{3z}) =$

$$\left({}^{O}P_x - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2 - L_3 C\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3, \ldots\right)$$
$$\left(\ldots, {}^{O}P_y + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1 + L'_3 C\theta_1 S\theta_3 - L_3 S\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1, \ldots\right)$$
$$\left(\ldots, \ldots, {}^{O}P_z - L_1 - L_3 S\theta_2 - L'_2 C\theta_2 - L'_3 C\theta_3 C\theta_2\right)$$
$|P_{x'y'}| = \sqrt{(({}^{3}P_x)^2 + ({}^{3}P_y)^2)}$ (Base xy) =
$$\sqrt{(({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)}$$
$$\theta' = arctg\left({}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2\right) / |P_{x'y'}|$$
$$|P| = \sqrt{(({}^{3}P_x)^2 + ({}^{3}P_y)^2 + ({}^{3}P_z)^2)} = \sqrt{((P_{x'y'})^2 + ({}^{3}P_z)^2)} = \sqrt{((P_{x'y'})^2 + ({}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)^2)}$$

Segundo Grupo (motores 3-4-5 con análisis de motores 3-4) y Plano único (Con análisis de plano y ángulo de ataque):

P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa en el Sistema de Coordenadas local $O' - X'Y'Z'$:
$${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3 + \theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)\ , \ \ldots\ , \ \ldots)$$
$$(\ldots\ , \ L_4 S(\theta_3 + \theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)\ , \ 0)$$
P_4 respecto a la Base del segundo grupo de motores, con $L_3 = 0$ (Incompleto):
$${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z}) = (L_4 C(\theta_3 + \theta_4) + L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3 + \theta_4) + L'_3 S\theta_3, L_3)$$
$$\theta_4 = \arccos((({}^{O'}P'_{4x})^2 + ({}^{O'}P'_{4y})^2 - (L_4)^2 - (L'_3)^2) / 2 L_4 L'_3)$$
$$\theta_3 = atan2(-{}^{2}P_{4x}, {}^{2}P_{4y}) \pm atan2(\sqrt{({}^{2}P_{4y})^2 + (-{}^{2}P_{4x})^2 - (L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4)$$
$|{}^{2}P_{x'y'}| = \sqrt{(({}^{2}P_x)^2 + ({}^{2}P_y)^2)}$ (Base x'y') =
$$\sqrt{(({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)}$$
$\theta' = arctg({}^{2}P_x) / |{}^{2}P_{x'y'}|$ =
$$arctg({}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2) / \sqrt{(({}^{O}P_x - C\theta_1 C\theta_2 L_3 - L_2 S\theta_1 + L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2 + ({}^{O}P_y - S\theta_1 C\theta_2 L_3 + L'_2 S\theta_2 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)^2)}$$
$|P| = \sqrt{((({}^{2}P_x)^2 + ({}^{2}P_y)^2) + (P'_{4z})^2)} = \sqrt{((|{}^{2}P_{x'y'}|)^2 + (P'_{4z})^2)}$ =
$$\sqrt{((|{}^{2}P_{x'y'}|)^2 + ({}^{O}P_z - S\theta_2 L_3 - L_1 - L'_2 C\theta_2)^2)}$$

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = |\arccos({}^{O'}P_{xy} / L')|$$
$$\theta_5 = k(L_5 / L')\theta_{O'}$$

P_4 respecto a la Base del problema completo, como resta de P (Incompleto):

$${}^{O}P_4({}^{O}P_{4x}, {}^{O}P_{4y}, {}^{O}P_{4z}) = ({}^{O}P_x - L_5 C\theta_5, {}^{O}P_y - L_5 S\theta_5, 0)$$

Donde:

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = |\arccos({}^{O'}P_{xy} / L')|$$
$\theta_5 = k(L_5 / L')\theta_{O'}$ (con k variable, por ejemplo, k=1.3)

P_3 respecto a la Base del problema completo, en Cinemática Directa por DH:
$${}^{O}P_3({}^{O}P_{3x}, {}^{O}P_{3y}, {}^{O}P_{3z}) = \left(L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2 + L_3 C\theta_1 C\theta_2 + L'_3 S\theta_1 S\theta_3 - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3, \ldots, \ldots\right)$$
$$\left(\ldots, -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1, \ldots\right)$$
$$\left(\ldots, \ldots, L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2\right)$$

P_3 respecto a P_2, en Cinemática Directa por DH:
$^2P_{3x}=L'_3S\theta_1S\theta_3-L'_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3$
$^2P_{3y}=-L'_3C\theta_1S\theta_3-L'_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1$
$^2P_{3z}=L'_3C\theta_3C\theta_2$
P_4 respecto a la Base del problema completo, en Cinemática Directa por DH:
$^OP_{4x}=L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2+L'_3S\theta_1S\theta_3+L_4C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)...$
$...+L_4S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-L'_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3$
$^OP_{4y}=-L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1-L'_3C\theta_1S\theta_3+L_3S\theta_1C\theta_2-L_4C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)...$
$...-L_4S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)-L'_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1$
$^OP_{4z}=L_1+L_3S\theta_2+L'_2C\theta_2+L'_3C\theta_3C\theta_2+L_4C\theta_3C\theta_4C\theta_2-L_4C\theta_2S\theta_3S\theta_4$
P_4 respecto a P_2, en Cinemática Directa por DH:
$^2P_{4x}=L'_3S\theta_1S\theta_3+L_4C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+L_4S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-L'_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3$
$^2P_{4y}=-L'_3C\theta_1S\theta_3-L_4C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-L_4S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)...$
$...-L'_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1$
$^2P_{4z}=L'_3C\theta_3C\theta_2+L_4C\theta_3C\theta_4C\theta_2-L_4C\theta_2S\theta_3S\theta_4$

Y por supuesto, la condición general es que hubiera necesidades de diseño por las que se tuviera que predeterminar el ángulo el ángulo θ_2 para la inclinación del plano de ataque, y el ángulo θ_3 o θ_5 para el ángulo final de ataque. Pero en general, en una situación normal las necesidades exigibles sobre los ángulos a predeterminar irán enfocados más a predeterminar los ángulos θ_2 y θ_5, y por tanto, a analizar los motores 3-4, que cualquier otra posibilidad.

Ahora, habrá que acoplar los diferentes resultados obtenidos desde el análisis de las dos partes desacopladas.

Hay varias posibilidades. Por ejemplo, en el caso de que no haya necesidades previas que cumplir, se puede iniciar por predeterminar que el plano de ataque hacia el punto final de destino sea vertical, y por tanto, $\theta_2=0$, y que el ángulo de ataque hacia el punto sea equilibrado, y por tanto, sin determinar ninguna condición al ángulo θ_3 (proviene del análisis del par de motores 4-5). De ser así, las ecuaciones correspondientes al primer grupo de motores quedarían como:

$\theta_2=0$
$\theta_1=atan2(^OP_{1y},{}^OP_{1x})\pm atan2(\sqrt{(^OP_{1x})^2+(^OP_{1y})^2-(-L'_2S\theta_2)^2},-L'_2S\theta_2)$ =
$atan2(^OP_{1y},{}^OP_{1x})\pm atan2(\sqrt{(^OP_{1x})^2+(^OP_{1y})^2},0)=atan2(^OP_{1y},{}^OP_{1x})$
$^OP_1(^OP_{1x},{}^OP_{1y},{}^OP_{1z})=(L_2S\theta_1,-L_2C\theta_1,L_1+L'_2)$
$^OP_2(^OP_{2x},{}^OP_{2y},{}^OP_{2z})=(C\theta_1L_3+L_2S\theta_1,S\theta_1L_3-L_2C\theta_1,L_1+L'_2)$
P respecto a P_1 :
$^1P={}^1P(^1P_x,{}^1P_y,{}^1P_z)=(^OP_x-L_2S\theta_1,{}^OP_y+L_2C\theta_1,{}^OP_z-L_1-L'_2)$
P respecto a P_2 :
$^2P={}^2P(^2P_x,{}^2P_y,{}^2P_z)=(^OP_x-C\theta_1L_3-L_2S\theta_1,{}^OP_y-S\theta_1L_3+L_2C\theta_1,{}^OP_z-L_1-L'_2)$
Componente xy en segundo grupo:
$$P''_{xy}=L=\sqrt{(^OP_x-C\theta_1L_3-L_2S\theta_1)^2+(^OP_y-S\theta_1L_3+L_2C\theta_1)^2}$$
Componente z en segundo grupo: $^{O'}P_z={}^OP_z-L_1-L'_2$

Y las del segundo grupo de motores:

P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa:

$${}^{O'}P'({}^{O'}P'_x, {}^{O'}P'_y, {}^{O'}P'_z)=(L_4C(\theta_3+\theta_4)+L'_3C\theta_3+L_5C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ ...\ ,\ ...)$$
$$(...\ ,\ L_4S(\theta_3+\theta_4)+L'_3S\theta_3+L_5S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ 0)$$

P respecto a P_3 , base de los últimos dos motores:

$${}^{O''}P''({}^{O''}P''_x\ ,\ {}^{O''}P''_y\ ,\ {}^{O''}P''_z)=(L_5C(\theta_4+\theta_5)+L_4C\theta_4\ ,\ L_5S(\theta_4+\theta_5)+L_4S\theta_4\ ,\ 0)$$

θ_3 Por elección en el diseño del modelo:

$$L'=L'_3+L_4+L_5$$
$$\theta_{O'}=\left|\arccos({}^{O'}P_{xy}/L')\right|$$
$$\theta_3=k(L_3/L')\theta_{O'}\quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

P_3 respecto al Sistema de Coordenadas local $O'-X'Y'Z'$

$$P_3(x,y,z)=(L'_3C\theta_3, L'_3C\theta_3, 0)$$
$$\theta_5=\arccos((({}^{O''}P''_x)^2+({}^{O''}P''_y)^2-L_5^2-L_4^2)/2L_5L_4)$$
$$\theta_4=atan2(L_4+L_5C\theta_5, L_5S\theta_5)-atan2({}^{O''}P''_x, {}^{O''}P''_y)$$

P respecto a P_2 , base de los últimos tres motores:

$${}^{O'}P={}^{O'}P({}^{O'}P_x, {}^{O'}P_y, {}^{O'}P_z)=({}^{O}P_x-C\theta_1L_3-L_2S\theta_1, {}^{O}P_y-S\theta_1L_3+L_2C\theta_1, {}^{O}P_z-L_1-L'_2)$$

P_3 respecto a la Base del problema completo:

$${}^{O}P_3({}^{O}P_{3x}, {}^{O}P_{3y}, {}^{O}P_{3z})=(L_2S\theta_1+L_3C\theta_1+L'_3S\theta_1S\theta_3, -L_2C\theta_1-L'_3C\theta_1S\theta_3+L_3S\theta_1, ...)$$
$$(..., ..., L_1+L'_2+L'_3C\theta_3)$$

P respecto a P_3 (${}^{3}P$), como la resta entre ambos, y con datos del problema completo:

$${}^{3}P({}^{3}P_x, {}^{3}P_y, {}^{3}P_z)=({}^{O}P_x-L_2S\theta_1-L_3C\theta_1-L'_3S\theta_1S\theta_3, {}^{O}P_y+L_2C\theta_1+L'_3C\theta_1S\theta_3-L_3S\theta_1, ...)$$
$$(..., ..., {}^{O}P_z-L_1-L'_2-L'_3C\theta_3)$$
$$|P_{x'y'}|=\sqrt{(({}^{3}P_x)^2+({}^{3}P_y)^2)}\quad \text{(Base xy)} = \sqrt{(({}^{O}P_x-C\theta_1L_3-L_2S\theta_1)^2+({}^{O}P_y-S\theta_1L_3+L_2C\theta_1)^2)}$$
$$\theta'=arctg({}^{O}P_z-S\theta_2L_3-L_1-L'_2)/|P_{x'y'}|$$
$$|P|=\sqrt{(({}^{3}P_x)^2+({}^{3}P_y)^2+({}^{3}P_z)^2)}=\sqrt{((P_{x'y'})^2+({}^{3}P_z)^2)} =$$
$$\sqrt{((({}^{O}P_x-C\theta_1L_3-L_2S\theta_1)^2+({}^{O}P_y-S\theta_1L_3+L_2C\theta_1)^2)^2+({}^{O}P_z-L_1-L'_2)^2)}$$

Otra posibilidad es que el ángulo del plano de ataque fuera el ángulo a predeterminar según las necesidades del diseño. Y en este caso, $\theta_2=Cte$, y que el ángulo de ataque hacia el punto sea equilibrado y, por tanto, sin determinar ninguna condición al ángulo θ_5 (proviene del análisis del par de motores 3-4).
De ser así, las ecuaciones correspondientes al primer grupo de motores quedarían como:

$\theta_2=Cte$ Por elección en el diseño del modelo para determinar la inclinación del plano de ataque.

$$\theta_1=atan2({}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1x})\pm atan2(\sqrt{({}^{O}P_{1x})^2+({}^{O}P_{1y})^2-(-L'_2S\theta_2)^2}, -L'_2S\theta_2)$$
$${}^{O}P_1({}^{O}P_{1x}, {}^{O}P_{1y}, {}^{O}P_{1z})=(L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2, -L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1, L_1+L'_2C\theta_2)$$
$${}^{O}P_2({}^{O}P_{2x}, {}^{O}P_{2y}, {}^{O}P_{2z})=(C\theta_1C\theta_2L_3+L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2, ..., ...)$$
$$(..., S\theta_1C\theta_2L_3-L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1, S\theta_2L_3+L_1+L'_2C\theta_2)$$

P respecto a P_1 :

$${}^{1}P={}^{1}P({}^{1}P_x, {}^{1}P_y, P^1{}_{iz})=({}^{O}P_x-L_2S\theta_1+L'_2C\theta_1S\theta_2, {}^{O}P_y+L'_2S\theta_2S\theta_1+L_2C\theta_1, {}^{O}P_z-L_1-L'_2C\theta_2)$$

P respecto a P_2 :
$^2P={}^2P({}^2P_x, {}^2P_y, {}^2P_z)=({}^OP_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2, ...)$
$(..., {}^OP_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1, {}^OP_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2)$

Componente xy en segundo grupo: ${}^{O'}P_{xy}=L$ $=$
$\sqrt{({}^OP_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2+({}^OP_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1)^2}$

Componente z en segundo grupo: ${}^{O'}P_z={}^OP_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2$

Y las del segundo grupo de motores:

P respecto a P_2 por DH en Cinemática Directa:
${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z})=(L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3+L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ ...\ ,\ ...)$
$(...\ ,\ L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)\ ,\ 0)$

P_4 respecto a la Base del segundo grupo de motores, con $L_3=0$ (Incompleto):
${}^{O'}P'_4({}^{O'}P'_{4x}, {}^{O'}P'_{4y}, {}^{O'}P'_{4z})=(L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3, L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3, L_3)$ (Con $L_3=0$ - Por matrices, desde Cinemática Directa)

$\theta_4=\arccos((({}^{O'}P'_{4x})^2+({}^{O'}P'_{4y})^2-(L_4)^2-(L'_3)^2)/2 L_4 L'_3)$
$\theta_3=atan2(-{}^2P_{4x}, {}^2P_{4y})\pm atan2(\sqrt{({}^2P_{4y})^2+(-{}^2P_{4x})^2-(L_4 S\theta_4)^2}, L_4 S\theta_4)$
$|{}^2P_{x'y'}|=\sqrt{(({}^2P_x)^2+({}^2P_y)^2)}$ (Base x'y') =
$\sqrt{(({}^OP_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2+({}^OP_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1)^2)}$
$\theta'=arctg({}^2P_x)/|{}^2P_{x'y'}|$ $=$
$arctg({}^OP_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2)/\sqrt{(({}^OP_x-C\theta_1 C\theta_2 L_3-L_2 S\theta_1+L'_2 C\theta_1 S\theta_2)^2+({}^OP_y-S\theta_1 C\theta_2 L_3+L'_2 S\theta_2 S\theta_1+L_2 C\theta_1)^2)}$
$|P|=\sqrt{((({}^2P_x)^2+({}^2P_y)^2)+(P'_{4z})^2)}=\sqrt{((|{}^2P_{x'y'}|)^2+(P'_{4z})^2)}$ $=$
$\sqrt{((|{}^2P_{x'y'}|)^2+({}^OP_z-S\theta_2 L_3-L_1-L'_2 C\theta_2)^2)}$

$L'=L'_3+L_4+L_5$
$\theta_{O'}=|\arccos({}^{O'}P_{xy}/L')|$
$\theta_5=k(L_5/L')\theta_{O'}$

P_4 respecto a la Base del problema completo, como resta de P (Incompleto):
${}^OP_4({}^OP_{4x}, {}^OP_{4y}, {}^OP_{4z})$ $=$
$({}^OP_x-L_5 C\theta_5, {}^OP_y-L_5 S\theta_5, 0)$ (Desde el punto final)

P_3 respecto a la Base del problema completo, en Cinemática Directa por DH:
${}^OP_3({}^OP_{3x}, {}^OP_{3y}, {}^OP_{3z})=(L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3, ..., ...)$
$(..., -L'_2 S\theta_2 S\theta_1-L_2 C\theta_1-L'_3 C\theta_1 S\theta_3+L_3 S\theta_1 C\theta_2-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1, ...)$
$(..., ..., L_1+L_3 S\theta_2+L'_2 C\theta_2+L'_3 C\theta_3 C\theta_2)$

P_3 respecto a P_2 , en Cinemática Directa por DH:
${}^2P_{3x}=L'_3 S\theta_1 S\theta_3-L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3$
${}^2P_{3y}=-L'_3 C\theta_1 S\theta_3-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1$
${}^2P_{3z}=L'_3 C\theta_3 C\theta_2$

P_4 respecto a la Base del problema completo, en Cinemática Directa por DH:
${}^OP_{4x}=L_2 S\theta_1-L'_2 C\theta_1 S\theta_2+L_3 C\theta_1 C\theta_2+L'_3 S\theta_1 S\theta_3+L_4 C\theta_4(S\theta_1 S\theta_3-C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3)...$

$$...+L_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3$$

$$^{O}P_{4y} = -L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1 - L'_3 C\theta_1 S\theta_3 + L_3 S\theta_1 C\theta_2 - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) ...$$

$$...-L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1$$

$$^{O}P_{4z} = L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 S\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4$$

P_4 respecto a P_2, en Cinemática Directa por DH:

$$^{2}P_{4x} = L'_3 S\theta_1 S\theta_3 + L_4 C\theta_4 (S\theta_1 S\theta_3 - C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3) + L_4 S\theta_4 (C\theta_3 S\theta_1 + C\theta_1 S\theta_2 S\theta_3) - L'_3 C\theta_1 S\theta_2 C\theta_3$$

$$^{2}P_{4y} = -L'_3 C\theta_1 S\theta_3 - L_4 C\theta_4 (C\theta_1 S\theta_3 + S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1) - L_4 S\theta_4 (C\theta_1 C\theta_3 - S\theta_2 S\theta_1 S\theta_3) ...$$

$$...-L'_3 S\theta_2 C\theta_3 S\theta_1$$

$$^{2}P_{4z} = L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4$$

Así, quedaría resuelto el problema, al tener las ecuaciones necesarias para el cálculo de todas las variables articulares.
Y como modelo de resolución de este tipo de problemas, cuando no se pueda resolver mediante un modelo geométrico o analítico simples, parece razonable desacoplar los elementos por partes, de tal forma que puedan ser calculados de forma sencilla a través del uso del punto final de destino y de los puntos finales intermedios, calculados con las matrices correspondientes a las articulaciones anteriores, y con la resta lógica de sus componentes.

Puede verse un análisis sobre las posibles soluciones en "Robotics 1 - Prof. De Luca Lecture 18 (7 Nov 2014) – Inverse kinematics" [WWWyoutubeDoc91] (Tiempo= 49:32).

4 Resolución de problemas en el prototipado del ejercicio

A la hora de implementar el ejercicio, los resultados no resultan evidentes.
Aún siendo correcto el cálculo de las ecuaciones definidas, resulta ser dependiente del tipo de motores y de sus limitaciones, así como de las piezas de unión utilizadas para su montaje, lo que tiene como consecuencia una serie de rangos de ángulos imposibles de alcanzar.
Por ejemplo, en el prototipo implementado, los motores no podían realizar un giro completo, y de hecho, este tipo de servomotores tienen un ángulo total de trabajo entre 120º y 320º. Y en el prototipo montado para este ejercicio, aunque los servomotores utilizados tenían un rango de (0º, 270º), si se une a las limitaciones de su montaje, definían un entorno de trabajo restringido inicialmente a la mitad de un casquete esférico.

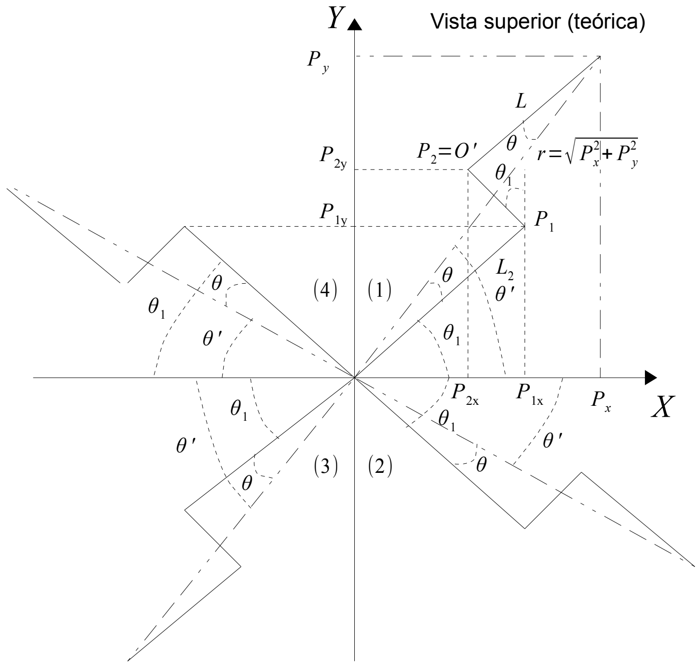

Ilustración 25: Vista superior del espacio de trabajo del brazo robótico

En la imagen se define el análisis de ángulos desde un punto de vista superior sin tener en cuenta las limitaciones físicas del prototipo. Sin embargo, debido al propio montaje, inicialmente sólo podían ser alcanzados los puntos que se encuentran en el lado negativo del eje Y .

En este caso, la alcanzabilidad y funcionalidad del prototipo venía determinado tanto por el uso del ángulo θ_2 para determinar el plano de ataque, como del ángulo θ_5 para ajustar el ángulo de ataque del extremo del brazo. Y ambos ángulos se podían parametrizar de forma previa o también se pueden dejar por defecto con $\theta_2=0$ para un plano de ataque vertical y θ_5 automático, que será proporcional al tamaño del último segmento, para un mejor aprovechamiento de las características del brazo.
Por tanto, para el caso de θ_5 , la implementación ejecutada, permite una aproximación al cálculo mediante una simplificación ya que los segmentos L4 y L5 pueden ser considerados una única unidad, y realizar el cálculo posterior como si se tratara de un subproblema de dos segmentos.

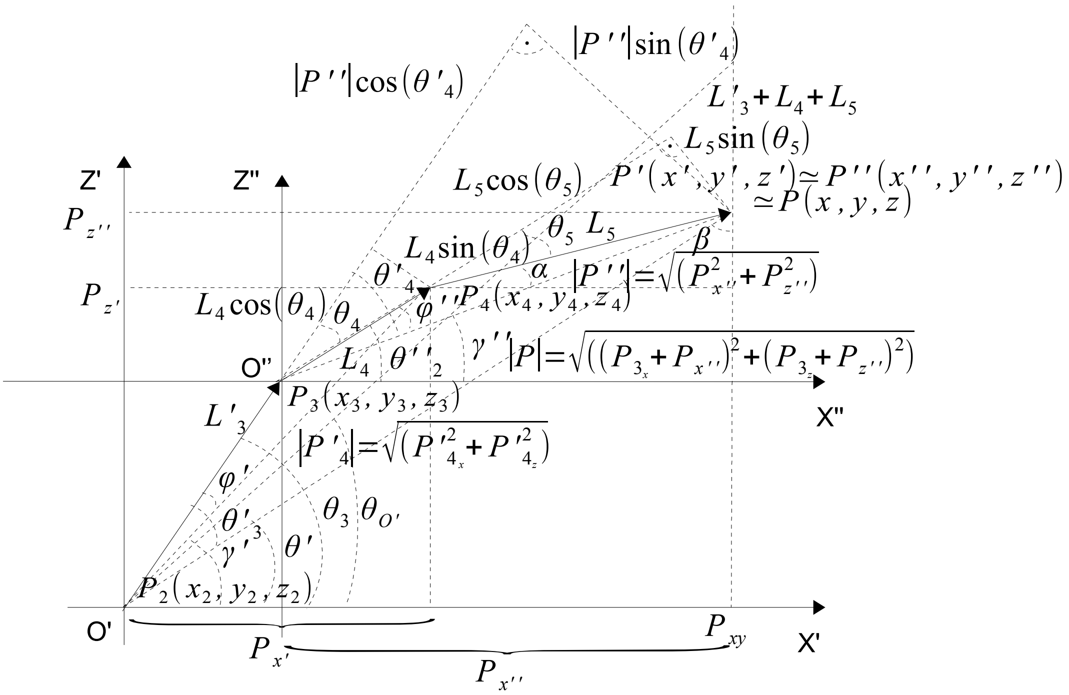

Ilustración 26: Subproblema de tres segmentos a simplificar

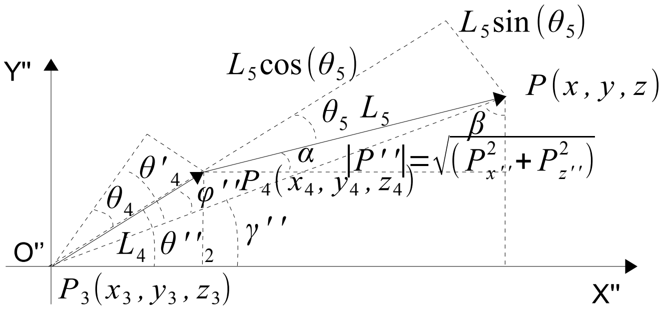

Ilustración 27: Subproblema de tres segmentos simplificado

De esta forma las ecuaciones anteriormente descritas se simplifican al realizar un paso previo, como es el cálculo aproximado de θ_5 y la consideración de L4 y L5 unidos como un único segmento.

Así, en una primera aproximación se obtiene θ_5 mediante el desarrollo ya definido con anterioridad:

$$L'=L'_3+L_4+L_5$$
$$\theta_{O'}=|\arccos(P'_{4\text{xy}}/L')|$$
$$\theta_5/\theta_{O'}=L_5/L'$$
$$\theta_5=k(L_5/L')\theta_{O'} \quad \text{(con k variable, por ejemplo, k=1.3)}$$

Y la simplificación se obtiene mediante el desarrollo mostrado a continuación.

$$\theta'_4=\theta_4+\varphi''$$
$$\varphi''=arctg(L_5\sin(\theta_5)/(L_4+L_5\cos(\theta_5)))$$
$$|P''|=\sqrt{(L_4+L_5\cos(\theta_5))^2+(L_5\sin(\theta_5))^2}$$
$$\theta'_4=arctg(|P''|\sin(\theta'_4)/|P''|\cos(\theta'_4))$$
$$\theta_4=\theta'_4-\varphi''=arctg(|P''|\sin(\theta'_4)/|P''|\cos(\theta'_4))-arctg(L_5\sin(\theta_5)/(L_4+L_5\cos(\theta_5)))$$

Luego las variables en el subproblema con tres segmentos se reducen a las variables θ_3 , θ'_4 , L_4 y $|P''|$.

Por tanto su resolución se resuelve como un problema simple.

Además, hay otra posible solución al rango de trabajo. En este caso, se puede obligar al brazo a alcanzar los puntos en los cuadrantes correspondientes al rango de Y positivas, haciendo que el brazo pueda usar los motores 1 y 2 para definir los ángulos necesarios del primer subconjunto de motores para poder usar los tres motores restantes para alcanzar esos puntos invirtiendo los ángulos de trabajo.

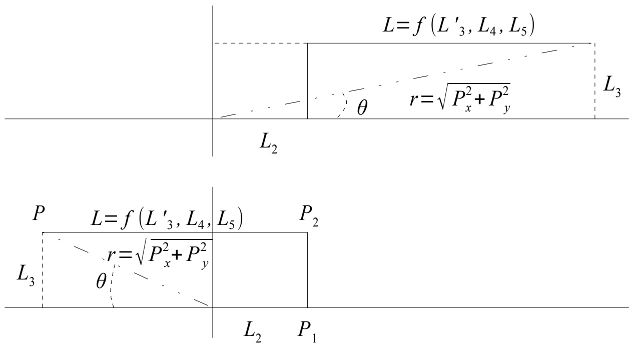

Ilustración 28: Cambio de modelo para mejorar la alcanzabilidad en el entorno de trabajo del brazo

Donde inicialmente:

$$P_x=L_2+L$$
$$P_y=L_3$$
$$r=\sqrt{(L_2+L)^2+(L_3)^2}$$

Y posteriormente:

$$P_x=L_2-L$$
$$P_y=L_3$$
$$r=\sqrt{(L_2-L)^2+(L_3)^2}$$

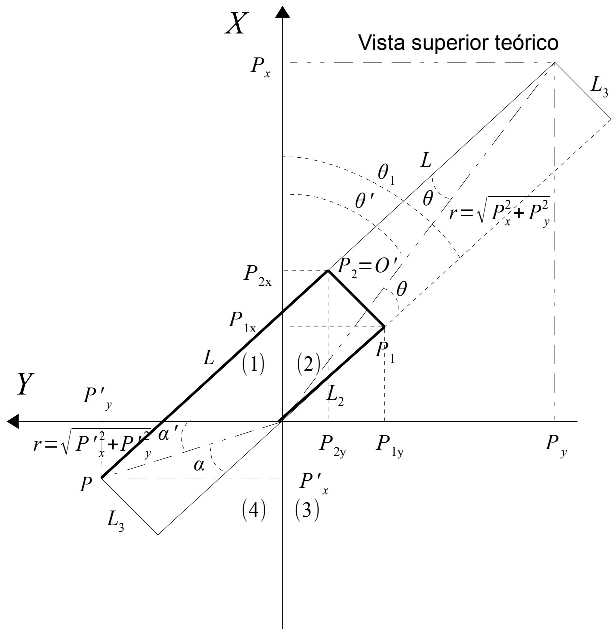

Ilustración 29: Alcanzabilidad mejorada a los cuadrantes de Y positiva

$$r=\sqrt{P'^2_x+P'^2_y}=\sqrt{(L_2-L)^2+(L_3)^2}$$
$$\theta_1=\alpha'+\alpha=arctg(P'_y/P'_x)+arctg(L_3/|L2-L|)$$

Evidentemente, este nuevo esquema determina una modificación en el código que no resultaba necesario en el desarrollo teórico del problema.

Por otra parte, este último desarrollo también se podría haber resuelto mediante álgebra matricial mediante parámetros de Denavit-Hartenberg con el mismo esquema utilizado para los puntos en Y negativos. La diferencia se encuentra en la interpretación de las opciones $\pm$ de las ecuaciones presentadas, tanto en las "raíces cuadradas" como en las funciones "atan2".

En esta misma línea de problemas, las ecuaciones utilizadas han tenido que ser adaptadas a los diferentes problemas que se presentan a la hora de implementar un prototipo con otro tipo de problemas físicos. Por ejemplo, determinar el pulso correspondiente al rango de ángulos permitidos en cada motor, y como consecuencia el 0 en una posición intermedia del entorno de trabajo; cambiar de signos los ángulos cuando se superaba cierta condición, como en el caso de la distancia del punto final de destino al punto de origen del segundo grupo de motores ($distancia<-L'3$); determinar el tipo de curvatura del segundo conjunto de motores para que los codos estuvieran siempre por encima;,...

Y también se producen problemas de codificación cuando se alcanzan los puntos en los que se producen variaciones de los signos de los ángulos en la determinación de su cálculo, como sucede al alcanzar los ejes:

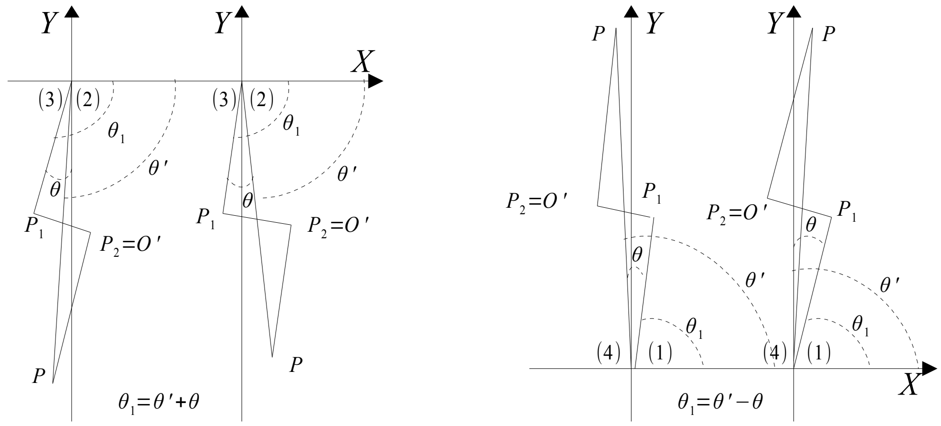

Ilustración 30: Cambio de signos en los ángulos en los ejes verticales

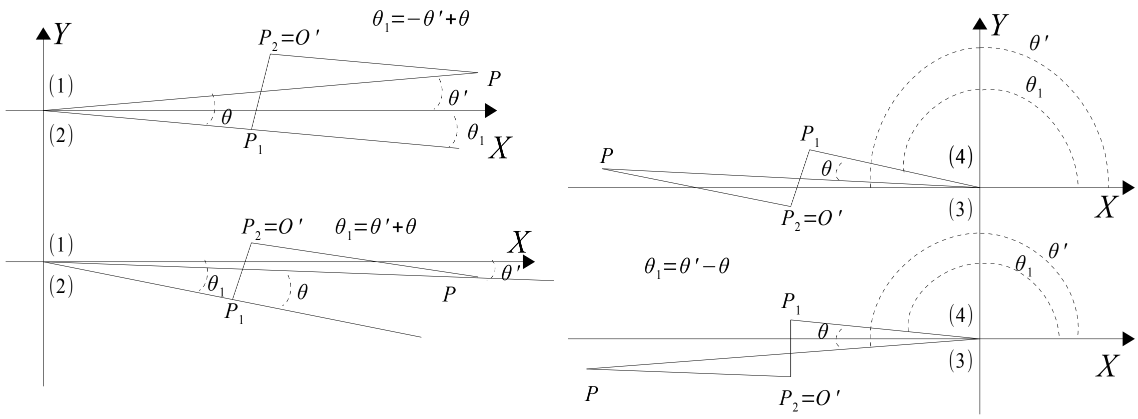

Ilustración 31: Cambio de signos en los ángulos en los ejes horizontales

Por otra parte, ante la posibilidad de que la solución adoptada sin realizar el cálculo de θ_1 en función de la necesidad de que el segundo grupo de motores esté en el plano de ataque, sea incorrecto, se vuelve a realizar un nuevo cálculo mediante la utilización de la alternativa al plano oblicuo, en la que se localizaba una nueva expresión para el cálculo de θ_1 :

$$\theta_1 = atan2(P_y, P_x)...$$
$$...\pm atan2\left(\sqrt{P_x^2 + P_y^2 - ((-P_z S\theta_2 + L_1 S\theta_2 + L_3)/C\theta_2)^2}, (-P_z S\theta_2 + L_1 S\theta_2 + L_3)/C\theta_2\right)$$

De esta forma, se determina el ángulo θ_1 en función de θ_2 asegurando que el plano de ataque contiene el punto final de destino y el Origen de Coordenadas del segundo grupo de motores (P_2) , y que el ángulo θ_1 permite acceder a ambos puntos con ese ángulo θ_2 predeterminado.

Al repetir las pruebas sobre estas nuevas expresiones, ocurre lo mismo que ya sucedía con anterioridad, al calcular correctamente los datos cuando se realizan con $\theta_2 = 0$, pero en este caso, los datos obtenidos cuando $\theta_2 \neq 0$ demuestran que se ha resuelto el problema puesto que la comprobación con las expresiones derivadas del modelo de Denavit-Hartenberg resulta exacta en todos los casos.

Aún así se realiza una nueva modificación sobre el cálculo anterior. Así, otra modificación del cálculo realizado en el modelo oblicuo es considerar el plano de ataque, no como si fuera un plano vertical a la hora de calcular los ángulos según el modelo de SCARA, siguiendo la idea de que sería similar dado que sólo se producía una rotación del Sistema de Coordenadas y no una modificación del problema, sino utilizar las medidas reales y usar el cálculo del modelo de SCARA sobre el nuevo Sistema de Coordenadas O' sobre el que se encuentra ese segundo grupo de motores.

Por tanto, la altura ya no se corresponde con la componente Z en el Sistema Coordenadas O, sino con la componente Z' en el Sistema Coordenadas O', como se muestra a continuación.

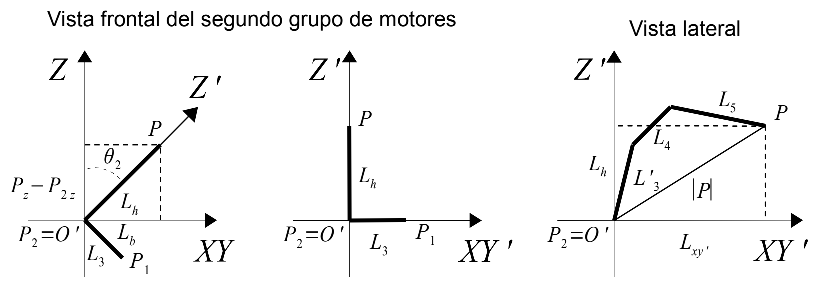

Ilustración 32: Vista frontal y lateral del segundo grupo de motores

$$tg(\theta_2) = L_b/(P_z - P_{2z})$$
$$L_b = tg(\theta_2)(P_z - P_{2z})$$
$$L_h = \sqrt{(L_b)^2 + (P_z - P_{2z})^2}$$ (Altura a aplicar en el modelo SCARA (esquema central de la imagen))

$$|P| = |P - O'| = |P - P_2| = |(P_x - P_{2x}, P_y - P_{2y}, P_z - P_{2z})| =$$
$$|(P_x - (C\theta_1 C\theta_2 L_3 + L_2 S\theta_1 - L'_2 C\theta_1 S\theta_2), P_y - (S\theta_1 C\theta_2 L_3 - L'_2 S\theta_2 S\theta_1 - L_2 C\theta_1), P_z - (S\theta_2 L_3 + L_1 + L'_2 C\theta_2))|$$
$$L_{xy'} = \sqrt{(|P|)^2 - (L_h)^2}$$ (Base a aplicar en el modelo SCARA (esquema derecho de la imagen))

Y con las nuevas distancias, ahora se podrían calcular los ángulos correspondientes...

θ_5 se resolvería por elección en el diseño del modelo. Por ejemplo:

$$L' = L'_3 + L_4 + L_5$$
$$\theta_{O'} = |\arccos(P'_{4xy}/L')|$$
$$\theta_5/\theta_{O'} = L_5/L'$$
$$\theta_5 = k(L_5/L')\theta_{O'}$$ (con k variable, por ejemplo, k=1.3)

θ_4 sería el resultado de la simplificación ya calculada por la que el segundo grupo de motores se reducía a 2 motores.

$$\theta'_4 = \theta_4 + \varphi''$$
$$\varphi'' = arctg(L_5 \sin(\theta_5)/(L_4 + L_5 \cos(\theta_5)))$$
$$|P''| = \sqrt{(L_4 + L_5 \cos(\theta_5))^2 + (L_5 \sin(\theta_5))^2}$$
$$\theta'_4 = arctg(|P''| \sin(\theta'_4)/|P''| \cos(\theta'_4))$$
$$\theta_4 = \theta'_4 - \varphi'' = arctg(|P''| \sin(\theta'_4)/|P''| \cos(\theta'_4)) - arctg(L_5 \sin(\theta_5)/(L_4 + L_5 \cos(\theta_5)))$$

O también, aplicando los calculados en los diferentes apartados de análisis de los tres últimos motores o de SCARA clásico:

$$\theta_4 = \arccos((P''^2_x + P''^2_y - L_5^2 - L_4^2)/2 L_5 L_4)$$

Y θ_3 se calculaba como resultado del modelo clásico de SCARA a través de álgebra matricial, ya utilizado en el acoplamiento.

$$\theta_3 = atan2\left(-{}^2P_{4x}, {}^2P_{4y}\right) \pm atan2\left(\sqrt{\left({}^2P_{4y}\right)^2 + \left(-{}^2P_{4x}\right)^2 - \left(L_4 S\theta_4\right)^2}, L_4 S\theta_4\right)$$

O los calculados en los diferentes apartados de análisis de los tres últimos motores o de SCARA clásico:

$$\theta_3 = atan2\left(L'_3 + |P''| C\theta_4, |P''| S\theta_4\right) - atan2\left(L_{xy'}, L_h\right)$$

O también, a través del cálculo geométrico, también visto con anterioridad.

$$\theta_3 = atan2\left(L_h, L_{xy'}\right) - atan2\left(|P''| \sin\left(\theta_4\right) / \left(L'_3 + |P''| \cos\left(\theta_4\right)\right)\right) \quad *$$

Así quedan definidos todas las variables articulares necesarias para la aplicación del modelo de acoplamiento analizado.

En este caso, al igual que considerando el plano de ataque como si fuera vertical para el cálculo de los tres últimos motores, los resultados son exactos.

Luego, se han determinado todas las variables articulares y se ha comprobado que los valores son correctos a través de las expresiones resultantes de aplicar el modelo de Denavit-Hartenberg.

Un aspecto funcional de este Ejercicio y que resulta interesante es la posibilidad de calcular un punto en el Sistema de Coordenadas de la base, pero que se calcule a partir del punto respecto al Sistema de Coordenadas del último punto de destino. Por ejemplo, podría ser necesario posicionarse en un punto que esté a cierta cantidad de unidades a través del eje Z del último Sistema de Coordenadas. Se calcularía mediante:

$$T = {}^0A_5 = {}^0A_1 \, {}^1A_2 \, {}^2A_3 \, {}^3A_4 \, {}^4A_5$$

$$P(x, y, z) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y una vez obtenido el punto respecto al Sistema de Coordenadas de la base, ya se podría colocar el extremo del brazo en ese punto.
Además se podría hacer con una orientación determinada, utilizando las ecuaciones incluidas en los elementos de la submatriz R .

$$T = \begin{pmatrix} [R]_{3x3} & [p]_{3x1} \\ [F]_{1x3} & [W]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} [Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1} \\ [Perspectiva]_{1x3} & [Escalado]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4}$$

Y otra posibilidad más es hacer la operación inversa, calcular cuál es el punto situado a cierta cantidad de unidades según los ejes del Sistema de Coordenadas de la base. Pero, en este caso sólo habría que operar con las componentes del punto ya utilizado para su posicionamiento.

5 Análisis de la orientación, plano de ataque y ángulo final de ataque

Puesto que se está implementando un modelo analítico de resolución en lugar de un modelo geométrico, sería interesante realizar este análisis mediante álgebra matricial.
Para ello se ejecutará la misma metodología de resolución sobre el problema inicial.
Se establecen los ejes Z, los orígenes de coordenadas de cada articulación, el resto de ejes según los criterios de DH, y se siguen los paso de este algoritmo, hasta calcular los parámetros correspondientes:

$$\begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & 0 & d_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2 & d_2 & r_2 & \pi/2 \\ 2-3 & 0 & d_3 & r_3 & 0 \\ 3-4 & 0 & 0 & r_4 & 0 \\ 4-5 & 0 & 0 & r_5 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} Art & \theta_i & d_i & r_i & \alpha_i \\ 0-1 & 0 & L_1 & 0 & \pi/2 \\ 1-2 & \pi/2 & L_2 & L'_2 & \pi/2 \\ 2-3 & 0 & L_3 & L'_3 & 0 \\ 3-4 & 0 & 0 & L_4 & 0 \\ 4-5 & 0 & 0 & L_5 & 0 \end{array}$$

Una vez calculados, se toman las matrices genéricas de una articulación (directa e inversa).

$$A = {}^{i-1}A_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & r_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & r_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-n^T p = \begin{pmatrix} -n_x & -n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-o^T p = \begin{pmatrix} -o_x & -o_y & -o_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$-a^T p = \begin{pmatrix} -a_x & -a_y & -a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = [{}^{i-1}A_i]^{-1} = \begin{pmatrix} C\theta_i & S\theta_i & 0 & -r_i \\ -C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & S\alpha_i & -S\alpha_i d_i \\ S\alpha_i S\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & -C\alpha_i d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se crean cada una de las matrices de cada motor (directas e inversas):

$$
{}^{0}A_1=\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{1}A_2=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{2}A_3=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^{3}A_4=\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
[{}^{0}A_1]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{1}A_2]^{-1}=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
[{}^{2}A_3]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_3 & S\theta_3 & 0 & -r_3 \\ -S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [{}^{3}A_4]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_4 & S\theta_4 & 0 & -r_4 \\ -S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
[{}^{4}A_5]^{-1}=\begin{pmatrix} C\theta_5 & S\theta_5 & 0 & -r_5 \\ -S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

A continuación se determinan las operaciones a utilizar para la resolución matricial del problema de cinemática directa en las que se representa Coordenadas (r_{x0},r_{y0},r_{z0}) del vector $\vec{r}$ en el sistema $O-XYZ$ a partir de sus coordenadas ($r_{u0'}$,$r_{v0'}$,$r_{w0'}$) en el sistema $O'-UVW$:

$$
T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5
$$

$$
P(x,y,z)=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Y se calcula la matriz T como el producto de las matrices directas correspondientes a todas las articulaciones (Producto no conmutativo).

$$
T={}^{0}A_5={}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5 \quad =
$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se usará para calcular la posición del extremo del brazo en el espacio una vez sustituidos los datos de las longitudes de los eslabones generados en el diseño del brazo (parámetros $d_1 = L_1$, $d_2 = L_2$, $r_2 = L'_2$, $d_3 = L_3$, $r_3 = L'_3$, $r_4 = L_4$ y $r_5 = L_5$) , y los ángulos deseados.

Pero, en este caso se continuará con la aplicación de la resolución de las siguientes igualdades:

$$T = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = {}^0A_5$$
$$({}^0A_1)^{-1}\,T = {}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = {}^1A_5$$
$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\,T = {}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = {}^2A_5$$

Para la primera igualdad con la inversa de la primera matriz ($({}^0A_1)^{-1}\,T = {}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = {}^1A_5$):

$$({}^0A_1)^{-1}\,T = \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$${}^1A_5 = {}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2 S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & S\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C\theta_2 & \ldots \\ C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & S\theta_2 & \ldots \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix} \ldots$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & -L'_2 S\theta_2 + L_3 C\theta_2 - L'_3 S\theta_2 C\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 S\theta_5 - L_4 S\theta_2 C\theta_3 C\theta_4 + L_4 S\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 - L_5 C(\theta_3+\theta_4) S\theta_2 C\theta_5 \\ \ldots & L'_2 C\theta_2 + L_3 S\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 - L_5 S(\theta_3+\theta_4) C\theta_2 S\theta_5 + L_4 C\theta_3 C\theta_4 C\theta_2 - L_4 C\theta_2 S\theta_3 S\theta_4 + L_5 C(\theta_3+\theta_4) C\theta_5 C\theta_2 \\ \ldots & L_2 + L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

Y con la segunda inversa ($({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\,T = {}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = {}^2A_5$):

$$({}^{1}A_2)^{-1}({}^{0}A_1)^{-1}T=\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T \quad =$$

$$\begin{pmatrix} f_{21}(n) & f_{21}(o) & f_{21}(a) & f_{21}(p) \\ f_{22}(n) & f_{22}(o) & f_{22}(a) & f_{22}(p) \\ f_{23}(n) & f_{23}(o) & f_{23}(a) & f_{23}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & S\theta_2 & -L'_2-L_1 S\theta_2 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_2 \\ C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_2 & L_1 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}={}^{2}A_5 \quad =$$

$${}^{2}A_3\,{}^{3}A_4\,{}^{4}A_5=\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4)+L'_3 C\theta_3+L_5 C(\theta_3+\theta_4+C\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4)+L'_3 S\theta_3+L_5 S(\theta_3+\theta_4+C\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este punto se puede ver que el análisis sobre las posibles soluciones en "Robotics 1 - Prof. De Luca Lecture 18 (7 Nov 2014) – Inverse kinematics" [WWWyoutubeDoc91] (Tiempo= 49:32) puede ser aplicado a este caso.

Ahora se debe aplicar el mismo tratamiento que en la resolución de matrices a través del algoritmo de Denavit-Hartenberg. De hecho, se aplicarán las matrices necesarias para su creación:

$$T=\begin{pmatrix} [R]_{3x3} & [p]_{3x1} \\ [F]_{1x3} & [W]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} [Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1} \\ [Perspectiva]_{1x3} & [Escalado]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4} \quad =$$

$$\begin{pmatrix} [R]_{3x3} & [p]_{3x1} \\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4}=\begin{pmatrix} [Matriz\ Rotación]_{3x3} & [Matriz\ Traslación]_{3x1} \\ [0]_{1x3} & [1]_{1x1} \end{pmatrix}_{4x4}$$

$$[R]_{3x3}=\begin{pmatrix} [n]_{3x1} & [o]_{3x1} & [a]_{3x1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

Los vectores [n] ($\vec{n}$), [o] ($\vec{o}$), [a] ($\vec{a}$), son vectores ortogonales unitarios, donde [n] es un vector unitario que representaría la dirección del eje x^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0), [o] es un vector unitario que representaría la dirección del eje y^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0) y [a] es un vector unitario que representaría la dirección del eje z^1 con respecto al sistema cartesiano de referencia (x^0,y^0,z^0).

Como ejemplo, en el caso de ser una única rotación alrededor del eje X:

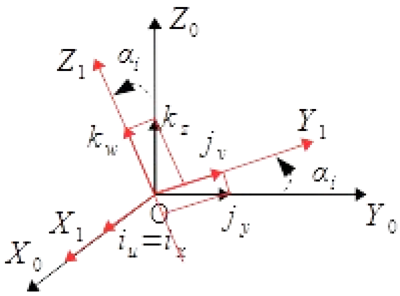

Ilustración 33: Relación de rotación de un ángulo α sobre el eje X en un sistemas de coordenadas

$$P(x,y,z)=[P_x,P_y,P_z]^T=P_x\vec{i}_x+P_y\vec{j}_y+P_z\vec{k}_z$$
$$P(u,v,w)=[P_u,P_v,P_w]^T=P_u\vec{i}_u+P_v\vec{j}_v+P_w\vec{k}_w$$
$$\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{pmatrix}=R(x,\alpha)\begin{pmatrix}P_u\\P_v\\P_w\end{pmatrix}$$

Aplicando el producto tensorial, producto de Kronecker:

$$R(x,\alpha)=\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}P_u & P_v & P_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{i}_x\vec{i}_u & \vec{i}_x\vec{j}_v & \vec{i}_x\vec{k}_w\\ \vec{j}_y\vec{i}_u & \vec{j}_y\vec{j}_v & \vec{j}_y\vec{k}_w\\ \vec{k}_z\vec{i}_u & \vec{k}_z\vec{j}_v & \vec{k}_z\vec{k}_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i\\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i\end{pmatrix}$$

Si se interpreta este resultado, se ve que el primer elemento (fila 1-columna 1) vale "1" precisamente por realizarse un giro al rededor del eje X, y que las componentes dependientes del ángulo (fila 2-columna 2 ; fila 2-columna 3 ; fila 3-columna 2 ; fila 3-columna 3), lo son por contemplar la relación de los vectores unitarios $\vec{j}_v,\vec{k}_w$ respecto a las otras dos componentes $\vec{j}_y,\vec{k}_z$.

Y aplicado al problema (lado derecho de la igualdad $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T={}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5={}^2A_5$):

$$R=\begin{pmatrix}\vec{i}_x\vec{i}_u & \vec{i}_x\vec{j}_v & \vec{i}_x\vec{k}_w\\ \vec{j}_y\vec{i}_u & \vec{j}_y\vec{j}_v & \vec{j}_y\vec{k}_w\\ \vec{k}_z\vec{i}_u & \vec{k}_z\vec{j}_v & \vec{k}_z\vec{k}_w\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}C\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)-S\theta_5(C\theta_3S\theta_4-C\theta_4S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3)-S\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4) & 0\\ C\theta_5(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3)+S\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3C\theta_4-S\theta_3S\theta_4)-S\theta_5(C\theta_3S\theta_4+C\theta_4S\theta_3) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y como puede verse, el resultado obtenido es igual al que ya existiera para tres motores con ejes paralelos del apartado "Análisis de la orientación y del ángulo de ataque" en el "Caso 4-2", salvo la numeración correspondiente a las diferentes variables articulares.
Por tanto, se puede observar que existe un plano de ataque sobre el que se realiza la aproximación al punto final de destino (componente sobre el eje local z=0 por tener los ejes de rotación paralelos), y que sobre este plano se pueden tomar un número ilimitado de posibles ángulos para resolver el problema con las tres articulaciones restantes de los que, se tomará la solución más oportuna dependiendo de las necesidades o preferencias de la arquitectura del modelo.

De esta forma, se puede determinar la relación de ángulos deseada. De hecho, cualquiera de los ángulos podría ser predefinido, simplificando así las ecuaciones resultantes. Por ejemplo, si se predetermina que el ángulo de ataque al punto final deseado sea un ángulo determinado $\theta_3=Cte$, éste ángulo determinará el resto de ángulos reduciendo el número de variables articulares y, por tanto, simplificando el problema.

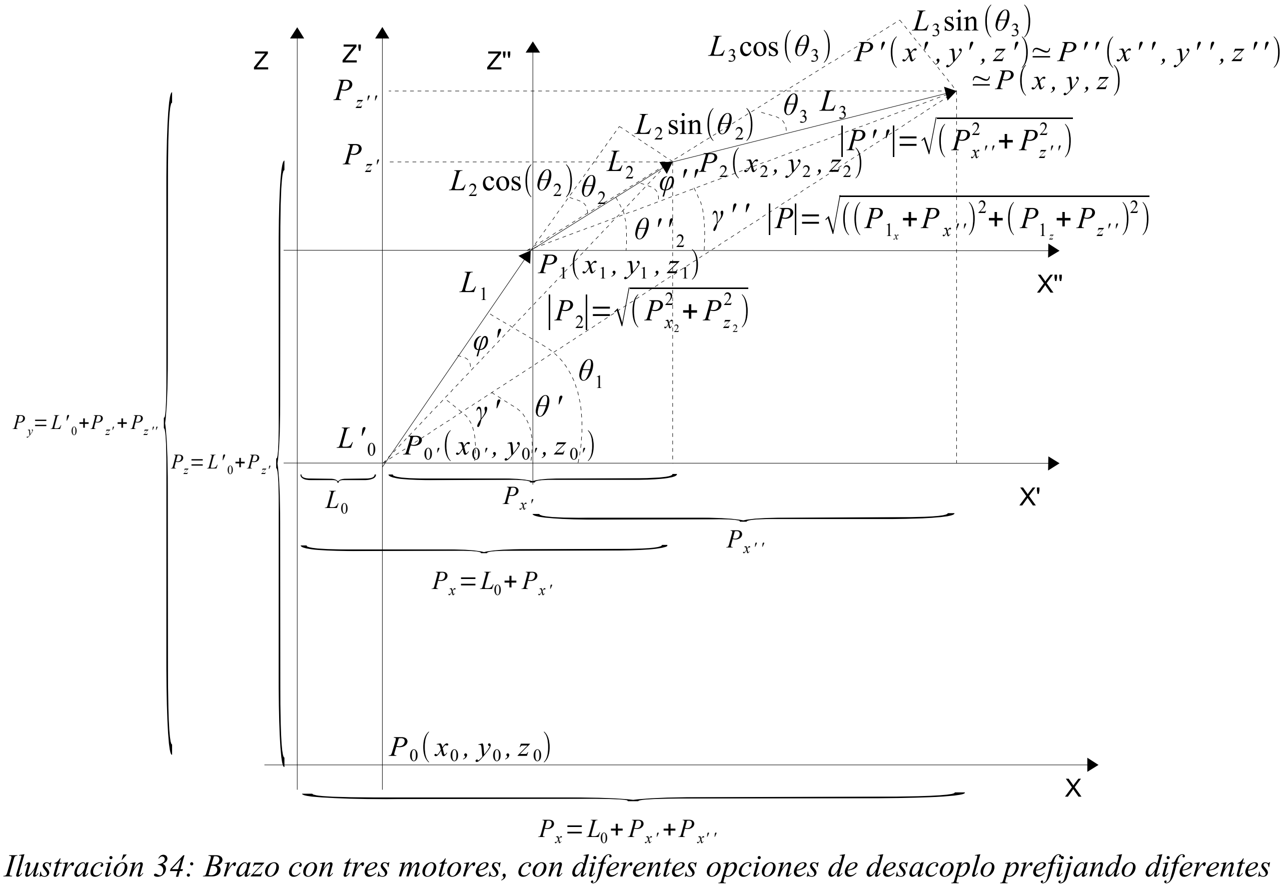

Ilustración 34: Brazo con tres motores, con diferentes opciones de desacoplo prefijando diferentes ángulos

Así se puede observar que si, por ejemplo, se predetermina el ángulo θ_3 (antes θ_5 en el "Caso 4-2") a un valor mayor, se reducirá el valor correspondiente a los ángulos θ_1 (antes θ_3) y θ_2 (antes θ_4) .

Un punto de vista diferente es el tratamiento de los ángulos como variables que puedan ser tratadas, no como una opción de cara a la arquitectura o al diseñador, sino como una variable a maximizar. En este sentido se podrían obtener las igualdades necesarias de los ángulos en función de uno de ellos, hacer la derivada respecto a este ángulo e igualar a cero para buscar el valor máximo. Y lo que sí sería necesario, sería determinar qué ángulo sería el objeto de este análisis.

Así, por ejemplo, se pueden recuperar las igualdades correspondientes a los ángulos θ_3 y θ_4 en función de θ_5 .

Se podría utilizar alguna de las componentes del punto en la matriz completa en el apartado de Cinemática Directa $T={}^0A_5={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5$:

$$
\begin{aligned}
&P_x=L_2S\theta_1-L'_2C\theta_1S\theta_2+L_3C\theta_1C\theta_2+L'_3S\theta_1S\theta_3...\\
&...+L_5C\theta_5(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3))...\\
&...+L_5S\theta_5(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3))...\\
&...+L_4C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+L_4S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-L'_3C\theta_1S\theta_2C\theta_3
\end{aligned}
$$

Si se deriva respecto a θ_5 :

$$
\begin{aligned}
&\partial P_x/\partial\theta_5=-L_5S\theta_5(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3))\\
&\qquad...+L_5C\theta_5(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3))=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_5S\theta_5(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)) =\\
&\qquad L_5C\theta_5(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&S\theta_5(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)) =\\
&\qquad C\theta_5(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&S\theta_5/C\theta_5=(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3))/...\\
&\qquad...(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tan(\theta_5)=(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3))/...\\
&\qquad...(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\theta_5=arctg\,((C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3))/\\
&\quad(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)))=\\
&\qquad atan\,((C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)),\\
&\qquad(C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)))=\\
&\qquad atan2\,((C\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)-S\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)),\\
&\qquad(C\theta_4(S\theta_1S\theta_3-C\theta_1S\theta_2C\theta_3)+S\theta_4(C\theta_3S\theta_1+C\theta_1S\theta_2S\theta_3)))=
\end{aligned}
$$

Pero no parece tener una solución útil. Y con la segunda (P_y) daría un resultado similar.

$$
\begin{aligned}
&P_y=-L'_2S\theta_2S\theta_1-L_2C\theta_1-L'_3C\theta_1S\theta_3+L_3S\theta_1C\theta_2...\\
&...-L_5C\theta_5(C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)+S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3))...\\
&...-L_5S\theta_5(C\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)-S\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1))...\\
&...-L_4C\theta_4(C\theta_1S\theta_3+S\theta_2C\theta_3S\theta_1)-L_4S\theta_4(C\theta_1C\theta_3-S\theta_2S\theta_1S\theta_3)-L'_3S\theta_2C\theta_3S\theta_1
\end{aligned}
$$

Si se derivara la tercera igualdad (P_z):

$$P_z = L_1 + L_3 S\theta_2 + L'_2 C\theta_2 + L'_3 C\theta_3 C\theta_2 + L_4 C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4) + L_5 C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)$$

$$\partial P_z / \partial \theta_5 = -L_5 C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) = 0$$

Igualdad que puede tener dos posibles soluciones:

$$\theta_3+\theta_4+\theta_5=0$$
$$\theta_5=-\theta_3-\theta_4$$

Valor que tampoco lleva a ningún resultado útil.

O también:

$$\theta_2=\pi/2$$

Otro valor que tampoco lleva a ningún resultado útil.

También se puede intentar usar las matrices resultantes de la segunda inversa. Y en este caso quedarían:

$$({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}T = \begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T =$$

$$\begin{pmatrix} -S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & -r_2 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 \\ C\theta_2 & S\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_1 & S\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 C\theta_2 & C\theta_2 S\theta_1 & S\theta_2 & -L'_2 - L_1 S\theta_2 \\ S\theta_1 & -C\theta_1 & 0 & -L_2 \\ C\theta_1 S\theta_2 & S\theta_1 S\theta_2 & -C\theta_2 & L_1 C\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_{11}(n) & f'_{11}(o) & f'_{11}(a) & P_x \\ f'_{12}(n) & f'_{12}(o) & f'_{12}(a) & P_y \\ f'_{13}(n) & f'_{13}(o) & f'_{13}(a) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^2A_5 =$$

$${}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & L'_3 C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & L'_3 S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & L_4 C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & L_4 S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & L_5 C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & L_5 S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 & L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\ 0 & 0 & 1 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se pueden extraer los datos de la última columna de la derecha de la igualdad (valores que resultan ser iguales que los datos no simplificados del caso anterior):

$$
\begin{aligned}
f_{21}(p) &= -C\theta_1 S\theta_2 P_x - S\theta_2 S\theta_1 P_y + C\theta_2 P_z - (L'_2 + L_1 C\theta_2) \quad = \\
&\quad L_4 C(\theta_3+\theta_4) + L'_3 C\theta_3 + L_5 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) \\
f_{22}(p) &= S\theta_1 P_x - C\theta_2 P_y - L_2 = L_4 S(\theta_3+\theta_4) + L'_3 S\theta_3 + L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)
\end{aligned}
$$

Y derivando la primera de ellas:

$$
\begin{aligned}
&\partial f_{21}(p)/\partial\theta_5 = -L_5 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) = 0 \\
&\theta_3+\theta_4+\theta_5 = 0 \\
&\theta_5 = -\theta_3-\theta_4
\end{aligned}
$$

Otro valor que tampoco lleva a ningún resultado útil.

Se puede volver al desarrollo matricial anterior que relaciona el último Sistema de Coordenadas con el correspondiente al Origen de Coordenadas del segundo grupo de motores.

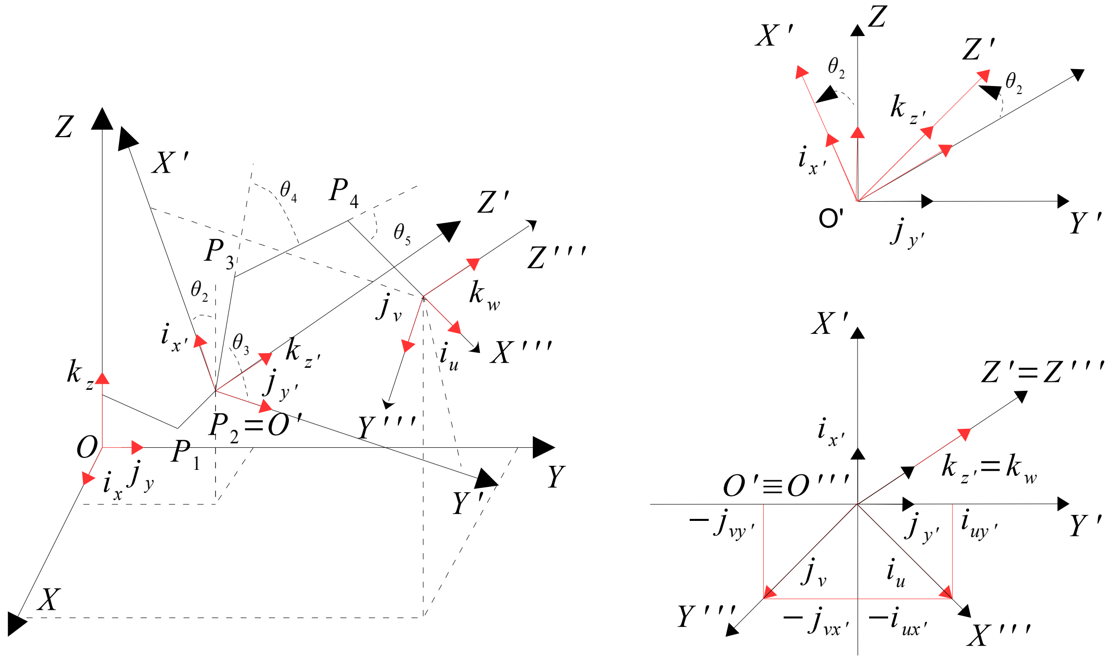

Ilustración 35: Relación de vectores directores de los ejes de los diferentes Sistemas de Coordenadas del segundo grupo de motores

Como se puede comprobar, los ejes se ajustan al actual caso "Caso 1-0" presentado, ya que los motores se sitúan en el plano $X'''Y'''$ del último Sistema de Coordenadas. Por tanto, si se analizan las matrices resultantes, se pueden sacar ciertas expresiones dependiendo de las condiciones del problema.

$$
R = \begin{pmatrix}
\vec{i}_{x'}\vec{i}_u & \vec{i}_{x'}\vec{j}_v & \vec{i}_{x'}\vec{k}_w \\
\vec{j}_{y'}\vec{i}_u & \vec{j}_{y'}\vec{j}_v & \vec{j}_{y'}\vec{k}_w \\
\vec{k}_{z'}\vec{i}_u & \vec{k}_{z'}\vec{j}_v & \vec{k}_{z'}\vec{k}_w
\end{pmatrix} =
$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 - C\theta_4 S\theta_3) & -C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) - S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & 0 \\ C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) & C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 \\ S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, se puede considerar el ángulo deseado para θ_5 y analizar los elementos de la matriz relacionados.
Por ejemplo, si se desea colocar una herramienta en el extremo del brazo y que ésta actuara con un ángulo vertical respecto al Sistema de Coordenadas del segundo grupo de motores, se deberían cumplir las siguientes condiciones:

$\vec{j}_{y'}\vec{i}_u = 0$ (Vectores Directores perpendiculares)
$\vec{j}_{y'}\vec{j}_v = -1$ (Vectores Directores paralelos y de sentido contrario)
$\vec{i}_{x'}\vec{i}_u = -1$ (Vectores Directores paralelos y de sentido contrario)
$\vec{i}_{x'}\vec{j}_v = 0$ (Vectores Directores perpendiculares)

Donde la primera igualdad $\vec{j}_{y'}\vec{i}_u = 0$ resulta ser igual a la cuarta expresión $\vec{i}_{x'}\vec{j}_v = 0$, y la segunda igualdad $\vec{j}_{y'}\vec{j}_v = -1$ resulta ser igual a la tercera expresión $\vec{i}_{x'}\vec{i}_u = -1$.

De la primera expresión:

$$\vec{j}_{y'}\vec{i}_u = 0$$
$$C\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + S\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) = 0$$
$$(C\theta_5 / C\theta_5)(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) + (S\theta_5 / C\theta_5)(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) = 0$$
$$(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) = -(S\theta_5 / C\theta_5)(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4)$$

Y de la segunda expresión:

$$\vec{j}_{y'}\vec{j}_v = -1$$
$$C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(C\theta_3 S\theta_4 + C\theta_4 S\theta_3) = -1$$
$$C\theta_5(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) - S\theta_5(-(S\theta_5 / C\theta_5)(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4)) = -1$$
$$(C\theta_5)^2(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) + (S\theta_5)^2(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) = -C\theta_5$$
$$(C\theta_3 C\theta_4 - S\theta_3 S\theta_4) = -C\theta_5$$
$$C(\theta_3 + \theta_4) = -C\theta_5$$
$$\theta_3 + \theta_4 = 180 - \theta_5$$
$$\theta_5 = 180 - \theta_3 - \theta_4$$

Por tanto, parece que tampoco se llega a ningún resultado determinante, más allá de la interdependencia entre las variables articulares que ya se conocía. Aunque esta expresión sí podría ser usada en alguno de los análisis anteriores para la resolución de alguno de los sistema de ecuaciones generados.

Y lo mismo sucedería si se intentara buscar un ángulo θ_5 con una cierta condición de orientación respecto al Origen de Coordenadas del problema completo (O).

En este caso, se partiría del desarrollo matricial correspondiente al problema completo.

$$T={}^0A_5={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 \;=$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -S\theta_2 & 0 & C\theta_2 & -r_2S\theta_2 \\ C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & r_2C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\;\ldots$$

$$\begin{pmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 & 0 & r_3C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 & 0 & r_3S\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & r_4C\theta_4 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 & r_4S\theta_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_5 & -S\theta_5 & 0 & r_5C\theta_5 \\ S\theta_5 & C\theta_5 & 0 & r_5S\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero en este caso, la resolución del sistema de ecuaciones sería más complejo por la longitud de los elementos que formarían la matriz resultante.

Aún así la matriz daría una serie de elementos con los que se podría trabajar por su simplicidad:

$$R=\begin{pmatrix} \vec{i}_x\vec{i}_u & \vec{i}_x\vec{j}_v & \vec{i}_x\vec{k}_w \\ \vec{j}_y\vec{i}_u & \vec{j}_y\vec{j}_v & \vec{j}_y\vec{k}_w \\ \vec{k}_z\vec{i}_u & \vec{k}_z\vec{j}_v & \vec{k}_z\vec{k}_w \end{pmatrix}\;=$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_x\vec{i}_u & \vec{i}_x\vec{j}_v & C\theta_1\,C\theta_2 \\ \vec{j}_y\vec{i}_u & \vec{j}_y\vec{j}_v & S\theta_1\,C\theta_2 \\ C\theta_2\,C(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & -C\theta_2\,S(\theta_3+\theta_4+\theta_5) & S\theta_2 \end{pmatrix}$$

Y por otra parte, según la imagen, los productos de Vectores Directores a considerar, serían:

$\vec{k}_z(\vec{i}_u C\theta_2)=-1$ (Vectores Directores paralelos y de sentido contrario)
$\vec{k}_z\vec{j}_v=0$ (Vectores Directores perpendiculares)
$\vec{k}_z\vec{k}_w=0$ (Vectores Directores perpendiculares)
$\vec{j}_y(\vec{k}_w C\theta_2)=0$ (Vectores Directores perpendiculares)
$\vec{i}_x(\vec{k}_w S\theta_2)=-1$ (Vectores Directores paralelos y de sentido contrario)

De la primera expresión:

$$\vec{k}_z(\vec{i}_u C\theta_2)=-1$$
$$C\theta_2 C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)C\theta_2=-1$$
$$(C\theta_2)^2\,C(\theta_3+\theta_4+\theta_5)=-1$$

De donde, las posibles soluciones son:

$\theta_2=0\pm2\pi$ y $\theta_3+\theta_4+\theta_5=\pi\pm(2\pi)$
$\theta_2=\pi\pm(2\pi)$ y $\theta_3+\theta_4+\theta_5=0\pm(\text{ 2pi})$

De la segunda expresión:

$$\vec{k}_z \vec{j}_v = 0$$
$$-C\theta_2 S(\theta_3+\theta_4+\theta_5)=0$$

De donde, las posibles soluciones son:

$$\theta_2=(\pi/2)\pm\pi$$
$$\theta_3+\theta_4+\theta_5=0 \Rightarrow \theta_5=-\theta_3-\theta_4$$

De la tercera expresión:

$$\vec{k}_z \vec{k}_w = 0$$
$$S\theta_2=0$$

De donde, una posible solución es $\theta_2=0\pm\pi$.

De la cuarta expresión:

$$\vec{j}_y(\vec{k}_w C\theta_2)=0$$
$$S\theta_1 C\theta_2 C\theta_2=0$$
$$S\theta_1 (C\theta_2)^2=0$$

De donde, las posibles soluciones son $\theta_1=0\pm2\pi$ y $\theta_2=(\pi/2)\pm\pi$.

De la quinta expresión:

$$\vec{i}_x(\vec{k}_w S\theta_2)=-1$$
$$C\theta_1 C\theta_2 S\theta_2=-1$$

De donde, las posibles soluciones son:

$$\theta_1=0\pm2\pi \text{ y } \theta_2=(-\pi/4)\pm(\pi)$$
$$\theta_1=-\pi\pm2\pi \text{ y } \theta_2=(\pi/4)\pm(\pi)$$

Y de todas estas soluciones, ninguna parece ser una solución razonable, dado que la mayoría sólo permite un valor fijo de θ_1 o θ_2 , o muestra la misma interdependencia que en casos ya descritos con anterioridad.