10 Functions Meet Coordinate Systems 函数

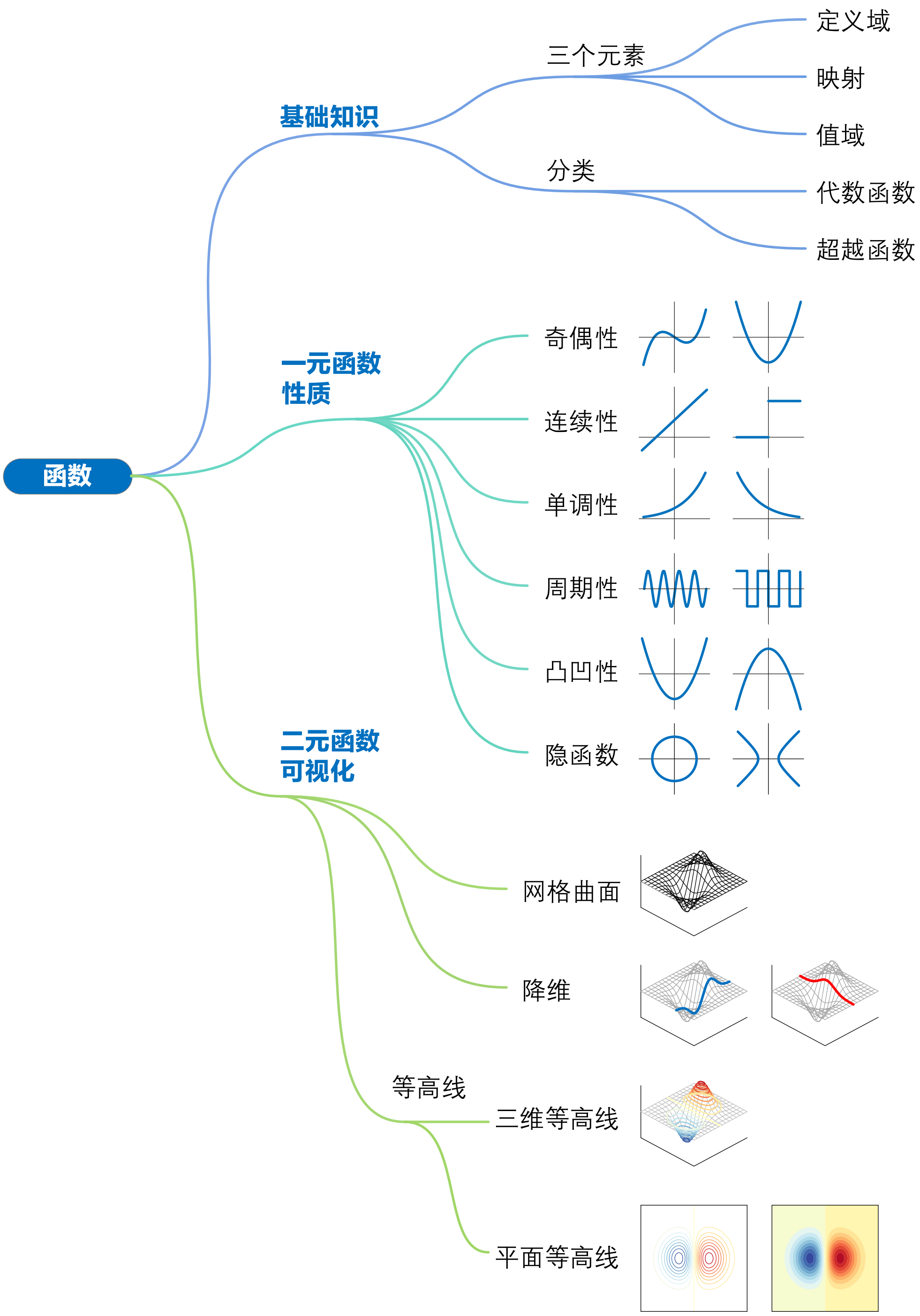
从几何图形角度探究

音乐是一种隐藏的数学实践，它是大脑潜意识下的计算。

Music is the hidden arithmetical exercise of a mind unconscious that it is calculating.

——戈特弗里德·莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz) | 德意志数学家、哲学家 | 1646 ~ 1716

- matplotlib.pyplot.axhline() 绘制水平线
- matplotlib.pyplot.axvline() 绘制竖直线
- matplotlib.pyplot.contour() 绘制等高线图
- matplotlib.pyplot.contourf() 绘制填充等高线图
- numpy.linspace() 在指定的间隔内，返回固定步长的数据
- numpy.meshgrid() 获得网格数据
- plot_wireframe() 绘制三维单色线框图
- sympy.abc 引入符号变量
- sympy.diff() 对符号函数求导
- sympy.exp() 符号运算中以 e 为底的指数函数
- sympy.Interval 定义符号区间
- sympy.is_increasing 判断符号函数的单调性
- sympy.lambdify() 将符号表达式转化为函数


函数
基础知识
三个元素
定义域
映射
值域
分类
代数函数
超越函数
一元函数性质
奇偶性
连续性
单调性
周期性
凸凹性
隐函数
二元函数可视化
网格曲面
降维
等高线
三维等高线
平面等高线

10.1 当代数式遇到坐标系

坐标系给每个冷冰冰的代数式赋予生命；图 1 ~ 图 3 给出了九幅图像，他们多数是函数，也有隐函数和参数方程。

建议大家盯着每幅图像看一会就会惊奇地发现，坐标系给他们插上了翅膀，让他们在空间腾跃、讲述自己的故事。

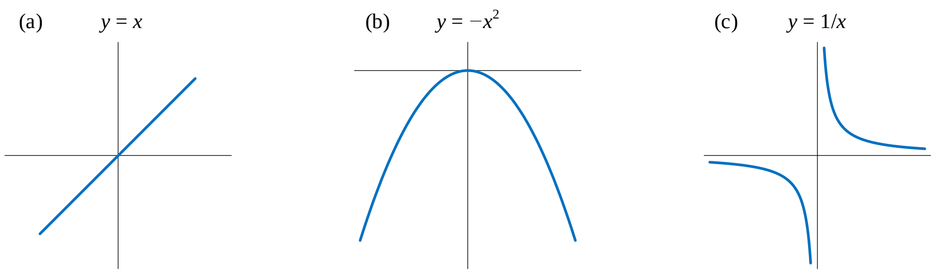


图 1. 一次函数、二次函数和反比例函数

线性函数 $y = x$ 是个坚毅果敢、埋头苦干的家伙。你问他，你要去哪？他莫不做声，自顾自地向着正负无穷，无限延伸，直到世界尽头。

抛物线 $y = -x^2$ 像一条腾出水面的锦鲤，在空中划出一道优美的弧线，他飞跃龙门、修成正果；从此岸到彼岸，离家越远，心就离家越近。

反比例函数 $y = 1/x$ 像一个哲学家，他在讲述——太极者，无极而生，动静之机，阴阳之母也。物极必反，任何事物都有两面，而且两面会互相转化。

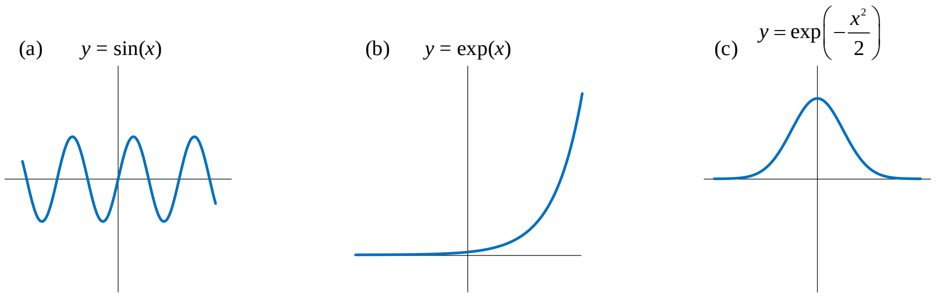


图 2. 正弦函数、指数函数和高斯函数

海水无风时，波涛安悠悠。正弦函数 $y = \sin(x)$ 像是海浪，永远波涛澎湃；它代表着生命的律动，你仿佛能够听到脉搏砰砰作响。

指数函数 $y = \exp(x)$ 就是那条巨龙。起初，他韬光养晦、潜龙勿用；万尺高楼起于累土，他不知疲倦、从未停歇；你看他，越飞越快，越升越高，如飞龙在天。

君不见黄河之水天上来，奔流到海不复回。优雅而神秘，高斯函数 $y = \exp(-x^2/2)$ 好比高山流水；上善若水，涓涓细流，利万物而不争。

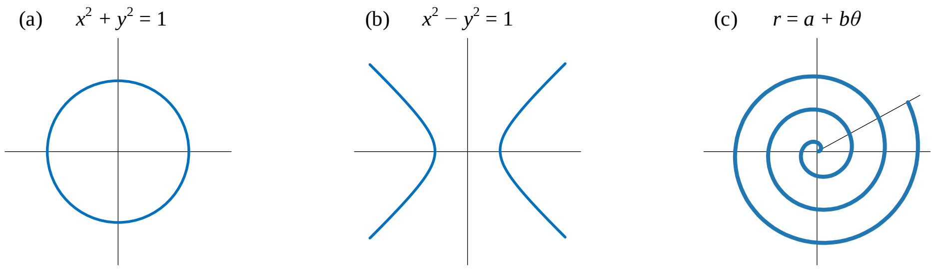


图 3. 正圆、双曲线和阿基米德螺旋线，非函数

海上生明月，天涯共此时。$x^2 + y^2 = 1$ 是挂在天上的白玉盘，是家里客厅的圆饭桌，是捧在手里的圆月饼。转了一圈，圆心是家。

人有悲欢离合，月有阴晴圆缺，此事古难全。造化弄人，$x^2 + y^2 = 1$ 正号 + 改为负号 −，就变成两条双曲线 $x^2 - y^2 = 1$。他们隔空相望，像牛郎和织女，盈盈一水间，脉脉不得语。

阿基米德螺旋线好似夜空中的银河星系，把我们的目光从人世的浮尘，拉到深蓝的虚空，让我们片刻间忘却了这片土地的悲欢离合。

10.2 一元函数：一个自变量

如果函数 f 以 x 作为唯一输入值，输出值写作 $y = f(x)$，函数是一元函数；也就是说，有一个自变量的函数叫做**一元函数** (univariate function)。

本书前文介绍过，函数输入值 x 构成的集合叫做定义域，函数输出值 y 构成的集合叫做值域。注意，定义域中任一 x 在值域中有唯一对应的 y；当然，不同 x 可以对应一样的函数值 $f(x)$。

图 4 展示的便是一元函数的映射关系，以及几种一元函数示例。平面直角坐标系中，一般用线图 (line plot 或 line chart) 作为函数的可视化方案。

白话说，函数就是一种数值转化。本书前文讲解不等式时，我们做过这样一个实验，给满足不等式条件的变量一个标签——1 (True)；不满足不等式的变量结果为 0 (False)。这实际上也是函数映射，输入为定义域内自变量的取值，输出为两值之一 0 或 1。

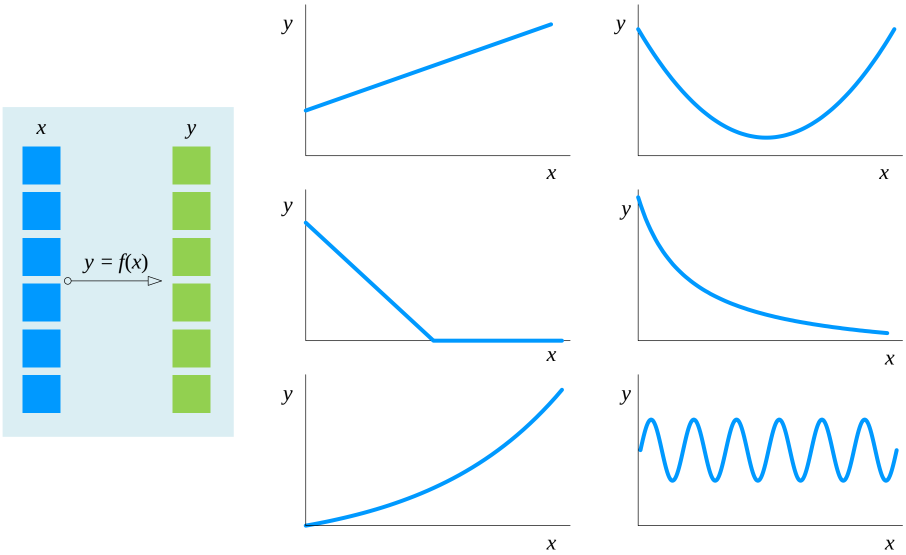


图 4. 一元函数

数据科学和机器学习中常用的函数一般分为**代数函数** (algebraic function) 和**超越函数** (transcendental function)。代数函数是指通过常数与自变量相互之间有限次的加、减、乘、除、有理指数幂和开方等运算构造的函数。本书将绝对值函数也归类到代数函数中。

超越函数指的是“超出”代数函数范畴的函数，比如对数函数、指数函数、三角函数等等。

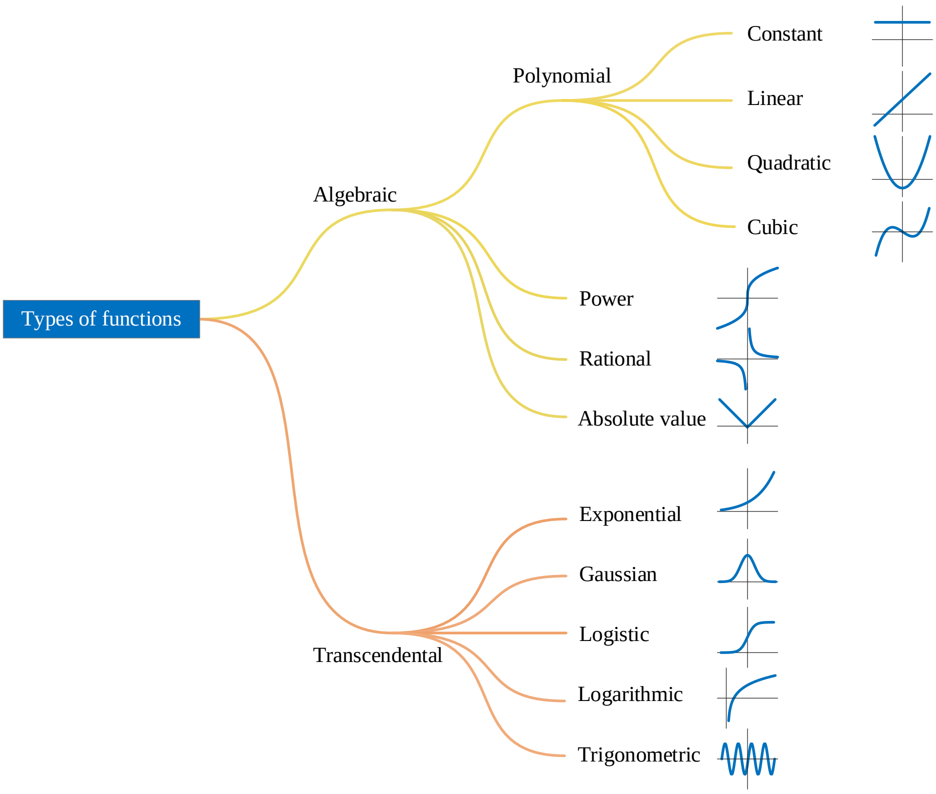


图 5. 常见函数分类

函数在机器学习中扮演重要角色。下面以神经网络 (neural network) 为例，简单介绍函数的作用。

神经网络的核心思想是模拟人脑**神经元** (neuron) 的工作原理。图 6 展示神经元基本生物学结构。神经元**细胞体** (cell body) 的核心是**细胞核** (nucleus)；细胞核周围围绕着**树突** (dendrite)。树突接受外部刺激，并将信号传递至神经元内部。

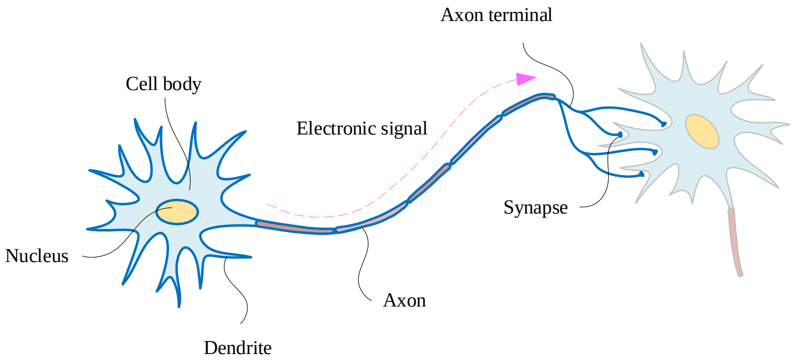


图 6. 神经元结构

细胞体汇总不同树突刺激，当刺激达到一定程度时，激发细胞兴奋状态；否则，细胞处于抑制状态。**轴突** (axon) 则负责将兴奋状态通过**轴突末端** (axon terminal) 的**突触** (synapse) 等结构传递到另一个神经元或组织细胞。

图 7 可看作是对神经元简单模仿。神经元模型的输入 $x_1, x_2, \dots, x_D$ 类似于神经元的树突，x_i 取值为简单的 0 或 1。这些输入分别乘以各自权重，再通过求和函数汇集到一起得到 x。接着，x 值再通过一个判别函数 $f(\,)$ 得到最终的值 y。

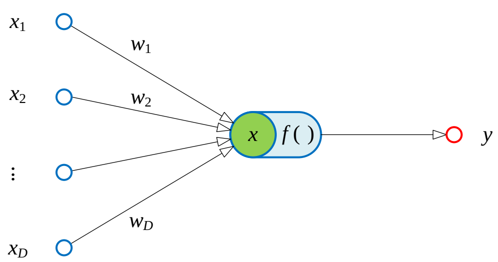


图 7. 最简单的神经网络模型

图 8 展示的便是几种常见的判别函数 $f(\,)$ 及其对应图像。

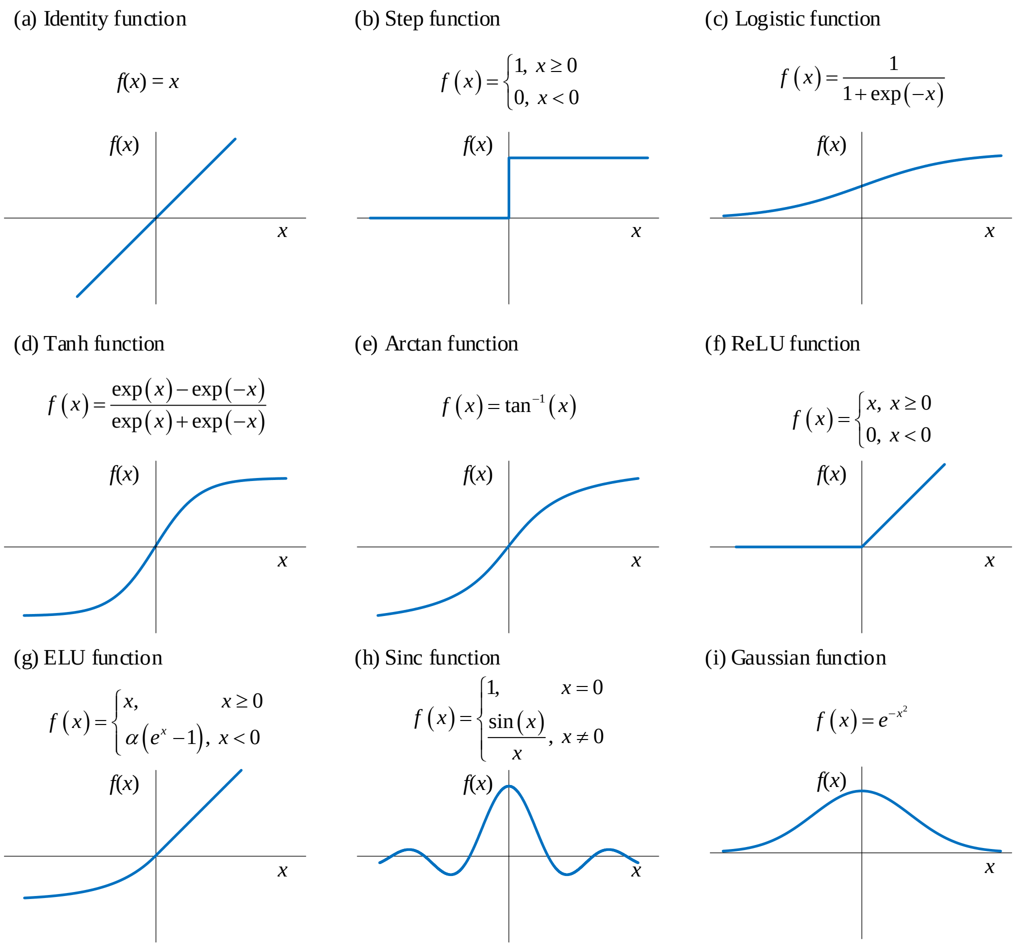


图 8. 几种神经网络中常见的判别函数

10.3 一元函数性质

学习函数时，请大家关注函数这几个特征：形状及变化趋势、自变量取值范围、函数值取值范围、函数性质等。

下面，本节利用图 9 介绍一元函数常见性质。

奇偶性

图 9 (a) 展示**偶函数** (even function) 性质。$f(x)$ 若为偶函数，对于定义域内任意 x 如下关系都成立。

$$f(x) = f(-x) \tag{1}$$

从几何角度，$f(x)$ 若为偶函数，函数图像关于纵轴对称。

如图 9 (b) 所示，如果 $f(x)$ 为**奇函数** (odd function)，对于定义域内任意 x 如下关系都成立。

$$f(-x) = -f(x) \tag{2}$$

从几何角度，$f(x)$ 若为奇函数，函数图像关于原点对称。

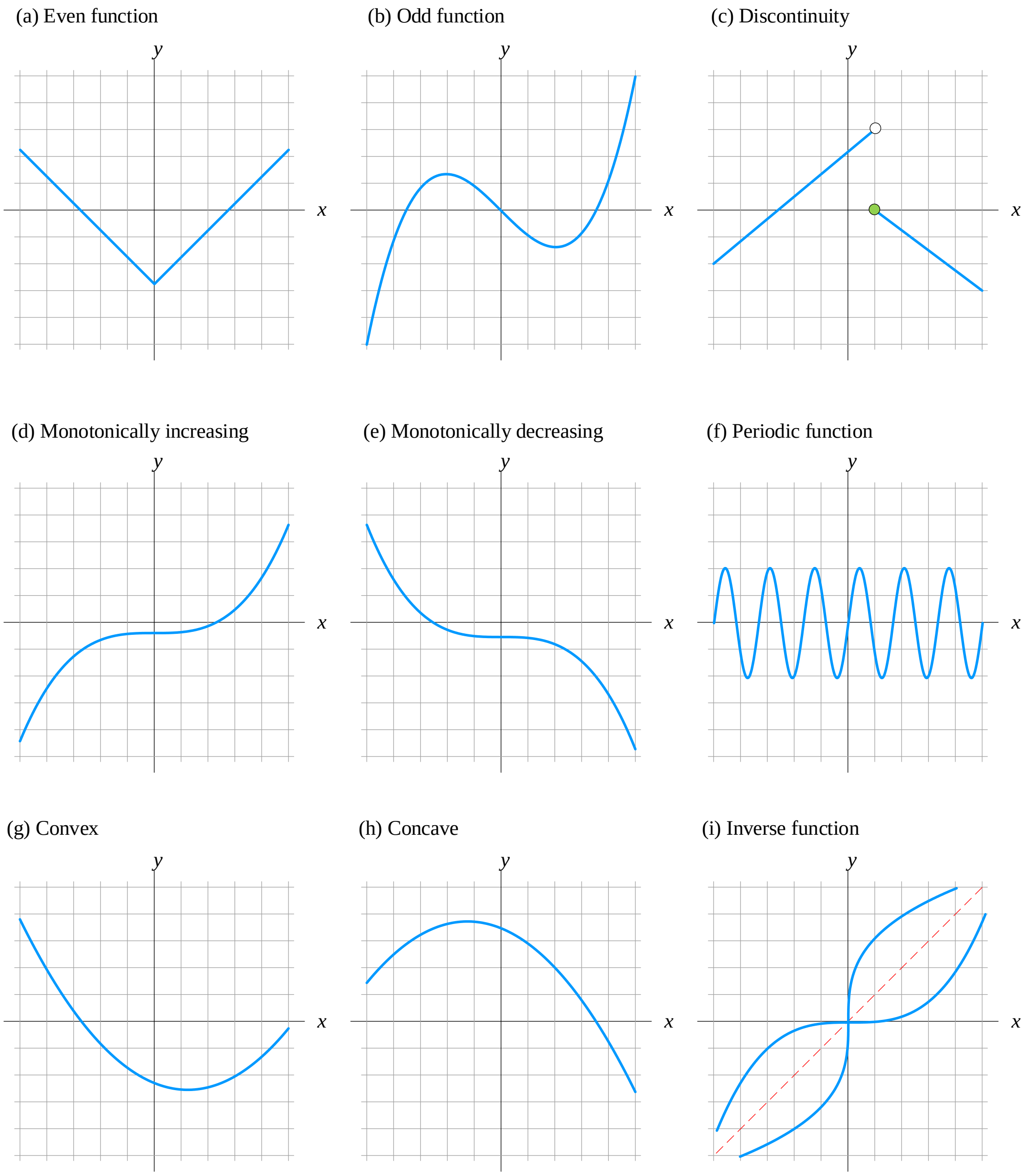


图 9. 一元函数常见性质

连续性

简单来说，**连续函数** (continuous function) 是指函数 $y = f(x)$ 当自变量 x 的变化很小时，所引起的因变量 y 的变化也很小，没有函数值突变；与之相对的就是**不连续函数** (discontinuous function)。图 9 (c) 给出的是函数存在不连续点 (discontinuity)。

如图 10 所示，不连续函数有几种：**渐近线间断** (asymptotic discontinuity)，**点间断** (point discontinuity)，还有**跳跃间断** (jump discontinuity)。

在学习**极限** (limit) 之后，函数的**连续性** (continuity) 更容易被定义。此外，函数的连续性和**可导性** (differentiability) 有着密切联系。这是本书后续要讨论的内容。

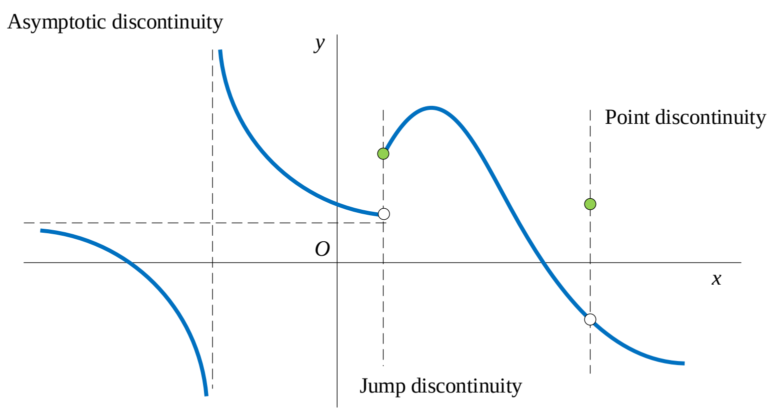


图 10. 几种不连续函数特征

单调性

图 9 (d) 和(e) 描述的是函数**单调性** (monotonicity)。图 9 (d) 给出的函数为**单调递增** (monotonically increasing)；图 9 (e) 函数则是**单调递减** (monotonically decreasing)。

`sympy.is_decreasing()` 可以用来判断符号函数的单调性；以下代码判断在不同区间内，特定函数的单调性。

```
# Bk3_Ch10_01

from sympy import is_increasing
from sympy.abc import x, y
from sympy import Interval, oo

expr_1 = -x**2
print(is_increasing(expr_1, Interval(-oo, 0)))

print(is_increasing(expr_1, Interval(0, oo)))

expr_2 = -x**2 + y
print(is_increasing(expr_2, Interval(-1, 2), x))
```

周期性

图 9 (f) 所示为函数**周期性** (periodicity)。如果函数 f 中不同位置 x 满足下式，则函数为周期函数。

$$f(x+T)=f(x) \tag{3}$$

其中，T 为**周期** (period)。三角函数就是典型的周期函数。图 11 给出的是四个其他周期函数的例子。

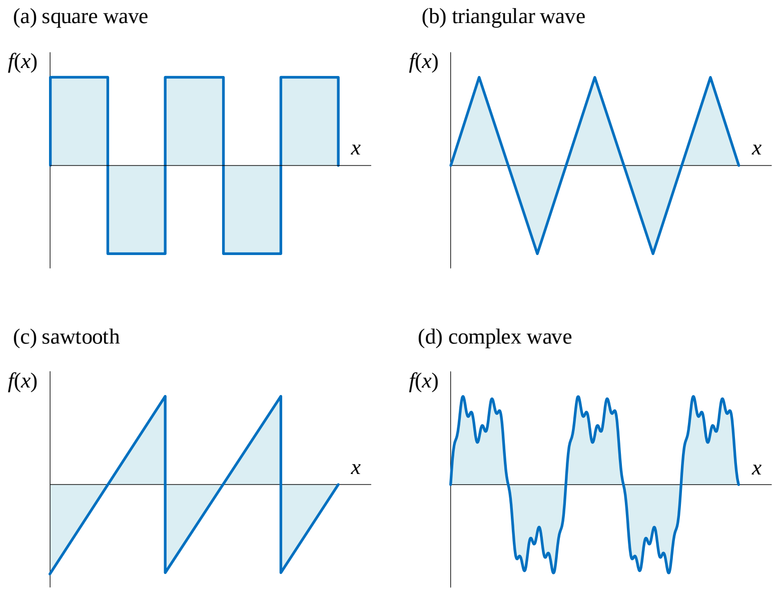


图 11. 四个周期函数

凸凹性

图 9 (g) 所示为**凸函数** (convex function)，图 9 (h) 所示为**凹函数** (concave function)。注意，国内数学教材对凸凹的定义，可能和本书正好相反。下面聊一下凸凹函数的确切定义和特点。

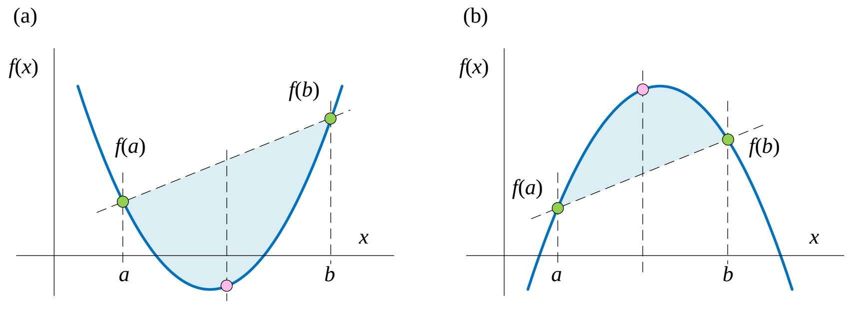


图 12. 函数凸凹性

如图 12 (a) 所示，若 $f(x)$ 在区间 I 有定义，如果对于任意 $a, b \in I$，且 $a \neq b$，如果满足

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4}$$

则称 $f(x)$ 在该区间内为凸函数。

如图 12 (b) 所示，如果对于任意 $a, b \in I$，且 $a \neq b$，如果满足

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{5}$$

则称 $f(x)$ 在该区间内为凹函数。

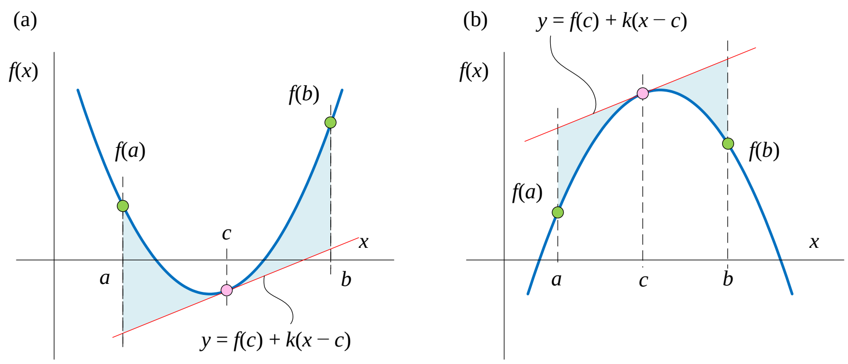


图 13. 切线角度看函数凸凹性

再从切线角度来看函数凸凹性。如图 13 所示，在 (a, b) 区间内一点 $x = c$，在函数上 $(c, f(c))$ 做一条切线，切线的解析式为：

$$y = f(c) + k(x-c) \tag{6}$$

如图 13 (a) 所示，如果函数为凸函数，当 $x \neq c$，函数 $f(x)$ 图像在切线上方；也就是说：

$$f(x) > f(c) + k(x-c), \quad x \in (a,b), x \neq c \tag{7}$$

有人可能会问，(6) 的 k 是什么？具体值是什么？k 就是函数在 $x = c$ 切线的斜率，这个斜率就是导数；这是我们后续要介绍的内容。

如图 13 (b) 所示，如果函数为凹函数，当 $x \neq c$，函数 $f(x)$ 图像在切线下方，即：

$$f(x) < f(c) + k(x-c), \quad x \in (a,b), x \neq c \tag{8}$$

此外，函数的凸凹性和极值有着密切联系，本书后文会逐步介绍。

反函数

反函数 (inverse function) $x = f^{-1}(y)$ 的定义域、值域分别是函数 $y = f(x)$的值域、定义域。图 9 (i) 给出的是函数 f 和其反函数 f^{-1}，两者关系如下：

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x \tag{9}$$

并不是所有函数都存在反函数。

隐函数

隐函数 (implicit function) 是由**隐式方程** (implicit equation) 所隐含定义的函数。比如，隐式方程 $F(x_1, x_2) = 0$ 描述 x_1 和 x_2 两者关系。

不同于一般函数，对于很多隐函数，很难分离自变量和因变量，比如图 14 所示四个例子。和函数一样，隐函数可以扩展到多元，比如图 15 所示为三元隐函数的例子。后续，我们会专门介绍如何用 Python 绘制如图 14 所示的隐函数图像。

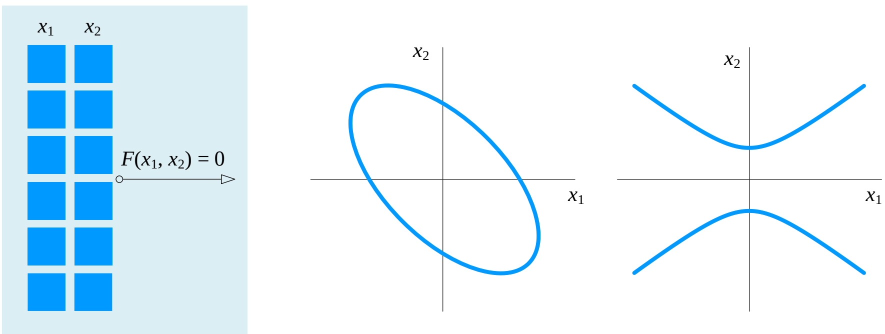


图 14. 二元隐函数

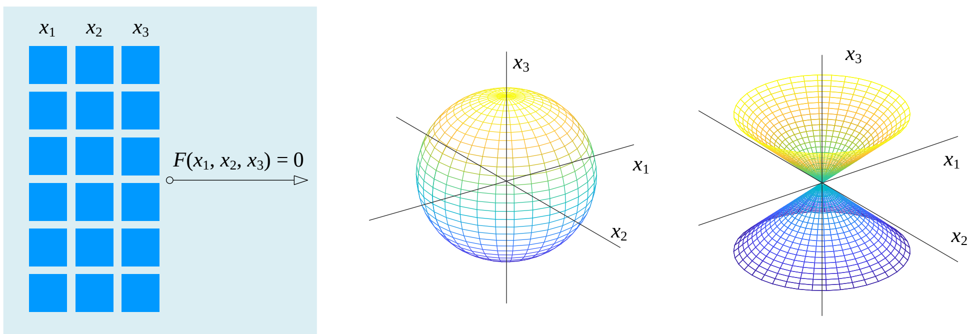


图 15. 三元隐函数

变化率和面积

很多数学问题要求我们准确地计算函数的变化率。从几何角度，如图 16 (a) 所示，函数上某一点切线的斜率正是函数的变化率；微积分中，这个函数变化率叫做导数 (derivative)。

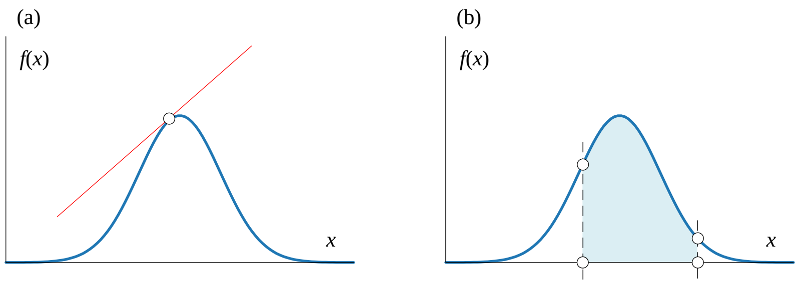


图 16. 函数的变化率和面积

进一步细看图 16 (a) 给出的函数数值变化。如图 17 所示，很明显在 A 和 B 两个区域，随着 x 增大 $f(x)$ 增大，也就是变化率为正。但是，在 A 这个区域，x 增大时，$f(x)$ 增速加快，也就是函数变化率的变化率为正；而在 B 这个区域，x 增大时，$f(x)$ 增速逐步放缓，即函数变化率的变化率为负。这个“变化率的变化率”就是二阶导数，也是本书后续要介绍的内容。

再看 C 和 D 两个区域，随 x 增大 $f(x)$ 减小，即变化率为负。可是，在 C 区域，x 增大，$f(x)$ 加速下降；在 D 区域，x 增大，$f(x)$ 下降逐步放缓。

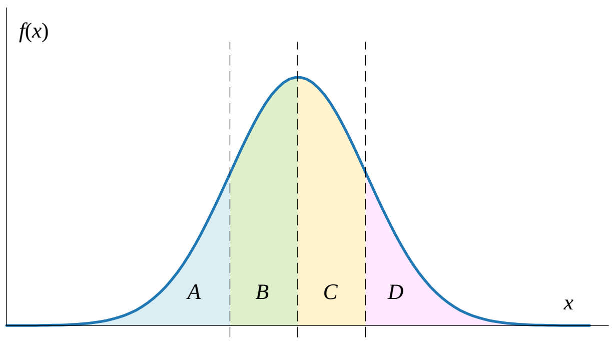


图 17. 细看函数的变化率

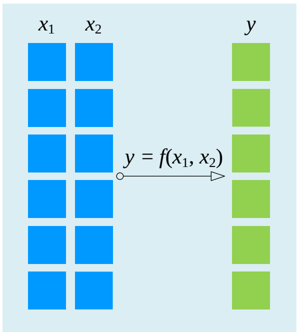
如图 16 (b) 所示，一些数学问题求解面积时，需要计算某个函数图形在一定取值范围和横轴围成几何图形的面积，这就要求大家了解积分 (integral) 这个数学工具。

本书后续会着重介绍导数和积分这两个数学工具。

10.4 二元函数：两个自变量

有两个自变量函数叫做**二元函数** (bivariate function)，比如 $y = f(x_1, x_2)$。本书常常借助三维直角坐标系可视化二元函数。图 18 所示为二元函数映射关系以及几个示例。

此外，有多个自变量函数叫做**多元函数** (multivariate function)，比如 $y = f(x_1, x_2, \ldots x_D)$。



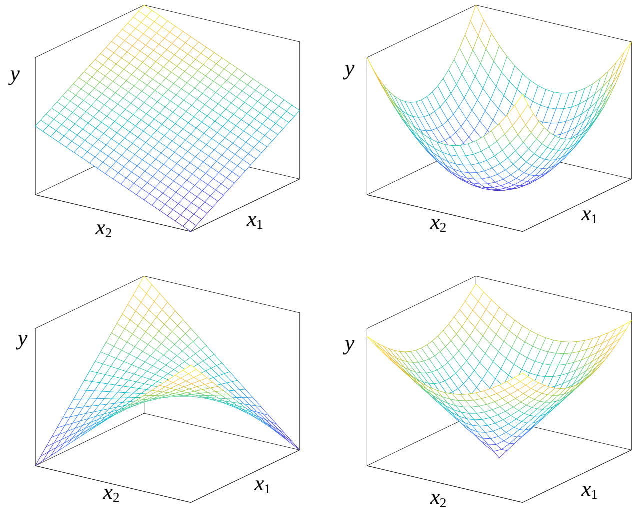


图 18. 二元函数

举个例子，二元一次函数 $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ 有 x_1 和 x_2 两个自变量。当 x_1 和 x_2 取值分别为 $x_1 = 2$，$x_2 = 4$，函数值 $f(x_1, x_2) = 2 + 4 = 6$。

网格化数据

为了获得 $f(x_1, x_2)$ 在三维空间的图形，需要提供一系列整齐的坐标值 (x_1, x_2)，

$$(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (-4,-4) & (-2,-4) & (0,-4) & (2,-4) & (4,-4) \\ (-4,-2) & (-2,-2) & (0,-2) & (2,-2) & (4,-2) \\ (-4,0) & (-2,0) & (0,0) & (2,0) & (4,0) \\ (-4,2) & (-2,2) & (0,2) & (2,2) & (4,2) \\ (-4,4) & (-2,4) & (0,4) & (2,4) & (4,4) \end{bmatrix} \tag{10}$$

采用网格化数据，将上述坐标点 x_1 和 x_2 分离并写成矩阵形式。

$$x_1 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中，x_1 的每个值代表点的横坐标值，x_2 的每个值代表点的纵坐标值。`numpy.meshgrid()` 可以用来获得网格化数据。

$y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ 这个二元函数便是将 (11) 相同位置的数值相加得到函数值 $f(x_1, x_2)$ 的矩阵。

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -6 & -4 & -2 & 0 \\ -6 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{12}$$

图 19 所示为 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ 对应的三维空间平面。函数 $f()$ 则代表某种规则，将网格化数据从 x_1x_2 平面映射到三维空间。

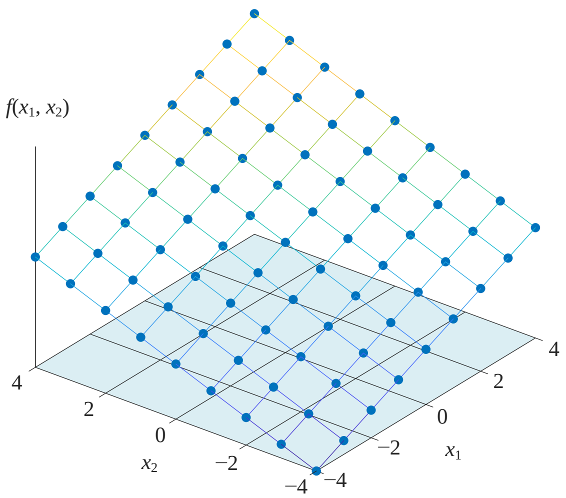


图 19. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ 对应的三维空间平面

这就是前文说的，在绘制函数图像时，比如二元函数曲面，实际上输入的函数值都是离散的、网格化的；当然，网格越密，函数曲面越精确。

实际应用中，网格的疏密可以根据函数的复杂度调整。比如图 19 这幅平面图像很简单，因此可以用比较稀疏的网格来呈现图像；但是，对于比较复杂的函数，网格则需要设置的密一些，也就是步长小一些。

下面看一个复杂二元函数 $f(x_1, x_2)$ 对应的曲面。图 20 对应的函数解析式为。

$$f\left(x_1,x_2\right)=3\left(1-x_1\right)^2\exp\left(-x_1^2-\left(x_2+1\right)^2\right)-10\left(\frac{x_1}{5}-x_1^3-x_2^5\right)\exp\left(-x_1^2-x_2^2\right)-\frac{1}{3}\exp\left(-\left(x_1+1\right)^2-x_2^2\right) \quad (13)$$

相对图 19，图 20 的网格更为密集。本章后续有关二元函数的可视化方案，都是以上述二元函数作为例子。

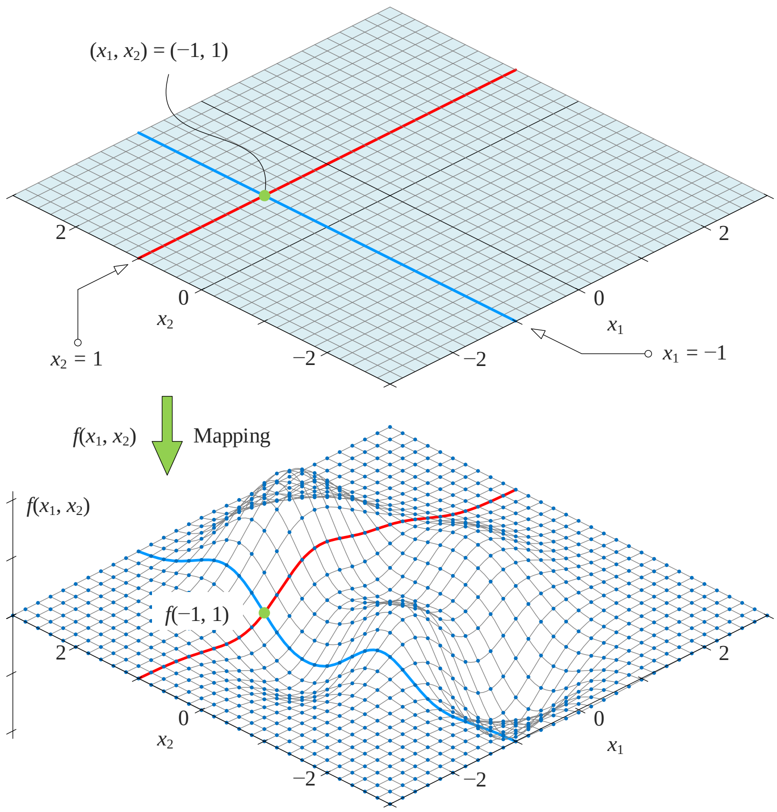


图 20. 网格化数据与二元函数映射

以下代码绘制图 20 二元函数 $f(x_1, x_2)$ 对应的网格曲面。

```
# Bk3_Ch10_02_A

import numpy as np
from sympy import lambdify, diff, exp, latex, simplify
from sympy.abc import x, y
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import cm

num = 301; # number of mesh grids
x_array = np.linspace(-3,3,num)
y_array = np.linspace(-3,3,num)
```

```
xx,yy = np.meshgrid(x_array,y_array)

plt.close('all')
# f_xy = x*exp(- x**2 - y**2);
f_xy =  3*(1-x)**2*exp(-(x**2) - (y+1)**2)\
    - 10*(x/5 - x**3 - y**5)*exp(-x**2-y**2)\
    - 1/3*exp(-(x+1)**2 - y**2)

f_xy_fcn = lambdify([x,y],f_xy)
f_xy_zz = f_xy_fcn(xx,yy)

#%% visualize the surface

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

ax.plot_wireframe(xx,yy, f_xy_zz,
                  color = [0.5,0.5,0.5],
                  rstride=5, cstride=5,
                  linewidth = 0.25)

ax.set_proj_type('ortho')
ax.set_xlabel('$x$'); ax.set_ylabel('$y$')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max()); ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())
ax.view_init(azim=-135, elev=30)
plt.tight_layout()
ax.grid(False)
plt.show()
```

10.5 降维：二元函数切一刀得到一元函数

如图 21 所示为二元函数两种可视化工具——剖面线、等高线。

本节介绍剖面线，它相当于在曲面上沿着横轴或纵轴切一刀；我们关注的是曲面截面处曲线的变化趋势，这相当于降维。

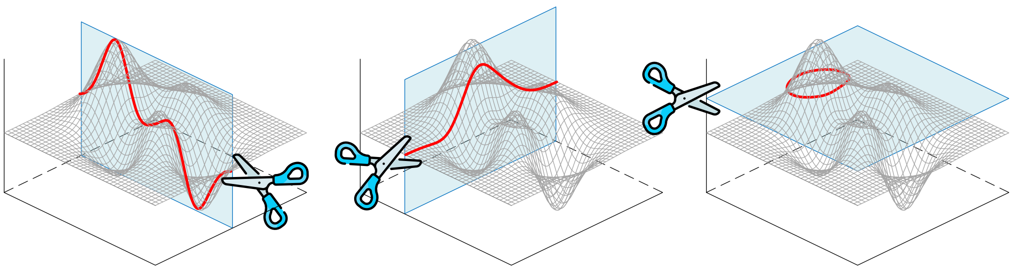


图 21. 函数降维

x_1y 平面方向剖面线

以 $f(x_1, x_2)$ 二元函数为例，如果自变量 x_2 固定 $x_2 = c$，只有自变量 x_1 变化，$f(x_1, x_2 = c)$ 则相当于是 x_1 的一元函数。

图 22 中彩色曲线所示为 x_2 固定在几个具体值 c 时，$f(x_1, x_2 = c)$ 随 x_1 变化的剖面线。这些剖面线就是一元函数；利用一元函数性质，我们可以分析曲面在不同位置的变化趋势。

如图 23 所示，将一系列 $f(x_1, x_2 = c)$ 剖面线投影在 x_1y 平面上，给每条曲线涂上不同颜色，可以得到图 24。

此外，本书后文介绍的偏导数 (partial derivative) 就是研究这些剖面线的变化率的数学工具。

注意，通过剖面线得出的结论不能推广到整个二元函数。

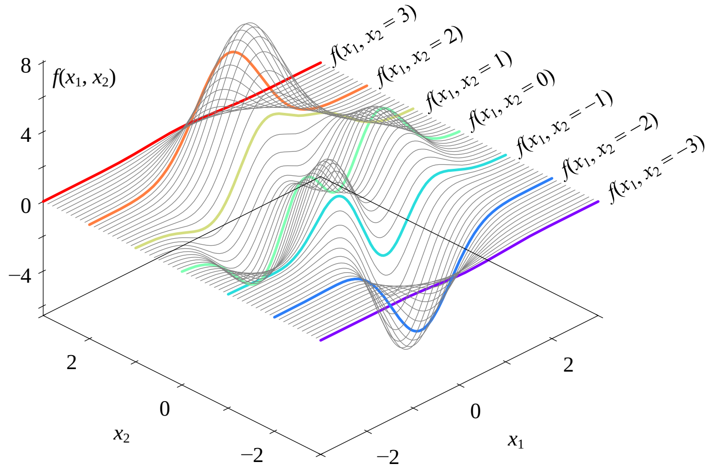


图 22. 自变量 x_2 固定，自变量 x_1 变化

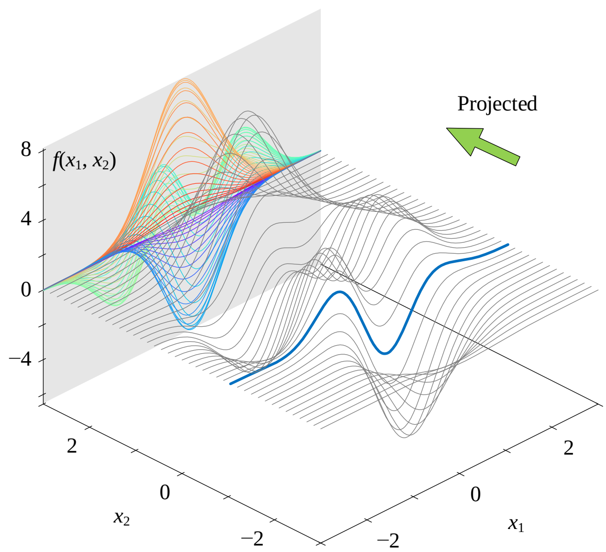


图 23. 将 $f(x_1, x_2)$ 剖面线投影到 x_1y 平面

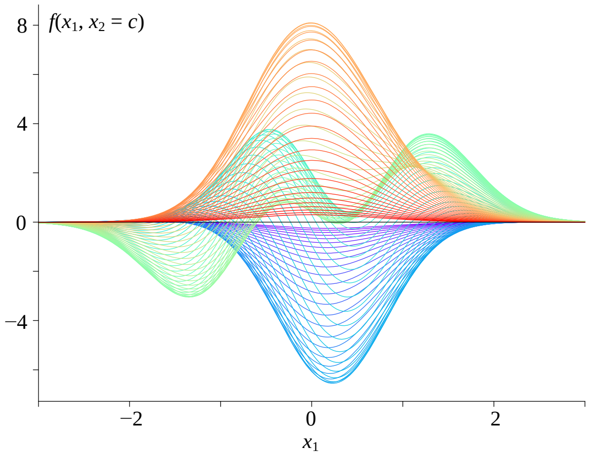


图 24. 剖面线在 x_1y 平面投影

配合前文代码，以下代码绘制图 22、图 23、图 24。

```
# Bk3_Ch10_02_B

#%% evaluate f(x1,x2) with x2 = c

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

ax.plot_wireframe(xx,yy, f_xy_zz,
                  color = [0.5,0.5,0.5],
                  rstride=5, cstride=0,
                  linewidth = 0.25)

# x2 = b

colors = plt.cm.rainbow(np.linspace(0,1,7))

i = 0

for b in [-3,-2,-1,0,1,2,3]:
    f_xy_b = f_xy.subs(y, b)

    print('==========')
    print('x_2 = %0.0f'%b)
    print('f(x1,x2 = %0.0f) = %s)'%(b,str(simplify(f_xy_b))))
    print('==========')

    f_xy_b_fcn = lambdify([x],f_xy_b)
    f_xy_b_zz = f_xy_b_fcn(x_array)

    ax.plot(x_array,x_array*0 + b,f_xy_b_zz,
            color = colors[i,:],
            label = '$x_2$ = %0.0f'%b)
    i = i + 1

plt.legend()
ax.set_proj_type('ortho')
ax.set_xlabel('$x$'); ax.set_ylabel('$y$')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())
```

```
ax.view_init(azim=-135, elev=30)
plt.tight_layout()
ax.grid(False)
plt.show()

#%% surface projected along Y to X-Z plane

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

ax.plot_wireframe(xx,yy, f_xy_zz,
                  rstride=5, cstride=0,
                  color = [0.5,0.5,0.5],
                  linewidth = 0.25)

ax.contour(xx,yy, f_xy_zz,
           levels = 60, zdir='y', \
            offset= yy.max(), cmap='rainbow')

ax.set_xlabel('$x$'); ax.set_ylabel('$y$')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
ax.set_proj_type('ortho')

ax.view_init(azim=-135, elev=30)
ax.grid(False)
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max()); ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())
# ax.set_zlim(0, 0.7)
plt.tight_layout()

plt.show()

# project down-sampled surface

down_step = 2;
y_array_downsample = y_array[0::down_step]

fig, ax = plt.subplots()

colors = plt.cm.rainbow(np.linspace(0,1,len(y_array_downsample)))

for i in np.linspace(1,len(y_array_downsample),len(y_array_downsample)):
    plt.plot(x_array,f_xy_zz[(int(i)-1)*down_step,:],
             color = colors[int(i)-1])

plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='-')
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)
plt.xlabel('$x_1$')
plt.ylabel('$f(x_1,x_2 = b)$')
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
```

x_2y 平面方向剖面线

自变量 x_1 固定，只有自变量 x_2 变化，则 $f(x_1, x_2)$ 相当于是 x_2 的一元函数。图 25 中彩色曲线所示为 x_1 固定在具体值 c 时，$f(x_1 = c, x_2)$ 随 x_2 变化。

如图 26 所示，将 $f(x_1 = c, x_2)$ 剖面线投影在 x_2y 平面上；给每条曲线涂上不同颜色，可以得到图 27。

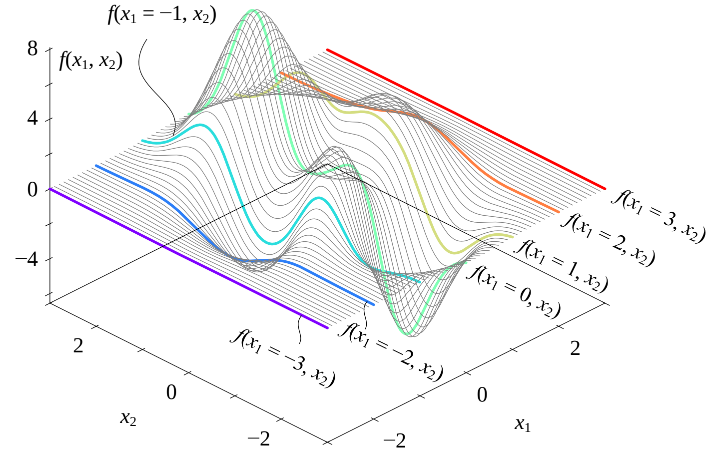


图 25. 自变量 x_1 固定，自变量 x_2 变化

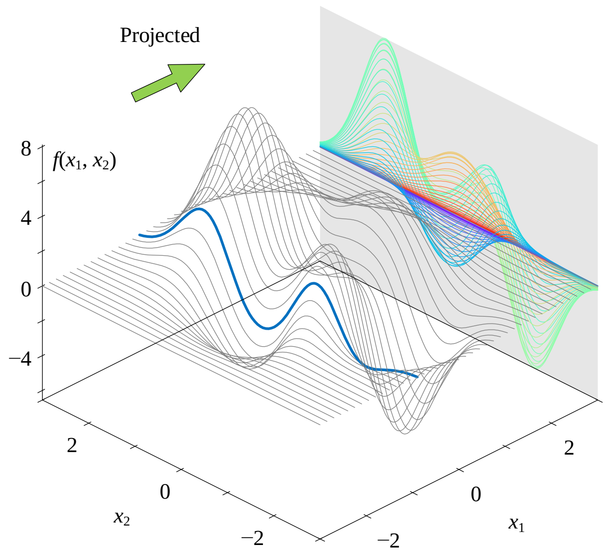


图 26. 将 $f(x_1, x_2)$ 剖面线投影到 x_2y 平面

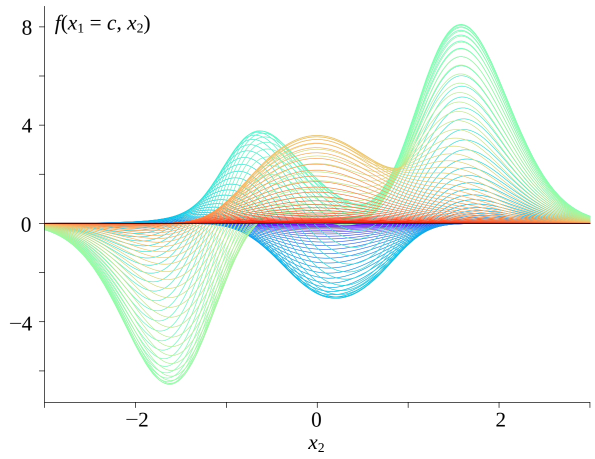


图 27. 剖面线在 x_2y 平面投影

配合前文代码，以下代码绘制图 25、图 26、图 27。

```
# Bk3_Ch10_02_C

#%% evaluate f(x1,x2) with x1 = a

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

ax.plot_wireframe(xx,yy, f_xy_zz,
                  color = [0.5,0.5,0.5],
                  rstride=0, cstride=5,
                  linewidth = 0.25)

# x1 = a

colors = plt.cm.rainbow(np.linspace(0,1,7))

i = 0

for a in [-3,-2,-1,0,1,2,3]:
    f_x_a_y = f_xy.subs(x, a)

    print('==========')
    print('x_1 = %0.0f'%a)
    print('f(x1 = %0.0f,x2) = %s)'%(a,str(simplify(f_x_a_y))))
    print('==========')

    f_x_a_y_fcn = lambdify([y],f_x_a_y)
    f_x_a_y_zz = f_x_a_y_fcn(y_array)

    ax.plot(y_array*0 + a,y_array,f_x_a_y_zz,
            color = colors[i,:],
            label = '$x_1$ = %0.0f'%a)
    i = i + 1


plt.legend()
ax.set_proj_type('ortho')
ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
```

```
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())
ax.view_init(azim=-135, elev=30)
plt.tight_layout()
ax.grid(False)
plt.show()


#%% surface projected along X to Y-Z plane

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

ax.plot_wireframe(xx,yy, f_xy_zz,
                  rstride=0, cstride=5,
                  color = [0.5,0.5,0.5],
                  linewidth = 0.25)

ax.contour(xx,yy, f_xy_zz,
           levels = 60, zdir='x', \
            offset= xx.max(), cmap='rainbow')

ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
ax.set_proj_type('ortho')
ax.view_init(azim=-135, elev=30)
ax.grid(False)
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())
plt.tight_layout()
plt.show()

# project down-sampled surface

down_step = 2;
x_array_downsample = x_array[0::down_step]

fig, ax = plt.subplots()

colors = plt.cm.rainbow(np.linspace(0,1,len(x_array_downsample)))

for i in np.linspace(1,len(x_array_downsample),len(x_array_downsample)):
    plt.plot(y_array,f_xy_zz[:,(int(i)-1)*down_step],
             color = colors[int(i)-1])
plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='-')
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)
plt.xlabel('$x_2$')
plt.ylabel('$f(x_1 = a,x_2)$')
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
```

10.6 等高线：由函数值相等点连成

把图 28 所示 $f(x_1, x_2)$ 曲面比作一座山峰，函数值越大，相当于山峰越高。图中用暖色色块表达山峰，用冷色色块表达洼地。

等高线

三维等高线 (contour line) 和平面等高线是研究二元函数重要的手段之一。上一章在讲不等式时，我们简单提过等高线。简单来说，曲面某一条等高线就是函数值 $f(x_1, x_2)$ 相同，即 $f(x_1, x_2) = c$ 的相邻点连接构成的曲线。

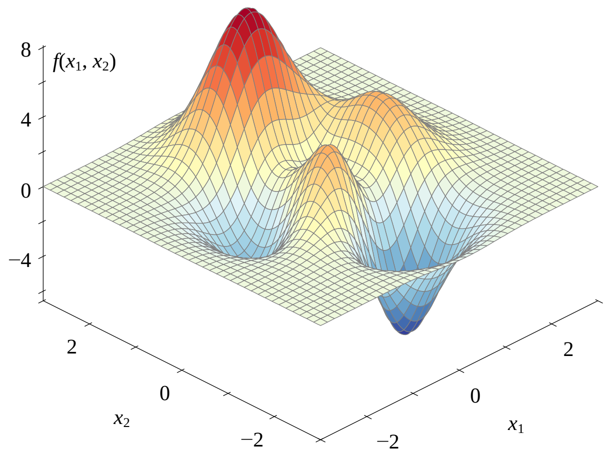


图 28. 用冷暖色表示函数的不同高度取值

当 c 取不同值时，便可以得到一系列对应不同高度的等高线，获得的图像便是三维等高线图，如图 29 所示彩色线。这些曲线可以是闭合曲线，也可以非闭合。

将这些曲线垂直投影到水平面上，得到平面等高线图。

生活中，等高线有很多其他形式，比如等温线、等压线、等降水线等等。

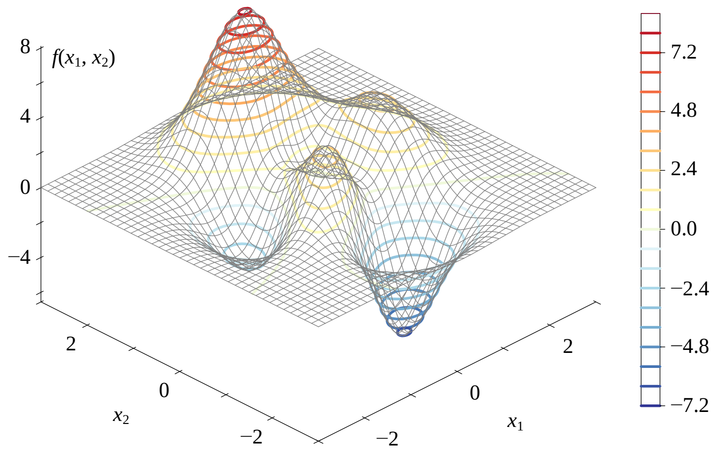


图 29. 二元函数三维等高线

图 30 所示 $f(x_1, x_2)$ 曲面等高线在 x_1x_2 平面上的投影结果。平面等高线图中，每条不同颜色的曲线代表一个具体函数取值；把二元函数比作山峰的话，等高线越密集的区域，坡度越陡峭。

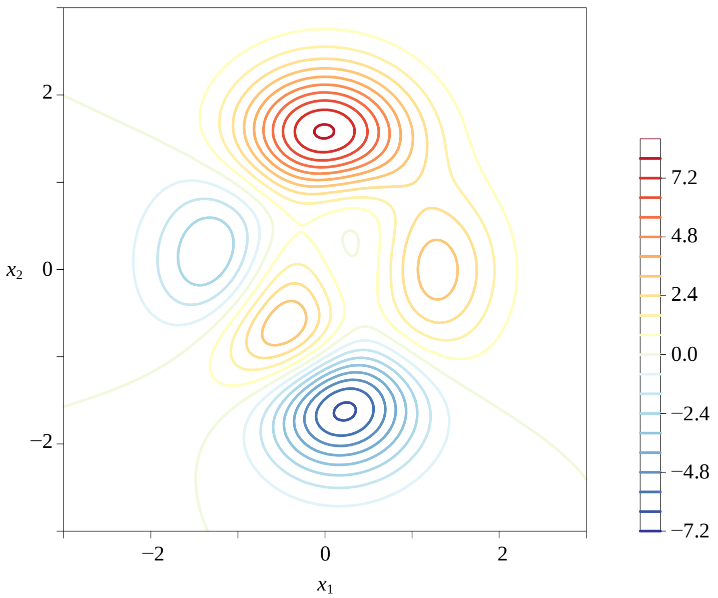


图 30. 二元函数的平面等高线

填充等高线

还可以使用填充等高线来可视化二元函数。

图 31 所示为 $f(x_1, x_2)$ 三维坐标系中在高度为 0 的水平面上得到平面填充等高线。图 32 就是填充等高线在 x_1x_2 平面上的投影结果。注意，同一个颜色色块代表函数范围在某一特定区间内 $[c_i, c_{i+1}]$。

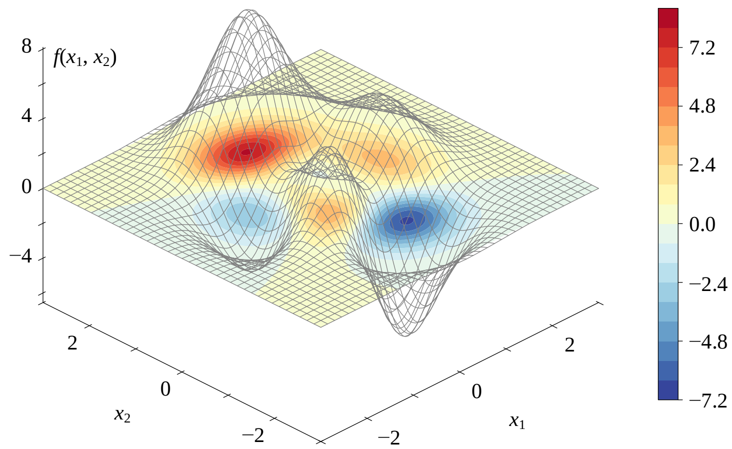


图 31. 三维曲面投影在水平面上得到平面填充等高线

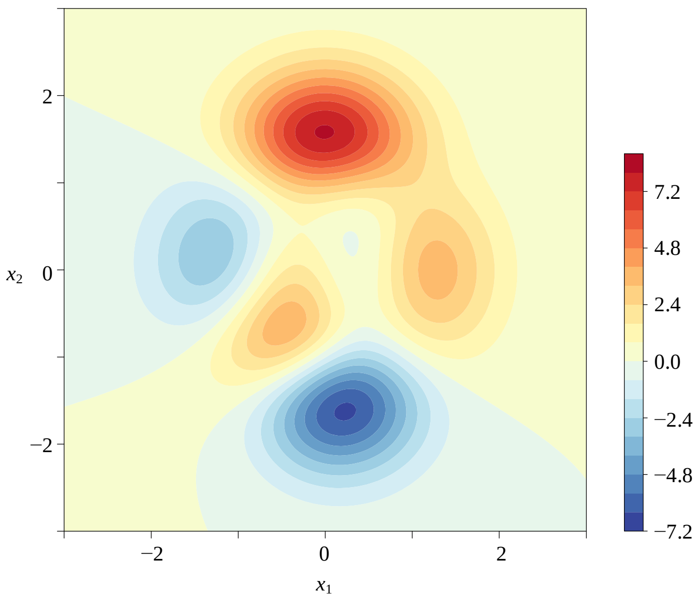


图 32. 平面填充等高线图

配合前文代码，以下代码绘制图 28 ~ 图 32。

```python
# Bk3_Ch10_02_D

#%% surface projected along Z to X-Y plane, contour

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

ax.plot_surface(xx,yy, f_xy_zz,
                cmap=cm.RdYlBu_r,
                rstride=5, cstride=5,
                linewidth = 0.25,
                edgecolors = [0.5,0.5,0.5])

ax.set_proj_type('ortho')

ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())
ax.view_init(azim=-135, elev=30)
plt.tight_layout()
ax.grid(False)
plt.show()

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

ax.plot_wireframe(xx,yy, f_xy_zz,
                  color = [0.5,0.5,0.5],
                  linewidth = 0.25)
```

```
colorbar = ax.contour(xx,yy, f_xy_zz,20,
             cmap = 'RdYlBu_r')

fig.colorbar(colorbar, ax=ax)

ax.set_proj_type('ortho')
ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
plt.tight_layout()
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())
ax.view_init(azim=-135, elev=30)
ax.grid(False)
plt.show()

fig, ax = plt.subplots()

colorbar = ax.contour(xx,yy, f_xy_zz, 20, cmap='RdYlBu_r')
fig.colorbar(colorbar, ax=ax)

ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())

ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')

plt.show()

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={'projection': '3d'})

ax.plot_wireframe(xx,yy, f_xy_zz,
                  rstride=5, cstride=5,
                  color = [0.5,0.5,0.5],
                  linewidth = 0.25)

colorbar = ax.contourf(xx,yy, f_xy_zz,
           levels = 20, zdir='z', \
            offset= 0, cmap='RdYlBu_r')

fig.colorbar(colorbar, ax=ax)

ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')
ax.set_zlabel('$f(x,y)$')
ax.set_proj_type('ortho')
# ax.set_xticks([])
# ax.set_yticks([])
# ax.set_zticks([])
ax.view_init(azim=-135, elev=30)
ax.grid(False)
ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())
# ax.set_zlim(0, 0.7)
plt.tight_layout()

plt.show()


fig, ax = plt.subplots()

colorbar = ax.contourf(xx,yy, f_xy_zz, 20, cmap='RdYlBu_r')
fig.colorbar(colorbar, ax=ax)

ax.set_xlim(xx.min(), xx.max())
ax.set_ylim(yy.min(), yy.max())

ax.set_xlabel('$x$')
ax.set_ylabel('$y$')
```

```
plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
plt.show()
```

没有坐标系，就没有函数。坐标系给函数以生命。希望大家，在学习任何函数时，首先想到的是求助于坐标系。

特别强调，在描绘函数形状和变化趋势时，千万不能按自己审美偏好"手绘"函数图像！函数图像必须通过编写代码绘制！

作者在很多数学教科书中，看到很多不负责任的"手绘"函数图像；特别不能容忍的是手绘高斯函数或高斯分布概率密度函数曲线，这简直就是暴殄天物！

哪怕技艺精湛，手绘函数也不能准确描绘函数的每一处细节。

即便是编程绘制的图像也不是百分之百准确无误，因为这些图像是散点连接而成的；只不过当这些点和点之间步长较小时，图像看上去连续光滑罢了。