

## 10

## Functions Meet Coordinate Systems

## 函数

## 从几何图形角度探究



音乐是一种隐藏的数学实践，它是大脑潜意识下的计算。

***Music is the hidden arithmetical exercise of a mind unconscious that it is calculating.***

——戈特弗里德·莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz) | 德意志数学家、哲学家 | 1646 ~ 1716



- ▶ matplotlib.pyplot.axhline() 绘制水平线
- ▶ matplotlib.pyplot.axvline() 绘制竖直线
- ▶ matplotlib.pyplot.contour() 绘制等高线图
- ▶ matplotlib.pyplot.contourf() 绘制填充等高线图
- ▶ numpy.linspace() 在指定的间隔内，返回固定步长的数据
- ▶ numpy.meshgrid() 获得网格数据
- ▶ plot\_wireframe() 绘制三维单色线框图
- ▶ sympy.abc 引入符号变量
- ▶ sympy.diff() 对符号函数求导
- ▶ sympy.exp() 符号运算中以 e 为底的指数函数
- ▶ sympy.Interval 定义符号区间
- ▶ sympy.is\_increasing 判断符号函数的单调性
- ▶ sympy.lambdify() 将符号表达式转化为函数

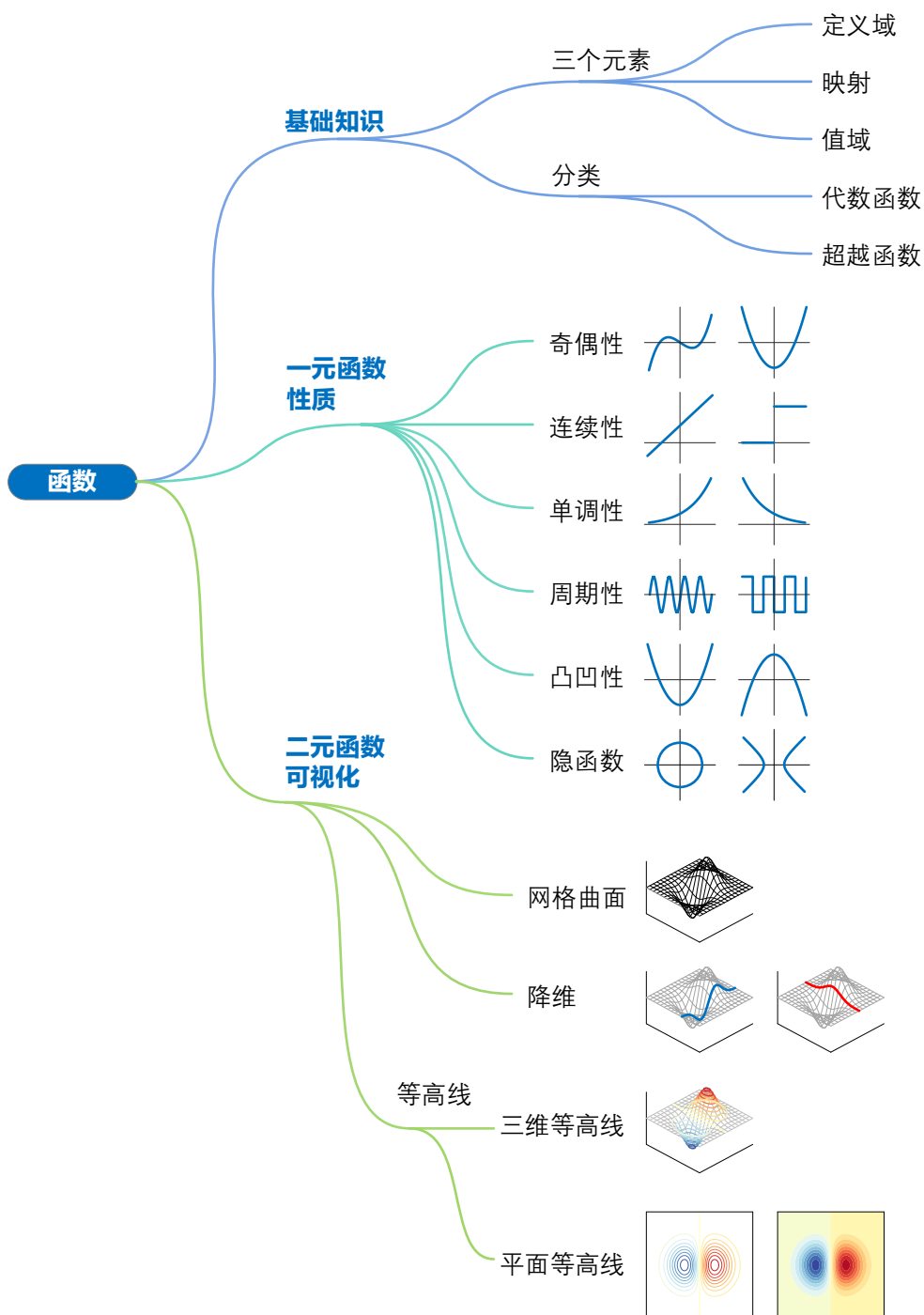
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 10.1 当代数式遇到坐标系

坐标系给每个冷冰冰的代数式赋予生命。图 1 ~ 图 3 给出了九幅图像，他们多数是函数，也有隐函数和参数方程。

建议大家盯着每幅图像看一会，你会惊奇地发现，坐标系给这些函数插上了翅膀，让他们在空间腾跃、讲述自己的故事。

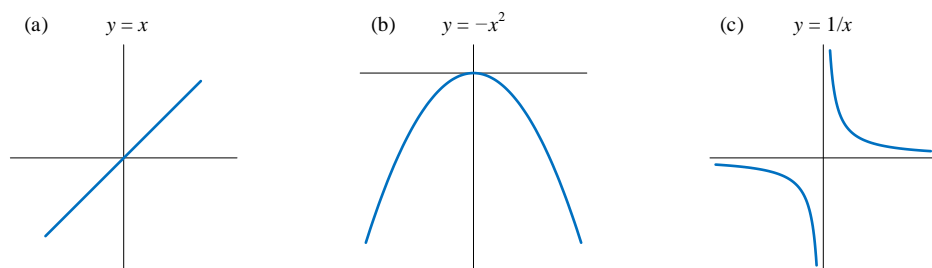


图 1. 一次函数、二次函数和反比例函数

线性函数  $y = x$  是个坚毅果敢、埋头苦干的家伙。你问他，“你要去哪？”他莫不做声，自顾自地向着正负无穷，无限延伸，直到世界尽头。

抛物线  $y = -x^2$  像一条腾出水面的锦鲤，在空中划出一道优美的弧线，他飞跃龙门、修成正果。从此岸到彼岸，离家越远，心就离家越近。

反比例函数  $y = 1/x$  像一个哲学家，他在讲述——太极者，无极而生，动静之机，阴阳之母也。物极必反，任何事物都有两面，而且两面会互相转化。

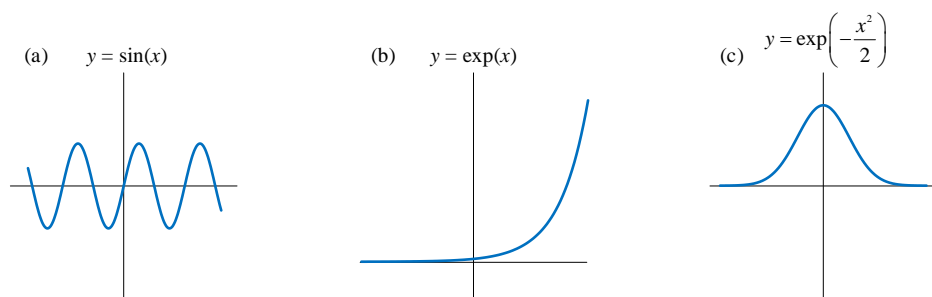


图 2. 正弦函数、指数函数和高斯函数

海水无风时，波涛安悠悠。正弦函数  $y = \sin(x)$  像是海浪，永远波涛澎湃。它代表着生命的律动，你仿佛能够听到它的脉搏砰砰作响。

指数函数  $y = \exp(x)$  就是那条巨龙。起初，他韬光养晦、潜龙勿用。万尺高楼起于累土，他不知疲倦、从未停歇。你看他，越飞越快，越升越高，如今飞龙在天。

君不见黄河之水天上来，奔流到海不复回。优雅而神秘，高斯函数  $y = \exp(-x^2/2)$  好比高山流水。上善若水，涓涓细流，利万物而不争。

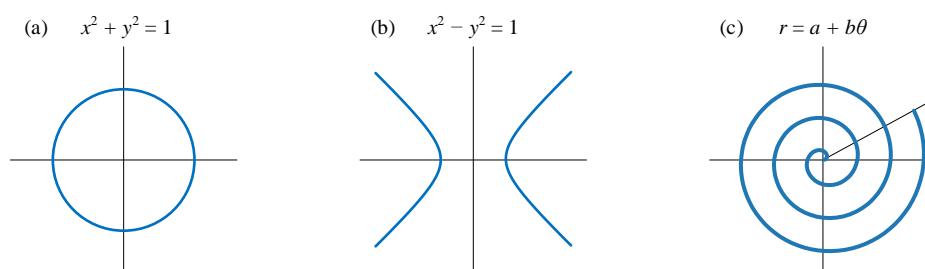


图 3. 正圆、双曲线和阿基米德螺旋线，非函数

海上生明月，天涯共此时。 $x^2 + y^2 = 1$  是挂在天上的白玉盘，是家里客厅的圆饭桌，是捧在手里的圆月饼。转了一圈，圆心是家。

人有悲欢离合，月有阴晴圆缺，此事古难全。造化弄人， $x^2 + y^2 = 1$  正号 + 改为负号 -，就变成双曲线  $x^2 - y^2 = 1$ 。两条曲线隔空相望，如此的近，又如此的远。像牛郎和织女，盈盈一水间，脉脉不得语。

阿基米德螺旋线好似夜空中的银河星系，把我们的目光从人世的浮尘，拉到深蓝的虚空，让我们片刻间忘却了这片土地的悲欢离合。

## 10.2 一元函数：一个自变量

如果函数  $f$  以  $x$  作为唯一输入值，输出值写作  $y = f(x)$ ，函数是一元函数。也就是说，有一个自变量的函数叫做**一元函数** (univariate function)。

本书前文介绍过，函数输入值  $x$  构成的集合叫做定义域，函数输出值  $y$  构成的集合叫做值域。

**▲ 注意**，定义域中任一  $x$  在值域中有唯一对应的  $y$ 。当然，不同  $x$  可以对应一样的函数值  $f(x)$ 。

平面直角坐标系中，一般用**线图** (line plot 或 line chart) 作为函数的可视化方案。图 4 展示的便是一元函数的映射关系，以及几种一元函数示例。

白话说，函数就是一种数值转化。本书第 6 章讲解不等式时，我们做过这样一个实验，给满足不等式条件的变量一个标签——1 (True)；不满足不等式的变量结果为 0 (False)。这实际上也是函数映射，输入为定义域内自变量的取值，输出为两值之一——0 或 1。

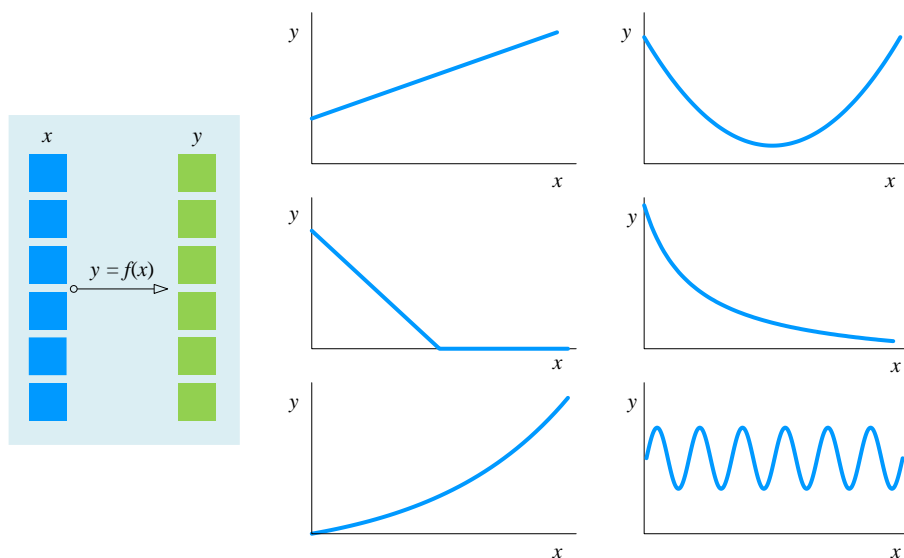


图 4. 一元函数

数据科学和机器学习中常用的函数一般分为**代数函数** (algebraic function) 和**超越函数** (transcendental function)。代数函数是指通过常数与自变量相互之间有限次的加、减、乘、除、有理指数幂和开方等运算构造的函数。本书将绝对值函数也归类到代数函数中。

超越函数指的是“超出”代数函数范畴的函数，比如对数函数、指数函数、三角函数等等。

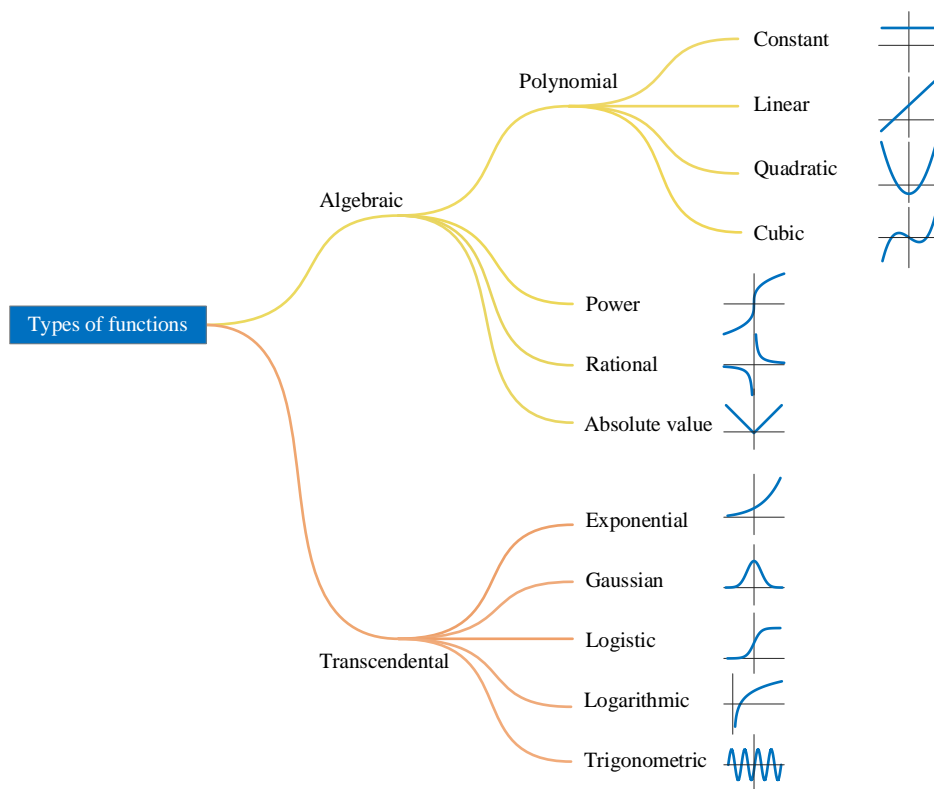


图 5. 常见函数分类



函数在机器学习中扮演重要角色。下面以**神经网络 (neural network)**为例，简单介绍函数的作用。

神经网络的核心思想是模拟人脑**神经元 (neuron)**的工作原理。图 6 展示神经元基本生物学结构。神经元**细胞体 (cell body)**的核心是**细胞核 (nucleus)**，细胞核周围围绕着**树突 (dendrite)**。树突接受外部刺激，并将信号传递至神经元内部。

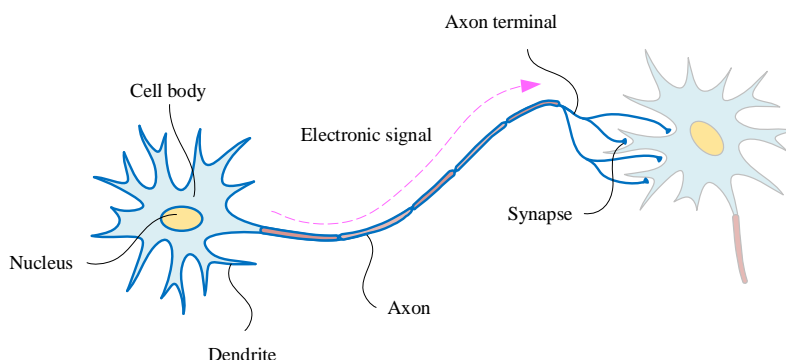


图 6. 神经元结构

细胞体汇总不同树突刺激，当刺激达到一定程度时，激发细胞兴奋状态；否则，细胞处于抑制状态。**轴突 (axon)**则负责将兴奋状态通过**轴突末端 (axon terminal)**的**突触 (synapse)**等结构传递到另一个神经元或组织细胞。

图 7 可看作是对神经元简单模仿。神经元模型的输入  $x_1, x_2, \dots, x_D$  类似于神经元的树突， $x_i$  取值为简单的 0 或 1。这些输入分别乘以各自权重，再通过求和函数汇集到一起得到  $x$ 。接着， $x$  值再通过一个判别函数  $f()$  得到最终的值  $y$ 。

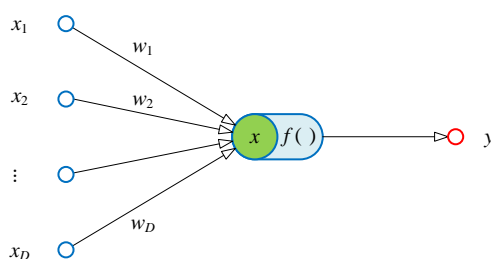


图 7. 最简单的神经网络模型

图 8 展示的便是几种常见的判别函数  $f()$  及其对应图像。

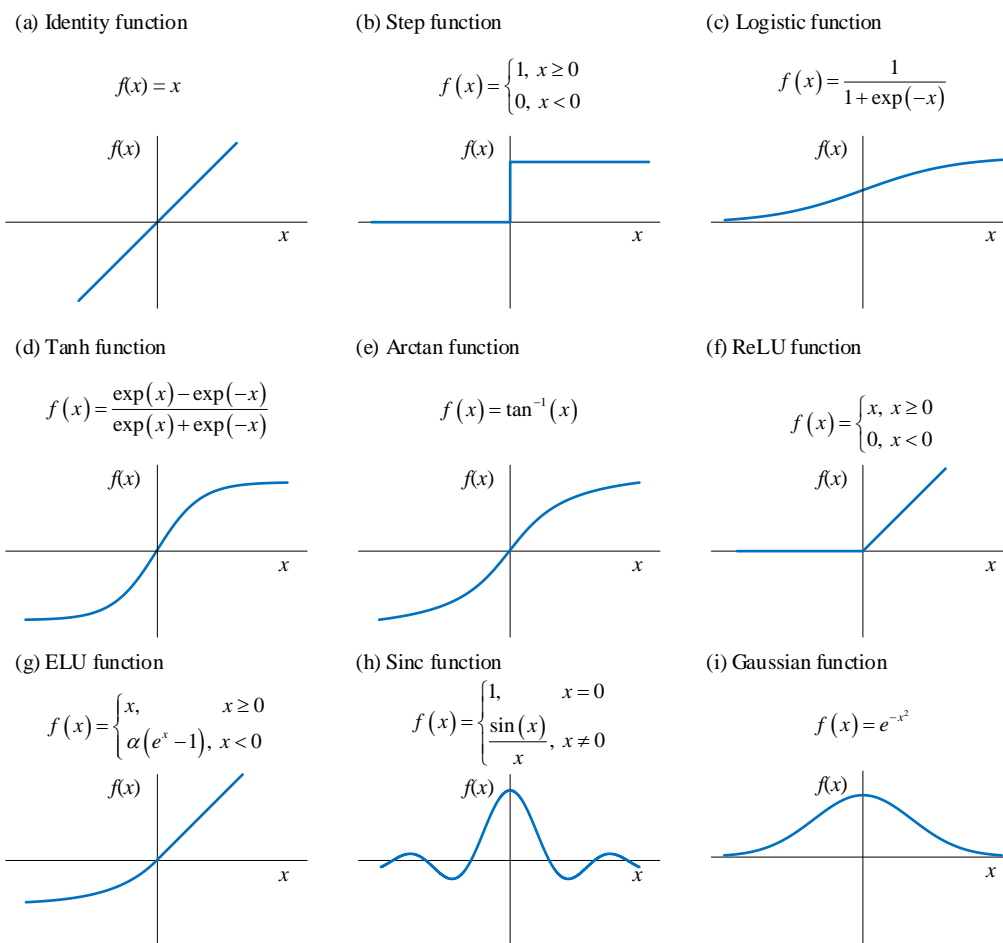


图 8. 几种神经网络中常见的判别函数

## 10.3 一元函数性质

学习函数时，请大家关注函数这几个特征：形状及变化趋势、自变量取值范围、函数值取值范围、函数性质等。

下面，本节利用图 9 介绍一元函数常见性质。

### 奇偶性

图 9 (a) 所示函数为**偶函数** (even function)。

$f(x)$  若为偶函数，对于定义域内任意  $x$  如下关系都成立：

$$f(x) = f(-x) \quad (1)$$

从几何角度， $f(x)$  若为偶函数，函数图像关于纵轴对称。

如图 9 (b) 所示, 如果  $f(x)$  为奇函数 (odd function), 对于定义域内任意  $x$  如下关系都成立:

$$f(-x) = -f(x) \quad (2)$$

从几何角度,  $f(x)$  若为奇函数, 函数图像关于原点对称。

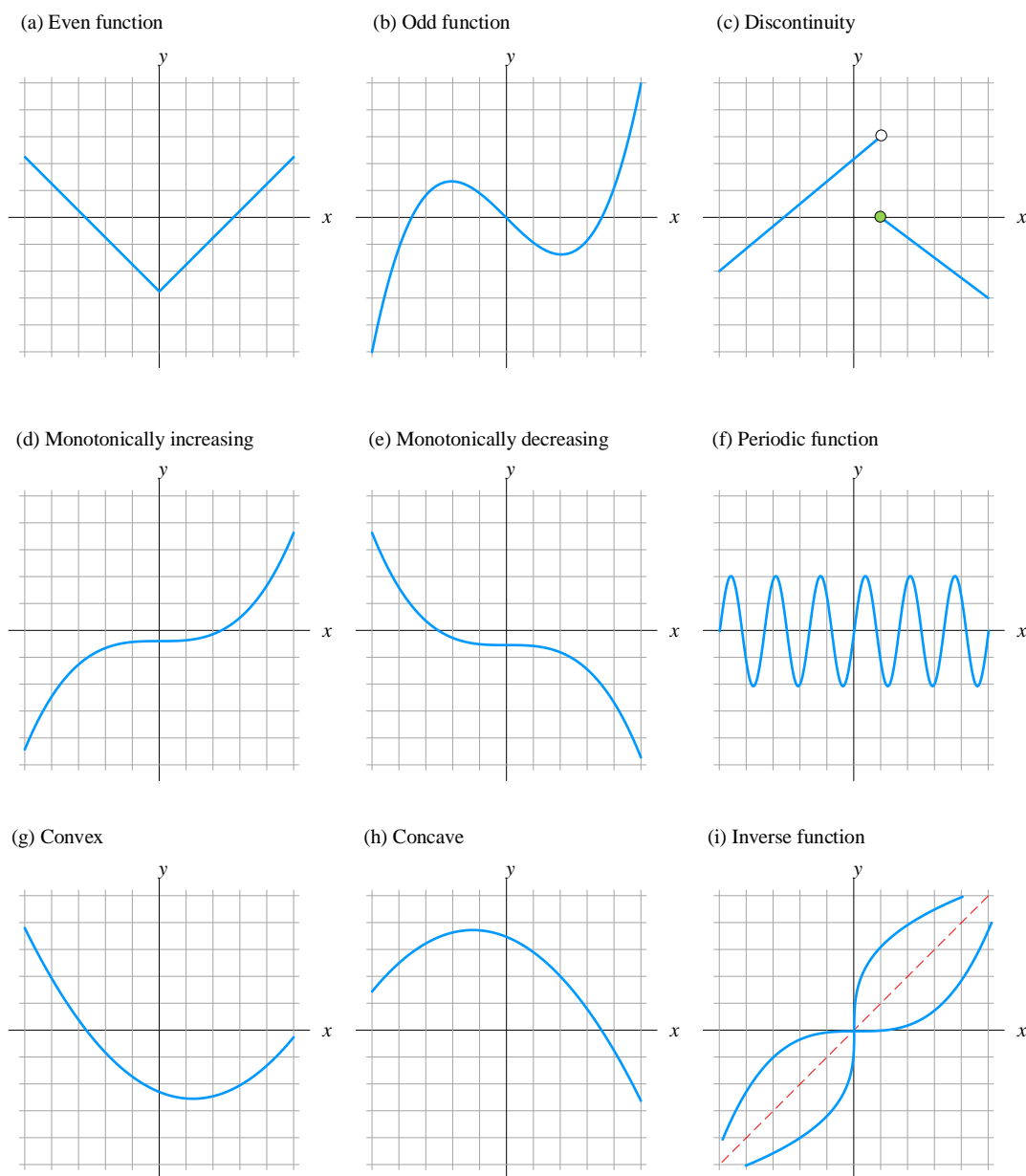


图 9. 一元函数常见性质

## 连续性

本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



简单来说，**连续函数** (continuous function) 是指函数  $y=f(x)$  当自变量  $x$  的变化很小时，所引起的因变量  $y$  的变化也很小，即没有函数值突变。与之相对的就是**不连续函数** (discontinuous function)。图 9 (c) 给出的是函数存在**不连续** (discontinuity)。

如图 10 所示，不连续函数有几种：**渐近线间断** (asymptotic discontinuity)，**点间断** (point discontinuity)，还有**跳跃间断** (jump discontinuity)。

在学习**极限** (limit) 之后，函数的**连续性** (continuity) 更容易被定义。此外，函数的连续性和**可导性** (differentiability) 有着密切联系。



导数是本书第 15 章要讨论的内容。

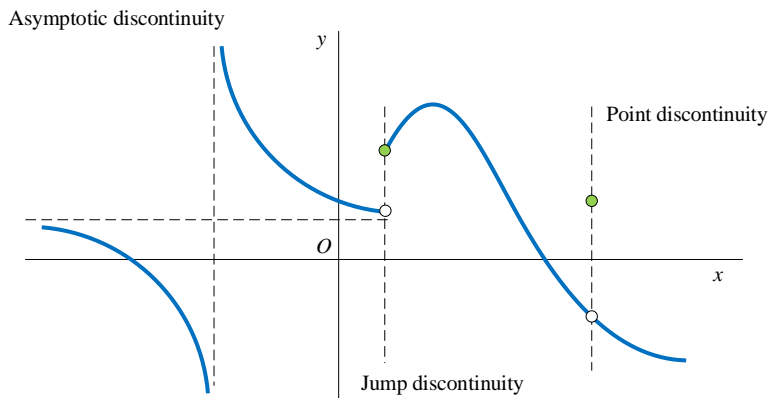


图 10. 几种不连续函数特征

## 单调性

图 9 (d) 和(e) 描述的是函数**单调性** (monotonicity)。图 9 (d) 给出的函数为**单调递增** (monotonically increasing)，图 9 (e) 对应的函数则是**单调递减** (monotonically decreasing)。



`sympy.is_decreasing()` 可以用来判断符号函数的单调性。Bk3\_Ch10\_01.py 展示如何判断函数在不同区间内单调性。

## 周期性

图 9 (f) 所示为函数**周期性** (periodicity)。如果函数  $f$  中不同位置  $x$  满足下式，则函数为周期函数：

$$f(x+T) = f(x) \quad (3)$$

其中， $T$ 为**周期** (period)，也叫最小正周期。三角函数就是典型的周期函数。图 11 给出的是四个其他周期函数的例子。

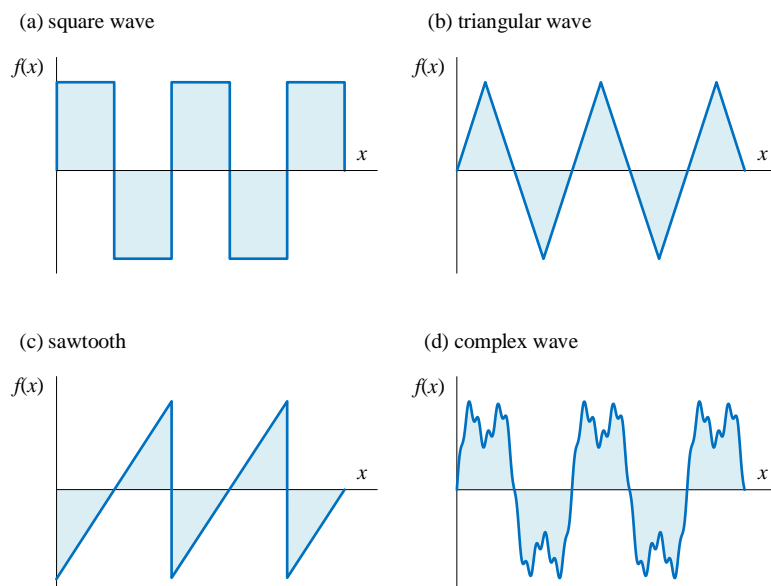


图 11. 四个周期函数

## 凸凹性

图 9 (g) 所示为**凸函数** (convex function)，图 9 (h) 所示为**凹函数** (concave function)。

⚠ 注意，国内数学教材对凸凹的定义，可能和本书正好相反。

下面聊一下凸凹函数的确切定义和特点。

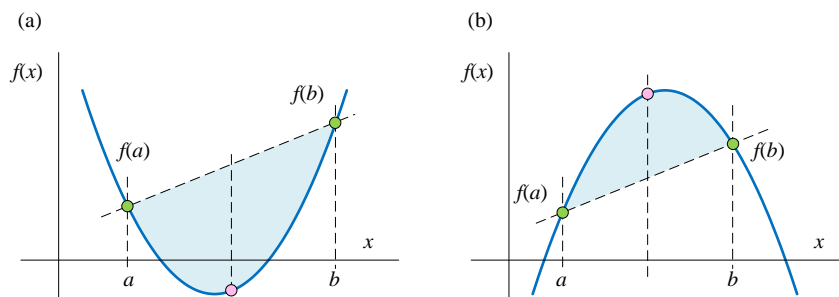


图 12. 函数凸凹性

如图 12 (a) 所示，若  $f(x)$  在区间  $I$  有定义，如果对于任意  $a, b \in I$ ，且  $a \neq b$ ，如果满足：

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (4)$$

则称  $f(x)$  在该区间内为凸函数。

如图 12 (b) 所示, 如果对于任意  $a, b \in I$ , 且  $a \neq b$ , 如果满足:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (5)$$

则称  $f(x)$  在该区间内为凹函数。

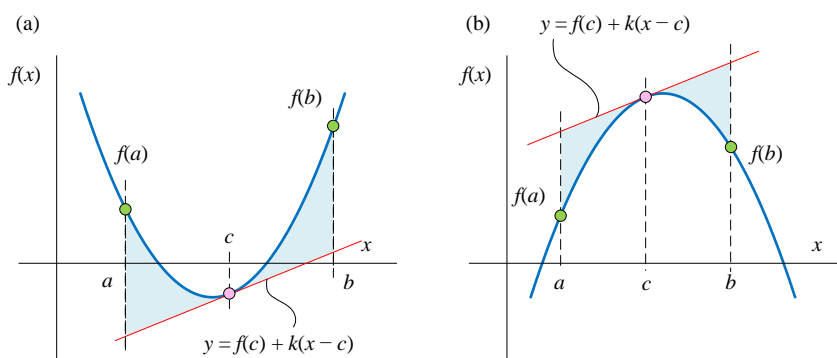


图 13. 切线角度看函数凸凹性

再从切线角度来看函数凸凹性。如图 13 所示, 在  $(a, b)$  区间内一点  $x = c$ , 在函数上  $(c, f(c))$  做一条切线, 切线的解析式为:

$$y = f(c) + k(x - c) \quad (6)$$

如图 13 (a) 所示, 如果函数为凸函数, 当  $x \neq c$ , 函数  $f(x)$  图像在切线上方, 也就是说:

$$f(x) > f(c) + k(x - c), \quad x \in (a, b), x \neq c \quad (7)$$

有人可能会问, (6) 的  $k$  是什么? 具体值是什么?  $k$  就是函数在  $x = c$  切线的斜率。

如图 13 (b) 所示, 如果函数为凹函数, 当  $x \neq c$ , 函数  $f(x)$  图像在切线下方, 即:

$$f(x) < f(c) + k(x - c), \quad x \in (a, b), x \neq c \quad (8)$$



此外, 函数的凸凹性和极值有着密切联系, 本书第 19 章将介绍。

## 反函数

**反函数** (inverse function)  $x = f^{-1}(y)$  的定义域、值域分别是函数  $y = f(x)$  的值域、定义域。图 9 (i) 给出的是函数  $f$  和其反函数  $f^{-1}$ ，两者关系如下：

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (9)$$

原函数和反函数的图像关于  $y = x$  直线对称。此外，并不是所有函数都存在反函数。

## 隐函数

**隐函数** (implicit function) 是由**隐式方程** (implicit equation) 所隐含定义的函数。比如，隐式方程  $F(x_1, x_2) = 0$  描述  $x_1$  和  $x_2$  两者关系。

不同于一般函数，很多隐函数较难分离自变量和因变量，比如图 14 所示两个例子。和函数一样，隐函数可以扩展到多元，比如图 15 所示为三元隐函数的例子。后续，我们会专门介绍如何用 Python 绘制如图 14 所示的隐函数图像。

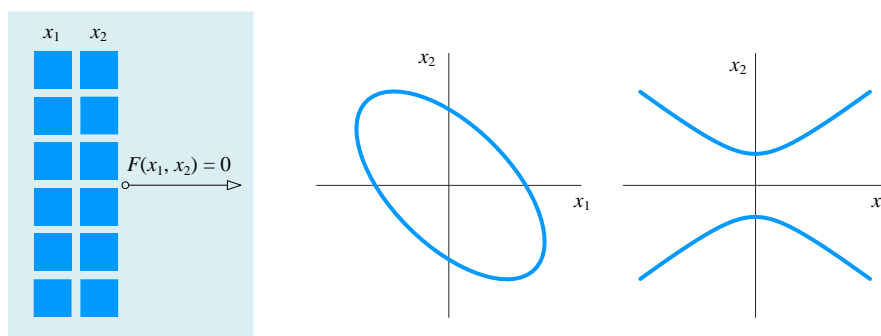


图 14. 二元隐函数

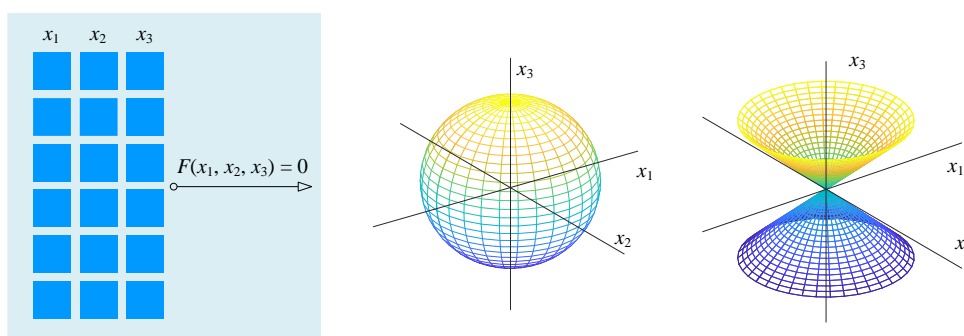


图 15. 三元隐函数

## 变化率和面积

很多数学问题要求我们准确地计算函数的变化率。从几何角度，如图 16 (a) 所示，函数上某一点切线的斜率正是函数的变化率。微积分中，这个函数变化率叫做**导数** (derivative)。

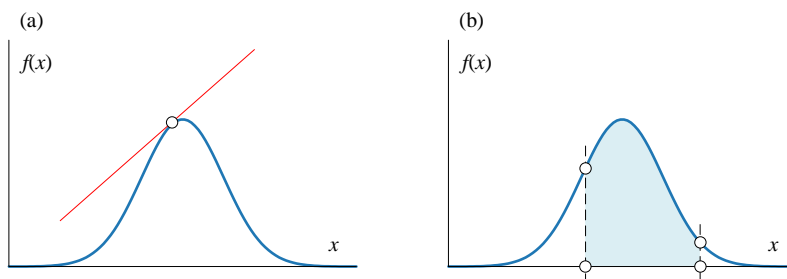


图 16. 函数的变化率和面积

进一步细看图 16 (a) 给出的函数数值变化。如图 17 所示，很明显在  $A$  和  $B$  两个区域，随着  $x$  增大  $f(x)$  增大，也就是变化率为正。即  $A$  和  $B$  两个区域，在函数曲线上任意一点做切线，切线的斜率为正。

但是，在  $A$  这个区域， $x$  增大时， $f(x)$  增速加快，也就是函数“变化率的变化率”为正；而在  $B$  这个区域， $x$  增大时， $f(x)$  增速逐步放缓，即函数“变化率的变化率”为负。



这个“变化率的变化率”就是二阶导数，这是本书第 15 章要介绍的内容。

再看  $C$  和  $D$  两个区域，随  $x$  增大  $f(x)$  减小，即变化率为负。也就是说，在这两个区域，函数曲线上任意一点做切线，切线的斜率为负。不同的是，在  $C$  区域， $x$  增大， $f(x)$  加速下降；在  $D$  区域， $x$  增大， $f(x)$  下降逐步放缓。

大家试着在  $A$ 、 $B$ 、 $C$  和  $D$  区内函数曲线上分别找一点画切线，看一下切线是在函数曲线的“上方”，还是“下方”。并对应分析这个特征和“变化率的变化率”正负的关系。

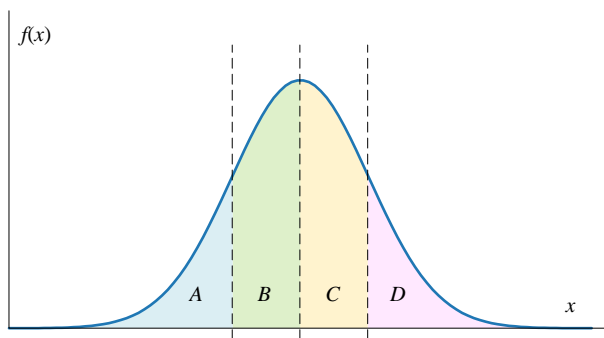


图 17. 细看函数的变化率

如图 16 (b) 所示，一些数学问题求解面积时，需要计算某个函数图形在一定取值范围和横轴围成几何图形的面积，这就要求大家了解**积分** (integral) 这个数学工具。



本书第 15 ~ 18 章会着重介绍导数和积分这两个数学工具。

## 10.4 二元函数：两个自变量

有两个自变量函数叫做**二元函数** (bivariate function)，比如  $y = f(x_1, x_2)$ 。本书常常借助三维直角坐标系可视化二元函数。图 18 所示为二元函数映射关系以及几个示例。

举个例子，二元一次函数  $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  有  $x_1$  和  $x_2$  两个自变量。当  $x_1$  和  $x_2$  取值分别为  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ ，函数值  $f(x_1 = 2, x_2 = 4) = 2 + 4 = 6$ 。

此外，有多个自变量函数叫做**多元函数** (multivariate function)，比如  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_D)$  有  $D$  个自变量。

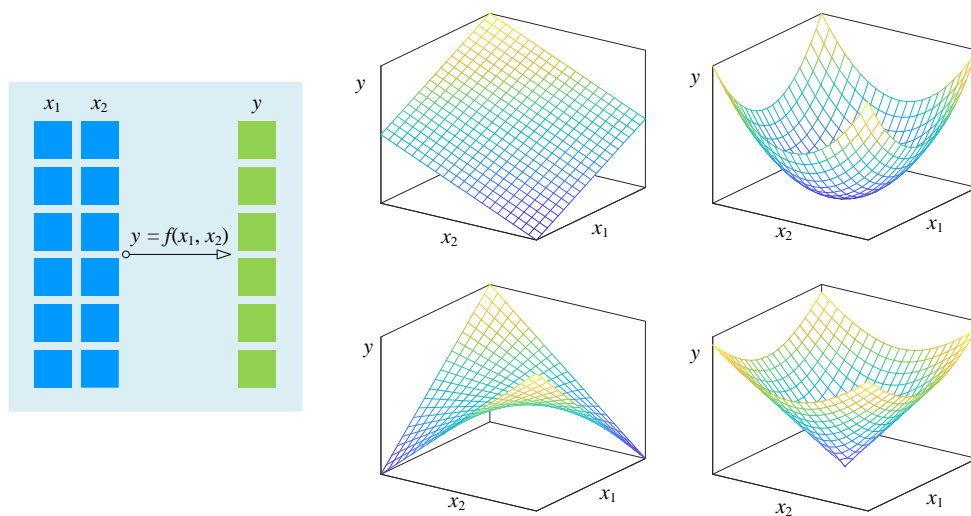


图 18. 二元函数

### 网格化数据

为了获得  $f(x_1, x_2)$  在三维空间的图形，需要提供一系列整齐的网格化坐标值  $(x_1, x_2)$ ，如下：

$$(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (-4, -4) & (-2, -4) & (0, -4) & (2, -4) & (4, -4) \\ (-4, -2) & (-2, -2) & (0, -2) & (2, -2) & (4, -2) \\ (-4, 0) & (-2, 0) & (0, 0) & (2, 0) & (4, 0) \\ (-4, 2) & (-2, 2) & (0, 2) & (2, 2) & (4, 2) \\ (-4, 4) & (-2, 4) & (0, 4) & (2, 4) & (4, 4) \end{bmatrix} \quad (10)$$

将上述坐标点  $x_1$  和  $x_2$  分离并写成两个矩阵形式：

$$x_1 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

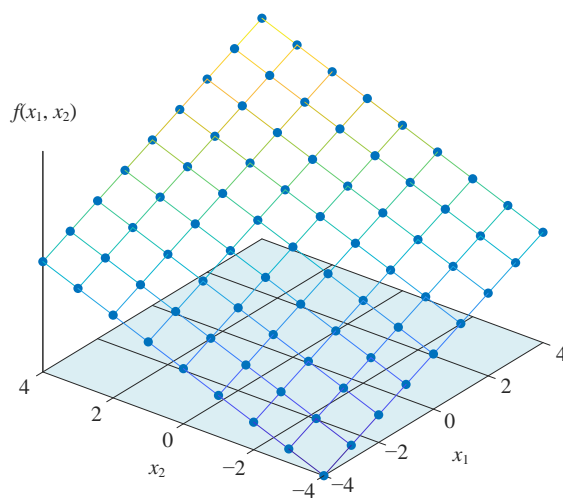
式中， $x_1$  的每个值代表点的横坐标值， $x_2$  的每个值代表点的纵坐标值。`numpy.meshgrid()` 可以用来获得网格化数据。

⚠ 注意上式中  $x_1$  和  $x_2$  仅仅是示意，本书矩阵一般记号都是大写字母、粗体、斜体，比如 **A**、**V**、**X** 等。

$y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  这个二元函数便是将 (11) 相同位置的数值相加得到函数值  $f(x_1, x_2)$  的矩阵：

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -6 & -4 & -2 & 0 \\ -6 & -4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad (12)$$

图 19 所示为  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  对应的三维空间平面。函数  $f()$  则代表某种规则，将网格化数据从  $x_1x_2$  平面映射到三维空间。

图 19.  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  对应的三维空间平面

这就是前文说的，在绘制函数图像时，比如二元函数曲面，实际上输入的函数值都是离散的、网格化的。当然，网格越密，函数曲面越精确。

实际应用中，网格的疏密可以根据函数的复杂度调整。比如图 19 这幅平面图像很简单，因此可以用比较稀疏的网格来呈现图像；但是，对于比较复杂的函数，网格则需要设置的密一些，也就是步长小一些。

## 一个复杂曲面

下面看一个复杂二元函数  $f(x_1, x_2)$  对应的曲面。

图 20 对应的函数解析式为：

$$f(x_1, x_2) = 3(1 - x_1)^2 \exp(-x_1^2 - (x_2 + 1)^2) - 10\left(\frac{x_1}{5} - x_1^3 - x_2^5\right) \exp(-x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{3} \exp(-(x_1 + 1)^2 - x_2^2) \quad (13)$$

相对图 19，图 20 的网格更为密集，这是为了更准确地观察分析这个比较复杂曲面的各种特征。本章后续有关二元函数的可视化方案，都是以上述二元函数作为例子。



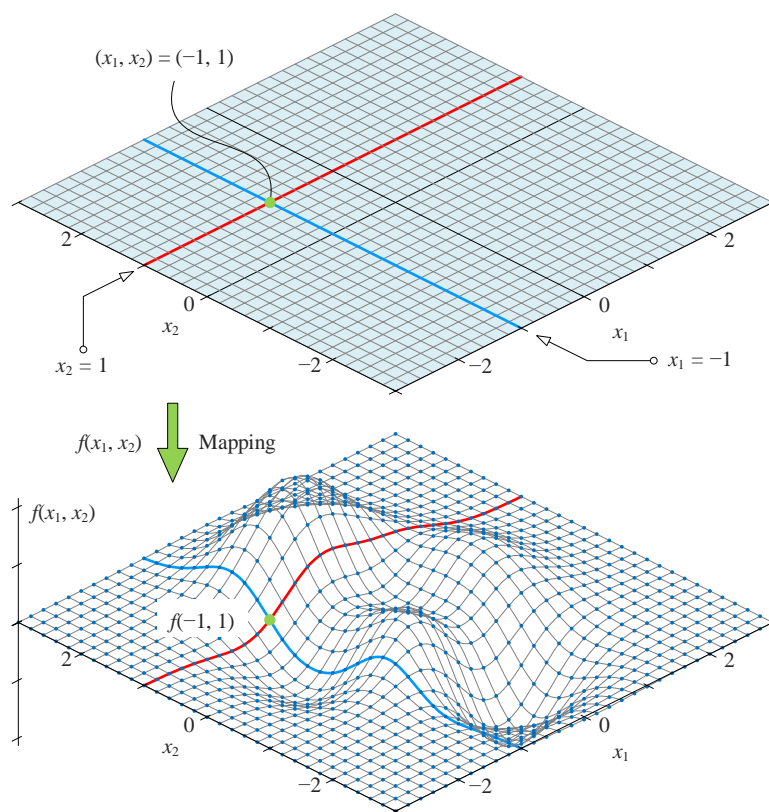


图 20. 网格化数据与二元函数映射



代码文件 Bk3\_Ch10\_02.py 中 Bk3\_Ch10\_02\_A 部分绘制图 20 二元函数  $f(x_1, x_2)$  对应的网格曲面。

## 10.5 降维：二元函数切一刀得到一元函数

如图 21 所示为二元函数两种可视化工具——剖面线、等高线。

本节介绍剖面线，它相当于在曲面上沿着横轴或纵轴切一刀。我们关注的是截面处曲线的变化趋势，“切一刀”这个过程相当于降维。

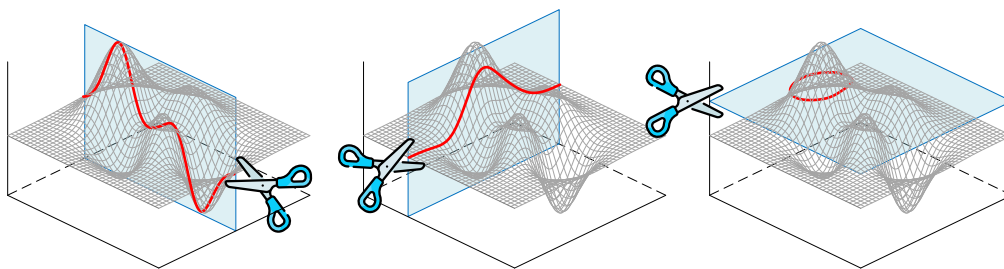


图 21. 函数降维

### $x_1y$ 平面方向剖面线

以 (13) 所示  $f(x_1, x_2)$  二元函数为例，如果自变量  $x_2$  固定在  $x_2 = c$ ，只有自变量  $x_1$  变化， $f(x_1, x_2 = c)$  则相当于是  $x_1$  的一元函数。

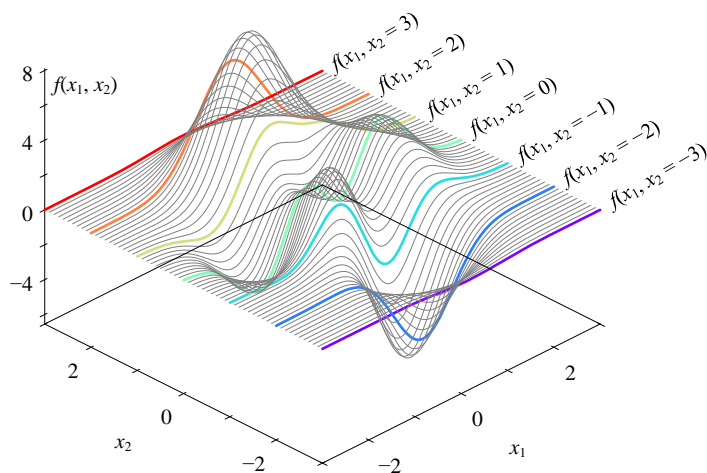
图 22 中彩色曲线所示为  $x_2$  固定在几个具体值  $c$  时， $f(x_1, x_2 = c)$  随  $x_1$  变化的剖面线。这些剖面线就是一元函数。

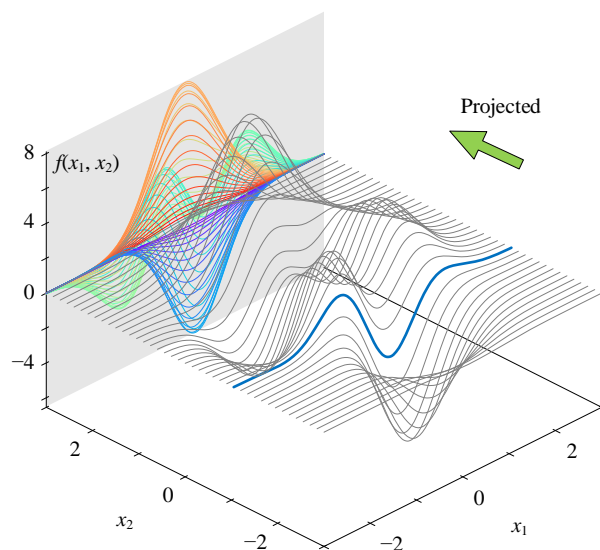
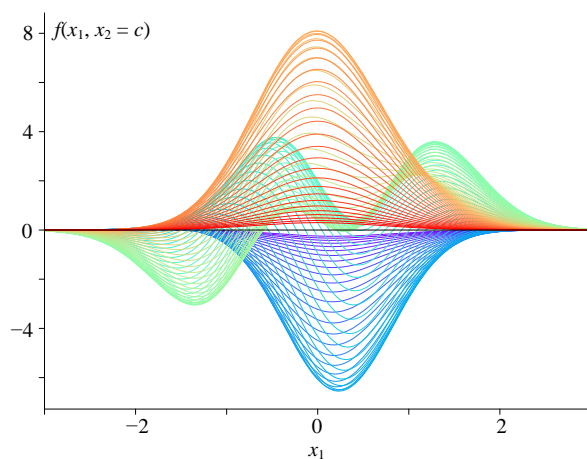
利用一元函数性质，我们可以分析曲面在不同位置的变化趋势。

如图 23 所示，将一系列  $f(x_1, x_2 = c)$  剖面线投影在  $x_1y$  平面上，给每条曲线涂上不同颜色，可以得到图 24。

➡ 本书第 16 章要介绍的**偏导数** (partial derivative) 就是研究这些剖面线的变化率的数学工具。

⚠ 注意，通过剖面线得出的“局部”结论不能推广到整个二元函数。

图 22. 自变量  $x_2$  固定，自变量  $x_1$  变化

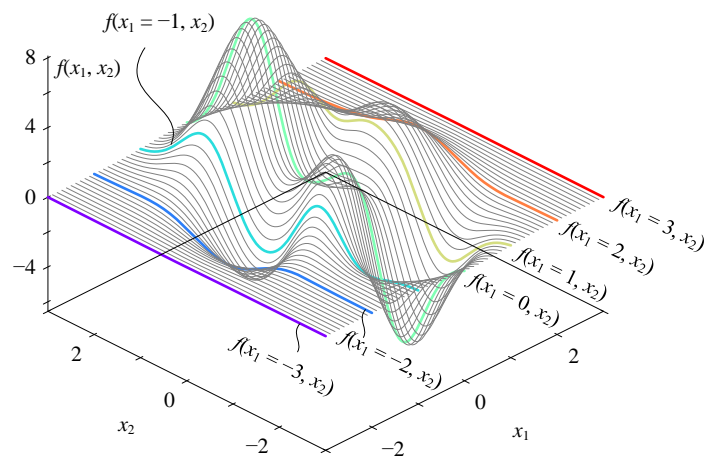
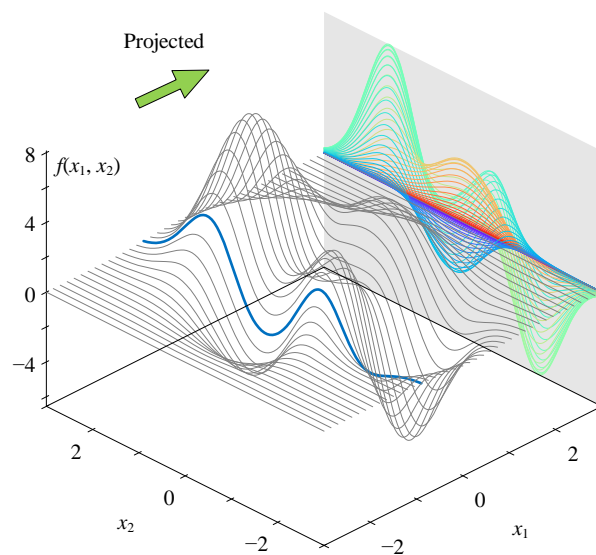
图 23. 将  $f(x_1, x_2)$  剖面线投影到  $x_1y$  平面图 24. 剖面线在  $x_1y$  平面投影

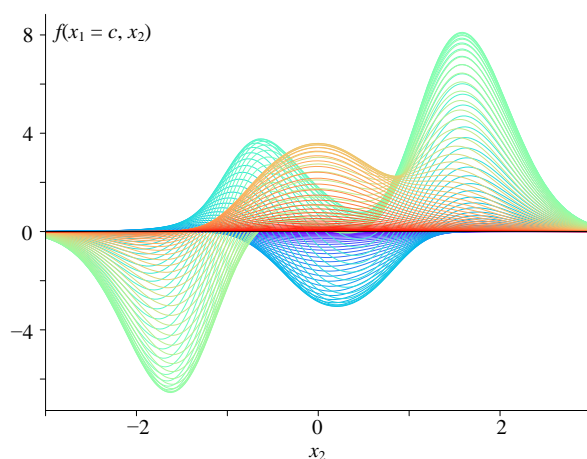
代码文件 Bk3\_Ch10\_02.py 中 Bk3\_Ch10\_02\_B 部分绘制图 22、图 23、图 24。

### $x_2y$ 平面方向剖面线

自变量  $x_1$  固定，只有自变量  $x_2$  变化， $f(x_1, x_2)$  则相当于是  $x_2$  的一元函数。图 25 中彩色曲线所示为  $x_1$  固定在具体值  $c$  时， $f(x_1 = c, x_2)$  随  $x_2$  变化。

如图 26 所示，将  $f(x_1 = c, x_2)$  剖面线投影在  $x_2y$  平面上。给每条曲线涂上不同颜色，可以得到图 27。

图 25. 自变量  $x_1$  固定，自变量  $x_2$  变化图 26. 将  $f(x_1, x_2)$  剖面线投影到  $x_2y$  平面

图 27. 剖面线在  $x_2y$  平面投影

代码文件 Bk3\_Ch10\_02.py 中 Bk3\_Ch10\_02\_c 部分绘制图 25、图 26、图 27。

## 10.6 等高线：由函数值相等点连成

把图 28 所示  $f(x_1, x_2)$  曲面比作一座山峰，函数值越大，相当于山峰越高。图中用暖色色块表达山峰，用冷色色块表达山谷。

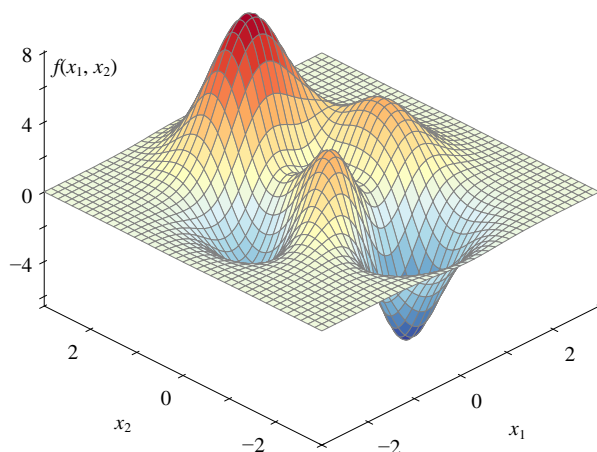


图 28. 用冷暖色表示函数的不同高度取值

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 等高线

三维**等高线** (contour line) 和平面等高线是研究二元函数重要的手段之一。上一章在讲不等式时，我们简单提过等高线。简单来说，曲面某一条等高线就是函数值  $f(x_1, x_2)$  相同，即  $f(x_1, x_2) = c$  的相邻点连接构成的曲线。

当  $c$  取不同值时，便可以得到一系列对应不同高度的等高线，获得的图像便是三维等高线图，如图 29 所示彩色线。这些曲线可以是闭合曲线，也可以非闭合。

将这些曲线垂直投影到水平面上，得到平面等高线图，如图 30 所示。

生活中，等高线有很多其他形式，比如等温线、等压线、等降水线等等。

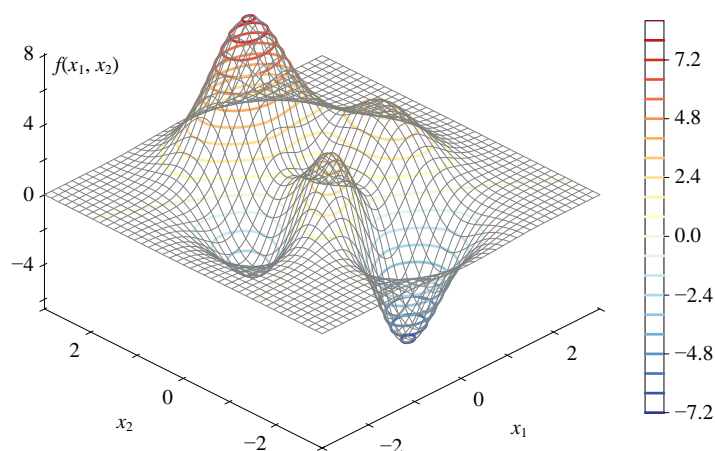


图 29. 二元函数三维等高线

图 30 所示  $f(x_1, x_2)$  三维等高线相当于图 29 在  $x_1x_2$  平面上的投影结果。平面等高线图中，每条不同颜色的曲线代表一个具体函数取值。把二元函数比作山峰的话，等高线越密集的区域，坡度越陡峭。相反，等高线越平缓的区域，坡面越平坦。



本书第 16 章将介绍的偏导数这个数学工具可以用来量化“陡峭”和“平坦”。

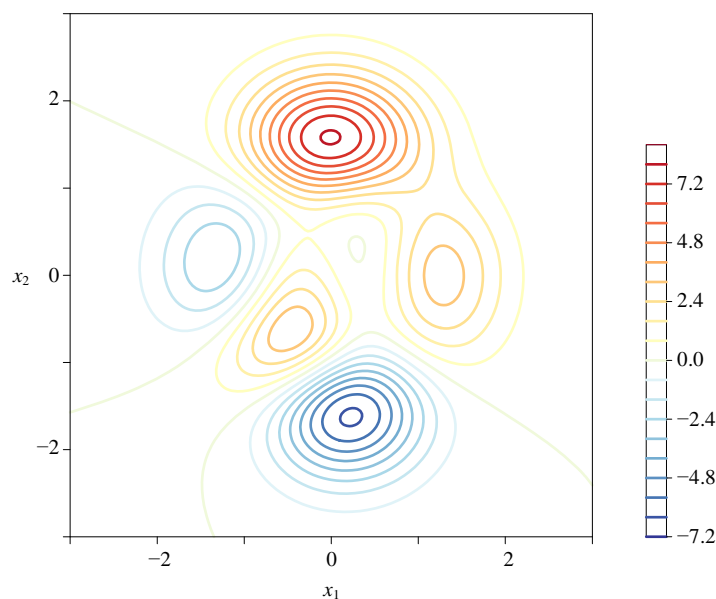


图 30. 二元函数的平面等高线

### 填充等高线

本书还常用填充等高线来可视化二元函数。

图 31 所示为  $f(x_1, x_2)$  三维坐标系中在  $x_1x_2$  平面上得到平面填充等高线。图 32 就是填充等高线在  $x_1x_2$  平面上的投影结果。

**▲ 注意**，在填充等高线图中，同一个颜色色块代表函数范围在某一特定区间内  $[c_i, c_{i+1}]$ 。

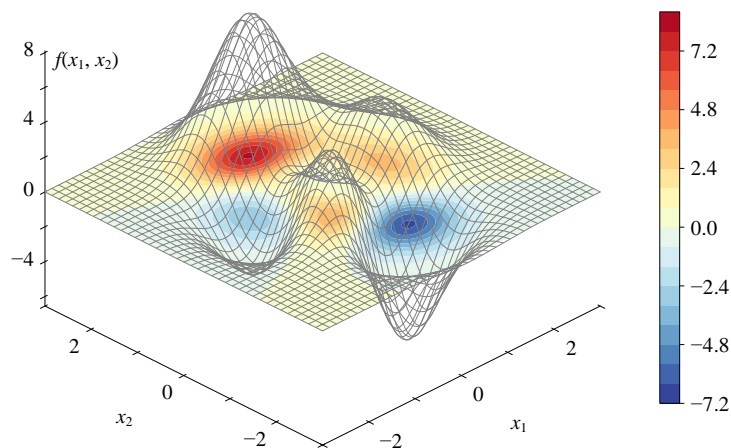


图 31. 三维曲面投影在水平面上得到平面填充等高线



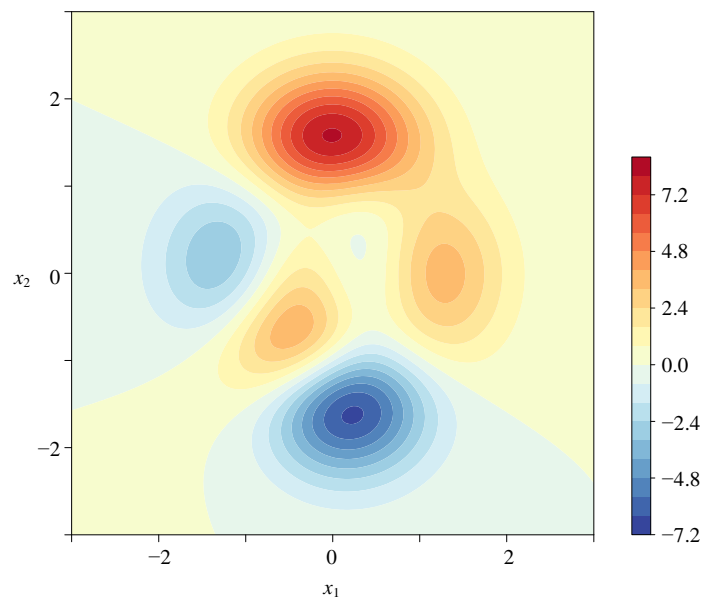


图 32. 平面填充等高线图



代码文件 Bk3\_Ch10\_02.py 中 Bk3\_Ch10\_02\_D 部分绘制图 28 ~ 图 32。



在 Bk3\_Ch10\_02.py 基础上，我们做了一个 App 用来交互呈现曲面特征。请大家参考代码文件 Streamlit\_Bk3\_Ch10\_02.py。这个代码有个特别之处，我们用了 Plotly 库中的 3D 交互绘图函数。



没有坐标系，就没有函数。坐标系给函数以生命。希望大家，在学习任何函数时，首先想到的是求助于坐标系。

特别强调，在描绘函数形状和变化趋势时，千万不能按自己审美偏好“手绘”函数图像！哪怕技艺精湛，手绘函数也不能准确描绘函数的每一处细节。

函数图像必须通过编写代码可视化！而且得到的曲线，千万不要“手动”改变某点取值，否则篡改数据！

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



即便是编程绘制的图像也不是百分之百准确无误，因为这些图像是散点连接而成的。只不过当这些点和点之间步长较小时，图像看上去连续光滑罢了。

作者在很多数学教科书中，看到很多不负责任的“手绘”函数图像。作者本人特别不能容忍“手绘”高斯函数或高斯分布概率密度函数曲线，这简直就是暴殄天物！