8 Conic Sections 圆锥曲线

从解密天体运行，到探索星辰大海

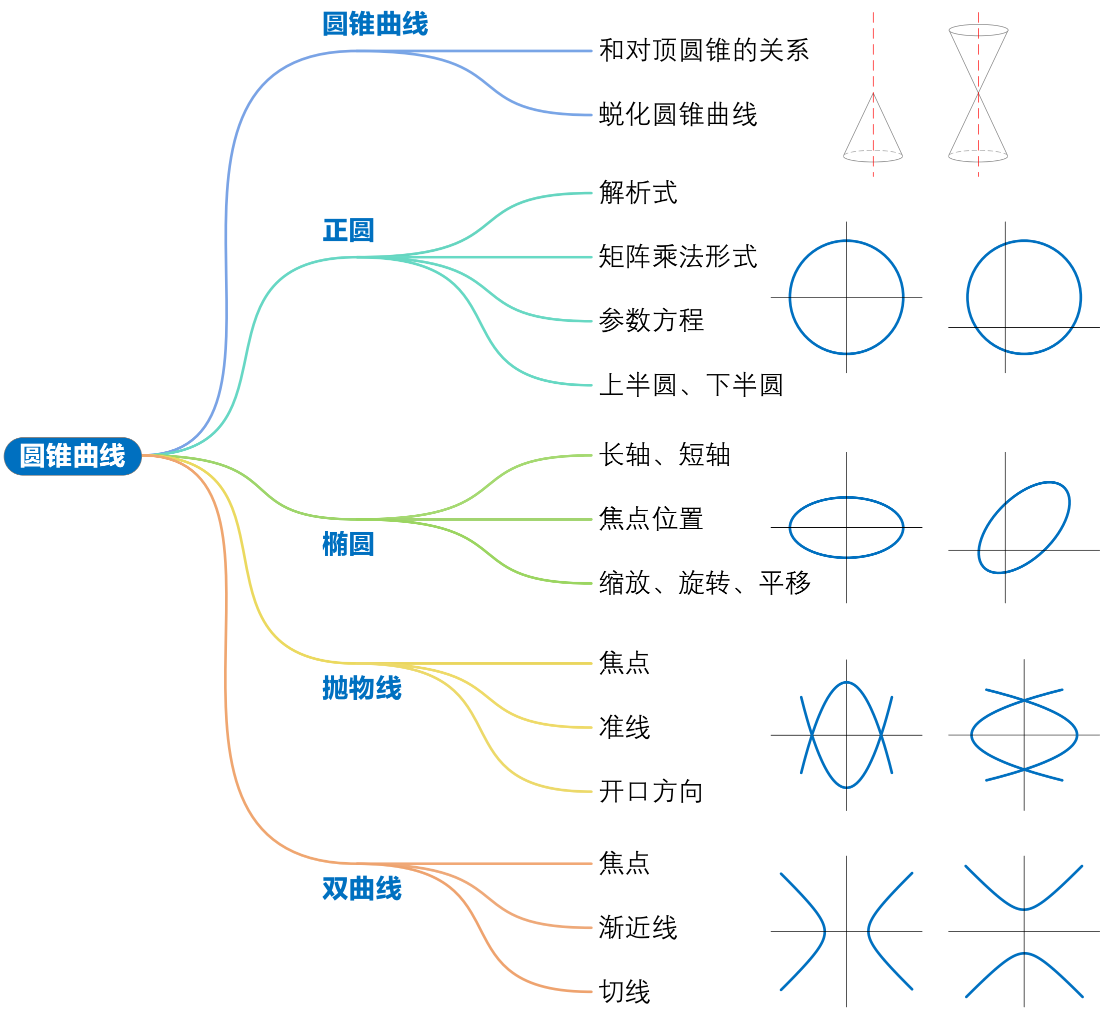
可是，地球确实绕着太阳转。

And yet it moves

E pur si muove.

—— 伽利略·伽利莱 (Galilei Galileo) | 意大利物理学家、数学家及哲学家 | 1564 ~ 1642

- ax.plot_wireframe() 绘制三维网格图；其中，ax = fig.add_subplot(projection='3d')
- ax.view_init() 设置三维图像观察角度；其中，ax = fig.add_subplot(projection='3d')
- numpy.arange() 根据指定的范围以及设定的步长，生成一个等差数组
- numpy.cos() 计算余弦
- numpy.linspace(start,end,num) 生成等差数列，数列 start 和 end 之间 （注意，包括 start 和 end 两个数值），数列的元素个数为 num 个
- numpy.outer(u, v) 当 u 和 v 都为向量时，u 的每一个值代表倍数，使得第二个向量每个值相应倍增。u 决定结果的行数，v 决定结果的列数；当 u 和 v 为多维向量时，按照先行后列展开为向量
- numpy.sin() 计算正弦
- sympy.Eq() 定义符号等式
- sympy.plot(sympy.sin(x)/x,(x,-15,15),show=True) 绘制符号函数表达式的图像
- sympy.plot_implicit()绘制隐函数方程
- sympy.plot3d(f_xy_diff_x,(x,-2,2),(y,-2,2),show=False) 绘制函数的三维图
- sympy.plotting.plot.plot_parametric() 绘制二维参数方程
- sympy.plotting.plot.plot3d_parametric_line() 绘制三维参数方程
- sympy.symbols() 创建符号变量


圆锥曲线
圆锥曲线
和对顶圆锥的关系
蜕化圆锥曲线
正圆
解析式
矩阵乘法形式
参数方程
上半圆、下半圆
椭圆
长轴、短轴
焦点位置
缩放、旋转、平移
抛物线
焦点
准线
开口方向
双曲线
焦点
渐近线
切线

8.1 圆锥曲线外传

自古以来，世界各地的人们在仰望神秘星空时，都会不禁感慨宇宙的浩渺、神秘。

两千三百年前，中国战国时期诗人屈原在《天问》中问到“天何所沓？十二焉分？日月安属？列星安陈？”

在中国古代，“天圆地方”是权威的解释，比如孔子曾说“天道曰圆，地道曰方”。

但是，战国时期的法家创始人之一慎到认为天体是球形，他说“天形如弹丸，半覆地上，半隐地下，其势斜倚”。

东汉张衡无疑推动了中国古代对天体运行规律的认知，他提出“浑天如鸡子，天体圆如弹丸，地如鸡中黄，孤居于内，天大而地小”。

古希腊一众数学家和哲学家对天体运行规律有着相同的探索，其中具有代表性的是**毕达哥拉斯** (Pythagoras)、**亚里士多德** (Aristotle)、**埃拉托斯特尼** (Eratosthenes) 和**托勒密** (Ptolemy)。

古希腊数学家毕达哥拉斯在公元前六世纪，提出地球是球体这一概念。

亚里士多德则以实证的方法得出地球是球形这一结论。比如，他发现月食时，地球投影到月球上的形状为圆形。远航的船舰靠岸时，人们先看到桅杆，再看到船身，最后才能看到整个船身。亚里士多德还发现，越往北走，北极星越高；越往南走，北极星越低。

在地圆说基础上，托勒密建立**地心说** (geocentric model)。地心说被罗马教会奉为圭臬，禁锢了欧洲思想逾千年。

解放人类对天体运行规律认知的数学工具正是圆锥曲线。

古希腊数学家，**梅内克谬斯** (Menaechmus, 380 ~ 320 BC)，开创了圆锥曲线研究。相传，梅内克谬斯是**亚历山大大帝** (Alexander the Great) 的数学老师。亚历山大大帝曾请教梅内克谬斯，想要找到学习几何的终南捷径。梅内克谬斯给出的回答却是“学习几何无捷径”。

抽象的圆锥曲线理论在约 1800 年之后开花结果。这里我们主要介绍四个人物——哥白尼、布鲁诺、开普勒和伽利略。

撼动地心说统治地位的第一人就是波兰天文学家**哥白尼** (Nicolaus Copernicus)。可以说哥白尼革命吹响了现代科学发展的集结号。

1543 年，哥白尼在《天体运行论》 (*On the Revolutions of the Heavenly Spheres*) 提出**日心说** (Heliocentrism)。他认为行星运行轨道为正圆形。细心观察星象后，哥白尼基本上确定地球绕太阳运转，而且每 24 小时完成一周运转。

有趣的是，哥白尼实际上是业余的天文学家，这是典型的“业余”把“专业”干翻在地。

哥白尼 (Nicolaus Copernicus)
波兰数学家、天文学家 | 1473年 ~ 1543年
提出日心说

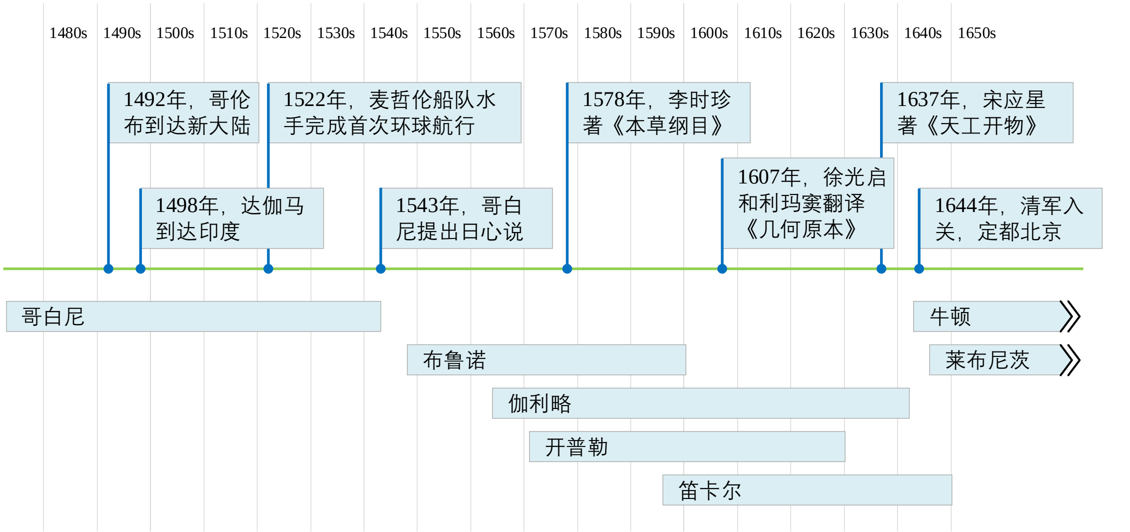


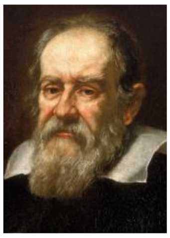
图 1. 哥白尼、布鲁诺、伽利略、开普卡所处的时间轴

这里需要提及的一个人是**布鲁诺** (Giordano Bruno)，他因为对抗教会、传播日心说，被判处长期监禁。1600 年，布鲁诺在罗马鲜花广场被烧死在火刑柱上。

开普勒 (Johannes Kepler) 通过观察和推理提出行星运行轨道为椭圆形，继而提出行星运动三大定理。可以说，圆锥曲线理论是开普勒行星运行研究的核心数学工具。而开普勒的研究对科学技术发展，甚至人类文明进步产生极大的推动作用。

开普勒 (Johannes Kepler)
德国天文学家、数学家 | 1571年 ~ 1630年
发现行星运行三大定律

伽利略 (Galileo Galilei) 创作的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》 (*Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*) 一书中支持哥白尼的理论地球不是宇宙的固定不动的中心。



伽利略 (Galileo Galilei)
意大利天文学家、物理学家和工程师 | 1564年 ~ 1642年
现代物理学之父

因为支持哥白尼日心说，伽利略被罗马宗教裁判所判刑，余生被软禁家中。据传，在被迫放弃日心说主张时，伽利略喃喃自语“可是，地球确实绕着太阳转。”

1979 年，教皇保罗二世代表教廷为伽利略公开平反昭雪，这一道歉迟到了 300 多年。

在伽利略的时代，亚里士多德的世界观处于权威地位。

根据亚里士多德的理论，较重的物体比较轻的物体下降快。在 1800 年时间里，这个观点从未被撼动，直到伽利略爬上比萨斜塔。伽利略将不同重量物体从塔顶抛下，结合之前的斜面试验结果，伽利略提出著名的自由落体定律。

在天文学方面，伽利略首次用望远镜进行天文观测，他发现太阳黑子、月球山系和木星四颗最大的卫星等。

不同于信仰，科学的魅力在于好奇、质疑、实验、推翻、重构，如此往复、迭代上升。

8.2 圆锥曲线：对顶圆锥和截面相交

圆锥、对顶圆锥

顾名思义，**圆锥曲线** (conic section) 和圆锥有直接关系。

图 2 比较**圆锥** (cone) 和**对顶圆锥** (double cone)。圆锥相当于一个直角三角形 (图中蓝色阴影) 以**中轴** (axis) 所在直线旋转得到的形状，直角三角形斜边是圆锥**母线** (generatrix)。白话说，两个全等圆锥，中轴重合、顶对顶安放，便得到对顶圆锥。

反过来，两个全等圆锥，中轴重合、底对底安放，便得到**双锥体** (bicone)。

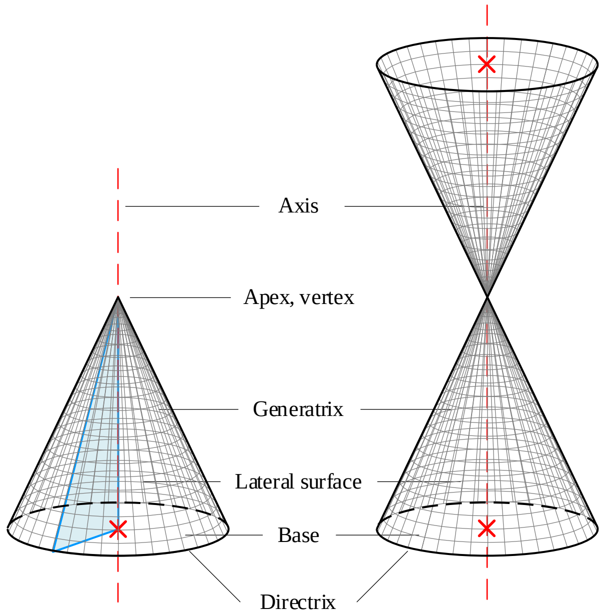


图 2. 圆锥和对顶圆锥

圆锥曲线

圆锥曲线是通过一个对顶圆锥和一个**截面** (cutting plane) 相交得到一系列曲线。圆锥曲线主要分为：**正圆** (circle)、**椭圆** (ellipse)、**抛物线** (parabola) 和**双曲线** (hyperbola)。正圆可以视作椭圆的特殊形态。

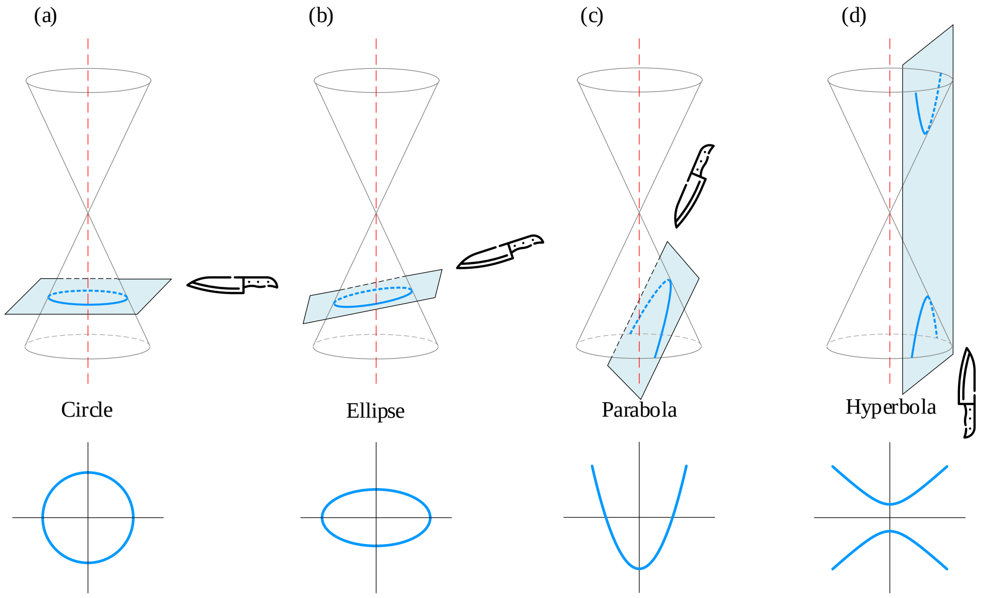


图 3. 四种圆锥曲线

如图 3 (a) 所示，当截面与圆锥中心对称轴垂直，交线为正圆。

当斜面与圆锥相交，交线闭合且不过圆锥顶点，交线为椭圆，如图 3 (b) 所示。

当截面仅与圆锥面一条母线平行，交线仅出现在圆锥面一侧，交线为抛物线，如图 3 (c) 所示。

当截面与两侧圆锥都相交，并且截面不通过圆锥顶点，得到结果是双曲线，如图 3 (d) 所示。

蜕化圆锥曲线

此外，还有一类圆锥曲线特殊情况——**蜕化圆锥曲线** (degenerate conic)。

蜕化双曲线 (degenerate hyperbola) 为两条相交直线，如图 4 (a) 所示。

蜕化抛物线 (degenerate parabola) 可以是一条直线 (图 4 (b)) 或者两条平行直线。

蜕化椭圆 (degenerate ellipse) 为一个点，如图 4 (c) 所示。

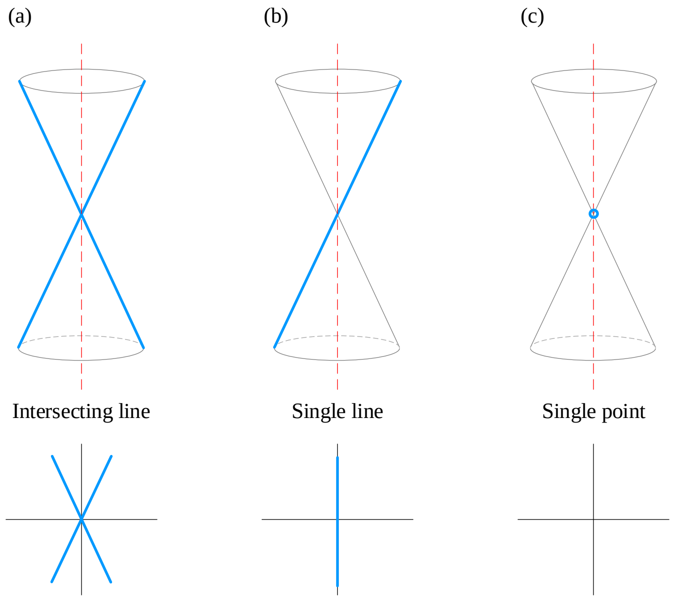


图 4. 三种蜕化圆锥曲线

8.3 正圆：特殊的椭圆

如图 5 (a) 所示，在 x_1x_2 平面上，圆心位于原点的正圆解析式为：

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \tag{1}$$

其中，r 为**半径** (radius)。

正圆的周长为 $2\pi r$，正圆的面积为 πr^2。

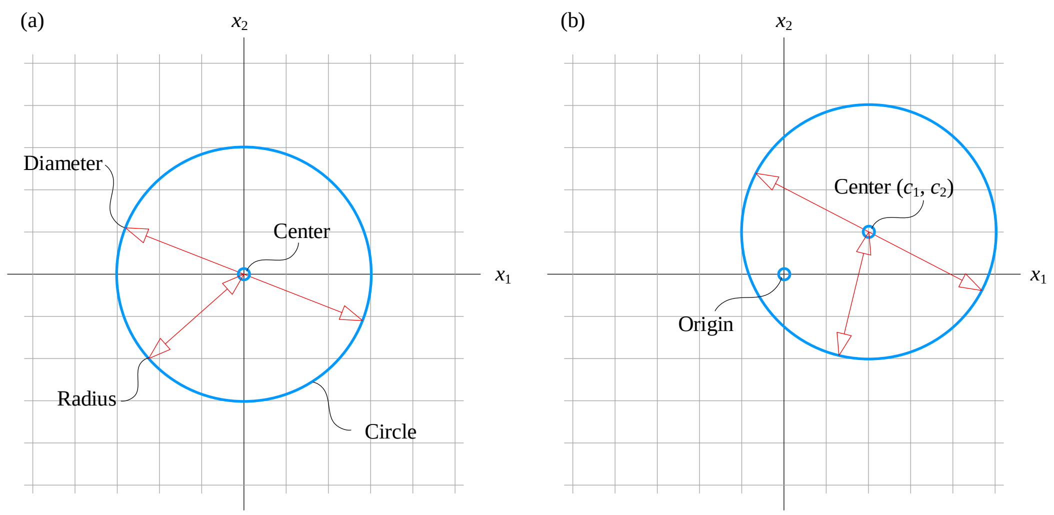


图 5. 正圆

(1) 也可以写成这样的矩阵乘法形式：

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = r^2 \tag{2}$$

其中，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

(1) 所示解析式对应的参数方程为：

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(t) \\ x_2 = r\sin(t) \end{cases} \tag{4}$$

这个正圆的参数方程也可以写成：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \tag{5}$$

如图 5 (b) 所示，圆心位于 (c_1, c_2) 的正圆解析式为：

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2 \tag{6}$$

(6) 也可以写成这样的矩阵乘法形式：

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=r^2 \tag{7}$$

其中，

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

(6) 对应的参数方程为：

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + r\cos(t) \\ x_2 = c_2 + r\sin(t) \end{cases} \tag{9}$$

上半圆、下半圆

图 5 (a) 所示图像并不是函数，因为一个自变量对应两个因变量的值，这显然不满足函数定义。但是，我们可以用水平线把正圆一切为二，得到上下两个函数，如图 6 所示。

图 6 (a) 所示为**上半圆** (upper semicircle) 函数：

$$f(x_1)=\sqrt{r^2-x_1^2} \tag{10}$$

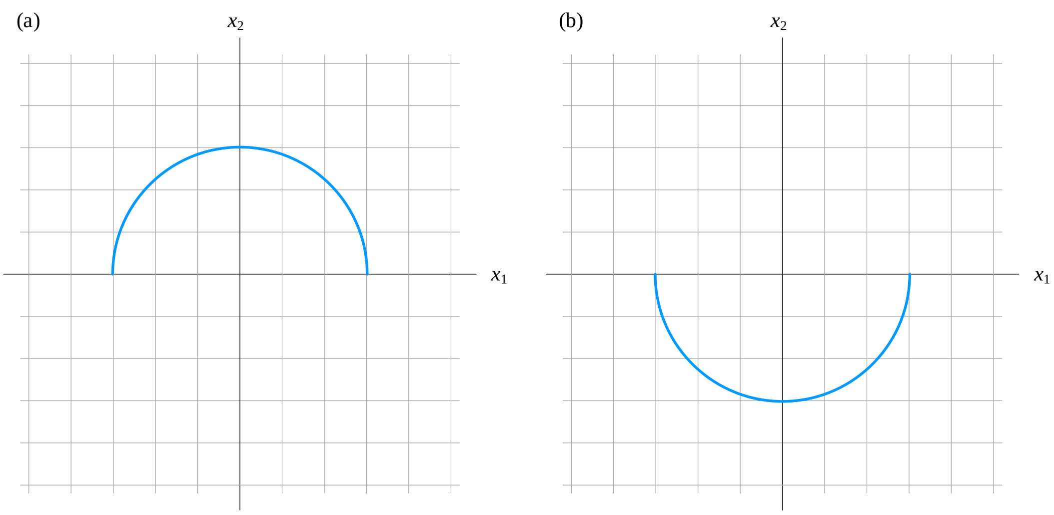


图 6. 上半圆和下半圆函数

图 6 (b) 所示为**下半圆** (lower semicircle) 函数：

$$f(x_1)=-\sqrt{r^2-x_1^2} \tag{11}$$

表 1. 用英文读正圆解析式

数学表达	英文表达
$x^2+y^2=r^2$	*x* squared plus *y* squared equals *r* squared
$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$	*y* equals plus or minus square root of the difference of *r* squared minus *x* squared
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	The difference *x* minus *h* squared plus the difference *y* minus *k* squared equals *r* squared. The quantity *x* minus *h* squared plus the quantity *y* minus *k* squared equals *r* squared.

8.4 椭圆：机器学习的多面手

中心位于原点的正椭圆有两种基本形式，如图 7 所示。

图 7 (a) 所示椭圆的**长轴** (major axis) 位于横轴 x_1 上，对应的解析式为：

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1 \tag{12}$$

其中，$a>b>0$。

长轴，是指通过连接椭圆上的两个点所能获得的最长线段，图 7 (a) 椭圆长轴的长度为 $2a$。

与之相反，**短轴** (minor axis) 是通过连接椭圆上的两个点所能获得的最短线段，图 7 (a) 椭圆短轴长度为 $2b$。一个椭圆长轴和短轴相互垂直。

长轴的一半被称作**半长轴** (semi-major axis)，短轴的一半被称作**半短轴** (semi-minor axis)。

所谓正椭圆，是指椭圆的长轴位于水平方向或竖直方向。

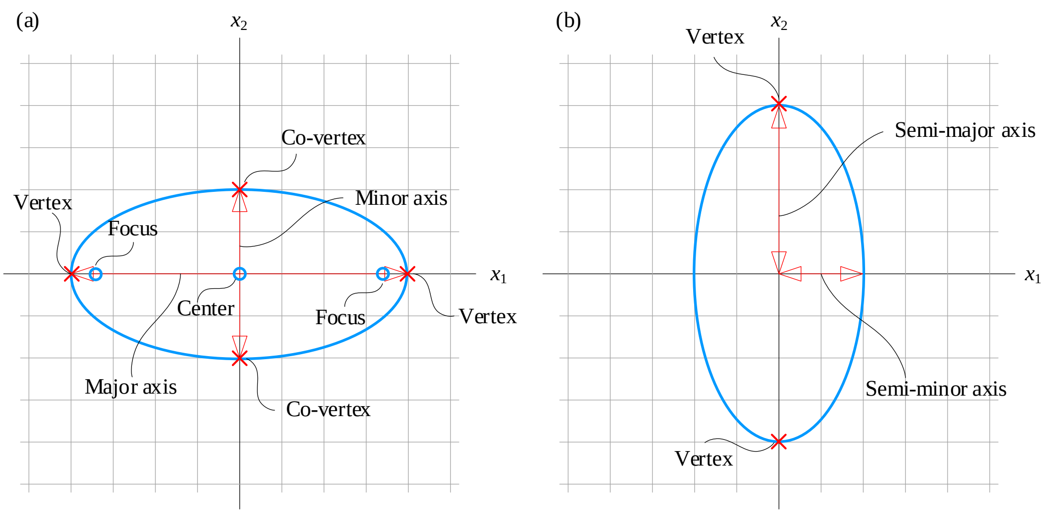


图 7. 中心位于原点的正椭圆

(12) 也可以写成如下矩阵乘法形式：

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = r^2 \tag{13}$$

如图 8 所示，椭圆可以看成是正圆朝某一个方向或两个方向缩放得到的结果。这一点从椭圆面积上很容易发现端倪。图 8 所示正圆的面积为 πb^2，水平方向拉伸后得到椭圆，对应半长轴为 a，椭圆面积为 πab。

在本系列丛书《矩阵力量》一册，大家会知道如下对角方阵对应的几何操作就是"缩放"：

$$\begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

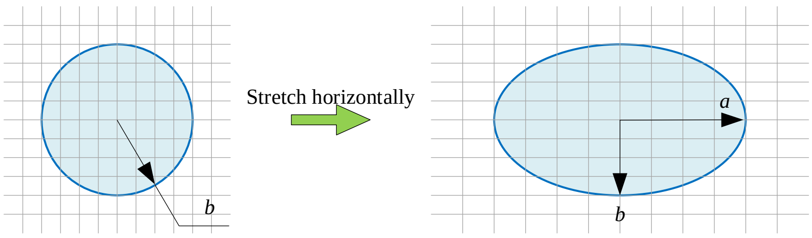


图 8. 椭圆和正圆的关系

(12) 解析式对应的参数方程为：

$$\begin{cases} x_1 = a\cos(t) \\ x_2 = b\sin(t) \end{cases} \tag{15}$$

该参数方程也可以写成：

$$\begin{cases} x_1 = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = b\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \tag{16}$$

表 2. 用英文读椭圆解析式

数学表达	英文表达
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	The fraction *x* squared over *a* squared plus the fraction *y* squared over *b* squared equals one.

图 7 (b) 所示椭圆的长轴位于纵轴 x_2 上，对应的解析式为：

$$\frac{x_1^2}{b^2}+\frac{x_2^2}{a^2}=1 \tag{17}$$

同样 $a > b > 0$。

焦点

此外，椭圆的**焦点** (单数 focus，复数 foci) 位于椭圆长轴。对于 (12)，该椭圆上任意一点 P 到两个焦点 F_1 和 F_2 的距离之和等于 $2a$。如图 9 所示，上述关系可以通过下式表达：

$$|PF_1|+|PF_2|=2a \tag{18}$$

两个焦点 F_1 和 F_2 之间距离被称作为焦距 $2c$，c 可以通过下式计算得到：

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \tag{19}$$

由此可以得到 图 7 (a) 椭圆两个焦点坐标分别为 $(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$。图 7 (b) 椭圆两个焦点坐标分别为 $(0, -c)$ 和 $(0, c)$。

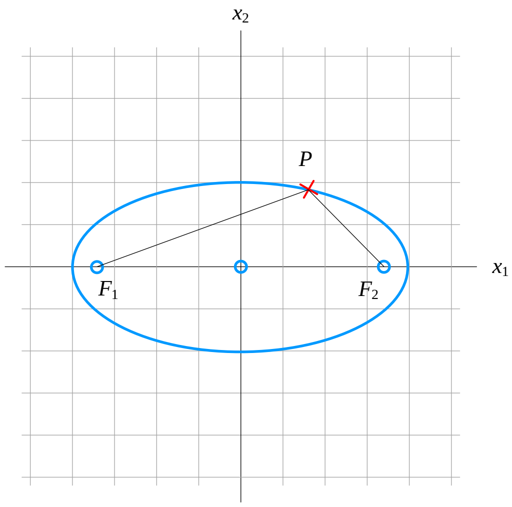


图 9. 椭圆焦点和椭圆的关系

中心移动

图 10 所示为中心在 (c_1, c_2) 的正椭圆。图 10 (a) 所示椭圆的解析式如下：

$$\frac{(x_1-c_1)^2}{a^2}+\frac{(x_2-c_2)^2}{b^2}=1 \tag{20}$$

同样 $a > b > 0$。图 10 (a) 所示椭圆的解析式如下：

$$\frac{(x_1-c_1)^2}{b^2}+\frac{(x_2-c_2)^2}{a^2}=1 \tag{21}$$

图 10 中椭圆实际上是图 7 经过平移得到的。

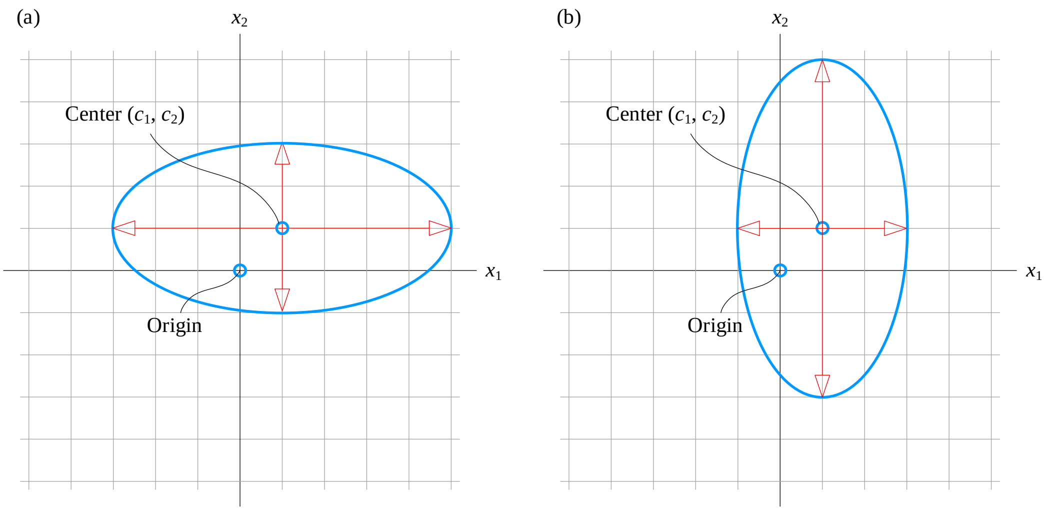


图 10. 中心偏离原点椭圆

8.5 旋转椭圆：几何变换的结果

(12) 椭圆逆时针旋转 θ 后得到椭圆对应的解析式：

$$\frac{\left[x_1\cos(\theta)+x_2\sin(\theta)\right]^2}{a^2}+\frac{\left[x_1\sin(\theta)-x_2\cos(\theta)\right]^2}{b^2}=1 \tag{22}$$

顺时针旋转 θ 后得到椭圆解析式：

$$\frac{\left[x_1\cos(\theta)-x_2\sin(\theta)\right]^2}{a^2}+\frac{\left[x_1\sin(\theta)+x_2\cos(\theta)\right]^2}{b^2}=1 \tag{23}$$

举个例子

中心位于原点，长轴位于横轴的正椭圆在旋转之前解析式为：

$$\frac{x_1^2}{4}+x_2^2=1 \tag{24}$$

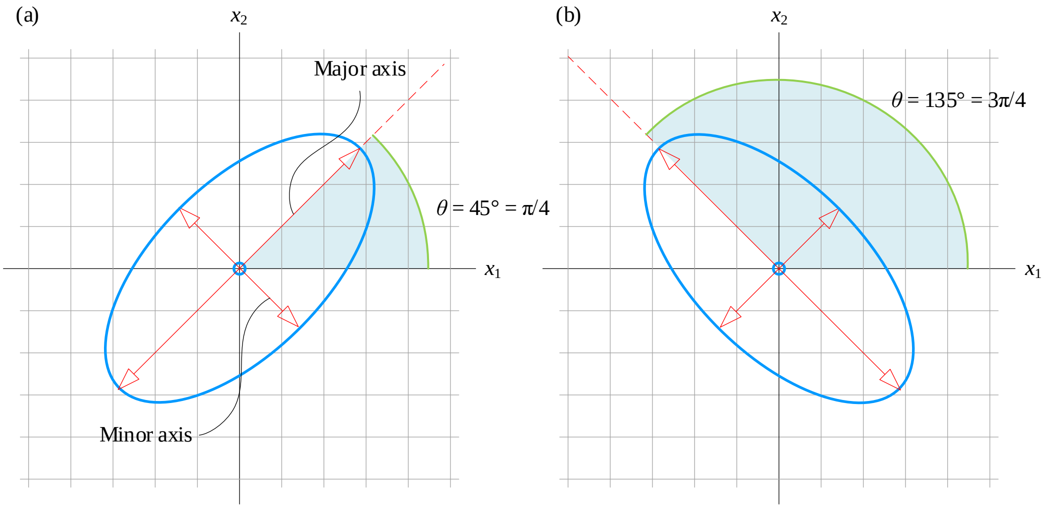


图 11. 旋转椭圆

图 11 (a) 所示为绕中心 (原点) 逆时针旋转 $\theta = 45° = \pi/4$ 获得的椭圆，长轴位于第一和第三象限。对应解析式如下：

$$\frac{\left[x_1\cos(45°)+x_2\sin(45°)\right]^2}{4}+\left[x_1\sin(45°)-x_2\cos(45°)\right]^2=1 \tag{25}$$

整理解析式得到：

$$\frac{5x_1^2}{8}-\frac{3x_1x_2}{4}+\frac{5x_2^2}{8}=1 \tag{26}$$

图 11 (b) 所示为绕中心 (原点) 逆时针旋转 $\theta = 135° = 3\pi/4$ 获得的椭圆，它的长轴位于第二和第四象限。对应解析式如下：

$$\frac{\left[x_1\cos(135°)+x_2\sin(135°)\right]^2}{4}+\left[x_1\sin(135°)-x_2\cos(135°)\right]^2=1 \tag{27}$$

整理解析式得到：

$$\frac{5x_1^2}{8}+\frac{3x_1x_2}{4}+\frac{5x_2^2}{8}=1 \tag{28}$$

对比 (26) 和 (28)，发现解析式仅仅差在 $3x_1x_2/4$ 项的正负号上。

单位圆到椭圆

平面上，对单位圆进行一系列几何变换操作，可以得到中心位于任意一点的旋转椭圆。

如图 12 所示，单位圆 (蓝色)，首先经过缩放得到长轴位于横轴的椭圆 (绿色)，绕中心旋转之后得到旋转椭圆 (橙黄)，最后中心平移得到红色椭圆。

多提一嘴，椭圆的缩放、旋转、平移等操作，和本系列丛书后续线性代数中仿射变换直接相关，请大家格外留意。

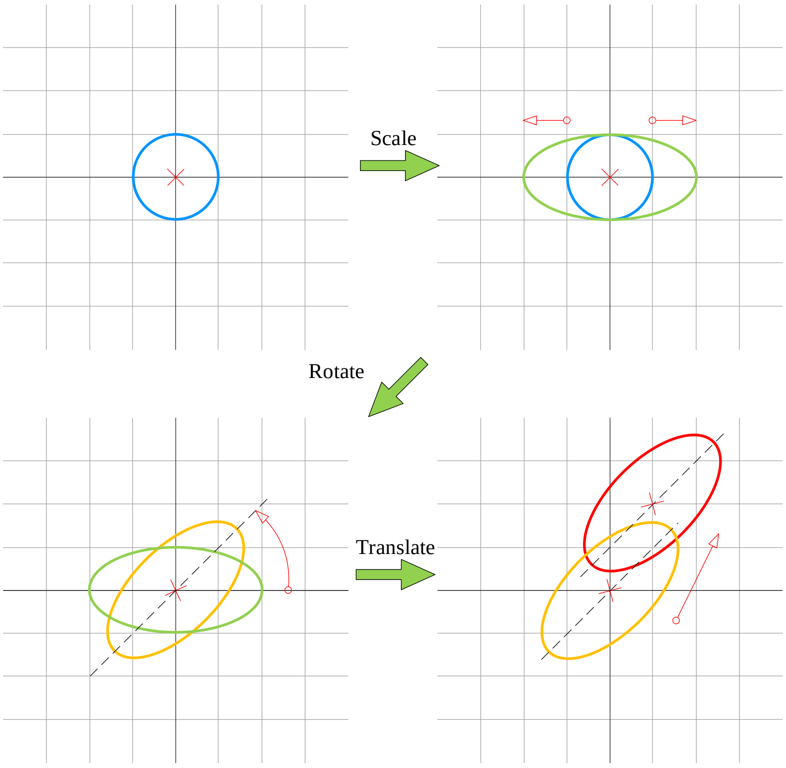


图 12. 正圆经过缩放、旋转和平移得到椭圆

`Bk3_Ch8_01.py` 绘制平移和旋转椭圆。

椭圆，这个高中阶段学过的数学概念，和数据科学、机器学习有什么关系？

看似平淡无奇的椭圆，其实与数据科学和机器学习有着特别密切的关系。这里，我们蜻蜓点水地聊一下。

图 13 所示为不同相关性系数条件下，二元高斯分布 PDF 曲面和等高线。在平面等高线的图像中，我们看到的是一系列同心椭圆。

不同相关性系数条件下，满足特定二元高斯分布的随机数可以看到椭圆的影子，具体如图 14 所示。

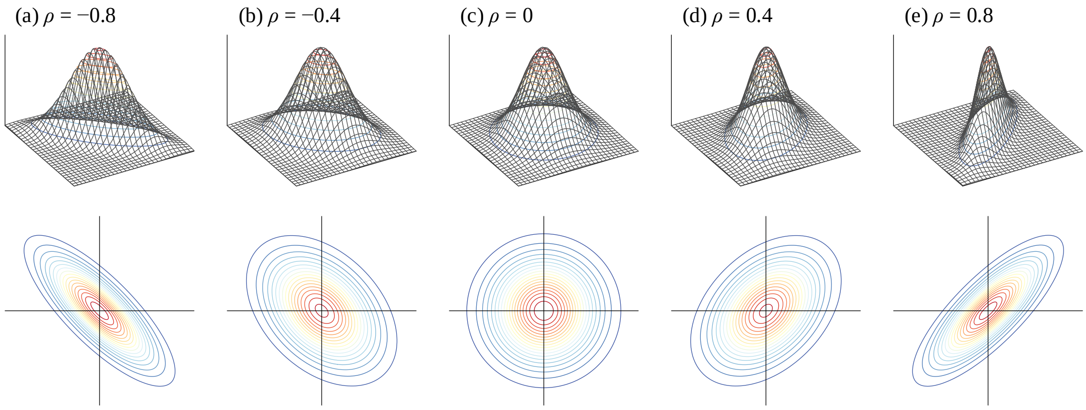


图 13. 不同相关性系数，二元高斯分布 PDF 曲面和等高线

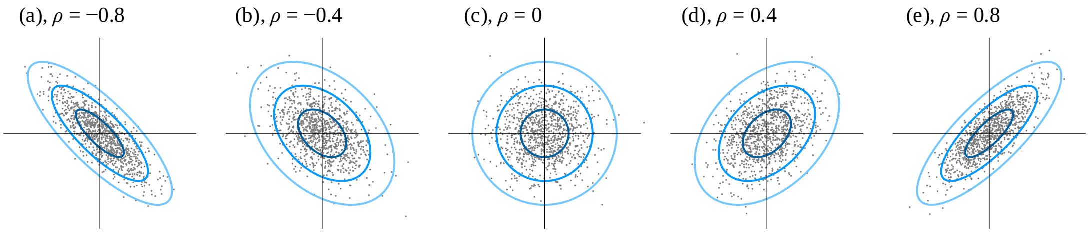


图 14. 相关系数 ρ 不同时，散点和椭圆关系

上一章简单提到马氏距离这个距离度量。如图 15 所示，马氏距离计算过程就是椭圆几何变换过程。

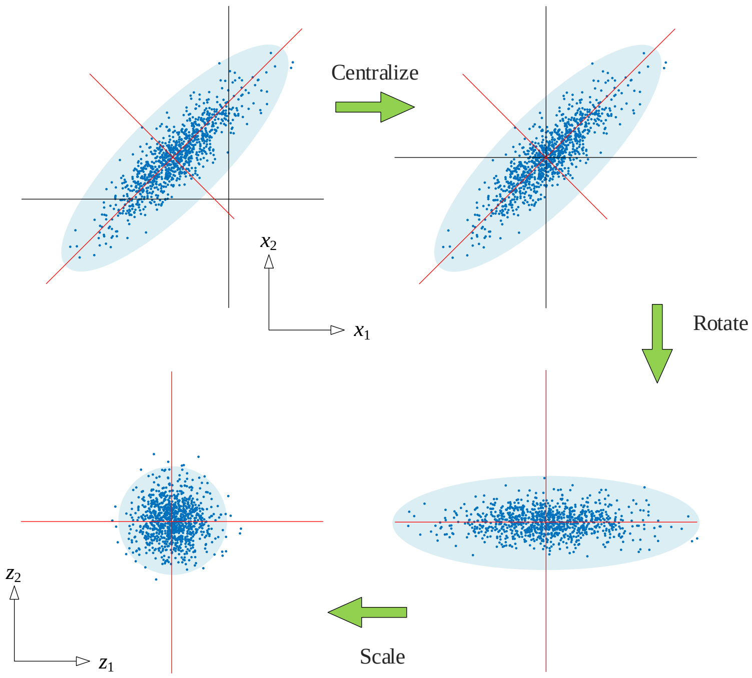


图 15. 马氏距离计算过程

本书前文提到的一元线性回归和椭圆也息息相关。从概率角度，线性回归的本质就是条件概率。图 16 所示为条件概率曲面等高线，黑色斜线代表线性回归。我们也能看到椭圆身在其中。

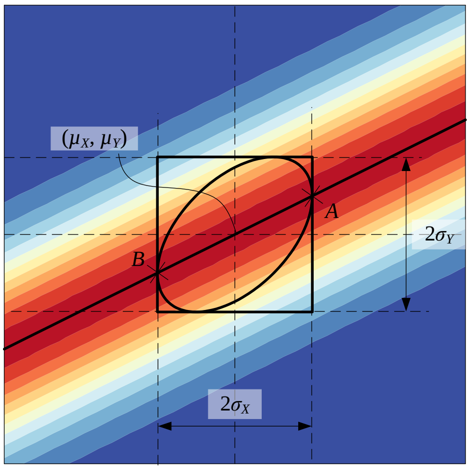


图 16. 条件概率曲面等高线

主成分分析 (Principal Component Analysis, PCA) 是机器学习中重要的降维算法。从几何角度来看，如图 17 所示，主成分分析实际上就是在寻找椭圆的长轴。

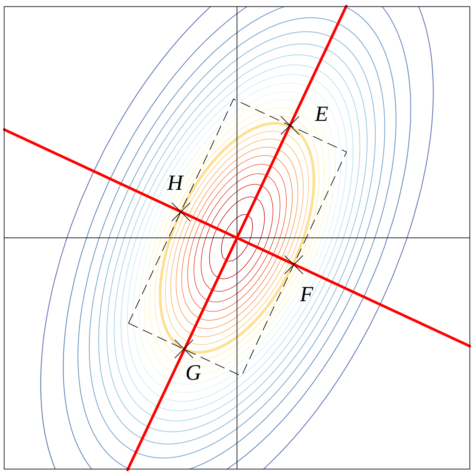


图 17. 主成分分析

在一些分类和聚类算法确定的决策边界中，我们也可以看到椭圆及其他圆锥曲线。图 18 所示为高斯朴素贝叶斯分类计算得到的决策边界。图 19 所示为高斯混合模型确定的决策边界。

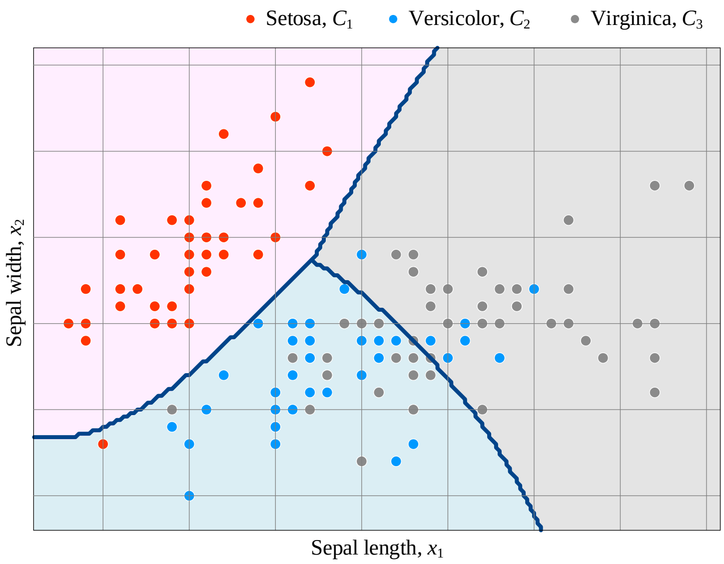


图 18. 高斯朴素贝叶斯分类确定的决策边界

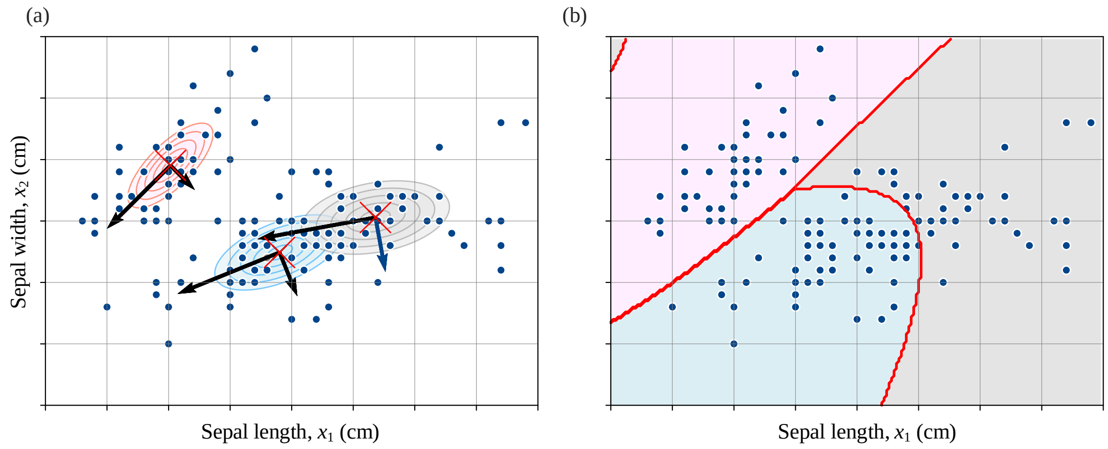


图 19. 高斯混合模型确定的决策边界

总而言之，椭圆在数据科学和机器学习这两个话题中有很多"戏份"，本系列丛书将为大家一一讲述这些有关椭圆的故事。因此，也请大家耐心学完本章和下一章内容。

8.6 抛物线：不止是函数

如图 20 (a) 所示，顶点在原点，对称轴位于 x_2 纵轴，开口向上抛物线解析式如下：

$$4px_2 = x_1^2, \quad p > 0 \tag{29}$$

这条抛物线顶点位于原点 (0, 0)，**焦点** (focus) 位于 $(0, p)$，**准线** (directrix) 位于 $y = -p$。当 p 小于 0 时，形如 (29) 抛物线开口朝下。

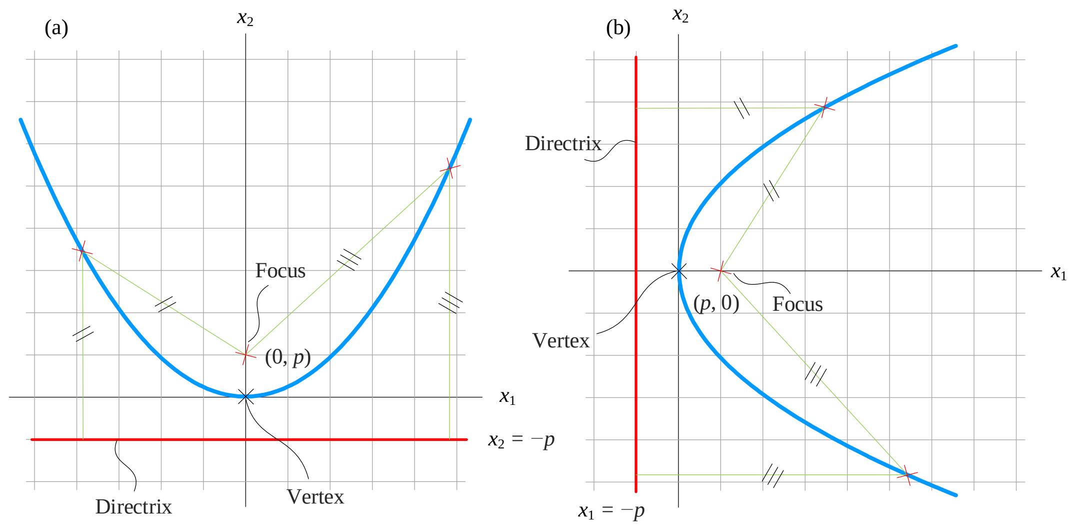


图 20. 抛物线

平面上，抛物线上每一点与焦点之间距离等于点和准线之间距离。这一规律可以用来推导得到抛物线解析式。设抛物线任意一点为 (x_1, x_2)，该点与准线间距离，等于该点和焦点间距离，如下式：

$$\begin{aligned} & x_2-(-p)=\sqrt{(x_1-0)^2+(x_2-p)^2}, \quad p>0 \\ & \Rightarrow (x_2+p)^2=x_1^2+(x_2-p)^2 \\ & \Rightarrow 4px_2=x_1^2 \end{aligned} \tag{30}$$

图 20 (a) 所示，顶点在原点，对称轴位于 x_1 横轴，开口向右抛物线解析式如下：

$$4px_1=x_2^2, \quad p>0 \tag{31}$$

当 p 小于 0 时，形如 (31) 抛物线开口朝左。

平移

同样，抛物线也可以整体平移。形如下式的抛物线，顶点位于 (h, k)，开口朝上或朝下，具体方向由 p 正负决定：

$$4p(x_2-k)=(x_1-h)^2 \tag{32}$$

(32) 所示抛物线对称轴为 $x_1 = h$，准线位于 $x_2 = k - p$，焦点所在位置为 $(h, k + p)$。

如下抛物线，顶点同样位于 (h, k)，p 正负决定开口朝左或朝右：

$$4p(x_1-h)=(x_2-k)^2 \tag{33}$$

(33) 所示抛物线对称轴为 $x_2 = k$，准线位于 $x_1 = h - p$，焦点所在位置为 $(h + p, k)$。

图 21 所示为四种抛物线，请大家参考前文代码自行绘制图 21。

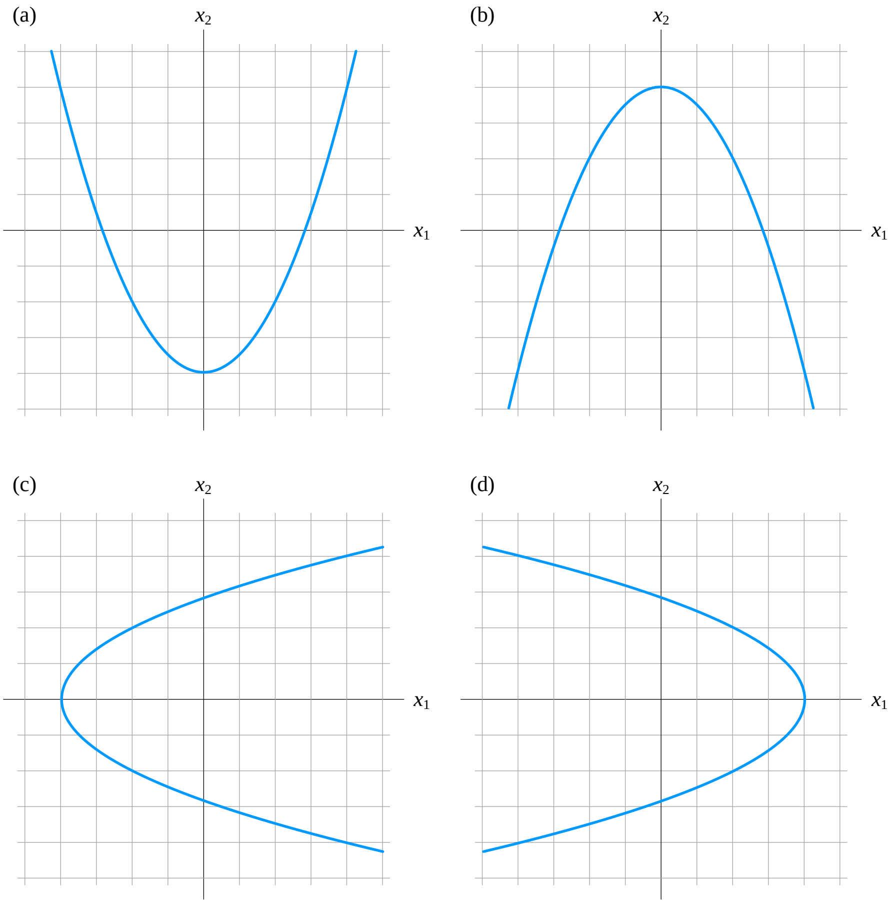


图 21. 四种抛物线

8.7 双曲线：引力弹弓的轨迹

图 22 (a) 所示为，焦点位于横轴，顶点位于原点双曲线，对应解析式形式为：

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1 \qquad a,b>0 \tag{34}$$

如图 22 (a) 所示，双曲线顶点位于原点，焦点位于 $F_1\ (-c, 0)$ 和 $F_2\ (c, 0)$，c 可以通过下式计算得到：

$$c^2=a^2+b^2,\ c>0 \tag{35}$$

双曲线上任意一点 P 到两个焦点 F_1 和 F_2 距离差值为 $2a$：

$$|PF_1|-|PF_2|=\pm 2a \tag{36}$$

图 22 (b) 所示为焦点位于纵轴双曲线，上下开口。这种双曲线标准式如下：

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = 1 \qquad a, b > 0 \tag{37}$$

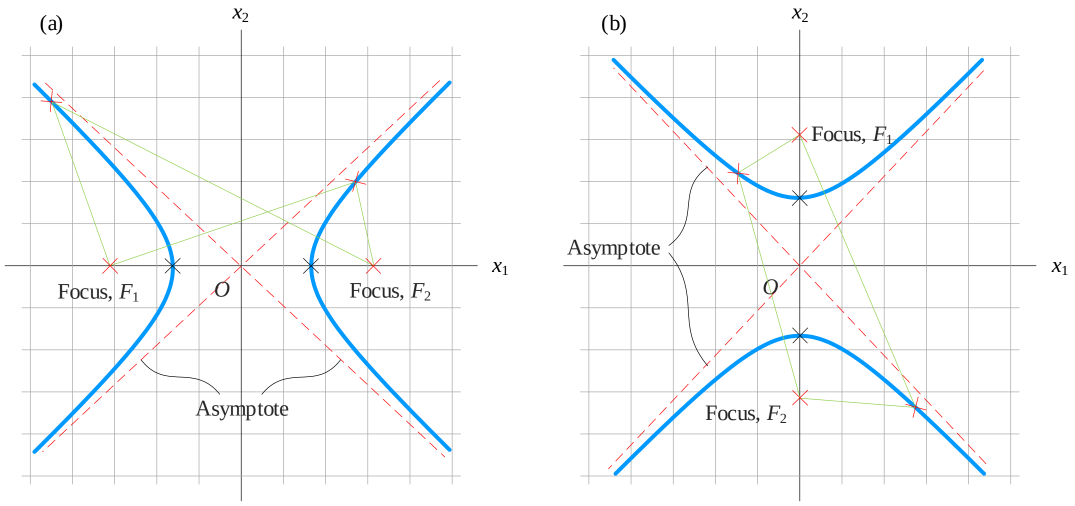


图 22. 两种标准双曲线形式

渐近线、切线斜率

图 22 (a) 所示双曲线的两条**渐近线** (asymptote) 表达式如下:

$$x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1 \tag{38}$$

图 23 所示为左右开口双曲线右侧部分不同切点处若干条渐变切线。容易发现，图 23 切线斜率，要么大于 b/a，要么小于 $-b/a$。也就是说，切线在 $(-\infty, -b/a)$ 和 $(b/a, +\infty)$ 两个区间之内。

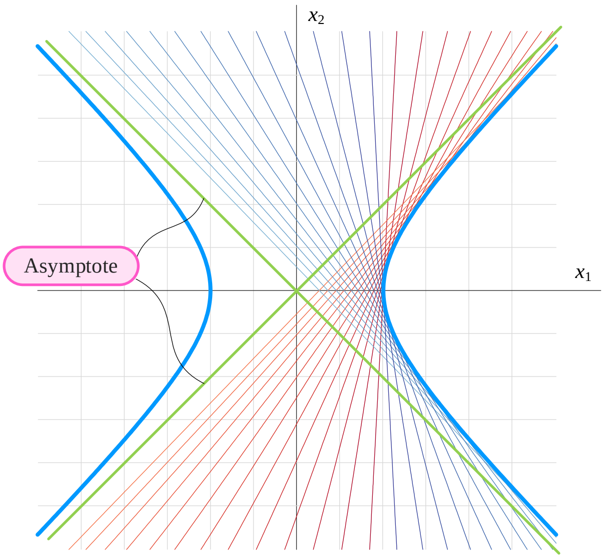


图 23. 双曲线右侧曲线切线

平移

双曲线中心也可以平移，比如将 (34) 所示双曲线中心平移至 (h, k)，得到的双曲线解析式如下：

$$\frac{(x_1-h)^2}{a^2}-\frac{(x_2-k)^2}{b^2}=1 \qquad a,b>0 \tag{39}$$

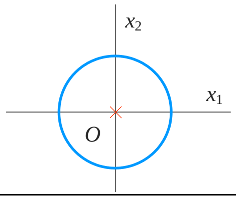
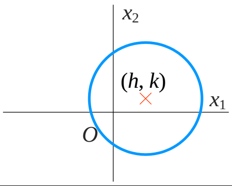
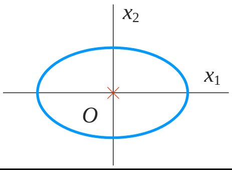
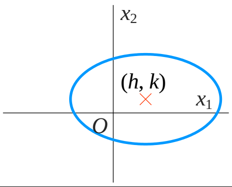
(39) 所示双曲线，顶点分别位于$(h + a, k)$ 和 $(h - a, k)$。(39) 对应双曲线的两条渐近线解析式如下：

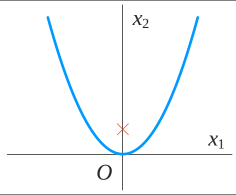
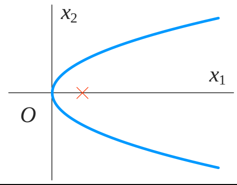
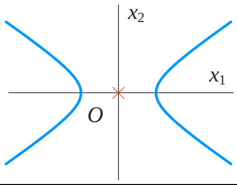
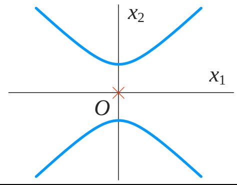
$$x_2=k\pm\frac{b}{a}(x_1-h) \tag{40}$$

圆锥曲线参数方程

表 3 总结常见圆锥曲线参数方程。

表 3. 常见圆锥曲线参数方程

形状	一般式	参数方程
	圆心在原点，半径为 r 圆形 $x_1^2+x_2^2=r^2$	$\begin{cases}x_1=r\cos(t)\\x_2=r\sin(t)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\x_2=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$
	圆心在 (h, k)，半径为 r 圆形 $(x_1-h)^2+(x_2-k)^2=r^2$	$\begin{cases}x_1=h+r\cos(t)\\x_2=k+r\sin(t)\end{cases}$
	椭圆中心在原点，长轴和焦点位于横轴，半长轴为 a，半短轴为 b $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{x_2^2}{b^2}=1$	$\begin{cases}x_1=a\cos(t)\\x_2=b\sin(t)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\x_2=b\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$
	椭圆，中心在 (h, k)，半长轴为 a，半短轴为 b $\dfrac{(x_1-h)^2}{a^2}+\dfrac{(x_2-k)^2}{b^2}=1$	$\begin{cases}x_1=h+a\cos(t)\\x_2=k+b\sin(t)\end{cases}$

	抛物线，焦点位于纵轴 $4px_2 = x_1^2$，$p > 0$	$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \dfrac{t^2}{4p} \end{cases}$
	抛物线，焦点位于横轴 $4px_1 = x_2^2$，$p > 0$	$\begin{cases} x_1 = \dfrac{t^2}{4p} \\ x_2 = t \end{cases}$
	双曲线，焦点位于横轴 $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = a\sec(t) \\ x_2 = b\tan(t) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = a\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ x_2 = b\dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$
	双曲线，焦点位于纵轴 $\dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_1^2}{a^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = a\tan(t) \\ x_2 = b\sec(t) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = a\dfrac{2t}{1-t^2} \\ x_2 = b\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \end{cases}$

科技进步发展从来不是正道坦途、一帆风顺，这条道路蜿蜒曲折、荆棘密布，很多人甚至为之付出生命。

即便如此，科学思想一旦被提出，就像是一颗种子种在了人类思想的土壤中。这些种子们早晚会生根发芽，开花结果。圆锥曲线就是个很好的例子。

圆锥曲线提出千年以后，人们利用这个数学工具解密了天体运行规律。此后几百年，圆锥曲线就会助力人类飞出地球摇篮，探索无边的深空。