第四次作业.

张旭群.

2022205036

计科5班.

1. 解:

易知，对$\forall g\in G$，其阶可整除G的阶，G为阿贝尔群

已知G的阶为pq，其中p、q为素数

对$\forall g\in G$，其阶只能为$1, p, q, pq$

对$g_1 \cdot g_2$，~~显然$(g_1 g_2)$不、$(g_1 g_2)^p$、$(g_1 g_2)^q$~~

显然$(g_1 \cdot g_2)$不一定为e，$(g_1 \cdot g_2)^p = g_1^p g_2^p$不一定为$e$，

$(g_1 \cdot g_2)^q = g_1^q \cdot g_2^q$不一定为$e$，

故只能是$(g_1 \cdot g_2)^{pq} = \cancel{g_1^{pq} \cdot g_2}\ e$

因此$g_1 \cdot g_2$阶为pq.

2. 证:

已知G是循环群，不访设$\langle g_1 \rangle = G$，即g_1为生成元，

$g_1 \in G$

由题可知，H是G的正规子群，则$G/H = \{(gH)^n : \cancel{g\in G}\ n\in\mathbb{Z}\}$

若证G/H是循环群，只需说明G/H至少有一个生成元:

$\because G = \langle g_1 \rangle = \{ g_1^i \mid i\in\mathbb{Z} \}$

$\therefore (g_1H)^0 = eH \in G/H$

$(g_1H)^1 = g_1H \in G/H$

$(g_1H)^2 = (g_1H)\cdot(g_1H) = g_1^2 \cdot H \in G/H$

$(g_1H)^3 = (g_1H)\cdot(g_1H)\cdot(g_1H) = g_1^3 \cdot H \in G/H$

$\vdots$

$(g_1H)^i = \underbrace{(g_1H)\cdots(g_1H)}_{i个} = g_1^i H \in G/H$

故$G/H = \langle g_1H \rangle$

得证.

3. 证:

$\because G$是循环群，$\forall a, b\in G$有$\phi(ab) = \phi(a)\cdot\phi(b)$

$\forall g\in G$且存在$k\in\mathbb{Z}$使得$g = g^k$，有$\phi(g) = \phi(g^k) = \phi(g)\cdots\phi(g)$

$= \phi(g)^k$

$\therefore \phi(G)$是循环群.

$\because G$是交换群，且$\forall a, b\in G$有$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

G是交换律，故$ab = ba$

$\therefore \phi(b)\phi(a) = \phi(ba) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

$\therefore \phi(G)$是交换群.

4. 证:

$\because p$和q是素数，G阶为pq

故对$\forall g\in G$，阶必为$1, p, q$或pq

~~假设~~ 不访设 $g_1, g_2\in G$，且g_1的阶为p，g_2的阶为q，题1已证得

~~则 $g_1 g_2$~~

$g_1 g_2$的阶为pq，即为群的阶

$\therefore$ ~~即~~ $g_1 g_2$为G的一个生成元

$\therefore G$是循环群.