

4 Algebra 代数

代数不过是公式化的几何



代数不过是公式化的几何；几何不过是图形化的代数。

Algebra is but written geometry and geometry is but figured algebra.

—— 索菲·热尔曼 (Sophie Germain) | 法国女性数学家 | 1776 ~ 1831



- ▶ difference() 计算集合的相对补集
- ▶ interaction() 计算集合的交集
- ▶ numpy.roots() 多项式求根
- ▶ set() 构造集合
- ▶ subs() 符号代数式中替换
- ▶ sympy.abc 引入符号变量
- ▶ sympy.collect() 合并同类项
- ▶ sympy.cos() 符号运算中余弦
- ▶ sympy.expand() 展开代数式
- ▶ sympy.factor() 对代数式进行因式分解
- ▶ sympy.simplify() 简化代数式
- ▶ sympy.sin() 符号运算中正弦
- ▶ sympy.solvers.solve() 符号方程求根
- ▶ sympy.symbols() 定义符号变量
- ▶ sympy.utilities.lambdify.lambdify() 将符号代数式转化为函数
- ▶ union() 计算集合的并集

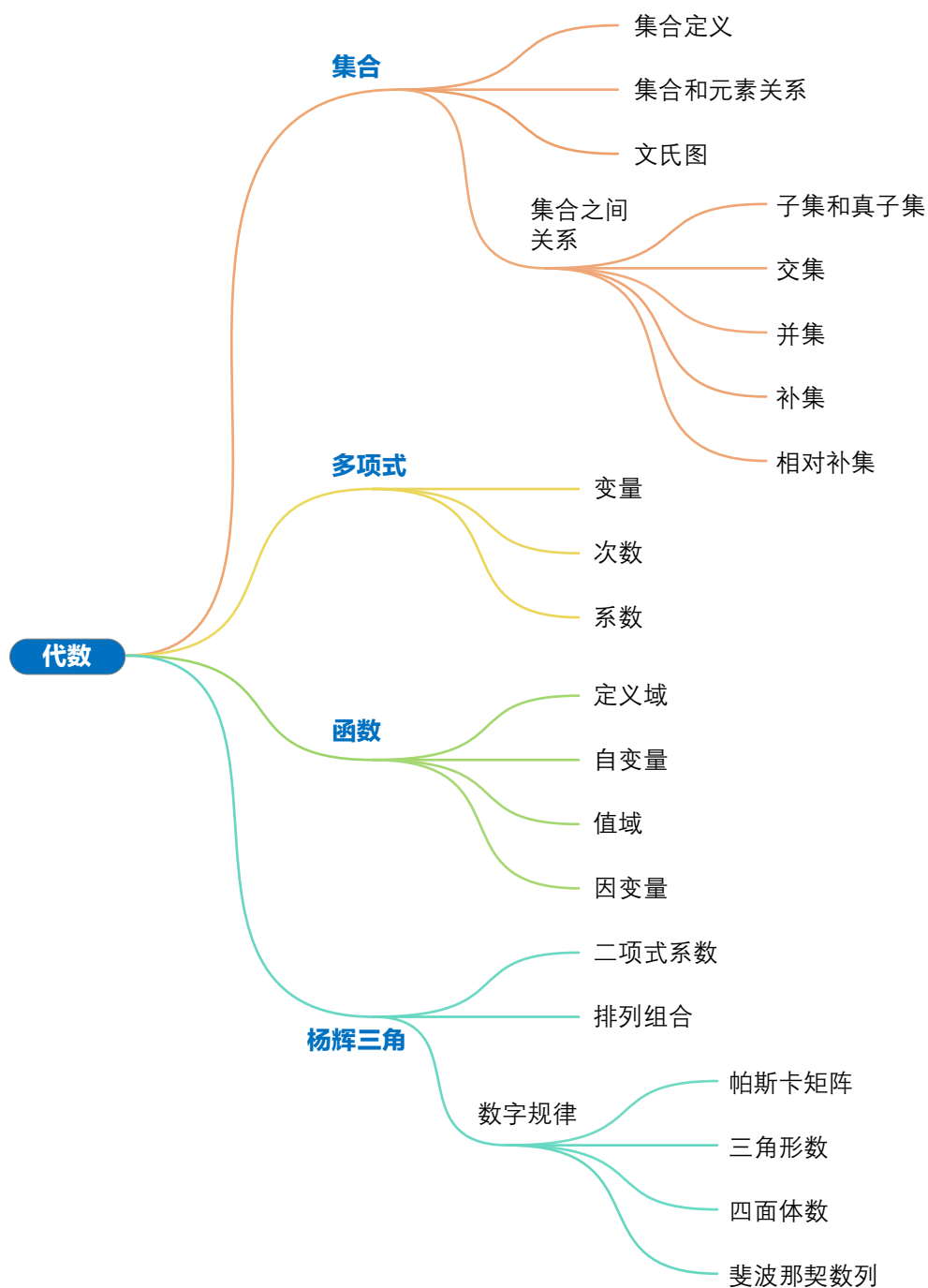
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

4.1 代数的前世今生：薪火相传

思想的传播像火种的接续传递——首先是星星之火，然后是闪烁的炬火，最后是燎原烈焰，排山倒海、势不可挡。

位于埃及境内的亚历山大图书馆曾经一度是古希腊最重要的图书馆，同时也是古希腊重要学术和文化中心。

公元前 47 年，亚历山大图书馆失火，大部分馆藏经典被焚毁。公元 529 年，柏拉图学园和其他所有雅典学校都被迫关闭。

可以想象，柏拉图学园断壁残垣，杂草丛生，物是人非；巢倾卵破，数学家、哲学家们鸟兽散去，远走他乡，衣食无着，晚景凄凉。

古希腊学术圣火如风中之烛，渐渐燃灭，欧洲则一步步陷入漫漫暗夜。

庆幸的是，西方不亮东方亮；希腊典籍被翻译成阿拉伯语，人类思想的火种在另外一个避风港湾得以保全——巴格达“智慧宫 (House of Wisdom)”。

在智慧宫，东西方科技知识交融发展。在九世纪至十三世纪，智慧宫可以说是整个世界举足轻重的教育学术机构。

花拉子密 (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi) 是一位波斯数学家、智慧宫的代表性学者。花拉子密在约 820 年，创作完成《代数学》 (Al-Jabr)，代数学自此成为一门独立学科；他第一次系统性求解一次方程及一元二次方程，因而被称为“代数之父”。英文中的代数 algebra 一词源自 Al-Jabr。值得一提的是，“算法”的英文 algorithm 一词来自于花拉子密 (al-Khwarizmi) 的名字。



图 1. 花拉子密《代数学》封面

印度十进制数字系统就是在阿拉伯进一步发展，并引入欧洲；因此，十进制数字也被称作阿拉伯数字。

好景不长，1258 年蒙古帝国军队的铁蹄大张挾伐，洗劫巴格达，焚毁智慧宫；据说，智慧宫珍贵藏书被丢弃在底格里斯河，河水被染黑长达六个月之久。

相比玉楼金殿、奇珍异宝，记录人类智慧的捆捆羊皮卷、叠叠莎草纸可能显得一分不值；这盏风中摇曳的烛火在两河流域被生生掐灭。

值得宽慰的是，十一世纪开始，十字远征军一次次远征，从阿拉伯人手中取回科学的火种，翻译运动在欧洲兴起，欧洲也渐渐从几百年的暗夜中苏醒。

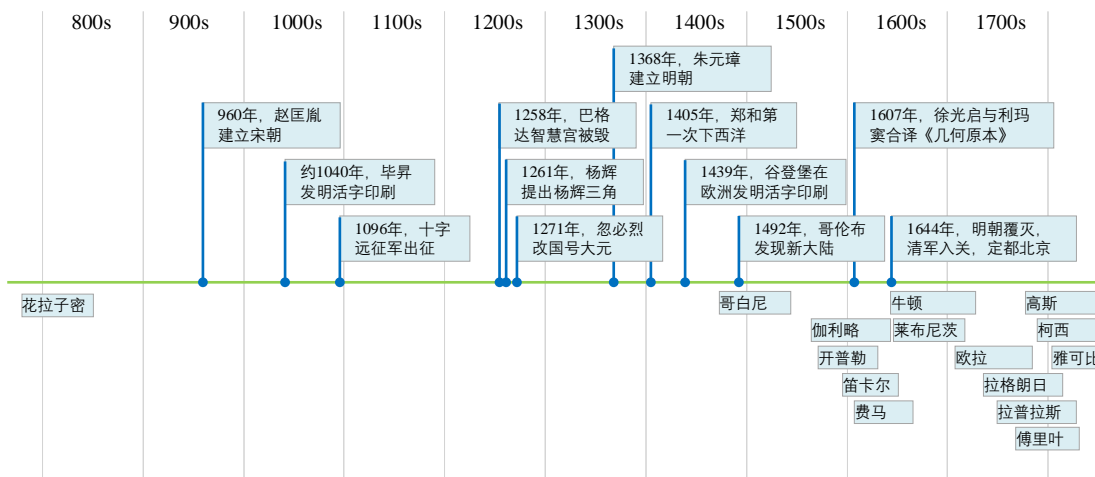


图 2. 西方数学复兴时间轴

十字远征军带回来不仅仅是古希腊的典籍，还有古印度的数学、古代中国的技术发明。这些科学知识在欧洲传播、发展，最终燃成人类思想的烈焰。

这片思想的火海中绽放出众多绚丽的火焰——伽利略、开普勒、笛卡尔、费马、帕斯卡、牛顿、莱布尼兹、伯努利、欧拉、拉格朗日、拉普拉斯、傅里叶、高斯、柯西 ... 本系列丛书会提到他们的名字，以及他们给后来者留下的宝贵知识火种。

4.2 集合：确定的一堆东西

本节回顾集合这个概念。相信本书读者对**集合** (set) 这个概念已经不陌生，我们在本书第一章介绍过复数集、实数集、有理数集等等，它们都是集合。

集合是由一个或多个确定的**元素** (member 或 element) 所构成的整体。集合可以分为：**有限元素集合** (finite set)、**无限元素集合** (infinite set) 和**空集** (empty set 或 null set)。

集合与元素

集合与元素的关系有两种：**属于** (belong to) \in ，**不属于** (not belong to) \notin 。

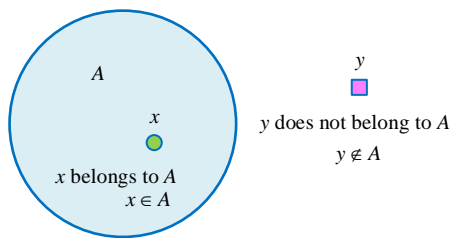


图 3. 属于和不属于

表 1. 集合与元素关系的中英文表达

英文表达	中文表达
x belongs to capital A .	x 属于 A 。
x is a member/element of the set capital A .	x 是集合 A 元素。
x is/lies in the set capital A .	x 在集合 A 之内。
The set capital A includes x .	集合 A 包含 x 。
y does not belong to the set capital A .	y 不属于集合 A 。
y is not a member of the set capital A .	y 不是集合 A 元素。

集合与集合

如果集合 A 中的每一个元素也都是集合 B 中的元素，那么 A 是 B 的**子集** (subset)，记作 $A \subseteq B$ ；而 B 是 A 的**母集**，也称**超集** (superset)。

如果同时满足 $A \subseteq B$ 和 $A \neq B$ ，则称 A 是 B 的**真子集** (A is a proper subset of B)，记作 $A \subset B$ 。

给定 A 和 B 两个集合，由所有属于 A 且属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集** (intersection)，记作 $A \cap B$ 。

A 和 B 所有的元素合并组成的集合，叫做 A 和 B 的**并集** (union)，记作 $A \cup B$ 。

补集 (complement) 一般指**绝对补集** (absolute complement)；设 Ω 是一个集合， A 是 Ω 的一个子集，由 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做子集 A 在 Ω 中的绝对补集。

A 中 B 的**相对补集** (relative complement)，是所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，记做 $A \setminus B$ 或 $A - B$ (set difference of A and B)，也可以读作“ B 在 A 中的相对补集 (the relative complement of B with respect to set A)”。

表 2. 集合与集合关系英文表达

数学表达	英文表达
$A \subset B$	The set capital A is a subset of the set capital B . The set capital B is a superset of the set capital A . The set capital A is contained in the set capital B .
$A \subseteq B$	The set capital A is a subset of or equal to the set capital B .
$A \supset B$	The set capital A contains the set capital B .
$A \supseteq B$	The set capital A contains or is equal to the set capital B .
$A \cap B$	The intersection of the set capital A and the set capital B . A intersection B

	The intersection of A and B
$A \cup B$	The union of the set capital A and the set capital B . Capital A union capital B . The union of A and B .
\bar{A}	The complement of the set capital A .
$A - B$	The relative complement of the set capital B in the set capital A . The relative complement of set capital B with respect to set capital A .
$A \cap (B \cup C)$	The intersection of capital A and the set capital B union capital C .
$\overline{(A \cup B)}$	The complement of the set capital A union capital B .
$\bar{A} \cap \bar{B}$	The intersection of the complement of capital A and the complement of capital B .

集合之间的关系也可以用文氏图 (Venn diagram) 表达。图 4 给出的是两个集合常见关系文氏图。

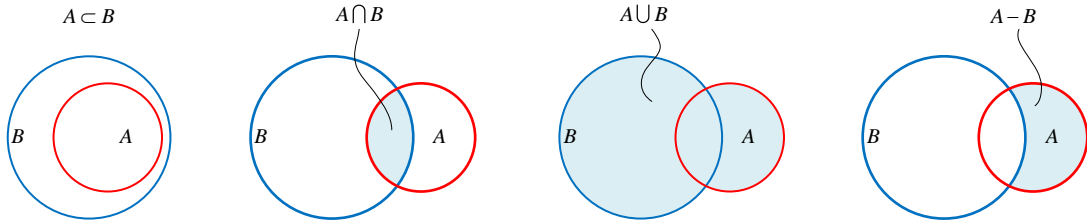


图 4. 两个集合关系文氏图

掷骰子

举个例子，如图 5 所示，掷一枚色子，点数结果构成的集合 Ω 为：

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(1)

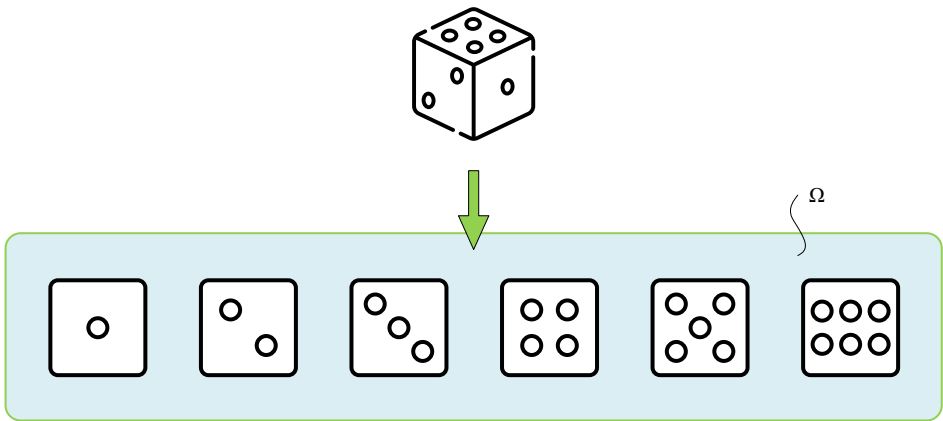


图 5. 投一枚色子点数结果

定义集合 A 为色子点数为奇数：

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。
代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

$$A = \{1, 3, 5\} \quad (2)$$

集合 B 为色子点数为偶数：

$$B = \{2, 4, 6\} \quad (3)$$

集合 C 为色子点数小于 4：

$$C = \{1, 2, 3\} \quad (4)$$

图 6 所示为 A 、 B 、 C 三个集合关系。

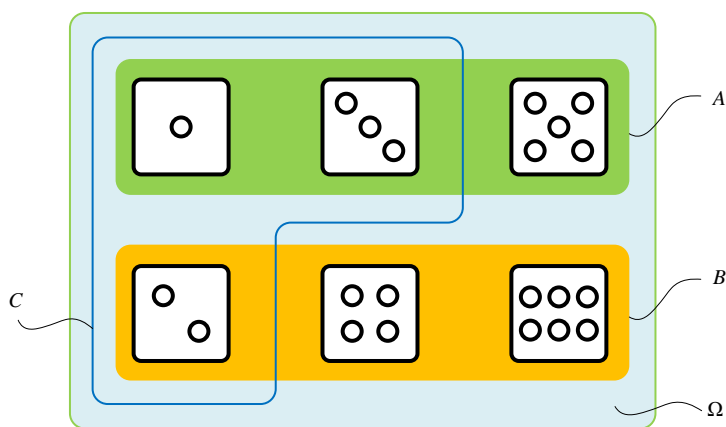


图 6. 色子点数 A 、 B 、 C 三个集合关系

显然， A 和 B 的交集为空，即，

$$A \cap B = \emptyset \quad (5)$$

A 和 B 的并集为全集 Ω ，即，

$$A \cup B = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (6)$$

也就是说， A 在 Ω 中的绝对补集为 B 。

A 和 C 的交集有两个元素：

$$A \cap C = \{1, 3\} \quad (7)$$

A 和 C 的并集有四个元素，即，

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 5\} \quad (8)$$

A 中 C 的相对补集为：

$$A - C = \{5\} \quad (9)$$

C 中 A 的相对补集为:

$$C - A = \{2\} \quad (10)$$



代码文件 Bk3_Ch4_01.py 上述计算。

4.3 从代数式到函数

算数 (arithmetic) 基于**已知量** (known values); 而**代数** (algebra) 基于**未知量** (unknown values), 也称作**变量** (variables)。当然, 代数中既有数字也有字母。

现代人一般用 a 、 b 、 c 等代表常数, 用 x 、 y 、 z 等代表未知量; 这种记法正是约 400 年前笛卡尔提出的。

引入未知量这种数学工具, 有助于将数学问题抽象化、一般化。也就是说, $2 + 1$ 、 $6 + 12$ 、 $100 + 150$ 等, 都可以抽象地写成 $x + y$ 。

如图 7 所示, 这五个圆形虽然大小明显不同; 但是, 引入半径 r 这个变量, 这些圆形的周长都可以写成 $2\pi r$, 面积可以写成 πr^2 。将不同的 r 值代入代数式, 便可以求得对应圆的周长和面积。

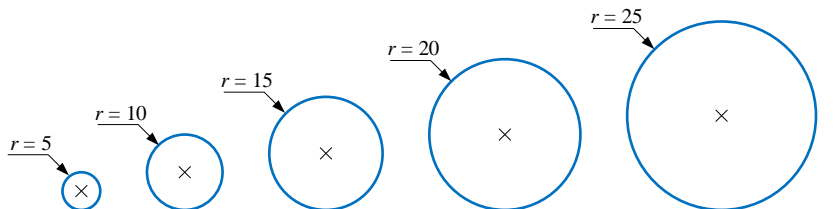


图 7. 不同半径的圆形

多项式

本书最常见的代数式是**多项式** (polynomial), 形如:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (11)$$

其中, x 为**变量** (variable), n 为**多项式次数** (degree of a polynomial), a_0 、 $a_1 \dots a_n$ 为**系数** (coefficient)。

系数之所以会使用**下角标** (subscript), 是因为字母不够用; 类似地, 变量多时, x 、 y 、 z 肯定不够用, 本系列丛书会用变量加下角标序号来表达变量, 比如 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_i 、 x_j 等等。

多项式是由一个个单项式加减构成。由数和字母的积组成的代数式叫做**单项式** (monomial), 比如 ax^n ; 单独的一个数或一个字母也叫做单项式, 比如 a_0 和 5。

一个单项式中, 所有变量指数之和, 叫做这个单项式的次数; 比如, $3x^5$ 的次数是 5, $2xy$ 的次数 2 ($= 1 + 1$)。

只有一个变量的多项式被称作**一元多项式** (univariate polynomial)。变量多于一个的多项式统称**多元多项式** (multivariate polynomials); 其中, 有两个变量的多项式常被称作**二元多项式** (bivariate polynomial)。

最高项次数较小的多项式都有特殊的名字, 比如: **常数式** (constant equation)、**一次式** (linear equation)、**二次式** (quadratic equation)、**三次式** (cubic equation)、**四次式** (quartic equation) 和**五次式** (quintic equation) 等等。常见多项式及名称总结于表 3 中。

表 3. 常见多项式举例

次数	英文名称	例子
1	linear	$ax + b, a \neq 0$
2	quadratic	$ax^2 + bx + c, a \neq 0$
3	cubic	$ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$
4	quartic	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a \neq 0$
5	quintic	$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f, a \neq 0$

给定如下变量为 x 的三次式:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad (12)$$

令 $x = 1$, 代入 (12), 得到如下结果:

$$1^3 + 2 \times 1^2 - 1 - 2 = 0 \quad (13)$$

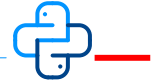


代码文件 Bk3_Ch4_02.py 中用 SymPy 中函数来完成上述计算。其中 `sympy.abc` 引入符号变量 x 和 y 。SymPy 是重要的符号运算库, 本书将会用到其中的代数式定义、求根、求极限、求导、求积分、级数展开等功能。

同样, 可以利用 `.subs()` 将 (12) 中的 x 替换成其他符号变量、甚至代数表达式, 比如 $x = \cos(y)$:

$$(\cos(y))^3 + 2(\cos(y))^2 - \cos(y) - 2 \quad (14)$$

代码文件 Bk3_Ch4_02.py 还将 x 替换为 $\cos(y)$ 。也可以使用 `sympy.symbols()` 定义更复杂的符号变量。



再介绍几个 SymPy 中处理代数式的函数。sympy.simplify() 函数可以简化代数式；sympy.expand() 可以用来展开代数式；sympy.factor() 函数则可以对代数式进行因式分解；sympy.collect() 函数用来合并同类项。请大家自行学习 Bk3_Ch4_03.py。

表 4 总结常用代数式的英文表达。

表 4. 常用代数英文表达

数学表达	英文表达
$x - y$	x minus y
$-x - y - z$	minus x minus y minus z
$x - (y - z)$	x minus the quantity y minus z . x minus open parenthesis y minus z close parenthesis.
$x - (y + z) - t$	x minus the quantity y plus z end of quantity minus t . x minus open parenthesis minus y plus z close parenthesis minus t .
$x(x - y + z)$	x times the quantity x minus y plus z . x times open parenthesis x minus y plus z close parenthesis.
$(x + y)^2$	x plus y all squared
x^3	x to the third x to the third power x raised to the power of three x cubed
$x^5 + 4x^3 - 2x^2$	x to the fifth plus four x to the third minus two x squared
$(x + y)(z + t)$	The sum x plus y times the sum z plus t . The product of the sum x plus y and the sum z plus t . Open parenthesis x plus y close parenthesis times open parenthesis z plus t close parenthesis.
$\left(\frac{x}{y}\right)^2$	x over y all squared
$\frac{x + z}{y}$	The quantity of x plus z divided by y .
$x + \frac{z}{y}$	x plus the fraction z over y .
$t\left(z + \frac{x}{y}\right)$	t times the sum z plus the fraction x over y .

函数

函数 (function) 一词由莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz) 引入；而 $f(x)$ 这个函数记号由欧拉 (Leonhard Paul Euler) 发明。欧拉还引入三角函数现代符号，他首创以 e 标记自然对数的底，用希腊字母 Σ 标记累加，以 i 表示虚数单位。

中文“函数”则是由清朝数学家李善兰 (1810 ~ 1882) 翻译。代数、系数、指数、多项式等数学名词中文翻译也是出自李善兰之手。

给定一个集合 X ，对 X 中元素 x 施加映射法则 f ，记作函数 $f(x)$ ，得到的结果 $y = f(x)$ 属于集合 Y 。集合 X 称作**定义域** (domain)， Y 称作**值域** (codomain)； x 称作**自变量** (an argument of a function 或 an independent variable)， y 称作**因变量** (dependent variable)。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

大家应该已经发现，函数 $f: X \rightarrow Y$ 有三个关键要素：定义域 X 、值域 Y 和函数映射规则 f 。

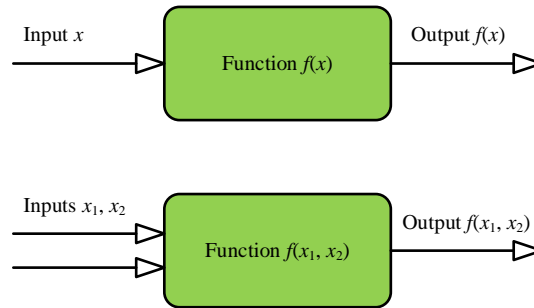


图 8. 一元函数、二元函数的映射

函数的自变量为两个或两个以上时，叫做**多元函数** (multivariate function)。本丛书一般会使用 x 加下角标序号来表达多个自变量，比如 $f(x_1, x_2, \dots, x_D)$ 函数有 D 个自变量。

为了方便将不同的 x 值代入 (12)，我们可以定义一个函数 $f(x)$ ：

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad (15)$$



Bk3_Ch4_04.py 将代数式转化为函数，并给 x 赋值得到函数值。

表 5 给出有关函数常用英文表达。

表 5. 常用函数英文表达

数学表达	英文表达
$f(x)$	$f x$ f of x The function f of x
$f(g(x))$	f composed with g of x f of g of x
$f \circ g(x)$	f composed with g of x f of g of x
$f(x+a)$	f of the quantity x plus a
$f(x, y)$	f of x, y
$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	f of x sub one, x sub two, dot dot dot, x sub n
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	f of x equals a sub n times x to the n , plus a sub n minus one times x to the n minus one, plus dot dot dot, plus a sub one times x , plus a sub zero. f of x equals a sub n times x raised to the power of n , plus a sub n minus one times x raised to the power of n minus one, plus dot dot dot, plus a sub one times x , plus a sub zero.
$f(x) = 3x + 5$	f of x equals three times x plus five.
$f(x) = x^2 + 2x + 1$	f of x equals x squared plus two times x plus one.
$f(x) = x^3 - x + 1$	f of x equals x cubed minus x plus one.

为了进一步探讨函数性质，我们亟需一个重要的数学工具——**坐标系** (coordinate system)；坐标系是下一章探讨的内容。

4.4 杨辉三角：代数和几何的完美合体

杨辉三角，也称贾宪三角，又称**帕斯卡三角** (Pascal's triangle)，是二项式系数的一种写法。

如下， $(x+1)^n$ 展开后，按单项 x 的次数从高到低排列，发现单项式系数呈现出特定规律：

$$\begin{aligned}
 (x+1)^0 &= 1 \\
 (x+1)^1 &= x+1 \\
 (x+1)^2 &= x^2+2x+1 \\
 (x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1 \\
 (x+1)^4 &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1 \\
 (x+1)^5 &= x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1 \\
 (x+1)^6 &= x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1 \\
 &\dots \qquad \qquad \dots
 \end{aligned} \tag{16}$$

图 9 将 (16) 单项式系数以金字塔的结构展示，请读者注意以下规律：

- ◀ 三角形系数呈现对称性，第 k 行有 $k+1$ 个系数；
- ◀ 三角形每一行左右最外侧系数为 1；
- ◀ 除最外两侧系数以外，三角形内部任意系数为左上方和右上方两个系数之和；
- ◀ 第 k 行系数之和为 2^k 。

注意，(16) 的第一层对应 $k=0$ 。

杨辉三角中，我们将会看到几何、代数、概率等知识的有趣联系。

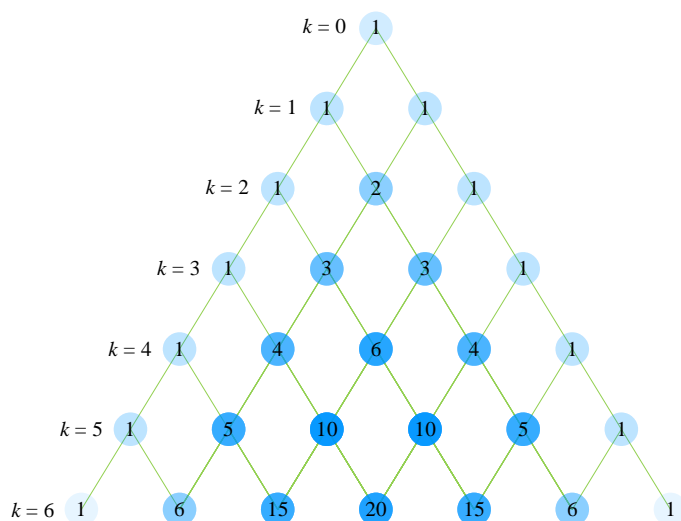


图 9. 杨辉三角

比帕斯卡提前 300 年左右，杨辉在自己书中介绍了这个数字规律。杨辉也不是第一位发现者，他在书中也说的很清楚，这个规律引自贾宪的一部叫做《释锁算术》的数学作品。

按照时间先后顺序，贾宪在 11 世纪北宋时期就发现并推广了这一规律，杨辉只是在 13 世纪南宋时期再次解释。而帕斯卡等到 1655 年在自己的作品中介绍二项式系数规律；但是，帕斯卡创造性地将它用在解释概率运算，这对推动了概率论的发展。

圖方蔡七法古

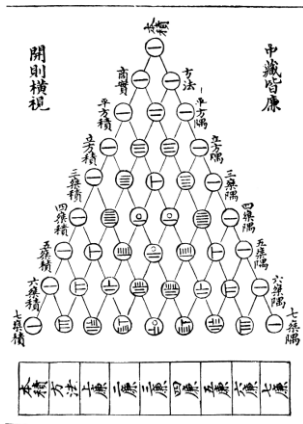


图 10. 元代数学家朱世杰《四元玉鉴》中绘制的杨辉三角

火柴梗图 (stem plot) 可视化杨辉三角每行单项式系数的规律。图 11 所示为 $n = 4, 8, 12$ 时，二项式展开单项系数规律。

火柴梗图明显呈现中心对称性； n 为偶数时，对称轴处系数最大；如图 11 所示， n 为奇数时，对称轴附近两个系数为最大值。对称轴左右两侧系数先快速减小，然后再缓慢减小。

随着 n 增大，这一现象更加明显，如图 13 所示。连接图 13 中实心点让一条优美的曲线呼之欲出，这条曲线就是**高斯分布** (Gaussian distribution) **概率密度函数** (Probability Density Function, PDF)。本书后面会简要介绍这条曲线，本系列丛书《概率统计》一册会从各种角度介绍高斯分布。

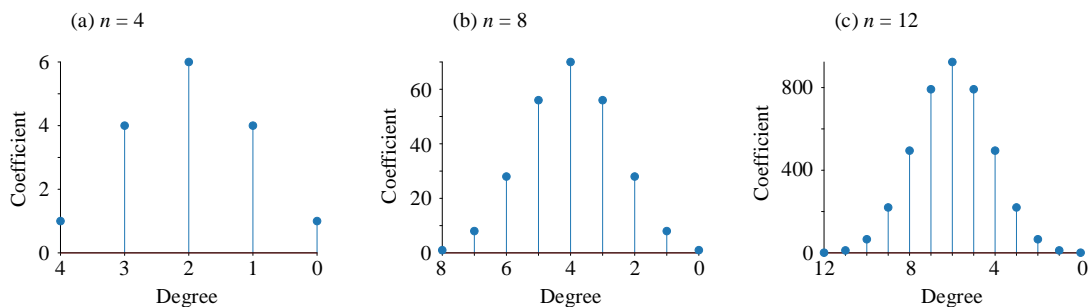


图 11. $n = 4, 8, 12$ 等偶数时，二项式展开单项系数

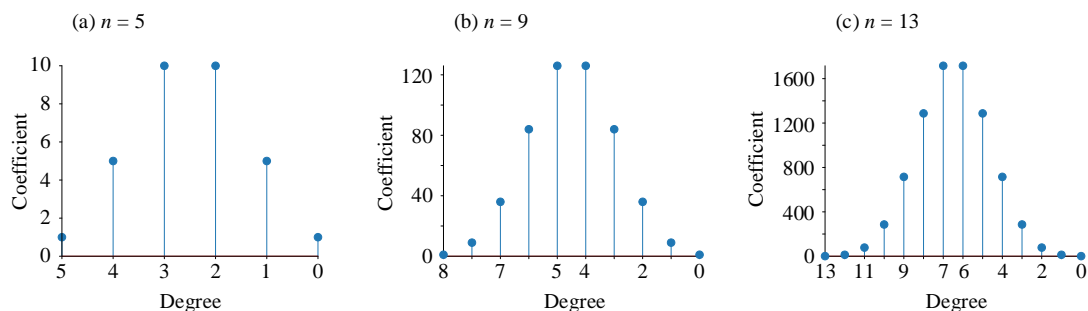


图 12. $n = 5, 9, 13$ 等奇数时，二项式展开单项系数

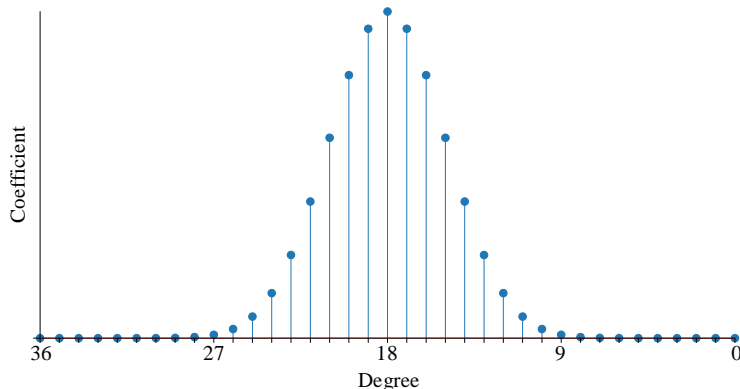


图 13. $n = 36$ 时，二项式展开单项系数



代码文件 Bk3_Ch4_05.py 绘制图 11 和图 13 两图。

4.5 排列组合让二项式系数更具意义

组合数

从 n 个不同元素中，取 m ($m \leq n$) 个元素构成一组，被称作 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合** (combination)；注意，组内的元素排序并不重要。

n 个不同元素中取出 m 个元素的所有组合个数叫做组合数，常记做 C_n^m ：

$$C_n^m = C(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (17)$$

其中， $!$ 运算符就是本书前文介绍的**阶乘** (factorial)。

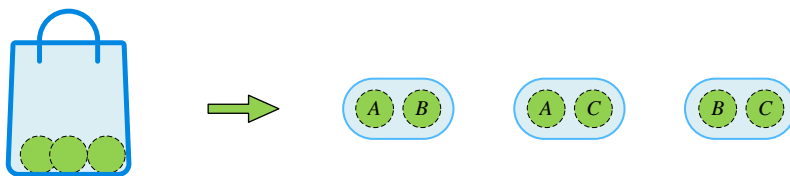


图 14. A、B、C 三个元素无放回抽取两个，结果有三个组合

举个例子，如图 14 所示，从 A、B、C 三个元素无放回抽取两个，只要元素相同，不管次序是否相同都算作相同结果。结果有三个组合 AB、AC、BC，对应的组合数为：

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{6}{2} = 3 \quad (18)$$

逐个抽取个体时，每个被抽到的个体不再放回总体，也就是不再参加下一次抽取，这就是“无放回抽取”。无放回抽取中，总体在抽样过程中逐渐减小。



Bk3_Ch4_06.py 完成上述无放回抽取组合实验。

结果如下。

```
('A', 'B')
('A', 'C')
('B', 'C')
```

组合数表达杨辉三角

用组合数将 $(x + y)^n$ 展开写成：

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^{n-2} x^2 y^{n-2} + C_n^{n-1} x^1 y^{n-1} + C_n^0 x^0 y^n \quad (19)$$

因此，杨辉三角还可以如图 15 这样写。

组合数方便解释 (19) 中各项系数。每一项 x 和 y 的次数之和为 n ，如果某一单项 y 的次数为 k ， x 的次数为 $n-k$ ，这一项为 $C_n^k x^{n-k} y^k$ ；该项系数为 C_n^k ，相当于在 n 个 x 或 y 连乘中，选取 k 个为 y 。

将 $x=y=1$ 代入 (19)，可以发现组合数的一个重要规律：

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^0 \quad (20)$$

观察图 15 的对称性，容易发现另外一个组合数规律：

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (21)$$

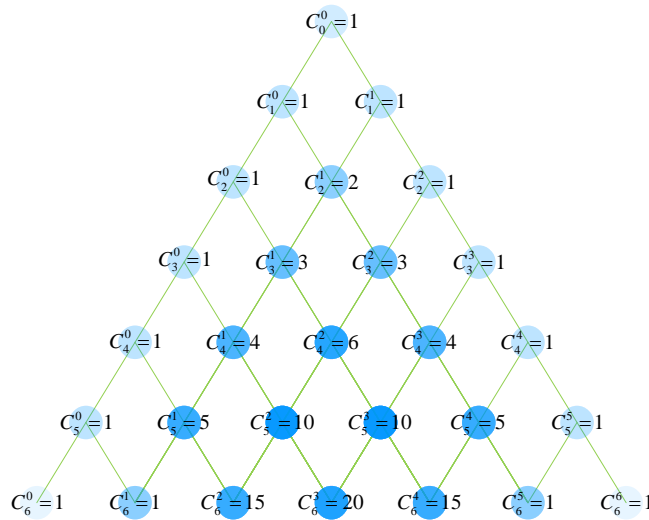


图 15. 用组合数来写杨辉三角

排列数

从 n 个不同元素中，先后取 m ($m \leq n$) 个元素排成一列，叫做从 n 个元素中取出 m 元素的一个**排列**(permutation)。排列中，元素的排序很重要。

n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列的个数叫做排列数，常记做 P_n^m ：

$$P_n^m = P(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (22)$$

同样，如图 16 所示，从 A 、 B 、 C 三个元素无放回先后抽取两个，结果有 6 个排列 AB 、 BA 、 AC 、 CA 、 BC 、 CB ，即，

$$P_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6 \quad (23)$$

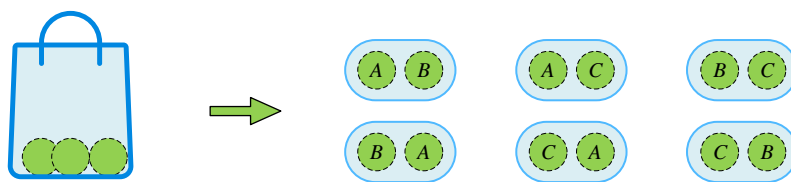


图 16. A、B、C 三个元素无放回抽取两个，结果有 6 个排列



Bk3_Ch4_07.py 完成上述无放回排列实验。

结果为。

```
('A', 'B')
('A', 'C')
('B', 'A')
('B', 'C')
('C', 'A')
('C', 'B')
```

组合数和排列数

比较 (17) 和 (22)，发现排列和组合的关系为：

$$P_n^m = C_n^m \cdot m! \quad (24)$$

可以这样解释上式，先从 n 个元素取出 m 进行组合，组合数为 C_n^m ；然后，把 m 个元素全部进行排列（也叫全排列），排列数为 $m!$ 。这样， C_n^m 和 $m!$ 乘积便是 n 个元素取出 m 的排列数。

$m = n$ 时，所有的排列情况叫全排列：

$$P_n^n = P(n, n) = n! \quad (25)$$



从 A、B、C 三个元素全排列的结果为 ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA。代码文件 Bk3_Ch4_08.py 完成上述计算并打印全排列结果。

结果为。

```
('A', 'B', 'C')
('A', 'C', 'B')
('B', 'A', 'C')
('B', 'C', 'A')
('C', 'A', 'B')
('C', 'B', 'A')
```

4.6 杨辉三角隐藏的数字规律

杨辉三角中隐藏着大量有趣的数字规律。

帕斯卡矩阵

将杨辉三角数字左对齐，可以得到如下矩阵；这个矩阵常被称作**帕斯卡矩阵** (Pascal matrix)：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

三角形数

上式矩阵的第一列均为 1，第二列为自然数，第三列为**三角形数** (triangular number)。如图 17 所示，如果一定数量圆形紧密排列，可以形成一个等边三角形，这个数量就叫做三角形数。

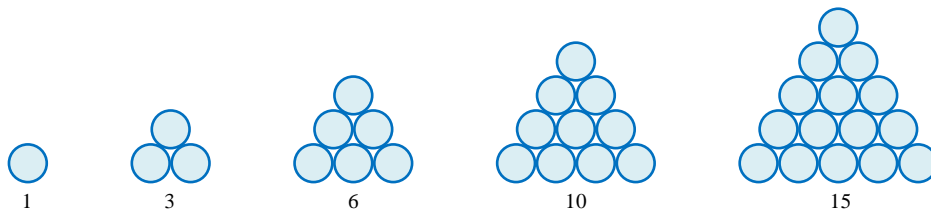


图 17. 三角形数

四面体数

(26) 第四列是叫做**四面体数** (tetrahedral number 或 triangular pyramidal number)；顾名思义，四面体数就是圆球紧密堆成四面体对应的数字。三角数从 1 累加便可以得到四面体数；也就是把图 17 看成是圆球，将它们一层层摞起来，便得到正四面体。

斐波那契数列

按照图 18 浅黄色线条方向，将杨辉三角每一排数字相加，可以得到如下数字序列：

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \quad (27)$$

这便是**斐波那契数列** (Fibonacci sequence)。

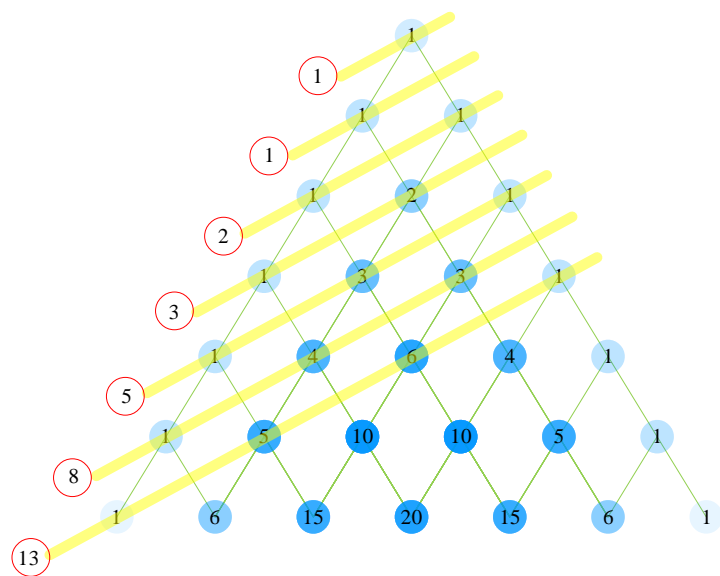


图 18. 杨辉三角和斐波那契数列关系

4.7 方程：求解鸡兔同笼问题

方程 (equation) 就是含有未知量的等式，比如 $x + 5 = 8$ 。使等式成立的未知量的值叫做方程的**根** (root) 或**解** (solution)。

一元一次方程 (linear equation in one variable) 可以写成：

$$ax + b = c \quad (28)$$

其中， x 为未知变量， a 、 b 、 c 为实数，且 $a \neq 0$ 。

二元一次方程 (linear equation in two variables)，可以写成：

$$ax + by = c \quad (29)$$

其中， x 和 y 为未知变量， a 、 b 、 c 为实数， $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 。

方程组 (system of equations) 是指两个或两个以上的方程，一般也会对应两个或两个以上未知量。

鸡兔同笼问题就可以写成二元一次方程组。

鸡兔同笼问题原文是“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”

用现代汉语来说就是：现在笼子里有鸡（雉读作 zhì）和兔子在一起。从上面数一共有 35 个头，从下面数一共有 94 只脚，问一共有多少只鸡、多少只兔子？

用 x 代表鸡, y 代表兔。有 35 个头对应如下方程式:

$$x + y = 35 \quad (30)$$

有 94 只脚对应如下方程式:

$$2x + 4y = 94 \quad (31)$$

联立两个等式得到方程组:

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases} \quad (32)$$

很容易求得,

$$\begin{cases} x = 23 \\ y = 12 \end{cases} \quad (33)$$

也就是, 笼子里有 23 只鸡, 12 只兔。

本书会在在坐标系、线性代数这两个话题中继续有关鸡兔同笼故事。

一元二次方程 (quadratic equation in one variable) 可以写成:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (34)$$

其中, a 、 b 、 c 都是实数, 且 $a \neq 0$ 。

(34) 的求根公式可以写成:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (35)$$

(34) **判别式** (discriminant) 是,

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (36)$$

$\Delta > 0$, 一元二次方程有两个实数根; $\Delta = 0$, 一元二次方程有两个相同实数根; $\Delta < 0$, 一元二次方程有两个不同的复数根, 不存在实数根。

`sympy.solvers.solve()` 函数可以用来求根。采用 `numpy.roots()` 也可以计算多项式方程的根。给定如下多项式等式:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (37)$$

单项式次数从高到低各项系数作为输入, 用 `numpy.roots([a0, a1, ..., a_{n-1}, a_n])` 函数来求根。

举个例子, 如下三次多项式等式:

$$f(x) = -x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 0 = 0 \quad (38)$$



代码文件 Bk3_Ch4_09.py 求解 (38) 三个根。

表 6 所示为方程相关的英文表达。

表 6. 方程相关英文表达

$x(y+1)=5$	x times the quantity of y plus one equals five.
$(x+a)(x+b)=0$	The quantity of x plus a times the quantity of x plus b equals zero.
$2x+y=5$	Two x plus y equals five.
$2x^2+3x+4=0$	Two x squared plus three x plus four equals zero.
$2x^3+3x^2+4=0$	Two x cubed plus three x squared plus four equals zero.
$(x+y)/2x=0$	The quantity of x plus y over two x equals zero.
$(x+y)^n=1$	The quantity x plus y to the n th power equals one.
$x^n+x^{n-1}=5$	x to the n , plus x to the n minus one equals five.



有时候，知识的传播好似随风潜入夜；更多时候，是水火不容的碰撞和残酷血腥的争夺。然而，这场抢占知识高地的竞争从未偃旗息鼓，大有愈演愈烈之势。

拿破仑曾感叹“数学的发展与国运息息相关”。在图 2 中西方代数复兴的时间轴上，一方面我们看到数学无国界，她在世界各地辗转腾挪、断续发展；另一方面，这个历史的脉络也让人们看到人才培养、聚集、转移，伴随着军事和政治影响力的转移，随之而来的是生产力和社会财富的转移。

阿基米德的血肉之躯不能挡住罗马士兵的刀刃；但是，他的精巧发明曾一度让强敌闻之色变。掌握利用知识，和汗牛充栋的藏书，是天壤之差、云泥之别。让数学思想之火熊熊燃烧的是一代代栋梁之才，和席卷八荒、保护矩火的强大力量；而两者互为给养、风雨同舟、荣辱与共。