11 Algebraic Functions 代数函数

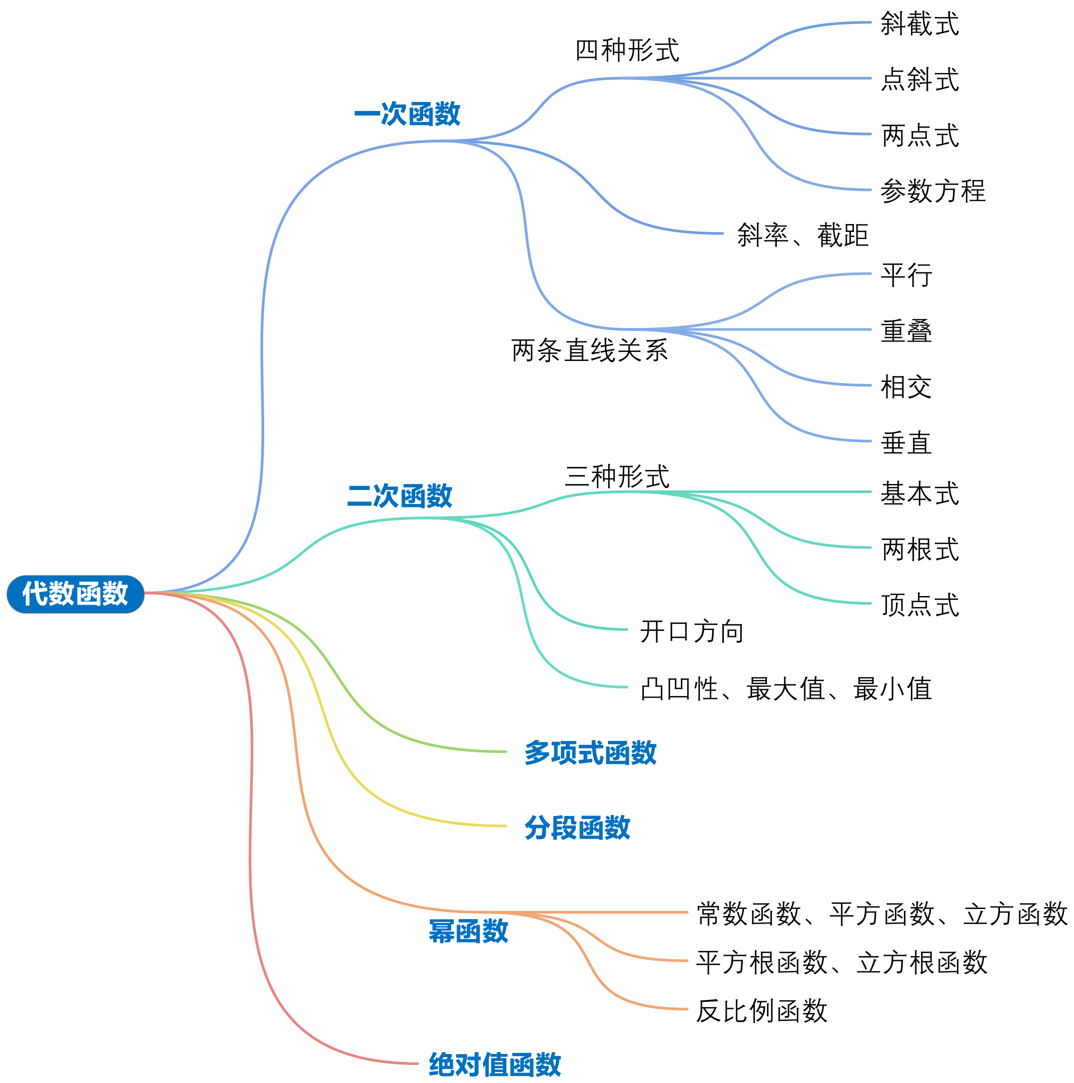
自变量有限次加、减、乘、除、有理指数幂和开方

数学不分种族、不分地域；对于数学来说，其文化世界自成一国。

Mathematics knows no races or geographical boundaries; for mathematics, the cultural world is one country.

—— 大卫·希尔伯特 (David Hilbert) | 德国数学家 | 1862 ~ 1943

- matplotlib.pyplot.axhline() 绘制水平线
- matplotlib.pyplot.axvline() 绘制竖直线
- matplotlib.pyplot.contour() 绘制平面等高线
- matplotlib.pyplot.contourf() 绘制平面填充等高线
- matplotlib.pyplot.grid() 绘制网格
- matplotlib.pyplot.plot() 绘制线图
- matplotlib.pyplot.show() 显示图片
- matplotlib.pyplot.xlabel() 设定 x 轴标题
- matplotlib.pyplot.ylabel() 设定 y 轴标题
- numpy.absolute() 计算绝对值
- numpy.array() 创建 array 数据类型
- numpy.cbrt(x) 计算立方根
- numpy.ceil() 计算向上取整
- numpy.floor() 计算向下取整
- numpy.linspace()产生连续均匀向量数值
- numpy.meshgrid() 创建网格化数据
- numpy.sqrt() 计算平方根


代数函数
一次函数
四种形式
斜截式
点斜式
两点式
参数方程
斜率、截距
两条直线关系
平行
重叠
相交
垂直
二次函数
三种形式
基本式
两根式
顶点式
开口方向
凸凹性、最大值、最小值
多项式函数
分段函数
幂函数
常数函数、平方函数、立方函数
平方根函数、立方根函数
反比例函数
绝对值函数

11.1 初等函数：数学模型的基础

初等函数是最朴实无华的数学模型，它们是复杂数学模型的基础。

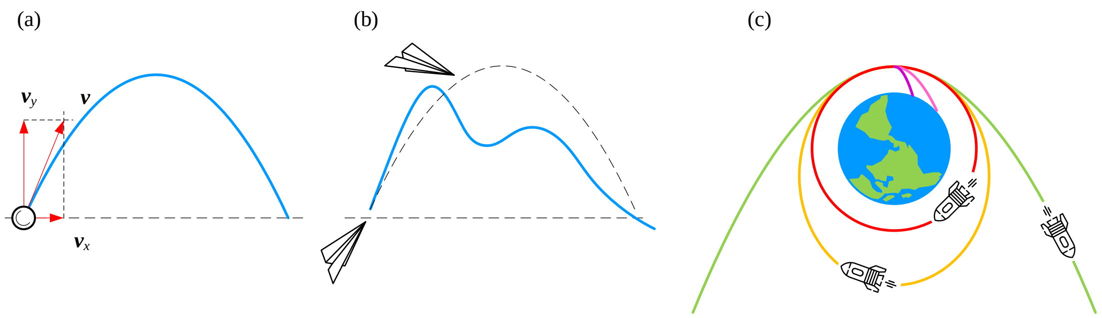


图 1. 抛物线

如图 1 (a) 所示，斜向上方抛起一个小球，忽略空气阻力影响，小球在空中划出的一道曲线就可以近似地用抛物线描述。

同样的仰角，斜向上抛出一个纸飞机，纸飞机在空中的飞行轨迹就不得不考虑纸飞机外形、空气气流这些因素；如图 1 (b) 所示，抛物线已经不足以描述纸飞机的轨迹。

类似的，很多应用场景都需要对抛物线模型进行修正。比如，发射炮弹时，阻力与炮弹外型和飞行速度有密切关系；击打网球时，网球旋转可以改变轨迹；射击时，枪管膛线让子弹旋转飞行，这必然会影响其行进的轨迹。

准确地来说，抛射体受到的重力实际上是指向地心；也就是说物体在空中飞行时，是朝着地球中心的加速度，它的轨迹实际上是椭圆的一部分。

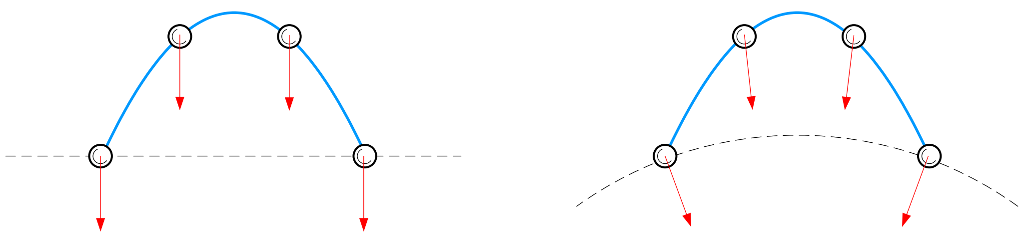


图 2. 引力方向

远程炮弹飞行需要考虑地心引力变化、地球自转；深空探测时，飞行器轨迹还需要考虑不同星体之间的引力作用，甚至来自太阳的光压等等因素。

认为抛射物体轨迹为抛物线至少基于几个假设前提。比如，忽略空气阻力的影响；再比如，假设大地平坦；同时假设物体受到的地球引力垂直大地。

假设前提是每个数学模型应用基础；数学模型毕竟是对现实世界各种现象的高度抽象概括，必须忽略一些次要因素，才能把握主要矛盾。

算力有限时，抛射一个实心小球，显然不会考虑小球的气动因素，更不会考虑引力场因素。但是，模拟不同击打技巧对网球飞行轨迹的影响，就不得不考虑网球旋转和空气流动这些因素。

模拟洲际导弹弹道时，气动布局、空气流体、地球自转、引力场等因素就不再是次要因素，必须考虑这些因素才能准确判断炮弹落点。

人类对抛物线、空气动力学，很大程度上来自于对弹道的研究。不得不承认，科学技术的确是把双刃剑，战争有些时候是人类自然科学知识进步的加速器。

11.2 一次函数：一条斜线

四种形式

一次函数 (linear function) 有几种不同的形式构造。

- **斜截式** (slope-intercept form)，如图 3 (a) 所示；
- **点斜式** (point-slope form)，如图 3 (b) 所示；
- **两点式** (two-point form)，如图 3 (c) 所示；
- **参数方程** (parametric equation)，如图 3 (d) 所示。

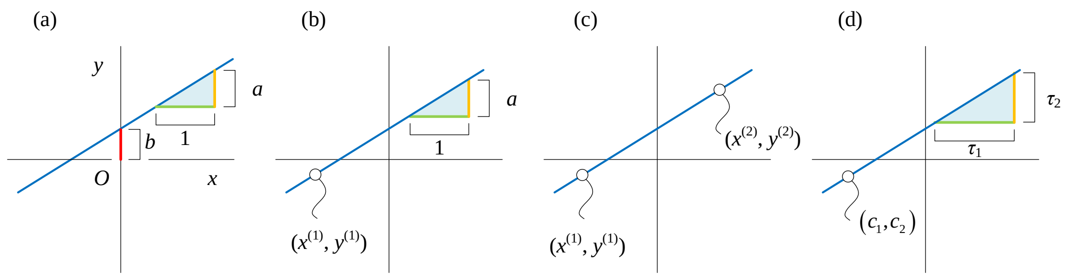


图 3. 一次函数的几种构造方法

斜截式

斜截式一次函数形式如下。

$$y = f(x) = ax + b \tag{1}$$

斜截式需要两个参数——斜率 (a) 和 y 轴截距 (b)。

注意，斜率 (a) 不能为 0；当 $a = 0$ 时，(1) 为**常数函数** (constant function)。

对于 (1)，当 $b = 0$ 时，函数为**比例函数** (proportional function)，而 a 也叫做**比例常数** (constant ratio 或 proportionality constant)。

一次函数有两种斜率：**正斜率** (positive slope) 和**负斜率** (negative slope)。图 4 (a) 所示一次函数斜率大于 0，单调递增；图 4 (b) 所示斜率小于 0，一次函数单调递减。

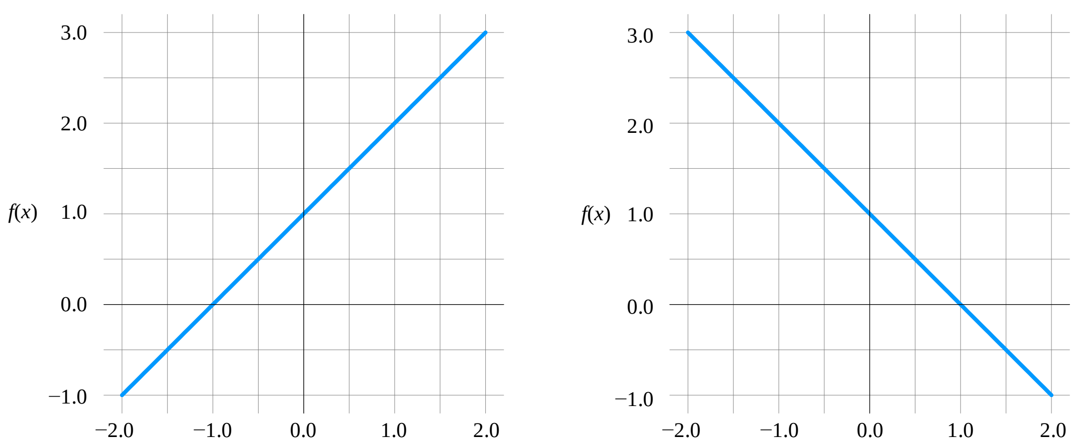


图 4. 一次函数

图 5 所示为一次函数随斜率变化。**零斜率** (zero slope) 对应常数函数，即**水平线** (horizontal line)。**无定义斜率** (undefined slope) 代表一条**竖直线** (vertical line)，此时图像虽然是一条直线，垂直于横轴，但它并不是函数。

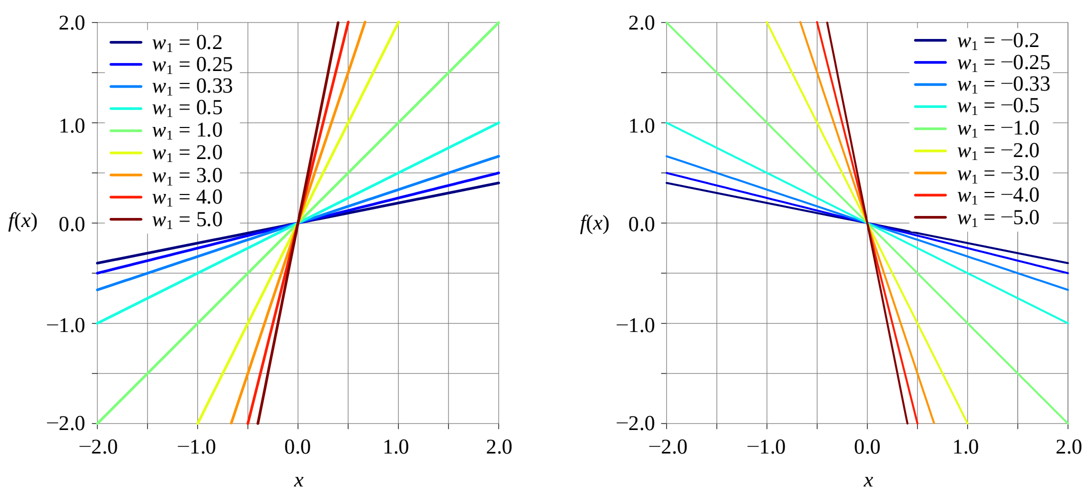


图 5. 一次函数 $y = w_1x$ 随斜率变化

图 6 所示为一次函数随截距变化情况；调整截距大小，相当于图像上下平移。

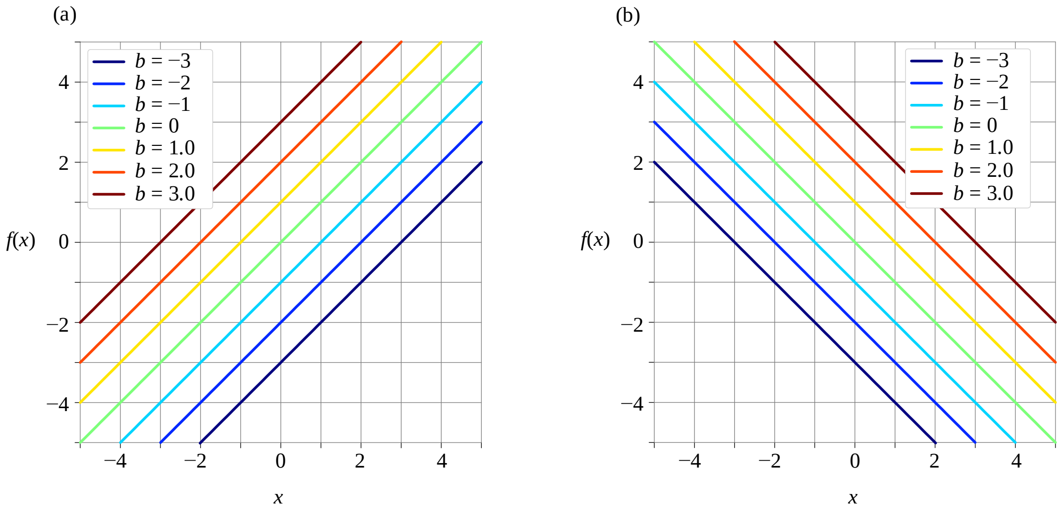


图 6. 一次函数随截距变化

如果两条直线斜率相同，它们相互**平行** (parallelize)，如图 7 (a)，或**重合** (coincide)，如图 7 (b)。图 7 (c) 所示为两条直线**相交** (intersect)，有唯一交点。

如果两个一次函数的斜率乘积为−1，则两者**垂直** (perpendicular)，如图 7 (d)。

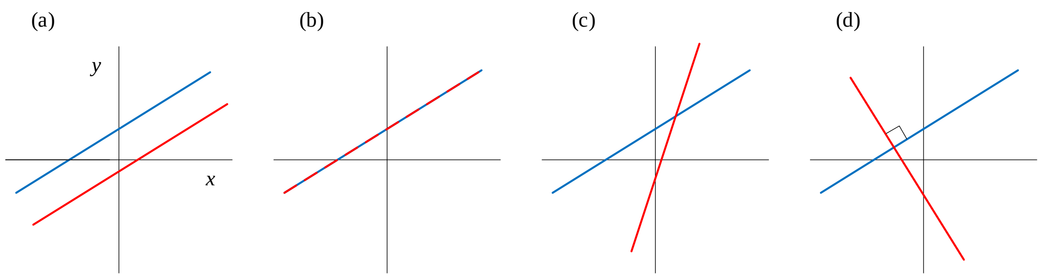


图 7. 两条之间的关系

点斜式

一次函数的第二种是点斜式。

$$y - y^{(1)} = f(x) - y^{(1)} = a\left(x - x^{(1)}\right) \tag{2}$$

也就是说，给定斜率 a 和直线上的一个点 $(x^{(1)}, y^{(1)})$，便可以确定平面上一条直线。

两点式

第三种形式是两点式，即两点确定一条直线。如下一次函数通过 $(x^{(1)}, y^{(1)})$ 和 $(x^{(2)}, y^{(2)})$ 两点。

$$y - y^{(1)} = \underbrace{\frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}}}_{\text{Slope}}\left(x - x^{(1)}\right) \tag{3}$$

其中，$x^{(1)} \neq x^{(2)}$。

两点式可以写成。

$$\left(y - y^{(1)}\right)\left(x^{(2)} - x^{(1)}\right) = \left(y^{(2)} - y^{(1)}\right)\left(x - x^{(1)}\right) \tag{4}$$

一次函数虽然看着简单，大家千万不要小瞧；数据科学和机器学习中很多算法都离不开一次函数，比如简单线性回归 (Simple Linear Regression)。简单线性回归也叫一元线性回归模型，是指模型中只含有一个自变量和一个因变量。

简单线性回归采用的解析式便是一元函数的斜截式。

人们常用有限的样本数据去探寻数据之间的规律，并以此作为分析或预测的工具。如图 8 所示，给定的样本数据中 x 和 y 似乎存在某种线性关系；通过一些算法，我们可以找到图 8 中那条红色斜线，它就是简单线性回归模型。

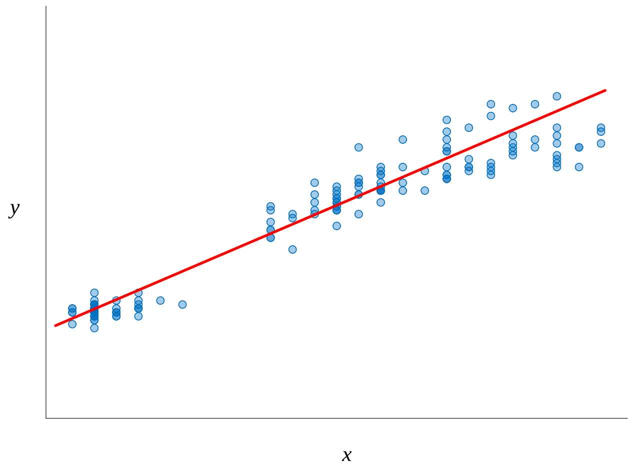


图 8. 简单线性回归

以下代码绘制图 5、图 6。本书中，一元函数自变量 x 取值一般是等差数列。

numpy.linspace(start,end,num) 可以用来生成等差数列，数列 start 和 end 之间(注意，包括 start 和 end 两个端点数值)，数列的元素个数为 num 个；得到的结果数据类型为 array。

```
# Bk_Ch11_01

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

w_array = np.array([1/5,1/4,1/3,1/2,1,2,3,4,5])
x_array = np.linspace(-2,2,100)

ww, xx = np.meshgrid(w_array,x_array)

b = 0 # y intercept
ff = ww*xx + b

fig, ax = plt.subplots()

colors = plt.cm.jet(np.linspace(0,1,len(w_array)))

for i in np.linspace(1,len(w_array),len(w_array)):
    plt.plot(x_array,ff[:,int(i)-1],
             color = colors[int(i)-1],
             label = '$w_1 = {lll:.2f}$'.format(lll = w_array[int(i)-1]))

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.xticks(np.arange(-2, 2.5, step=0.5))
plt.yticks(np.arange(-2, 2.5,  step=0.5))
plt.axis('scaled')
ax.set_xlim(-2,2)
ax.set_ylim(-2,2)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_visible(False)
ax.spines['left'].set_visible(False)
ax.grid(linestyle='--', linewidth=0.25, color=[0.5,0.5,0.5])
```

11.3 二次函数：一条抛物线

二次函数 (quadratic function) 是**二次多项式函数** (second order polynomial function 或 second degree polynomial function)。

二次函数图象是**抛物线** (parabola)，可以**开口向上** (open upward) 或**开口向下** (open downward)，**对称轴平行于纵轴** (the axis of symmetry is parallel to the *y*-axis)。

三种形式

二次函数解析式有三种形式。

◀ **基本式** (standard form)，如图 9 (a)；

◀ **两根式** (factored form)，如图 9 (b)；

◀ **顶点式** (vertex form)，如图 9 (c)。

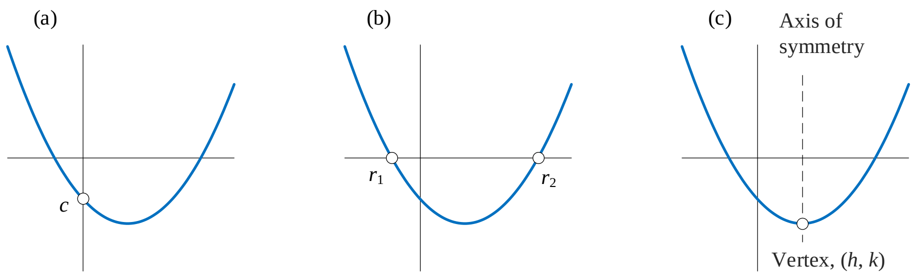


图 9. 二次函数的几种构造方法

基本式

二次函数的基本式如下。

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \tag{5}$$

其中，a 被称作**二次项系数** (quadratic coefficient)，注意 a 不为零；b 被称作**一次项系数** (linear coefficient)；c 被称作**常数项** (constant term)，也是 y 轴截距 (y-intercept)。

图 10 (a) 所示二次函数开口向上，**顶点** (vertex) 位于 y 轴，对称轴为 y 轴。图 10 (b) 所示二次函数开口向下。

图 10 (a) 二次函数为凸，顶点位置对应函数**最小值** (minimum)。图 10 (b) 二次函数为凹，顶点位置对应函数**最大值** (maximum)。

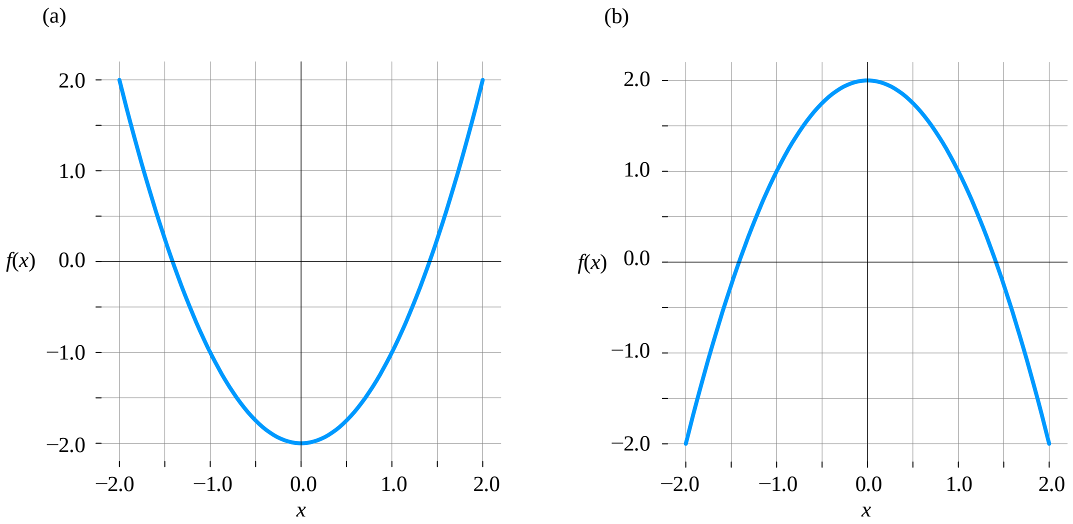


图 10. 不同开口方向二次函数

图 11 所示为二次函数图像开口大小随系数 a 变化；a 的绝对值越大，开口越小。

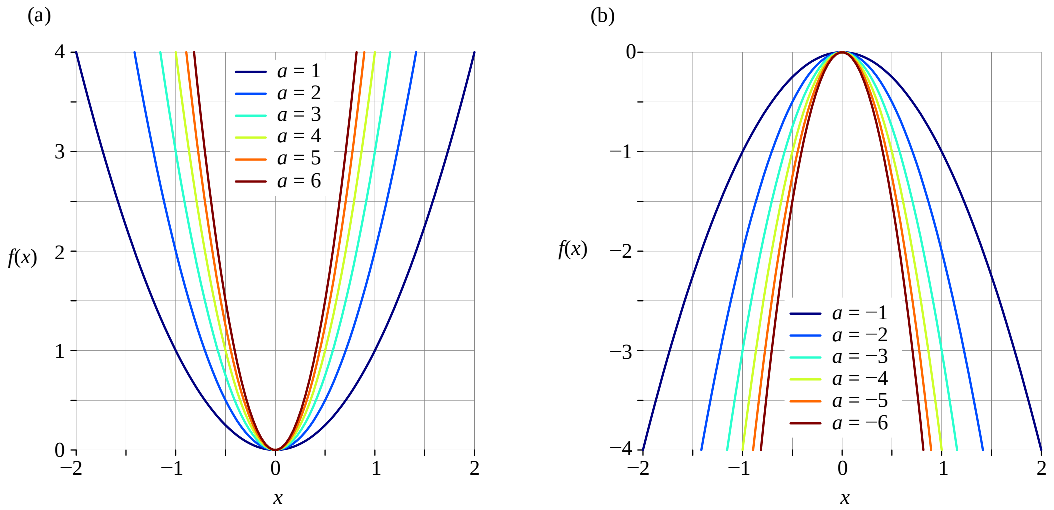


图 11. 二次函数随 a 变化

两根式

如果 $f(x) = 0$ 存在两个实数根的话，二次函数可以写成两根式。

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2), \quad a \neq 0 \tag{6}$$

其中，r_1 和 r_2 为二次方程的根。

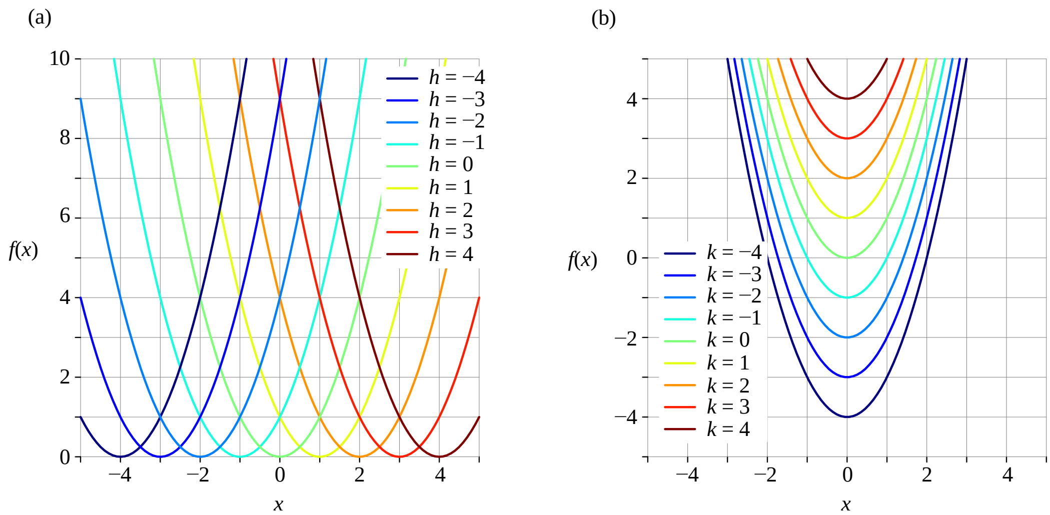


图 12. 二次函数随 h 和 c 变化

顶点式

二次函数另外一个常见的形式是顶点式，具体形式如下。

$$f(x)=a(x-h)^2+k, \quad a\neq 0 \tag{7}$$

其中，h 和 k 分别为顶点的横纵坐标值。

图 12 (a) 所示为函数图像和 h 的关系，h 影响函数在水平方向位置；图 12 (b) 所示为函数图像和 k 的关系，k 影响函数在竖直方向位置。

前文提到，二次函数顶点可以是函数的最大值或最小值；该顶点也是函数**单调性** (monotonicity) 的拐点 (turning point)，二次函数**单调区间** (intervals of monotonicity) 分别为 $(-\infty, h)$ 和 $(h, +\infty)$。

以下代码绘制图 11 和图 12。

```
# Bk_Ch11_02

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a_array = np.linspace(1,6,6)
x_array = np.linspace(-2,2,100)

aa, xx = np.meshgrid(a_array,x_array)
ww = aa*xx**2

fig, ax = plt.subplots()

colors = plt.cm.jet(np.linspace(0,1,6))

for i in np.linspace(1,6,6):
    plt.plot(x_array,ww[:,int(i)-1],
             color = colors[int(i)-1],
             label = '$a = {lll:.0f}$'.format(lll = a_array[int(i)-1]))

plt.xlabel('x'); plt.ylabel('f(x)')
plt.legend()
plt.xticks(np.arange(-2, 2.5, step=0.5)); plt.yticks(np.arange(0, 4.5,  step=0.5))
plt.axis('scaled')
ax.set_xlim(-2,2); ax.set_ylim(0,4)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_visible(False)
ax.spines['left'].set_visible(False)
ax.grid(linestyle='--', linewidth=0.25, color=[0.5,0.5,0.5])
```

11.4 多项式函数：从叠加角度来看

多项式函数 (polynomial function) 相当于一次和二次函数的推广，具体形式如下。

$$y = f(x) = a_K x^K + a_{K-1} x^{K-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{K} a_i x^i \tag{8}$$

其中，最高次项系数 a_K 不为 0，K 为最高次项次数。

图 13 几幅分图分别展示常数函数、一次到五次函数图像；可以这样理解，任何五次多项式函数都是图 13 所示的图像分别乘以相应系数叠加而成。

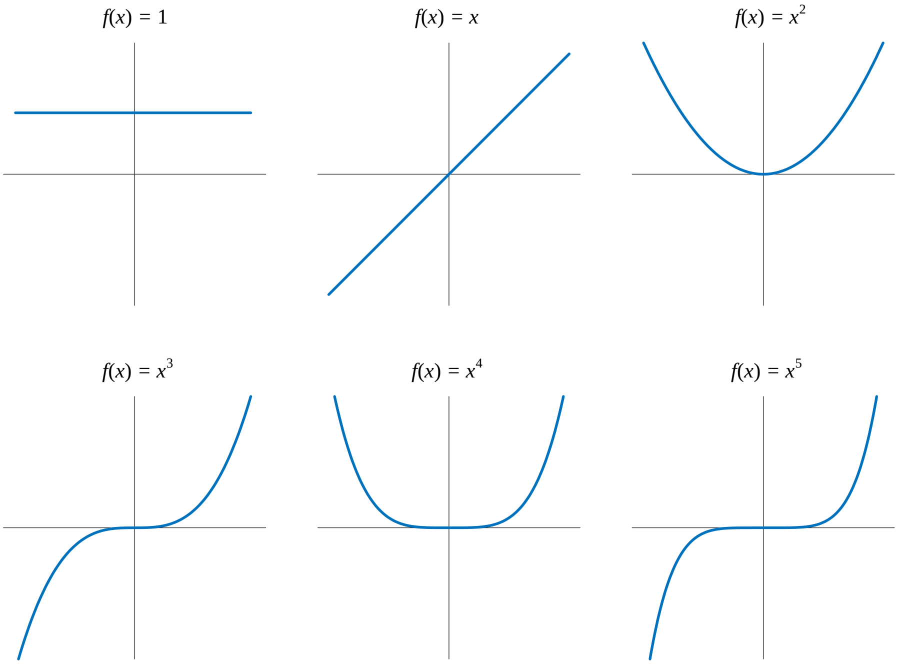


图 13. 常数函数到五次函数

三次函数 (cubic function, polynomial function of degree 3) 的形式为。

$$y = f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{9}$$

举两个三次函数的例子。

$$\begin{aligned} y &= f(x) = x^3 - x \\ y &= f(x) = -x^3 + x \end{aligned} \tag{10}$$

这两个三次函数可以看做是 x^3 和 x 经过加减运算组合而成。

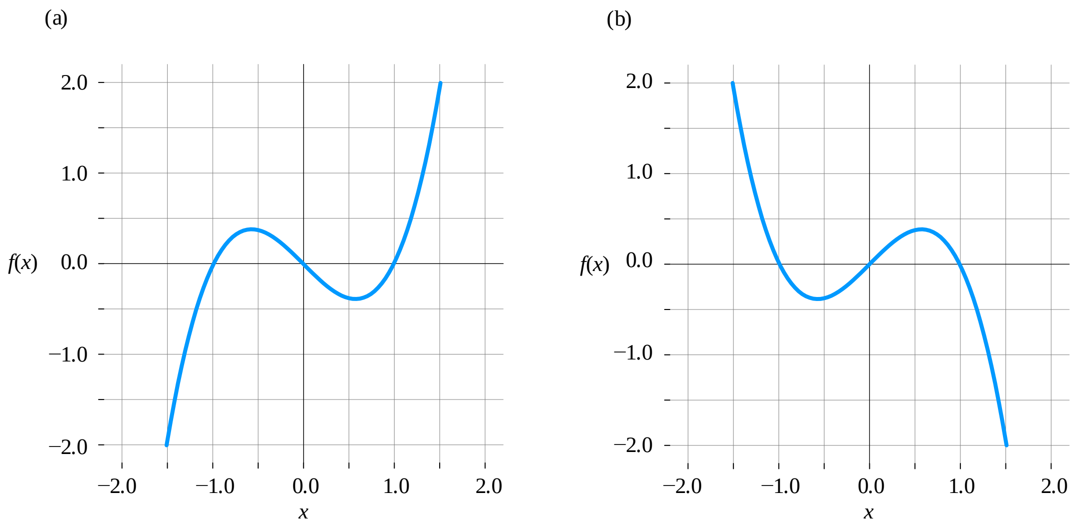


图 14. 两个三次函数

以下代码绘制图 4、图 10 和图 14。

```
# Bk_Ch11_03

import math
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

x = np.linspace(-2,2,100);

def plot_curve(x, y):

    fig, ax = plt.subplots()

    plt.xlabel("$\it{x}$")
    plt.ylabel("$\it{f}(\it{x})$")
    plt.plot(x, y, linewidth = 1.5)
    plt.axhline(y=0, color='k', linewidth = 1.5)
    plt.axvline(x=0, color='k', linewidth = 1.5)
    ax.grid(linestyle='--', linewidth=0.25, color=[0.5,0.5,0.5])
    plt.axis('equal')
    plt.xticks(np.arange(-2, 2.5, step=0.5))
    plt.yticks(np.arange(y.min(), y.max() + 0.5, step=0.5))
    ax.set_xlim(x.min(),x.max())
    ax.set_ylim(y.min(),y.max())
    ax.spines['top'].set_visible(False)
    ax.spines['right'].set_visible(False)
    ax.spines['bottom'].set_visible(False)
    ax.spines['left'].set_visible(False)
    plt.axis('square')

#%% plot linear, quadratic, and cubic functions

plt.close('all')

# linear function
y = x + 1;
```

```
plot_curve(x, y)

# linear function
y = -x + 1;
plot_curve(x, y)

# quadratic function, parabola opens upwards
# y = np.power(x,2) - 2;
y = x**2 - 2;
plot_curve(x, y)

# quadratic function, parabola opens downwards
# y = -np.power(x,2) + 2;
y = -x**2 + 2;
plot_curve(x, y)

# cubic function
# y = np.power(x,3) - x;
y = x**3 - x;
plot_curve(x, y)

# cubic function
# y = -np.power(x,3) + x;
y = -x**3 + x;
plot_curve(x, y)
```

11.5 幂函数：底数为自变量

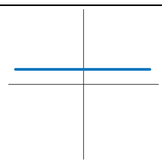
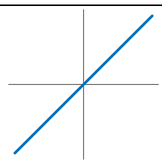
幂函数 (power function) 是形如下式的函数。

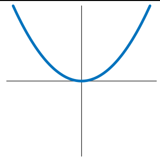
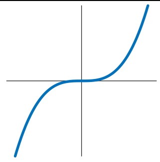
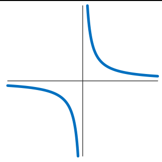
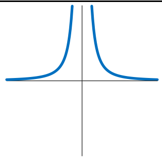
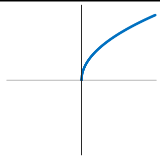
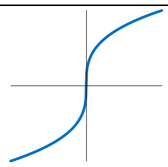
$$f(x)=k\cdot x^{p} \tag{11}$$

其中，自变量 x 为底数 (base)，p 为指数 (exponent 或 power)。白话说，幂就是一个数和它自己相乘的积；比如，$xx = x^2$ 是二次幂，$xxx = x^3$ 是三次幂，$xxx = x^4$ 是四次幂。

表 2 总结常用的幂函数。

表 1. 几个常用幂函数

幂函数	例子	图像
常数函数 (constant function)	$f(x)=1=x^0$	
恒等函数 (identity function)	$f(x)=x=x^1$	

平方函数 (square function)	$f(x)=x^2$	
立方函数 (cubic function)	$f(x)=x^3$	
反比例函数 (reciprocal function)	$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	
反比例平方函数 (reciprocal squared function)	$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$	
平方根函数 (square root function)	$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	
立方根函数 (cubic root function)	$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$	

平方根函数

图 15 (a) 所示红色曲线为**平方根函数** (square root function)，对应函数式为。

$$y=f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

注意上式函数定义域 $x\geq 0$，即非负实数；函数值域也是非负实数。`numpy.sqrt(x)` 可以用来计算平方根，也可以用 `x**(1/2)` 来计算。

立方根函数

图 15 (b) 所示红色曲线为**立方根函数** (cubic root function)，对应函数式为。

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \tag{13}$$

`numpy.cbrt(x)` 可以用来计算立方根。注意，`x**(1/3)` 不可以计算负数立立方根。

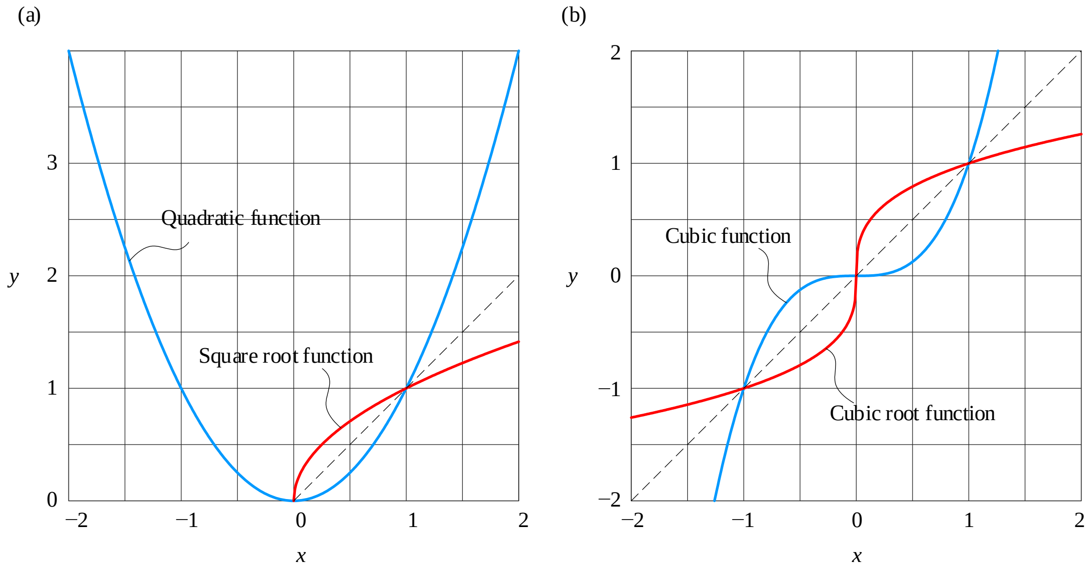


图 15. 平方根和立方根函数

奇偶性

如图 16 (a) 所示，当 p 为偶数时，幂函数为偶函数，图像关于 y 轴对称；p 值越大，x 绝对值增大时，函数值越快速接近正无穷。

如图 16 (b) 所示，当 p 为奇数时，幂函数为奇函数，图像关于原点对称；p 值越大，x 绝对值增大时，函数值越快速接近正无穷或负无穷。

此外，图 16 两幅图中所有函数可以写作 $f(x) = x^p$，所有曲线都经过 (1, 1)。

请大家修改前文代码自行绘制图 16。

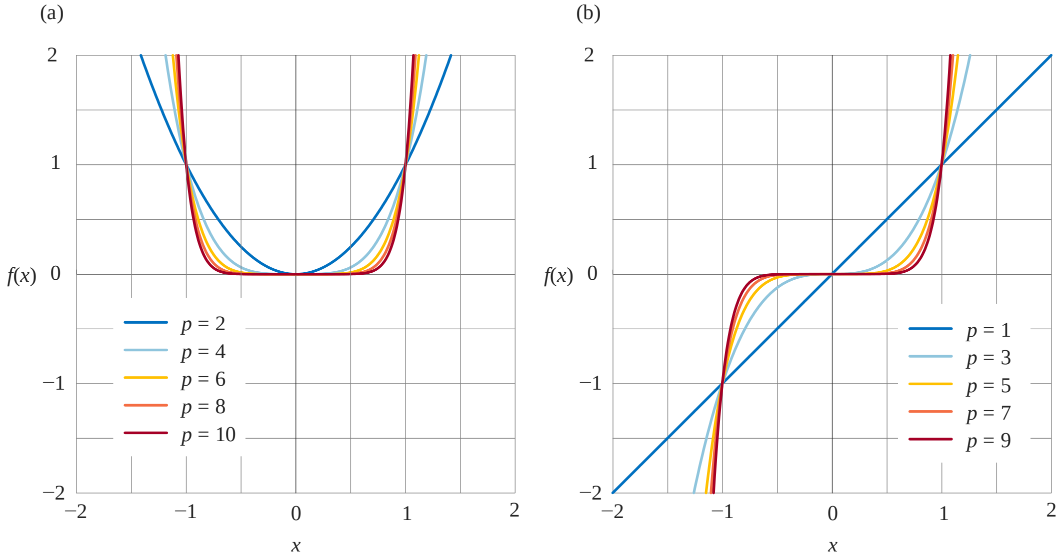


图 16. 幂函数 p 分别为偶数和奇数时，图像特征

表 2. 用英文读乘幂

英文表达	中文表达
x^n	x to the n x to the n-th x to the n-th power the n-th power of b x raised to the n-th power x raised to the power of n x raised by the exponent of n
a^2	a squared the square of a a raised to the second power a to the second
a^3	a cubed the cube of a a to the third
2^5	the fifth power of 2 2 raised to the fifth power 2 to the power of 5 2 to the fifth power 2 to the fifth 2 to the five
$y = 2^x$	y equals 2 to the power of x
$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$	square root of two
$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$	cube root of two
$\sqrt[2]{64} = 8$	The square root of sixty four is eight.
$\sqrt[3]{64} = 4$	The cube root of sixty four is four.
$\sqrt[6]{64} = 2$	The sixth root of sixty four is two.
$\sqrt[c]{a^b}$	c-th root of a raised to the b power

反比例函数

反比例函数 (inversely proportional function) 的一般式

$$y = f(x) = \frac{k}{x} \tag{14}$$

如图 17 所示，$|k|>1$ 将双曲线朝远离原点方向拉伸；$|k|<1$ 将双曲线向靠近原点方向压缩。

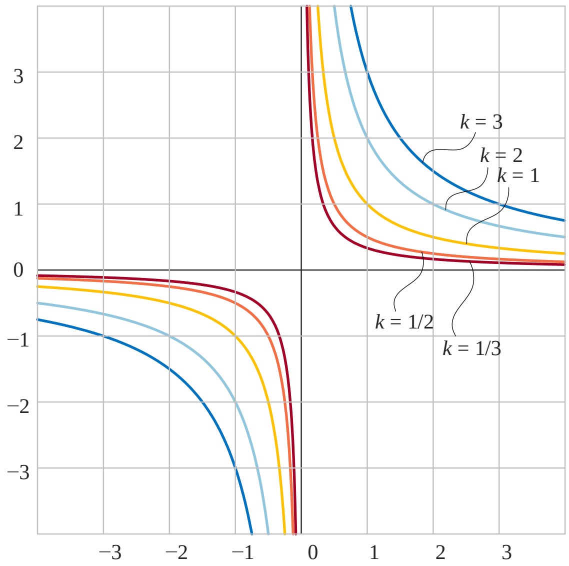


图 17. k 取不同值时反比例函数图像 $f(x) = k/x$

表 3. 用英文读比例函数

数学表达	英文表达
$y = \frac{k}{x}$	x is inversely proportional to y
$h = \frac{k}{t^2}$	h is inversely proportional to the square of t h varies inversely with the square of t

如图 17 所示反比例函数有两条**渐近线** (asymptote)，**水平渐近线** (horizontal asymptote) $y = 0$ 和**竖直渐近线** (vertical asymptote) $x = 0$.

所谓渐近线是指与曲线极限相关的一条直线，当曲线上某动点沿该曲线的一个分支移向无穷远时，动点到该渐近线的垂直距离趋于零。图 17 中，当 x 从右侧接近竖直渐近线，函数值无约束地接近**正无穷** (positive infinity)；相反，当 x 从左侧接近竖直渐近线，函数值无约束地接近**负无穷** (negative infinity)。

反比例函数实际上是旋转双曲线。

有理函数

反比例函数移动之后可以得到最简单的**有理函数** (rational function)，解析式如下。

$$f(x) = \frac{k}{x-h} + a \tag{15}$$

h 左右移动竖直渐近线，a 上下移动水平渐近线，比如下例。

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + 1 \tag{16}$$

如图 18 所示，$y = 1$ 为 (16) 对应反比例函数的水平渐近线；$x = 1$ 为竖直渐近线。

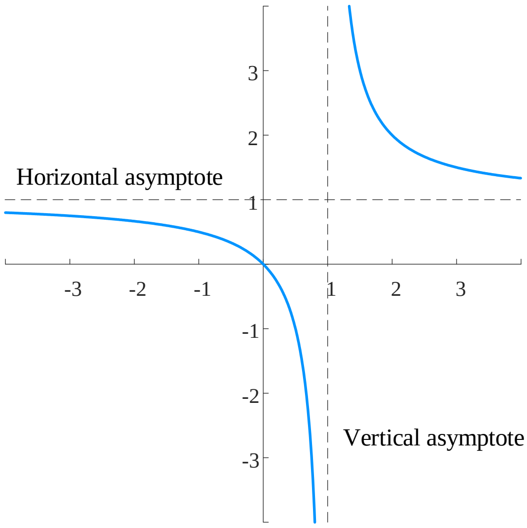


图 18. 反比例函数两条渐近线

11.6 分段函数：不连续函数

分段函数 (piecewise function) 是一类不连续函数；分段函数是自变量 x 的不同的取值范围有不同的解析式的函数。

图 19 对应下例分段函数。

$$f(x) = \begin{cases} 4 & x < -2 \\ -1 & -2 \le x < 3 \\ 3 & 3 \le x \end{cases} \tag{17}$$

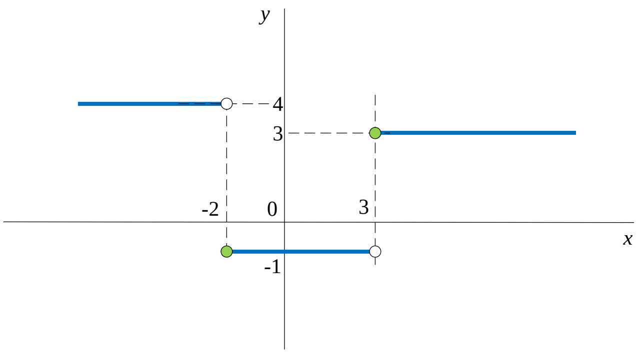


图 19. 分段函数

插值 (interpolation) 指的是通过已知离散数据点，在一定范围内推导求得新数据点的方法。线性插值 (linear interpolation)是指插值函数为一次函数。

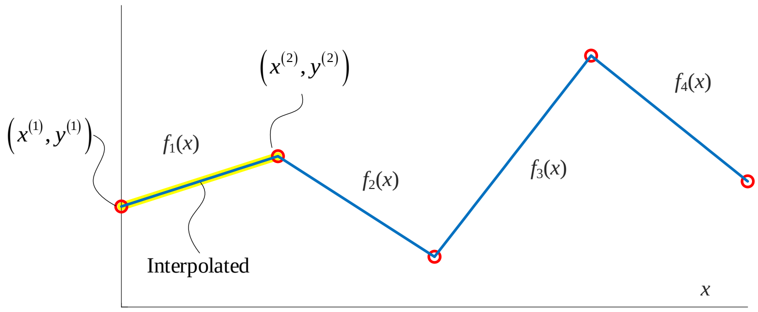


图 20. 一次函数两点式用于线性插值

插值函数是分段函数时，也称分段插值 (piecewise interpolation)，每两个相邻的数据点之间便是一个分段函数。

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x^{(1)}\le x<x^{(2)} \\ f_2(x) & x^{(2)}\le x<x^{(3)} \\ \cdots & \cdots \\ f_{n-1}(x) & x^{(n-1)}\le x<x^{(n)} \end{cases} \tag{18}$$

如图 20 所示，所有红色的圆点为已知离散数据点。

相邻两点连接得到的线段解析式便是线性插值分段函数，两点式公式常用在线性插值。举个例子，给定的两点$(x^{(1)}, y^{(1)})$和$(x^{(2)}, y^{(2)})$可以确定分段函数$f_1(x)$。

除了线性插值之外，本系列丛书还要介绍其他常见插值方法。

绝对值函数

绝对值函数 (absolute value function) 就是分段函数。严格来讲，绝对值函数不属于代数函数。绝对值函数的一般式为。

$$f(x)=k\left|x-h\right|+a \tag{19}$$

举个最简单的例子。

$$f(x)=k\left|x\right| \tag{20}$$

对于 $f(x) = k|x|$ 函数，$x = 0$ 为 $f(x)$ 的尖点，它破坏了函数的光滑。图 21 所示为 k 影响绝对值函数 $f(x) = k|x|$ 的开口大小；k 的绝对值越大，绝对值函数开口越小。

`numpy.absolute()` 计算绝对值。请大家自行编写代码绘制图 21，并讨论 k 为不同负整数时函数图像特点。

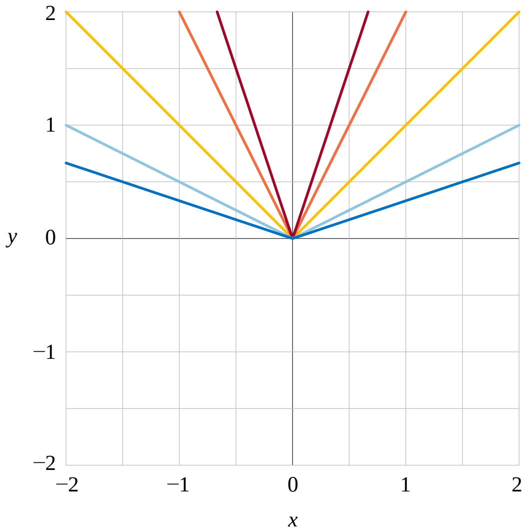


图 21. k 影响绝对值函数 $f(x) = k|x|$

本章除了介绍几种常见的代数函数以外，还有一个要点——参数对函数形状、性质的影响。请大家思考这几个问题。

一次函数的斜率和截距，如何影响函数图像？

哪个参数影响二次函数的开口方向和大小？二次函数什么时候存在最大值或最小值？二次函数的对称轴位置？

用叠加这个思想，请大家回忆，多项式函数 $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 5$ 相当于由哪些函数构造而成？它们各自的函数图像分别怎样？