



中国研究生创新实践系列大赛  
中国光谷·“华为杯”第十九届中国研究生  
数学建模竞赛

学    校	西安电子科技大学
--------	----------

参赛队号	A 22107010047
------	---------------

队员姓名	1.汪乐
	2.杨奥迪
	3.杨富森

# 中国研究生创新实践系列大赛

## 中国光谷·“华为杯”第十九届中国研究生 数学建模竞赛

题 目      移动场景下 MIMO 毫米波雷达超分辨率定位问题求解

### 摘            要：

在日常家庭生活中，人们可能需要花费大量的时间去寻找随意摆放在家中某些角落的小物品。但如果给某些重要物品贴上电路标签，再利用诸如扫地机器人的全屋覆盖能力，可以精确定位到这些物体，这将极大地提升人们生活的便利性。在自动驾驶或者智能辅助驾驶领域，毫米波雷达作为一个重要的辅助工具已经应用到汽车驾驶中。这些场景更需要精确探测邻近车辆、行人的位置及速度，以便控制车速、转向和刹车防止发生意外。这些都属于移动场景定位问题。如何提升毫米波雷达的角分辨率就成为一个亟需解决的问题。显然，定位的精度越高，应用价值越大，特别是高分辨定位，拥有广阔的应用前景。

针对问题一，本节分析出题目采用**两发四十三收**的 FCMV-MIMO 雷达体制并给出其中一种可能的系统结构。基于该体制建立 FCMV 信号模型、FCMV-MIMO 等效虚拟孔径雷达模型，对目前工程上常用的基线法测距测角进行原理分析。针对基线法测角分辨力不高的缺陷，引入基于盖尔圆的 MUSIC 算法进行超分辨 DOA 估计。综合以上两个算法，本节采用**基线法测距、盖尔圆 MUSIC 算法测角**实现联合定位，并给出定位结果：**目标 1** 距离阵列相位中心 **7.0303m**，与阵列垂直方向夹角为 **0.0011°**；**目标 2** 距离阵列相位中心 **7.0303m**，与阵列垂直方向夹角为 **0.1334°**。

针对问题二，考虑到 MUSIC 算法在低信噪比情况下性能急剧恶化，本节建立基于**压缩感知**的 DOA 估计模型，并提出**基于修正  $L_1$ -SVD 混合范数约束的 CS-DOA 估计算法**。通过迭代正则化参数有效消除经典 CS 算法中多目标临近带来的**伪峰效应**，提高超分辨测角能力。最终给出多目标定位结果：**目标 1** 距离阵列相位中心 **8.2218m**，与阵列垂直方向夹角为 **-0.71°**；**目标 2** 距离阵列相位中心 **8.2218m**，与阵列垂直方向夹角为 **0.71°**。

针对问题三，鉴于压缩感知类算法处理**连续傅里叶字典**场景复杂度过高，本节采用**基于子空间旋转变换的快速 DOA 估计算法**，能够实现在线目标定位。同时针对超分辨算法定位求解带来的**距离、角度二值映射问题**，提出**三维联合、基线法预处理**两种目标匹配定位算法。最终给出 32 个 chirp 周期的定位结果并绘制目标运动轨迹。

针对问题四，本节首先采用**基于特征空间的幅相误差和角度联合迭代优化方法**校正阵元幅相误差，得到目标精确定位结果：**目标 1** 距离阵列相位中心 **6.1246m**，与阵列垂直方向夹角为 **-0.1040°**；**目标 2** 距离阵列相位中心 **6.0056m**，与阵列垂直方向夹角为 **0.1210°**。同时，基于通道间相差平衡思想，本文创新性地构建了**空间相位恒定因子**，并提出**联合相位误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法**，较好地实现对幅相误差的校正，得到了相应的目标高精度定位结果：**目标 1** 距离阵列相位中心 **6.1246m**，与阵列垂直方向夹角为 **-0.1053°**；**目标 2** 距离阵列相位中心 **6.0056m**，与阵列垂直方向夹角为 **0.1183°**。

关键词：FCMV-MIMO 雷达；DOA 估计；压缩感知；幅相误差自校正；超分辨率定位

# 目 录

一、问题背景与问题重述.....	4
1.1 问题背景.....	4
1.2 任务重述.....	5
1.2.1 给定参数及数据文件说明 .....	6
1.2.2 任务描述 .....	6
二、模型假设 .....	7
2.1 题目设定.....	7
2.2 追加假设.....	7
三、符号说明 .....	8
四、模型建立和问题求解.....	9
4.1 问题总览.....	9
4.2 问题一：定位模型建立及求解.....	10
4.2.1 问题分析 .....	10
4.2.1.1 data_q1.mat 数据分析.....	10
4.2.1.2 MIMO 雷达发射接收模型分析.....	11
4.2.2 模型建立 .....	11
4.2.2.1 FCMV-MIMO 雷达系统结构.....	11
4.2.2.2 FCMV 信号模型 .....	12
4.2.2.3 FCMV -MIMO 雷达等效虚拟孔径模型.....	14
4.2.2.4 基线算法实现原理.....	16
4.2.2.5 基于盖尔圆方法的 MUSIC 算法 .....	17
4.2.3 问题求解 .....	20
4.2.3.1 基线算法定位.....	20
4.2.3.2 MUSIC 算法定位.....	22
4.2.3.3 目标定位结果.....	23
4.3 问题二：超分辨算法多目标精确定位.....	25
4.3.1 问题分析 .....	25
4.3.1.1 data_q2.mat 数据分析.....	25
4.3.2 模型建立 .....	25
4.3.2.1 压缩感知理论概述.....	25

4.3.2.2 基于压缩感知的 DOA 估计模型 .....	26
4.3.2.3 基于修正 $l_1$ -SVD 混合范数约束法的 CS-DOA 估计算法 .....	28
4.3.3 问题求解 .....	30
4.3.3.1 距离求解 .....	31
4.3.3.2 目标角度求解 .....	31
4.3.3.3 目标定位及性能分析 .....	32
4.4 问题三：帧时间下低复杂度超分辨定位 .....	34
4.4.1 问题分析 .....	34
4.4.1.1 data_q3.mat 数据分析 .....	34
4.4.2 模型建立 .....	35
4.4.2.1 三维联合目标匹配定位算法 .....	35
4.4.2.1 基线法预处理目标匹配定位算法 .....	36
4.4.2.3 基于子空间旋转变换的快速 DOA 估计算法 .....	37
4.4.3 计算复杂度分析 .....	39
4.4.4 算法时间对比实验 .....	40
4.4.5 问题求解 .....	40
4.5 问题四：鲁棒超分辨定位算法研究 .....	42
4.5.1 问题分析 .....	42
4.5.1.1 data_q4.mat 数据分析问题分析 .....	42
4.5.2 模型建立 .....	43
4.5.2.1 基于特征空间的幅相误差和角度联合迭优化方法 .....	43
4.5.2.1.1 阵元位置误差模型 .....	43
4.5.2.1.2 算法原理 .....	43
4.5.2.2 联合相位误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法 .....	45
4.5.3 问题求解 .....	47
4.5.3.1 基于特征空间的幅相误差和角度联合迭优化方法的目标定位结果 .....	47
4.5.3.2 基于联合幅相误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法的目标定位结果 .....	48
五、工作总结及展望 .....	49
参考文献 .....	50
附 录 .....	51

# 一、问题背景与问题重述

## 1.1 问题背景

在日常家庭生活中，人们可能需要花费大量的时间去寻找随意摆放在家中某些角落的小物品。但如果给某些重要物品贴上电路标签，再利用诸如扫地机器人的全屋覆盖能力，可以精确定位到这些物体，这将极大地提升人们生活的便利性。而在自动驾驶或者智能辅助驾驶领域，雷达就作为一个重要的辅助工具开始应用到汽车驾驶中，更需要精确探测邻近车辆、行人的位置及速度，来控制车速、转向和刹车以免发生意外。这些都属于移动场景定位问题。相比较目前业界流行的特斯拉基于摄像头的视觉自动驾驶解决方案或者传统多线程激光雷达，毫米波雷达可以在恶劣天气比如雨雪雾霾强光灯任何天气下工作，很好填补传统传感器的缺点，因此毫米波雷达越来越受到研究者的关注。对于汽车毫米波雷达，角分辨率是衡量雷达性能好坏的关键，如果角分辨率不够，毫米波雷达可能无法区分间隔较近的目标，如何提升毫米波雷达的角分辨率就成为一个亟需解决的问题。显然，定位的精度越高，应用价值越大，特别是高分辨定位，拥有广阔的应用前景。

表 1 四种车载传感器比较

传感器类型	探测距离	探测角度	黑暗环境	雨雪天气	路面标线	应用领域	成本
视觉传感器	一般	30	弱	弱	支持探测	道路标线探测、交通信号探测、泊车系统	一般
超声波雷达	弱	120	强	弱	无法探测	泊车系统	低
激光雷达	强	15~360	强	弱	无法探测	车辆环境三维建模	高
毫米波雷达	强	10~70	强	强	无法探测	碰撞预警、盲区检测、自适应巡航	一般

在瑞利极限下，通过阵列雷达角分辨率经验公式可知：

$$\Delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (1)$$

其中  $\Delta\varphi$  是角分辨率， $\lambda$  是接收信号电磁波波长， $D$  是阵列孔径长度。从(1)式中发现，给定发射信号，阵列孔径越大，该阵列角分辨率越高。要提高雷达的角分辨率，最简单且有效的方法是增大阵列孔径，但在移动场景尤其自动驾驶领域车辆的情况可供布阵的位置更加有限，因此不可能将阵列孔径拉大用来提高角分辨率。受限于此情况，MIMO 技术可通过多发多收等效出  $M_T \times M_R$  个虚拟接收阵元，等价于增大阵元个数，同时得到超出实孔径的大虚拟空间和阵列自由度。即 MIMO 雷达采用虚拟孔径技术以更少的阵元数得到更大的阵列孔径，从而提高测角分辨率。具体如图 1 所示：

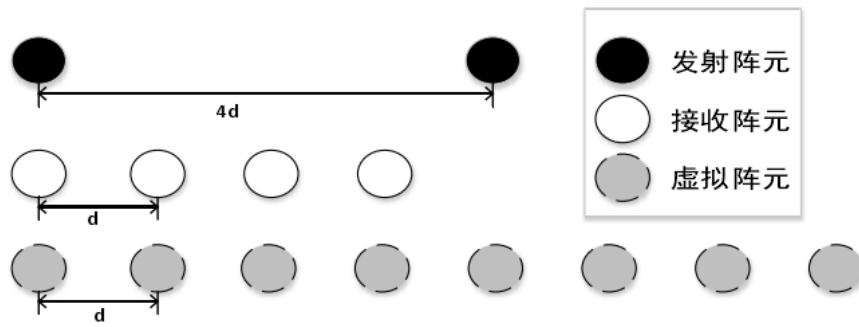


图 1 收发阵元合成虚拟孔径

如果仅通过虚拟孔径技术，实际上测角精度仍然受到瑞利极限的限制。而在某些移动场景下，需要将具有极高的角分辨率，即测角精度超过瑞利极限。此时利用超分辨率算法可以突破瑞利极限的限制，在采用虚拟孔径的技术上，进一步提高角分辨率。目前常见的超分辨算法可以分为三类。第一类是特征子空间类算法，通常有经典的 MUSIC 算法、ESPRIT 算法等；第二类是最大似然及子空间拟合算法。第三类是随着计算机技术迅猛发展而兴起的压缩感知和稀疏恢复等技术。算法具体优缺点如图所示。

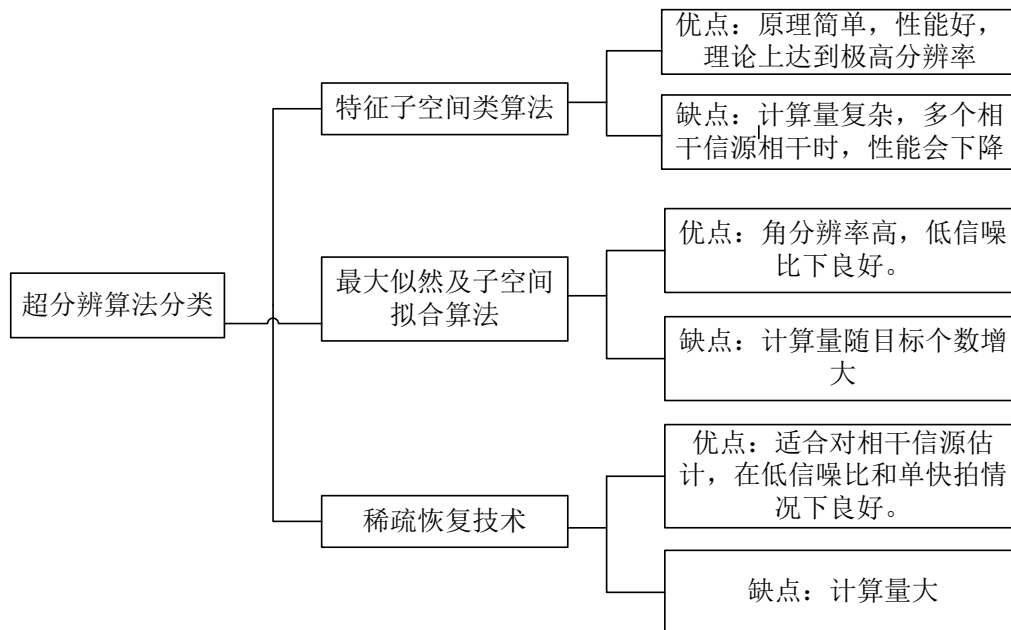


图 2 高分辨算法分类情况

雷达的基本功能包括对目标的检测、定位以及追踪。MIMO 毫米波雷达定位系统面临的主要难题包括有限的数支持检测和检测环境下比较低的信噪比。另外，当两个不同的目标的空间位置或多普勒频率相近时，有效地区分多个目标也是一个难题，针对该问题，本文将以 MIMO 虚拟孔径技术为辅助，主要通过超分辨技术在角度维完成多目标分辨，最终实现对目标分辨后的检测、定位以及追踪等功能。

## 1.2 任务重述

通过赛题背景和题目分析，本文需要解决移动场景下超分辨定位求解问题。具体是指基于 MIMO 毫米波雷达体制，设计出鲁棒的低复杂度在线超分辨算法，以较小计算代价条件，从距离和角度两维快速定位到目标。以下内容将对题目中涉及到的已知参数和提供数据进行说明，并对需要完成的目标

任务进行说明。

### 1.2.1 给定参数及数据文件说明

表 2 题目已知参数表

参数	值
$T_s$	$1.25 \times 10^{-7}$ 秒
$T$	$3.2 \times 10^{-5}$ 秒
$N_f$	32 个
$L$	0.0815 米
$\gamma$	$78.986 \times 10^{12}$ 赫兹/秒
$N_a$	86 个
$f_0$	$78.8 \times 10^9$ 赫兹

表 3 数据文件文件说明

附件名称	数据名称	数据维度	文件说明
data_q1.mat	Z	(86*256 complex double)	问题 1 数据
data_q2.mat	Z_noisy	(86*256 complex double)	问题 2 数据
data_q3.mat	Z_time	(32*86*256 complex double)	问题 3 数据
data_q4.mat	Z_antnoisy	(86*256 complex double)	问题 4 数据

### 1.2.2 任务描述

任务一：根据提供的无噪声虚拟多通道中频数据，建立 MIMO 毫米波雷达定位模型，计算出目标与阵列的相对位置后，画出二维极坐标图（横坐标表示距离，纵坐标表示角度）下展示阵列对目标的距离、角度定位结果。

任务二：根据题目给定的高斯噪声虚拟多通道中频数据，只利用虚拟天线阵列在一个 chirp 周期内的中频 IF 信号，使用合适的超分辨算法实现对多个目标的精确定位。

任务三：本小题给出一帧时间的虚拟天线阵列中频信号，首先设计出高分辨低复杂度的 DOA 估计算法来实现阵列目标定位，并通过数值仿真实验验证该算法的性能，再给出算法分析结果。其次再利用上述定位结果，计算出目标的运动轨迹，最后用二维极坐标图展示物体运动结果。

任务四：实际场景中由于天线老化等自身原因，天线阵列在定位过程中会引入额外的非自然误差。该系统误差的引入对测量结果会有较大的影响。因此，本题要求基于提供的仿真数据，设计提升定位鲁棒性的稳健 MIMO 雷达定位算法，并给出最终结果。

## 二、模型假设

### 2.1 题目设定

通过分析题目，本文已有设定如下：

1. 实际 MIMO 雷达通过联合发射与接收构建虚拟天线阵列，由于接收后中频数据已经给出，因此本文将不考虑具体发射情况，而主要从**信号处理的角度**进行超分辨定位问题求解。
2. 天线半径远小于物体的距离，即认为**目标处于阵列孔径远场**范围。
3. 在各个场景下，均假设有  $K$  个需要分析确定的物体在雷达的探测范围内，该探测范围是以原点为中心半径 10 米以内、开口向上张开角为 $100^\circ$ 的扇形区域。

### 2.2 追加假设

在本文移动场景 MIMO 毫米波雷达高分辨定位问题求解中，为了简化模型的计算和设定，我们追加以下假设：

1. 由于实际雷达对目标在空间是三维探测，包括俯仰、方位、距离三个维度。本文仅考虑目标相对于阵列的距离、角度二维定位情况。
2. 在移动场景下，目标相对雷达发生运动。雷达获得一帧（32 个 chirp 周期）中频信号组，由于 chirp 周期内时间极短，可认为在该时间内目标静止不动。而一帧时间里，由于目标运动状态发生改变，因此目标的位置发生偏移。
3. 本题目中涉及到噪声均为高斯白噪声，不包括色噪声或其他类型噪声。



### 三、符号说明

符号	说明
$N_a$	MIMO 雷达合成阵元数
$N_s$	快拍数
$N_{T_x}$	发射阵元数
$N_{R_x}$	接收阵元数
$D$	合成阵列孔径
$\gamma$	调频率
$f_0$	载频
$T$	一个 Chirp 周期
$R_0$	初始距离
$\tau_0$	初始时延
$K$	信源数
$\sigma^2$	噪声功率
$f_d$	多普勒频移
$\mathbf{a}(\theta)$	导向矢量
$\mathbf{A}$	阵列流型矩阵
$\mathbf{S}$	回波信号矩阵
$\mathbf{N}$	噪声矩阵
$\mathbf{Y}$	接收信号矩阵
$T_x$	发射阵元
$R_x$	接收阵元

## 四、模型建立和问题求解

### 4.1 问题总览

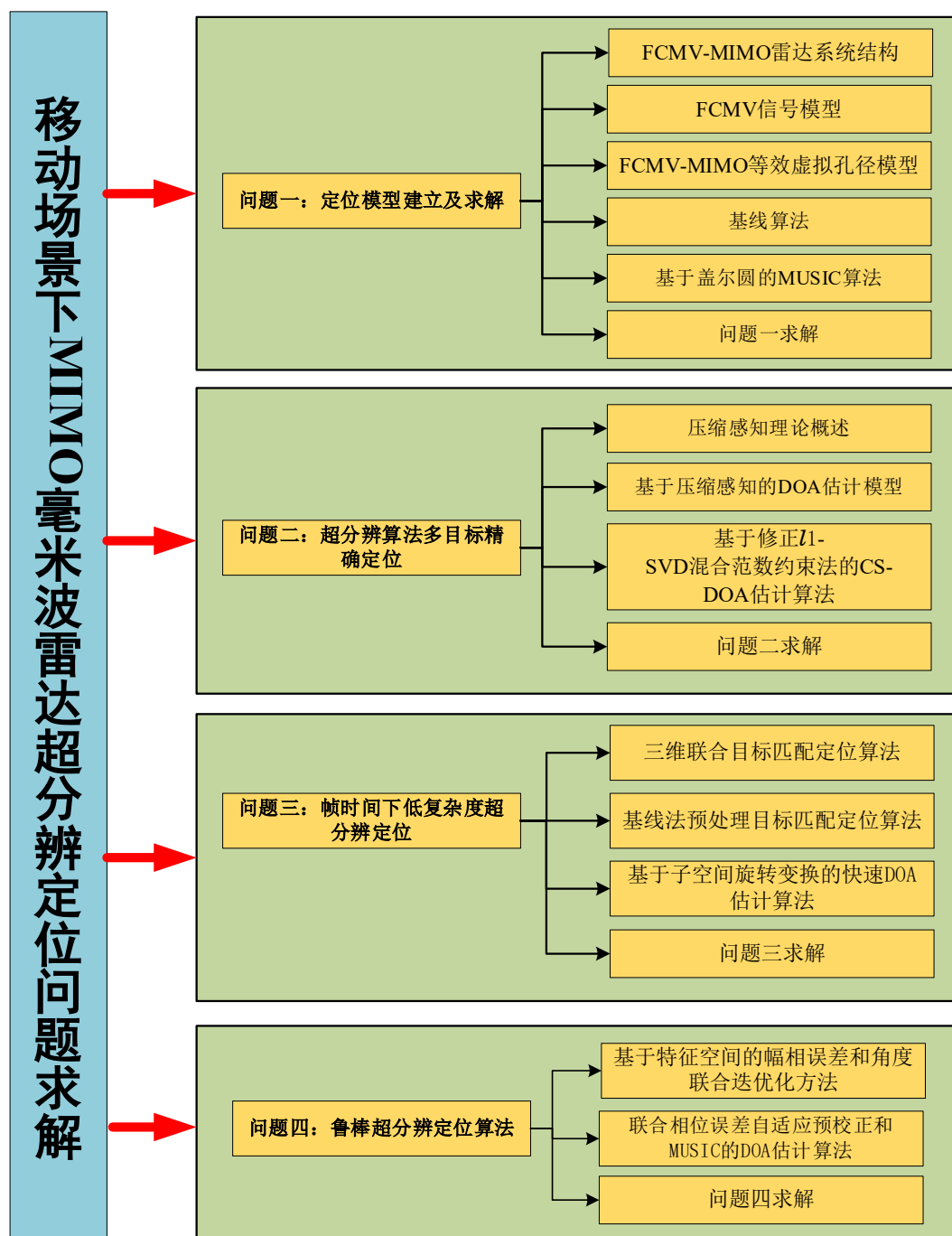


图 3 问题总览框图

移动场景下的超分辨定位问题实际上是从距离维和角度维分步或者联合估计出目标所在的距离和角度，最终完成对目标的定位。对于问题一，本节分析出题目采用两发四十三收的 FCMV-MIMO 雷达体制并给出其中一种可能的系统结构。基于该体制建立 FCMV 信号模型、FCMV-MIMO 等效虚拟孔径雷

达模型，并对目前工程上常用的基线法测距测角进行原理分析。针对基线法测角分辨力不高的缺陷，引入基于盖尔圆的 MUSIC 算法进行超分辨 DOA 估计。综合以上两个算法，本节采用**基线法测距、盖尔圆 MUSIC 算法测角**实现联合定位，并给出定位结果。**对于问题二**，考虑到 MUSIC 算法在低信噪比情况下性能急剧恶化，本节建立基于**压缩感知**的 DOA 估计模型，并提出**基于修正  $L_1$ -SVD 混合范数约束的 CS-DOA 估计算法**。通过迭代正则化参数有效消除经典 CS 算法中多目标临近带来的**伪峰效应**，提高超分辨测角能力。最终给出多目标定位结果。**对于问题三**，鉴于压缩感知类算法处理连续傅里叶字典场景复杂度过高，本节采用基于子空间旋转变换的快速 DOA 估计算法，能够实现在线目标定位。同时针对超分辨算法定位求解带来的距离、角度二值映射问题，提出三维联合、基线法预处理两种目标匹配定位算法。最终给出 32 个 chirp 周期的定位结果并绘制目标运动轨迹。**对于问题四**，本节认为天线阵列引入的是幅相误差，通过使用基于特征空间的幅相误差和角度联合迭代优化方法联合基线法测距最终实现鲁棒超分辨定位。下文将详细展开分析。

## 4.2 问题一：定位模型建立及求解

### 4.2.1 问题分析

近年来，得益于半导体技术的进步和物联网的普及，搭载毫米波技术的设备开始进入普罗大众的生活，如实现手势识别、人体健康信息监测的毫米波雷达。这些设备仅利用了毫米波雷达的距离信息和多普勒信息，通过引入 MIMO 技术后，MIMO 雷达通过等效虚拟阵列在空间上扩充了阵元。由于这些特性，在理论上毫米波雷达更容易设计成大规模的阵列，进而获得很高的方位向分辨率能力。针对问题一需要建立的定位模型及其求解，这里明确定位包括距离测量和角度估计层级，同时角度估计在阵列信号处理领域也称波达方法估计，即常见的 DOA 估计。因此距离测量和 DOA 估计一起归于定位技术范畴。问题一的核心是通过处理题目给出的无噪声数据，计算出物体相对于阵列的位置，实现目标定位。因此，本节首先需要对给出的 data\_q1.mat 进行数据分析，并利用题目已知的参数推算出 FCMV-MIMO 雷达系统结构。后文将基于该结构进行 FCMV 信号模型、FCMV -MIMO 雷达等效虚拟孔径模型等基础模型的建模。通过对基础模型的建立将有助于加强对 data\_q1.mat 数据的理解。本节将设计联合基线-MUSIC 方法，实现对目标的精确定位并最终通过表格和极坐标图的形式展示对目标的定位结果。

#### 4.2.1.1 data\_q1.mat 数据分析

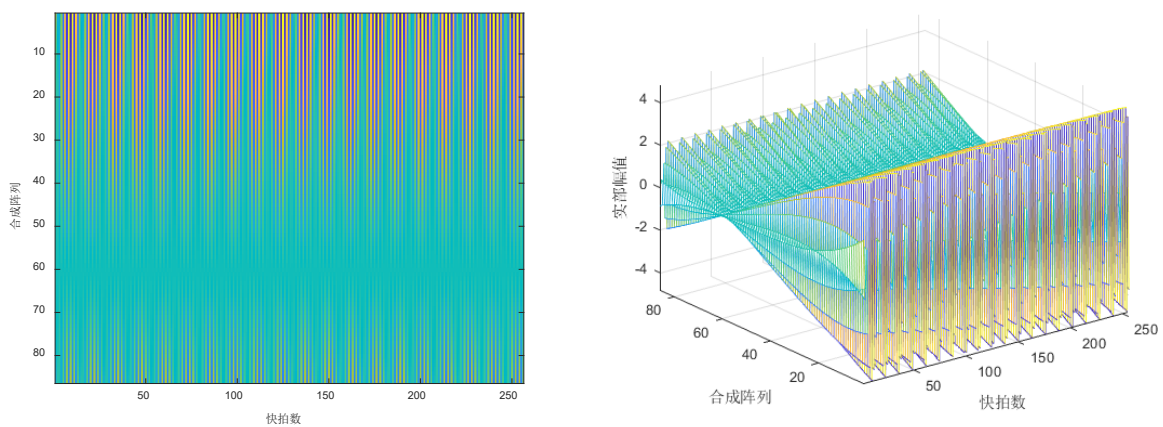


图 4 (a) data\_q1.mat 数据二维图 (b) data\_q1.mat 数据三维图

首先利用 matlab 软件对 data\_q1.mat 进行数据分析，得到数据是一个  $N_a \times N_s$  的双浮点型复数数

据，其中  $N_a = 86$  表示合成虚拟阵元个数， $N_s = 256$  表示一个 chirp 周期的采样点数，在阵列信号处理中， $N_s$  也表示快拍数。因此后文提到的快拍数也指 chirp 周期内的采样点数。

#### 4.2.1.2 MIMO 雷达发射接收模型分析

由于题目中给出的  $N_a = 86$  是指经过 MIMO 虚拟合成阵元个数，这里有必要针对 MIMO 多发多收的发射接收架构进行讨论。下面将具体分析  $N_{T_x}$  发  $N_{R_x}$  收的情况。

根据题目已知参数：阵列孔径  $L = 0.0815\text{m}$ ，载频  $f_0 = 78.8 \times 10^9 \text{Hz}$ ，这里取电磁波传播速度  $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$ 。

电磁波波长：

$$\lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \times 10^8}{78.8 \times 10^9} = 0.0038\text{m} \quad (2)$$

一般情况下，为确保来波方向角度无模糊，约束阵元间距  $d \leq \frac{\lambda}{2}$ 。考虑到工程应用中的普遍情况，如果间距  $d$  不取半波长，会引入其他栅瓣因素，可以认为  $d = \frac{\lambda}{2} = 0.0019\text{m}$ 。

综上，虚拟合成阵列的孔径长度： $D = (N_a - 1) \times d = 0.1618\text{m}$ 。由于是采用 TDM-MIMO 方式，发射天线依次发射，接收天线依次接收从而等效虚拟阵元，故发射天线个数  $N_{T_x} = \frac{D}{L} = 2$ 。则实孔径阵列阵元个数  $N_{R_x} = \frac{N_a}{N_{T_x}} = 46$ 。同时也可以根据  $N_a$  有且只能被分解出  $1 \times 86$  和  $2 \times 43$ ，结合上述

MIMO 雷达特点，也可以得到  $N_{T_x} = 2$ 、 $N_{R_x} = 46$ 。

因此本题采用的是 2 发 43 收 FCMV-MIMO 雷达系统。

#### 4.2.2 模型建立

##### 4.2.2.1 FCMV-MIMO 雷达系统结构

根据 4.2.1.2 节分析，本题采用是 2 发 43 收 FCMV-MIMO 雷达系统，对于发射节点的位置有不同的设计方法，发射接收共址或者异构，本文仅考虑一种共址情况，其中发射天线 1 和接收天线 1 共址、发射天线 2 和接收天线 43 共址。如图 5 所示给出这种发射接收共址情况下的 2 发 43 收 FCMV-MIMO 雷达系统结构。后文将基于该结构进行数学模型建立，并研究相关算法对定位的处理情况。

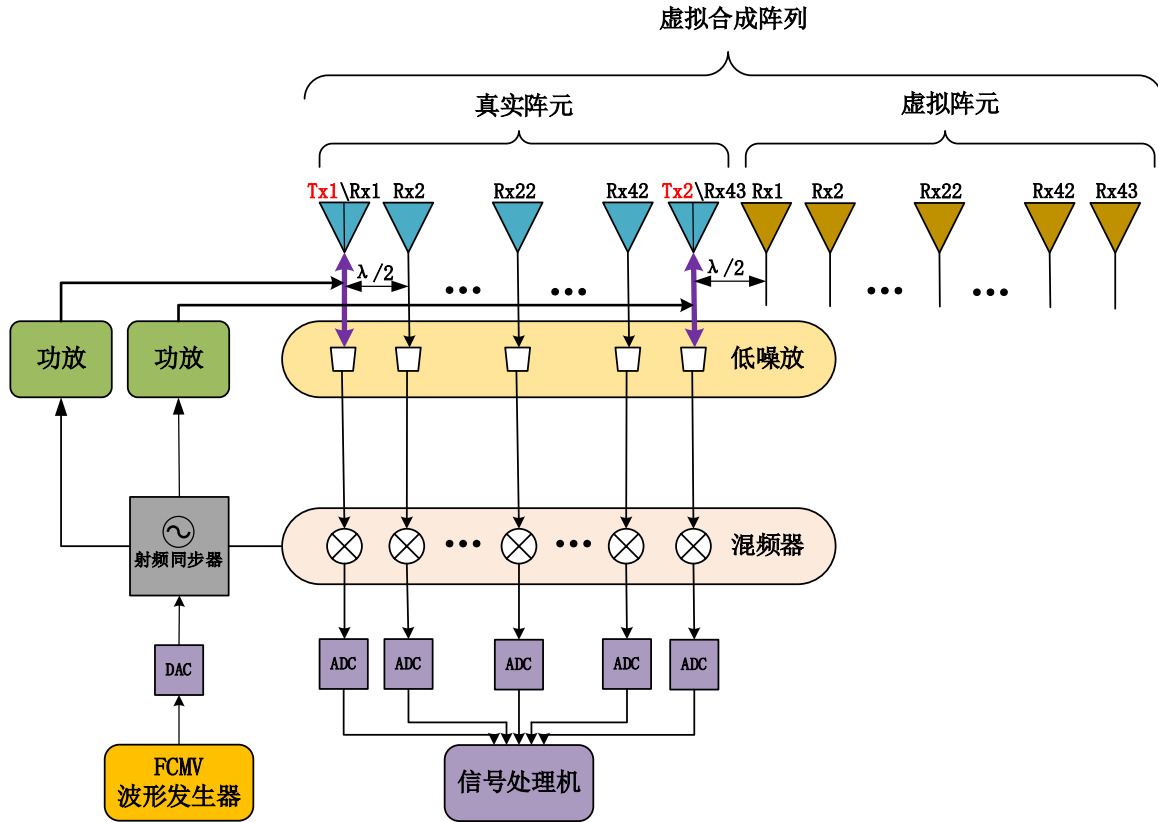


图 5 一种 2 发 43 收 FCMV-MIMO 雷达系统结构

#### 4.2.2.2 FCMV 信号模型

FCMV-MIMO 雷达受益于其特殊架构和模式，可以提高其目标检测性能和参数估计。最简单实现 MIMO 雷达的方式是采用时分发射的方式，即调制好电磁波的波形后， $N_{Tx}$  个发射天线依次发射， $N_{Rx}$  个接收天线也依次接收返回的信号。由于此周期极短，因此可以等效成  $N_{Tx} \times N_{Rx}$  个天线同时接收。

从 4.2.1.2 节分析可知，本文系统采用 2 发 43 收体制，发射天线采用 TDM 模式发射 FCMV 信号，MIMO 雷达发射波形图 6 所示

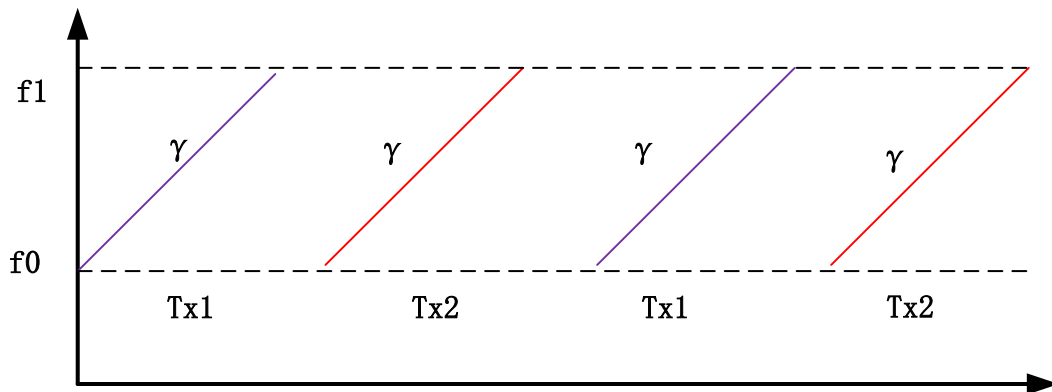


图 6 MIMO 发射波形

如图 6 所示,  $\gamma$  为 FMCV 调频率,  $f_0$  为发射电磁波载频。在一个 chirp 周期  $T$  内, 阵元  $Tx1$  发射的 FMCV 信号表达式为:

$$s_T(t) = A_0 \exp \left[ j2\pi \left( f_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2 \right) \right] \quad (3)$$

其中  $A_0$  是发射信号振幅, 设从  $\theta$  方向入射的目标在远场范围内且初始距离为  $R_0$ , 速度是  $v$ , 相对雷达径向运动。考虑目标初始距离, 则初始时延为

$$\tau_0 = \frac{2R_0}{c} \quad (4)$$

其中  $c$  表示电磁波速度。因此, 回波经目标发射后引入的回波时延  $\tau(t)$  表示为

$$\tau(t) = \frac{2(R_0 - vt)}{c} = \tau_0 - \frac{2vt}{c} \quad (5)$$

将式(5)代入式(3), 可得阵元  $Rx1$  接收到的回波信号  $s_R(t)$  表达是如下:

$$s_R(t) = K_r A_0 \exp \left[ j2\pi \left( f_0 (t - \tau(t)) + \frac{1}{2} \gamma (t - \tau(t))^2 \right) \right] \quad (6)$$

其中  $K_r$  是目标的发射系数。将  $s_R(t)$  与  $s_T(t)$  经混频后得到的差拍信号  $y_{11}(t)$

$$y_{11}(t) = \frac{1}{2} K_r A_0^2 \exp \left[ j2\pi \left( -\frac{1}{2} \gamma \tau(t)^2 + \gamma t \tau(t) + f_0 \tau(t) \right) \right] \quad (7)$$

将式(5)代入式(7), 可得

$$y_{11}(t) = \frac{1}{2} K_r A_0^2 \exp \left[ j2\pi \left( f_{IF} t - \gamma_2 t^2 + f_0 \tau_0 - \frac{1}{2} \gamma (\tau_0)^2 \right) \right] \quad (8)$$

其中,  $f_{IF}$  是差拍后的中频信号频率,  $r_2$  考虑多普勒频移后的差拍信号调频率。

$$f_{IF} = \left( 1 + \frac{f_d}{f_0} \right) \gamma \tau_0 - f_d \quad (9)$$

$$r_2 = \left( \frac{f_d \gamma}{f_0} + \frac{\gamma}{2} \left( \frac{f_d}{f_0} \right)^2 \right) \quad (10)$$

以上式(9)和式(10)中,  $f_d = \frac{2v}{\lambda}$  为目标运动产生的多普勒频移,  $\lambda$  为发射载频电磁波波长。由于目标

并不是高速移动,  $f_d \ll f_0$ , 因此  $f_{IF}$  和  $\gamma_2$  可近似为

$$f_{IF} \approx \gamma \tau_0 - f_d \quad (11)$$

$$\gamma_2 \approx \frac{f_d}{f_0} \gamma \quad (12)$$

同时，式(8)中 $\gamma(\tau_0)^2$ 非常小，可以将忽略，因此式(8)可近似为：

$$y_{11}(t) = \frac{1}{2} K_r A_0^2 \exp \left[ j2\pi \left( (\gamma\tau_0 - f_d)t - \frac{f_d}{f_0} \gamma t^2 + f_0\tau_0 \right) \right] \quad (13)$$

对于静止目标，多普勒频率 $f_d = 0$ ，并代入式(13)，重写表达式

$$y_{11}(t) = \frac{1}{2} K_r A_0^2 \exp \left[ j2\pi (\gamma\tau_0 t + f_0\tau_0) \right] \quad (14)$$

#### 4.2.2.3 FCMV-MIMO 雷达等效虚拟孔径模型

本节将推导静止目标场景下的 FCMV-MIMO 雷达等效虚拟孔径模式。

通常接收阵元间距 $d = \frac{\lambda}{2}$ ，对于远场平面波，相对于雷达方向为 $\theta$ 的远程回波信号到达接收阵元 Rx1 时，回波距离接收阵元还有 $d \sin \theta$ 的波程差，由波程差引起的时延 $\Delta\tau = d \sin \theta / c$ 。因此 Rx2 收到 Tx1 引起的差拍信号可表示为：

$$\begin{aligned} y_{21}(t) &= \frac{1}{2} K_r A_0^2 \exp \left[ j2\pi (\gamma(\tau_0 - \Delta\tau)t + f_0(\tau_0 - \Delta\tau)) \right] \\ &= \frac{1}{2} K_r A_0^2 \exp \left[ j2\pi \left( \gamma \left( \tau_0 - \frac{d \sin \theta}{c} \right) t + f_0 \left( \tau_0 - \frac{d \sin \theta}{c} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

由于阵元之间波程差远小于目标与阵元之间的间距，因此可认为各接收阵元差拍的中频项相同，因此式(15)可表示为：

$$\begin{aligned} y_{21}(t) &= \frac{1}{2} K_r A_0^2 \exp \left[ j2\pi (\gamma\tau_0 t + f_0\tau_0) \right] \cdot \exp \left[ -j2\pi \left( \frac{f_0 d \sin \theta}{c} \right) \right] \\ &= \exp[-j\phi] \cdot y_{11}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pi \sin \theta$ ，它表示接收阵元 Rx2 与 Rx1 的相位差。

下面定义各个接收阵元收到的差拍信号 $y_{mn}(t)$ ，其中 m 是接收阵元序号，n 是发射阵元序号。因此，接收阵元收到 Tx1 引起的差拍信号可以表示如下：

$$\begin{bmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \\ \vdots \\ y_{N_{Rx}1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j0} \\ e^{-j\phi} \\ \vdots \\ e^{-j(N_{Rx}-1)\phi} \end{bmatrix} \cdot y_{11}(t), \phi = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = \pi \sin \theta \quad (17)$$

当 Tx1 发射的波形完成接收后，Tx2 发射同样参数的 FCMV 信号。这里 Tx1 和 Tx2 相距 $(N_{Rx}-1)\lambda/2$ ，

因此相同位置的阵元收到 Tx2 发射的波形相对于 Tx1 发射的波形有 $((N_{Rx}-1)\lambda/2) \sin \theta$ 波程差，因此

Rx1 收到 Tx2 引起的差拍信号可以表示为:

$$\begin{aligned}
y_{12}(t) &= \frac{1}{2} K_r A_0^2 \exp \left[ j2\pi \left( \gamma \left( \tau_0 - \frac{((N_{Rx}-1)\lambda/2)\sin\theta}{c} \right) t + f_0 \left( \tau_0 - \frac{((N_{Rx}-1)\lambda/2)\sin\theta}{c} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} K_r A_0^2 \exp [j2\pi(\gamma\tau_0 t + f_0\tau_0)] \bullet \exp \left[ -j2\pi \left( \frac{f_0((N_{Rx}-1)\lambda/2)\sin\theta}{c} \right) \right] \\
&= \exp(-jN_{Rx}\phi) \bullet y_{11}(t)
\end{aligned} \tag{18}$$

因此, 阵列收到 Tx2 引起的差拍信号可以表示如下:

$$\begin{bmatrix} y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \\ \vdots \\ y_{N_{Rx}2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-jN_{Rx}\phi} \\ e^{-j(N_{Rx}+2)\phi} \\ \vdots \\ e^{-j(2N_{Rx}-1)\phi} \end{bmatrix} \bullet y_{11}(t), \phi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} = \pi \sin\theta \tag{19}$$

综上所述,  $y_{mn}(t)$  表示的阵列差拍信号可以表示为:

$$\begin{bmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \\ \vdots \\ y_{N_{Rx}1}(t) \\ y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \\ \vdots \\ y_{N_{Rx}2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j0} \\ e^{-j\phi} \\ \vdots \\ e^{-j(N_{Rx}-1)\phi} \\ e^{-jN_{Rx}\phi} \\ e^{-j(N_{Rx}+1)\phi} \\ \vdots \\ e^{-j(2N_{Rx}-1)\phi} \end{bmatrix} \bullet y_{11}(t), \phi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} = \pi \sin\theta \tag{20}$$

通过上述分析, 当阵列接收 Tx2 产生的回波是, 从空间分析, 等效于在阵元个数为  $N_{Rx}$  的实际阵列右侧有放置了  $N_{Rx}$  个虚拟接收阵元。由于  $N_{Rx}$  为 43, 因此该过程将 2 发 43 收阵列等效为 1 发 86 收阵列, 从而实现了阵列的扩展。通过以上方式实现 MIMO 雷达等效虚拟阵列。

下面定义向量  $\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{-j\phi}, e^{-j2\phi}, \dots, e^{-j(2N_{Rx}-1)\phi}]^T$ ,  $\mathbf{a}(\theta)$  为该阵列  $\theta$  方向的导向矢量。当场景中存在  $K$  个不同方向的目标时, 不同方向的导向矢量可表示为:

$$\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{-j\phi_k}, e^{-j2\phi_k}, \dots, e^{-j(2N_{Rx}-1)\phi_k}]^T, \phi_k = 2\pi d \sin\theta_k / \lambda, k = 1, 2, \dots, K \tag{21}$$

下面定义不同方向回波的信号向量为  $\mathbf{s}(n) = [s(\theta_1), s(\theta_2), \dots, s(\theta_K)]^T$ , 阵列接收的向信号为  $\mathbf{y}(n)$ 。因此阵列接收信号模式可以表示为:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) \tag{22}$$



其中导向矢量矩阵  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ 。

#### 4.2.2.4 基线算法实现原理

本节讨论利用工程上常用的基线法进行定位，下文首先给出基线法对静止目标的定位流程。

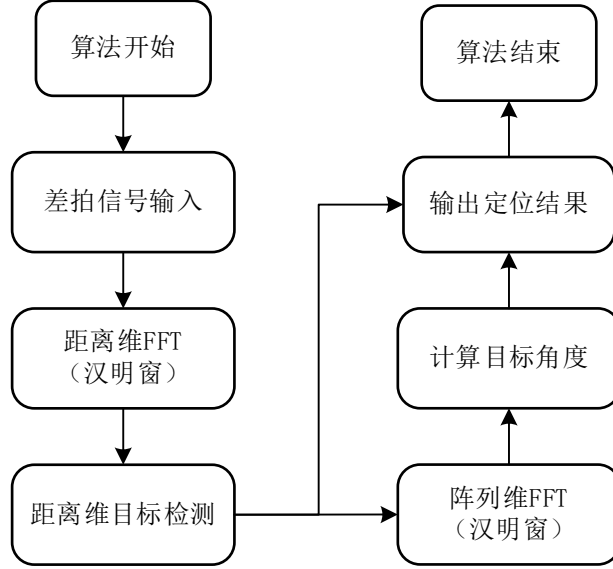


图 7 基线法对静止目标定位流程

从式(14)可知， $y_{11}(t)$  是频率为  $f_{IF}$  的单频信号， $f_{IF}$  是目标距离引起的频差，也是差拍信号的中频频率。对式(14)进行傅里叶变换，得到变换后的频谱  $Y_{11}(f)$  表达式如下

$$Y_{11}(f) = A_f \delta(f - \gamma\tau_0) \quad (23)$$

其中  $A_f$  是经过傅里叶变换后的频谱幅度，对  $Y_{11}(f)$  经过门限检测提取频谱峰值  $\hat{f}$ ，也就是目标的距离频差（差拍信号中频频率） $f_{IF}$

$$f_{IF} = \hat{f} = \gamma\tau_0 = r \frac{2R_0}{c} \quad (24)$$

其中  $R_0$  表示静止目标距离。进而通过检测后  $f_{IF}$  可以推算目标的距离  $R_0$

$$R_0 = \frac{c}{2\gamma} f_{IF} \quad (25)$$

确定好目标距离后，下面进行角度测量。式(20)是静止目标差拍信号的阵列模型，下面定义空域频率  $f_{space} = d \sin \theta / \lambda$ ，并对导向矢量  $\mathbf{a}(\theta)$  重写为

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\theta) &= \left[ 1, e^{-j\phi}, e^{-j2\phi}, \dots, e^{-j(2N_{Rx}-1)\theta} \right]^T \\ &= \left[ 1, e^{-j2\pi f_{space}}, e^{-j2\pi(2f_{space})}, \dots, e^{-j2\pi(2N_{Rx}-1)f_{space}} \right]^T\end{aligned}\quad (26)$$

同时，从  $f_{space}$  的表达式中可以看出， $f_{space}$  是关于角度  $\theta$  的函数，重写表达式如下：

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda f_{space}}{d}\right) \quad (27)$$

下面从空间采样的角度分析， $\mathbf{a}(\theta)$  可以看成是空间频率  $f_{space}$  的离散信号。通过将虚拟阵列对差拍信号沿着阵列方向变换到空间频率，会在频率  $f_{space}$  处形成谱峰，继续通过门限检测的方法提取去峰值，进而通过式(27)就能得到目标的角度，从而实现角度测量。如果场景中存在多个不同距离的目标，这时差拍信号可以认为是不同距离目标引起的差拍信号的线性叠加，这是只需要将差拍信号通过一组带通滤波器，就得到不同距离目标的对应点频信号，再对该点频信号在阵列维度变换到空间频率，就能得到目标的角度估计。实际工程中一般采用 FFT 算法实现时域到频率的变换，为了实现对多个静止目标的定位结果。首先将所有虚拟接收阵元的差拍信号按阵元个数和快拍数进行矩阵重排，第一步在快拍维度对差拍矩阵进行 FFT 计算，由于 FFT 本身可以认为是一组梳状滤波器，在快拍维进行 FFT 后，接着通过距离目标检测可以得到目标距离。第二步，将存在目标的距离单元对应的所有阵元数据取出，并分别在阵列维度进行 FFT 计算，存在目标的角度方向形成谱峰，在通过空间频率检测得到谱峰对应的空间频率值，经过换算即可得到目标的角度。最后，经过两步变换依次得到不同目标的距离和角度，从而得到目标的距离维和角度维的二维定位结果。

#### 4.2.2.5 基于盖尔圆方法的 MUSIC 算法

多重信号分类算法（Multiple Signal Classification, MUSIC）由 R.O.Schmidt 于 1986 年提出，是阵列信号处理中空间谱估计理论中经典的超分辨算法，它克服了普通波束形成分辨力低的缺点。这个算法的本质是对阵列接收后的信号进行特征分解，将特征分解后的大小特征值进行从高到底排序，并对其对应的特征向量分离出信号子空间和噪声子空间。由于信号子空间和噪声子空间具备正交性，通过这种正交性能够准备估计出目标的角度信息。由于汽车雷达通常使用现在，下面以线阵为例，对 MUSIC 进行理论分析。

假设  $K$  个远程信号从  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$  方向射入阵元数为  $M$  的半波长间距的均匀线阵，考虑加性高斯噪声影响，阵列信号模型可以写为：

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}(n) \quad (28)$$

其中  $\mathbf{v}(n)$  为噪声向量，噪声功率  $\sigma^2$ 。 $\mathbf{s}(n) = [s(\theta_1), s(\theta_2), \dots, s(\theta_K)]^T$  为信号向量， $[\bullet]^T$  表示矩阵转置，离散时间变量  $n$  表示快拍或快时间维采样点，矩阵  $\mathbf{A}$  表示天线导向矩阵。

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\varphi_1} & e^{-j\varphi_2} & \dots & e^{-j\varphi_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(M-1)\varphi_1} & e^{-j(M-1)\varphi_2} & \dots & e^{-j(M-1)\varphi_K} \end{bmatrix}_{M \times K} \quad (29)$$

其中  $\varphi_i = \frac{2\pi d \sin \theta_i}{\lambda} (i=1, \dots, K)$ 。

将式(29)代入式(28)，可得阵列信号模型表达式如下：

$$\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \\ \vdots \\ x_{M-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\varphi_1} & e^{-j\varphi_2} & \dots & e^{-j\varphi_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(M-1)\varphi_1} & e^{-j(M-1)\varphi_2} & \dots & e^{-j(M-1)\varphi_K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0(n) \\ s_1(n) \\ \vdots \\ s_{M-1}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_0(n) \\ v_1(n) \\ \vdots \\ v_{M-1}(n) \end{bmatrix} \quad (30)$$

接收到信号协方差矩阵可以表示为式(31)：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{XX} &= E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = \mathbf{A}E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (31)$$

其中， $\mathbf{R}_s$  表示信号协方差矩阵。由于噪声为高斯白噪声，信号和噪声满足不相关。当满足  $M > K$  时，即保证信源个数  $K$  小于阵元数  $M$  时，天线导向矩阵  $\mathbf{A}$  是范德蒙德矩阵。而且  $\mathbf{R}_s$  为半正定矩阵，那么满足  $\text{rank}(\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}) = K$ ，即存在  $K$  个正的特征值。

下来对式(31)得到的协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$  进行特征分解，将分解后的特征向量降序排序得到式(32)特征值的情况：

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K \geq \lambda_{K+1} = \lambda_{K+2} = \dots = \lambda_M = \sigma^2 \quad (32)$$

其中特征值对应的归一化特征向量是  $u_1, u_2, \dots, u_K, u_{K+1}, \dots, u_M$ 。

下一步将  $u_1, \dots, u_K$  和  $u_{K+1}, \dots, u_M$  分别张成信号子空间  $\mathbf{E}_s$  和噪声子空间  $\mathbf{E}_N$ ，即式(33)和式(34)：

$$\mathbf{E}_s = \text{span}\{u_1, \dots, u_K\} \quad (33)$$

$$\mathbf{E}_N = \text{span}\{u_{K+1}, \dots, u_M\} \quad (34)$$

定义矩阵

$$\mathbf{G} = [u_{K+1}, \dots, u_M]_{M \times (M-K)} \quad (35)$$

由于天线方向矩阵  $\mathbf{A}$  满秩，通过线性代数知识可得

$$\mathbf{A}^H \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (36)$$

因此有

$$\mathbf{G}^H \mathbf{a}(\theta_k) = \mathbf{0}, k = 1, 2, \dots, K \quad (37)$$

其中  $\mathbf{a}(\theta_k)$  是阵列导向矢量。

实际中工程中，通常使用离散信号来得到等效协方差矩阵矩阵，即用数据协方差矩阵的最大似然估计式来代替式(31)

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \quad (38)$$

最终谱函数 MUSIC 谱估计为

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{a}(\theta)}, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (39)$$

由于 MUSIC 算法在构建信号子空间和噪声子空间时需要知道信源个数  $K$ ，下面采用盖尔圆方法估计信源个数。

首先利用式(38)得到的信号协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$ ，并对  $\hat{\mathbf{R}}$  进行分块处理得到

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}' & \boldsymbol{\varsigma} \\ \boldsymbol{\varsigma}^H & \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \quad (40)$$

其中， $\mathbf{R}'$  为  $\hat{\mathbf{R}}$  前  $M-1$  行和前  $M-1$  列构造的矩阵， $M$  是阵元个数， $\boldsymbol{\varsigma}$  和  $\boldsymbol{\psi}$  是构造后协方差矩阵剩余的元素。接着对  $\mathbf{R}'$  做特征分解，并把特征值从大到小排序，与其对应的特征向量  $\mathbf{V}$  也按顺序重排，并构造酉矩阵  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

下面利用酉矩阵对协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  做酉变换

$$\mathbf{R}_T = \mathbf{T}^H \mathbf{R} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & \rho_1 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{M-1} & \rho_{M-1} \\ \rho_1^* & \rho_2^* & \cdots & \rho_{M-1}^* & \gamma_{MM} \end{bmatrix} \quad (42)$$

最后计算下式

$$GDE(k) = \rho_k - \frac{D(N)}{M-1} \sum_{i=1}^M \rho_i \quad (43)$$

其中  $D(N)$  是调整因子，与快拍数负相关，当若代入第  $\eta$  个特征值时，式(43)出现负值，则可以推算

出信源个数  $K = \eta - 1$ 。

通过以上步骤，可得基于盖尔圆方法的 MUSIC 的步骤如下表所示：

表 4 基于盖尔圆方法的 MUSIC 算法步骤

步骤	内容
1	利用阵列接收的 N 次快拍数据，得到数据协方差矩阵的最大似然估计矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 。
2	利用盖尔圆方法估计信源数 K。
3	对 $\hat{\mathbf{R}}$ 进行特征分解，利用步骤 2 估计出目标个数，可直接得到矩阵 $\hat{\mathbf{G}}$ 。
4	根据式(39)进行谱峰搜索，得到 K 个目标的角度估计值。
总结	理论上，在高信噪比，多阵元数，多快拍情况，小搜索步长情况下，MUSIC 算法无限逼近准确值。但是，由于需要谱峰搜索，导致计算量较大。

### 4.2.3 问题求解

为了更好地针对问题一的求解，本节首先采用基线法对 data\_q1.mat 进行处理，得到二维 FFT 的处理结果，并对该结果进行记录。由于角度 FFT 的测角结果不能超过瑞利限制，如果目标挨得非常近，则角度维 FFT 是不能区分的，因此考虑在角度维使用超分辨算法进行估计。而距离维由于目标信号在表达式中呈现是一个点频信号，因此距离维 FFT 求解距离能到比较好的效果，故采用超分辨算法定位时，距离仍然采用基线法求解。

这里有一个问题需要考虑，如果多目标处于不同的距离单元，那么采用超分辨定位算法，会出现目标匹配问题，这部分会在问题详细展开分析。在问题一和问题二中，通过距离维 FFT 能够判断出目标出现同一位置，随后通过超分辨算法对角度展开 DOA 估计就能实现同一距离上，不同角度目标的分辨。

#### 4.2.3.1 基线算法定位

从上文可知基线法定位的原理是二维 FFT 计算，经过二维 FFT 后一个目标积累出一个峰值，一个维度表示距离，另外一个维度表示角度。对于距离、角度存在区别的目标，基线法可以得到不同的峰值。图 8 显示二维 FFT 原理的具体示意图。

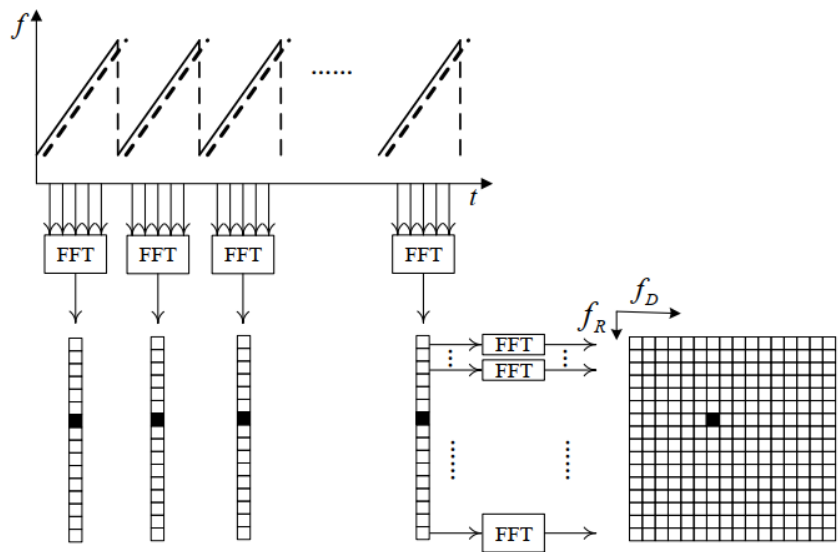


图 8 二维 FFT 原理

图 9 展示采用基线法分布求解距离和角度的过程，可通过加窗来尽可能减少在非整数个周期上进行的 FFT 产生的误差，提高测距和测角的准确性。

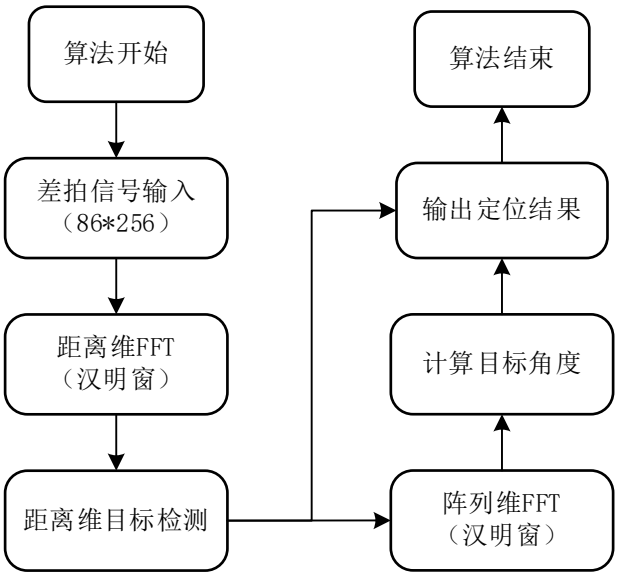


图 9 基线法定位流程图

图 10 展示利用基线法加窗二维 FFT 的结果示意图，从图 10（a）中可以很明显观察到出现两个峰值，即两个目标。两个目标均在 7.0303m 处，一个目标角度是  $-0.7086^{\circ}$ ，另一个目标是  $2.1259^{\circ}$ 。图 10（b）显示同一距离处沿角度维的切片结果，从图中可以看出，基线法能够区分出两个目标，但由于瑞利限的存在，对目标的角度估计可能存在偏差。表 5 展示基线法的定位结果。

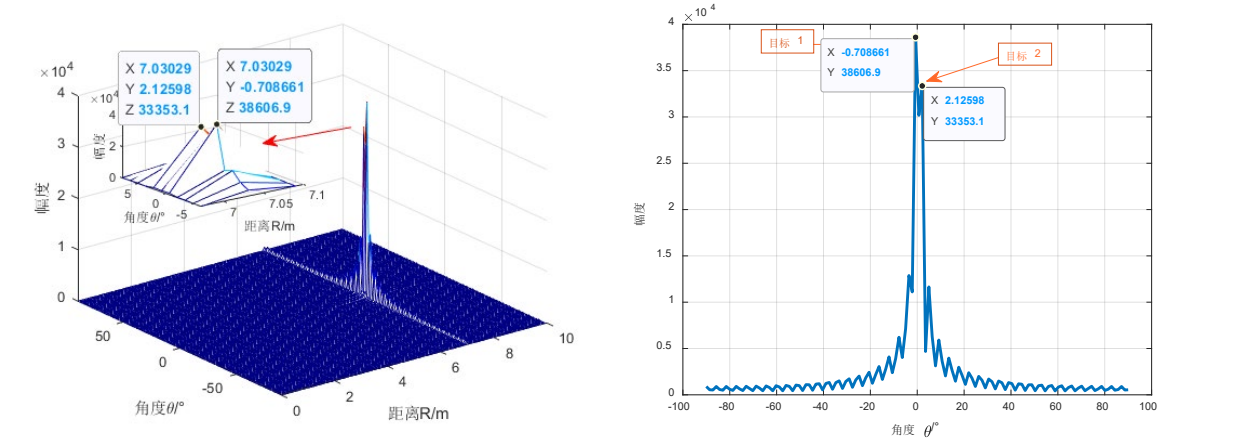


图 10 （a）基线法实现结果

（b）阵列维测角结果

表 5 基线法定位结果

目标	距离 / <i>m</i>	方位 / $^{\circ}$
目标 1	7.0303	-0.7086
目标 2	7.0303	2.1259

### 4.2.3.2 MUSIC 算法定位

通过以上分析，采用 MUSIC 定位算法的流程图如下。这里考虑到算法的普适应，应该对不同距离位置的目标也具备区分能力。对差拍信号输入后，首先采用汉明窗 FFT 进行距离检测，如果在距离维需要较好的分辨率，可以采用在距离维补零的方法。进行距离维检测后，如果目标处于同一距离单元，就可以避免多目标匹配问题。由于 MUSIC 算法在构建信号子空间和噪声子空间时需要已知目标的信源数。因此接下来，对差拍信号利用盖尔圆方法估计其信源数  $K$ ，得到估计结果后，采用多快拍 MUSIC 进行超分辨 DOA 估计。结合距离信息和角度信息，可以输出目标的定位结果。如果目标处于不同距离单元，就需要利用二维 FFT 做预处理粗估计目标的情况，接下来利用基于盖尔圆方法的 MUSIC 进行 DOA 估计，随后根据角度差完成目标匹配，最终得到不同距离的多目标定位结果。具体流程如图 11 所示。

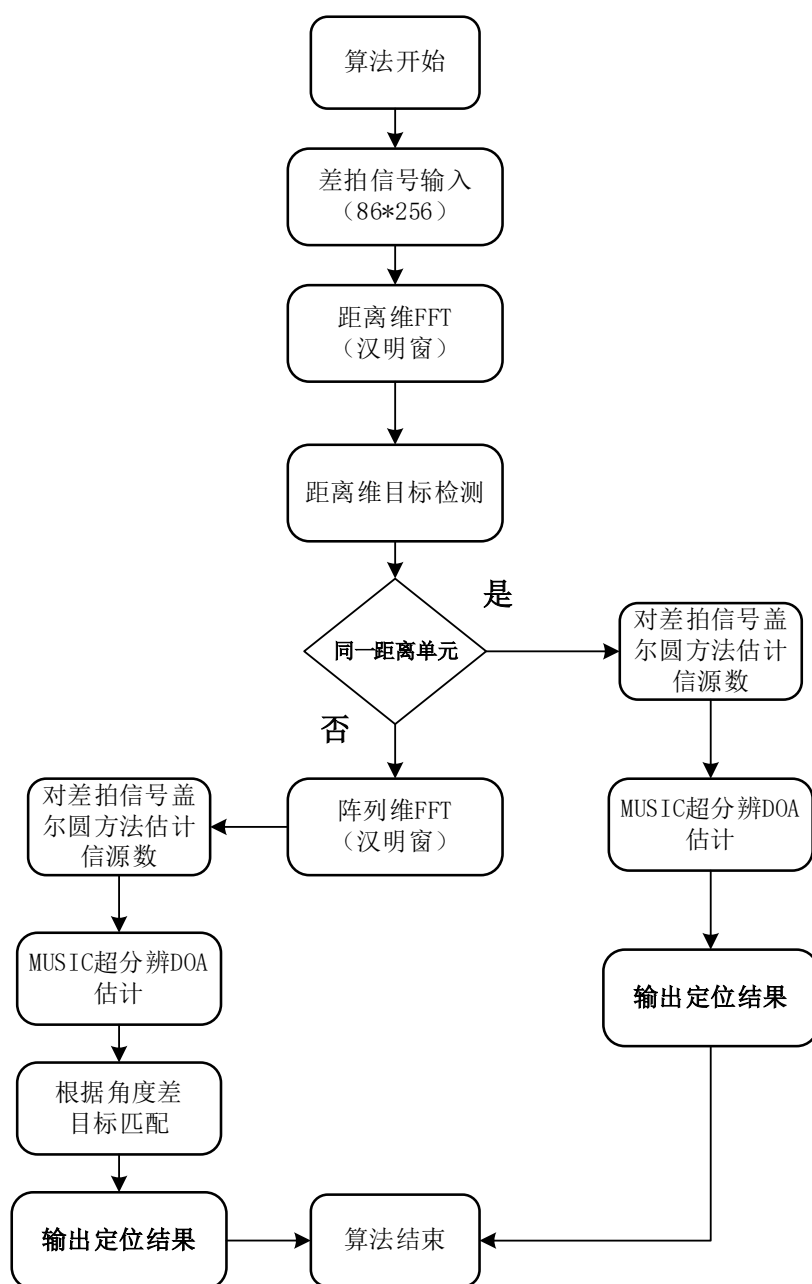


图 11 MUSIC 算法流程图

通过距离维 FFT 后，发现目标处于同一距离单元，因此只需要利用阵列差拍数据进行基于盖尔圆方法的 MUSIC 空间谱估计。图 12 展示在同一距离时角度维的切片情况，可以看出 MUSIC 算法超分辨率由于具备突破瑞利限的能力，结果相对角度维 FFT 更为精确。表 6 展示利用超分辨算法定位的结果中目标 1 位于距离 7.0303m，角度 0.0011°；目标 2 位于距离 7.0303m，角度 0.1334° 处。同时，图 13 给出目标在二维极坐标图的位置，并给出局部放大效果图，从图中可以很清晰看到两个目标的空间分布情况。

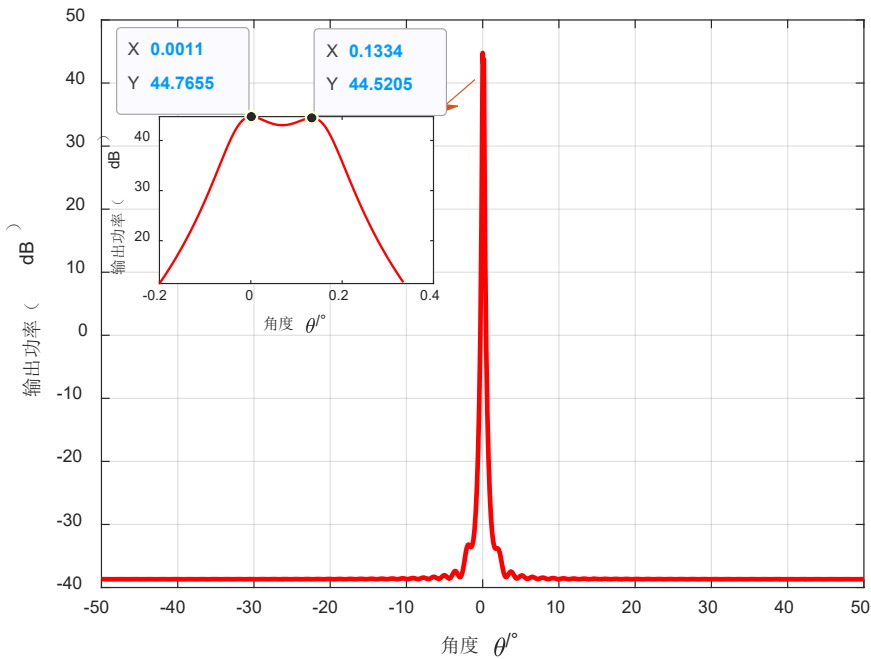


图 12 MUSIC 算法测角结果

表 6 MUSIC 算法定位结果

目标	距离 /m	方位 /°
目标 1	7.0303	0.0011
目标 2	7.0303	0.1334

#### 4.2.3.3 目标定位结果

表 7 目标最终定位结果

目标	距离 /m	方位 /°
目标 1	7.0303	0.0011
目标 2	7.0303	0.1334



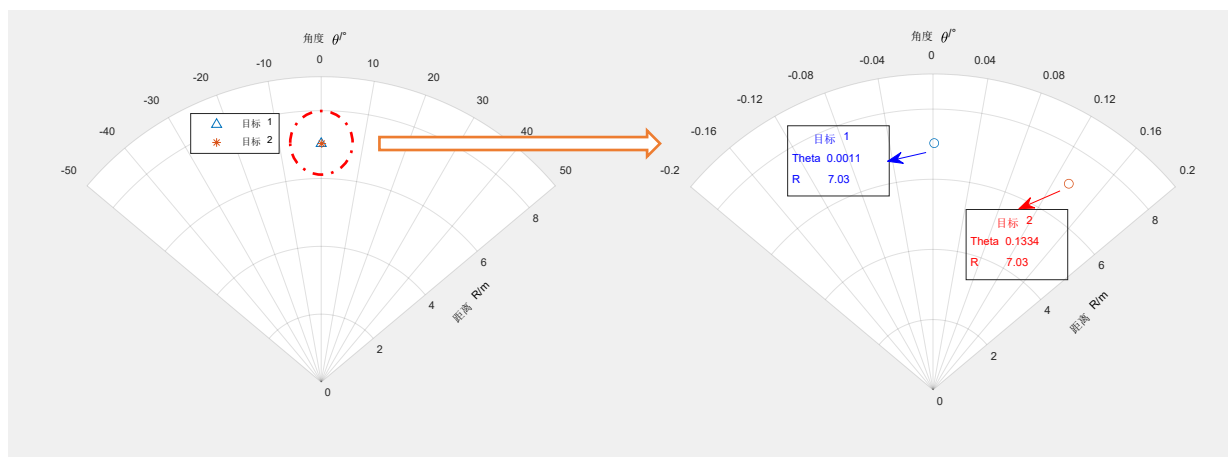


图 13 (a) 目标定位结果示意图 (b) 定位结果放大图

## 4.3 问题二：超分辨算法多目标精确定位

### 4.3.1 问题分析

传统的空间谱估计方法存在各种不足，同时考虑到空域信号本身特有的稀疏特性。采用压缩感知理论的稀疏采样，用低于奈奎斯特定理的采样率获取数据，同时使用合适的稀疏重构算法重构出稀疏信号，所以可以弥补传统阵列测向估计的缺陷，在一定程度上也能增加算法的分辨率以及鲁棒性，而且对于任何类型的信源都适用，不必考虑信源相干/非相干对阵列测向算法的影响，以下对阵列测向也称 DOA 估计。

#### 4.3.1.1 data\_q2.mat 数据分析

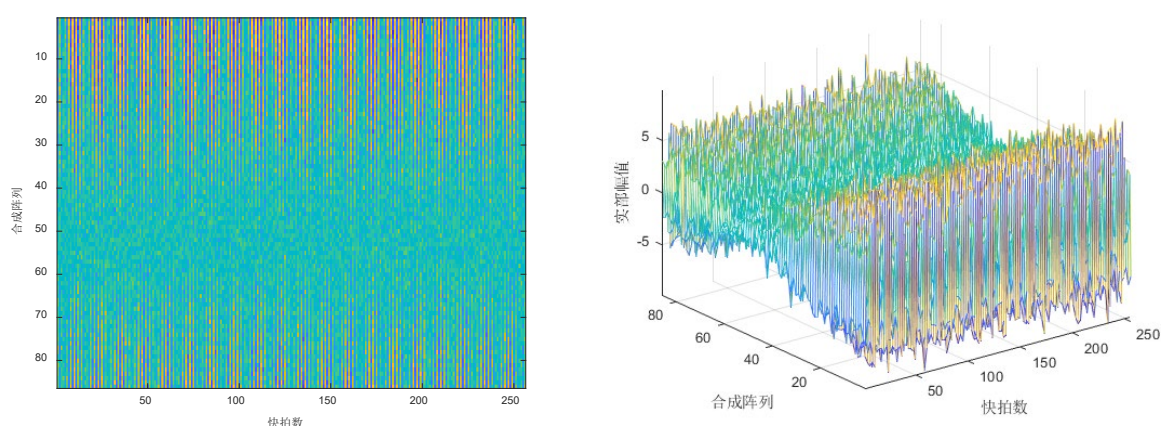


图 14 (a) data\_q2.mat 数据二维图 (b) data\_q2.mat 数据三维图

图 14 展示 data\_q2.mat 数据二维效果和三维效果图，从图中可以看出由于加入高斯噪声，三维数据图相比较图 4 干净无噪声三维数据图出现很明显的波动起伏。因此噪声会在幅度和相位上对后续定位造成影响。

### 4.3.2 模型建立

#### 4.3.2.1 压缩感知理论概述

压缩感知是近年来研究较为热门的一个领域，应用于多个领域中。在信号处理中存在一个非常重要的基础定理，奈奎斯特采样定理。该定理要求在对一个信号进行采样时，采样频率必须大于或等于最高频率的两倍。受限于该要求，传统 DOA 估计算法需要在满足该前提下对信号进行采样，再将采样得到的信号进行压缩等后续处理，压缩后的信号会进行传输或者储存，最终进行信号恢复。但是这种采样方式有很大的问题，对于带宽信号，为了满足奈奎斯特采样定理就需要很高的采样频率，不仅会对 AD 采集造成很高的压力，而且采样之后再进行压缩又会丢失掉大量的信号能量，造成很大的浪费。

传统采样过程如图 15 所示



图 15 传统信号采样过程

压缩感知理论可以很好解决这个问题，压缩感知理论利用信号的稀疏性，首先对原始信号进行稀

疏化处理来得到稀疏信号，去除冗余后的少量观测值后通过稀疏重构算法将原始信号精确的恢复出来。该理论的优点在于，可以在不满足奈奎斯特采样定理的条件下对原始信号进行采样，并且能够将原始信号精确的恢复出来。使用压缩感知理论不仅可以降低对设备性能的要求，也能避免数据的浪费，降低数据传输存储的成本。

压缩感知理论下的采样过程如图 16 所示

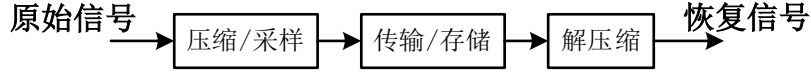


图 16 压缩感知理论下的信号采样过程

压缩感知理论中的三大重要关键问题：一是目标信号的稀疏表示，信号的稀疏性会直接影响到信号重构的精度。二是观测矩阵的构建，在完成对信号的稀疏表示之后，下一步就需要对稀疏信号进行压缩采样，在压缩感知框架下，完成信号的压缩采样是通过测量矩阵来实现的，如何获得一个性能较好的测量矩阵显得尤为重要。三是重构算法的设计，在压缩感知理论中，信号的稀疏重构是将原始信号精确的重构出来或者精确的估计某些参数的过程，在压缩感知中占据着重要的位置。其中应用最为广泛的是 $l_0$ 范数优化的贪婪算法、 $l_1$ 范数优化的凸优化算法和 $l_2$ 范数优化的迭代重加权最小二乘(FOCUSS)算法。

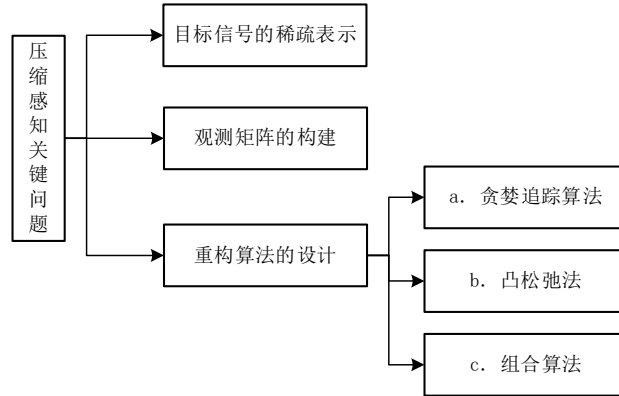


图 17 压缩感知关键问题

#### 4.3.2.2 基于压缩感知的 DOA 估计模型

通过上述分析可知，压缩感知使用的前提条件是信号本身是稀疏的或者在某个变换域下能够被转换成稀疏信号。通过选择一个合适的稀疏矩阵对信号进行稀疏表示，许多信号可以被表示为稀疏信号。对于一个阵列而言，空间入射信号的数量是有限的，实际存在的来波信号远远小于所有可能的来波信号个数，因此相对于整个空域来说，实际的来波信号是具有稀疏性的，这保证压缩感知理论可以应用到 DOA 估计中。本节以空间中的均匀直线阵列为参考阵列，基于窄带信号模型，建立压缩感知理论下的 DOA 估计模型。

假设空间中有  $K$  个远场窄带信号入射到图 18 所示的均匀线阵上，均匀线阵有  $M$  个阵元组成，阵元间距  $d = \lambda / 2$ ，阵列接收信号可以表示为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (44)$$

其中，阵列流型矩阵  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ ，阵列导向矢量表示为：

$$\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{-j\phi(\theta_k)}, \dots, e^{-j(M-1)\phi(\theta_k)}]^T, \phi(\theta_k) = 2\pi d \sin(\theta_k) / \lambda, k = 1, 2, \dots, K \quad (45)$$

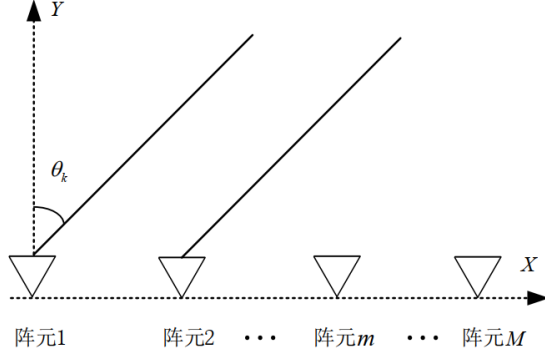


图 18 均匀线性阵列模型

由于阵列流型矩阵  $\mathbf{A}(\theta)$  则包含来波信号的角度信息。实际空域范围中，来波信号可以看作稀疏的，将整个空域中所有潜在的角度信息扩展出阵列流程矩阵。因此基于该方法，可以完成度信号的稀疏表示，随后再利用重构算法进行 DOA 估计。

在传统阵列信号模型中，导向矢量矩阵的每一列  $\mathbf{a}(\theta_k)$  都与空域中的实际信号源一一对应。在压缩感知理论中，对均匀线阵接收的整个空域范围进行网格划分成  $2N+1$  份，示意图如图 19 所示。

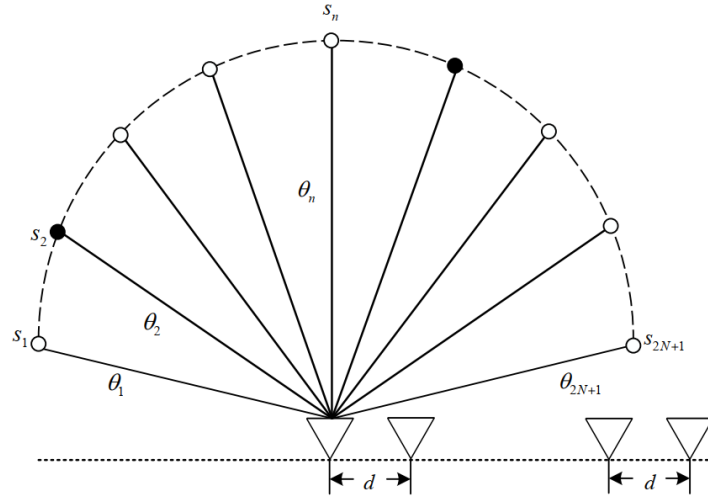


图 19 空间信号的稀疏性表示

如图 19 所示，其中“●”对应的方向是真实目标的来波方向，“○”对应的方向不存在来波信号，是潜在的入射信号。将整个空域利用  $\Delta\theta$  的间隔划分成  $2N+1$  份，经过划分后的空域网格可以表示为  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2N+1}\}$ 。当  $\Delta\theta$  比较小时，空域会被划分成很多细小的网格。由于实际来波信号个数有限，会远远小于实际划分的空域网格数量。可以认为，来波信号在空域范围内是稀疏的，稀疏模型可以表示为：

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (46)$$

其中，新的阵列流形矩阵  $\hat{\mathbf{A}}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_{2N+1})]$ ，包含空域所有潜在来波信息， $N$  值越大网格划分越精细， $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_{2N+1}]^T$  表示  $K$  个信号源的稀疏信号。当且仅当其方向有来波信号是目标时  $s_k \neq 0$ 。因此有  $K$  个位置上非零元素，其余  $N-K$  个位置上的元素均为零。

综上所述，压缩感知理论下的 DOA 估计问题，本质上就是将阵元接收信号  $\mathbf{y}$  和阵列流型矩阵  $\hat{\mathbf{A}}$  通过系数重构来恢复出稀疏信号  $\mathbf{s}$ ，之后根据  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2N+1}\}$  和  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_{2N+1}]^T$  之间的对应关系，就可以得到来波信号的 DOA 估计。

#### 4.3.2.3 基于修正 $l_1$ -SVD 混合范数约束法的 CS-DOA 估计算法

$l_1$ -SVD 混合范数约束算法是一种基于压缩感知理论的 DOA 估计法。该方法的核心是建立在  $l_1$  范数约束的基础上，使用 SVD 方法来实现降维的目的，进而降低计算复杂度。这里分析一个最简单的稀疏表示问题： $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ ，这里  $\mathbf{A}$  已知，需要从低维矩阵  $\mathbf{x}$  中求解出高维稀疏信号  $\mathbf{s}$ 。由于这是一个欠定方程，因此可以通过使用  $l_0$  范数约束来求解问题，而  $l_0$  范数约束是 NP 问题，通常很难去求解稀疏信号  $\mathbf{s}$ ，本节采用  $l_1$  范数约束来求解该问题。

对式(46)简化阵列流形矩阵  $\hat{\mathbf{A}}(\theta)$  为  $\mathbf{A}$ ，重写式(46)为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (47)$$

采用  $l_1$  范数方法求解式(47)，模型可以转换为：

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{s}\|_1 \\ \text{s.t. } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 \leq \nu^2 \end{aligned} \quad (48)$$

其中  $\nu$  为和噪声相关的数值，式(48)可以写成不受约束的形式：

$$\min \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 + \lambda_0 \|\mathbf{s}\|_1 \quad (49)$$

该式中  $\lambda_0$  为正则化参数，并且  $\lambda_0$  对算法的性能有很大的影响。根据式(49)，多快拍的模型为：

$$\min_{\mathbf{S}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{S}\|_f^2 + \lambda_0 \|\mathbf{S}\|_{2,1} \quad (50)$$

其中， $\mathbf{Y}$  是多快拍情况下的阵列接收矩阵， $\mathbf{S}$  是多快拍条件下的信号矩阵， $\|\bullet\|_f$  是 Forbenius 范数，这里定义：

$$\|\mathbf{S}\|_{2,1} = \sum_{n=1}^{N_p} \|\mathbf{s}^{(n)}\|_2 \quad (51)$$

其中  $\mathbf{s}^{(n)}$  表示矩阵  $\mathbf{S}$  的第  $n$  行。

这里求解式(50)的最大缺点就是计算量非常大，且计算量随着采样数的增加而快速上升，因此利用奇异值分解来实现降维的目的，从而大大降低计算的复杂度。这里首先对阵列接收信号  $\mathbf{Y}$  进行奇异值分解：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{L}\mathbf{V}^H \quad (52)$$

选取信号  $\mathbf{Y}$  的  $K$  维度子空间  $\mathbf{Y}_{SV}$ ，其中  $K$  为目标来波数，

$$\mathbf{Y}_{SV} = \mathbf{U}\mathbf{D}_K = \mathbf{X}\mathbf{V}\mathbf{D}_K \quad (53)$$

其中， $\mathbf{D}_K = [\mathbf{I}_K, 0]$ ， $\mathbf{I}$  是表示矩阵  $\mathbf{Y}$  的奇异值按照从大到小的顺序排序组成的对角矩阵。因此实际上，信号矩阵  $\mathbf{Y}$  的大部分能量可以用  $\mathbf{Y}_{SV}$  代替，同理可得：

$$\mathbf{S}_{SV} = \mathbf{S}\mathbf{V}\mathbf{D}_K \quad (54)$$

$$\mathbf{N}_{SV} = \mathbf{N}\mathbf{V}\mathbf{D}_K \quad (55)$$

因此式(52)可以转换为：

$$\mathbf{Y}_{SV} = \mathbf{A}\mathbf{S}_{SV} + \mathbf{N}_{SV} \quad (56)$$

从而，空间谱估计的优化模型可以转换为：

$$\mathbf{S}_{SV} = \min_{\mathbf{S}_{SV}} \left\{ \|\mathbf{Y}_{SV} - \mathbf{A}\mathbf{S}_{SV}\|_f^2 + \lambda_0 \|\mathbf{S}_{SV}\|_{2,1} \right\} \quad (57)$$

式(57)可以转换成一个二阶锥规划(second-order programming, SOCP)问题，即：

$$\begin{aligned} & \min p + \lambda_0 q \\ & \text{s.t. } \|\mathbf{z}_1^H, \dots, \mathbf{z}_K^H\|_2^2 \leq p, \text{ and } \mathbf{I}^H \mathbf{r} \leq q \\ & \text{where } \sqrt{\sum_{k=1}^K (s_i^{SV}(k))^2} \leq r_i, i=1, \dots, N_p \\ & \text{and } \mathbf{z}_k = \mathbf{x}^{SV}(k) - \mathbf{A}\mathbf{s}^{SV}(k), k=1, \dots, K \end{aligned} \quad (58)$$

该模型的算法复杂度为：  $O\left((K \times N_p)^3\right)$ ，其复杂度随着网格划分的数量呈现三次方增长。

式(57)的优化模型等价于：

$$\begin{aligned} & \min \|\mathbf{S}_{SV}\|_{2,1} \\ & \text{s.t. } \|\mathbf{Y}_{SV} - \mathbf{A}\mathbf{S}_{SV}\|_2^2 \leq \nu^2 \end{aligned} \quad (59)$$

其中， $\nu^2$  与噪声相关的参数， $\nu^2$  的选取对稀疏重构的性能会有很大的影响，当正则化参数  $\nu^2$  选取过小时，重构出的信号会有大量的伪峰，并且正确的峰值也会出现偏差；相反，正则化参数  $\nu^2$  选取过大时，将会导致正确的峰消失。

因此针对正则化参数  $\nu^2$ ，本文通过多次迭代方式搜索最优的  $\nu^2$  来实现对一般  $l_1-SVD$  混合范数约束法的修正，表 8 是基于修正  $l_1-SVD$  混合范数约束法的 CS-DOA 估计算法的具体实现步骤。

表 8 基于修正 L1-SVD 混合范数约束法的 CS-DOA 估计算法

步骤	内容
1	对阵列接收信号进行 SVD 分解
2	对 SVD 分解后的结果按式(53)、式(54)进行降维操作
3	按式(57)求解其稀疏谱
4	按照式(58)、式(59)优化其空间谱
5	多次迭代方式搜索最优的 $\nu^2$ ，最终得到优化后的空间谱

### 4.3.3 问题求解

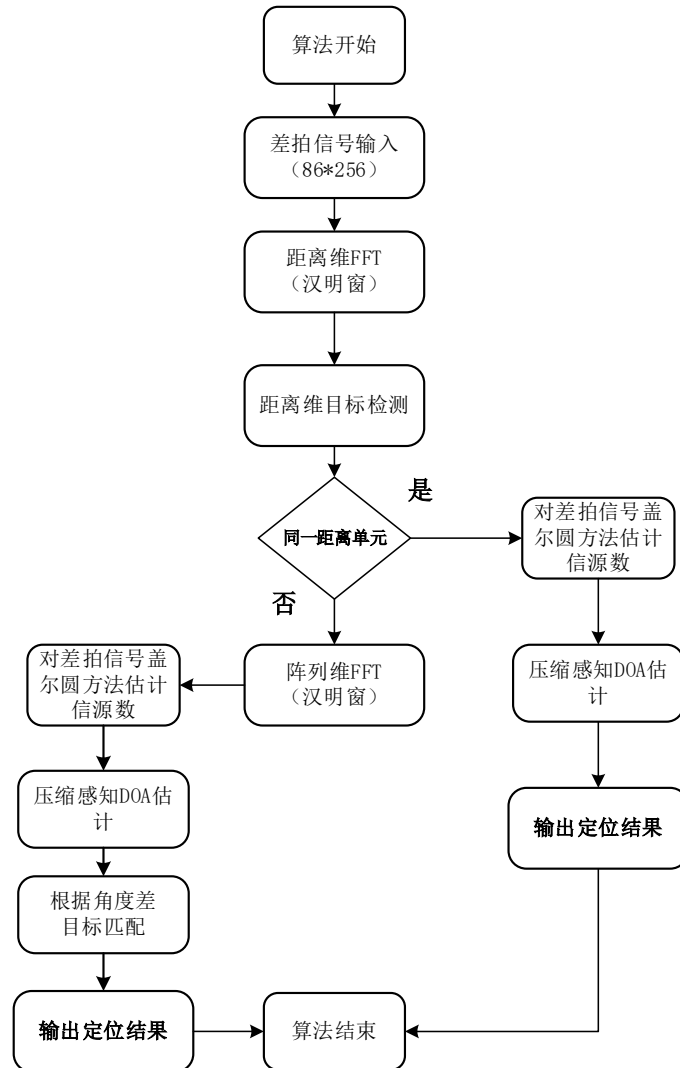


图 20 基于压缩感知的定位算法流程图

### 4.3.3.1 距离求解

首先通过基线法即距离维 FFT 进行测距并完成距离维目标检测，结果如图 21 所示，目标距离是 8.2218m。但该图仅能说明有目标处于同一距离处，并不能确定目标具体个数。

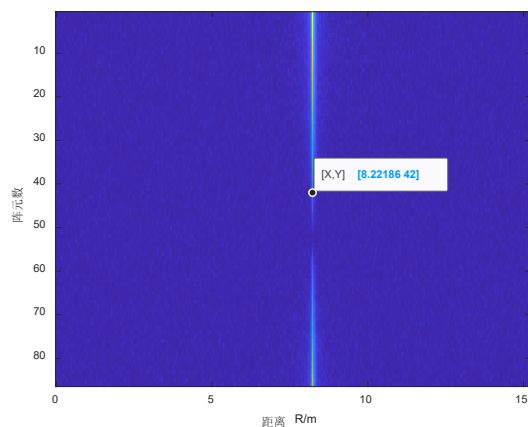


图 21 基线法测距结果

### 4.3.3.2 目标角度求解

通过基线法测距并确定存在未知个数目标在同一距离处，因而可以避免目标匹配问题，可以直接利用基于修正 L1-SVD 混合范数约束法的 CS-DOA 估计算法对目标进行测角，为保证抗噪声效果，本节在使用全快拍差拍信号进行 DOA 估计。图 22 展示多目标精确分辨结果，从图中可以看出，同一距离位置处存在两个挨得很近的目标，其中一个目标测角结果是  $-0.71^\circ$ ，另外一个目标测角结果是  $0.71^\circ$ 。

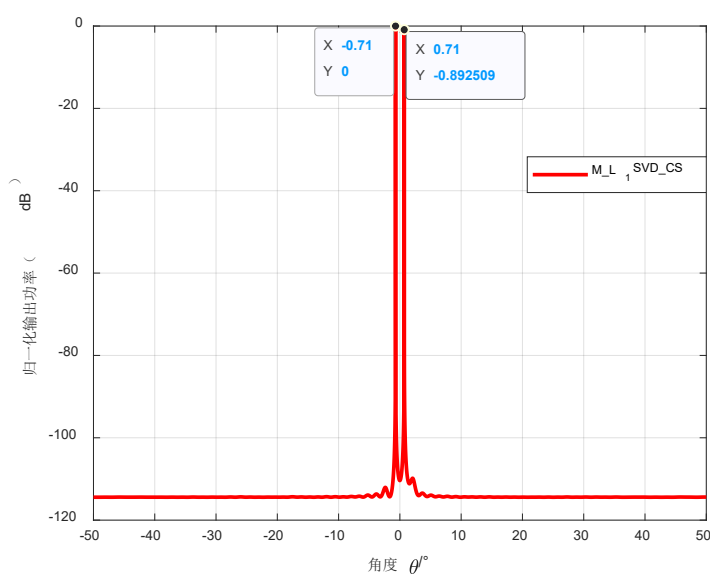


图 22 M\_L1SVD\_CS 算法测角结果



4.3.3.3 目标定位及性能分析

通过如图 20 所示的基于压缩感知的定位算法流程，经过距离求解和目标角度求解以后，最终得到如表 9 所示的定位结果。其中目标 1 的测距结果是 $8.2218m$ ，测角结果是 $-0.71^{\circ}$ ；目标 2 的测距结果是 $8.2218m$ ，测角结果是 $0.71^{\circ}$ 。图 23 展示 M\_L1SVD\_CS 算法定位结果的极坐标图

表 9 M\_L1SVD\_CS 算法定位结果

目标	距离 / $m$	方位 / $^{\circ}$
目标 1	8.2218	-0.71
目标 2	8.2218	0.71

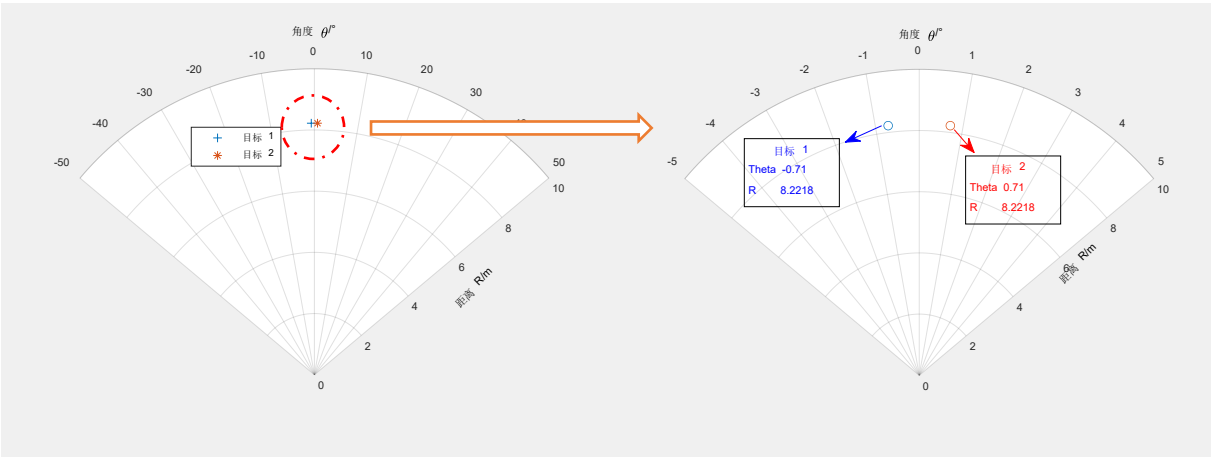


图 23 (a) M\_L1SVD\_CS 算法定位结果 (b) 定位结果放大图

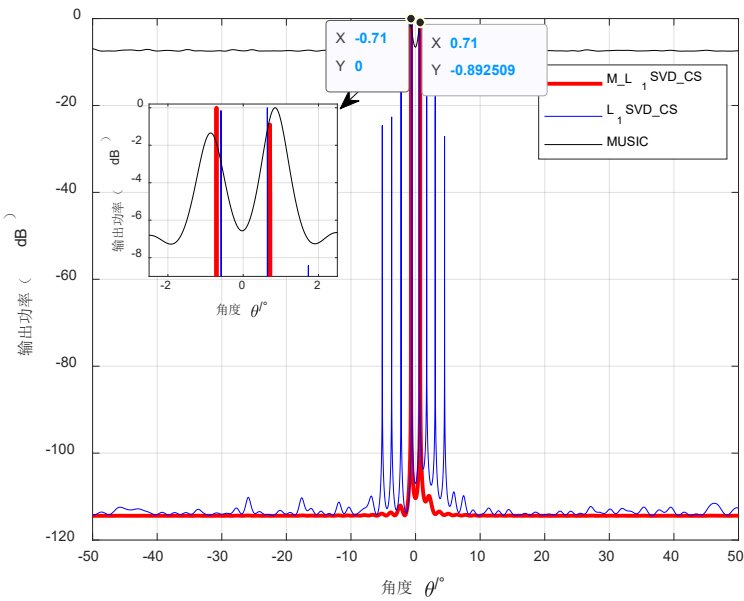


图 24 三种算法测角结果

表 10 三种算法对比结果

测角结果	$M\_l_1SVD\_CS$	$l_1SVD\_CS$	MUSIC
目标 1	-0.71	-0.59	-0.869
目标 2	0.71	0.64	0.877

如图 24 显示，普通 MUSIC 算法对目标 1 和目标 2 的 DOA 估计结果分别是  $-0.869^\circ$ 、 $0.877^\circ$ ；普通  $l_1SVD\_CS$  算法对目标 1 和目标 2 的 DOA 估计结果分别是  $-0.59^\circ$ 、 $0.64^\circ$ ； $M\_l_1SVD\_CS$  算法对目标 1 和目标 2 的 DOA 估计结果分别是  $-0.71^\circ$ 、 $0.71^\circ$ ；从图 24 也观察到  $l_1SVD\_CS$  算法得到的功率谱除两个目标的主峰以外，还出现若干伪峰。由于普通  $l_1SVD\_CS$  算法并未对正则化参数  $\nu^2$  进行迭代选取，如果正则化参数  $\nu^2$  选取过小时，重构出的信号会有大量的伪峰，同时正确的峰值也会出现偏差。如果正则化参数  $\nu^2$  选取过大时，反而会导致正确的峰消失。 $M\_l_1SVD\_CS$  算法的核心思想就是针对正则化参数  $\nu^2$  多次迭代取最优，通过优化正则化参数的选取可以成功去处伪峰并使目标测角结果尽可能逼近正确目标。 $M\_l_1SVD\_CS$  算法成功将压缩感知理论应用到空间谱估计中，该算法不仅能高精度地估计出来波方向，而且能够对相干信源和非相干信源的来波方向进行估计，在存在多快拍数时，该算法引入了奇异值分解来降低维度，大大降低了计算的复杂度，同时该算法将目标函数转换成 SOCP 问题，可以利用大量工具包求解。

## 4.4 问题三：帧时间下低复杂度超分辨定位

### 4.4.1 问题分析

从问题 1 和问题 2 算法分析可知，高分辨测角算法联合基线法测距方法如果测得目标位于不同距离单元，需要解决目标匹配问题。如果目标处于同一距离单元，基线法测距、高分辨测角可以得到较为精确的定位结果。由于问题三是一帧共 32 个 chirp 周期时间，目标发生运动，需要考虑合适的目标匹配方法。思路一是联合阵列维、快拍维和 chirp 周期维共 3 个维度，利用到目标运动趋势，因而可以区分出多目标；思路二是认为单个 chirp 周期物体静止不变，相当于 32 个 chirp 周期单独定位。这种情况下，就需要先利用二维 FFT 预处理目标信息，得到目标的粗估计，再分别利用距离 FFT、高分辨测角以及预处理结果的目标匹配，经过以上步骤最终得到目标的定位结果。

由于本题要求兼顾低复杂度和超分辨测角，如果采用预处理再匹配无疑会增加时间消耗，因此本节采用思路一，联合三维信息区分多目标，通过仿真得到 32 个定位结果，并在极坐标系中绘制出目标的运动轨迹。

#### 4.4.1.1 data\_q3.mat 数据分析

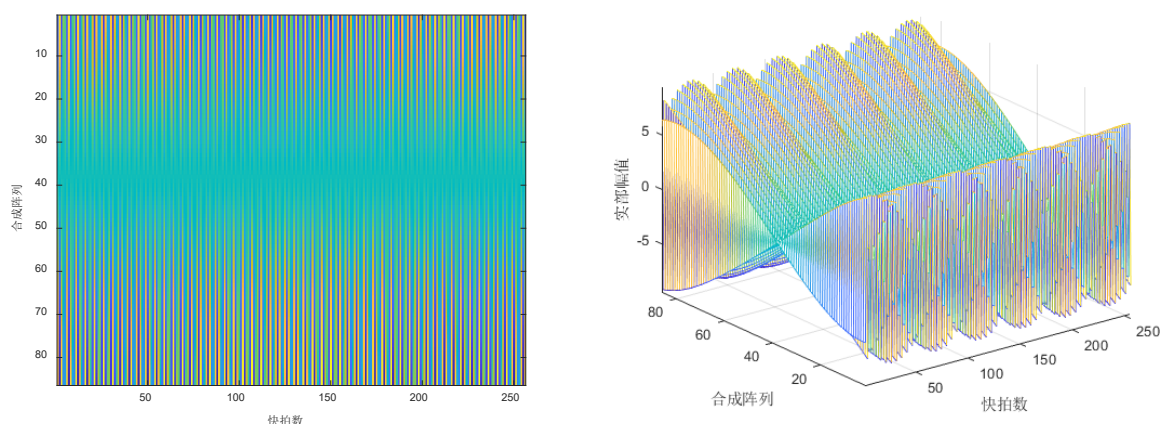


图 25 (a) data\_q3.mat 中 chirp1 数据二维图 (b) data\_q3.mat 中 chirp1 数据三维图

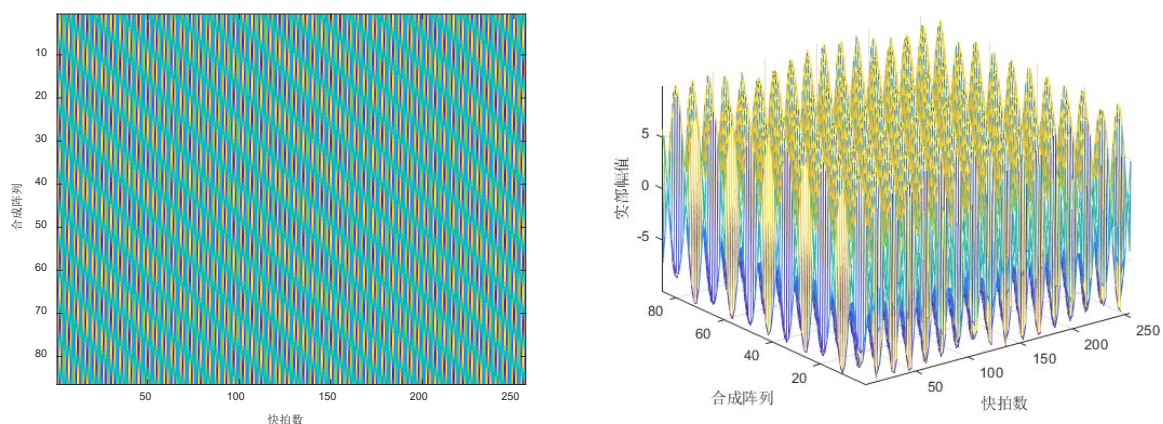


图 26 (a) data\_q3.mat 中 chirp32 数据二维图 (b) data\_q3.mat 中 chirp32 数据三维图

图 25 显示 data\_q3.mat 数据中第 1 个 chirp 周期数据的二维和三维结果图，图 26 显示 data\_q3.mat 数据中第 32 个 chirp 周期数据的二维和三维结果图。通过图 25 与图 26 的对比，目标在一帧时间内发生运动，从而导致目标多普勒的变化。

## 4.4.2 模型建立

### 4.4.2.1 三维联合目标匹配定位算法

针对高分辨类定位算法，如果先进行距离维 FFT 进行距离测量，得到如图 27 所示的两个不同距离单元的未知个数目标；而通常的超分辨算法都是利用多个快拍数进行目标角度估计，这种分步测量的做法带来的问题是无法在距离上区分开。以图 27 为例，利用超分辨算法定位后，理论上会有 4 个目标，因此还需要剔除不合理目标，所以还需要进行角度维和距离维的目标匹配。

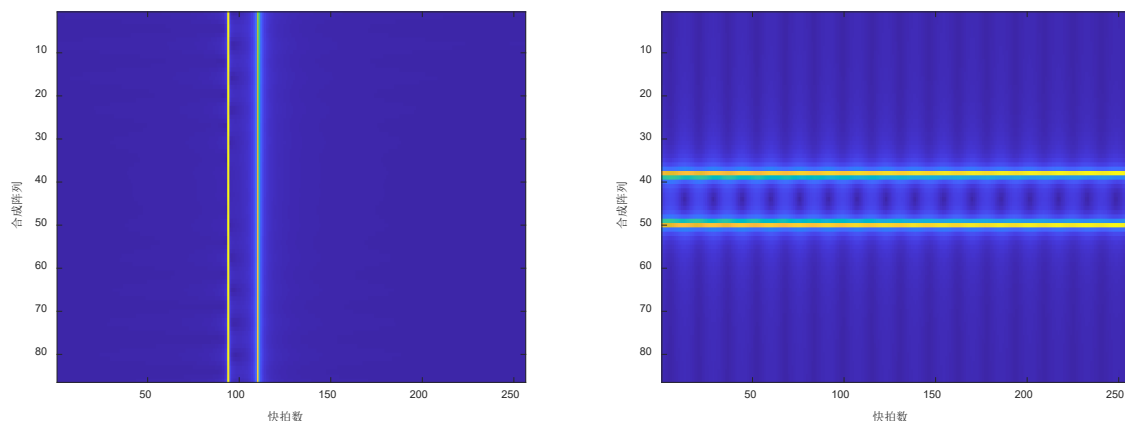


图 27 (a) 距离维 FFT 示意图

(b) 阵列维 FFT 示意图

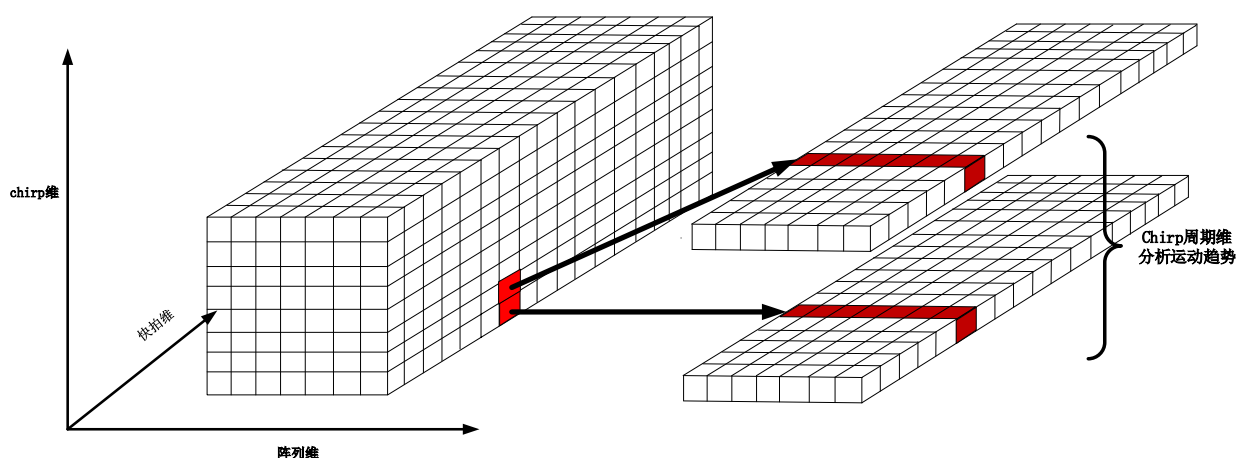


图 28 三维联合目标匹配方法示意图

图 28 即为对三维数据立方体的形象化展示，三维分别为快拍维、阵列维、chirp 维，分别是蕴含了距离、角度及速度信息。合理运用三维定位信息即可完成对目标运动轨迹的精确估计。下面通过此图对三维联合目标匹配定位算法进行详细介绍。

首先，从 chirp 维将数据立方体分为 32 面，每一面蕴含距离和角度构成的点迹信息。对平面矩阵的快拍列做 512 点一维 FFT，每一面即可得到多目标距离信息矩阵。下一步对平面矩阵的阵列行采用 SRT-MUSIC 算法，该算法通过分解噪声子空间大大降低了运算复杂度，可在线进行 DOA 估计，每一面即可得到多目标角度信息矩阵。由已得目标信息矩阵在每一面即可观察得出多个距离—角度二维点迹，沿着 32 个 chirp 周期，可绘制出多条运动轨迹。

如图 29 所示：

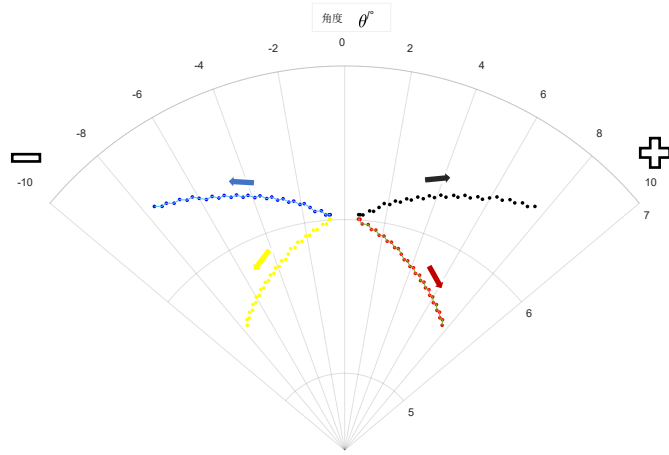


图 29 运动趋势分析示意图

此时出现问题，即假设只存在  $K$  个真实目标，轨迹个数却为  $2K$ 。这是因为得出的多个距离和多个角度信息并不能进行有效对应，无法正确对目标进行定位，出现  $K$  个真目标， $K$  个假目标。

本算法通过 chirp 周期维信息对运动趋势进行分析，完成对目标运动轨迹的筛选识别。对目标数据信息沿速度维—角度维进行二维联合 FFT，当目标数为 2 的时候，只需取两个 chirp 即可粗估计出真实目标的角速度与速度的正负关系。假设目标远离观测点为正，以此图为例四条轨迹分别代表速度—角度不同正负关系，通过粗估计信息即可完成目标精确定位已经筛选正确轨迹。当目标数超过 2 个时，则需提高 chirp 维累积个数以提高精度，通过具体三维信息完成目标的精确轨迹定位。

表 11 三维联合目标匹配定位算法步骤

三维联合目标匹配定位算法步骤：输入 $Z\_time$ 。	
Step1	提取目标数据 $Z\_time$ ，对一帧数据中每一个 chirp 周期沿距离维做一维 FFT；
Step2	对每一个 chirp 数据按照 MUSIC 算法进行计算，从而获得噪声子空间 $E_n$ ；
Step3	将获取的噪声子空间 $E_n$ 和信号导向矢量 $A(\theta)$ 进行分割处理；
Step4	构造新的谱函数 $P(\theta)$ ，在估计范围 $[-\theta, \theta]$ 内进行相应搜索，得到 DOA 估计的角度集合；
Step5	根据 32 个 chirp 周期，由距离以及角度结果二维图表示 $K$ 条物体相对运动轨迹；
Step6	对目标数据 $Z\_time$ 沿 32 个 chirp 周期的多普勒维及角度维做联合二维 FFT；
Step7	通过二维角度多普勒数据信息对目标运动轨迹进行筛选识别，保留 $K$ 条真轨迹即为物体实际运动轨迹。

#### 4.4.2.1 基线法预处理目标匹配定位算法

表 12 具体展示基线法预处理目标匹配定位算法的具体步骤，如图 30 (a) (b) 所示，通过目标 1 和目标 2 的 FFT 角度值和 MUSIC 测角结果的差值可以分析出，目标 1 对应的 MUSIC 测角结果是  $0.0011^\circ$ ，目标 2 对应的 MUSIC 测角结果是  $0.1334^\circ$ 。

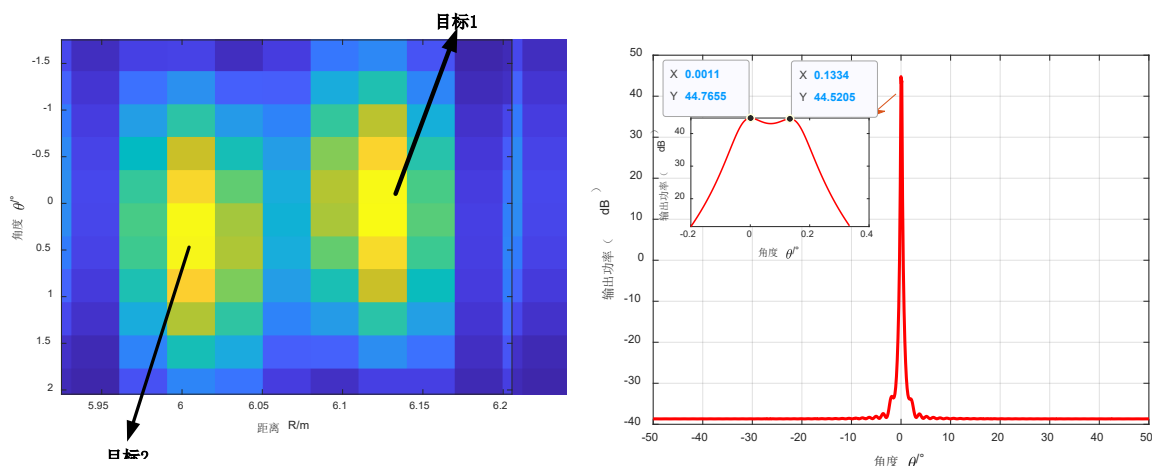


图 30 (a) 二维 FFT 预处理结果

(b) MUSIC 测角结果

表 12 基线法预处理目标匹配定位算法步骤

基线法预处理目标匹配定位算法：输入 $Z\_time$ 。	
Step1	提取目标数据 $Z\_time$ ，对一帧数据中每一个 chirp 周期二维 FFT；
Step2	利用二维 FFT 得到角度的粗估计；
Step3	对一帧数据中每一 chirp 周期进行距离维 FFT，并完成距离维目标提取；
Step4	利用超分辨算法对每一个 chirp 周期进行 DOA 估计，得到精细化目标角度；
Step5	将超分辨得到的角度与二维 FFT 角度进行匹配，差值越小，越靠近二维 FFT 预处理结果中相应距离单元对应的角度；
Step5	输出每一个 chirp 周期的定位结果；
Step6	基线法预处理目标匹配定位算法完成。

#### 4.4.2.3 基于子空间旋转变换的快速 DOA 估计算法

本节将子空间旋转不变技术 (Subspace Rotation Technique, SRT) 运用在 MUSIC 算法上，主要处理协方差矩阵中的噪声子空间。通过对原噪声子空间进行降维处理，建立一个新的噪声子空间，进一步构造新的谱函数进行目标搜索。

由于 MUSIC 算法的谱峰搜索函数与噪声子空间  $E_n$  有关，通过对噪声子空间  $E_n$  的分析可知， $E_n$  为  $M * (M - K)$  的一个矩阵。若将  $E_n$  进行降维处理，使得谱峰搜索维度降低便可让算法的计算量显著降低。对  $E_n$  进行分解可以得到：

$$E_n = \begin{bmatrix} E_{n1} \\ E_{n2} \end{bmatrix} \quad (60)$$

其中  $E_{n1}$  为一个  $(M - R) * (M - K)$  的子矩阵， $E_{n2}$  为一个  $R * (M - K)$  的子矩阵。为了让子矩阵  $E_{n2}$  成为一个行满秩矩阵，需要限定如下条件：

$$2 \leq R \leq (M - K) \quad (61)$$

此时，由于行满秩的性质可以认为  $E_{n2}$  存在一个右逆矩阵  $E_{n2}^\dagger$ ，即  $E_{n2}E_{n2}^\dagger = I$ 。

基于矩阵的特性，可以利用  $E_{n2}^\dagger$  构造出一个新的噪声子空间  $E_{ns}$ ，而  $E_{ns}$  实际上是把原噪声子空间  $E_n$  的一个子集，所以利用  $E_{ns}$  进行谱峰搜索不会改变原有的相关信息。 $E_{ns}$  实际上是把原噪声子空间  $E_n$  在空间上进行一定的旋转得到的，在表达式里可表示为：

$$E_{ns} = E_n E_{n2}^\dagger = \begin{bmatrix} E_{n1} E_{n2}^\dagger \\ E_{n2} E_{n2}^\dagger \end{bmatrix} \quad (62)$$

其中  $E_{n2}E_{n2}^\dagger = I_{R \times R}$ ，令  $E_{n3} = E_{n1}E_{n2}^\dagger$ ，所以上式可以简化为：

$$E_{ns} = \begin{bmatrix} E_{n3} \\ I_{R \times R} \end{bmatrix} \quad (63)$$

根据将  $E_n$  划分的性质，同样将信号导向矢量  $A$  进行相应划分，表示为：

$$A = \begin{bmatrix} A_1 (M - R) \\ A_2 (R) \end{bmatrix} \quad (64)$$

因为新噪声子空间  $E_{ns}$  为原噪声子空间  $E_n$  的一个子集，所以  $E_{ns}$  必然与信号导向矢量正交，满足谱峰搜索的条件。其表达式可以表示为：

$$P(\theta) = \frac{1}{\|A^H(\theta)E_{ns}\|^2} \quad (65)$$

进一步将谱函数的分母可以由上式简化为：

$$\begin{aligned} \|A^H(\theta)E_{ns}\|^2 &= \begin{bmatrix} A_1^H & A_2^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{n3} E_{n3}^H & E_{n3} \\ E_{n3}^H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \\ &= A_1^H E_{n3} E_{n3}^H A_1 + A_1^H E_{n3} A_2 + A_2^H E_{n3}^H A_1 + A_2^H A_2 \\ &= \|A_1^H E_{n3}\|^2 + 2 \operatorname{Re}(A_1^H E_{n3} A_2) + \|A_2\|^2 \end{aligned} \quad (66)$$

由于  $A_2$  为  $R$  行的矩阵，所以  $\|A_2\|^2$  的值即为  $R$ 。新构造的谱函数  $P(\theta)$  可以简化为：

$$P(\theta) = \frac{1}{\|A^H(\theta)E_{ns}\|^2} = \frac{1}{\|A_1^H E_{n3}\|^2 + 2 \operatorname{Re}(A_1^H E_{n3} A_2) + R} \quad (67)$$

新构造的谱函数  $P(\theta)$  与原 MUSIC 算法的谱函数除搜索噪声空间数有所降低，其他性能保持不变。同时可以知道  $A_1$ ， $A_2$ ， $E_{n3}$  与之前设定划分矩阵维数的  $R$  关联性很大，所以  $R$  值的大小决定了

谱函数搜索的复杂程度。

#### 4.4.3 计算复杂度分析

对于经典 MUSIC 算法中矩阵特征值分解的复杂度为：

$$C_{EVD} = o(M^2 K) \quad (68)$$

由式(63)可知， $E_{ns}$  的复杂度与  $E_n$  和  $E_{n2}^\dagger$ ，可表示为：

$$C_{E_{ns}} = o(RM(M - K)) + o(M(M - K)) \quad (69)$$

根据 MUSIC 谱峰搜索的性质可知，由于设定的搜索精度不同，其搜索的个数也会随搜索精度的设定而成倍增加，算法的复杂度也随之提升。假定在角度估计范围  $[-\theta, \theta]$  内共有  $J$  个搜索点数。因而 MUSIC 算法的运算复杂度可以表示为：

$$C_{MUSIC} = o(M^2 K) + o(J(M + 1)(M - K)) \quad (70)$$

对于 SRT 算法而言，其运算复杂度除了有特征值分解的复杂度，还包括其新谱函数分母的各式复杂度，如  $\|A_1^H E_{n3}\|^2$  的复杂度为：

$$C_{\|A_1^H E_{n3}\|^2} = o(R(M + 1 - R)) \quad (71)$$

而  $A_1^H E_{n3} A_2$  的复杂度为：

$$C_{A_1^H E_{n3} A_2} = o(R(M + 1 - R)) \quad (72)$$

所以由此可得 SRT-MUSIC 算法的复杂度为：

$$C_{SRT-MUSIC} = o(M^2 K) + o(RM(M - K)) + o(M(M - K)) + o(2JR(M + 1 - K)) \quad (73)$$

当等效阵元数取值不同时， $R$  的最优值也随之变化，表示为：

$$R_{best} = \begin{cases} 2, M \geq K + 2 \\ M - 1, M \leq K + 2 \end{cases} \quad (74)$$

对比 MUSIC 算法和 SRT-MUSIC 算法复杂度可以发现，由于谱峰搜索个数基数较大，同时个别项式内的复杂度远小于其他项式内复杂度，在估计复杂度时可以将不含  $J$  的项约去并且不影响总复杂度的估计。所以将两种算法复杂度对比简化，可以表示为：

$$\begin{aligned} Q &= \frac{o(M^2 K) + o(J(M + 1)(M - K))}{o(M^2 K) + o(RM(M - K)) + o(M(M - K)) + o(2JR(M + 1 - K))} \\ &= \frac{J(M + 1)(M - K)}{2JR(M + 1 - K)} = \frac{(M + 1)(M - K)}{2R(M + 1 - K)} \end{aligned} \quad (75)$$

通过上述分析可以看出，SRT-MUSIC 算法在阵元数较多、目标数较少的情况下，其算法复杂度明显优于 MUSIC 算法。

SRT-MUSIC 核心算法步骤如下：



步骤一：将数据按照 MUSIC 算法进行计算，从而获得噪声子空间  $E_n$ ；

步骤二：将获取的噪声子空间  $E_n$  和信号导向矢量  $A(\theta)$  进行分割处理；

步骤三：构造新的谱函数  $P(\theta)$ ，在估计范围  $[-\theta, \theta]$  内进行相应搜索，得到 DOA 估计的角度集合。

4.4.4 算法时间对比实验

表 13 四种测角算法运行时间对比图

算法	SRT-MUSIC	L <sub>1</sub> -SVD-CS	MUSIC	FFT
运行时间/s	0.8	180	4	0.3

4.4.5 问题求解

针对问题三，本节首先采用思路一来区分匹配不同距离单元上的目标，同时采用基于子空间旋转变换的快速 DOA 估计算法（SRT-MUSIC）在降低复杂度的同时，来实现高分辨测角。表 13 给出 32 个 chirp 周期的目标定位结果，图 31 则表示目标运动轨迹在极坐标中的示意图。

表 14 问题三中 32 个 chirp 周期目标定位结果

目标定位结果				
chirp 周期/ 个	目标 1		目标 2	
	距离/m	角度/°	距离/m	角度/°
1	6.006	0.76	6.035	-0.76
2	6.006	0.68	6.035	-0.70
3	5.976	0.89	6.035	-0.92
4	5.976	1.19	6.065	-1.11
5	5.946	1.38	6.065	-1.42
6	5.946	1.61	6.095	-1.62
7	5.916	1.82	6.125	-1.86
8	5.916	2.08	6.125	-2.06
9	5.887	2.30	6.154	-2.31
10	5.887	2.53	6.154	-2.54
11	5.857	2.77	6.184	-2.75
12	5.857	2.98	6.184	-3.00
13	5.827	3.22	6.214	-3.21
14	5.798	3.47	6.214	-3.44
15	5.798	3.68	6.244	-3.68
16	5.768	3.91	6.244	-3.91
17	5.768	4.13	6.273	-4.15

18	5.738	4.36	6.273	-4.37
19	5.738	4.63	6.303	-4.59
20	5.708	4.82	6.303	-4.83
21	5.708	5.05	6.333	-5.06
22	5.679	5.29	6.333	-5.30
23	5.679	5.54	6.362	-5.51
24	5.649	5.75	6.362	-5.77
25	5.649	5.97	6.392	-6.00
26	5.619	6.20	6.422	-6.20
27	5.619	6.44	6.422	-6.44
28	5.589	6.68	6.452	-6.67
29	5.589	6.90	6.452	-6.92
30	5.560	7.14	6.481	-7.16
31	5.560	7.37	6.481	-7.36
32	5.530	7.59	6.511	-7.59

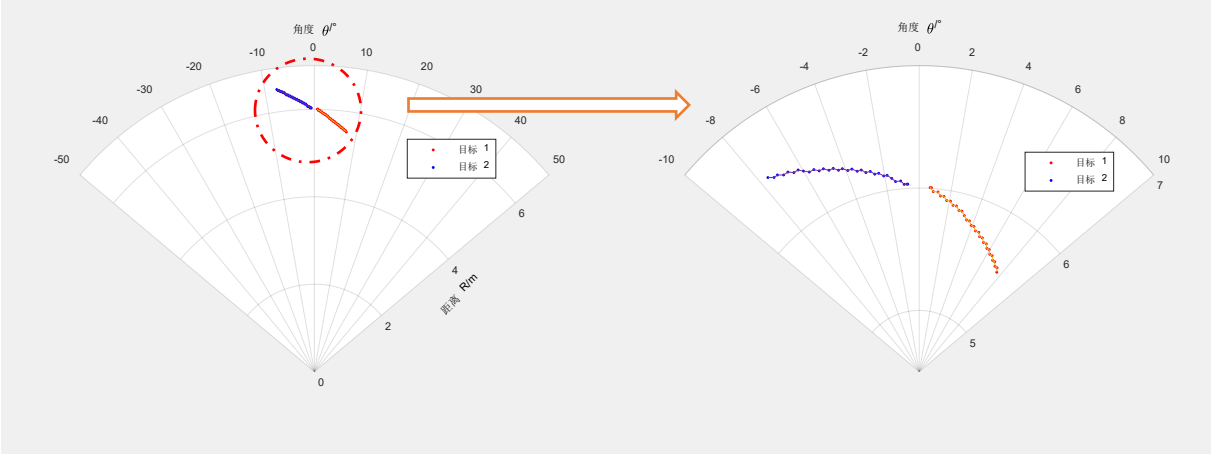


图 31 问题三中目标运动轨迹极坐标示意图

## 4.5 问题四：鲁棒超分辨率定位算法研究

### 4.5.1 问题分析

实际场景下，由于天线受到干扰等因素的影响或者天线自身由于标准不准引起的幅相误差，天线阵列的角度估计会存在一定偏差。因为这些误差的存在，对 MIMO 雷达系统角度估计精度产生很大的影响。为了提升误差存在情况下的阵列定位问题，这要求在建模的过程中需要尽可能得使系统误差得到补偿。

#### 4.5.1.1 data\_q4.mat 数据分析问题分析

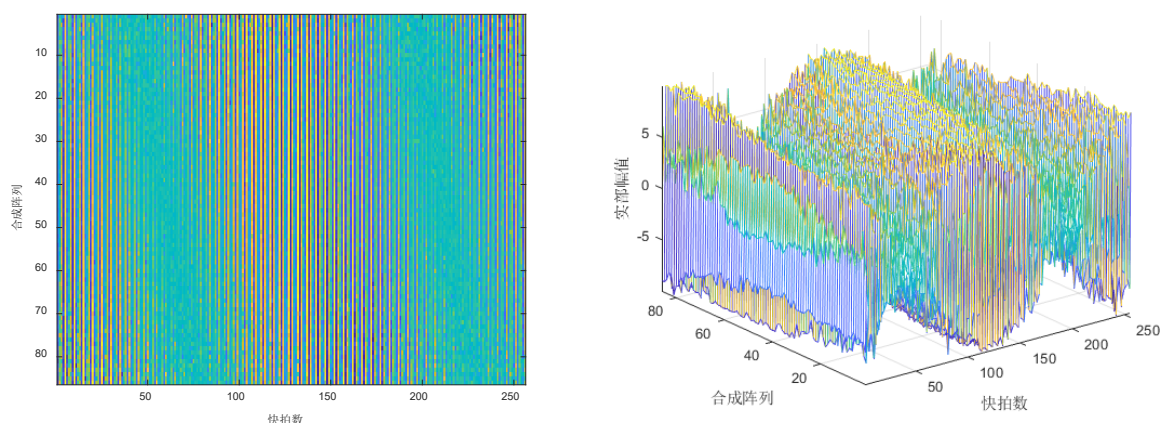


图 32 (a) data\_q4.mat 数据二维图 (b) data\_q4.mat 数据三维图

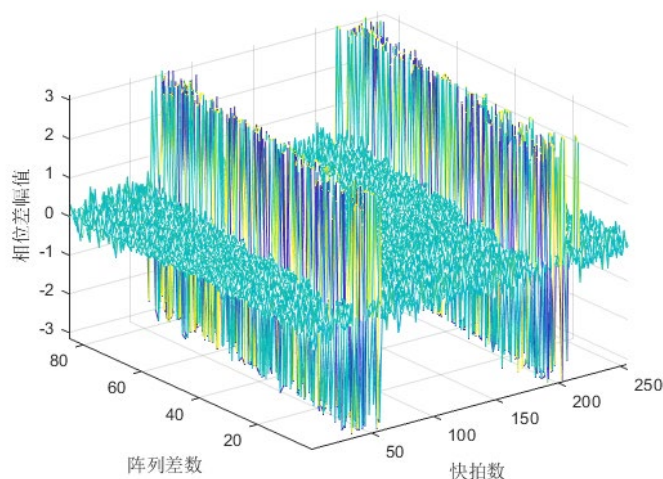


图 33 相位差分布图

通过对 data\_q3.mat 绘制二维分布和三维数据图，并用第  $i+1$  个阵列通道复数值点除第  $i$  个阵列通道复数值，求相角后，可得到通道之间的相位差分布情况。从图 33 中可以发现，天线误差不仅会造成通道与通道之间的幅相误差，同时这种误差也在时间上分布。如果不对这些幅相误差进行补偿，会对阵列测角造成较大的影响。因此本节将对如何补偿幅相误差进行分析，基于特征空间的幅相误差和角度联合迭优化方法来实现准确高分辨角度估计，同时创新提出了联合相位误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法，数值实验证明两种算法具备鲁棒性，具备在幅相误差情况下高分辨定位的能力。

## 4.5.2 模型建立

### 4.5.2.1 基于特征空间的幅相误差和角度联合迭优化方法

#### 4.5.2.1.1 阵元位置误差模型

假定第  $m$  个阵元的位置相对理论位置具有二维偏差  $(\Delta x_m, \Delta y_m)$ ，不失一般性，取第一个阵元的位置为基准，可以认为其位置是精确的，即  $(\Delta x_1, \Delta y_1) = (0, 0)$ ，则来自  $\theta_l$  方向上的目标到达第  $m$  个阵元会产生一定的附加相移，记为  $\varphi_m$

$$\varphi_m = \frac{1}{\lambda} (\Delta x_m \sin \theta_l + \Delta y_m \cos \theta_l) \quad (76)$$

其中  $\lambda$  为雷达信号的波长。记位置误差为  $M \times 1$  维向量  $\Delta a(\theta_l)$

$$\Delta a(\theta_l) = [1, e^{j\Delta\varphi_2}, \dots, e^{j\Delta\varphi_M}]^T \quad (77)$$

从中可以看出附加相移是位置误差与角度的函数，则导向矢量可以用下式修正：

$$\hat{a}(\theta_l) = \Delta a(\theta_l) \circ a(\theta_l) \quad (78)$$

其中运算符 “ $\circ$ ” 代表 Hadarmard 积， $a(\theta_l)$  为不考虑误差的阵列导向矢量， $\hat{a}(\theta_l)$  为有位置情况下的阵列真实导向矢量。从式(77)中我们可以看出，与幅相误差不同的是，阵元位置误差虽然在信号中也表现为相位误差，但是这种误差是依赖于角度的，即不同的  $\theta_l$  对应的附加相位不同。

#### 4.5.2.1.2 算法原理

在阵列自校正方法中，根据阵列参数化模型基于一定准则选择代价函数，在幅相误差参数和目标角度参数间进行迭代求解。上个世纪 90 年代以来，信号处理学界提出了一系列的阵列幅相误差自校正方法，其中比较经典的算法为 Anthony J. Weiss 和 Benjamin Friedlander 提出的基于特征空间的幅相误差和角度联合迭优化方法该方法在 DOA 估计和幅相误差估计之间进行迭代求解，最终联合估计出目标的角度信息和阵列的幅相误差。

阵列自校正方法是根据一定的标准，根据阵列参数化模型选择代价函数，在幅相误差参数和目标角度参数之间迭代求解。上世纪 90 年代以来，信号处理学界提出了一系列阵列振幅相位误差的自我校正方法。最具代表性的方法是由 Anthony J. Weiss 和 Benjamin Friedlander 提出的基于特征空间的幅相误差和角度联合迭优化方法。该方法通过角度推定和相位振幅误差推定之间的迭代计算，计算出目标角度信息和阵列的相位振幅误差。

假设信源个数为  $K$ ，阵列回波信号模型为：

$$\mathbf{x}(t) = \Gamma A \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(t) \quad (79)$$

其中  $A = [a(\theta_1), \dots, a(\theta_K)]$ ， $S_K(t)$  为第  $K$  个信源的回波。则我们可以推得阵列协方差矩阵：

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H \mathbf{\Gamma}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (80)$$

其中信号协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_s = E \left\{ \begin{bmatrix} s_1(t) & \cdots & s_K(t) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} s_1(t) & \cdots & s_K(t) \end{bmatrix} \right\} \quad (81)$$

假设各信源不具备相干性，则有

$$\text{rank}(\mathbf{R}_s) = K \quad (82)$$

假设目标数小于阵元个数，即  $K < M$ 。则对  $\mathbf{R}_x$  进行特征分解，由于  $\mathbf{R}_x$  是正定厄米特矩阵，则可以对其特征值进行排序获得  $K$  个大特征值和  $K - P$  个小特征值。将  $K - P$  个小特征值对应的特征向量为  $\mathbf{u}_m (m = K + 1, \dots, M)$  排列成一个矩阵  $\mathbf{E}_n(\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_M)$ ，该矩阵的列空间被称为信号子空间。根据子空间的正交特性，我们可以得到

$$\mathbf{E}_n^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{a}(\theta_k) = 0 \quad (83)$$

从而可以推得 MUSIC 空间谱为

$$P(\theta, \varphi) = \frac{1}{\|\mathbf{E}_n^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{a}(\theta)\|_2^2} \quad (84)$$

根据已知幅相误差矩阵，根据式(84)采取一维谱峰搜索进行目标的 DOA 估计，即

$$\theta = \arg \max_{\theta} P(\theta) \quad (85)$$

同时可以定义代价函数  $J$  为

$$J = \sum_{k=1}^K \|\mathbf{E}_n^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{a}(\theta_k)\|_2^2 = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k)^H \mathbf{\Gamma}^H \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{a}(\theta_k) \quad (86)$$

令  $\mathbf{D}(\theta) = \text{diag}\{\mathbf{a}(\theta)\}$ ，则可得出

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{a}(\theta) = \mathbf{D}(\theta) \boldsymbol{\gamma} \quad (87)$$

因此根据式(87)，可以将式(86)简化为

$$J(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\gamma}^H \left\{ \sum_{k=1}^K \mathbf{D}(\theta_k)^H \mathbf{\Gamma}^H \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}(\theta_k) \right\} \boldsymbol{\gamma} \quad (88)$$

定义矩阵  $\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^K \mathbf{D}(\theta_k)^H \mathbf{\Gamma}^H \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}(\theta_k)$ 。由第一个阵元的回波对第一个阵元的幅相误差进行归一

化，即  $\gamma_1 = 1$ ，进而可以约束阵列幅相误差向量  $\boldsymbol{\gamma}$  的第一个元素为 1，即  $\boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{w} = 1$ ，其中  $\mathbf{w}$  为  $M \times 1$  维

向量，且  $\mathbf{w} = [1, 0, \dots, 0]^T$ 。因此我们可以得到优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{\gamma} \gamma^H \mathbf{Q} \gamma \\ \text{s.t. } \gamma^H \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \quad (89)$$

采用拉格朗日乘子法求解等式约束的优化问题(89)，进而求解出幅相误差向量

$$\gamma = \frac{\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{w}} \quad (90)$$

角度  $\theta$  的估计(85)是建立在幅相误差矩阵  $\Gamma = \text{diag}(\gamma)$  已知的情况下，而幅相误差  $\gamma$  的估计是建立在目标角度  $(\theta_k)_{k=1}^K$  已知的基础上。而实际中目标角度  $\theta$  和幅相误差  $\gamma$  都未知，因此需要对幅相误差和角度进行联合迭代求解。迭代过程如表 15 所示。

表 15 幅相误差和角度联合迭代估计方法步骤

幅相误差和角度联合迭代估计方法步骤：输入 $x(t)$ ， $\varepsilon$ ；输出 $\gamma$ ， $(\theta_k)_{k=1}^K$ 。
Step1 计算协方差矩阵 $R_x = E\{x(t)x(t)^H\}$ ，进行特征值分解，取小特征值对应的特征向量构建噪声子空间 $E_n$ ；
Step2 初始化：幅相误差对角矩阵 $\Gamma^l$ 初始化为全 0 矩阵，迭代计数 $\gamma^l$ 初始化为 0；
Step3 固定幅相误差为 $\Gamma^l$ ，对 MUSIC 空间谱 $P(\theta, \varphi) = \frac{1}{\ E_n^H \Gamma \mathbf{a}(\theta)\ _2^2}$ 进行谱峰搜索，获得角度 $(\theta_k)_{k=1}^K$ 的估计；
Step4 固定目标角度为 $(\theta_k)_{k=1}^K$ ，计算幅相误差 $\gamma^{l+1} = \frac{(\mathbf{Q}^l)^{-1} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H (\mathbf{Q}^l)^{-1} \mathbf{w}}$ ，令 $\Gamma^{l+1} = \text{diag}(\gamma^{l+1})$ ；
Step5 判断是否满足收敛条件 $J^{l+1}(\gamma) - J^l(\gamma) > \varepsilon$ ，其中 $J^l(\gamma) = (\gamma^l)^H \mathbf{Q}^l \gamma^l$ 。如果不满足则令 $l = l + 1$ 回到 Step3；如果满足则停止迭代输出结果。

该方法只适用于相幅误差较小的情况，如果相幅误差较小，就可以比较准确地推测相幅误差和目标角度。当振幅和相位误差较大时，Step3 无法有效地进行 DOA 估计，从而影响下一个迭代阶段，从而收敛到局部解甚至分散。同时，该方法的迭代收敛速度由初始值的选择、目标的角度、相位振幅误差的大小等多个因素决定。

#### 4.5.2.2 联合相位误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法

考虑 MIMO 虚拟阵列为  $M$  个均匀线性排列的间距均为  $d$  的阵元，假定空间中存在  $K$  个波长为  $\lambda$  的入射源，方向为  $\theta_k (k=1, 2, 3, \dots, K)$ ，在不考虑阵元位置误差及噪声影响的前提下，以第一个阵元为参考中心，阵列第  $m$  个阵元接收的信号为：

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t) e^{-j2\pi(m-1)d \sin \theta_k / \lambda} \quad (91)$$

时间离散后可表示为  $t = 0, 1/fs, 2/fs, \dots, (N_s - 1)/fs$ ，其中， $fs$  为采样频率， $N_s$  为快拍数。依次以左侧阵元为参考，将右侧阵元接收信号幅相归一处理，得到空间相位恒定因子  $\eta$  如下式：

$$\eta = \frac{x_m(t)}{x_{m-1}(t)} = \frac{\sum_{k=1}^K s_k(t) e^{-j2\pi(m-1)d \sin \theta_k / \lambda}}{\sum_{k=1}^K s_k(t) e^{-j2\pi(m-2)d \sin \theta_k / \lambda}} = |S| \sum_{k=1}^K e^{-j2\pi d \sin \theta_k / \lambda} \quad (92)$$

其中  $|S| = \frac{|x_m(t)|}{|x_{m-1}(t)|}$  为两通道包络幅度比值。分析可知，对于不同的阵元差通道  $m$ ， $\eta$  的相位恒定，且与阵元间距  $d$ 、空间中入射源的个数  $K$  与方向  $\theta_k$  等有关。将噪声误差引起的阵元接收信号误差引入对空间渐变因子  $\eta$  修正得到  $\eta_\Gamma$ ，如下式可得：

$$\eta_\Gamma = |S| \sum_{k=1}^K e^{-j2\pi(d \sin \theta_k / \lambda + \Omega_n)} \quad (93)$$

当第  $m$  个阵元接收第  $i$  次快拍时对自身定位存在偏差时，会引起一对空间相位恒定因子  $\eta_\Gamma$  的改变。

$$\begin{cases} \eta(m, i) = \frac{x_m(t) \cdot e^{j2\pi\Phi_m}}{x_{m-1}(t)} = |S| \sum_{k=1}^K e^{-j2\pi(d \sin \theta_k / \lambda + \Omega_n + \Phi_m)} \\ \eta(m+1, i) = \frac{x_{m+1}(t)}{x_m(t) \cdot e^{j2\pi\Phi_m}} = |S| \sum_{k=1}^K e^{-j2\pi(d \sin \theta_k / \lambda + \Omega_n - \Phi_m)} \end{cases} \quad (94)$$

且  $\Phi_m \gg \Omega_n$ ，即阵元位置误差显著引起了  $\eta_\Gamma$  的变换。因此联合相位误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法通过找寻空间相位恒定因子  $\eta_\Gamma$  角度的异常值索引，来定位并补偿阵元位置带来的相位误差  $\Phi_m$ 。算法实现流程表 16 所示

表 16 联合相位误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法流程

联合相位误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法步骤：输入 MIMO 虚拟阵列回波接收信号矩阵 $\mathbf{x}(t)=[x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ 输出 $(\theta_k)_{k=1}^K$ 。	
Step1	计算 $\mathbf{x}(t)$ 的角度矩阵 $\mathbf{\Theta}=\text{angle}\{\mathbf{x}(t)\}$ ；
Step2	对角度矩阵 $\mathbf{\Theta}$ 参差归一得到空间相位恒定因子矩阵 $\eta_\Gamma=[\vec{\Theta}_2-\vec{\Theta}_1, \vec{\Theta}_3-\vec{\Theta}_2, \dots, \vec{\Theta}_M-\vec{\Theta}_{M-1}]$
Step3	求出空间相位恒定因子矩形每个列向量的均值 $[E[\vec{\Theta}_2-\vec{\Theta}_1], E[\vec{\Theta}_3-\vec{\Theta}_2], \dots, E[\vec{\Theta}_M-\vec{\Theta}_{M-1}]]$
Step4	定义阵列位置误差评判因子 $10 \leq \mu \leq 50$ ，评判因子取值越小筛选问题阵元成功率越高；对接收到的源信号数据影响越大。反之，对接收到的源信号数据影响越小，筛选问题阵元成功率越低。
Step5	遍历空间相位恒定因子矩阵各列向量里的各个元素。当 $ \eta_{\Gamma(i,j)}  \geq \mu E[\vec{\eta}_{\Gamma_i}]$ 时，对回波接收信号矩阵对应位置元素进行补偿： $x_{(i+1,j)} = x_{(i,j)} \cdot e^{-j\eta_{\Gamma(i,j)}}$ ；
Step6	补偿后，计算协方差矩阵 $R_x = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H\}$ ，进行特征值分解，取小特征值对应的特征向量

构建噪声子空间  $E_n$ ;

Step7 对 MUSIC 空间谱  $P(\theta, \varphi) = \frac{1}{\|E_N^H \Gamma \mathbf{a}(\theta)\|_2^2}$  进行谱峰搜索, 获得幅相误差校正后的精确角度

$(\theta_k)_{k=1}^K$  的估计;

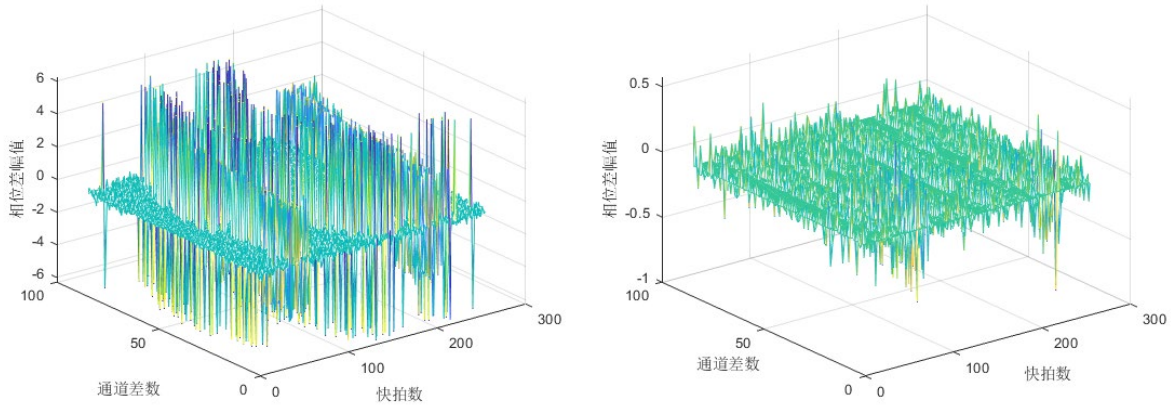


图 34 (a) 未校正幅相误差前通道相位差分布图 (b) 幅相误差校正后通道相位差分布图

### 4.5.3 问题求解

#### 4.5.3.1 基于特征空间的幅相误差和角度联合迭优化方法的目标定位结果

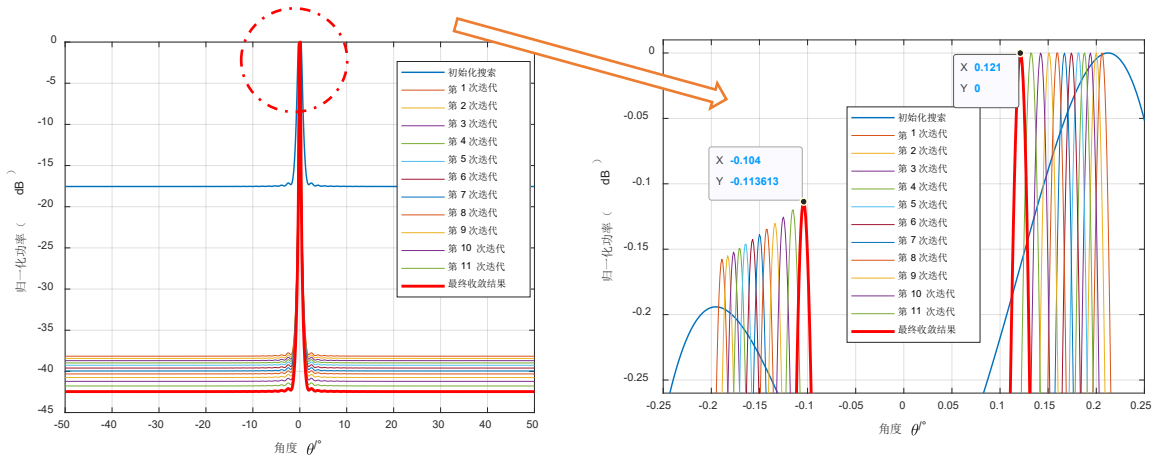


图 35 (a) 联合迭代优化角度估计结果 (b) 角度估计结果局部放大图

表 17 基于特征空间的幅相误差和角度联合迭优化方法的目标定位结果

目标	距离 /m	方位 /°
目标 1	6.1246	-0.1040
目标 2	6.0056	0.1210



4.5.3.2 基于联合幅相误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法的目标定位结果

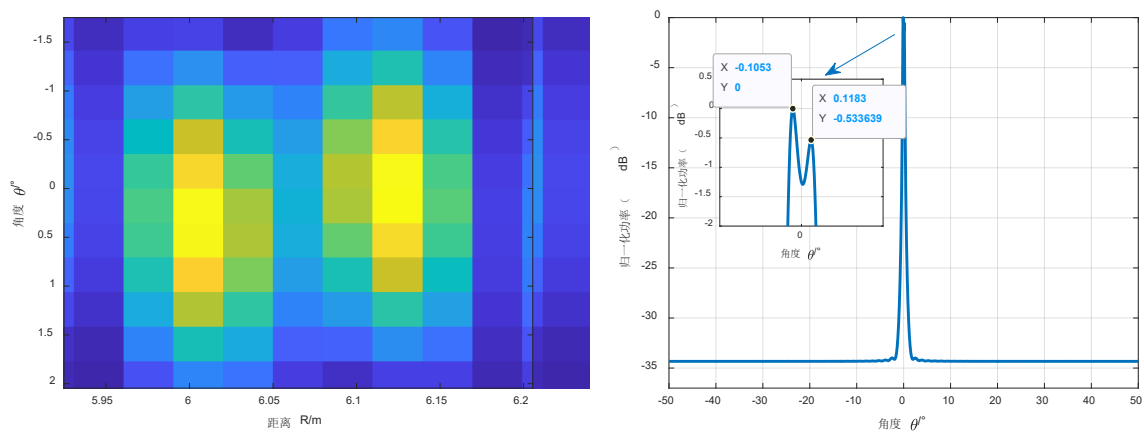


图 36 (a) 二维 FFT 预处理 (b) 联合 DOA 估计算法测角结果

表 18 基于联合幅相误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法的目标定位结果

目标	距离 / <i>m</i>	方位 /°
目标 1	6.1246	-0.1053
目标 2	6.0056	0.1183

## 五、工作总结及展望

经过建模与分析，本文较好地解决了移动场景下 MIMO 毫米波雷达超分辨定位问题求解。针对问题一，本文建立的 FCMV-MIMO 雷达系统仅考虑一种共址收发系统结构，后文建模也均基于该体制。而关于收发异址等其他收发体制，还需要进一步分析其影响因素。另外，本文仅考虑对静止目标的 DOA 估计，运动目标的 DOA 估计还需要补偿速度引起的多普勒影响，情况更加复杂。

针对问题二，本文设计的超分辨定位算法本质上还是一种先测距后测角的级联处理方法，而超分辨算法定位求解带来的距离、角度二值映射问题不可忽略。后续可以设计兼顾测速与测角的方法，同时具备较强的抗噪声能力，在低信噪比条件下仍然可以实现较好的目标定位。其次，问题二所采用压缩感知类算法计算量较大，相应的快速计算方法亟需研究。

针对问题三，本文虽然较好解决了二值映射带来的目标匹配问题，但计算复杂度和运行时间并没有出现数量级级别的降低。并行计算能否更好实现计算复杂度降低值得进一步思考。

针对问题四，本文提出的算法本质上仍然是一种预处理算法，并未从原理上修正超分辨算法。而且该算法实际上只是对相位误差的校正，幅度误差并未校正。这也是算法后续可以继续改进的方向之一。

## 参考文献

- [1] BELFIORI, FRANCESCO, VAN ROSSUM, WIM, HOOGEBOOM, PETER. 2D-MUSIC technique applied to a coherent FMCW MIMO radar[C]. //IET international conference on radar systems.:Curran Associates, Inc., 2012:1-6.
- [2] MATTHEW A. HERMAN, THOMAS STROHMER. High-Resolution Radar via Compressed Sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing: A publication of the IEEE Signal Processing Society,2009,57(6):2275-2284.
- [3] 刘春静. 超分辨 DOA 估计及鲁棒波束形成技术研究[D]. 黑龙江:哈尔滨工程大学,2010.
- [4] 张兴良,王可人,樊甫华. 典型阵列快速 MUSIC 算法研究[J]. 雷达学报,2012,1(2):149-156.
- [5] 季晓宇. 高分辨低复杂度 DOA 估计在多载频 MIMO 雷达上的应用[D]. 江苏:南京理工大学,2018.
- [6] 徐豪. 基于 MIMO 的汽车毫米波雷达信号体制及超分辨测角研究[D]. 四川:电子科技大学,2020.
- [7] 范乐乐. 基于 MIMO 阵列与压缩感知的雷达前视超分辨成像方法研究[D]. 陕西:西安电子科技大学,2020.
- [8] 刘寅. 基于稀疏信号重构的空间谱估计算法研究[D]. 陕西:西安电子科技大学,2012. DOI:10.7666/d.D362891.
- [9] 李新颖,彭静,蒋占军,等. 基于压缩感知的 DOA 估计方法研究[J]. 自动化与仪器仪表,2014(11):34-36,39.
- [10] 危瑞奇. 基于压缩感知的 DOA 估计方法研究[D]. 四川:电子科技大学,2017.
- [11] 燕静波. 基于压缩感知的 DOA 估计研究[D]. 陕西:西安电子科技大学,2013. DOI:10.7666/d.Y2380098.
- [12] 房云飞,王洪雁,裴炳南. 基于压缩感知的波束域 DOA 估计[J]. 电光与控制,2018,25(8):88-92.
- [13] 贺亚鹏,李洪涛,王克让,等. 基于压缩感知的高分辨 DOA 估计[J]. 宇航学报,2011,32(6):1344-1349.
- [14] 包晓蕾,曲行根,王卓英. 基于压缩感知的稀疏重构 DOA 估计算法[J]. 武汉理工大学学报(信息与管理工程版),2015(6):827-831,864.
- [15] 龚珞珞. 基于压缩感知的 MIMO 雷达角度估计方法研究[D]. 江苏:南京航空航天大学,2014.
- [16] 胡斌. 基于压缩感知的稀疏阵列 DOA 估计关键技术研究[D]. 黑龙江:哈尔滨工业大学,2020.
- [17] 刁弘扬. 基于压缩感知的窄带信号 DOA 估计方法研究[D]. 黑龙江:哈尔滨工程大学,2020.
- [18] 陈显舟. 快速超分辨 DOA 估计技术研究[D]. 四川:电子科技大学,2011.
- [19] 张鑫. 雷达方位超分辨关键技术研究[D]. 辽宁:大连海事大学,2018.
- [20] 王晓波. 压缩感知在 MIMO 雷达系统中的应用研究[D]. 安徽:安徽大学,2020.
- [21] 吴双,袁野,吴微微,等. 一种宽带相干信源的无网格超分辨 DOA 估计方法[J]. 电波科学学报,2020,35(5):648-655.
- [22] 许红波,王怀军,陆珉,等. 一种新的 MIMO 雷达 DOA 估计方法[J]. 国防科技大学学报,2009,31(3):92-96.
- [23] 田语柔,王晶琦,谭晶,等. MIMO 雷达角度超分辨估计算法研究[J]. 微波学报,2017(s1):329-332.
- [24] 宋俊才. 超分辨 DOA 估计方法研究[D]. 黑龙江:哈尔滨工程大学,2010.
- [25] 郑煜. MIMO 雷达幅相误差自校正方法研究[D]. 陕西:西安电子科技大学,2015.
- [26] 王宁,吕晓德,李苗苗. 低信噪比下非冗余阵列的无网格 DOA 估计[J/OL]. 系统工程与电子技术:1-10[2022-10-10].

## 附录

### 问题一：

```
clear all;
close all;
clc;

%% %%%%%%%%%%%
%% 2022 年 10 月 6 日
%% question one
%% %%%%%%%%%%%

%% 系统参数
c      = 3e8;           %光速
Ts      = 1.25e-7;      %采样周期
fs      = 1/Ts;         %采样频率(8M)
T       = 3.2e-5;       %chirp 周期
Nf      = 32;           %一帧有 32 个 chirp
L       = 0.0815;       %每个虚拟孔径的长度
gama    = 78.986e12;     %调频率
Na      = 86;           %阵元个数
f0      = 78.8e9;       %中心频率
POINT_NUM = 256;       %点数
lmda    = c/f0;         %波长
B       = gama*T;       %chirp 带宽
dd      = 2*L/(Na-1);   %阵元间距

%% 导入数据
load('data_q1.mat');

%% 1.基线法求解
R0_x = (0:fs/(POINT_NUM-1):fs)*c/(2*gama); %距离维度坐标
theta_y=-90:180/(128-1):90; %角度维度坐标
mm = abs(fftshift((fft((fft(Z,[],2)),128,1)),1)); %基线法

figure(1)
mesh(R0_x,theta_y,mm); %画出 R-thita 图
axis([0 10 -90 90]) %坐标限制

% xlabel('距离/m'); ylabel('角度/° '); zlabel('幅度');
% axes('Position',[0.4 0.3 0.3 0.25])
% mesh(R0_x(118:120),theta_y(60:70),mm(60:70,118:120))
% xlabel('距离/m'); ylabel('角度/° '); zlabel('幅度');
% colormap Jet

win = hann(length(mm(1,:)));
win = repmat(win,1,128).';
mm_hanning = mm.*win;

figure(2)
```

```

mesh(R0_x,theta_y,mm_hanning); %画出 R-thita 图
axis([0 10 -90 90]) %坐标限制

xlabel('距离/m'); ylabel('角度/° '); zlabel('幅度');
xlabel('距离/m'); ylabel('角度/° '); zlabel('幅度');
axes('Position',[0.4 0.3 0.3 0.25])
mesh(R0_x(118:120),theta_y(60:70),mm(60:70,118:120))
xlabel('距离/m'); ylabel('角度/° '); zlabel('幅度');
colormap Jet

plot(theta_y,mm(:,119));hold on;grid on;
xlabel('角度/° '); ylabel('幅度');

%% 2.MUSIC 算法求解目标方位角
thita = 0:0.0001:180; %角度搜索范围
d = 0:dd:(Na-1)*dd;

R=Z*Z'/POINT_NUM; %信号的自相关函数
[EV,D]=eig(R); %相关函数特征值分解
EVAq=diag(D); %对角矩阵重拍
[EVA,I]=sort(EVAq); %特征值排序
EVA=flipr(EVA); %特征值反褶
EV=flipr(EV(:,I)); %特征向量反褶
P = EV(:,4:end); %提取噪声子空间
for i=1:length(thita) %谱峰搜索
    A=exp(j*2*pi*d/lmda*cos(thita(i)*pi/180)).';
    S(i)=1/(A'*P*P'*A);
end
thita = thita - 90;
out = Peak_Seek(thita,S,2);

figure(2)

plot(thita,20*log10(abs(S)/max(abs(S))), 'r');hold on; %将谱峰功率转换成 dB
grid on;hold on;
axis([-50 50 -90 0]) %坐标限制
title('MUSIC 测角')
xlabel('目标方位 (度) ')
ylabel('输出功率 (dB) ')

axes('Position',[0.4 0.3 0.3 0.25])
% plot(theta_y(60:70),mm(60:70,119));
plot(thita(1800000/2-2000:1800000/2+3340),20*log10(abs(S(1800000/2-
2000:1800000/2+3340)/max(abs(S)))), 'r');hold on; %将谱峰功率转换成 dB
xlabel('目标方位 (度) ')
ylabel('输出功率 (dB) ')
colormap Jet

axis([-0.2 0.4 -33 0])

```

问题二:

```

clear all;
close all;
clc;

%% %%%%%%%%%%%
%% 2022 年 10 月 7 日
%% question two
%% %%%%%%%%%%%

%% 系统参数
c      = 3e8;           %光速
Ts      = 1.25e-7;      %采样周期
fs      = 1/Ts;         %采样频率(8M)
T      = 3.2e-5;        %chirp 周期
Nf      = 32;           %一帧有 32 个 chirp
L      = 0.0815;        %每个虚拟孔径的长度
gama    = 78.986e12;     %调频率
Na      = 86;           %阵元个数
f0      = 78.8e9;        %中心频率
POINT_NUM = 256;        %点数
lmda    = c/f0;         %波长
B      = gama*T;        %chirp 带宽
dd      = 2*L/(Na-1);    %阵元间距

%% 导入数据
load('data_q2.mat');

%% 1.L1-SVD 求解
K = 2;                  %信源数
%snapshot= size(Z_noisy,2); %快拍数
snapshot=256;
X=Z_noisy;
Searching_doa=-50:0.01:50;
for m=1:length(Searching_doa)
    AA(:,m) = exp(-1j*(0:Na-1)*dd*2*pi*sin(Searching_doa(m)*pi/180)/lmda); %构造一度为网格间距的完备基矩阵
end
Y=X;                    %得到观测数据矩阵
Dk1=eye(K);
Dk2 = zeros(K,snapshot-K);
Dk = [Dk1,Dk2].';
[U,D,V] = svd(Y);       %进行奇异值分解
Ysv = Y*V'*Dk;
p=0.001;
yita=chi2inv(1-p,Na^2);
Sumvector=ones(length(Searching_doa),1);
R=X*X'/snapshot;
[EDV,ED]= eig(R);
EVAq=diag(ED);          %对角矩阵重拍
[EVA,I]=sort(EVAq);     %特征值排序
EVA=flipplr(EVA);       %特征值反褶
P_esv=(norm(EVA(:,(3:end))))^2;
cvx_begin quiet         %CVX 工具包

```

```

variables p q
variables r(length(Searching_doa))          % 表示决策向量是一个 1801 维的向量
variable SSV1(length(Searching_doa),K) complex; % 表示决策向量是一个 1801*2 的复数矩阵
expression xsv(length(Searching_doa),1)
expressions Zk(Na,K) complex
minimize(p+5*q);                            %合理选择正则化参数
subject to

Zk = Ysv-AA*SSV1;
Zvec = vec(Zk);                             %把矩阵转化为向量
norm(Zvec) <= p;                             %第一个不等式约束
Sumvector'*r <= q;                          %第二个不等式约束

for i=1:length(Searching_doa)                %第三个不等式约束
    xsv(i,:)=norm(SSV1(i,:));
end
for i=1:length(Searching_doa)
    xsv(i)<=r(i);
end
cvx_end
power=10*log10(abs(xsv)/max(abs(xsv)));

figure()
plot(Searching_doa,power,'r');
xlabel('DOA/degree');
ylabel('PowerdB');

```

### 问题三:

```

clear all;
close all;
clc;

%% %%%%%%%%%%%
%% 2022 年 10 月 7 日
%% question three
%% %%%%%%%%%%%

%% 系统参数
c      = 3e8;           %光速
Ts      = 1.25e-7;      %采样周期
fs      = 1/Ts;         %采样频率(8M)
T       = 3.2e-5;       %chirp 周期
Nf      = 32;           %一帧有 32 个 chirp
L       = 0.0815;       %每个虚拟孔径的长度
gama    = 78.986e12;     %调频率
Na      = 86;           %阵元个数
f0      = 78.8e9;       %中心频率
POINT_NUM = 256;        %点数
lmda    = c/f0;         %波长
B       = gama*T;       %chirp 带宽
dd      = 2*L/(Na-1);   %阵元间距

```

```

%%% 导入数据
load('data_q3.mat');
b_3=permute(Z_time,[2 3 1]);

for i = 1:32

%%% 1.基线法测距
R0_x = (0:fs/(POINT_NUM-1):fs)*c/(2*gama);    %距离维度坐标
theta_y=-90:180/(128-1):90;                    %角度维度坐标

mm =abs(fftshift((fft((fft(b_3(:,i),[],2)),128,1)),1)); %基线法
win = hann(length(mm(1,:)));
win = repmat(win,1,128).';
mm_hanming = mm.*win;

figure((i-1)*2+1);
mesh(R0_x,theta_y,mm_hanming);                  %画出 R-thita 图
axis([0 10 -90 90])

%%% 2.SRT-MUSIC 在线测角

b_4=b_3(:,i);
thita = 0:0.001:180;                            %角度搜索范围
d = 0:dd:(Na-1)*dd;
Z=b_4;
R=Z*Z'/POINT_NUM;                               %信号的自相关函数
[EV,D]=eig(R);                                   %相关函数特征值分解
EVAq=diag(D);                                    %对角矩阵重拍
[EVA,I]=sort(EVAq);                             %特征值排序
EVA=fliplr(EVA);                                %特征值反褶
EV=fliplr(EV(:,I));                             %特征向量反褶

G = EV(:,3:end);                                %提取噪声子空间
G_rank=rank(G);
G_2=G(83:end,:);
G_2ni=pinv(G_2);
G_s=G*G_2ni;
G_3=G(1:82,:)*G_2ni;

for ii=1:length(thita)                          %谱峰搜索
    A=exp(1i*2*pi*d/lmda*cos(thita(ii)*pi/180)).';
    A_1=A(1:82,:);
    A_2=A(83:end,:);
    S(ii)=1/((A_1'*G_3'*G_3'*A_1)+37+2*real(A_1'*G_3'*A_2));
end

figure((i-1)*2+2);
plot(thita-90,20*log10(abs(S)/max(abs(S))), 'k');hold on;    %将谱峰功率转换成 dB
grid on;hold on;
title('SRT-MUSIC 测角')
xlabel('目标方位 (度)')
ylabel('输出功率 (dB)')
end

```



#### 问题四：

```
clc
clear all
close all

%% %%%%%%%%%%
%% 2022 年 10 月 9 日
%% question four
%% %%%%%%%%%%

%% 系统参数
c      = 3e8;           %光速
Ts      = 1.25e-7;      %采样周期
fs      = 1/Ts;         %采样频率(8M)
T       = 3.2e-5;       %chirp 周期
Nf      = 32;           %一帧有 32 个 chirp
L       = 0.0815;       %每个虚拟孔径的长度
gama    = 78.986e12;     %调频率
Na      = 86;           %阵元个数
f0      = 78.8e9;       %中心频率
POINT_NUM = 256;       %点数
lmda    = c/f0;         %波长
B       = gama*T;       %chirp 带宽
dd      = 2*L/(Na-1);   %阵元间距
derad   = pi/180;       %deg -> rad
radeg   = 180/pi;
twpi    = 2*pi;
kelm    = Na;           %阵列数量
dd      = 0.5;          %space
iwave   = 2;            %源个数

%% 导入数据
load('data_q4.mat');
Z = Z_antnoisy;

chose = [0,1] %选择想运行的算法
%% 1.联合相位误差自适应预校正和 MUSIC 的 DOA 估计算法
if (chose(1))
kk = angle(Z);

for i = 1: 85
    phy_cha(i,:) = kk(i+1,:)- kk(i,:);
end

figure(1);
mesh(phy_cha);

gamma = 50;

for i = 1:256
```

```

    mean_phy = mean(phy_cha(:,i));
    for j = 1:85
        if( abs(phy_cha(j,i)) > gamma * mean_phy )
            if(phy_cha(j,i)>0)
                Z(j+1,i) = Z(j,i)*exp(1i*(-phy_cha(j,i)));
                phy_cha(j,i) = angle(Z(j+1,i))-angle(Z(j,i));
                if(j<85)
                    phy_cha(j+1,i) = angle(Z(j+2,i))-angle(Z(j+1,i));
                end

            else
                Z(j+1,i) = Z(j,i).*exp(1i*(-phy_cha(j,i)));
                phy_cha(j,i) = angle(Z(j+1,i))-angle(Z(j,i));
                if(j<85)
                    phy_cha(j+1,i) = angle(Z(j+2,i))-angle(Z(j+1,i));
                end
            end
        end
    end
end

kk1 = angle(Z);

for i = 1: 85
    phy_cha1(i,:) = kk1(i+1,:)- kk1(i,:);
end

figure(2);
mesh(phy_cha1);

R0_x = (0:fs/(512-1):fs)*c/(2*gama);    %距离维度坐标
theta_y=-90:180/(256-1):90;            %角度维度坐标
mm =abs(fftshift((fft((fft(Z,512,2)),512,1)),1)); %基线法
mm1 = fft(Z,[],2);
mesh(abs(mm1));
mesh(abs(mm));
imagesc(R0_x,theta_y,mm);
imagesc(abs(mm1))

Rxx=Z'*Z/POINT_NUM;
[EVq,D]=eig(Rxx);%%%%%%%%
EVA=diag(D)';
[EVA,I]=sort(EVA);
EVA=fliplr(EVA);
EV=fliplr(EVq(:,I));

d=0:dd:(kelm-1)*dd;                %

iang = -90:0.0001:90;
for kk = 1:length(iang)
    a=exp(-1i*twpi*d*sin(derad*iang(kk))).';
    En=EV(:,2+1:kelm);
    SP(kk)=1/(a'*En*En'*a);

```

```

end

figure(3);
SP=abs(SP);
SPmax=max(SP);
SP=10*log10(SP/SPmax);
h=plot(iang,SP);
set(h,'Linewidth',2)
xlabel('angle (degree)')
ylabel('magnitude (dB)')
%
set(gca, 'XTick',[-90:10:90])
grid on
out=Peak_Seek(iang,SP,2);

end

%% 2.基于特征空间的幅相误差和角度联合迭代优化方法
if(chose(2))

Rxx=Z*Z'/POINT_NUM;
% InvS=inv(Rxx); %%%
[EVq,D]=eig(Rxx);%%%%
EVA=diag(D)';
[EVA,I]=sort(EVA);
EVA=fliplr(EVA);
EV=fliplr(EVq(:,I));

d=0:dd:(kelm-1)*dd;

iang = -90:0.001:90;
for kk = 1:length(iang)
    a=exp(-j*twpi*d*sin(derad*iang(kk))).';
    En=EV(:,2+1:kelm);
    %    SP(kk)=(a*a)/(a'*En*En'*a);
    SP(kk)=1/(a'*En*En'*a);
end

%
figure(1);
SP=abs(SP);
SPmax=max(SP);
SP=10*log10(SP/SPmax);
h=plot(iang,SP);
set(h,'Linewidth',2)
xlabel('angle (degree)')
ylabel('magnitude (dB)')

set(gca, 'XTick',[-90:10:90])
grid on
out=Peak_Seek(iang,SP,iwave);

```

```

w=[1;zeros(kelm-1,1)];
% [temp,i0]=min(abs(theta-mean(sita0)));
Tao=diag([1;randn(kelm-1,1)+j*randn(kelm-1,1)]);
Tao=diag(ones(kelm,1));

% ===== 通道幅相误差的自校正算法
for num=1:100
    clear SP est_cita
    num
    % ===== 搜索 P 个角度
    for ii=1:length(iang)
%       a_theta=exp(j*2*pi/lamda*r*cos(theta(ii)-2*pi*k/M)*cos(fai0(1)));
        a_theta=exp(-j*twpi*d*sin(derad*iang(ii))).';
%       SP(ii)=1/sum((abs((Tao*a_theta)*En).^2));
%       SP(ii)=(a_theta'*a_theta)/(a_theta'*En*En'*a_theta);
        SP(ii)=1/((Tao*a_theta)*En*En'*(Tao*a_theta));

    end

    figure(3);plot(iang,10*log10(SP/max(SP)));pause(2);hold on;

%   i1=find(Pc(1:i0)==max(Pc(1:i0)));i2=find(Pc(i0:end)==max(Pc(i0:end)));
    out(num+1,:)=Peak_Seek(iang,SP,iwave);

    if(out(num+1,1)>0.3&&out(num+1,1)<-0.3) out(num+1,1)=out(num,1); end
    if(out(num+1,2)>0.3&&out(num+1,2)<-0.3) out(num+1,2)=out(num,2); end

%   est_cita=[theta(i1) theta(i0+i2-1)];EST_cita(num,:)=est_cita/pi*180;
    clear Tao gama
    Q=zeros(kelm,kelm);
    for jj=1:iwave
%       a_cita=exp(j*2*pi/lamda*r*cos(est_cita(jj)-2*pi*k/M)*cos(fai0(1)));
        a_cita=exp(-j*twpi*d*sin(derad*out(num+1,jj))).';
        erfa=diag(a_cita);
        Q=Q+erfa*En*En'*erfa;
    end
    gama=inv(Q)*w/(w.'*inv(Q)*w);
    Tao=diag(gama);

    J(num)=gama'*Q*gama;

    if num>=2 & (abs(J(num-1)-J(num))<2e-3)

        break
    end
end
end
end

```