3장. 알고리즘의 성능

Contents

주요 내용

- 01 알고리즘 수행 시간이란
- 02 알고리즘 복잡도

학습목표

- 알고리즘 수행 시간의 의미를 단순한 예로 시작해서 이해하도록 한다.
- 알고리즘 복잡도를 표현하는 방법을 이해한다.
- 몇 가지 다른 관점으로 알고리즘 복잡도에 대해 직관적으로 이해한다.

01 알고리즘 수행 시간이란

알고리즘의 수행 시간

- 입력의 크기 n에 대해 시간이 얼마나 걸리는지로 표현한다
- 입력의 크기는 대부분 자명함
  - 정렬: 정렬할 원소의 수
  - 색인: 색인에 포함된 원소의 수

  …

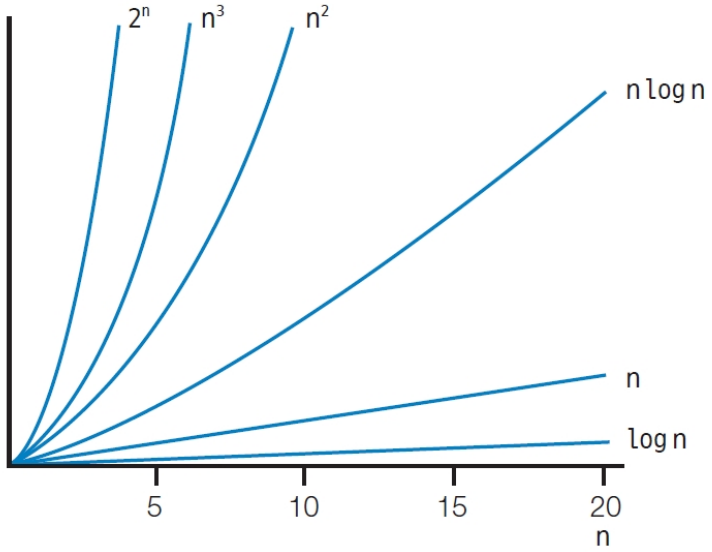


그림 3-1 여러 함수의 증가율과 점근적 개념

n	$0.1n^2$	$0.1n^2+n+100$
10	10	120
20	40	160
50	250	400
100	1,000	1,200
1,000	100,000	101,100

최고차항이 2차인 경우 n이 커지면
궁극적으로 2차 항이 지배한다.

알고리즘 수행 시간의 예

```
sample1(A[], n):
        k ← n/2
        return A[k]
```

상수 시간

```
sample2(A[], n):
        sum ← 0
        for i ← 0 to n-1
                sum ← sum + A[i]
        return sum
```

n에 비례하는 시간

```
sample3(A[], n):
        sum ← 0
        for i ← 0 to n-1
                for j ← 0 to n-1
                        sum ← sum + A[i] * A[j]
        return sum
```

n^2에 비례하는 시간

```
sample4(A[], n):
        sum ← 0
        for i ← 0 to n-1
                for j ← 0 to n-1
                        k ← A[0...n-1]에서 임의로 n/2개를 뽑은 것들 중 최댓값
                        sum ← sum + k
        return sum
```

n^3에 비례하는 시간

```
sample5(A[], n):
        sum ← 0
        for i ← 0 to n-2
                for j ← i+1 to n-1
                        sum ← sum + A[i] * A[j]
        return sum
```

n^2에 비례하는 시간

```
factorial(n):
        if (n = 1) return 1
        return n* factorial(n- 1)
```

n에 비례하는 시간

02 알고리즘 복잡도

알고리즘 점근적 복잡도 표현

점근적 복잡도Asymptotic Complexity

입력의 크기가 충분히 클 때의 복잡도

직관적 맛보기

입력의 크기: n

알고리즘이 기껏해야 n^2에 비례하는 시간이 든다 → $O(n^2)$

알고리즘이 적어도 n^2에 비례하는 시간이 든다 → $\Omega(n^2)$

알고리즘이 항상 n^2에 비례하는 시간이 든다 → $\Theta(n^2)$

점근적 복잡도

O-표기

$O(n^2)$: 최고차항의 차수가 n^2을 넘지 않는 모든 함수의 집합

Ω-표기

$\Omega(n^2)$: 최고차항의 차수가 n^2보다 작지 않은 모든 함수의 집합

Θ-표기

$\Theta(n^2)$: 최고차항의 차수가 n^2인 모든 함수의 집합

O-표기

$O(f(n))$: 빅 오 Big Oh

- 최고차항의 차수가 $f(n)$보다 작거나 같은 모든 함수
- 점근적 상한
- 예, $O(n), O(n \log n), O(n^2), O(2^n), \ldots$
- $O(n^2) = \{n^2, 5n^2+7n+12, 100n^2-2n+9, n\log n+5n, 3n+9, 150, \ldots\}$
  - 최고차항의 차수가 2차 이하인 모든 함수
- $5n^2+7n+12 \in O(n^2)$ 으로 표기해야 하나 편의상 $5n^2+7n+12 = O(n^2)$ 으로 표기함

Ω-표기

$\Omega(f(n))$: 빅 오메가Big Omega

- 최고차항의 차수가 $f(n)$보다 크거나 같은 모든 함수
- 점근적 하한
- 예, $\Omega(n)$, $\Omega(n \log n)$, $\Omega(n^2)$, $\Omega(2^n)$, …
- $\Omega(n^2) = \{n^2, 5n^2+7n+12, 100n^2-2n+9, n^3+5n, 7n^5+n^3+9, 2^n, n!, \ldots\}$

  - 최고차항의 차수가 2차 이상인 모든 함수

- $5n^3+12 \in \Omega(n^2)$ 으로 표기해야 하나 편의상 $5n^3+12 = \Omega(n^2)$으로 표기함

Θ-표기

$\Theta(f(n))$: 빅 세타Big Theta

- 최고차항의 차수가 $f(n)$과 동일한 모든 함수
- 예, $\Theta(n), \Theta(n \log n), \Theta(n^2), \Theta(2^n), \ldots$
- $\Theta(n^2) = \{n^2, 5n^2+7n+12, 100n^2-2n+9, \ldots\}$
- 최고차항의 차수가 2차인 모든 함수
- $5n^2+12 \in \Theta(n^2)$ 으로 표기해야 하나 편의상 $5n^2+12 = \Theta(n^2)$ 으로 표기함

표기법 사용 예

```
sample4(A[], n):
        sum ← 0
        for i ← 0 to n-1
                for j ← 0 to n-1
                        k ← A[0...n-1]에서 임의로 n/2개를 뽑은 것들 중 최댓값
                        sum ← sum + k
        return sum
```

알고리즘 sample4()의 수행 시간은 $\Theta(n^3)$이다

수학적 정의

$O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c > 0, n_0 > 1 \text{ s.t. } \forall n \geq n_0, f(n) \leq cg(n) \}$

조금 풀어서 표현하면

$O(g(n)) = \{ f(n) \mid$ 충분히 큰 모든 n에 대해 $f(n) \leq cg(n)$인
양의 상수 c가 존재한다$\}$

✓ 점근적 복잡도를 수학적으로 증명할 때는 이런 방식의 정의가 필요하지만
자료구조 과목 수준에서는 앞의 직관적 정의로 충분하다

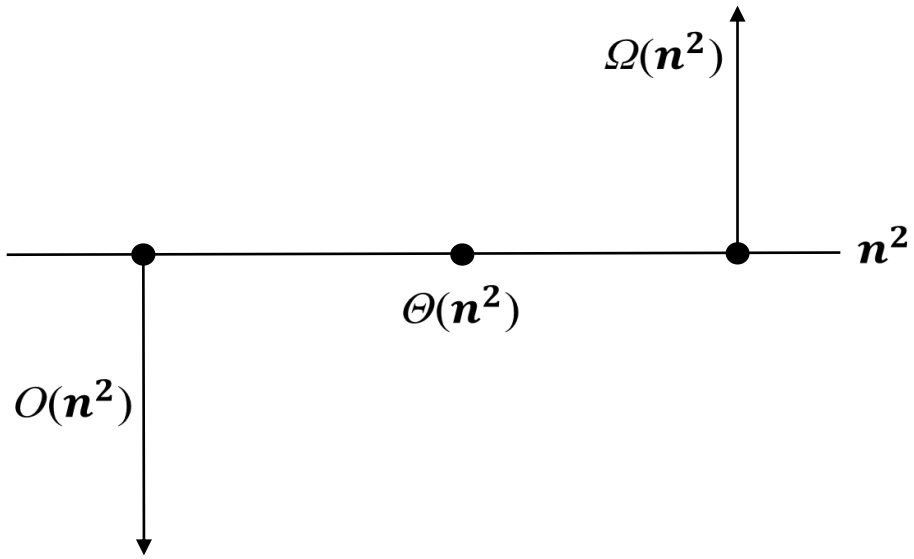
점근적 표기에서 =는 ∈의 대용

어떤 알고리즘의 수행 시간 T(n) = O(nlogn)이라 하면
T(n) ∈ O(nlogn)이란 뜻이다.

즉, T(n)은 O(nlogn)에 속하는 함수란 뜻이다.

그러므로, O(nlogn) = T(n)과 같은 표현은 적절하지 않다.

참고: 시각적 의미



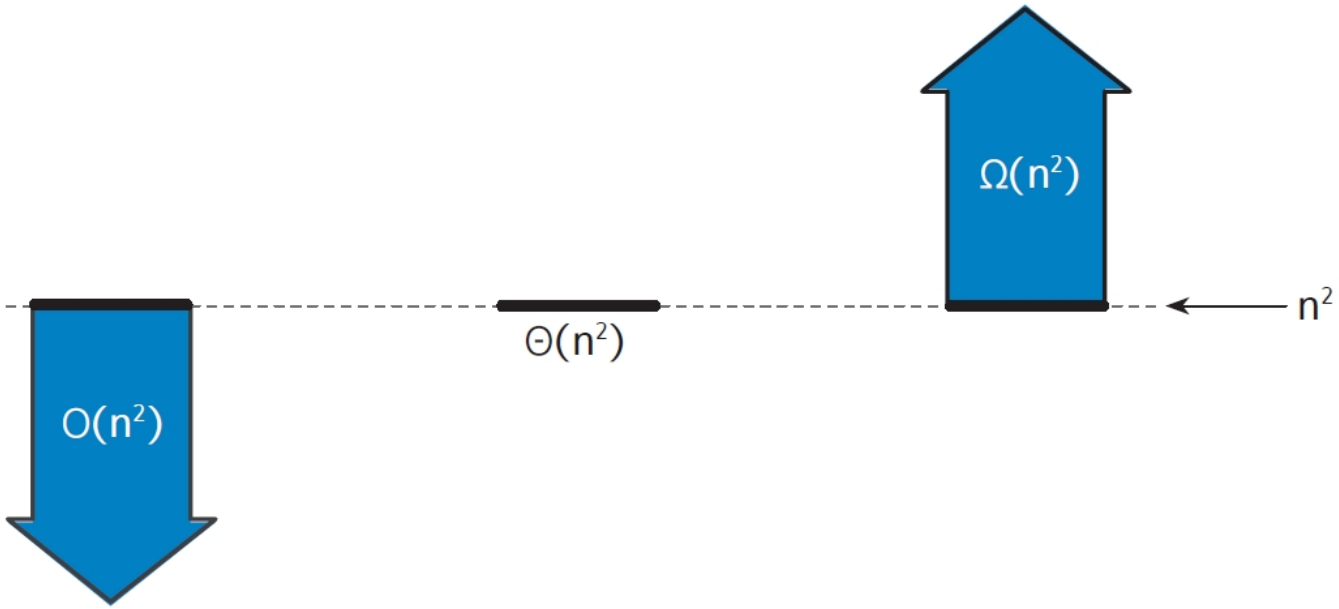


그림 3-3 점근적 표현의 시각적 설명

O, Ω, Θ 표기법 사용해 보기

```
alg1(A[], n):
        k ← n/2
        return A[k]
```

n에 관계없이 상수 시간이 소요된다
Ω(1)이기도 하고 O(1)이기도 하다
Θ(1): 가장 정확한 표현

```
alg2(A[], n):
        sum ← 0
        for i ← 0 to n-1
                sum ← sum + A[i]
        return sum
```

항상 n에 비례하는 시간이 소요된다
Ω(n)이기도 하고 O(n)이기도 하다
Θ(n): 가장 정확한 표현

```
alg3(A[], n) :
    sum ← 0
    if (n이 홀수)
        for i ← 0 to n-1
            sum ← sum + A[i]
    return sum
```

최악의 경우 n에 비례하는 시간이 소요된다
최선의 경우 상수 시간이 소요된다
Ω(1)이고 O(n)이다
최선의 경우 Θ(1), 최악의 경우 Θ(n)이라고 말한다

```
alg4(A[], n):
    sum ← 0
    for i ← 0 to n-2
        for j ← i+1 to n-1
            sum ← sum + A[i] * A[j]
    return sum
```

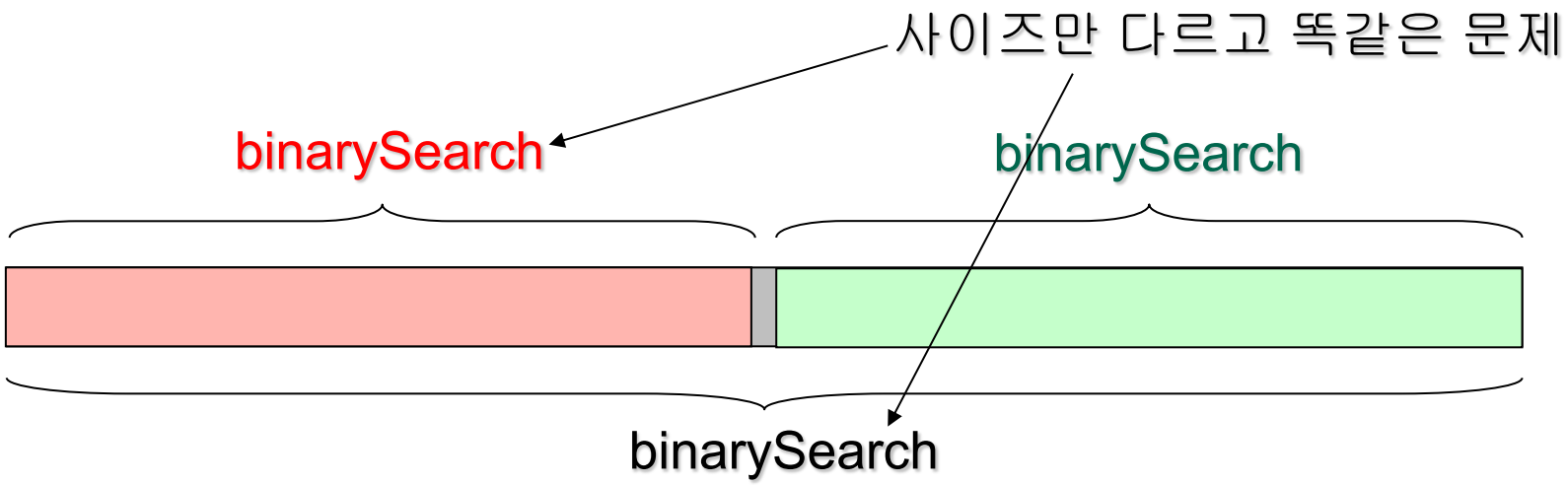
항상 n^2에 비례하는 시간이 소요된다
$\Omega(n^2)$이기도 하고 $O(n^2)$이기도 하다
$\Theta(n^2)$: 가장 정확한 표현

재귀 알고리즘의 복잡도 분석 예

```
binarySearch (A[], x, low, high) :
        // A: array,  x: search key,  low, high: array bounds
        if (low > high) return "Not found"
        mid ← (low + high)/2
        if (A[mid] < x) return binarySearch(A, x, mid+1, high)
        else if (A[mid] > x) return binarySearch(A, x, low, mid-1)
        else return mid
```

배열의 중앙에 있는 원소와 비교하고 나면
자신과 똑같지만 크기가 반이 되는 문제를
만난다. 즉, T(n) = c + T(n/2)
이런 식으로 크기를 반씩 줄여나가면
~$\log_2 n$번 만에 크기 1인 문제를 만나게 된다.
문제의 크기를 반으로 줄이는데 필요한 작업은
상수 시간이므로 최대 $\log_2 n$에 비례하는 시간에 끝난다.

수행 시간:
- 최악의 경우 Θ(log n),
- 최선의 경우 Θ(1),
- 앞에 수식어 없이 그냥 말하면 O(logn)



Thank You