3 Geometry 几何

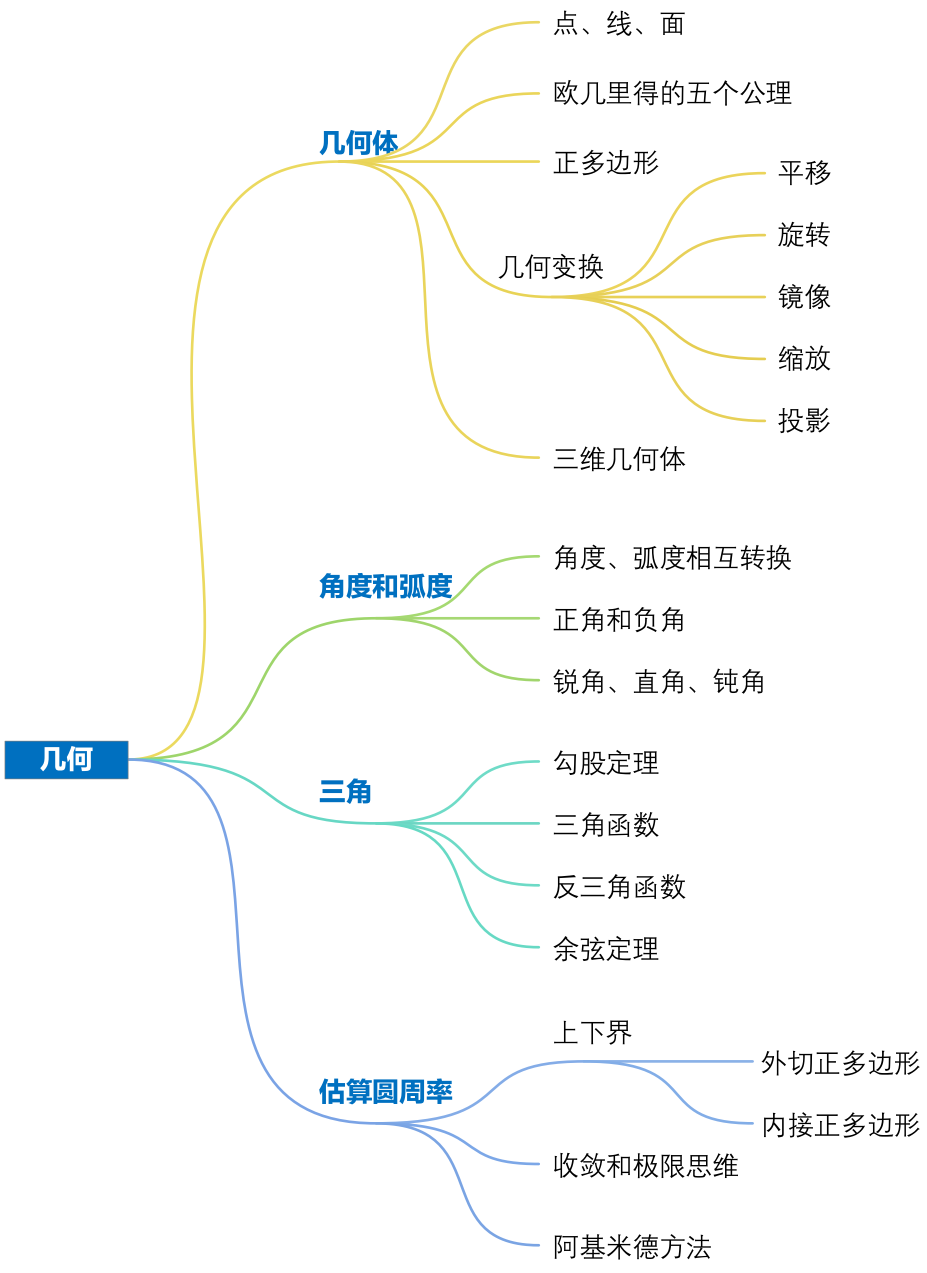
音乐的美由耳朵来感受，几何的美由眼睛来感受

不懂几何，勿入斯门。

Let no one destitute of geometry enter my doors.

—— 柏拉图 (Plato) | 古希腊哲学家 | 424/423 ~ 348/347 BC

- `ax.add_patch()` 绘制图形
- `math.degrees()` 将弧度转换为角度
- `math.radians()` 将角度转换成弧度
- `matplotlib.patches.Circle()` 创建正圆图形
- `matplotlib.patches.RegularPolygon()` 创建正多边形图形
- `numpy.arccos()` 计算反余弦
- `numpy.arcsin()` 计算反正弦
- `numpy.arctan()` 计算反正切
- `numpy.cos()` 计算余弦值
- `numpy.deg2rad()` 将角度转化为弧度
- `numpy.rad2deg()` 将弧度转化为角度
- `numpy.sin()` 计算正弦值
- `numpy.tan()` 计算正切值


几何
几何体
点、线、面
欧几里得的五个公理
正多边形
几何变换
平移
旋转
镜像
缩放
投影
三维几何体
角度和弧度
角度、弧度相互转换
正角和负角
锐角、直角、钝角
三角
勾股定理
三角函数
反三角函数
余弦定理
估算圆周率
上下界
外切正多边形
内接正多边形
收敛和极限思维
阿基米德方法

3.1 几何缘起：根植大地，求索星空

毫不夸张地说，几何思维印刻在人类基因中。任何人类个体从生而为人那时起，时时刻刻看到的、触摸的都是各种各样的几何形体。大家现在不妨停下来看看周围环境中的几何体，相信你一定会惊叹整个物质世界就是几何的世界。正如约翰内斯·开普勒 (Johannes Kepler, 1571 ~ 1630) 所言“但凡有物质的地方，就有几何。”

哪怕在遥远的古代文明，人类活动也离不开几何，丈量距离、测绘地形、估算面积、计算体积、营造房屋、设计工具、制作车轮、工艺美术…无处不需要几何这个数学工具。

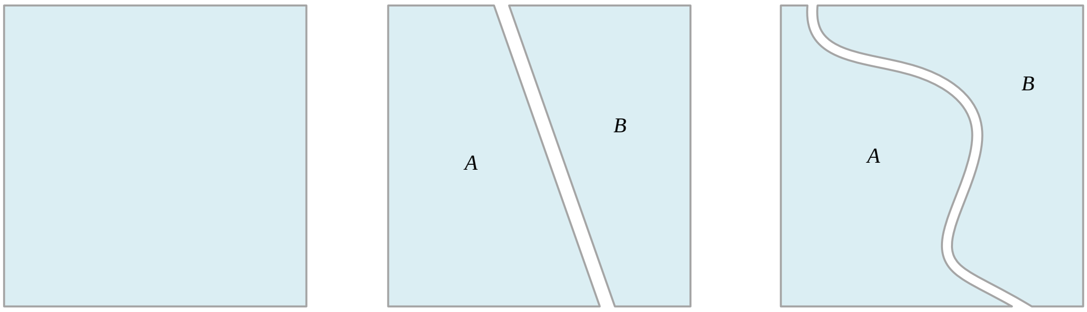


图 1. 各种形状田地地块

几何滥觞于田间地头。在古埃及，尼罗河每年都要淹没河两岸。当洪水退去，留下的肥沃土壤让河两岸平原的农作物生长；但是洪水同样冲走了标示不同耕地界桩。

因此法老每年都要派大量测量员重新丈量土地；测绘员们用打结的绳子去丈量土地和角度，以便重置这些界桩。计算矩形农田面积当然简单；对于复杂的几何形体，他们经常将土地分割成矩形和三角形来估算土地面积。古埃及的几何知识则随着测量难度和精度提高而不断累积精进。

无独有偶，中国古代重要的数学典籍之一《九章算术》的第一章名为“方田”。这一章很多题目以丈量土地为例，讲解如何计算长方形、三角形、梯形、圆形等等各式几何形状的面积。

书法、绘画、工艺美术、建筑等等也是体现的也是几何美学；比如，中国的长城、木结构建筑、拱桥都是几何美学的结晶。此外，人类对天体观察研究体现的也是几何思维。

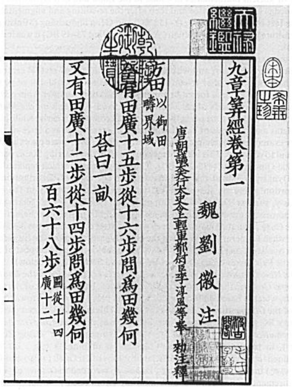


图 2. 《九章算术》第一章开篇

几何学的重大飞跃来自于希腊。希腊人创造了几何 geometron (英文：geometry) 这个词；“geo”在希腊语里是“大地”的意思，“metron”的意思是“测量”。

在古希腊，几何学受到高度重视；几何是博雅教育七艺的重要一门课程。据传说，柏拉图学院门口刻着如下这句话：“不懂几何者，不许入内。”

图 3 所示为古希腊几何发展时间轴上重要的数学家，以及同时代的其他伟大思想家；值得注意的是，中国春秋时代的孔子和苏格拉底、柏拉图、亚里士多德，竟然是同属一个时代；东西方两条历史轴线给人平行时空的错觉。

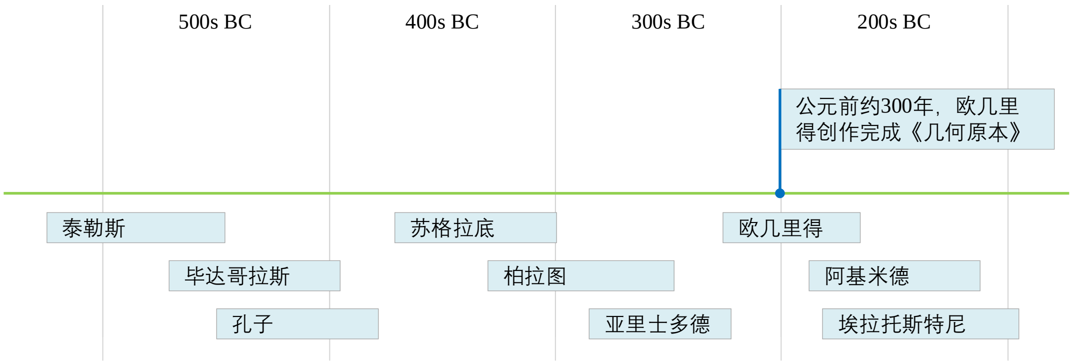


图 3. 古希腊几何发展历史时间轴

欧几里得 (Euclid)
古希腊数学家 | 约公元前330年 ~ 公元前275年
被称为“几何之父”，他的《几何原本》堪称西方现代数学的开山之作

古希腊数学家中关键人物是**欧几里得** (Euclid)，他的巨著**《几何原本》**(The *Elements*) 首次尝试将几何归纳成一个系统。

不夸张地说，欧几里得《几何原本》是整个人类历史上最成功、影响最深刻的数学教科书，没有之一。《几何原本》不是习题集，它引入严谨的推理，使得数学体系化。

古希腊的几何学发展要远远领先于其他数学门类，可以说古希腊的算术和代数知识也都是建立在几何学基础之上。而代数的大发展要归功于一位波斯数学家——花拉子密，这是我们下一章要介绍的人物。

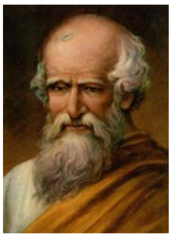
中文“几何”一词源自于《几何原本》的翻译。1607 年，明末科学家徐光启和意大利传教士**利玛窦** (Matteo Ricci) 共同翻译完成《几何原本》前六章。

他们确定了包括“几何”、“点”、“直线”、“角”等大量中文译名。“几何”一词的翻译特别精妙，发音取自 geo，而“几何”二字的中文又有“大小如何”的含义。比如《九章算术》几乎所有的题目都以“几何”这一提问结束，比如“问：为田几何？”

图 4.《几何原本》1570 年首次被翻译为英文版

图 5.《中国图说》 (*China Illustrata*) 中插图描绘利玛窦和徐光启

在估算圆周率的竞赛中，**阿基米德** (Archimedes) 写下浓墨重彩的一笔；阿基米德利用圆内接正多边形和圆外切正多边形，估算圆周率在 223/71 和 22/7 之间，即 3.140845 和 3.142857 之间。



阿基米德 (Carl Friedrich Gauss)
古希腊数学家、物理学家 | 公元前287年 ~ 公元前212年
常被称作“力学之父”，估算圆周率

公元前 212 年，阿基米德的家乡被罗马军队攻陷时，阿基米德还在潜心研究几何问题；罗马士兵闯入他的家，阿基米德大声训斥这些不速之客，“别弄乱我的圆”；但是，罗马士兵还是踩坏了画在沙盘上的几何图形，并杀死了阿基米德。

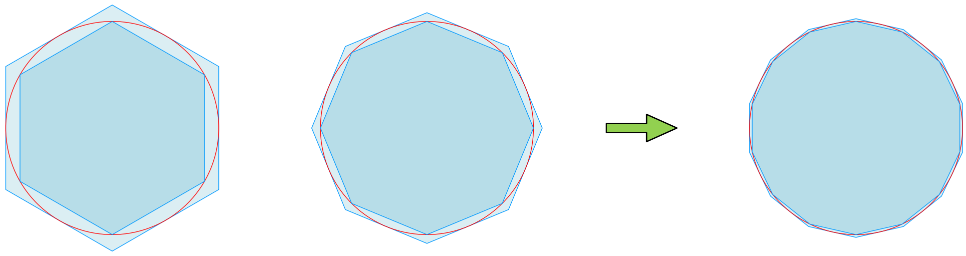


图 6. 圆形内接和外切正 6、正 8 边、正 16 边形

几何学有纬地经天之功；比如，利用相似三角形原理，古希腊数学家**埃拉托斯特尼** (Eratosthenes) 计算地球直径。

正午时分，在点 *A* (阿斯旺) 太阳光垂直射入深井中，井底可见太阳倒影。此时，在点 *B* (亚历山大港)，埃拉托斯特尼找人测量一个石塔影子的长度；利用石塔的高度和影子的长度，埃拉托斯特尼计算得到图 7 中 $\theta = 7°$，也就是 *A* 和 *B* 两点的距离为整个地球圆周的 7/360。

埃拉托斯特尼恰好知道 *AB* 距离，从而他估算地球的周长；进而计算得到地球直径在 39,690 千米到 46,620 千米之间，误差约 2%。

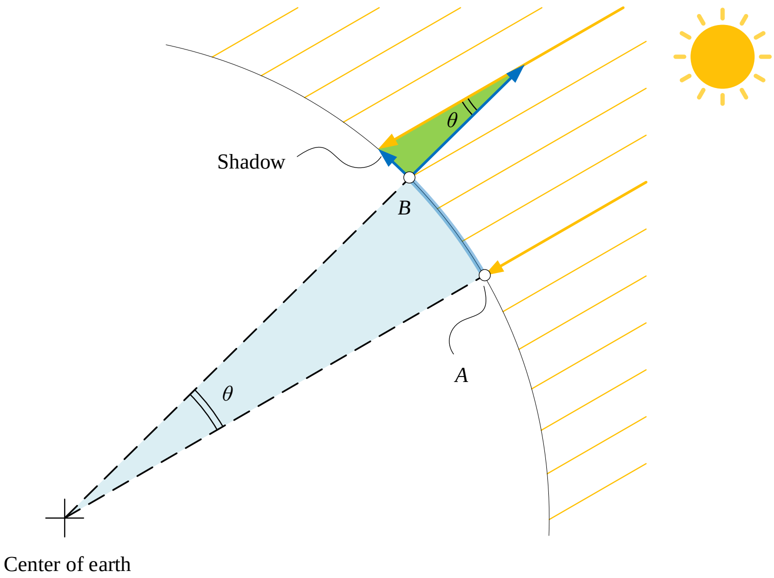


图 7. 埃拉托斯特尼计算地球直径用到的几何知识

托勒密 (Claudius Ptolemy) 在约 150 年创作《天文学大成》 (*Almagest*)；这本书可以说是代表了古希腊天文学的最高水平，它也是古希腊几何思维的结晶。

托勒密总结前人成果，在书中明确提出**地心说** (geocentric model)——地球位于宇宙中心，固定不动，星体绕地球运动。此外，《天文学大成》是人类历史上第一个系统建立了三角函数表。

托勒密 (Claudius Ptolemy)
希腊数学家、天文学 | 100年 ~ 170年
创作《天文学大成》，系统提出地心说

托勒密的地心说被宗教思想奉为圭臬，牢牢禁锢人类长达一千两百多年，直到**哥白尼** (Nicolaus Copernicus, 1473 ~ 1543) 唤醒人类沉睡的思想世界。也正是利用古希腊发展的圆锥曲线知识，开普勒提出了行星运动三定律；这是本书后续要介绍的内容。

图 8. 后人绘制的托勒密地心说模型

3.2 点动成线，线动成面，面动成体

点动成线，线动成面，面动成体——相信大家对这句话耳熟能详。点没有维度，线是一维，面是二维，体是三维；当然，在数学上，四维乃至多维都是存在的。

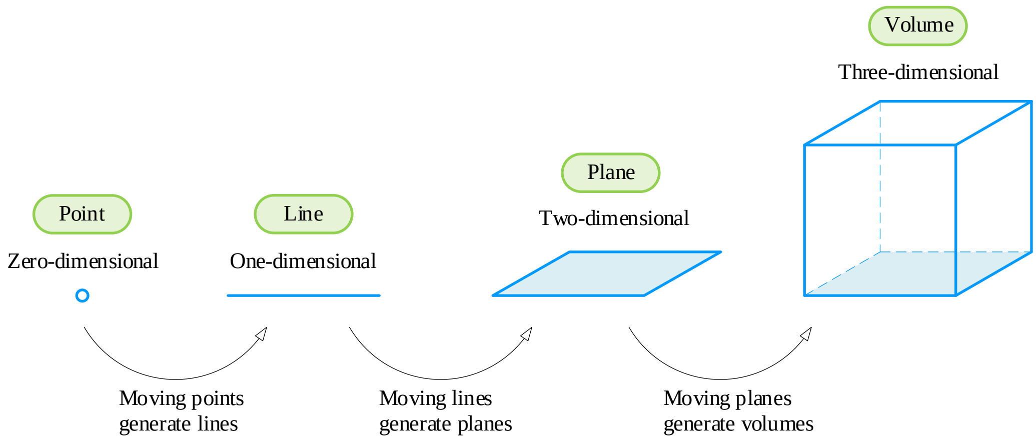


图 9. 点动成线，线动成面，面动成体

点

点确定空间的一个位置，点本身没有长度、面积等几何属性。

所有几何图形都离不开点，图 10 所示为常见的几种点——**端点** (endpoint)、**中点** (midpoint)、**起点** (initial point)、**终点** (terminal point)、**圆心** (center)、**切点** (point of tangency)、**顶点** (vertex)、**交点** (point of intersection)。点和点之间的线段长度叫**距离** (distance)。

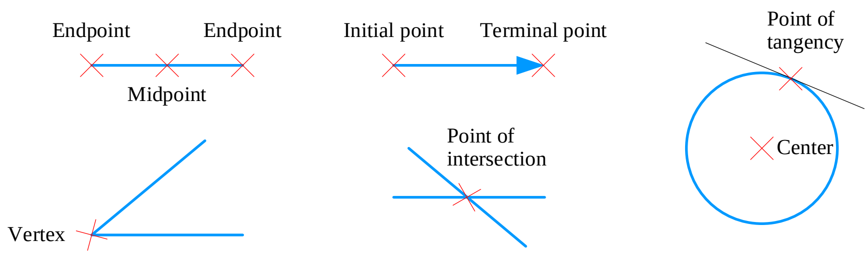


图 10. 几种点

线

直线 (line) **沿两个方向无限延伸** (extends in both directions without end)，**没有端点** (has no endpoints)。**射线** (ray 或 half-line) 开始于一端点，仅沿一个方向无限延伸。**线段** (line segment) 有两个**端点** (endpoint)。

线段具有**长度** (length) 这个几何性质，但是没有面积这个性质。

给定参考系，线又可以分为**水平线** (horizontal line)、**斜线** (oblique line) 和**竖直线** (vertical line)。

图 11 还给出其他几种线：**边** (edge)、**曲线** (curve 或 curved line)、**等高线** (contour line)、**法线** (normal line)、**切线** (tangent line)、**割线** (secant line) 等。

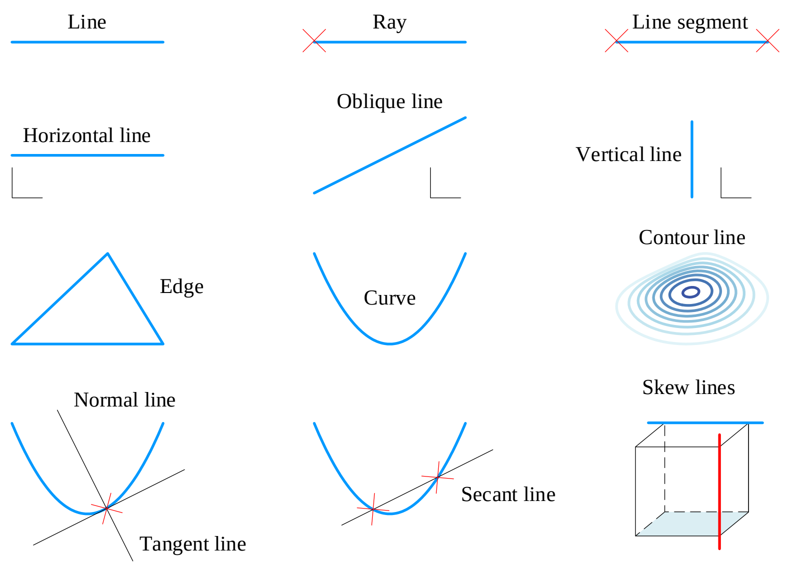


图 11. 几种线

在平面上，线与线之间有四种常见的关系：**平行** (parallel)、**相交** (intersecting)、**垂直** (perpendicular) 和**重合** (coinciding)。

两条线平行可以记作 $l_1 \parallel l_2$ (读作 line l sub one is parallel to the line l sub two)。l_1 与 l_2 相交于点 P 可以读作“line l sub one intersects the line l sub two at point capital P”。两条线垂直可以记作 $l_1 \perp l_2$ (读作 line l sub one is perpendicular to the line l sub two)。三维空间中，两条直线还可以互为**异面线** (skew line)。

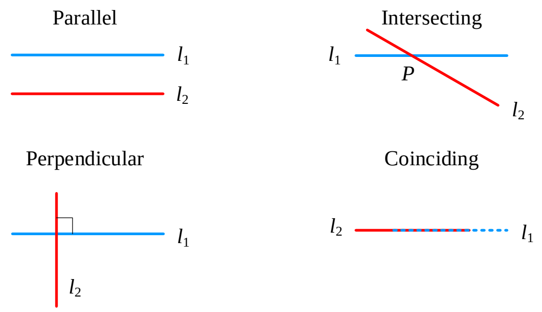


图 12. 平面上两条线的关系

如图 13 所示，可视化时还会用到不同样式的线型，比如**实线** (solid line 或 continuous line)、**粗实线** (heavy solid line 或 continuous thick line)、**点虚线** (dotted line)、**短划线** (dashed line)、**点划线** (dash-dotted line) 等等。

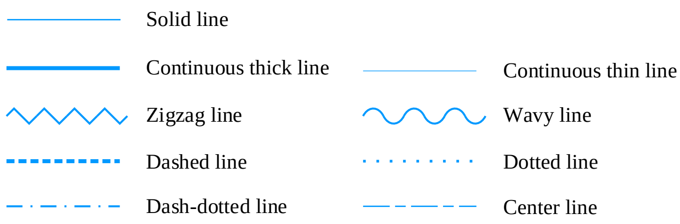


图 13. 几种线的样式

欧几里得的五个公理

在《几何原本》中，欧几里得提出五个公理。

- 任意两点可以画一条直线；
- 任意线段都可以无限延伸成一条直线；
- 给定任意线段，以该线段为半径，以一个端点为圆心，可以画一个圆；
- 所有直角都全等；
- 两直线被第三条直线所截，如果同侧两内角之和小于两个直角之和，则两条直线则会在该侧相交。

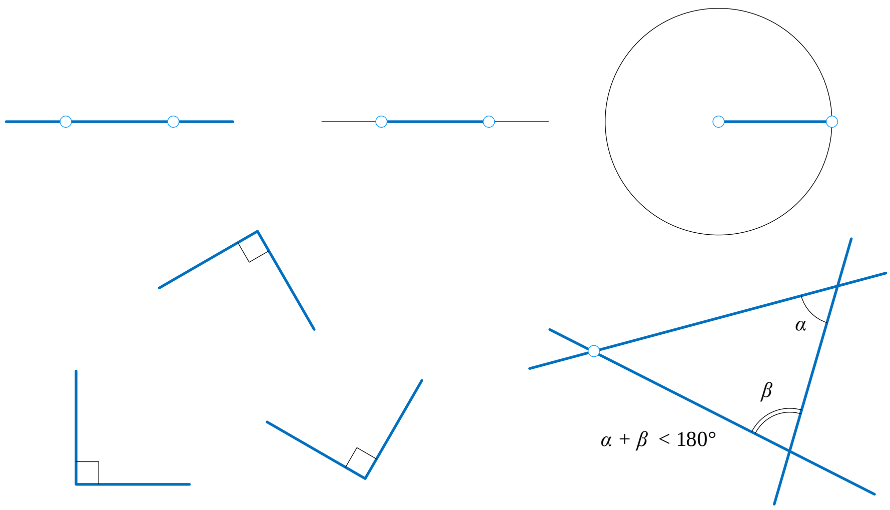


图 14. 欧几里得提出的五个几何公理

以五个公理为基础，欧几里得一步步建立起几何学大厦。坚持第五条定理，我们在欧几里得几何体系之内；而去掉第五条公理，则进入非欧几何体系。值得一提的是，非欧几何中的黎曼几何为爱因斯坦的广义相对论准备了数学基础。

正多边形

正多边形 (regular polygons) 是边长相等的多边形；正多边形内角相等。我们将在圆周率估算中用到正多边形相关知识。这些平面上的正多边形有面积这个性质。

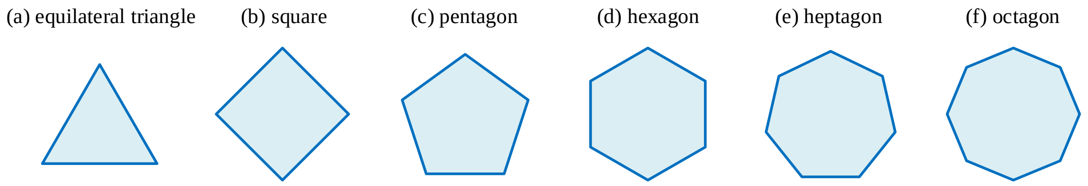


图 15. 六个正多边形

以下代码可以绘制图 15 中六个正多边形。

```python
# Bk_Ch3_01

import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import RegularPolygon, Circle
import numpy as np

for num_vertices in [3,4,5,6,7,8]:

    fig, ax = plt.subplots()
    ax.set_aspect('equal')

    hexagon_inner = RegularPolygon((0,0), numVertices=num_vertices,
                                   radius=1, alpha=0.2, edgecolor='k')
    ax.add_patch(hexagon_inner)

    plt.axis('off')

    plt.xlim(-1.5,1.5)
    plt.ylim(-1.5,1.5)
    plt.show()
```

三维几何体

图 16 所示为常见三维几何体，它们依次是：**正球形** (sphere)、**圆柱体** (cylinder)、**圆锥** (cone)、**锥台** (cone frustum)、**正方体** (cube)、**立方体** (cuboid)、**平行六面体** (parallelepiped)、**四棱台** (square pyramid frustum)、**四棱锥** (square-based pyramid)、**三棱锥** (triangle-based pyramid)、**三棱柱**

(triangular prism)、**四面体** (tetrahedron)、**八面体** (octahedron)、**五棱柱** (pentagonal prism)、**六棱柱** (hexagonal prism) 和**五棱锥** (pentagonal prism)。

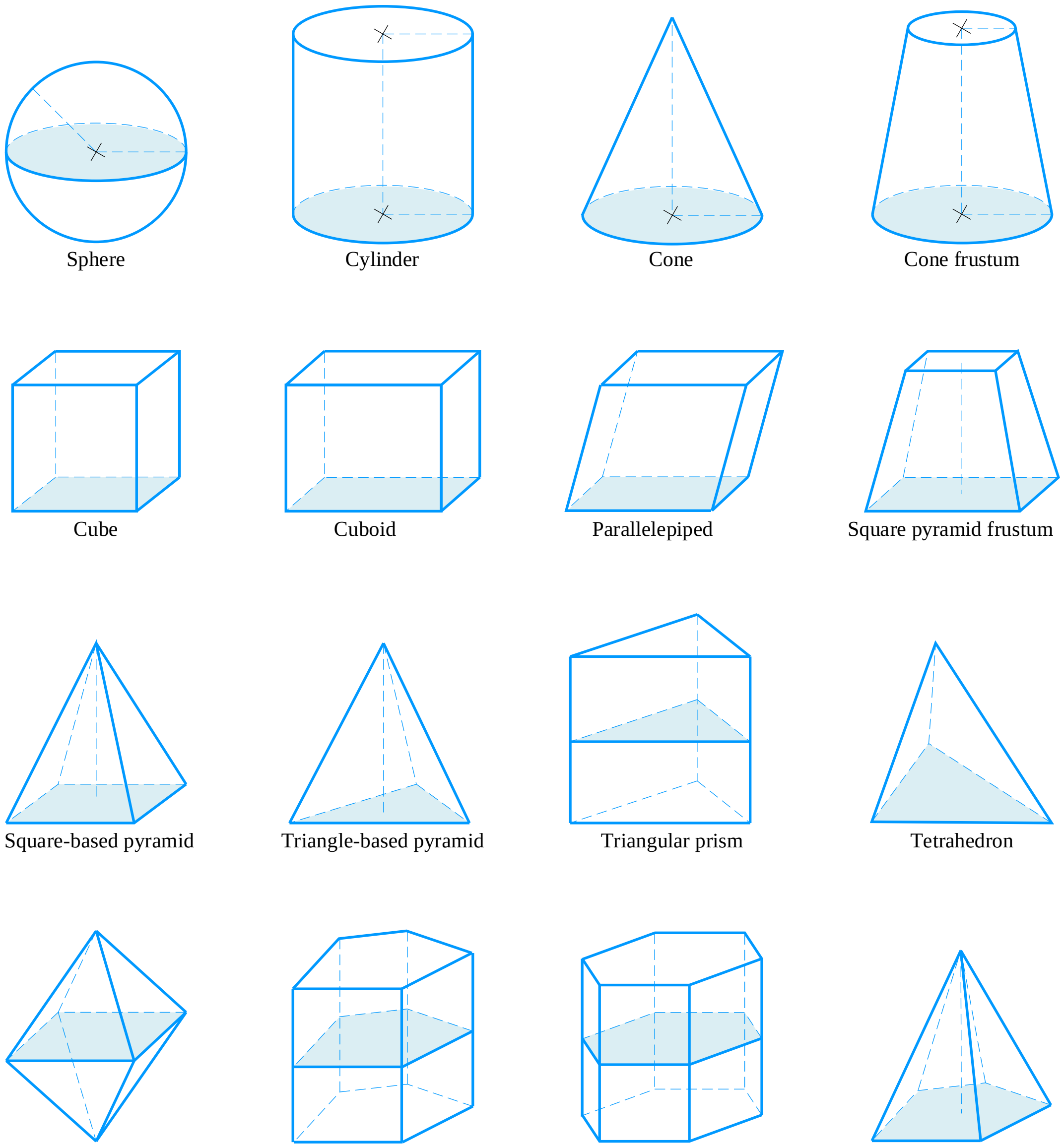


图 16. 常见三维几何体

柏拉图立体 (Platonic solid)，又称正多面体。图 17 所示为五个正多面体，包括**正四面体** (tetrahedron)、**立方体** (cube)、**正八面体** (octahedron)、**正十二面体** (dodecahedron) 和**正二十面体** (icosahedron)。

正多面体的每个面全等，均为**正多边形** (regular polygons)。图 18 所示为五个正多面体展开得到的平面图形。表 1 总结五个正多面体的结构特征。

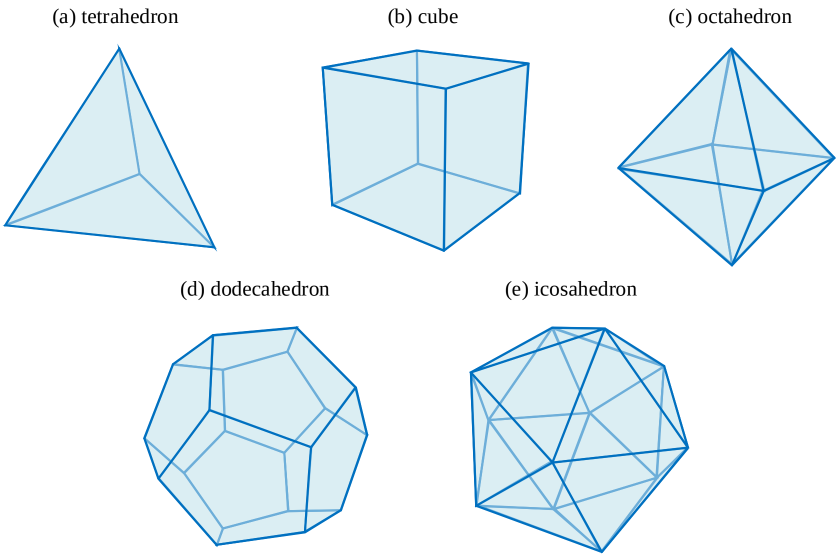


图 17. 五个正多面体

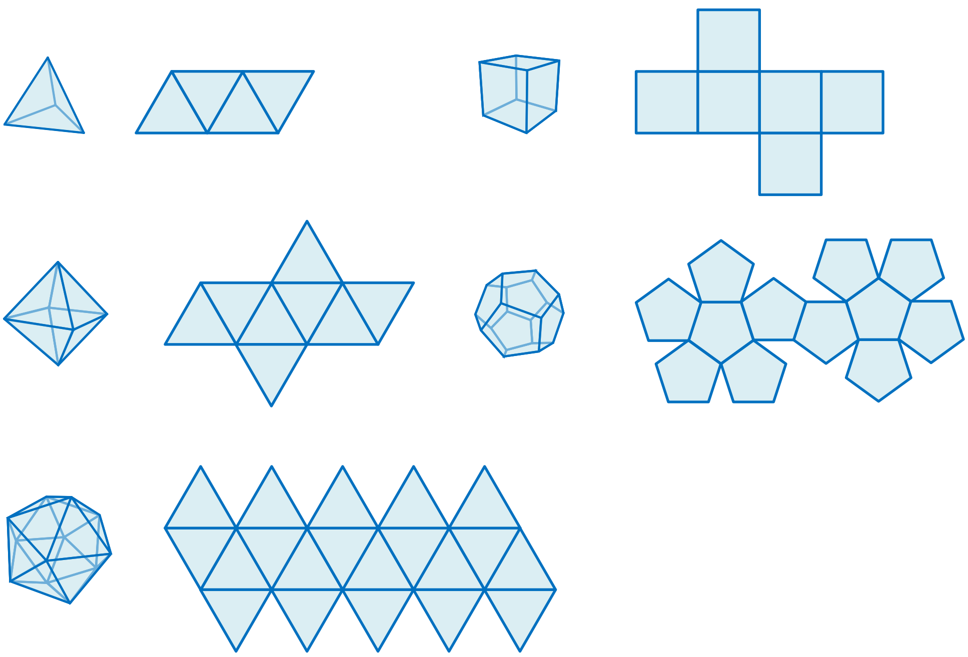


图 18. 五个正多面体展开得到的平面图形

表 1. 正多面体的特征

正多面体	顶点数	边数	面数	面形状
Tetrahedron	4	6	4	Equilateral triangle

Cube	8	12	6	Square
Octahedron	6	12	8	Equilateral triangle
Dodecahedron	20	30	12	Pentagon
Icosahedron	12	30	20	Equilateral triangle

几何变换

几何变换 (geometric transformation) 是本系列丛书中重要的话题之一；我们将在函数变换、线性变换、多元高斯分布等话题中用到几何变换。

在平面上，可以通过**平移** (translate)、**旋转** (rotation)、**镜像** (reflection)、**缩放** (scaling)、**投影** (projection) 等变换某个图形来生成新的图形。这些几何变换还可以按一定顺序组合完成特定变换。图 19 所示为几种常见几何变换。

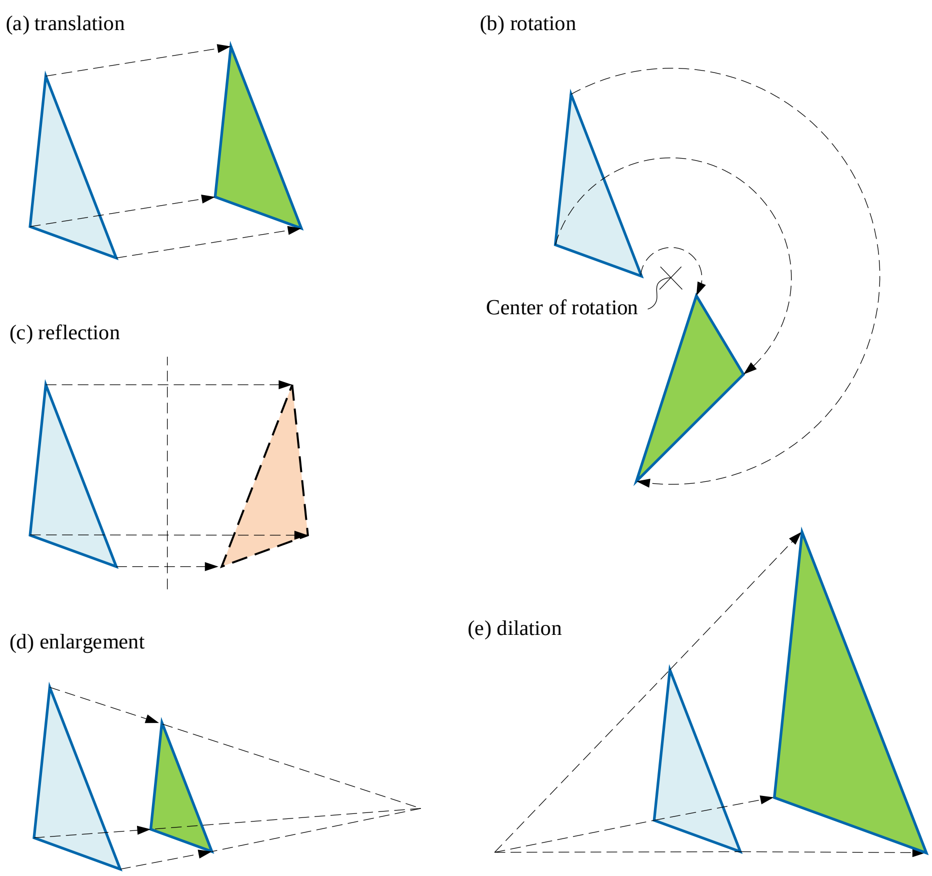


图 19. 常见几何变换

3.3 角度和弧度

角度

度 (degree) 是一种常用的度量角度单位；角度可以用**量角器** (protractor) 测量。**一周** (a full circle、one revolution 或 one rotation) 对应 360°；1° 对应 60 **分** (minute)，即 $1° = 60'$；$1'$ 对应 60 **秒** (second)，即 $1' = 60''$。

25.1875°被称作**小数角度** (decimal degree)，可以换算得到 $25°11'15''$ (twenty five degrees eleven minutes and fifteen seconds)。

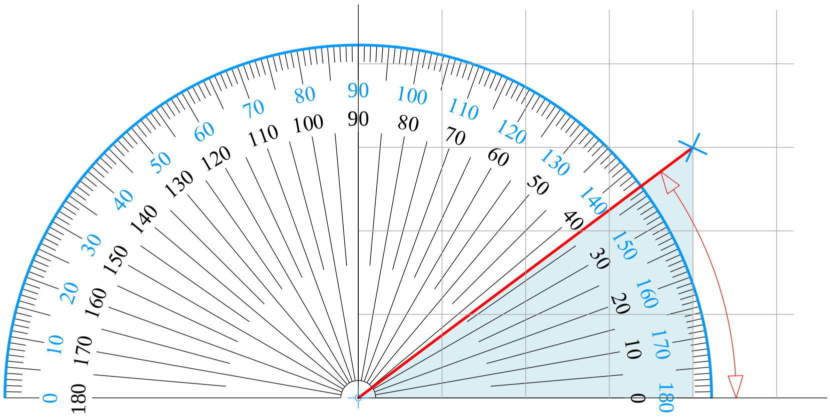


图 20. 量角器测量角度

弧度

弧度 (radian) 常简写作 rad。1 个弧度相当于 $1 \text{ rad} \approx 57.2958°$。

在 math 库中，`math.radians()` 函数将角度转换成弧度；`math.degrees()` 将弧度转换为角度。

NumPy 中，可以用 `numpy.rad2deg()` 函数将弧度转化为角度；用 `numpy.deg2rad()` 将角度转化为弧度。

常用弧度和角度的换算关系如下。

$$
\begin{aligned}
360° &= 2\pi \text{ rad} \\
180° &= \pi \text{ rad} \\
90° &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} \\
45° &= \frac{\pi}{4} \text{ rad} \\
30° &= \frac{\pi}{6} \text{ rad}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

正角和负角

如果旋转为**逆时针** (counter-clockwise)，角度为**正角** (positive angle)；如果旋转为**顺时针** (clockwise)，角度为**负角** (negative angle)。

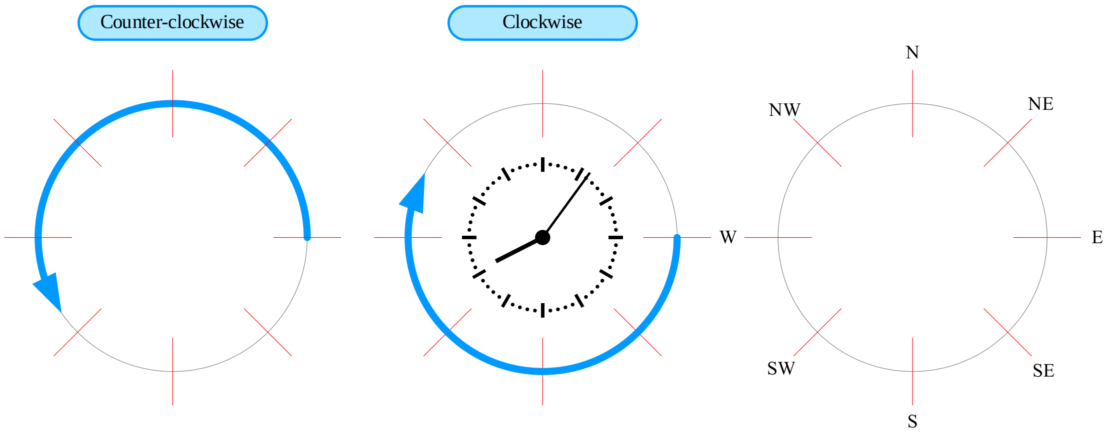


图 21. 逆时针、顺时针和方位

锐角、直角、钝角

锐角 (acute angle) 是指小于 90°的角；**直角** (right angle) 是指等于 90°的角；**钝角** (obtuse angle) 是指大于 90°并且小于 180°的角。

请大家特别注意这三个角度，在线性代数、数据科学中它们的内涵将得到不断丰富。

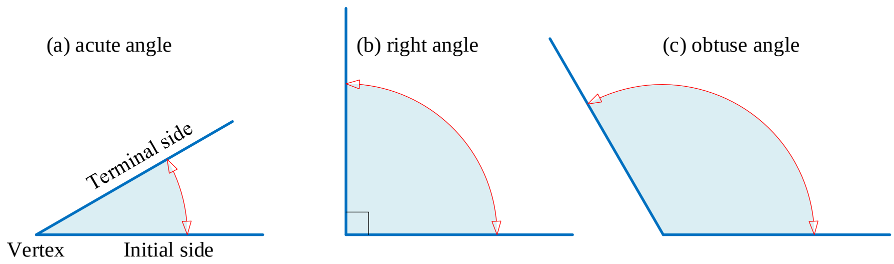


图 22. 锐角、直角和钝角

3.4 勾股定理到三角函数

勾股定理

《周髀算经》编写于公元前一世纪之前，其中记录着商高与周公的一段对话。商高说“故折矩，勾广三，股修四，经隅五。”后人把这一发现简化成，勾三、股四、弦五。《九章算术》的最后一章讲解的也是勾股定理。

满足勾股定理的一组整数，比如 (3, 4, 5)，叫做勾股数。

在西方，勾股定理被称作**毕达哥拉斯定理** (Pythagorean Theorem)。

古代很多文明都独立发现了勾股定理。想来原因也不难理解，古时人们在丈量土地，建造房屋时，都离不开直角。

古埃及人善于使用绳索构造特定几何关系。比如，绳索等距打结，就可以充当带刻度的直尺；绳索一端固定，另外一段绕固定端旋转一周，就可以得到正圆。

古埃及人也发现 3:4:5 的直角三角形；据此，利用绳索可以获得直角。绳索等距打 13 个结，形成 12 等长线段；按照 3:4:5 比例分配等距线段，得到一个直角三角形。3 等分和 4 等分的两边的夹角便是直角。

勾股定理的一般形式如下。

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{2}$$

如图 23 所示，a 和 b 为直角边，c 为斜边。图中，a^2、b^2、c^2 分别为三个正方形的面积。

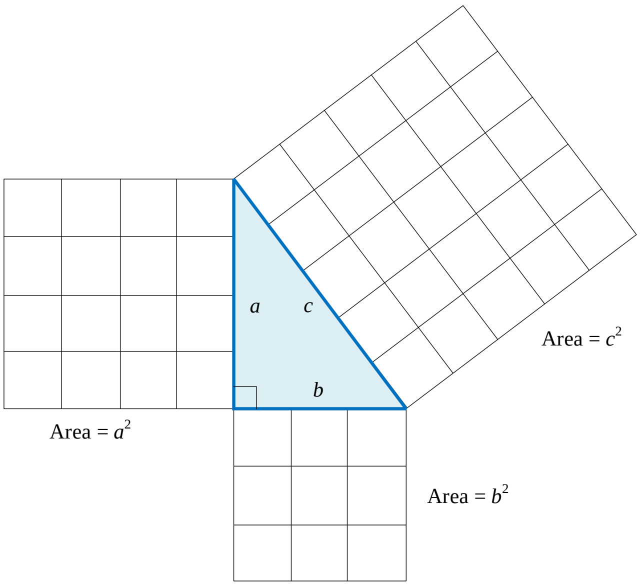


图 23. 图解勾股定理

三角函数

三角函数 (trigonometric function) 的自变量为弧度角度，因变量为直角三角形斜边、临边、对边中两个长度的比值。每个比值都有其特定的名字。

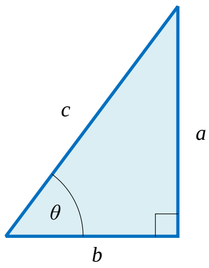


图 24. 直角三角形中定义三角函数

如图 24 所示，θ 的**正弦** (sine) 是对边 a 与斜边 c 的比值。

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \tag{3}$$

`numpy.sin()` 可以用来计算正弦值，输入为弧度。

θ 的**余弦** (cosine) 是临边 b 与斜边 c 的比值。

$$\cos\theta = \frac{b}{c} \tag{4}$$

`numpy.cos()` 可以用来计算余弦值，输入同样为弧度。

θ 的**正切** (tangent) 是对边 a 与邻边 b 的比值。

$$\tan\theta = \frac{a}{b} \tag{5}$$

`numpy.tan()` 可以用来计算正切值，输入也为弧度。

θ 的**余切** (cotangent) 是邻边 b 与对边 a 的比值，是正切的倒数。

$$\cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\theta} \tag{6}$$

θ 的**正割** (secant) 是斜边 c 与邻边 b 的比值，是余弦的倒数。

$$\sec\theta = \frac{c}{b} = \cos\theta \tag{7}$$

θ 的**余割** (cosecant) 是斜边 c 与对边 a 的比值，是正弦的倒数。

$$\csc\theta = \frac{c}{a} = \sin\theta \tag{8}$$

反三角函数

反三角函数 (inverse trigonometric function) 则是通过三角函数值来反求角度。表 2 所示为三个常用反三角函数中英文名称、NumPy 函数等。

表 2. 常用三个反三角函数

数学表达	英文表达	中文表达	NumPy 函数
$\arcsin\theta$	arc sine theta inverse sine theta	反正弦	numpy.arcsin()
$\arccos\theta$	arc cosine theta inverse cosine theta	反余弦	numpy.arccos()
$\arctan\theta$	arc tangent theta inverse tangent theta	反正切	numpy.arctan()

余弦定理

本节最后简单介绍**余弦定理** (law of cosines)。给定如图 25 所示三角形，余弦定理的三个等式如下。

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma \end{cases} \tag{9}$$

当 α、β、γ 三者之一为直角时，(9) 中的一个等式就变成勾股定理等式。

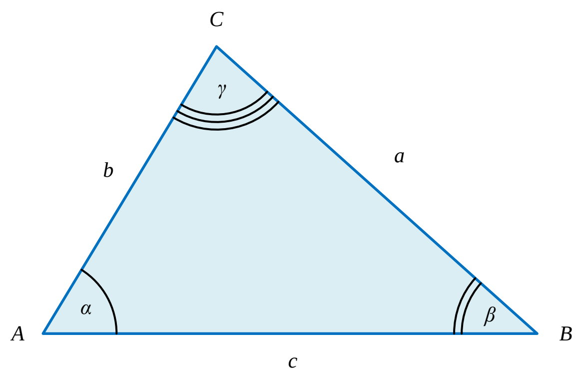


图 25. 余弦定理

在机器学习和数据科学中，余弦定理格外重要；我们会在向量加减法、方差协方差运算、余弦相似度等看到余弦定理的影子。

3.5 圆周率估算初赛：割圆术

圆周率 (pi, π) 是圆的周长和直径之比。估算圆周率可以看做一场不同时空数学家之间的竞赛，这场竞赛的标准就是看谁的估算圆周率的精度更准、效率更高。利用不同的数学工具估算圆周率也是本书一条重要的线索，大家可以从时间维度上看到数学思维、数学工具的迭代发展。

本节介绍的相当于圆周率估算的“初赛”，这时期数学家使用的数学工具是从几何视角出发的割圆术。

古希腊阿基米德，利用和圆内接正多边形和外切正多边形来估算 π。阿基米德最后计算到正 96 边形，估算圆周率在 3.1408 到 3.1429 之间。

中国古代魏晋时期的数学家——刘徽 (约 225 年 ~ 约 295 年) ——仅仅用不断增加内接多边形估算圆周率，这种方法被称之为割圆术。

刘徽用割圆术，从直径为 2 尺的圆内接正六边形开始割圆，依次得正 12 边形、正 24 边形、正 48 边形等等。割得越细，正多边形面积和圆面积差别越小，用他的原话是“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

刘徽计算了 3072 边形的周长，估算得到的圆周率为 3.1416。

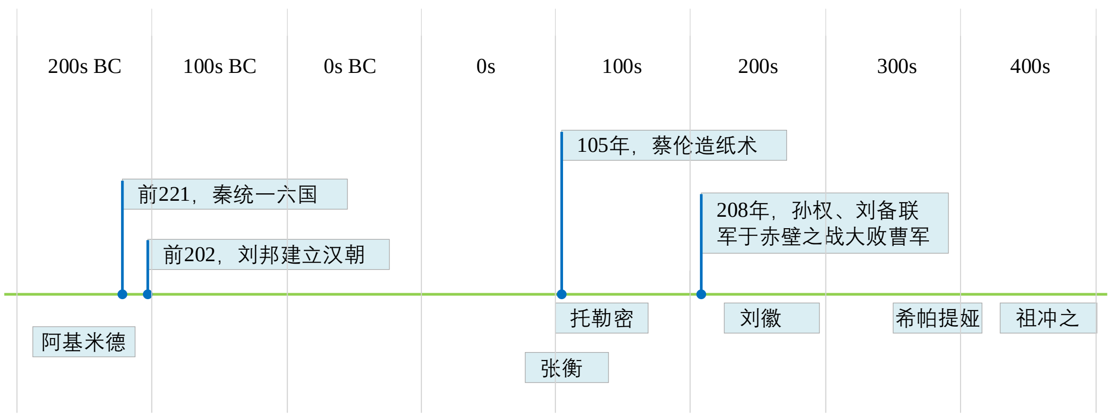


图 26. 圆周率估算的初赛

刘徽之后约 200 年，中国古代南北朝时期数学家祖冲之 (429 ~ 500) 也是用割圆术，最后竟然达到正 12288 边形，估算圆周率为 3.1415926 到 3.1415927 之间；祖冲之再一次刷新圆周率记录，而这一记录几乎保持一千年。

内接和外切正多边形

图 27 给出的是圆形内接和外切正 6、8、10、12、14、16 边形。可以发现，正多边形的边数越多，内接和外切正多边形越靠近正圆。正圆为单位圆时，单位圆的周长恰好为 2π。

圆内接正多边形的边长之和，可以用来近似圆的周长的下边界；圆外切正多边形的边长之和，则用来接近圆周长的上边界。

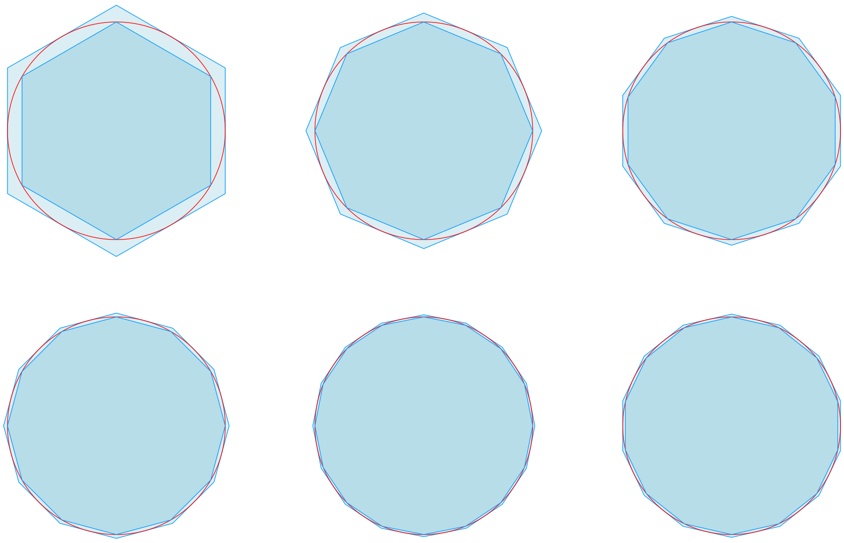


图 27. 圆形内接和外切正 6、8、10、12、14、16 边形

以下代码绘制图 27。

```
# Bk_Ch3_02

import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import RegularPolygon, Circle
import numpy as np

for num_vertices in [6,8,10,12,14,16]:

    fig, ax = plt.subplots()
    ax.set_aspect('equal')

    hexagon_inner = RegularPolygon((0,0), numVertices=num_vertices,
                                   radius=1, alpha=0.2, edgecolor='k')
    ax.add_patch(hexagon_inner)

    hexagon_outer = RegularPolygon((0,0), numVertices=num_vertices,
                                   radius=1/np.cos(np.pi/num_vertices),
                                   alpha=0.2, edgecolor='k')
    ax.add_patch(hexagon_outer)

    circle = Circle((0,0), radius=1, facecolor = 'none', edgecolor='k')
    ax.add_patch(circle)

    plt.axis('off')

    plt.xlim(-1.5,1.5)
    plt.ylim(-1.5,1.5)
    plt.show()
```

估算圆周率上下界

图 28 给定一个单位圆，单位圆外切和内接相同边数的正多边形；两个正多边形都可以分割为 $2n$ 个三角形，这样圆周 360° (2π) 被均分为 $2n$ 份，每一份对应的角度为。

$$\theta = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n} \tag{10}$$

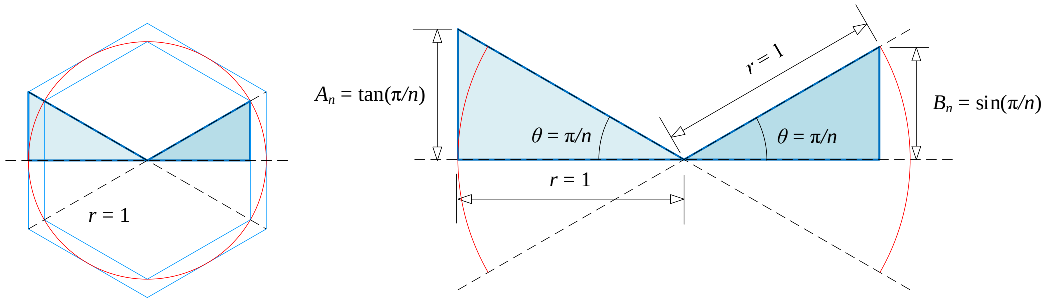


图 28. 圆形内接和外接估算圆周率

外切正多边形的周长是估算单位圆周长的上界。

$$2\pi < 2n \cdot \tan\frac{\pi}{n} \tag{11}$$

即

$$\pi < n \cdot \tan\frac{\pi}{n} \tag{12}$$

内接正多边形的周长是估算单位圆周长的下界

$$2n \cdot \sin\frac{\pi}{n} < 2\pi \tag{13}$$

即

$$n \cdot \sin\frac{\pi}{n} < \pi \tag{14}$$

联合 (12) 和 (14)，可以得到圆周率估算的上下界。

$$n \cdot \sin\frac{\pi}{n} < \pi < n \cdot \tan\frac{\pi}{n} \tag{15}$$

如图 29 所示，随正多边形边数逐步增大，圆周率估算越精确。这张图中，n 不断增大时，绿色和蓝色两条曲线不断收敛于红色虚线，这个过程呈现出极限 (limit) 这一重要数学思想。在数学上，收敛的意思可以是是汇聚于一点，靠近一条线，向某一个值不断靠近。

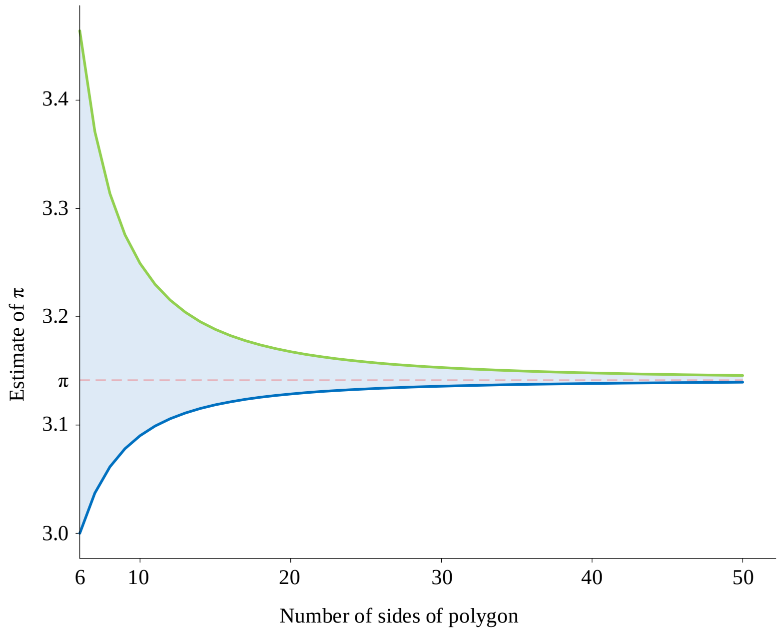


图 29. 随正多边形边数不断增大，圆周率估算越精确

以下代码绘制图 29。

```
# Bk_Ch3_03

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n_start = 6
n_stop  = 50
n_array = np.linspace(n_start,n_stop,n_stop-n_start + 1)

pi_lower_b = np.sin(np.pi/n_array)*n_array
pi_upper_b = np.tan(np.pi/n_array)*n_array

fig, ax = plt.subplots()

plt.axhline(y=np.pi, color='r', linestyle='-')
plt.plot(n_array,pi_lower_b, color = 'b')
plt.plot(n_array,pi_upper_b, color = 'g')
plt.fill_between(n_array, pi_lower_b, pi_upper_b, color = '#DEEAF6')
plt.tight_layout()
plt.xlabel('Number of sides, n')
plt.ylabel('Estimate of $\pi$')
```

阿基米德的方法

阿基米德采用另外一种方法，他先用外切和内接正 6 边形，然后逐次加倍边数，到正 12 边形、正 24 边形、正 48 边形，最后到正 96 边形。

根据图 28，对于正 n 边形，令。

$$\begin{aligned} B_n &= n \cdot \sin\frac{\pi}{n} \\ A_n &= n \cdot \tan\frac{\pi}{n} \end{aligned} \tag{16}$$

B_n是 π 的下限，A_n是 π 的上限；当多边形边数加倍时，即从正 n 边形加倍到正 $2n$ 边形，阿基米德发现如下关系。

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{2A_n B_n}{A_n + B_n} \\ B_{2n} &= \sqrt{A_{2n} B_n} \end{aligned} \tag{17}$$

利用三角恒等式，(17) 中两式不难证明，本书此处省略推导过程。图 30 所示为阿基米德估算圆周率的结果，可见阿基米德方法收敛过程所用计算效率更高。

几何思维是刻在人类基因中的思维方式；不难理解为什么不同时空、不同地域的数学家，在最开始估算圆周率时，都不约而同想到用正多边形来近似。圆周率估算的竞赛依然不断进行，随着数学思想和工具的不断进步，新的方法不断涌现。沿着数学发展历史的脉络，本书后续将会介绍更多估算圆周率的估算方法。

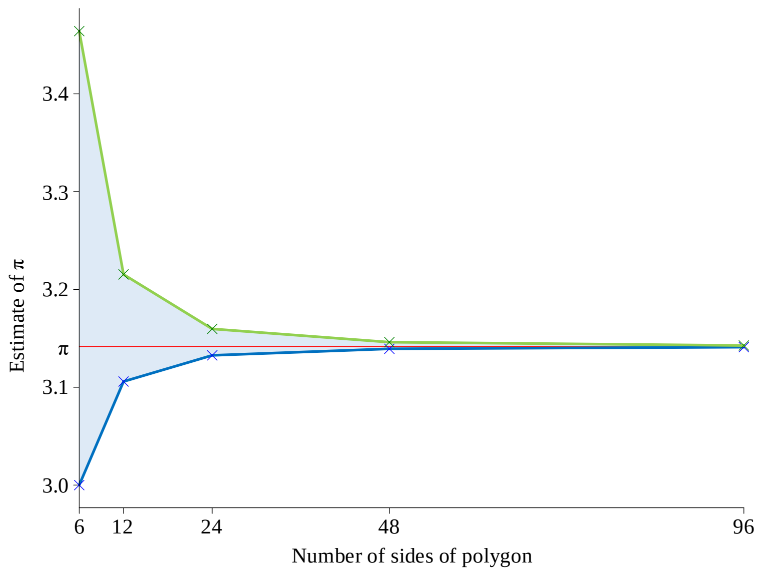


图 30. 阿基米德估算圆周率

以下代码可以用来绘制图 30。

```
# Bk_Ch3_04

import numpy as np
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt

n_start = 6

B_6 = np.sin(np.pi/n_start)*n_start
A_6 = np.tan(np.pi/n_start)*n_start

B_array = []
A_array = []
n_array = [6,12,24,48,96]

B_i = B_6
A_i = A_6
n_i = n_start

for i in n_array:

    B_array.append(B_i)
    A_array.append(A_i)

    # updating
    A_i = 2*A_i*B_i/(A_i + B_i)
    B_i = np.sqrt(A_i*B_i)

B_array = np.array(B_array)
A_array = np.array(A_array)
n_array = np.array(n_array)

fig, ax = plt.subplots()

plt.axhline(y=np.pi, color='r', linestyle='-')
plt.plot(n_array,B_array, color = 'b', marker = 'x')
plt.plot(n_array,A_array, color = 'g', marker = 'x')
plt.fill_between(n_array, B_array, A_array, color = '#DEEAF6')
plt.tight_layout()
plt.xticks([6,12,24,48,96])
plt.xlim((6,96))
plt.xlabel('Number of sides, n')
plt.ylabel('Estimate of $\pi$')
```

本章蜻蜓点水地简要介绍了几个后续内容会用到的几何概念；但是，本书要讲述的几何的故事不止于此。

不久之后，在**笛卡尔** (René Descartes, 1596 ~ 1650) 手里，几何和代数将完美结合。圆锥曲线很快便革新人类对天体运行规律的认知，颠覆人类的世界观。

斯蒂芬·霍金 (Stephen Hawking, 1942 ~ 2018) 曾说“等式是数学中最无聊的部分，我一直试图从几何视角理解数学。”本书作者也认为几何思维是人类的天然思维方式，因此在讲解数学概念、各种数据科学、机器学习算法时，我们都会多给出一个几何视角，以强化理解。