



中国研究生创新实践系列大赛
中国光谷·“华为杯”第十九届中国研究生
数学建模竞赛

学 校 宁波大学

参赛队号 22116460175

1.江振国

队员姓名 2.裴翦

3.严寒

中国研究生创新实践系列大赛

中国光谷·“华为杯”第十九届中国研究生 数学建模竞赛

题 目：

移动场景超分辨率定位问题

摘

要：

本文基于空间谱估计理论，对存在干扰下的多目标超分辨率定位问题进行研究。在模型建立和问题求解过程中主要运用了“多信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法”、“最大似然估计”、“压缩感知算法”、“稀疏矩阵补全”等求解思想。此外，还对所提出的算法进行了有效性和精准度验证。验证结果表明，所提出的算法具备较好的求解效果。

针对问题 1，把题目中的无噪中频信号解耦成距离-角度模型，使用 MUSIC 算法分别估计出目标物体相对于天线的距离和角度，然后使用配对算法，将估计出的距离和角度进行匹配，最后利用最大似然估计(Maximum Likelihood Estimate, MLE)对匹配结果更新。得到两个目标的相对位置分别是 7.005m、 -0.1485° 和 7.005m、 0.1516° 。

针对问题 2，当存在多个目标时，要实现超分辨率精确定位，需考虑反射信号是相干的，首先经过空间平滑算法来解相干，然后对解相干后带噪声信号进行除噪处理，再使用 MUSIC 算法得到目标距离和角度的初始估计，将其配对，再次使用 MLE 对物体的位置进行更新，实现超分辨率定位。得到两个目标的相对位置分别是 8.2m、 -0.3098° 和 8.2m、 0.3094° 。

针对问题 3，根据问题 2 建立的模型，对一帧内移动的目标进行逐快拍超分辨率定位，共得到 K 个移动目标各快拍的位置，再利用当前快拍目标的位置和已有的目标轨迹位置的距离差和角度差，找到最接近的轨迹，将当前快拍目标的位置加入对应轨迹，形成目标轨迹图。关于验证算法性能的数值实验，通过随机生成两个目标，形成运动轨迹，然后进行蒙特卡洛实验，使用本文算法得到的目标估计值，将估计值与真实位置作差，得到均方误差。结果看出，当信噪比 $\text{SNR}=0\text{dB}$ 时，本文算法对距离的估计误差近乎为 0，对角度的估计误差能达到 0.1° 以内。

针对问题 4，采用压缩感知算法估计目标的角度，并将校准问题转化为稀疏矩阵补全问题来补偿天线的定位误差。利用目标物体角度和扰动矩阵的稀疏性，设计了一种联合估计方法，以实现存在阵列扰动情况下的角度估计。

关键词：MUSIC 算法，MLE，压缩感知算法，稀疏矩阵补全

目录

一、问题的重述.....	1
1.1 背景分析	1
1.2 具体要求	1
1.3 实验场景	2
二、模型的假设.....	3
三、符号说明.....	3
四、问题一的模型建立与求解.....	4
4.1 问题一的分析.....	4
4.2 问题一的模型建立.....	4
4.2.1 测距-测角二维信号模型	4
4.2.2 MUSIC 算法原理.....	5
4.2.3 距离-角度配对算法原理	5
4.2.4 结果更新.....	6
4.3 模型求解	8
五、问题二的模型建立与求解.....	11
5.1 问题二的分析.....	11
5.2 问题二的建模.....	11
5.3 基于空间平滑的去噪 MUSIC 算法.....	11
5.4 模型求解	12
六、问题三的模型建立与求解.....	14
6.1 问题三的分析.....	14
6.2 问题三的建模.....	14
6.2.1 目标物体的低复杂度求解方法.....	14
6.2.2 目标物体的轨迹图算法.....	14
6.2.3 检验数值性能的蒙特卡洛实验.....	14
6.3 模型求解	15
七、问题四的模型建立与求解.....	16
7.1 问题四的分析.....	16
7.2 问题四的建模.....	16
7.2.1 理想模型下的压缩感知算法.....	16
7.2.2 考虑天线位置误差的估计.....	17
7.3 模型求解	19
八、模型评价.....	19
8.1 模型优点	19
8.2 模型缺点	19
参考文献	20

一、问题的重述

1.1 背景分析

随着无线通信网络和移动互联网络技术的飞速发展，目标定位在日常家庭生活、智能辅助驾驶以及自动驾驶等领域的应用越来越广，室内无 GPS 覆盖信号情景下的物品定位、汽车自动驾驶过程中对障碍物的实时定位等^[1,2]。考虑到室内物品杂乱繁多，且距离间隔小；汽车处于移动场景，对定位实时性高要求。因此如何能够实现移动场景、超分辨定位问题亟需解决。

雷达定位技术作为无线定位技术的一种，在解决上述问题中具有较多应用。调频连续波雷达(frequency-modulated continuous-wave, FMCW)则通过发射端发送高频的连续波^[3]，再由接收端通过三角波规律确定时间差进而获取关于目标距离的相关信息。其具有以下优点：

- (1) 性能方面：发射功率低、接收灵敏度高、测距精度高、无距离盲区、截获率低且抗干扰性强；
- (2) 硬件方面：结构简单、易于实现、尺寸小且易藏匿。

由于该雷达能够获取差频信号，可以利用基线算法通过添加 Hamming 窗来解决信号不连续问题再利用快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)来直接获取目标的距离、角度信息，虽然这种方法具有较低的复杂度，但其分辨率难以保证，无法实现超分辨的定位需求。而在传统算法中，如 MUSIC 算法，通过空间平滑化滤波以及特征子空间分解的方法来实现信号、噪声空间的分离，但是同样会造成分辨率下降，且随着噪声的增大，原始特征子空间也会受到影响，进而影响方法性能。除此之外，现有的压缩感知算法利用了空间物体分布的稀疏性，可以有效提升分辨率，但处理这种连续傅里叶字典场景并设计低复杂度算法是一个巨大的挑战^[4]。

综上，需要通过设计低复杂高精度算法来提高分辨率，提升产品竞争力。

1.2 具体要求

在本题中，需要解决如下四个方面的问题：

- (1) 针对提供的无噪声仿真数据，建立定位模型，计算出物体相对位置，并以二维极坐标图(横坐标表示距离，纵坐标表示角度)展示。
- (2) 针对提供的高斯噪声仿真数据，利用一个 chirp 周期内的 IF 信号，设计超分辨算法精确定位多个物体。
- (3) 设计在线低复杂度算法，利用一帧中频信号来超分辨定位，并且通过数值实验验证算法性能。针对提供的一帧数据，计算出物体相对运动轨迹，并以二维图(横坐标表示距离，纵坐标表示角度)展示。
- (4) 考虑实际场景中由于老化等原因，天线阵列对于自身的定位也会有误差。针对提供的仿真数据，设计提升定位算法的鲁棒性的改进算法。

1.3 实验场景

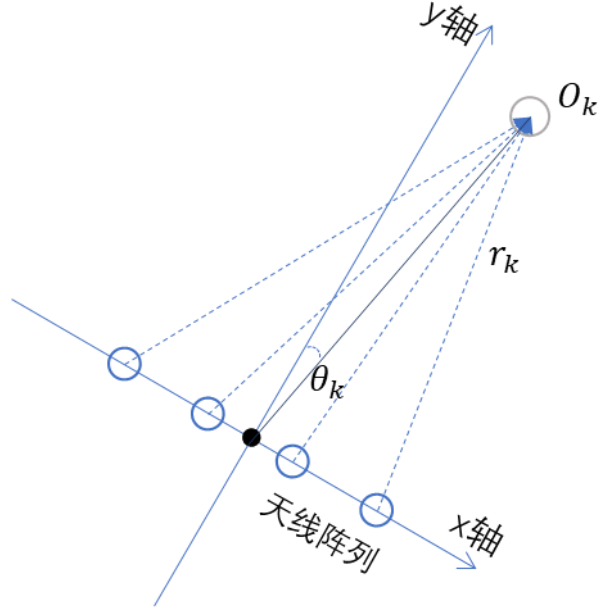


图 1 场景示意图

如图 1 所示，孔径为 L 的 N_a 个等效虚拟天线阵列均匀排布，以天线阵列中心位置建立坐标系，设定目标所在半轴为正半轴。目标以 O_k 表示，其中 k 代表不同的目标，以 θ_k 表示第 k 个目标与 y 轴的夹角，由于目标位于远场位置，目标距离仅用 r_k 表示，代表目标到坐标原点的距离。已知场景为多个目标情况的求解问题，目标距离 r_k 上限为 10m， θ_k 取值在 $[-50^\circ \sim 50^\circ]$ ，以第一象限为正，第二象限为负。

二、模型的假设

假设 1: 问题 3, 4 数据的测量噪声服从高斯分布;

假设 2: 问题 2-4 中数据的测量噪声强度远小于反射目标信号强度;

假设 3: 问题 1-4 中各个天线的噪声功率相等。

三、符号说明

表 1 符号说明

符号	符号说明
\mathbf{A}^T	矩阵 \mathbf{A} 的转置
\mathbf{A}^H	矩阵 \mathbf{A} 的共轭转置
$diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$	由 a_1, a_2, \dots, a_n 为对角线元素构成的矩阵
\hat{a}	变量 a 的估计值
\bar{a}	变量 a 的实部
\tilde{a}	变量 a 的虚部

四、问题一的模型建立与求解

4.1 问题一的分析

问题一提供了一系列无噪声的仿真数据，要求根据提供的数据建立定位模型，计算出物体的相对位置。本问题的主要难点有：

- (1) 由于目标物体的数量未知，需要设计算法同时估计目标物体的数量及其相对位置；
- (2) 天线阵列接收到的中频信号，距离信息和角度信息是耦合在一起的，必须先对题目中的信号模型进行转换，然后对距离和角度分别估计；
- (3) 如果存在多个目标，则会得到多个对应的距离和角度估计值，但是这些值是相互独立的，需要将其进行配对。

考虑到算法复杂度和准确性，解决该问题的思路为：使用 MUSIC 算法^[5]分别估计出目标物体相对于天线的位置和角度，然后使用本文提出的配对算法，将估计出的初始距离和角度进行匹配，再使用 MLE 对初始结果进行更新，完成超分辨定位。

4.2 问题一的模型建立

4.2.1 测距-测角二维信号模型

在时刻 t ，天线阵列发射信号，被到其中心距离为 r_k ，且与 y 轴的夹角为 θ_k 的 K 个物体反射，第 n 根天线上的接收中频信号为

$$s_{n,k}(t) = a_k e^{j(2\pi\gamma T_s t \tau + 2\pi f_0 \tau)} = a_k e^{j\left(2\pi\gamma T_s t \frac{R_{n,k}}{c} + 2\pi f_0 \frac{R_{n,k}}{c}\right)}, t = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{T}{T_s} \right\rfloor - 1, \quad (4.1)$$

其中 a_k 表示物体的反射性， T_k 是采样间隔， c 为光速， $\left\lfloor \frac{T}{T_s} \right\rfloor$ 表示取整。

在一个 chirp 周期内的时刻 t ，第 n 根天线接受到的中频信号是由 K 个目标物体中频信号的混合

$$z_n(t) = \sum_{k=1}^K s_{n,k}(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{T}{T_s} \right\rfloor - 1. \quad (4.2)$$

由于物体的距离和角度都需要估计，对接收到的中频信号解耦，得到一个 chirp 周期内采集的无噪信号距离-角度模型：

$$\mathbf{Z} = \mathbf{RAB}, \quad (4.3)$$

其中， $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1(t), \mathbf{z}_2(t), \dots, \mathbf{z}_{N_a}(t)]^T, t = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{T}{T_s} \right\rfloor - 1$ 为接收中频信号矩阵， \mathbf{A} 为 $K \times K$ 维

的物体反射系数矩阵， $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_K]^T$ 为距离导向矢量， $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_K]^T$ 是角度导向矢量，其中

$$\mathbf{r}_i = [1, e^{j2\pi\gamma T_s t\tau}, \dots, e^{j2\pi(N_a-1)\gamma T_s t\tau}], \quad (4.4)$$

$$\mathbf{b}_i = \left[1, e^{-j\frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta_i}, \dots, e^{-j\frac{2\pi(N_a-1)d}{\lambda} \sin\theta_i} \right]. \quad (4.5)$$

4.2.2 MUSIC 算法原理

下面介绍目标距离和角度估计的 MUSIC 算法。

当估计距离时，可将角度导向矢量视为常量，求天线个数为 N_a ，采样个数为 $\left[\frac{T}{T_s}\right]$ 的

向量矩阵 \mathbf{Z} 的协方差函数 \mathbf{X}_r ：

$$\mathbf{X}_r = E\{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\} = \mathbf{R}\mathbf{Y}_r\mathbf{R}^H, \quad (4.6)$$

对公式(4.6)进行奇异值分解：

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{U}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{V}_r^H. \quad (4.7)$$

由此得到对角阵 $\mathbf{\Lambda}_r = \text{diag}[\lambda_0 \dots \lambda_{N_a-1}]$ ，对其按照从小到大排序为 $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{N_a-1}$ ，其中前 K 个较大的特征值生成信号子空间 \mathbf{E}_s ，后 $N_a - K$ 个较小的特征值生成噪声子空间 \mathbf{E}_n ，其中：

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H. \quad (4.9)$$

根据由距离产生的导向矢量 \mathbf{r}_i 与噪声的特征向量正交原理，可以构造谱函数来实现谱峰搜索。谱函数如公式(2.64)所示：

$$P_{\text{music}} = \frac{1}{\mathbf{r} \mathbf{E}_n \mathbf{r}^H}. \quad (4.10)$$

通过对公式(2.64)进行谱峰搜索^[6]来寻找距离，得到距离估计值 $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \dots, \hat{r}_K$ 。

当估计角度时，可将距离导向矢量视为常量，对向量矩阵求协方差矩阵，然后奇异值分解，进行谱峰搜索，得到角度估计值 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_K$ 。

4.2.3 距离-角度配对算法原理

将上述算法求得的相互独立的距离和角度估计值分别无序排列组合，各得到 $K!$ 种排

列，然后带入距离导向矢量和角度导向矢量，各得到 $K!$ 个 $\hat{\mathbf{R}}_i$ 和 $\hat{\mathbf{B}}_j$ 。将 $\hat{\mathbf{B}}_j$ 带入上式，得

$$\bar{\mathbf{R}}_j = \hat{\mathbf{B}}_j^\dagger \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z}, j = 1 \cdots K!, \quad (4.11)$$

根据

$$q_{i,j} = \left\| \hat{\mathbf{R}}_i \bar{\mathbf{R}}_j^H \right\|_2, i = 1 \cdots K!, j = 1 \cdots K!. \quad (4.12)$$

寻找最大的 q ，其所对应的排列序号就是正确的距离-角度配对：

$$[\hat{r}_{i_1}, \hat{\theta}_{j_1}], [\hat{r}_{i_2}, \hat{\theta}_{j_2}], \dots, [\hat{r}_{i_K}, \hat{\theta}_{j_K}]. \quad (4.13)$$

4.2.4 结果更新

虽然 MUSIC 算法具有较高的实时性，但由于其分辨率较低同时容易受噪声干扰，导致最终结果可能存在偏差。在问题 2-4 中，还要求实现超分辨算法实现多个物体的准确定位，这无疑要损失一定的实时性或者精度。针对上述问题，考虑在使用系数重构后利用 MLE 对初始结果进行细化处理，由于 MLE 复杂度较低，能够在提高方法性能的同时，尽可能保证方法的实时性。

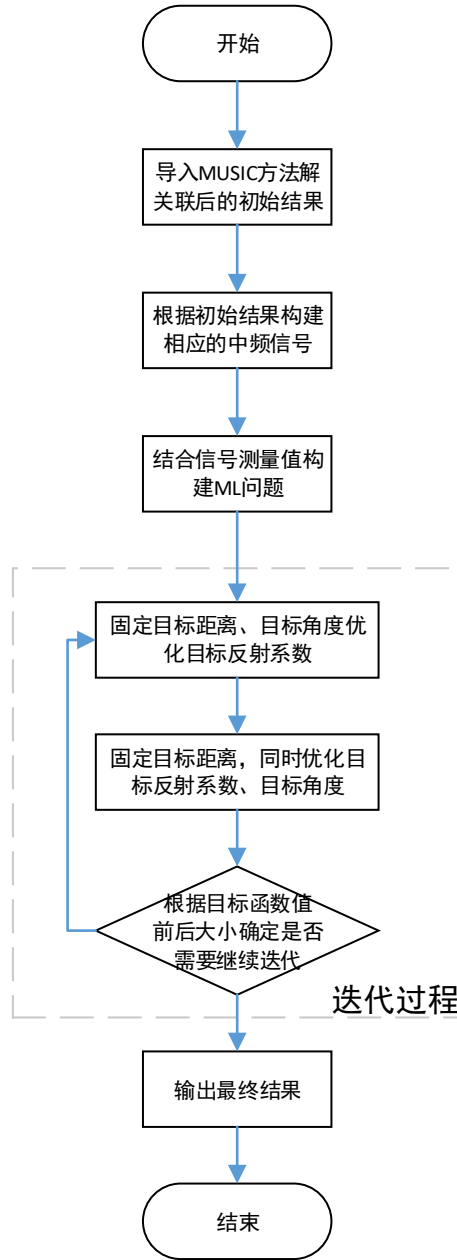


图 2 细化过程流程图

如图 4 所示, 假设 MUSIC 方法得到的估计值为 \hat{r}_k , $\hat{\theta}_k$, 此时相应目标的笛卡尔坐标可由公式(4.14)表示

$$\hat{X}_k = \hat{r}_k \sin \hat{\theta}_k, \quad \hat{Y}_k = \hat{r}_k \cos \hat{\theta}_k, \quad (4.14)$$

结合第 n 根天线的位置, 双程回波距离的估计值为

$$\hat{R}_k = 2\sqrt{(x_n - \hat{X}_k)^2 + (y_n - \hat{Y}_k)^2}. \quad (4.15)$$

对应第 n 根天线 t 时刻接收的中频信号的估计可带入公式(4.1)得出。在公式(4.1)中, a_k 为复数, 而 ML 无法直接实现对复数求解, 考虑将实部虚部分别处理, 结合欧拉公式可得

$$\hat{s}_{n,k}(t) = (\bar{a}_k + \tilde{a}_k) [\cos(2\pi\gamma T_s t \frac{\hat{R}_{n,k}}{c} + 2\pi f_0 \frac{\hat{R}_{n,k}}{c}) + i \sin(2\pi\gamma T_s t \frac{\hat{R}_{n,k}}{c} + 2\pi f_0 \frac{\hat{R}_{n,k}}{c})]. \quad (4.16)$$

其中 \tilde{a}_k 、 \bar{a}_k 分别表示 a_k 的实部虚部。结合最终的测量值，不考虑误差，对应一个 chirp 周期的中频信号变为

$$\bar{z}_n(t) + \tilde{z}_n(t) = \sum_{k=1}^K \bar{\hat{s}}_{n,k}(t) + \sum_{k=1}^K \tilde{\hat{s}}_{n,k}(t). \quad (4.17)$$

此时 $\hat{s}_{n,k}(t)$ 中带有估计误差，同时还带有未知量 a_k ，首先利用估计值 \hat{r}_k ， $\hat{\theta}_k$ 形成相应的 MLE 来优化 a_k

$$\min_{a_k} \sum_{t=0}^{T/T_s-1} \sum_{n=1}^{N_a} [\bar{z}_n(t) - \sum_{k=1}^K \bar{\hat{s}}_{n,k}(t)]^2 + \sum_{t=0}^{T/T_s-1} \sum_{n=1}^{N_a} [\tilde{z}_n(t) - \sum_{k=1}^K \tilde{\hat{s}}_{n,k}(t)]^2. \quad (4.18)$$

通过求解问题(4.18)到 \hat{a}_k ，观察 MUSIC、FFT、压缩感知等方法结果发现对距离的估计基本一致，为降低复杂度不再考虑估计 \hat{r}_k 。之后利用 \hat{a}_k 、 $\hat{\theta}_k$ 可以联合估计 a_k, θ_k

$$\min_{a_k, \theta_k} \sum_{t=0}^{T/T_s-1} \sum_{n=1}^{N_a} [\bar{z}_n(t) - \sum_{k=1}^K \bar{\hat{s}}_{n,k}(t)]^2 + \sum_{t=0}^{T/T_s-1} \sum_{n=1}^{N_a} [\tilde{z}_n(t) - \sum_{k=1}^K \tilde{\hat{s}}_{n,k}(t)]^2. \quad (4.19)$$

由于初始值并不精确，需要对问题(4.18)、(4.19)交替迭代求解，待收敛后可获得最终的估计值。收敛判断标准为问题(4.19)目标函数值大于等于问题(4.18)的目标函数或超过迭代次数。

4.3 模型求解

使用本节 MUSIC 算法得到的距离估计和角度估计如图 3,4 所示，

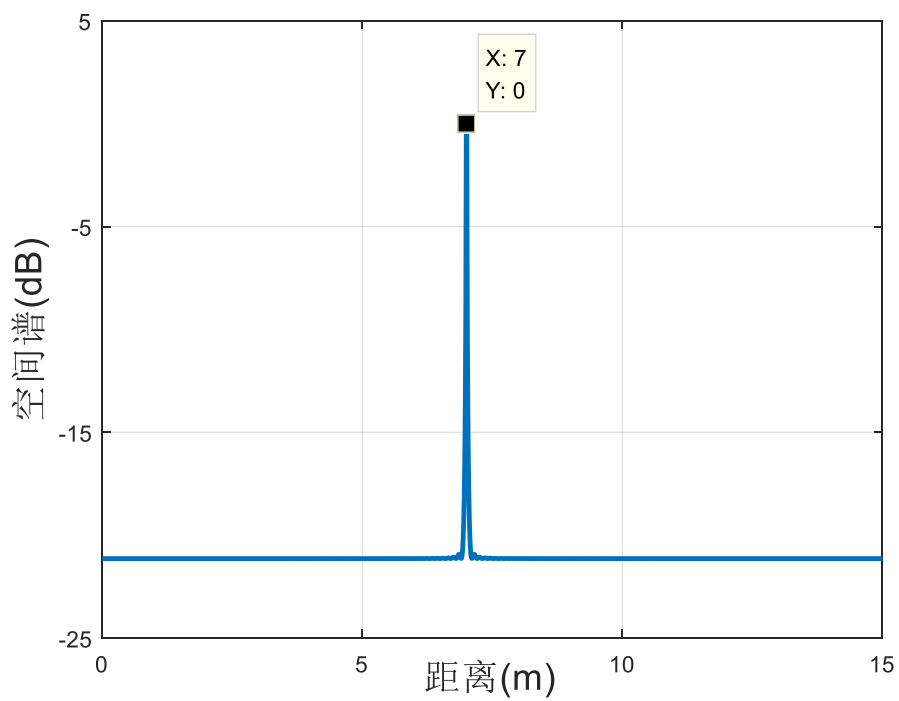


图 3 问题一距离估计

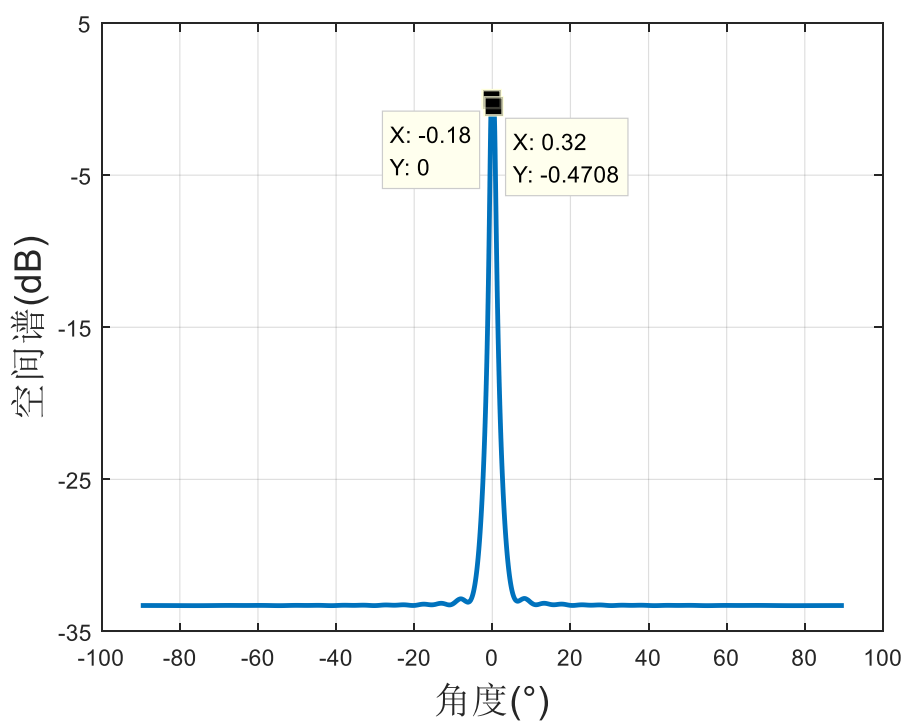


图 4 问题 1 角度估计

使用 MLE 对 MUSIC 结果进行细化，计算出物体进一步的相对位置如表 2 所示

表 2 问题一结果

	距离(m)	角度(°)
--	-------	-------

物体一	7.005	-0.1485
物体二	7.005	0.1516

目标的二维极坐标图如图 4 所示，

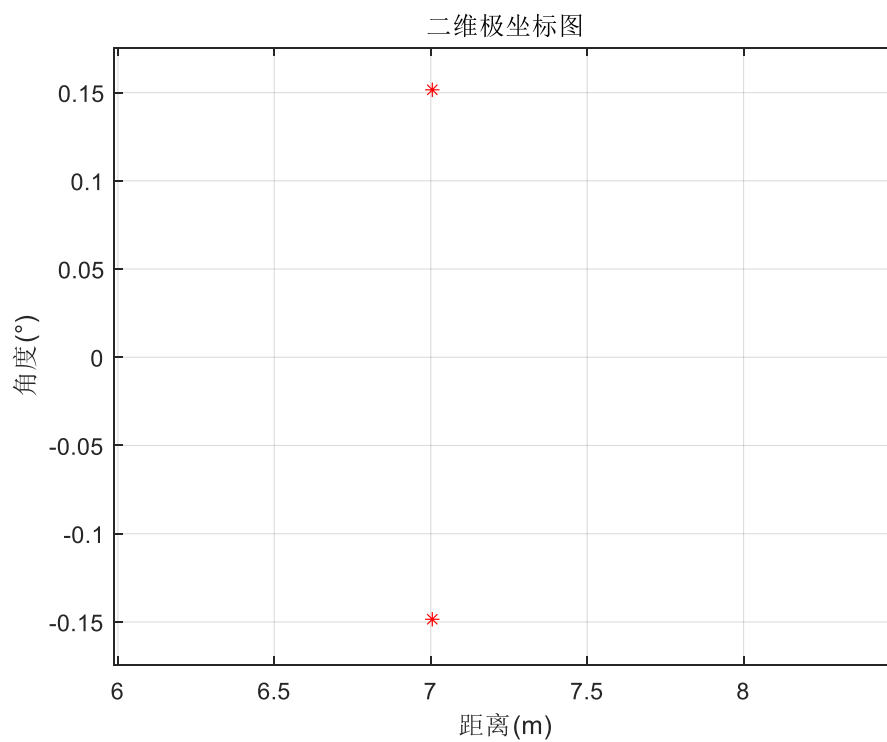


图 5 问题 1 极坐标图

五、问题二的模型建立与求解

5.1 问题二的分析

问题二提供了一个 chirp 周期内带高斯噪声的中频信号，要求设计出超分辨率算法精确定位多个目标。本问题的主要难点是：

- (1) 此题的接收信号受到了噪声的污染，因此需要考虑噪声对物体位置估计影响尽可能小的算法；
- (2) 要求设计超分辨的算法，估计出多个相近目标。

5.2 问题二的建模

对接收到的中频信号解耦，得到一个 chirp 周期内采集的有噪信号距离-角度模型：

$$\mathbf{Z} = \mathbf{RAB} + \mathbf{W}, \quad (5.1)$$

其中 $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1(t), \mathbf{w}_2(t), \dots, \mathbf{w}_{N_a}(t)]^T$ 是信号的噪声。

当存在多个目标时，反射信号是相干^[7]的，使得天线阵列接收的数据协方差矩阵的秩下降，显然这会导致信号子空间的维数小于信号源数。也就是说信号子空间“扩散”到了噪声子空间，这会导致某些相干源的导向矢量与噪声子空间不完全正交，从而无法正确估计信号源方向。

要正确估计信号方向，我们首先经过空间平滑算法^[8]来解相干，然后使用 MUSIC 算法得到目标距离和角度的初始估计，将其配对，再使用 MLE^[9]对物体的估计位置细化，完成超分辨定位。

5.3 基于空间平滑的去噪 MUSIC 算法

空间平滑算法先将阵列分成多个互相重叠的子阵列，再求出这些子阵接收数据的协方差均值，能够达到去相干的目的。

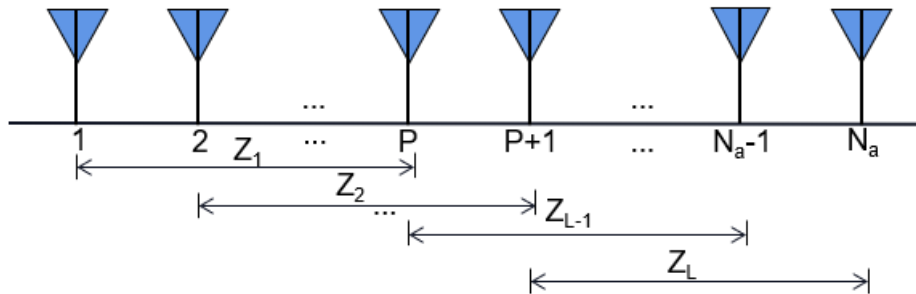


图 6 子阵列示意图

将 N_a 个等距线阵以滑动方式划分为 L 个子阵，每个子阵含有 P 个单元，其中 $P = N_a - L + 1$ 。设图中左边首个子阵列作为参考子阵，定义第 1 个子阵的数据输出为

$$\mathbf{Z}_l = [\mathbf{z}_l, \mathbf{z}_{l+1}, \dots, \mathbf{z}_{l+N_a-1}]^T = \mathbf{R}_l \mathbf{A} \mathbf{B}_l + \mathbf{W}_l, \quad (5.2)$$

所以，第1个前向子阵的协方差矩阵为

$$\mathbf{X}_l^f = E\{\mathbf{Z}_l \mathbf{Z}_l^H\} = \mathbf{R}_l \mathbf{B}_l \mathbf{Y} \mathbf{B}_l^H \mathbf{R}_l^H + \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (5.3)$$

则前向空间平滑协方差矩阵为

$$\mathbf{X}_f = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}_l^f. \quad (5.4)$$

对 \mathbf{X}_f 进行特征分解

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{U}_f \mathbf{\Lambda}_f \mathbf{V}_f = \mathbf{U}_s^f \mathbf{\Lambda}_s^f \mathbf{V}_s^f + \mathbf{U}_n^f \mathbf{\Lambda}_n^f \mathbf{V}_n^f, \quad (5.5)$$

并估计噪声方差 σ^2 ，得到去噪的信号协方差矩阵

$$\hat{\mathbf{X}}_f = \mathbf{X}_f - \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (5.6)$$

根据传统 MUSIC 算法的步骤，对 $\hat{\mathbf{X}}_f$ 特征分解，然后得到谱函数，进行谱峰搜索来寻找距离和角度。

得到多个独立的距离和角度后，使用前文配对算法，完成各对测量值的匹配，再用最大似然估计(Maximum Likelihood Estimate, MLE)，对目标的估计位置更新。

5.4 模型求解

使用 matlab 编程实现上述算法，计算出有两个物体，其相对位置如表 3 所示

表 3 问题 2 结果

	距离(m)	角度(°)
物体一	8.2	-0.3098
物体二	8.2	0.3094

图 7 为其二维极坐标图。

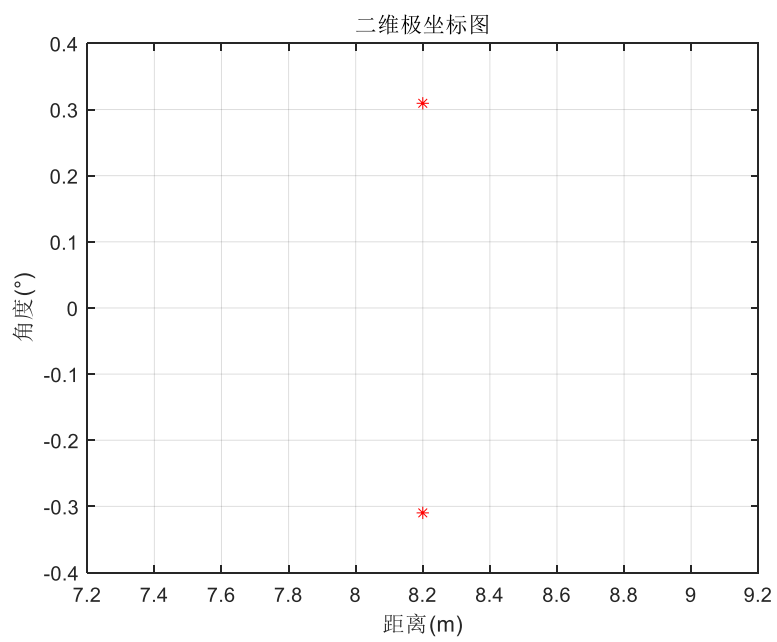


图 7 问题二极坐标图

六、问题三的模型建立与求解

6.1 问题三的分析

问题三给出了一帧中频信号，在一帧时间内物体是运动的，要求超分辨定位出物体的相对运动轨迹，并通过数值实验验证算法。本问题的主要难点有：

- (1) 需要设计超分辨的定位算法求出每一周期未知数量的目标的距离和角度，并且将其完成配对；
- (2) 需要将求解出的 32 个周期的目标位置连接成平滑的运动轨迹，同时满足算法低复杂度的要求；
- (3) 需要设计数值实验来验证所提出算法的定位性能。

6.2 问题三的建模

一个 chirp 周期内采集的有噪信号距离-角度模型：

$$\mathbf{Z} = \mathbf{RAB} + \mathbf{W}, \quad (6.1)$$

其中 $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1(t), \mathbf{w}_2(t), \dots, \mathbf{w}_{N_a}(t)]^T$ 是信号的噪声。

6.2.1 目标物体的低复杂度求解方法

在问题 1-2 中，虽然更新过程使用了复杂度低的 MLE 问题求解，但由于此时目标函数测量值数量远大于未知量的数目，仍造成了求解过程的冗余。为进一步降低计算复杂度以满足目标实时跟踪，通过对快拍数量进一步采样来提升求解速度，若发现求解结果与初始值有较大偏差，则仅通过改变该周期的快拍数量来确定最终结果。经测试，该方法与取全部快拍数距离结果基本无变化，角度变化在百分位；且迭代次数大都为两次。

6.2.2 目标物体的轨迹图算法

- (1) 使用接收到的一帧信号，逐周期使用空间平滑的去噪 MUSIC 算法得到每个周期内目标距离和角度的初始估计，将其配对。
- (2) 使用 ML 对物体的估计位置细化，完成超分辨定位，共得到 $K \times 32$ 个移动目标位置。
- (3) 依据当前周期目标的位置和已有的目标轨迹位置的距离差和角度差，找到最接近的目标，将当前周期目标的位置加入对应轨迹，得到的目标轨迹图。

6.2.3 检验数值性能的蒙特卡洛实验

为了检验本文提出的算法性能，我们设计如下蒙特卡洛实验^[10]：

- (1) 随机生成两个目标，并且赋予一定的速度和运动方向；
- (2) 使用问题中提出的天线阵列模型，获得一帧内两个移动目标带有噪声的反射信号，利用目标物体的轨迹图算法得到目标轨迹图。
- (3) 进行 1000 次的蒙特卡洛实验，每次实验赋予反射信号功率相同的噪声，解出每周期的

位置估计，将其与真实位置作差，得到均方误差(Mean Square Error, MSE)。

6.3 模型求解

如表 4 所示，为所提方法蒙特卡洛实验结果，信噪比为 0db。

表 4 蒙特卡洛实验结果

MSE								
chirp 周期	1	5	9	13	17	21	25	29
目标 1(距离)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
目标 1(角度)	0.0024	0.0081	0.0111	0.0181	0.0276	0.0359	0.0482	0.0625
目标 2(距离)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
目标 2(角度)	0.0026	0.0081	0.0110	0.0179	0.0280	0.0357	0.0485	0.0631

问题三轨迹结果如图 8 所示

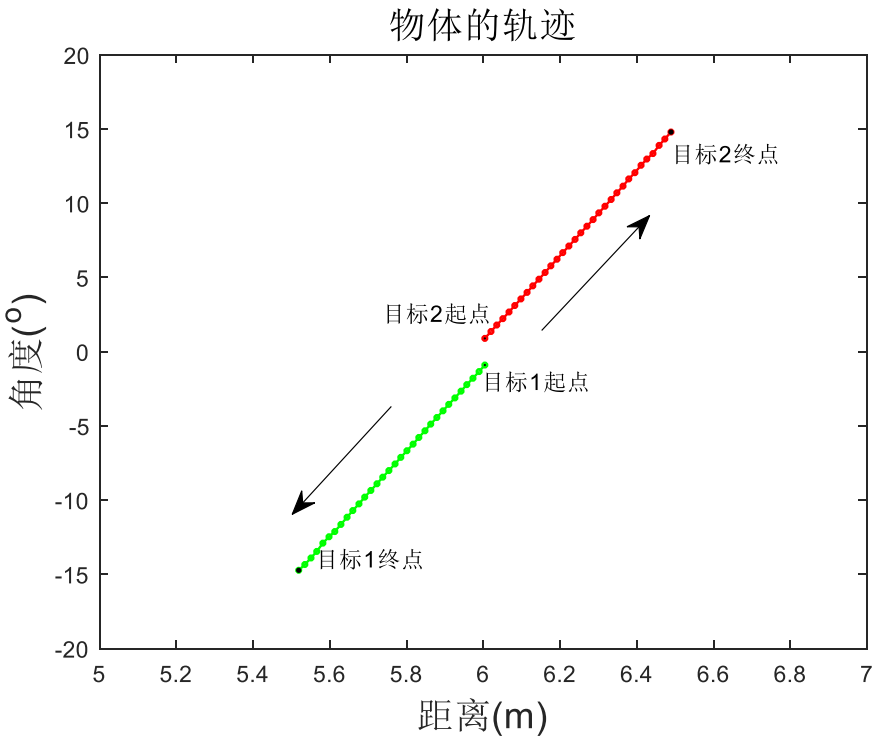


图 8 物体轨迹示意图

七、问题四的模型建立与求解

7.1 问题四的分析

问题四需要考虑由于老化等原因，天线对于自身的定位误差。要求针对提供的仿真数据，设计提升定位算法的鲁棒性的改进算法。

由于假设误差只来源于天线自身的定位，因此对距离的估计并没有影响，所以只需要考虑角度的估计误差。本题采用压缩感知算法^[11]估计目标的角度，并将校准问题转化为稀疏矩阵补全问题来补偿天线的定位误差。利用目标物体角度和扰动矩阵的稀疏性^[12]，设计了一个联合估计方法的优化问题，以实现在阵列扰动存在下的角度估计。然而这个优化问题并不是一个凸的问题。因此，将原问题分解为两个子问题，每个子问题都是一个凸优化问题，从而可以有效地求解该优化问题。

7.2 问题四的建模

7.2.1 理想模型下的压缩感知算法

利用压缩感知的技术可以在一定的条件下提供更好的时频分辨率。在自然界中，绝大部分的信号都是稀疏的或者可以通过一组稀疏正交基进行稀疏表示，信号的稀疏性是压缩感知理论的前提条件。

首先将距离看成常量，对目标物体的角度进行估计，可以将接收信号 \mathbf{Z} 写成如下形式

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, \dots, N, \quad (7.1)$$

其中 $\mathbf{s}(t)$ 为信号振幅， $\mathbf{n}(t)$ 为附加噪声， N 为快拍数， $\mathbf{B}(\theta)$ 为由方向导向矢量组成的转向矩阵。

由于方向为 $\theta_1, \dots, \theta_p$ 的入射信号在 $[-50^\circ, 50^\circ]$ 的角域范围内占据了一定的孤立点。因此，它在空间域上是稀疏的。我们用矩阵 Ψ 表示由网格化角度空间 $[-50^\circ, 50^\circ]$ 创建的字典，其中包含所有可能的信号到达角度。即，

$$\Psi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & e^{-j\pi \sin(\theta_1)} & \dots & e^{-j\pi \sin(\theta_{J-1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & e^{-j(M-1)\pi \sin(\theta_1)} & \dots & e^{-j(M-1)\pi \sin(\theta_{J-1})} \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

其中 $\theta_l = 100^\circ l / J, l = 0, 1, \dots, J$ ，如果 Ψ 中包含所有的实际目标物体的角度，角度估计问题可以表示为在 Ψ 中找到所有可能的方向。考虑通常的 $J \gg p$ ，我们可以想象在解中有很多零解，只有非零元素将用来估计物体的角度。因此，对于一个给定的度量集 \mathbf{Z} ，这个问题将

转向在字典 Ψ 中找到一个稀疏解。最后，根据所创建的字典来表示的信号模型可以在下面重新表示

$$\mathbf{Z} = \Psi(\theta)\mathbf{X} + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, \dots, N, \quad (7.3)$$

因此，基于稀疏重构的角度估计可以写为

$$\text{minimize } \|\mathbf{Z} - \Psi(\theta)\mathbf{X}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{X}\|_1, \quad (7.4)$$

其中， $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T, \dots, \mathbf{z}_N^T]^T$ 和 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]^T$ 。已知 ℓ_1 范数可以促进稀疏性，并通过 $\|\mathbf{X}\|_1$ 得到了角度估计的稀疏解。

7.2.2 考虑天线位置误差的估计

存在天线的定位误差时，接收到的阵列信号遵循以下模型：

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, \dots, N, \quad (7.5)$$

其中 \mathbf{G} 是阵列扰动矩阵，表示天线位置的不确定性。显然，当存在不确定性时，未考虑不确定性而设计的角度估计算法性能不佳。为了提高角度估计精度，必须减少不确定性的负面影响。为了补偿扰动，将首先对矩阵 \mathbf{G} 进行估计

$$\begin{aligned} &\text{minimize } \|\mathbf{G}\|_1, \\ &\text{subject to } \|\mathbf{Y} - \mathbf{G}\Psi(\theta)\mathbf{X}\|_2^2 < \epsilon. \end{aligned} \quad (7.6)$$

其中 ϵ 为精度参数。由于在公式(7.6)中，目标的角度估计是已知的，因此阵列扰动矩阵 \mathbf{G} 是唯一的未知变量。接下来将开发一种联合估计方法来同时获得点和阵列扰动矩阵。

为了对天线位置误差进行建模，设 $\Delta_0 = 0, \Delta_i, i = 1, \dots, M-1$ 为随机数，表示每个传感器的位置误差。由于位置误差，转向矢量可以重新表述如下。

$$\mathbf{a}'(\theta_k) = \left[1, e^{\frac{-j2\pi(d+\Delta_1)\sin(\theta_k)}{\lambda}}, \dots, e^{\frac{-j2\pi((M-1)d+\Delta_{M-1})\sin(\theta_k)}{\lambda}} \right]^T, \quad (7.7)$$

其中 d 是传感器间距， Δ_i 是偏移量。利用基本的线性代数操作，将(7.7)中的转向向量重新写为

$$\mathbf{a}'(\theta_k) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{-j2\pi(d+\Delta_1)\sin(\theta_k)}{\lambda}} \\ \vdots \\ e^{\frac{-j2\pi((M-1)d+\Delta_{M-1})\sin(\theta_k)}{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\frac{-j2\pi\sin(\theta_k)\Delta_1}{\lambda}} \\ \vdots \\ e^{\frac{-j2\pi\sin(\theta_k)\Delta_{M-1}}{\lambda}} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\pi\sin(\theta_k)} \\ \vdots \\ e^{-j\pi(M-1)\sin(\theta_k)} \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

其中， \circ 表示分量乘法的 Schur 乘积，并且 $d = \lambda/2$ 。令

$$\mathbf{b}_k = \left[1, e^{\frac{-j2\pi \sin(\theta_k) \Delta_1}{\lambda}}, \dots, e^{\frac{-j2\pi \sin(\theta_k) \Delta_{M-1}}{\lambda}} \right]^T. \quad (7.9)$$

可以将(7.9)式重新写为

$$\mathbf{a}'(\theta_k) = \mathbf{b}_k \circ \mathbf{a}(\theta_k), \quad (7.10)$$

令 $\mathbf{B}_k = \text{diag}(\mathbf{b}_k)$ ，然后(7.10)式可以写成

$$\mathbf{a}'(\theta_k) = \mathbf{B}_k \mathbf{a}(\theta_k), \quad (7.11)$$

该矩阵包含未知的天线位置误差，也依赖于未知的目标物体角度。假设有 p 个信号，我们定义了一个块对角矩阵 $\mathbf{G}_{\text{location}}$ ，它描述了所有未知的位置误差，其形式为

$$\mathbf{G}_{\text{location}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_p \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

由于 $\mathbf{G}_{\text{location}}$ 的非对角线分量是零，因此，它是一个稀疏矩阵。为了天线位置误差问题，可以通过(7.12)对偏移矩阵位置进行直接估计。位置误差的强度，用表示 $\sigma_t^2(\text{dB})$ ，可以近似用 $\sigma_g^2(\text{dB})$ 来定义。

当传感器定位误差存在时，查找目标物体角度和天线位置的误差的联合优化问题为

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \|\mathbf{X}\|_1 + \tau \|\mathbf{G}_{\text{location}}\|_1, \\ & \text{subject to } \left\| \mathbf{Y} - \sum_{k=1}^p \mathbf{G}_k' \Psi(\theta) \mathbf{X}_k \right\|_2^2 < \epsilon. \end{aligned} \quad (7.13)$$

其中 $\mathbf{G}_k' = \mathbf{G}_{\text{location}}((k-1)M+1:kM, (k-1)M+1:kM)$ 。注意公式(7.13)中的优化问题在变量

\mathbf{X}_k 和 $\mathbf{G}_{\text{location}}$ 下都不是凸的。为了有效地解决这一问题，提出了类似的两步过程：

步骤 1：求解初始/估计位置(7.13)的凸优化问题，产生角度估计 $\hat{\theta}_k$ 。

步骤 2：求解与(7.13)相同的凸优化问题，同时根据步骤一得到的角度估计生成偏移矩阵 \mathbf{B}_k ，偏移估计 Δ_i 是 \mathbf{B}_k 的相位，即

$$\hat{\Delta}_i = -\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \frac{\lambda \angle (\hat{\mathbf{B}}_k(i+1, i+1))}{2\pi \sin(\hat{\theta}_k)}, i=1, \dots, M-1, \quad (7.14)$$

在步骤 1 和步骤 2 之间迭代，直到角度估计的差值小于一个预定义的阈值。

由于每个子问题都是凸问题，因此可以保证这两步方法的收敛性。在步骤 1 中，当不确定矩阵 \mathbf{G} 固定时，问题(7.14)变成只有变量 \mathbf{X} 的凸优化。在步骤 2 中，当角度 \mathbf{X} 固定时，问题(7.14)是变量为 \mathbf{G} 的凸优化问题，因此，每个子问题都是凸问题，通过迭代这两个问题，实现收敛。

7.3 模型求解

针对提供的仿真数据，使用本文提出的鲁棒性改进算法，利用 matlab 编程，带阵列误差的求解结果如图 9。

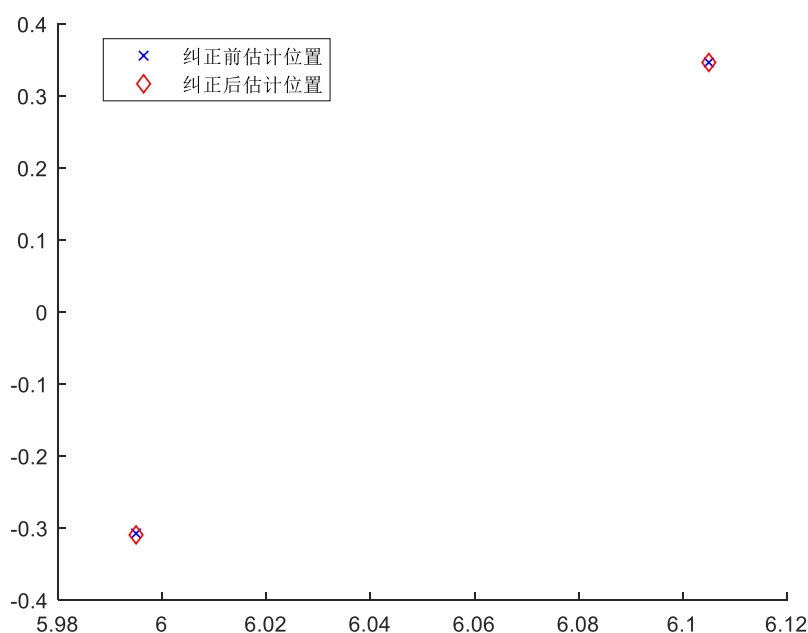


图 9 带阵列误差的求解结果

八、模型评价

8.1 模型优点

- (1) 充分考虑了中频信号相位和距离随时间变化的相关性，将中频信号解耦，能够对多个目标距离和角度分别估计；
- (2) 使用空间平滑的 MUSIC 算法解出多目标的距离和角度后，提出复杂度低的配对算法，获得目标的相对位置；
- (3) 针对问题，考虑在使用系数重构后利用 MLE 对初始结果进行细化处理，由于 MLE 复杂度较低，能够在提高方法性能的同时，尽可能保证方法的实时性。

8.2 模型缺点

- (1) 配对算法会随着目标个数的增多提升算法的复杂度；
- (2) 本文提出超分辨算法需要分布求解，不能一次性解出高精度的位置估计。

参考文献

- [1] F. Belfiori, W. van Rossum and P. Hoogeboom, "2D-MUSIC technique applied to a coherent FMCW MIMO radar," IET International Conference on Radar Systems (Radar 2012), 2012, pp. 1-6, doi: 10.1049/cp.2012.1564.
- [2] 白炳潮, 毫米波雷达多径环境超分辨测角及测距[D], 电子科技大学。
- [3] 李鑫, 基于空间谱估计的测向系统研究与实现[D], 电子科技大学, 2021。
- [4] A. Ferréol, P. Larzabal and M. Viberg, "A new expression of the asymptotic performances of Maximum Likelihood DOA estimation method with modeling errors," 2004 12th European Signal Processing Conference, 2004, pp. 2163-2166.
- [5] A. J. Weiss and B. Friedlander, "Array shape calibration using sources in unknown locations—A maximum likelihood approach," *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process.*, vol. 37, no. 12, pp. 1958-1966, Dec. 1989.
- [6] J. -H. Lee and S. Jo, "Improvement of exhaustive search based maximum-likelihood DOA estimation," Proceedings of the IEEE 2010 National Aerospace & Electronics Conference, 2010, pp. 246-249, doi: 10.1109/NAECON.2010.5712954.
- [7] 李君惠, 杨志强, 华雷, 相干信源的 DOA 空间谱估计研究[J], 火控雷达技术, 2022(051-002)。
- [8] 顾坤良, 欧阳缮, 李晶晶, 基于 MUSIC 算法的频率分集阵列雷达目标定位方法[J], 桂林电子科技大学学报, 2017, 37(2):5。
- [9] P. Stoica and N. Arye, "MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound," *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process.*, vol. 37, no. 5, pp. 720-741, May 1989.
- [10] H. Liu, L. Zhao, Y. Li, X. Jing and T. -K. Truong, "A Sparse-Based Approach for DOA Estimation and Array Calibration in Uniform Linear Array," in *IEEE Sensors Journal*, vol. 16, no. 15, pp. 6018-6027, Aug. 1, 2016, doi: 10.1109/JSEN.2016.2577712.
- [11] 何风行, 余志军, 刘海涛, 基于压缩感知的无线传感器网络多目标定位算法[J], 电子与信息学报, 2012, 34(3):6。
- [12] E. Candes and T. Tao, "The Dantzig selector: Statistical estimation when p is much larger than n ," *Ann. Statist.*, vol. 35, no. 6, pp. 2313-2351, Dec. 2007.