

# 4 Matrix 矩阵

所有矩阵运算都是重要数学工具，都有应用场景



数字统治万物。

*Number rules the universe.*

—— 毕达哥拉斯 (Pythagoras) | 古希腊哲学家、数学家 | 570 ~ 495 BC



- ▶ `numpy.add()` 矩阵加法运算，等同于 `+`
- ▶ `numpy.array()` 构造多维矩阵/数组
- ▶ `numpy.linalg.det()` 计算行列式值
- ▶ `numpy.linalg.inv()` 计算矩阵逆
- ▶ `numpy.linalg.matrix_power()` 计算矩阵幂
- ▶ `numpy.matrix()` 构造二维矩阵
- ▶ `numpy.multiply()` 矩阵逐项积
- ▶ `numpy.ones()` 生成全 1 矩阵，输入为矩阵形状
- ▶ `numpy.ones_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的全 1 矩阵
- ▶ `numpy.subtract()` 矩阵减法运算，等同于 `-`
- ▶ `numpy.trace()` 计算矩阵迹
- ▶ `numpy.zeros()` 生成零矩阵，输入为矩阵形状
- ▶ `numpy.zeros_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的零矩阵
- ▶ `transpose()` 矩阵转置，比如 `A.transpose()`，等同于 `A.T`

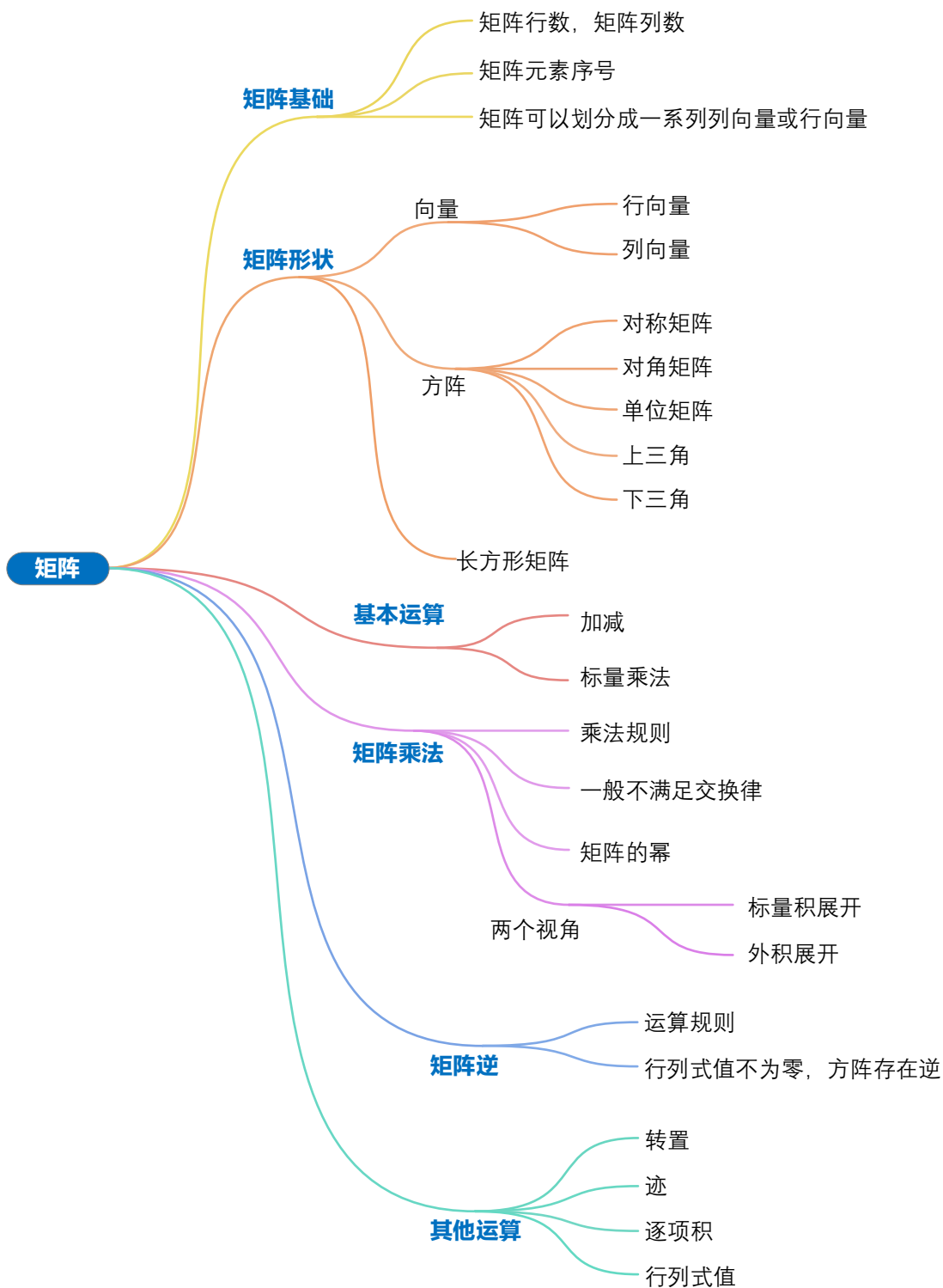
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



## 4.1 矩阵：元素按长方型阵列排列

再次强调，矩阵无非就是一个表格！

一般来说，矩阵是由标量组成的矩形阵列。但是，矩阵内的元素不仅仅局限于标量，也可以是虚数、符号，乃至数学式。

丛书矩阵通常由粗体斜体大写字母表示，比如  $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  等。一般用  $\mathbf{X}$  来表达原始样本数据矩阵。注意，如果是随机变量构成的列向量，本系列丛书会用希腊字母  $\boldsymbol{\chi}$ ，比如  $D$  维随机变量  $\boldsymbol{\chi} = [X_1, X_2, \dots, X_D]^T$ 。

如图 1 所示，一个  $n \times D$  ( $n$  by capital  $D$ ) 矩阵  $\mathbf{X}$ ，具体如下：

$$\mathbf{X}_{n \times D} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,D} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,D} \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中， $n$  是**矩阵行数** (number of rows in the matrix)， $D$  是**矩阵列数** (number of columns in the matrix)。

从数据角度， $n$  是样本个数， $D$  是样本数据特征数。比如，鸢尾花数据集，不考虑标签 (即鸢尾花三大类 setosa、versicolor、virginica)，数据集本身  $n = 150$ ， $D = 4$ 。本系列丛书《数学要素》一册专门聊过为什么会选择  $n$  和  $D$  这两个字母，这里就不再重复。

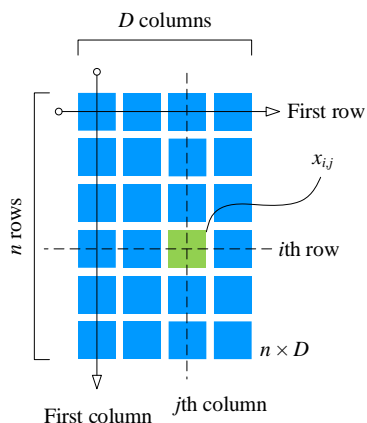


图 1.  $n \times D$  矩阵  $\mathbf{X}$

### 矩阵构造

矩阵  $X$  中，**元素** (element)  $x_{i,j}$  被称作  $(i, j)$  元素 ( $ij$  entry 或  $ij$  element);  $x_{i,j}$  出现在  $i$  行  $j$  列 (appears in row  $i$  and column  $j$ )。注意， $i$  和  $j$  的先后次序，先说行，再说列。

如图 2 所示，矩阵  $X$  可以看做是由一系列行向量或列向量按照一定规则构造而成。比如，矩阵  $X$  可以写成一组上下叠放的行向量：

$$X_{n \times D} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,D} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,D} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中，行向量  $\mathbf{x}^{(i)}$  为矩阵  $X$  第  $i$  行，具体为：

$$\mathbf{x}^{(i)} = [x_{i,1} \quad x_{i,2} \quad \cdots \quad x_{i,D}] \quad (3)$$

重要的事情多说几遍，以鸢尾花数据集为例，它的每一行代表一朵花。

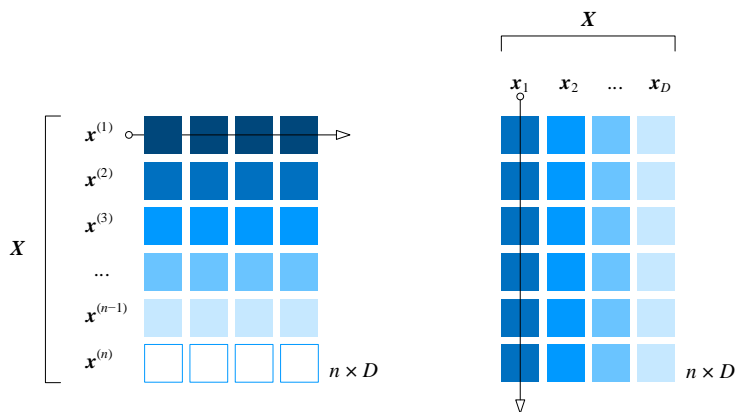


图 2. 矩阵可以看做是由行向量或列向量构造

矩阵  $X$  也可以写成一组左右放置的列向量：

$$X_{n \times D} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_D] = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,D} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,D} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中，列向量  $\mathbf{x}_j$  为矩阵  $X$  第  $j$  列：

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{bmatrix} \quad (5)$$

还是以鸢尾花数据集为例，它的每一列代表一个特征，比如花萼长度。

再次强调，一般情况，本书默认向量为列向量，除非具体说明。

实际上，上述思路是用纵线或横线将矩阵划分成**分块矩阵** (block matrix)。分块矩阵有助于简化矩阵运算，本书后续会深入介绍分块矩阵相关内容。



Bk4\_Ch4\_01.py 用不同方式构造矩阵。

注意，`numpy.matrix()` 和 `numpy.array()` 都可以构造矩阵。但是两者结果有显著区别。`numpy.matrix()` 产生的数据类型是严格的 2 维 `<class 'numpy.matrix'>`；而 `numpy.array()` 产生的数据可以是 1 维、2 维、乃至  $n$  维，类型统称为 `<class 'numpy.ndarray'>`。

此外，在乘法和乘幂运算时，这两种不同方式构造的矩阵也会有明显差别，本章后续将逐步介绍。

```
# Bk4_Ch4_01.py
import numpy as np

# 2d matrix
A_matrix = np.matrix([[2,4],
                      [6,8]])
print(A_matrix.shape)
print(type(A_matrix))

# 1d array
A_1d = np.array([2,4])
print(A_1d.shape)
print(type(A_1d))

# 2d array
A_2d = np.array([[2,4],
                 [6,8]])
print(A_2d.shape)
print(type(A_2d))

# 3d array
A1 = [[2,4],
      [6,8]]

A2 = [[1,3],
      [5,7]]

A3 = [[1,0],
      [0,1]]
A_3d = np.array([A1,A2,A3])
print(A_3d.shape)
print(type(A_3d))
```

## 4.2 矩阵形状：每种形状都有特殊用途

矩阵形状对于矩阵运算至关重要。本书之前介绍的**行向量** (row vector) 和**列向量** (column vector) 也是特殊形状的矩阵。稍作回顾，行向量可以看做一行多列的矩阵，列向量是一列多行矩阵。

图 3 总结几种常见矩阵形状，本节逐一讲解。

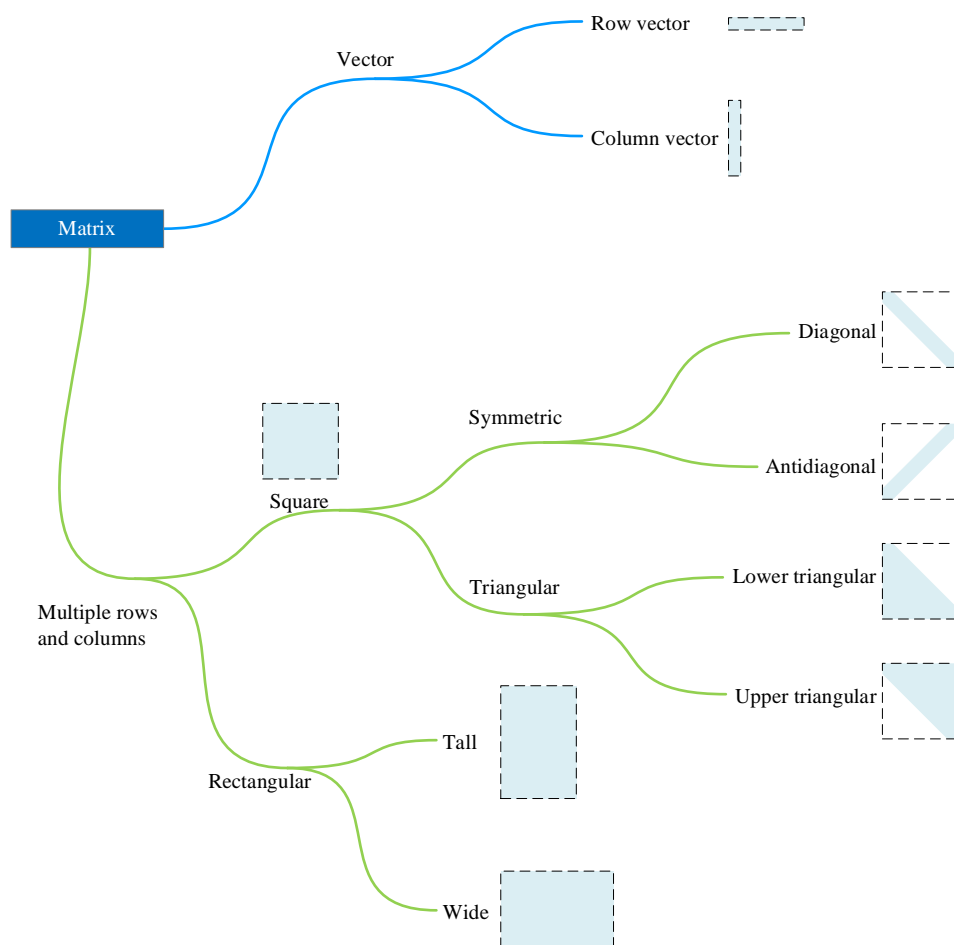


图 3. 几种常见矩阵形状

### 方阵

**方阵** (square matrix) 指的是行列数相等的矩阵。 $n \times n$  矩阵被称作  **$n$  阶方阵** (n-square matrix)。

**对称矩阵** (symmetric matrix) 是一种特殊方阵。对称矩阵的右上和左下方向元素以**主对角线** (main diagonal) 镜像对称。主对角线和**副对角线** (antidiagonal, secondary diagonal, minor diagonal) 的位置如图 4 所示。

对称矩阵**转置** (transpose) 结果为本身，比如满足下式的矩阵  $A$  便是对称矩阵：

$$A = A^T \quad (6)$$

本章后续将详细介绍转置运算。

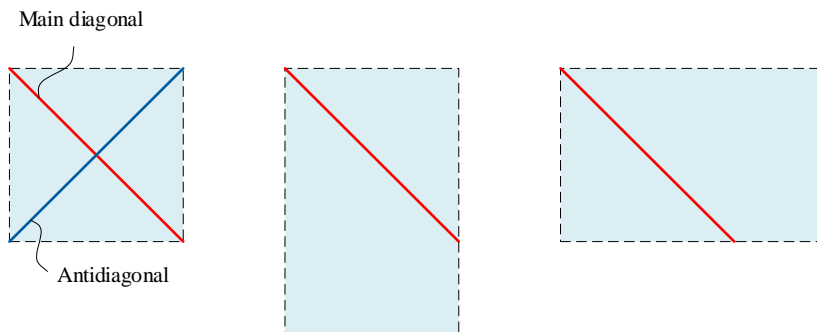


图 4. 主对角线和副对角线

## 对角矩阵

**对角矩阵** (diagonal matrix) 是主对角线之外的元素皆为 0 (its non-diagonal entries of a square matrix are all zero) 的矩阵，比如下例：

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

图 5 比较对称矩阵和对角矩阵。

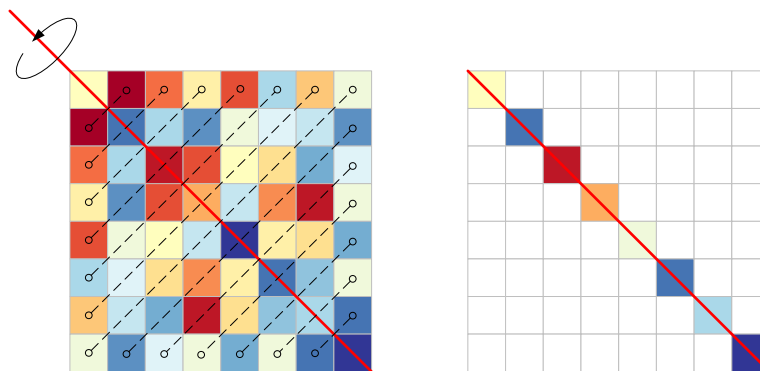


图 5. 对称矩阵和对角矩阵之间关系

请读者注意，不加说明时，本书中的对角矩阵都是方阵；但是，对角矩阵也可以是长方形矩阵，比如下两例：

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

**副对角矩阵** (anti-diagonal matrix) 是副对角线之外元素皆为 0 的矩阵。

本书还常用 `diag()` 函数。如图 6 所示, `diag(A)` 提取矩阵 **A** 主对角线元素, 结果为列向量。`diag(a)` 将向量 **a** 展成对角阵 **B**, **B** 主对角线元素依次为向量 **a** 元素。

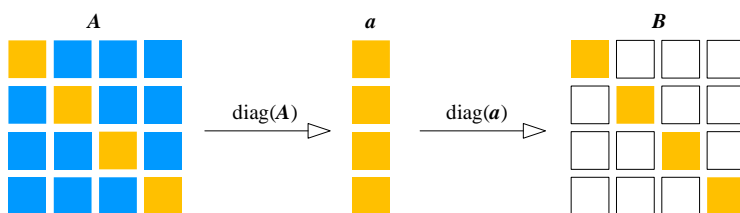


图 6. `diag()` 函数

Python 中, 完成 `diag()` 函数为 `numpy.diag()`。注意, `numpy.diag(A)` 提取矩阵 **A** 对角线元素, 结果为一维数组, 形似行向量。



Bk4\_Ch4\_02.py 展示如何使用 `numpy.diag()`。

```
# Bk4 Ch4 02.py
import numpy as np

A = np.matrix([[1,2,3],
               [4,5,6],
               [7,8,9]])

# extract diagonal elements
a = np.diag(A)

# construct a diagonal matrix
A_diag = np.diag(a)
```

## 单位矩阵

**单位矩阵** (identity matrix) 是一种特殊对角矩阵。 $n$  阶单位矩阵 ( $n$ -square identity matrix) 的特点是  $n \times n$  方阵对角线上的元素为 1, 其他为 0; 本书中, 单位矩阵用 **I** 来表达:



$$\mathbf{I}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

也有很多文献用  $\mathbf{E}$  代表单位矩阵。

### 三角矩阵

**三角矩阵** (triangular matrix) 也是特殊的方阵。如果方阵对角线以下元素均为零，这个矩阵被称作**上三角矩阵** (upper triangular matrix)：

$$\mathbf{U}_{n \times n} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

如果方阵对角线以上元素均为零，这个矩阵被称作**下三角矩阵** (lower triangular matrix)：

$$\mathbf{L}_{n \times n} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix} \quad (11)$$

提一嘴，如果矩阵  $\mathbf{A}$  为**可逆矩阵** (invertible matrix, non-singular matrix)， $\mathbf{A}$  可以通过 LU 分解变成一个下三角矩阵  $\mathbf{L}$  与一个上三角矩阵  $\mathbf{U}$  的乘积。本书后续将介绍包括 LU 分解在内的各种常见矩阵分解。

### 长方形矩阵

**长方形矩阵** (rectangular matrix) 是指行数和列数不相等的矩阵，可以是“细高”或“宽矮”。常见的数据矩阵几乎都是“细高”长方形矩阵，形状类似图 1。

计算时，长方形矩阵的形状并不“友好”。大家将会在矩阵乘法等内容中看到，我们会通过数学运算现将长方形矩阵“变成”方阵，再进行下一步运算，比如矩阵分解。

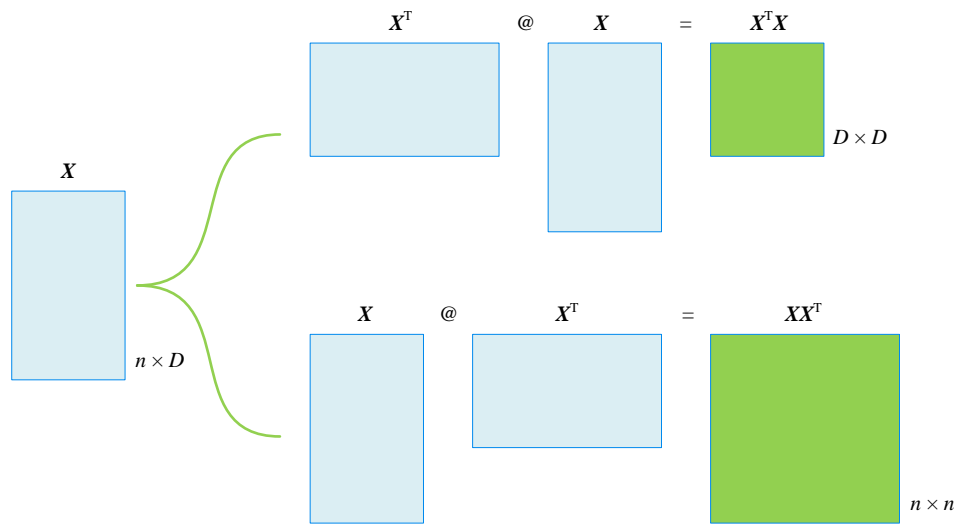


图 7. 将长方形矩阵变成方阵

图 7 所示为将细高数据矩阵  $X$  变成两个不同方阵的矩阵乘法运算过程。得到的结果叫格拉姆矩阵 (Gram matrix)，这是本书后文要专门讲解的内容。

多说一嘴，处理长方形矩阵有一个利器，这就是宇宙无敌的奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD)，也称 SVD 分解。SVD 分解时本书后面最重要的矩阵分解，没有之一。请大家格外关注。

## 4.3 基本运算：加减和标量乘法

### 矩阵加减

两个相同大小的矩阵  $A$  和  $B$  相加，指的是把这两个矩阵对应位置元素分别相加，具体如下：

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (12)$$

矩阵**加法交换律** (commutative property) 指的是：

$$A + B = B + A \quad (13)$$

矩阵**加法结合律** (associative property) 指的是：

$$A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C \quad (14)$$

矩阵减法的运算规则和加法一致。

## 零矩阵

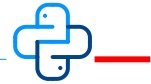
丛书用  $\mathbf{O}$  表示元素全为 0 的矩阵，即**零矩阵** (zero matrix)。

零矩阵具有以下性质：

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (15)$$

`numpy.zeros()` 用来生成零矩阵，输入为矩阵形状；`numpy.zeros_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的零矩阵。

类似地，`numpy.ones()` 可以生成全 1 矩阵，输入为矩阵形状；`numpy.ones_like()` 用来生成和输入矩阵形状相同的全 1 矩阵。



Bk4\_Ch4\_04.py 介绍如何完成矩阵加减法运算。

```
# Bk4_Ch4_03.py
import numpy as np

# define matrix
A = np.matrix([[1, 2], [3, 4]])
B = np.matrix([[2, 6], [4, 8]])

# matrix addition
A_plus_B = np.add(A,B)
A_plus_B_2 = A + B

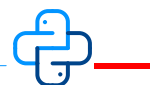
# matrix subtraction
A_minus_B = np.subtract(A,B)
A_minus_B_2 = A - B
```

## 矩阵标量乘法

矩阵的**标量乘法** (scalar multiplication) 指的是，矩阵乘以某一标量，矩阵的每一个元素均乘以该标量。

矩阵  $\mathbf{X}$  和标量  $k$  的乘积 (the product of the matrix  $\mathbf{X}$  by a scalar  $k$ ) 写作  $k\mathbf{X}$ ：

$$k\mathbf{X} = \begin{bmatrix} k \cdot x_{1,1} & k \cdot x_{1,2} & \cdots & k \cdot x_{1,D} \\ k \cdot x_{2,1} & k \cdot x_{2,2} & \cdots & k \cdot x_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot x_{n,1} & k \cdot x_{n,2} & \cdots & k \cdot x_{n,D} \end{bmatrix} \quad (16)$$



Bk4\_Ch4\_04.py 如何进行矩阵标量乘法。

```
# Bk4_Ch4_04.py
import numpy as np

k = 2
X = [[1,2],
      [3,4]]

# scalar multiplication
k_times_X = np.dot(k,X)
k_times_X_2 = k*np.matrix(X)
```

## 4.4 广播原则

NumPy 中的矩阵运算常常使用**广播原则** (broadcasting)。当两个数组的形状并不相同的时候，可以通过扩展数组的方法来实现相加、相减等操作。

### 矩阵和标量之和

图 8 所示为，一个矩阵  $A$  和标量  $k$  之和，相当于矩阵  $A$  的每一个元素加  $k$ 。比如，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + 2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+2 \\ 3+2 & 4+2 \\ 5+2 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (17)$$

上述运算规则也适用于减法。

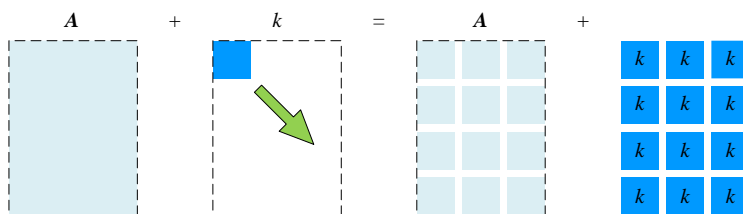


图 8. 广播原则，矩阵加标量

### 矩阵和列向量之和

一个矩阵  $A$  和列向量  $c$  相加，前提是的  $A$  行数和  $c$  行数相同。

如图 9 所示，矩阵  $A$  和列向量  $c$  相加，相当于  $A$  的每一列和  $c$  相加。另外一个视角，列向量  $c$  首先自我复制，左右排列得到和  $A$  形状相同的矩阵，再和  $A$  相加。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+3 \\ 3+2 & 4+2 \\ 5+1 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (18)$$

上述规则也同样适用于减法。

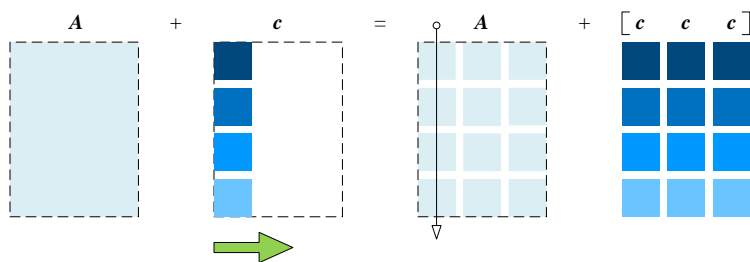


图 9. 广播原则，矩阵加列向量

### 矩阵和行向量之和

同理，一个矩阵  $A$  和行向量  $r$  相加，前提是的  $A$  列数和  $r$  列数相同。如图 10 所示，矩阵  $A$  和行向量  $r$  相加，相当于  $A$  的每一行和  $r$  相加。

另外一个视角，行向量  $r$  首先自我复制，上下叠加得到和  $A$  形状相同的矩阵，再和  $A$  相加：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 3+2 & 4+1 \\ 5+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \quad (19)$$

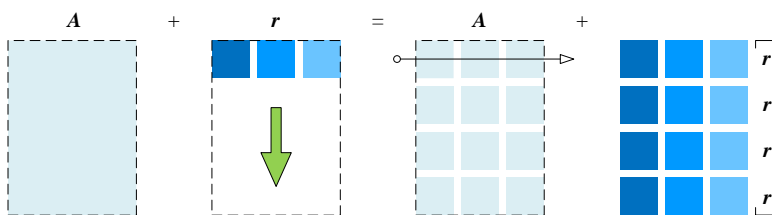


图 10. 广播原则，矩阵加行向量

### 列向量和行向量之和

利用广播原则，列向量可以和行向量相加。

如图 11 所示，列向量  $c$  自我复制，左右排列得到矩阵和  $r$  的列数一致；行向量  $r$  自我复制，上下叠加得到矩阵和  $c$  的行数一致。然后完成加法运算，

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 3+1 \\ 2+2 & 2+1 \\ 1+2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

调转行、列向量顺序，不影响结果。

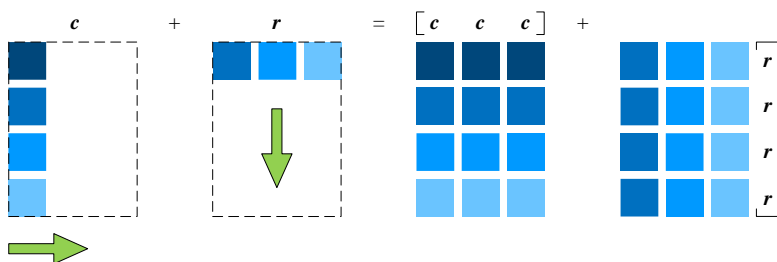


图 11. 广播原则，列向量加行向量



Bk4\_Ch4\_05.py 完成上述所示广播原则计算。此外，请大家把加号改成减号，验证广播原则在减法上的运算。

```
# Bk4_Ch4_05.py
import numpy as np

# define matrix
A = np.matrix([[1, 2],
               [3, 4],
               [5, 6]])

# scaler
k = 2;

# column vector c
c = np.array([[3],
              [2],
              [1]])

# row vector r
r = np.array([[2, 1]])

# broadcasting principles

# matrix A plus scalar k
A_plus_k = A + k

# matrix A plus column vector c
A_plus_a = A + c

# matrix A plus row vector r
A_plus_r = A + r

# column vector c plus row vector r
c_plus_r = c + r
```

## 4.5 矩阵乘法：线性代数的核心运算规则

法国数学家，雅克·菲利普·玛丽·比奈 (Jacques Philippe Marie Binet) 在 1812 年首先提出矩阵乘法运算规则。

毫不夸张地说，**矩阵乘法** (matrix multiplication) 在各种矩阵运算中居于核心地位，规则本身就是一项人类伟大创造！

矩阵  $A$  的列数等于矩阵  $B$  的行数， $A$  和  $B$  两个矩阵可以相乘。如果，矩阵  $A$  的形状是  $n \times D$ ，矩阵  $B$  的形状是  $D \times m$ ，两个矩阵的乘积  $C = AB$  的形状是  $n \times m$ ：

$$C_{n \times m} = A_{n \times D} B_{D \times m} = A_{n \times D} @ B_{D \times m} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,m} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,m} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中，

$$A_{n \times D} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,D} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,D} \end{bmatrix}, \quad B_{D \times m} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{D,1} & b_{D,2} & \cdots & b_{D,m} \end{bmatrix} \quad (22)$$

为了配合 NumPy 计算，丛书利用 @ 表达矩阵乘法运算符。

### 矩阵乘法规则

$C$  的  $(i, j)$  元素通过  $A$  第  $i$  行元素分别乘以  $B$  的第  $j$  列元素，再求和得到：

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,D}b_{D,j} \quad (23)$$

用矩阵乘法来表达上式，即，

$$c_{i,j} = \mathbf{a}^{(i)} \mathbf{b}_j \quad (24)$$

其中， $\mathbf{a}^{(i)}$  是  $A$  第  $i$  行元素构成的行向量， $\mathbf{b}_j$  是  $B$  的第  $j$  列元素构成的列向量。它俩的元素个数都是  $D$  个。这是理解矩阵乘法的第一视角，下一节我们会从两个不同视角来看矩阵乘法。此外，本书在分块矩阵一章中，会介绍更多视角。

(24) 也可以写成两个列向量的向量内积，即，

$$c_{i,j} = \mathbf{a}^{(i)\top} \mathbf{b}_j \quad (25)$$

图 12 所示为矩阵乘法规则示意图。

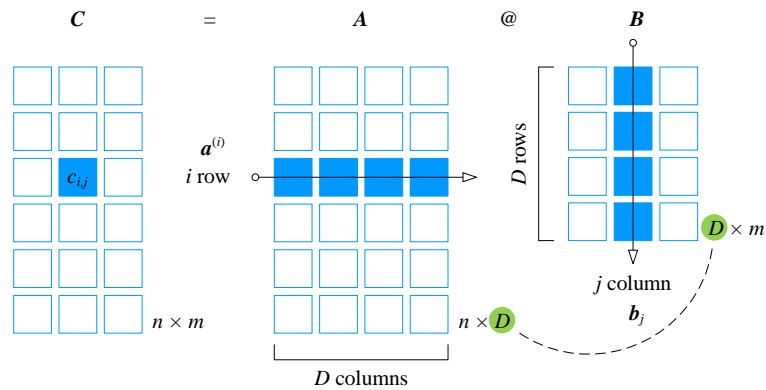


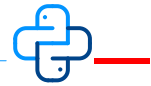
图 12. 矩阵乘法规则

一般情况，矩阵乘法不满足交换律：

$$AB \neq BA \quad (26)$$

另外，请读者注意以下矩阵乘法规则：

$$\begin{aligned} ABC &= A(BC) = (AB)C \\ k(AB) &= (kA)B = A(kB) = (AB)k \\ A(B+C) &= AB + AC \end{aligned} \quad (27)$$



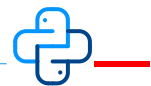
Bk4\_Ch4\_06.py 介绍在 Numpy 中如何进行矩阵乘法运算。

```
# Bk4_Ch4_06.py
import numpy as np

A = np.array([[1, 2],
              [3, 4]])

B = np.array([[2, 4],
              [1, 3]])

# matrix multiplication
A_times_B = np.matmul(A, B)
A_times_B_2 = A@B
```



值得注意的是，对于两个由 `numpy.array()` 产生的数据，使用 `*` 相乘，得到的乘积是对应元素分别相乘，广播法则有效；而两个由 `numpy.matrix()` 产生的数据，使用 `*` 相乘，则得到结果等同于 `@`。如果，分别由 `numpy.array()` 和 `numpy.matrix()` 产生的数据，使用 `*` 相乘，则等同于 `@`。



请读者运行 Bk4\_Ch4\_07.py 给出的三个乘法例子，自行比较结果。

```
# Bk4_Ch4_07.py
import numpy as np

A = np.array([[1, 2]])
B = np.array([[5, 6],
              [8, 9]])

print(A*B)

A = np.array([[1, 2]])
B = np.matrix([[5, 6],
               [8, 9]])

print(A*B)

A = np.matrix([[1, 2]])
B = np.matrix([[5, 6],
               [8, 9]])

print(A*B)
```

## 矩阵的幂

$n$  阶方阵 ( $n$ -square matrix)  $A$  的**矩阵的幂** (powers of matrices) 的幂为：

$$\begin{aligned} A^0 &= I \\ A^1 &= A \\ A^2 &= AA \\ A^{n+1} &= A^n A \end{aligned} \tag{28}$$



Bk4\_Ch4\_08.py 展示如何计算矩阵幂。

```
# Bk4_Ch4_08.py
from numpy.linalg import matrix_power as pw
A = np.array([[1., 2.],
              [3., 4.]])

# matrix inverse
A_3 = pw(A,3)
A_3_v3 = A@A@A

# piecewise power
A_3_piecewise = A**3
```



乘幂运算符\*\*对 `numpy.array()` 和 `numpy.matrix()` 生成的数据有不同的运算规则。`numpy.matrix()` 生成矩阵 A, `A**2`, 是矩阵乘幂; `numpy.array()` 生成的矩阵 B, `B**2` 是对元素分别平方。请读者比较 `Bk4_Ch4_09.py` 给出的两个例子。

```
# Bk4_Ch4_09.py
import numpy as np

A = np.matrix([[1,3],
               [2,4]])

print(A**2)

B = np.array([[1,3],
              [2,4]])

print(B**2)
```

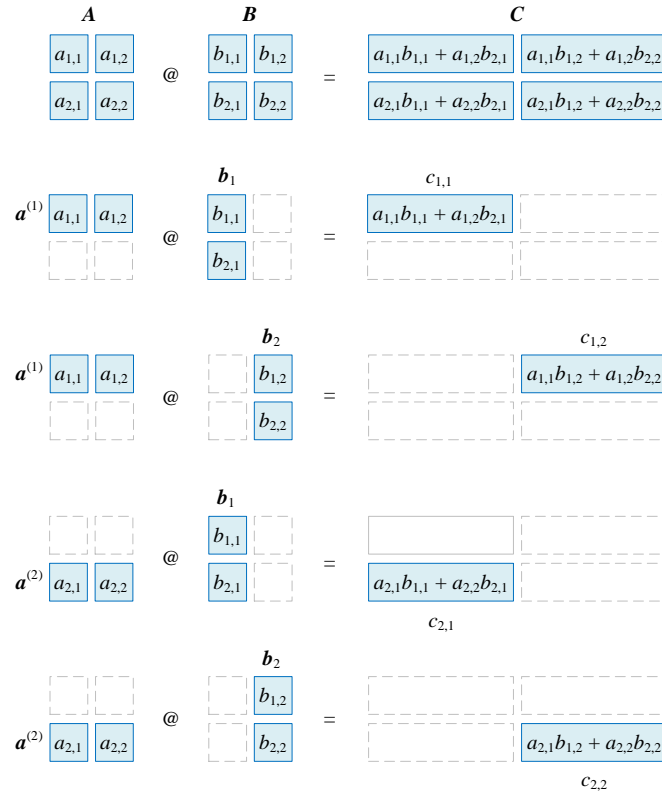
## 4.6 两个视角解剖矩阵乘法

为了更好地理解矩阵乘法, 我们用两个  $2 \times 2$  矩阵相乘来讲解:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{AB} &= \mathbf{A} @ \mathbf{B} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{29}$$

图 13 所示为两个  $2 \times 2$  矩阵相乘如何得到结果的每一个元素。

下面, 我们从两个视角来剖析矩阵乘法。这部分内容虽然在本系列丛书《数学要素》一册已经讲过一遍, 为了加强大家对矩阵乘法理解, 请学过的读者也耐心把本节内容扫读一遍。

图 13. 矩阵乘法规则，两个  $2 \times 2$  矩阵相乘为例

## 第一视角

第一视角是矩阵运算的常规视角，也叫做标量积展开。

如图 13 所示，矩阵乘法  $AB$  中，位于左侧的  $A$  写成一组行向量；位于右侧的  $B$  写成一组列向量。

$A$  的第  $i$  行  $a^{(i)}$  乘以  $B$  的第  $j$  列  $b_j$ ，得到乘积  $C$  的  $(i, j)$  元素  $c_{ij}$ ：

$$\begin{aligned}
 AB = A @ B &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} @ \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \begin{bmatrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \\
 &= \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{bmatrix}_{2 \times 1} [b_1 \quad b_2]_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} a^{(1)}b_1 & a^{(1)}b_2 \\ a^{(2)}b_1 & a^{(2)}b_2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{30}$$

## 第二视角

矩阵乘法的第二视角叫做外积展开。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

将矩阵乘法  $AB$  中，位于左侧的  $A$  写成一组列向量；位于右侧的  $B$  写成一组行向量。如下所示，我们把  $AB$  展开写成矩阵加法：

$$\begin{aligned}
 AB &= A @ B = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}_{1 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \end{bmatrix}_{2 \times 1} = a_1 b^{(1)} + a_2 b^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} @ \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \end{bmatrix}_{1 \times 2} + \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 1} @ \begin{bmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}_{1 \times 2} \quad (31) \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

观察矩阵乘法的这两个视角十分重要，本书下文还将深入探讨，并介绍更多视角。

## 4.7 转置：绕主对角线镜像

矩阵的行列互换得到的新矩阵的操作为**矩阵转置** (matrix transpose)。

如图 14 所示，一个  $n \times D$  矩阵  $A$  转置得到  $D \times n$  矩阵  $B$ ，整个过程相当于矩阵  $A$  绕主对角线镜像。矩阵  $A$  的转置 (the transpose of a matrix  $A$ ) 记作  $A^T$  或  $A'$ 。注意，为了和求导记号区分，本书仅采用  $A^T$  记法。

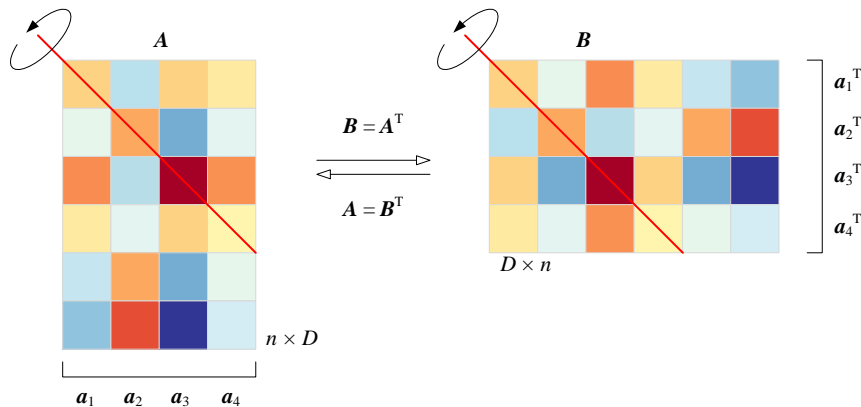


图 14. 矩阵转置

如图 14 所示，将矩阵  $A$  写成一组列向量：

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] \quad (32)$$

矩阵  $A$  转置  $A^T$  可以展开写作：

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \\ a_4^T \end{bmatrix} \quad (33)$$

如上文所述，一个  $n \times D$  矩阵  $A$  转置结果为自身，则称矩阵**对称** (symmetric)：

$$A = A^T \quad (34)$$

我们常用的一个对称矩阵就是列向量和自身的张量积，比如  $a \otimes a$ 。

矩阵转置的几个重要性质如下：

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A \\ (A+B)^T &= A^T + B^T \\ (kA)^T &= kA^T \\ (AB)^T &= B^T A^T \\ (ABC)^T &= C^T B^T A^T \\ (A_1 A_2 A_3 \cdots A_k)^T &= A_k^T \cdots A_3^T A_2^T A_1^T \end{aligned} \quad (35)$$

等长列向量  $a$  和  $b$  的标量积等价于  $a$  的转置乘  $b$ ，或  $b$  的转置乘  $a$ ：

$$a \cdot b = a^T b = b^T a = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \quad (36)$$

$a$  的模 ( $L^2$  范数) 也可以写成  $a$  转置乘自身，再开方：

$$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a^T a} \quad (37)$$



Bk4\_Ch4\_10.py 计算矩阵转置。

```
# Bk4_Ch4_10.py
import numpy as np

A = np.array([[1, 2],
              [3, 4],
              [5, 6]])

# matrix transpose
A_T = A.transpose()
A_T_2 = A.T
```

## 4.8 矩阵逆：相当于除法运算

方阵  $A$  如果**可逆** (invertible)，仅当存在矩阵  $B$  使得：

$$AB = BA = I \quad (38)$$

矩阵  $A$  的**逆** (inverse) 写作  $A^{-1}$ 。矩阵可逆 (invertible) 也称**非奇异** (non-singular)；否则就称矩阵不可逆 (non-invertible)，或奇异 (singular)。

请读者注意以下和矩阵逆有关的运算规则：

$$\begin{aligned} (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ (ABC)^{-1} &= C^{-1}B^{-1}A^{-1} \\ (kA)^{-1} &= \frac{1}{k}A^{-1} \end{aligned} \quad (39)$$

其中，假设  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $AB$  和  $ABC$  逆运算存在。

一般情况，

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1} \quad (40)$$

特别地，对于任意  $2 \times 2$  矩阵  $A$ ：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (41)$$

矩阵  $A$  的逆  $A^{-1}$  可以通过下式获得，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (42)$$

其中

$$|A| = ad - bc \quad (43)$$

$|A|$  被称作矩阵  $A$  **行列式** (determinant)。

注意，行列式值  $|A|$  不为 0 时，矩阵  $A$  才存在逆。本章后续将详细讲解行列式值计算。

若下式成立，如果矩阵  $A$  是**正交矩阵** (orthogonal matrix)：

$$A^T = A^{-1} \quad (44)$$

本书后续还将深入探讨正交矩阵的性质和应用，本节不做展开。

Bk4\_Ch4\_11.py 展示如 Numpy 如何矩阵逆。



```
# Bk4_Ch4_11.py

from numpy.linalg import inv
A = np.array([[1., 2.],
              [3., 4.]])

# matrix inverse
A_inverse = inv(A)
A_times_A_inv = A@A_inverse
```



注意，对于 `numpy.matrix()` 产生的矩阵 `A`，可以通过 `A.I` 计算矩阵 `A` 的逆，比如 `Bk4_Ch4_12.py` 给出的例子。但是，这一方法不能使用在 `numpy.array()` 生成的矩阵。`numpy.array()` 生成的矩阵求逆，可以使用 `numpy.linalg.inv()`。

```
# Bk4_Ch4_12.py

import numpy as np

A = np.matrix([[1, 2],
               [3, 4]])

print(A.I)

B = np.array([[1, 2],
              [3, 4]])

print(B.I)
```

## 4.9 迹：主对角元素之和

$n \times n$  矩阵  $A$  的迹 (trace) 为其主对角线元素之和：

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n} \quad (45)$$

举个例子，

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = 1 + 2 + 3 = 6 \quad (46)$$

一个矩阵的迹是其特征值的总和，这个重要的性质，我们会在主成分分析中看到它的应用。



Bk4\_Ch4\_13.py 介绍如何计算矩阵的迹。

```
# Bk4_Ch4_13.py
import numpy as np
A = np.array([[1, -1, 0],
              [3, 2, 4],
              [-2, 0, 3]])

# calculate trace of A
tr_A = np.trace(A)
```

请大家注意以下有关矩阵迹的性质：

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B}) \\ \operatorname{tr}(k\mathbf{A}) &= k \cdot \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T) &= \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \\ \operatorname{tr}(\mathbf{AB}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{BA})\end{aligned}\quad (47)$$



本系列丛书后续会介绍协方差矩阵 (covariance matrix) 可以用椭圆来表达。举个例子，给定一个协方差矩阵为：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \quad (48)$$

图 15 左图就是代表上述协方差矩阵的椭圆，即旋转椭圆。

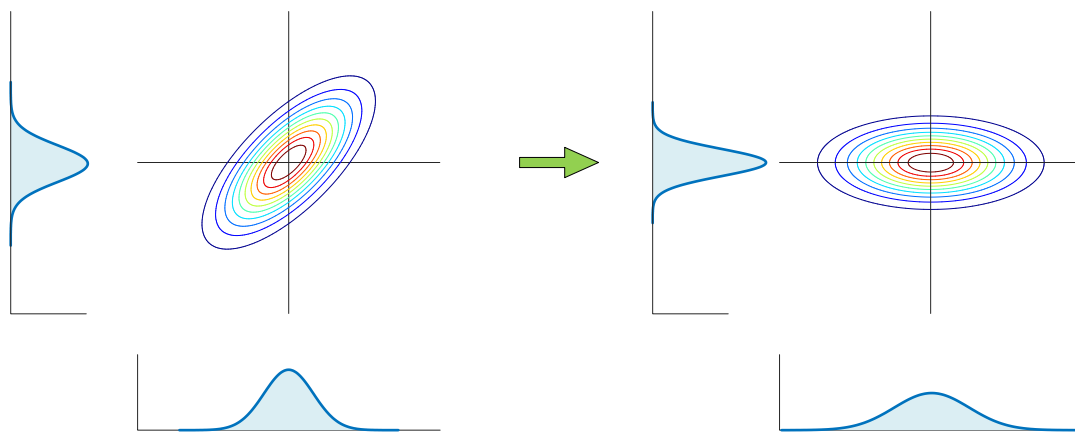


图 15. 协方差矩阵和椭圆关系

经过旋转操作，椭圆的长轴和横轴重合，得到图 15 右图椭圆，即正椭圆，对应的协方差矩阵为：



$$\Sigma_{\text{rotated}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

相信大家已经注意到，两个协方差矩阵的迹相同，都是 5！这一点非常重要，本系列丛书后续会在不同板块中探讨。

大家可能会问，两个协方差矩阵之间有怎样的联系？或者说，如何从 (48) 计算得到 (49)？椭圆之间的旋转角度怎么确定？本书后续介绍的特征值分解将回答这些疑问。

## 4.10 逐项积：对应元素相乘

在讲解向量运算时，我们介绍过**元素乘积** (element-wise multiplication)，也称为**阿达玛乘积** (Hadamard product) 或**逐项积** (piecewise product)。

逐项积常常用在矩阵上。两个形状相同的矩阵的逐项积是矩阵对应元素相乘，结果形状不变：

$$\mathbf{A}_{n \times D} \odot \mathbf{B}_{n \times D} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & \cdots & a_{1,D}b_{1,D} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & \cdots & a_{2,D}b_{2,D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}b_{n,1} & a_{n,2}b_{n,2} & \cdots & a_{n,D}b_{n,D} \end{bmatrix}_{n \times D} \quad (50)$$

图 16 所示为矩阵逐项积运算法则示意图。

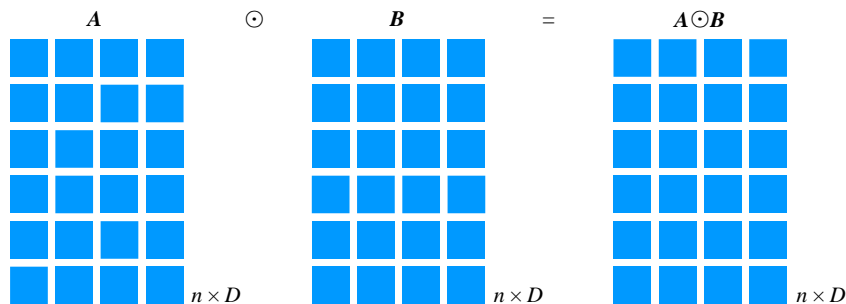


图 16. 矩阵逐项积



Bk4\_Ch4\_14.py 计算逐项积。

```
# Bk4_Ch4_14.py
import numpy as np
```

```
A = np.array([[1,2],
              [3,4]])

B = np.array([[5,6],
              [7,8]])

# Hadamard product
A_times_B_pieewise = np.multiply(A,B)
A_times_B_pieewise_V2 = A*B
```

## 4.11 行列式：将矩阵映射到标量值

每个方阵都有自己的**行列式** (determinant)，比如方阵  $A$  的行列式值可以表达为  $|A|$  或  $\det(A)$ 。如果行列式值非零，方阵则可逆或非奇异。

白话说，行列式是将一个方阵  $A$  根据一定的规则映射到一个标量。

一阶方阵的行列式值：

$$|a_{11}| = a_{11} \quad (51)$$

二阶方阵的行列式值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (52)$$

三阶方阵的行列式值：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (53)$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

根据以上规律，可以发现  $n \times n$  矩阵  $A$  的行列式值可以通过递归计算得到。

### 更多性质

特别地，对角阵的行列式值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \quad (54)$$

三角阵的行列式值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \quad (55)$$

上述规则也适用于计算下三角矩阵的行列式值。

请读者注意以下行列式性质：

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) \\ \det(c\mathbf{A}_{n \times n}) &= c^n \det(\mathbf{A}) \\ \det(\mathbf{A}^T) &= \det(\mathbf{A}) \\ \det(\mathbf{A}^n) &= (\det(\mathbf{A}))^n \\ \det(\mathbf{A}^{-1}) &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \end{aligned} \quad (56)$$

## 几何视角

图 17 给出的是二阶矩阵行列式的几何意义。

给定  $2 \times 2$  方阵  $\mathbf{A}$ ，具体为：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$\mathbf{A}$  可以写成左右排列的两个列向量：

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2] \quad (58)$$

即：

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \quad (59)$$

如图 17 所示，以  $\mathbf{a}_1$  和  $\mathbf{a}_2$  为两条边构造得到一个平行四边形。这个平行四边形的面积就是  $\mathbf{A}$  的行列式值。下面我们推导一下。

如图 18 所示，矩形和三角形的面积很容易计算。平行四边形的面积，就是矩形面积减去两倍的绿色三角形面积，再减去两倍的橙色三角形面积，即：

$$\begin{aligned} \text{Area} &= (a_{11} + a_{12})(a_{21} + a_{22}) - a_{12}(a_{21} + a_{22}) - a_{21}(a_{11} + a_{12}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned} \quad (60)$$

这和 (52) 行列式结果一致。

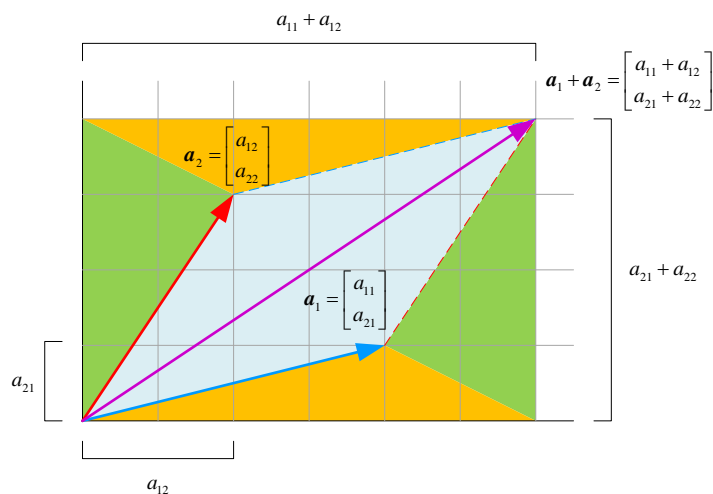


图 17. 二阶矩阵的行列式的几何意义

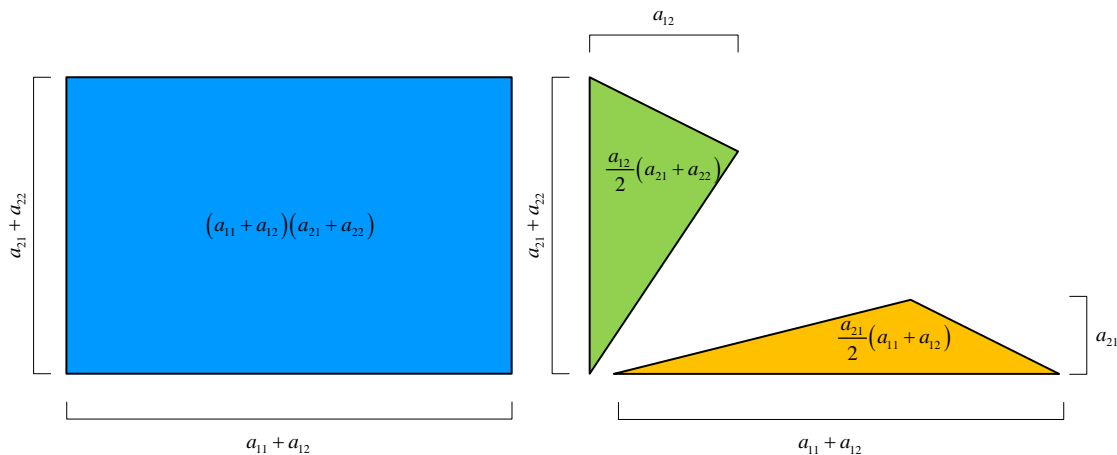


图 18. 三个几何形状的面积

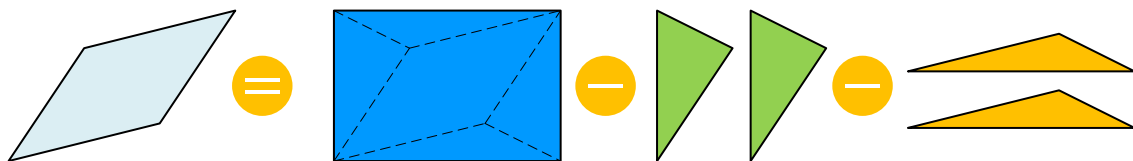
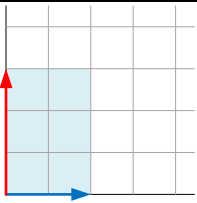
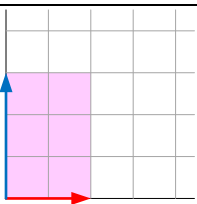
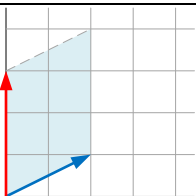
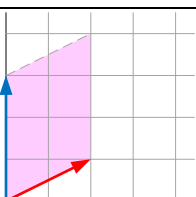
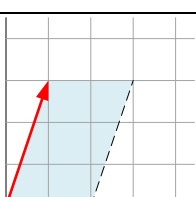
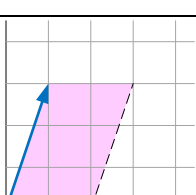
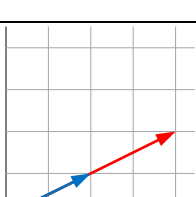


图 19. 求平行四边形面积

表 1 给出了几个特殊  $2 \times 2$  方阵的行列式值和对应的平行四边形形状及面积。希望大家仔细对比表中几幅图，很容发现行列式值正、负、零都有其特定的几何内涵。

表 1. 几个特殊  $2 \times 2$  方阵的行列式值

行列式值	向量	图形
------	----	----

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$	$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$	$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$	$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$	$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$	$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$	$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	
$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$	$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



Bk4\_Ch4\_15.py 计算行列式值。

```
# Bk4_Ch4_15.py
import numpy as np
A = np.array([[4, 2],
              [1, 3]])

# calculate determinant of A
det_A = np.linalg.det(A)
```

## 从面积到体积

本节前文讲解行列式值用的例子中矩阵都是  $2 \times 2$ ，现在聊一聊  $3 \times 3$  方阵的行列式值的几何意义。

我们先看一个最简单例子，给定如下  $3 \times 3$  对角方阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \quad (61)$$

如图 20 所示，上式代表三维空间中边长分别为 1、2、3 的立方体，而行列式值为 6 则说明它的体积为 6。

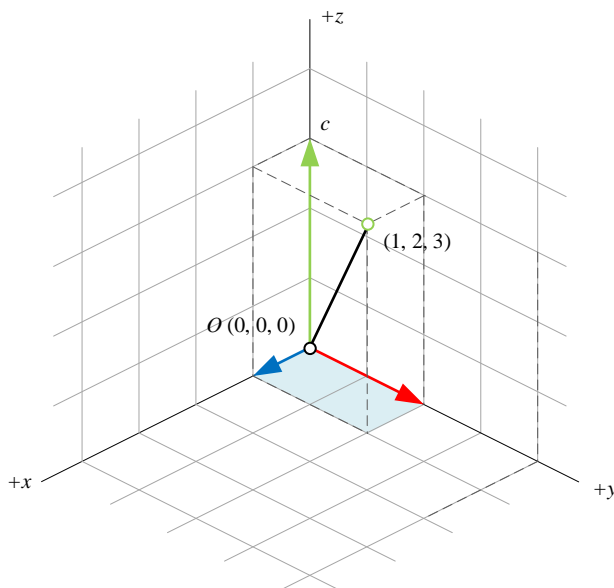


图 20. 立方体的体积为 6

对 (61) 稍作修改，将三个对角元素值改为 0，得到矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

这时，上式矩阵的行列式值为 0。从图 20 上来看，这个立方体“趴”在  $xy$  平面上，对应浅蓝色阴影，显然它的体积为 0。

行列式中某行或某列全为 0，行列式值为 0。从几何角度很容易理解，因为这个平行体的某条边长为 0，因此它的体积就是 0。

如图 21 (a) 所示，而对于任意  $3 \times 3$  方阵  $A$ ，它的行列式值的几何含义就是由其三个列向量  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  构造的平行六面体的体积。注意这个体积值有正负。特别地，如果  $\mathbf{a}_3$  在  $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$  构造的平面中，也就是  $\mathbf{a}_3$  躺在图 21 (b) 中浅蓝色平面上，对应体积为 0，即方阵  $A$  行列式值为 0。

图 21 (b) 这种情况下， $\mathbf{a}_1$ 、 $\mathbf{a}_2$ 、 $\mathbf{a}_3$  线性相关， $A$  的秩为 2，这是本书后文要介绍的内容。

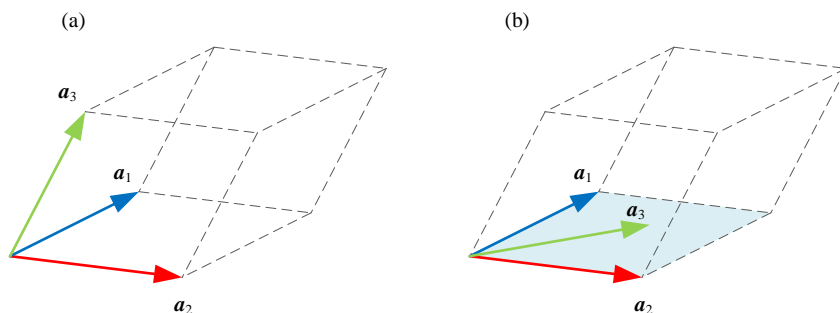


图 21.  $3 \times 3$  方阵  $A$  行列式值的几何含义

此外，行列式值和线性变换有着密切关系，线性变换对面积/体积产生改变的比例就是变换矩阵的行列式值。本书后续将展开讲解。

## 多维

再进一步，给定如下  $D \times D$  对角方阵：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_D \end{bmatrix}_{D \times D} \quad (63)$$

上式说明，在  $D$  维空间中，这个“长方体”的边长分别为  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、...  $\lambda_D$ 。而这个长方体的体积就是这些值连乘。

举个例子，在多元高斯分布的概率密度函数中，我们可以在分母上看到矩阵的行列式值  $|\Sigma|^{\frac{1}{2}}$ ， $|\Sigma|^{\frac{1}{2}}$  起到的作用就是体积缩放：

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\top} \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)}{(2\pi)^{\frac{D}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \quad (64)$$

## 向量积

本书前文介绍的向量积也可以通过行列式计算得到，比如：

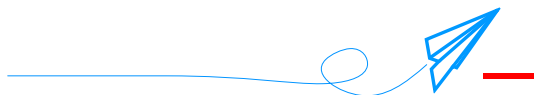
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (65)$$

还用上一章的例子，给定  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  向量：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \end{aligned} \quad (66)$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  结果如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \end{aligned} \quad (67)$$



本章走马观花地介绍了常见矩阵运算规则，显然不能用四幅图概括主要内容。

本章介绍的每一种矩阵运算规则都是重要的数学工具，都有自己的应用场景。而在所有线性代数的运算法则中，矩阵乘法居于核心地位。

就像儿时背诵九九乘法表一样，矩阵乘法规则就是我们的“成人乘法表”——必须要熟练掌握！

随着本书对线性代数知识抽丝剥茧，大家会由浅入深认识到矩阵乘法的伟力。