第一次作业. 学号: 2022200536, 张旭辉

2. 除法算法的证明: ，显然 S 非空且是自然数集合，

① 存在性: 构造集合 $S=\{a-kb: k\in\mathbb{Z} 且 a-kb\geq 0\}$，由良序原则，存在一个最小 $r\in S$，使得 $r=a-qb$ 成立. 即 $a=qb+r$. 存在性得证.

② 下证 $r<b$: 采用反证法. 假设 $r\geq b$ ~~$\Rightarrow a-qb\geq r$~~, 假设 $r=b+k$，$k\in\mathbb{Z}$，$a=qb+b+k=b(1+q)+k$，$\because 1+q>q$ $\therefore k<r$，这与 r 是 S 中的最小元素矛盾. 故 $r<b$.

③ 唯一性: 假设存在另一组整数对 q_1, r_1，则有 $a=qb+r$ 和 $a=q_1b+r_1$，则有 $qb+r=q_1b+r_1$，设 $q_1>q$，则 $r_1<r$

$\Rightarrow b=\frac{r_1-r}{q-q_1}$

因为 $0<r_1\leq b$，$0<r\leq b$ 故 $r_1-r<b$，又因 q_1, q 为整数，则 $q-q_1\geq 1$

$\therefore \frac{r_1-r}{q-q_1}<b$，这与 $b=\frac{r_1-r}{q-q_1}$ 矛盾. 故唯一性得证.

综上，定理得证.

3. 证明整数平方形如 $3k$ 或 $3k+1$.

证: $\forall a\in\mathbb{Z}$，设 $a=3m$ 或 $a=3m+1$ 或 $a=3m+2$，$m\in\mathbb{Z}$

① 当 $a=3m$ 时，$a^2=(3m)^2=9m^2=3(3m^2)$，由除法定理，此时 3 整除 a，$k=3m^2$，a 形如 $3k$

② 当 $a=3m+1$ 时，$a^2=(3m+1)^2=9m^2+6m+1=3(3m^2+2m)+1$，同理，此时 a 除以 3 的余数 $k=3m^2+2m$，a 形如 $3k+1$

③ 当 $a=3m+2$，$a^2=(3m+2)^2=9m^2+12m+4=3(3m^2+4m+1)+1$，同理 $k=$

此时 a 形如 $3k+1$

综上，对 $\forall a\in\mathbb{Z}$，其平方形如 $3k$ 或 $3k+1$，k 为整数.