第三次作业.

姓名：张旭群. 学号：2022209S936. 计科3班

1.解:

可以知道，$\phi(221)=\phi(13\times 17)=\phi(13)\times\phi(17)$

$=192$（13，17互素）

因为113与192互素，易得

$x^{113}\equiv x^{(113 \bmod 192)} \pmod{221}$ ①

这是因为 $x^{\phi(221)}\equiv 1 \pmod{221}$，故 $x^{192}\equiv 1 \pmod{221}$

由①可得 $x^{-79}\equiv 2 \pmod{221}$

等价于 $x\equiv 2^{-79} \pmod{221}$

2.证:

① $\forall h_1, h_2\in H$，$k_1, k_2\in K$，有 $h_1k_1\in HK$，

$h_2k_2\in HK$，又 $h_1, h_2, k_1, k_2$ 均 $\in G$，

则 $h_1k_1\cdot h_2k_2=h_1h_2k_1k_2$.

$\because h_1h_2\in H$，$k_1k_2\in K$（因为H、K为G的子群），

$\therefore h_1h_2\cdot k_1k_2\in HK$

故有 $h_1k_1\cdot h_2k_2\in HK$，封闭性得证

② 对 $h_1k_1\in HK$ 且 $h_1k_1\in G$，$(h_1k_1)^{-1}=k_1^{-1}h_1^{-1}$

又G是阿贝尔群，故 $(h_1k_1)^{-1}=(k_1h_1)^{-1}=h_1^{-1}k_1^{-1}=k_1^{-1}h_1^{-1}$

$\because h_1^{-1}\in H$，$k_1^{-1}\in H$，故 $(h_1k_1)^{-1}=h_1^{-1}k_1^{-1}\in HK$，逆元存在得证.

故HK是G的子群.

若G不是阿贝尔群，则对 $h_1k_1\in HK$，$(h_1k_1)^{-1}=k_1^{-1}h_1^{-1}$，

其中 $h_1^{-1}\in H$，$k_1^{-1}\in K$，$k_1^{-1}h_1^{-1}\notin HK$，故 $\forall h_1k_1\in HG$，

其逆元 $(h_1k_1)^{-1}$ 不一定存在于HG

故G不是阿贝尔群时，HG不一定是G的子群

3.解:

$Z_{17}^*$ 是阶为16的循环群，即 $\phi(17)=16$

因为 $Z_{17}^*$ 中与16互素的有8个数，即生成元个数为8.

$\because 9=3^2$，$\gcd(2,16)=2\neq 1$，故9的阶为 $16/2=8$，

不为16，9不是生成元

$\because 10=3^3 \bmod 17$，$\gcd(3,16)=1$，故10的阶为16，

10为生成元

4.有证:

当群没有非平凡子群时，群的子群是{e}和G本身.

若 $G=\{e\}$，显然G是循环群;

对 $g\in G$ 且 $g\neq e$，$\langle g\rangle=\{g^k \mid k\in Z\}$ 为G的子群

故 $G=\langle g\rangle$ 为循环群