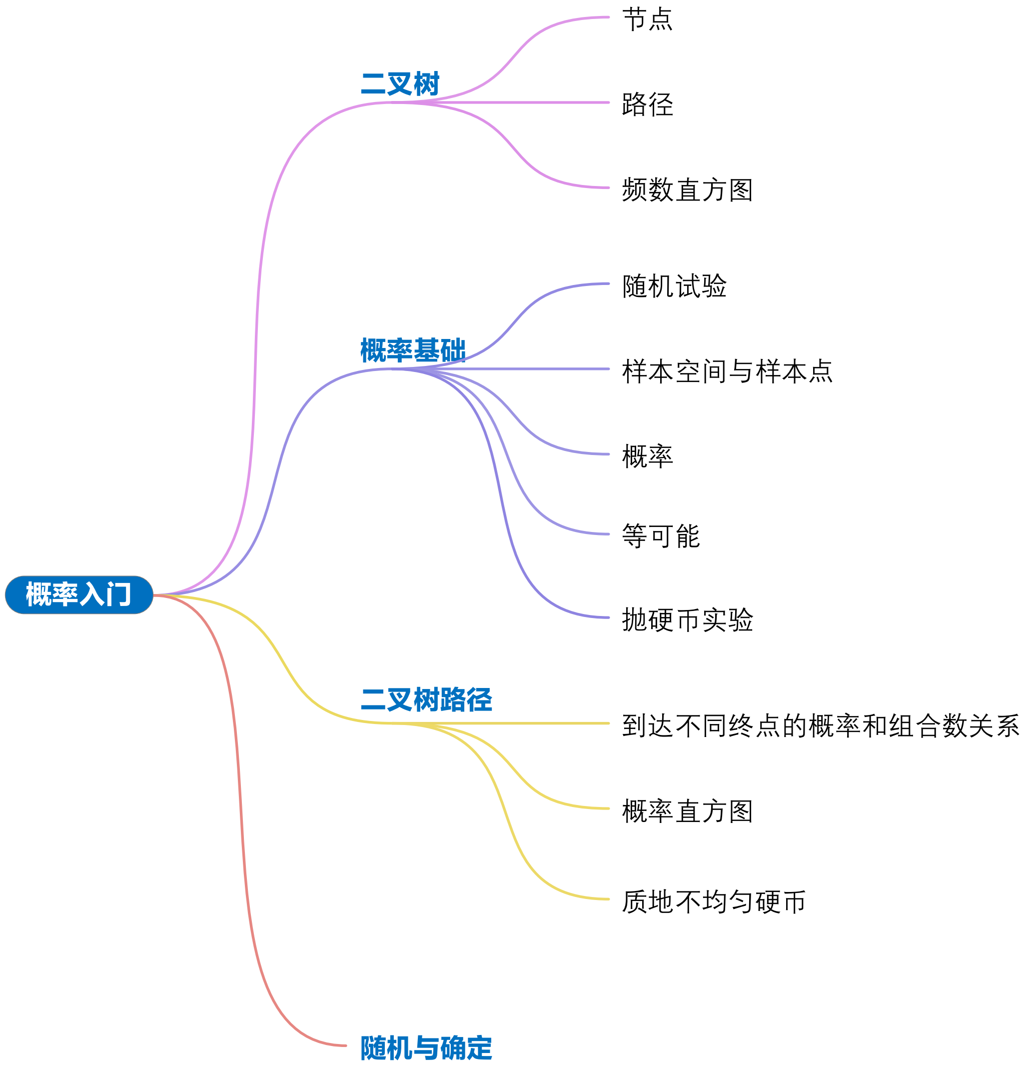
Fundamentals of Probability

20 概率入门

从杨辉三角到古典概率模型

> 这个世界的真正逻辑是概率的推演。
>
> ***The true logic of this world is the calculus of probabilities.***
>
> —— 詹姆斯·克拉克·麦克斯韦 (James Clerk Maxwell) | 英国数学物理学家 | 1831 ~ 1879

- ◀ `ax.invert_xaxis()` 调转 x 轴
- ◀ `ax1.spines['right'].set_visible(False)` 除去图像右侧黑框线
- ◀ `ax1.spines['top'].set_visible(False)` 除去图像上侧黑框线
- ◀ `itertools.combinations()` 无放回抽取组合
- ◀ `itertools.combinations_with_replacement()` 有放回组合
- ◀ `itertools.permutations()` 无放回排列
- ◀ `matplotlib.pyplot.barh()` 绘制水平直方图
- ◀ `matplotlib.pyplot.stem()` 绘制火柴梗图
- ◀ `numpy.concatenate()` 将多个数组进行连接
- ◀ `numpy.stack()` 将矩阵叠加
- ◀ `numpy.zeros_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的零矩阵
- ◀ `scipy.special.binom()` 铲射多项式系数
- ◀ `sympy.Poly` 将符号代数式转化为多项式


概率入门
二叉树
节点
路径
频数直方图
概率基础
随机试验
样本空间与样本点
概率
等可能
抛硬币实验
二叉树路径
到达不同终点的概率和组合数关系
概率直方图
质地不均匀硬币
随机与确定

20.1 概率简史：出身赌场

概率是人类的自然思维方式。大家在日常交流时，用到“预测”、“估计”、“肯定”、“百分之百的把握”、“或许”、“百分之五十可能性”、“大概”、“可能”、“恐怕”、“绝无可能”等字眼时，思维已经进入概率的范畴。

概率论的目的就是将这些字眼数学化、量化。

意大利学者**吉罗拉莫 · 卡尔达诺** (Girolamo Cardano, 1501 ~ 1576) 可以说是文艺复兴时期百科全书式人物。他做过执业医生，第一个发表三次代数方程式的一般解法，他还是赌场常胜将军。

卡尔达诺死后才向世人公布自己创作的赌博秘籍《论赌博的游戏》 (*Book on Games of Chance*)，这本书首次对概率进行系统介绍。他在书中用投色子游戏讲解等可能事件和其他概率概念。值得一提的是，卡尔达诺的父亲和达芬奇是好友；和达芬奇一样，卡尔达诺也是私生子。

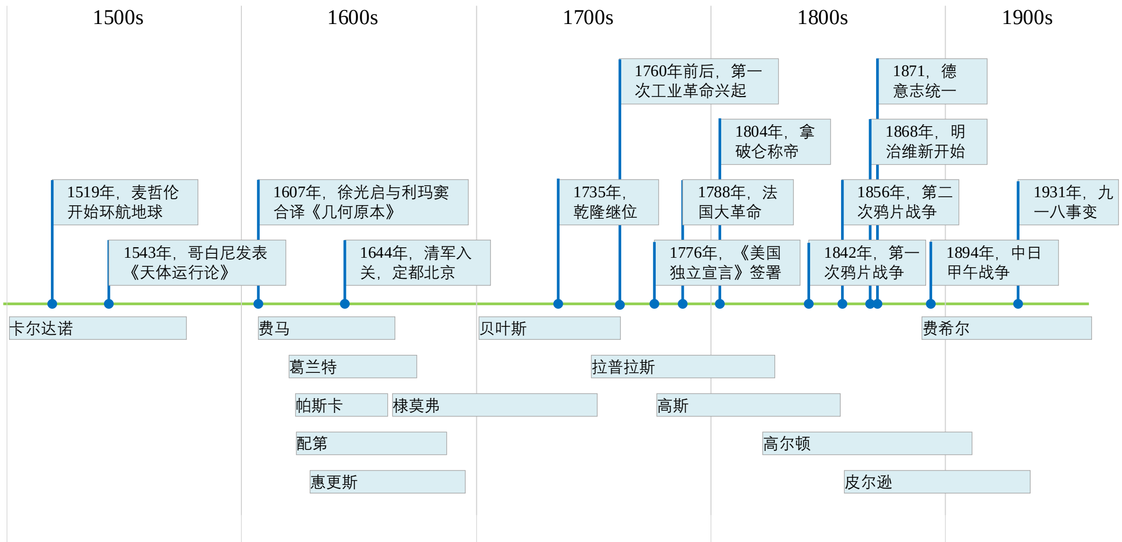


图 1. 概率论、统计学发展时间轴

概率论的基本原理则是在**帕斯卡** (Blaise Pascal, 1623 ~ 1662) 和**费马** (Pierre de Fermat, 1607 ~ 1665) 的一系列来往书信中搭建起来的。他们在在来往书信中讨论的是著名的赌博奖金分配问题。

举个例子说明赌博奖金分配问题。A、B 两人玩抛硬币游戏，每次抛一枚硬币，硬币朝上 A 得一分，硬币朝下 B 得一分，谁先得到 10 分谁就赢得所有奖金。但是，游戏进行到途中突然中断，此时 A 得分 7 分，B 得分 5 分，两人此时应该如何分配奖金？

在帕斯卡和费马的来往书信中，他们提出了枚举法，也能看到他们也谈到利用杨辉三角和二项式展开求解问题。

克里斯蒂安 · 惠更斯 (Christiaan Huygens, 1629 ~ 1695) 扩展了帕斯卡和费马的理论。惠更斯 1657 年发表了《论赌博中的计算》 (*On Reasoning in Games of Chance*)，被很多人认为是概率论诞生的标志。

法国数学家**亚伯拉罕·棣莫弗** (Abraham de Moivre, 1667 ~ 1754) 继续推动概率论的发展，他首先提出正态分布、中心极限定理等。在处理莱布尼兹-牛顿微积分发明权之争，棣莫弗还被选做裁决人之一。

贝叶斯 (Thomas Bayes, 1701 ~ 1761) 在自己的论文《解决机会学说中的问题》(*An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*) 中探讨了条件概率，这使得贝叶斯成为贝叶斯学派的开山鼻祖。

在概率领域，**高斯** (Carl Friedrich Gauss, 1777 ~ 1855) 发现最小二乘法，正态分布也常被称作高斯分布。

弗朗西斯·高尔顿 (Francis Galton, 1822 ~ 1911) 则提出回归、相关系数等重要统计学概念。有趣的是，高尔顿是查尔斯·达尔文的表弟。

概率论和统计学两门学科相互交融，而且发展历史跨度很大，太多学者起到推动作用，本节只能走马观花用几句话概括几个关键人物的生平。

本章后续内容则是以杨辉三角展开。杨辉三角可谓是算数、代数、几何、数列、概率的完美结合体；沿着帕斯卡和费马的思路，本章从从杨辉三角入手来和大家探讨概率论的核心思想。

20.2 二叉树：一生二、二生三

本节从一个全新视角解读杨辉三角——**二叉树** (binomial tree)。将本书前文介绍的杨辉三角逆时针旋转 90 度，得到图 2。图 2 中每个点称作**节点** (node)。

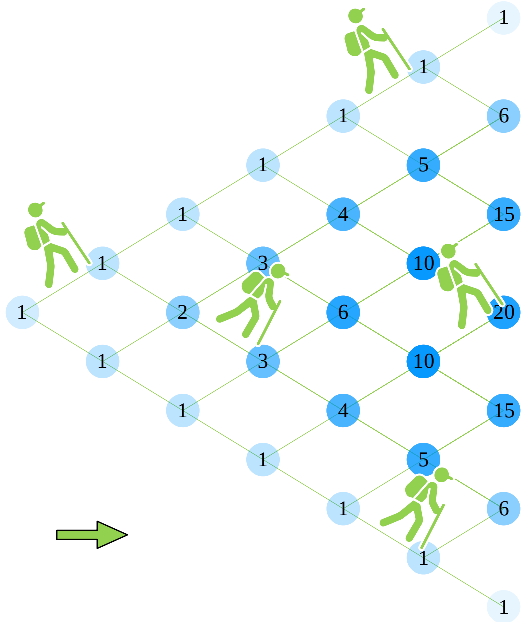


图 2. 杨辉三角逆时针旋转 90 度得到一个二叉树

试想，一名登山者从最左侧初始点出发，沿着二叉树规划的路径向右移动，到达最右侧任意节点结束。途中每个节点处，登山者可以向右上方或右下方走，但是不能往回走。

这样，图 2 中的数字便有了另外一层内涵——登山者到达对应节点的可能路径。

下面解释一下原理。

如图 3 所示，当 $n = 1$ 时，二叉树叫做一步二叉树 (one-step binomial tree)；登山者只有两个路径到达两个不同终点节点。

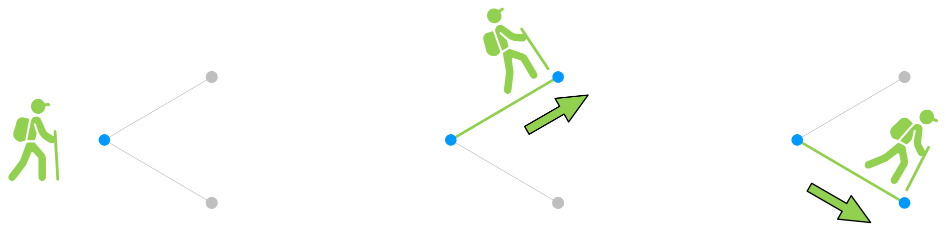


图 3. $n = 1$，向上、向下走的路径

如图 4 所示，$n = 2$ 时，二叉树为两步二叉树 (two-step binomial tree)；从起点到终点，一共有 4 条路径，二项式系数 1、2、1 则相当于到达对应终点 A、B、C 个节点的可能路径数量。

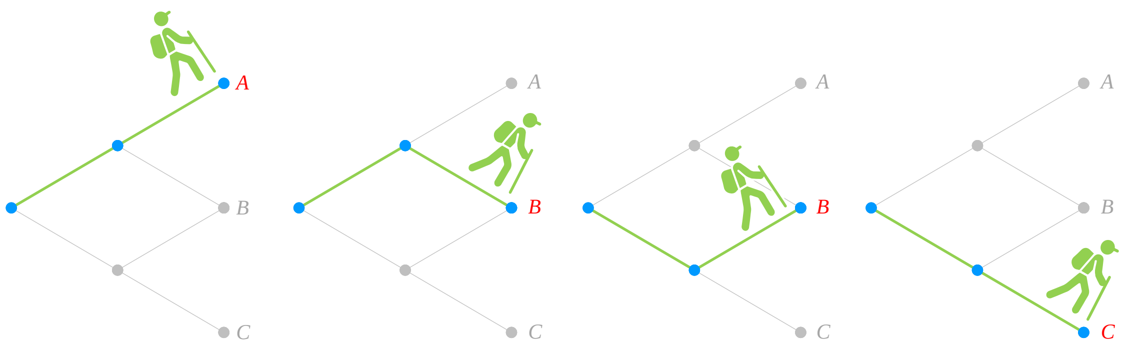


图 4. $n = 2$，通向最终节点路径

当二叉树的层数不断增多，到达终点的路径的数量呈现指数增长趋势。

如图 5 (a) 所示，$n = 3$ 时，路径数量为 8 ($= 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$)。如图 5 (b) 所示，$n = 4$ 时，路径数量为 16 ($= 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4$)。如图 5 (c) 所示，$n = 5$ 时，路径数量为 32 ($= 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5$)。

这个结果也不难理解，二叉树每增加一层，登山者就多一次二选一的机会；从路径数量角度，就是再乘 2。

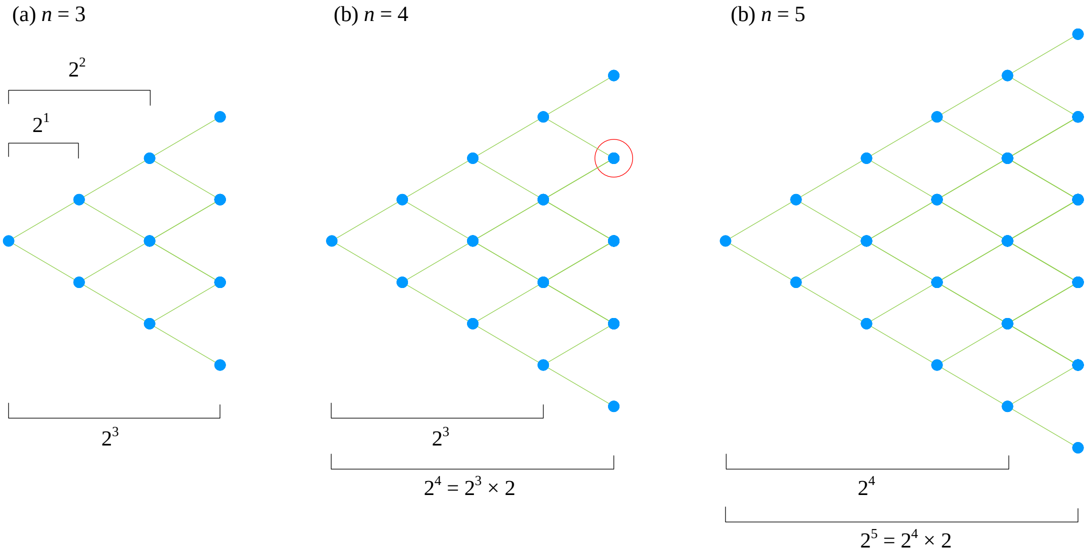


图 5. $n = 3$、4、5，通向最终节点路径

图 6 所示为 4 条到达图 5 (b) 二叉树画红圈终点节点路径；4 这个结果和组合数有着密切关系。下面我们聊一下如何用组合数解释到达不同终点路径数。

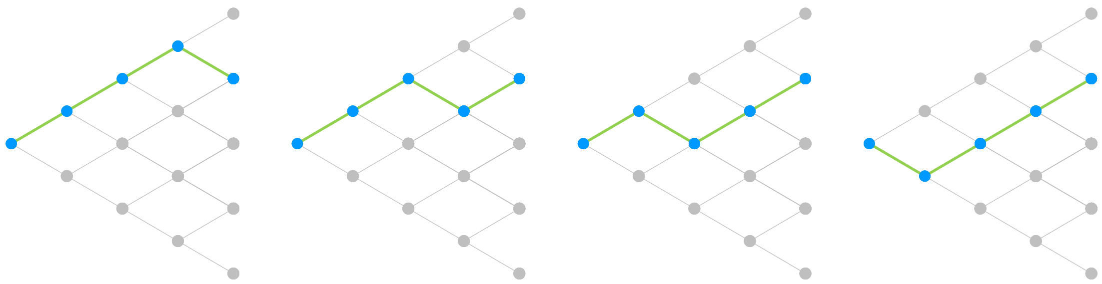


图 6. 四条到达同一终点节点的路径

组合数

利用**水平条形图** (horizontal bar graph) 可视化图 5 二叉树路径数。如图 7 所示，$n = 3$ 时，到达二叉树终点节点的路径分别有 1、3、3、1 条，总共有 8 条路径，写成组合数：

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3 \tag{1}$$

大家可能会问，组合数在这里扮演的角色是什么？很容易理解，登山者在图 7 所示二叉树需要做三次“向上走或向下走”的决策。

C_3^0 可以理解为，3 次决策中 0 次向下；C_3^1 可以理解为，3 次决策中 1 次向下；C_3^2 可以理解为，3 次决策中 2 次向下；C_3^3 可以理解为，3 次决策中 3 次向下。

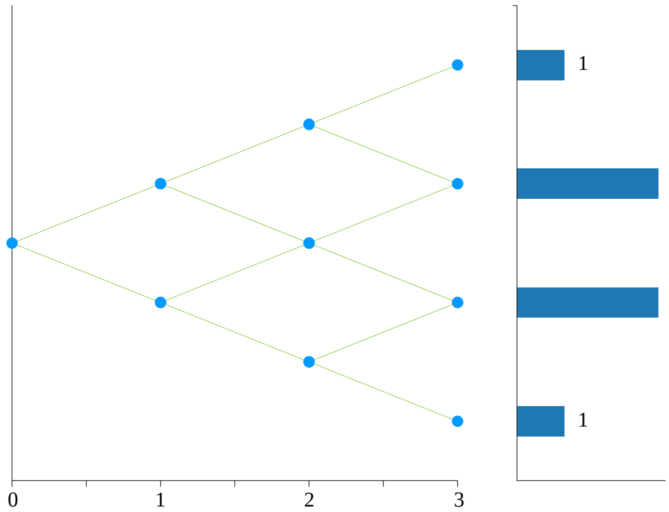


图 7. $n = 3$，二叉树路径数分布

如图 8 所示，$n = 4$ 时，到达二叉树终点节点的路径分别有 1、4、6、4、1 条，总共有 16 条路径：

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4 \tag{2}$$

也就是说，这种情况登山者面临 4 次“二选一”的决策。

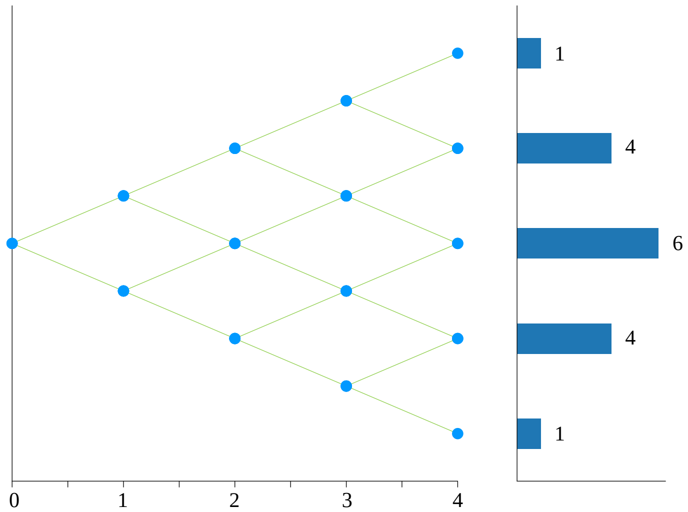


图 8. $n = 4$，二叉树路径数分布

如图 9 所示，$n = 5$ 时，登山者有 5 次“二选一”决策，到达二叉树终点节点的路径分别有 1、5、10、10、5、1 条，总共有 32 条路径：

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5 \tag{3}$$

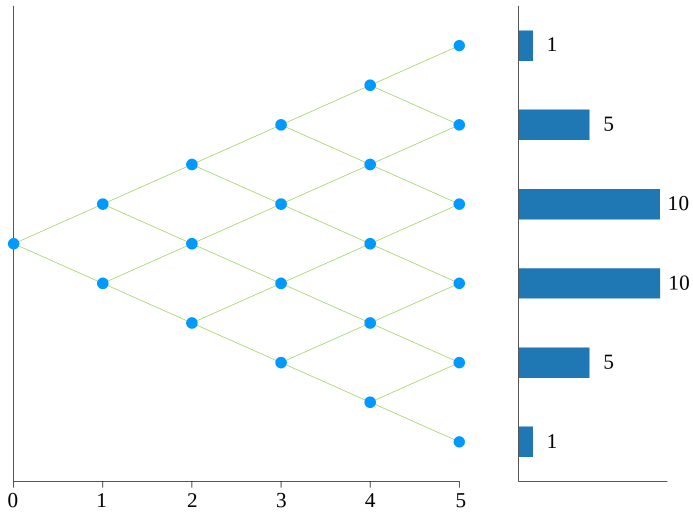


图 9. $n = 5$，二叉树路径数分布

从概率统计角度，图 9 右侧的直方图常被称作**频数直方图** (frequency histogram)。频数也称次数，是对总数据按某种标准进行分组，统计出各个组内含个体的个数。

杨辉三角和二叉树体现出来的规律像极了老子所言"道生一，一生二，二生三，三生万物。"

以下代码绘制图 7 ~ 图 9。

```
# Bk3_Ch20_1_A

from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
from sympy.abc import x
from sympy import Poly
import seaborn as sns

n = 5
# starting point

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,5), gridspec_kw={'width_ratios': [3,
1]})

for i in np.arange(n):

    Nodes_y = np.linspace(-i,i,i+1)

    B_y = np.concatenate((Nodes_y+1, Nodes_y-1))
    B_x = np.zeros_like(B_y) + i + 1
    B = np.stack((B_x,B_y))

    A_y = np.concatenate((Nodes_y, Nodes_y))
    A_x = np.zeros_like(A_y) + i

    x_AB = np.stack((A_x,B_x))

    y_AB = np.stack((A_y,B_y))
```

```
    ax1.plot(x_AB, y_AB, 'o-', color = '#92D050',
             markerfacecolor = '#0099FF',
             markeredgecolor = None)

ax1.spines['right'].set_visible(False)
ax1.spines['top'].set_visible(False)
ax1.set_xlim(0,n)
ax1.set_ylim(B_y.min() - 1,B_y.max() + 1)

degrees = np.linspace(n,0,n + 1)

from scipy.special import binom

poly_coeffs = binom(n,degrees)

locations = np.linspace(B_y.min(),B_y.max(),n+1)

ax2.barh(locations, poly_coeffs, align='center')

for i,(x,y) in enumerate(zip(locations.tolist(), poly_coeffs.tolist())):
    ax2.text(y + poly_coeffs.max()*0.1, x, str(int(y)))

ax2.set_ylim(B_y.min() - 1,B_y.max() + 1)
ax2.spines['right'].set_visible(False)
ax2.spines['top'].set_visible(False)
```

20.3 抛硬币：正反面概率

确定与随机

在自然界和社会实践活动中，人类遇到的各种现象可分为两大类：确定性现象，随机性现象。

一年 24 节气轮替，太阳东升西落，这是确定性现象；某一年是干旱少雨，还是洪涝灾害频发，某一天是否会下雨，什么时候下雨，降水量多大，这些事情的结果都是随机的。天地不仁，以万物为刍狗——这句感觉就是在说随机性。

但是，随机之中有确定。举个例子，抛一枚硬币，谁也不知道准确预测它落地时是正面还是反面；但是，大量抛硬币，却发现硬币的正反面有一定的规律。

虽然不能百分之百准确预测明年今天的晴雨状况；但是，人类通过研究大量气象数据，可以找到降水周期性规律。

也就是在微观、少量、短期尺度上，我们看到的更多的是不确定、不可预测、随机；但是，站在宏观、大量、更长的时间尺度上，我们可以发现确定、模式、规律。

随机现象的准确定义是：在一定条件下，出现的可能结果不止一个，事前无法确切知道哪一个结果一定会出现，但大量重复试验中其结果又具有统计规律的现象称为随机现象。

随机试验

随机试验 (random experiment) 是在相同条件下对某随机现象进行的大量重复观测。随机试验需要满足三个条件：

a) 可重复，在相同条件下试验可以重复进行；

b) 结果集合明确，每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

c) 单次试验结果不确定，进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，但必然出现结果集合中的一个。

给定一个随机试验，所有的结果构成的集合为样本空间 Ω；样本空间 Ω 中的每一个元素为一个样本点。

概率

概率 (probability) 反映随机事件出现的可能性大小。

给定任意一个事件 A，$\Pr(A)$ 为事件 A 发生的概率 (the probability of event A occurring)；注意本书概率记法，Pr 为正体。

对于任意事件 A，A 发生的概率满足。

$$\Pr(A) \geq 0 \tag{4}$$

整个样本空间 Ω 的概率为 1，即。

$$\Pr(\Omega) = 1 \tag{5}$$

空集 ∅ 不包含任何样本点，也成为不可能事件，因此对应的概率为 0。

$$\Pr(\varnothing) = 0 \tag{6}$$

白话说，一定会发生的事情，概率值为 1 (100%)；一定不会发生的事情，概率值为 0 (0%)。

等可能

等可能性是指设一个试验的所有可能发生的结果有 n 个，它们都是随机事件，每次试验有且只有其中的一个结果出现。

如果每个结果出现的机会均等，那么说这 n 个事件的发生是等可能的试验的结果。设样本空间 Ω 由 n 个等可能的试验结果构成，事件 A 的概率为。

$$\Pr(A) = \frac{n_A}{n} \tag{7}$$

其中，n_{A} 为含于事件 A 的试验结果数量。

这种基本事件个数有限且等可能的概率模型，称为古典概率模型。所谓概率模型是对不确定现象的数学描述。

举最简单的例子，抛一枚硬币，1 代表落地结果正面、0 代表反面；抛一枚硬币的可能结果样本空间 Ω 为：

$$\Omega = \{0,1\} \tag{8}$$

根据生活常识，如果硬币质地均匀；获得正面和反面的概率相同均为 1/2，即等可能：

$$\Pr(0) = \Pr(1) = \frac{1}{2} \tag{9}$$

连续抛 100 枚硬币，并记录每次硬币正 (1)、反面 (0) 结果。图 10 所示为每一次试验硬币正反面结果以及累计结果平均值变化。可以发现，随着抛硬币的次数不断增多，硬币正反面平均值愈靠近 1/2。

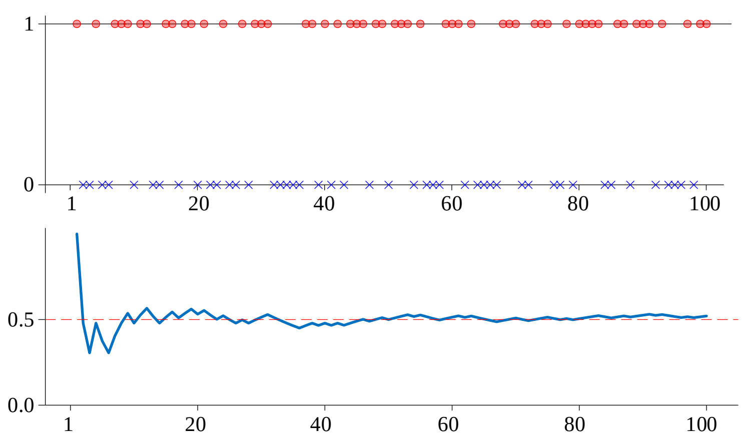


图 10. 抛硬币 100 次试验，硬币正反面结果，以及平均值变化

以下代码绘制图 10。

```
# Bk3_Ch20_2

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

num_toss = 100
toss = np.random.randint(low = 0, high = 2, size = (num_toss,1))

up = (toss == 1)

iteration = np.arange(1,num_toss + 1)

fig, axs  = plt.subplots(2,1)
```

```
axs[0].plot(iteration[up.flatten()],  toss[up],
            color = 'r', marker = '.',linestyle = 'None')

axs[0].plot(iteration[~up.flatten()], toss[~up],
            color = 'b', marker = 'x',linestyle = 'None')

axs[0].set_yticks([0,1])

cum_mean = np.cumsum(toss)/iteration

axs[1].plot(iteration, cum_mean)
axs[1].axhline(y = 0.5, color = 'r')
axs[1].set_yticks([0,0.5,1])
```

20.4 聊聊概率：向上还是向下

本节引入概率，给杨辉三角增加一个新视角。

登山者在二叉树始点或中间节点时，都会面临“向上”或“向下”这种二选一抉择。如果登山者通过抛硬币，决定每一步的行走路径——正面，向右上走；反面，向右下走。

生活经验告诉我们，如果硬币质地均匀，抛硬币时获得正面和反面的可能性相同。这个可能性，就是上一节提到的概率。

对于图 11 (a)，当登山者位于红色点 ●，他通过抛一枚硬币决定向上走和向下走的概率 (可能性) 相同，均为 0.5 (50%)。

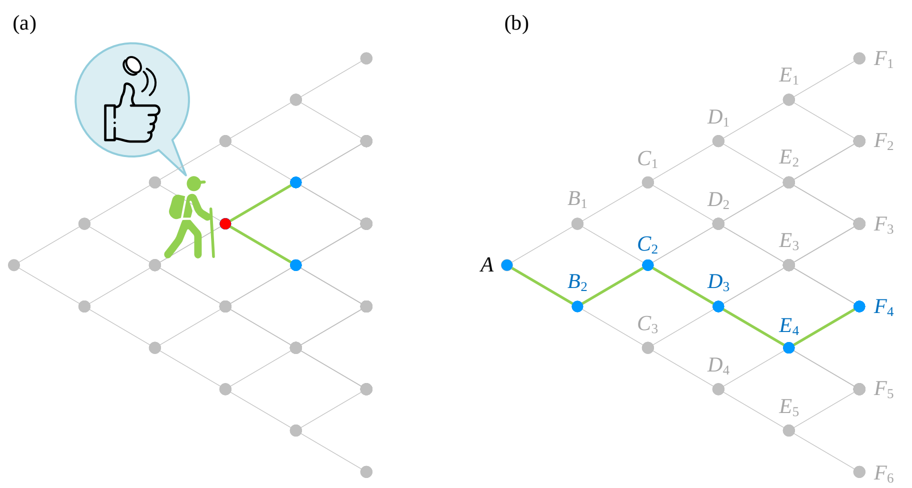


图 11. 二叉树路径与可能性

等可能角度

通过本章前文学习，大家已经清楚图 11 (b) 二叉树一共有 32 条路径。显然，从初始点到某一特定终点节点，登山者采用任意路径的可能性相同。也就是说图 11 (b) 中 $A \to B_2 \to C_2 \to D_3 \to E_4 \to F_4$ 这条路径被采纳的概率 (可能性) 为。

$$\Pr\left(A \to B_2 \to C_2 \to D_3 \to E_4 \to F_4\right) = \frac{1}{32} = 0.03125 = 3.125\% \tag{10}$$

二选一角度

再换一个角度，登山者在 A、B、C、D、E 这 5 个节点都面临二选一的抉择，而选择向上或向下的概率均为 1/2；因此，登山者选择图 11 (b) 中 $A \to B_2 \to C_2 \to D_3 \to E_4 \to F_4$ 路径的概率为。

$$\Pr\left(A \to B_2 \to C_2 \to D_3 \to E_4 \to F_4\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0.03125 = 3.125\% \tag{11}$$

结果和 (10) 完全一致。

组合数

图 11 (b) 二叉树从起点 A 到终点 ($F_1 \sim F_6$) 一共有 32 条路径；而到达 F_4 点一共有 10 条路径，也就是说从 A 点出发，最终到达 F_4 点的概率为。

$$\Pr\left(F_4\right) = \frac{C_5^3}{2^5} = \frac{10}{32} = 0.3125 = 31.25\% \tag{12}$$

同理，我们可以计算得到到达 F_1、F_2、F_3、F_5、F_6 这几个终点的概率。

$$\begin{aligned}
\Pr\left(F_1\right) &= \frac{C_5^0}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.03125 \\
\Pr\left(F_2\right) &= \frac{C_5^1}{2^5} = \frac{5}{32} = 0.15625 \\
\Pr\left(F_3\right) &= \frac{C_5^2}{2^5} = \frac{10}{32} = 0.3125 \\
\Pr\left(F_5\right) &= \frac{C_5^4}{2^5} = \frac{5}{32} = 0.15625 \\
\Pr\left(F_6\right) &= \frac{C_5^5}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.03125
\end{aligned} \tag{13}$$

举个例子，从 A 点出发，不管中间走那条路线，到达 F_2 的概率为 15.625%。

这些概率值求和，得到结果为 1；这就是说，按照既定规则，登山者从起点出发，必然到达终点。1 量化了“必然”这一论述：

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5 &= C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} \\
&= 0.03125 + 0.15625 + 0.3125 + 0.3125 + 0.15625 + 0.03125 = 1
\end{aligned} \tag{14}$$

概率直方图

将上述概率值做成水平条形图，放在二叉树路径的右侧，我们得到图 12。这种直方图被称作**概率直方图** (probability histogram)。大家可能已经发现，图 9 所示的频数直方图结果除以总数 32，就得到图 12 这幅概率直方图。也就是说，频数直方图和概率直方图可以很容易相互转化。

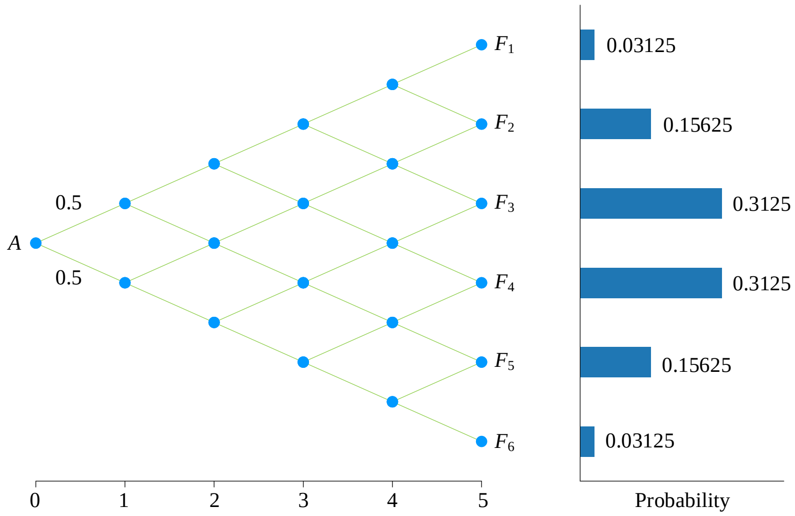


图 12. $n = 5$，到达二叉树终点节点概率分布，向上、向下概率均为 0.5

20.5 一枚质地不均匀的硬币

前文假设硬币质地均匀，即抛一枚硬币获得正面背面朝上的概率相同，均为 0.5 (50%)；但是，假设一种情况，硬币质地不均匀，抛这枚硬币时，得到正面的可能性为 60%，反面的可能性为 40%。

下面计算一下抛这枚硬币决定在图 11 所示二叉树中登山者从起点到达终点的选取不同路径的可能性。

在五次“二选一”的决策中，向上走的可能性为 0.6，向下走的可能性为 0.4，利用组合数容易得到，到达 F_1、F_2、F_3、F_4、F_5、F_6 对应的概率分别为：

$$\begin{aligned}
\Pr(F_1) &= C_5^0 \times 0.6^5 \times 0.4^0 = 0.07776 \\
\Pr(F_2) &= C_5^1 \times 0.6^4 \times 0.4^1 = 0.2592 \\
\Pr(F_3) &= C_5^2 \times 0.6^3 \times 0.4^2 = 0.3456 \\
\Pr(F_4) &= C_5^3 \times 0.6^2 \times 0.4^3 = 0.2304 \\
\Pr(F_5) &= C_5^4 \times 0.6^1 \times 0.4^4 = 0.0768 \\
\Pr(F_6) &= C_5^5 \times 0.6^0 \times 0.4^5 = 0.01024
\end{aligned} \tag{15}$$

到达 F_1、F_2、F_3、F_4、F_5、F_6 对应的概率之和仍然为 1：

$$\begin{aligned}(0.6+0.4)^5 &= \underbrace{C_5^0\times0.6^5\times0.4^0}_{\Pr(F_1)}+\underbrace{C_5^1\times0.6^4\times0.4^1}_{\Pr(F_2)}+\underbrace{C_5^2\times0.6^3\times0.4^2}_{\Pr(F_3)}+\\ &\quad\underbrace{C_5^3\times0.6^2\times0.4^3}_{\Pr(F_4)}+\underbrace{C_5^4\times0.6^1\times0.4^4}_{\Pr(F_5)}+\underbrace{C_5^5\times0.6^0\times0.4^5}_{\Pr(F_6)}\\ &=0.07776+0.2592+0.3456+0.2304+0.0768+0.01024=1\end{aligned} \tag{16}$$

但是对比图 12 和图 13，容易发现登山者倾向于"向上走"；这显然是因为硬币不均匀，抛硬币得到正面的概率高于反面。而且图 13 右侧的概率直方图不再对称。

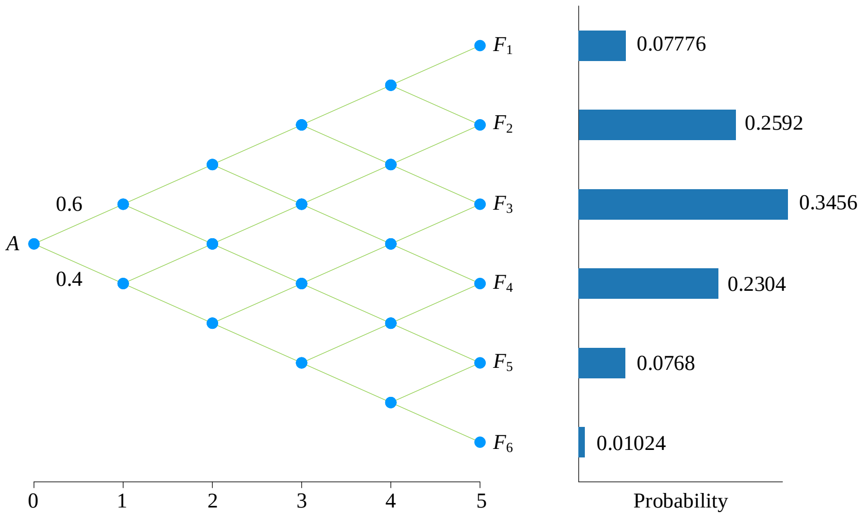


图 13. $n = 5$，到达二叉树终点节点概率分布，向上、向下概率分别为 0.6、0.4

如果我们敲好能够找到另外一枚质地不均匀的硬币，抛这枚硬币时，得到正面的可能性为 30%，反面的可能性为 70%。登山者通过抛这枚硬币确定向上走或向下走，如图 14 所示，登山者更倾向于向下走。

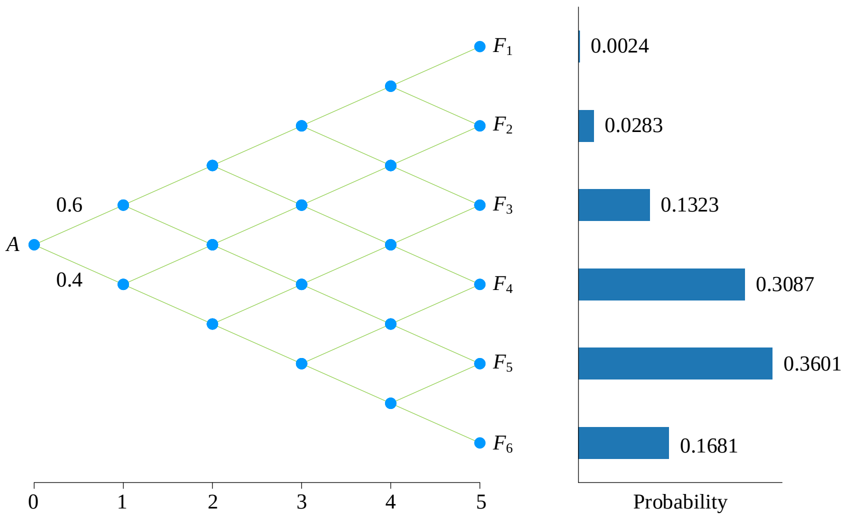


图 14. $n = 5$，到达二叉树终点节点概率分布，向上、向下概率分别为 0.3、0.7

这一节的内容，实际上就是我们要在丛书《概率统计》一本中要讲解的**二项式分布** (binomial distribution)。概率是数据科学和机器学习中重要的板块，本系列丛书《概率统计》一本将全面讲解。

配合前文代码，以下代码绘制图 12、图 13、图 14。请读者修改代码中 p 值。

```python
# Bk3_Ch20_1_B

#%% probability histogram

from scipy.stats import binom

p = 0.3 # 0.5

x = np.arange(0, n + 1)

p_x= binom.pmf(x, n, p)

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,5), gridspec_kw={'width_ratios': [3, 1]})

for i in np.arange(n):

    Nodes_y = np.linspace(-i,i,i+1)

    B_y = np.concatenate((Nodes_y+1, Nodes_y-1))
    B_x = np.zeros_like(B_y) + i + 1
    B = np.stack((B_x,B_y))

    A_y = np.concatenate((Nodes_y, Nodes_y))
    A_x = np.zeros_like(A_y) + i

    x_AB = np.stack((A_x,B_x))

    y_AB = np.stack((A_y,B_y))

    ax1.plot(x_AB, y_AB, 'o-', color = '#92D050',
             markerfacecolor = '#0099FF',
             markeredgecolor = None)


ax1.spines['right'].set_visible(False)
ax1.spines['top'].set_visible(False)

ax1.set_xlim(0,n)
ax1.set_ylim(B_y.min() - 1,B_y.max() + 1)

ax2.barh(locations, p_x, align='center')

for i,(x,y) in enumerate(zip(locations.tolist(), p_x.tolist())):
    ax2.text(y + p_x.max()*0.1, x, "{:.4f}".format(y))

ax2.set_ylim(B_y.min() - 1,B_y.max() + 1)
ax2.spines['right'].set_visible(False)
ax2.spines['top'].set_visible(False)
```

20.6 随机中有规律

本节还是用二叉树来探讨随机和确定之间的辩证关系。

在给定的二叉树网格中，登山者在不同节点“随机”确定向上走、向下走，得到的结果就是一种随机漫步 (random walk)。

图 15 所示为 20 步二叉树网格，根据前文所学，我们知道从起点到终点，这个网格对应 2^{20} (1048576) 条路径；图 15 四幅图给出的是登山者“可能”走的 2、4、8、16 条随机路径。

随着路径数量增多，我们似乎可以预感，到达终点时登山者在中间的可能性会高于两端。

为了验证这一直觉，并相对准确确定登山者到达终点位置的规律，我们不断增加随机路径的数量，并根据终点位置绘制频率直方图。如图 16 所示，50、100、5000 条随机路径条件下，登山者终点位置频率直方图。

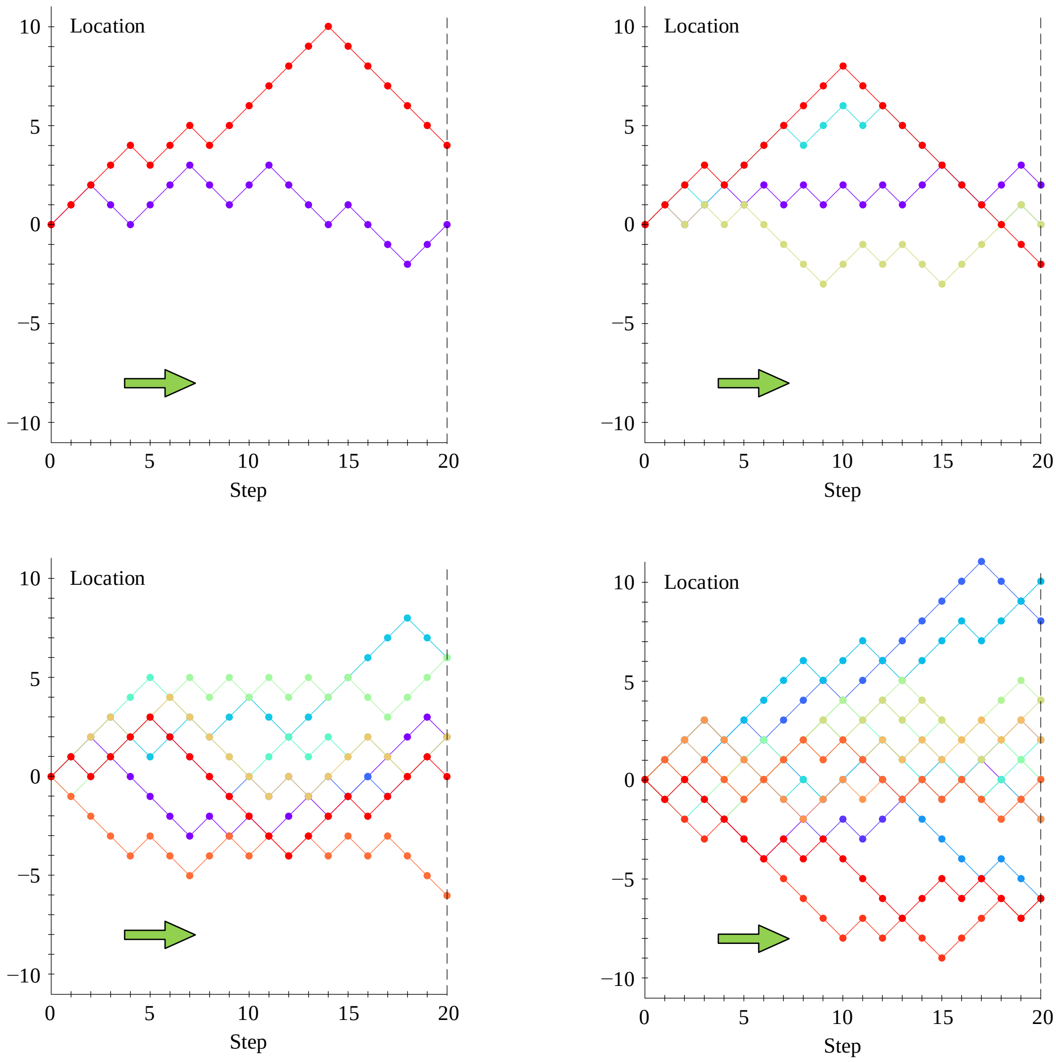


图 15. 随机漫步，2、4、8、16 条路径

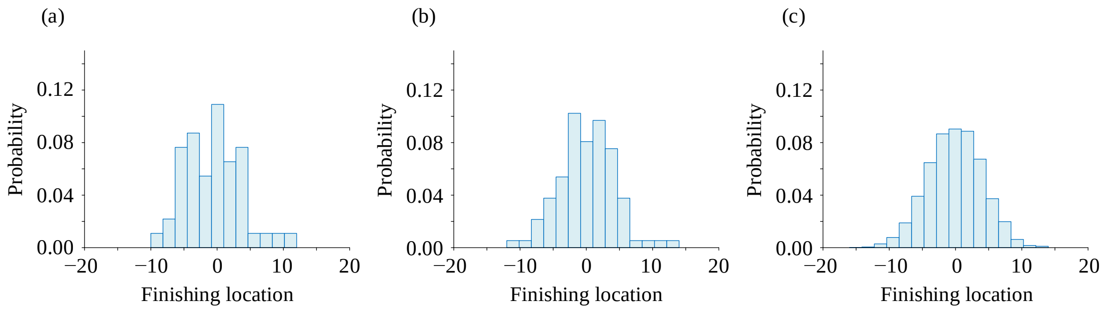


图 16. 随机漫步结束位置频率直方图，50、100、5000 条路径

实际上，二叉树网格限制了登山者向上或向下运动的步幅。更进一步，如果我们放开二叉树网格的限制，让登山者按照某种规律自行决定向上或向下的步幅，就可以得到图 17。

单看图中任意一条或几条路径，我们很难抓住任何规律；但是随着随机路径的数量不断增多，运动的规律就不言自明了。

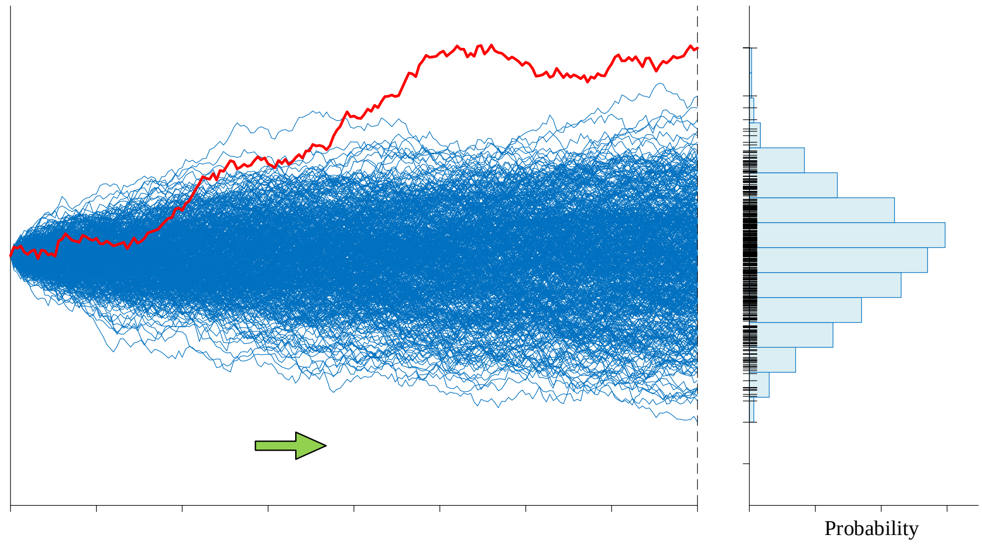


图 17. 不受二叉树网格限制的随机漫步

生活中这种随机中存在规律的情况不胜枚举。举个例子，图 18 左图所示为一段时间内某只股票日收益率，红线以上为股价上涨，红线以下为股价下跌。单看某几天的股价涨跌很难把握住规律；但是，把一段时间内股价的日收益率数据绘制成直方图，如图 18 右图，我们就可以发现股价涨跌规律的端倪。当然，为了得出更有意义的结论，我们还需要掌握更多的概率统计工具。本系列丛书将在《概率统计》和《数据科学》两本书中介绍更多概率统计知识，以及如何将它们应用到数据分析和预测实践中。

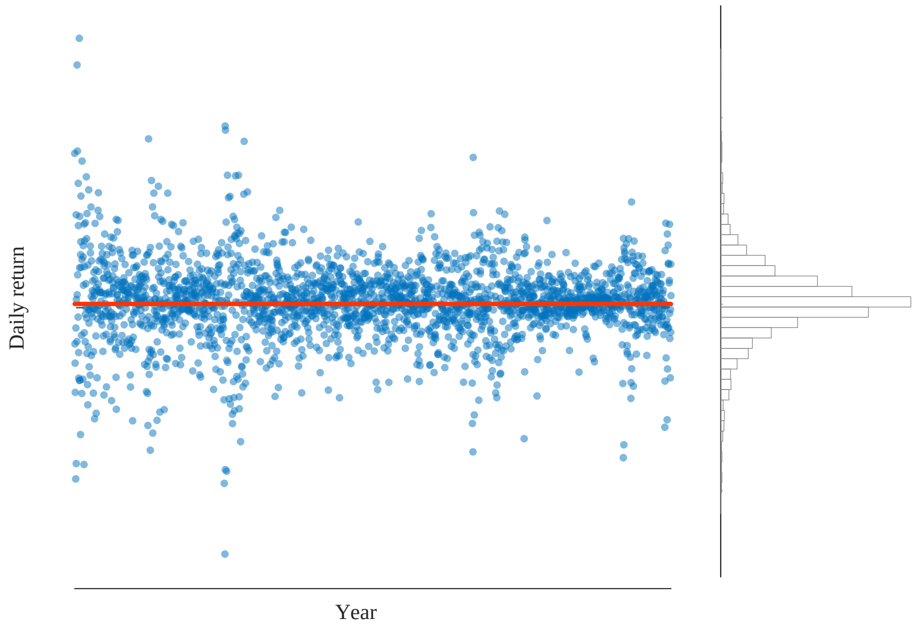


图 18. 股价日收益率和一段时间内的分布情况

高斯分布

观察图 16、图 17、图 18 直方图，似乎某种神秘的规律，或者一条神秘的曲线，呼之欲出；这就是“宇宙终极分布”——**高斯分布** (Gaussian distribution)。

高斯分布之众多概率分布中较为常用的一种。所谓概率分布 (probability distribution) 描述随机变量取值的概率规律。

下式是高斯分布的概率密度函数 (probability density function, PDF) 曲线解析式：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \tag{17}$$

其中，μ 为均值，σ 为标准差；下一章将介绍均值和标准差。

满足 (17) 的高斯分布常记做 $N(\mu, \sigma^2)$。连续型随机变量的概率密度函数 PDF 描述随机变量的在某个确定的取值点附近的可能性的函数。

(17) 实际上就是本书前文介绍过的高斯函数通过函数变换得到的解析式。

图 19 所示为三个不同参数的一元高斯分布概率密度函数曲线。高斯分布，形态上极富美感；公式优雅精巧，包含数学中两个重要两个无理数 π 和 e。高斯分布可以解释自然界很多纷繁复杂的规律；有人说，高斯分布似乎代表着宇宙幕后终极秩序。

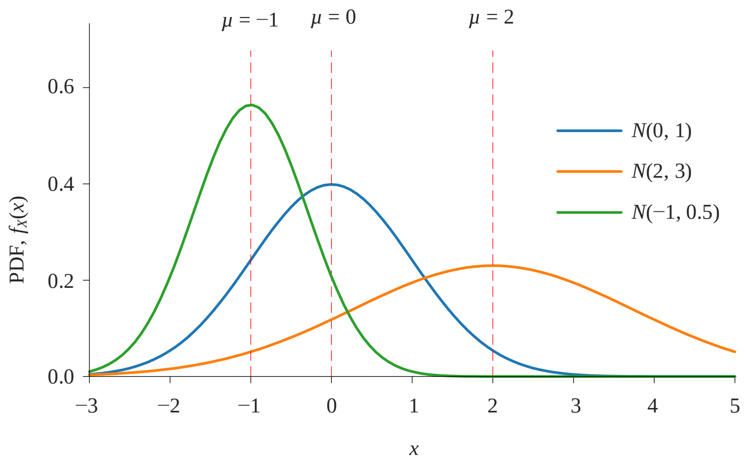


图 19. 三个不同一元高斯分布的概率密度函数曲线

本书前文利用杨辉三角，将算数、代数、几何、数列等数学知识联系起来，本章又将杨辉三角的触角伸到二叉树、概率和随机等概念；这正是是丛书的重要目的之一——打破数学板块之间的壁垒，将它们有机联结。

希望大家通过本章的学习能够获得有关概率和随机的直观感受。随着，本系列丛书内容的不断深入，大家不但能够获得解释随机现象的数学工具，还能将它们用在解决数据科学和机器学习具体问题中去。