

## 8

## Conic Sections

## 圆锥曲线

从解密天体运行，到探索星辰大海



可是，地球确实绕着太阳转。

*And yet it moves*

*E pur si muove.*

—— 伽利略·伽利莱 (Galilei Galileo) | 意大利物理学家、数学家及哲学家 | 1564 ~ 1642



- ▶ `ax.plot_wireframe()` 绘制三维网格图；其中，`ax = fig.add_subplot(projection='3d')`
- ▶ `ax.view_init()` 设置三维图像观察角度；其中，`ax = fig.add_subplot(projection='3d')`
- ▶ `numpy.arange()` 根据指定的范围以及设定的步长，生成一个等差数组
- ▶ `numpy.cos()` 计算余弦
- ▶ `numpy.linspace(start, end, num)` 生成等差数列，数列 `start` 和 `end` 之间（注意，包括 `start` 和 `end` 两个数值），数列的元素个数为 `num` 个
- ▶ `numpy.outer(u, v)` 当 `u` 和 `v` 都为向量时，`u` 的每一个值代表倍数，使得第二个向量每个值相应倍增。`u` 决定结果的行数，`v` 决定结果的列数；当 `u` 和 `v` 为多维向量时，按照先后列展开为向量
- ▶ `numpy.sin()` 计算正弦
- ▶ `sympy.Eq()` 定义符号等式
- ▶ `sympy.plot(sympy.sin(x)/x, (x, -15, 15), show=True)` 绘制符号函数表达式的图像
- ▶ `sympy.plot_implicit()` 绘制隐函数方程
- ▶ `sympy.plot3d(f_xy_diff_x, (x, -2, 2), (y, -2, 2), show=False)` 绘制函数的三维图
- ▶ `sympy.plotting.plot.plot_parametric()` 绘制二维参数方程
- ▶ `sympy.plotting.plot.plot3d_parametric_line()` 绘制三维参数方程
- ▶ `sympy.symbols()` 创建符号变量

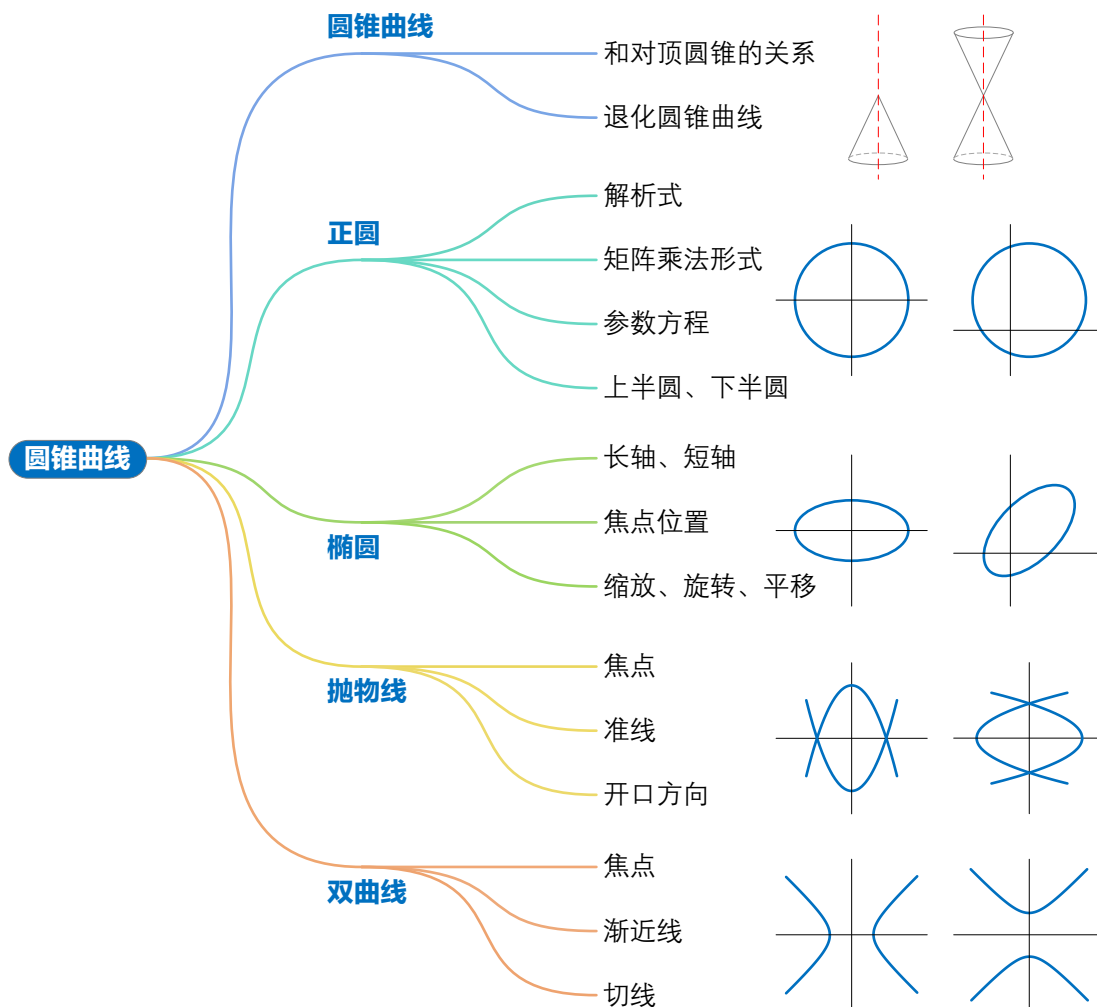
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



## 8.1 圆锥曲线外传

自古以来，世界各地的人们在仰望神秘星空时，都会不禁感慨宇宙的浩渺、神秘。

两千三百年前，中国战国时期诗人屈原在《天问》中问到“天何所沓？十二焉分？日月安属？列星安陈？”

在中国古代，“天圆地方”是权威的解释，比如孔子曾说“天道曰圆，地道曰方”。

但是，战国时期的法家创始人之一慎到认为天体是球形，他说“天形如弹丸，半覆地上，半隐地下，其势斜倚”。

东汉张衡无疑推动了中国古代对天体运行规律的认知，他提出“浑天如鸡子，天体圆如弹丸，地如鸡中黄，孤居于内，天大而地小”。

古希腊一众数学家和哲学家对天体运行规律有着相同的探索，其中具有代表性的是**毕达哥拉斯** (Pythagoras)、**亚里士多德** (Aristotle)、**埃拉托斯特尼** (Eratosthenes) 和**托勒密** (Ptolemy)。

古希腊数学家毕达哥拉斯在公元前六世纪，提出地球是球体这一概念。

亚里士多德则以实证的方法得出地球是球形这一结论。比如，他发现月食时，地球投影到月球上的形状为圆形。远航的船舰靠岸时，人们先看到桅杆，再看到船身，最后才能看到整个船身。亚里士多德还发现，越往北走，北极星越高；越往南走，北极星越低。

在地圆说基础上，托勒密建立**地心说** (geocentric model)。地心说被罗马教会奉为圭臬，禁锢了欧洲思想逾千年。

解放人类对天体运行规律认知的数学工具正是圆锥曲线。

古希腊数学家，**梅内克缪斯** (Menaechmus, 380 ~ 320 BC)，开创了圆锥曲线研究。相传，梅内克缪斯是**亚历山大大帝** (Alexander the Great) 的数学老师。亚历山大大帝曾请教梅内克缪斯，想要找到学习几何的终南捷径。梅内克缪斯给出的回答却是“学习几何无捷径”。

抽象的圆锥曲线理论在约 1800 年之后开花结果。这里我们主要介绍四个人物——哥白尼、布鲁诺、开普勒和伽利略。

撼动地心说统治地位的第一人就是波兰天文学家**哥白尼** (Nicolaus Copernicus)。可以说哥白尼革命吹响了现代科学发展的集结号。

1543 年，哥白尼在《天体运行论》(On the Revolutions of the Heavenly Spheres) 提出**日心说** (Heliocentrism)。他认为行星运行轨道为正圆形。细心观察星象后，哥白尼基本上确定地球绕太阳运转，而且每 24 小时完成一周运转。

有趣的是，哥白尼实际上是业余的天文学家，这是典型的“业余”把“专业”干翻在地。



**哥白尼 (Nicolaus Copernicus)**  
波兰数学家、天文学家 | 1473年 ~ 1543年  
提出日心说

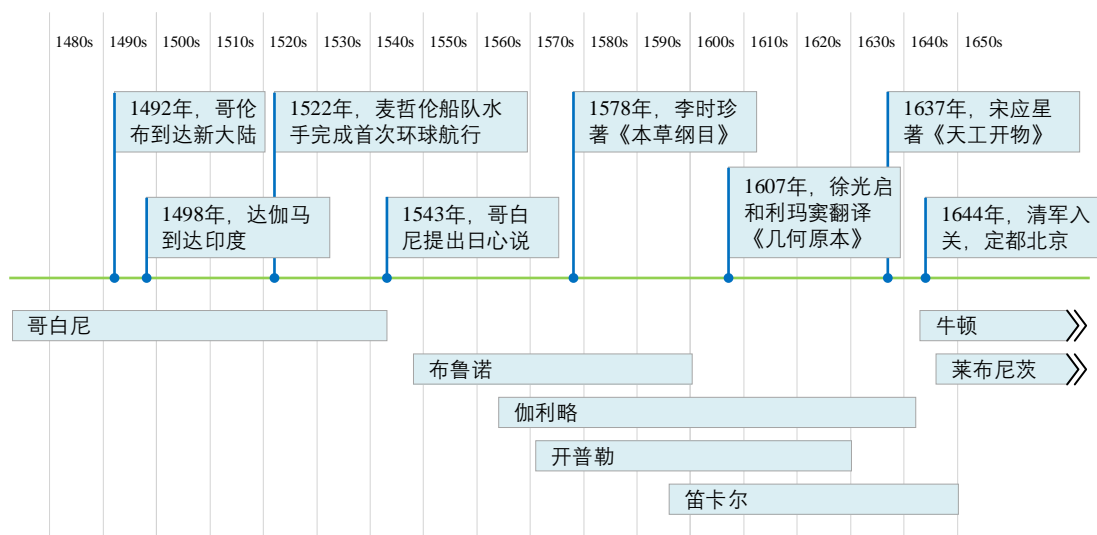


图 1. 哥白尼、布鲁诺、伽利略、开普卡所处的时间轴

这里需要提及的一个人是**布鲁诺** (Giordano Bruno)，他因为对抗教会、传播日心说，被判处长期监禁。1600年，布鲁诺在罗马鲜花广场被烧死在火刑柱上。

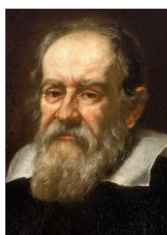
**开普勒** (Johannes Kepler) 通过观察和推理提出行星运行轨道为椭圆形，继而提出行星运动三大定理。可以说，圆锥曲线理论是开普勒行星运行研究的核心数学工具。而开普勒的研究对科学技术发展，甚至人类文明进步产生极大的推动作用。



**开普勒 (Johannes Kepler)**  
德国天文学家、数学家 | 1571年 ~ 1630年  
发现行星运行三大定律



**伽利略** (Galileo Galilei) 创作的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》 (*Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*) 一书中支持哥白尼的理论地球不是宇宙的固定不动的中心。



**伽利略** (Galileo Galilei)

意大利天文学家、物理学家和工程师 | 1564年 ~ 1642年  
现代物理学之父



因为支持哥白尼日心说，伽利略被罗马宗教裁判所判刑，余生被软禁家中。据传，在被迫放弃日心说主张时，伽利略喃喃自语“可是，地球确实绕着太阳转。”

1979年，教皇保罗二世代表教廷为伽利略公开平反昭雪，这一道歉迟到了300多年。

在伽利略的时代，亚里士多德的世界观处于权威地位。

根据亚里士多德的理论，较重的物体比较轻的物体下降快。在1800年时间里，这个观点从未被撼动，直到伽利略爬上比萨斜塔。伽利略将不同重量物体从塔顶抛下，结合之前的斜面试验结果，伽利略提出著名的自由落体定律。

在天文学方面，伽利略首次用望远镜进行天文观测，他发现太阳黑子、月球山系和木星四颗最大的卫星等。

不同于信仰，科学的魅力在于好奇、质疑、实验、推翻、重构，如此往复、迭代上升。

## 8.2 圆锥曲线：对顶圆锥和截面相交

### 圆锥、对顶圆锥

顾名思义，**圆锥曲线** (conic section) 和圆锥有直接关系。

图2比较**圆锥** (cone) 和**对顶圆锥** (double cone)。圆锥相当于一个直角三角形 (图中蓝色阴影) 以**中轴** (axis) 所在直线旋转得到的形状，直角三角形斜边是圆锥**母线** (generatrix)。白话说，两个全等圆锥，中轴重合、顶对顶安放，便得到对顶圆锥。

反过来，两个全等圆锥，中轴重合、底对底安放，便得到**双锥体** (bicone)。

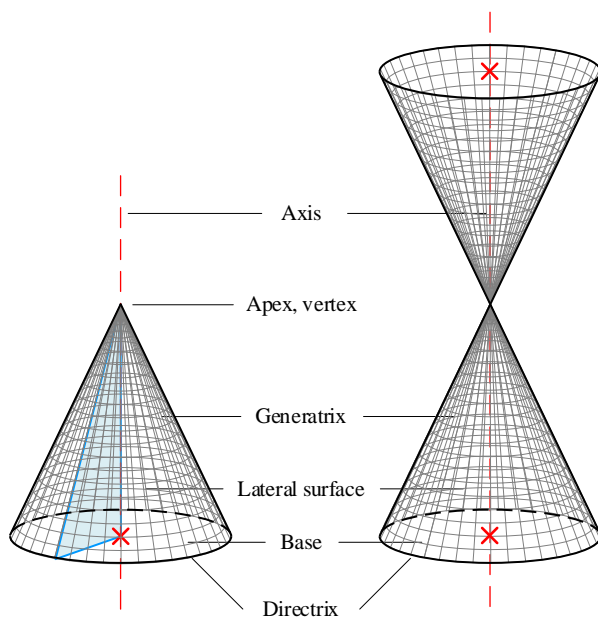


图 2. 圆锥和对顶圆锥

## 圆锥曲线

圆锥曲线是通过一个对顶圆锥和一个**截面** (cutting plane) 相交得到一系列曲线。圆锥曲线主要分为：**正圆** (circle)、**椭圆** (ellipse)、**抛物线** (parabola) 和**双曲线** (hyperbola)。正圆可以视作椭圆的特殊形态。

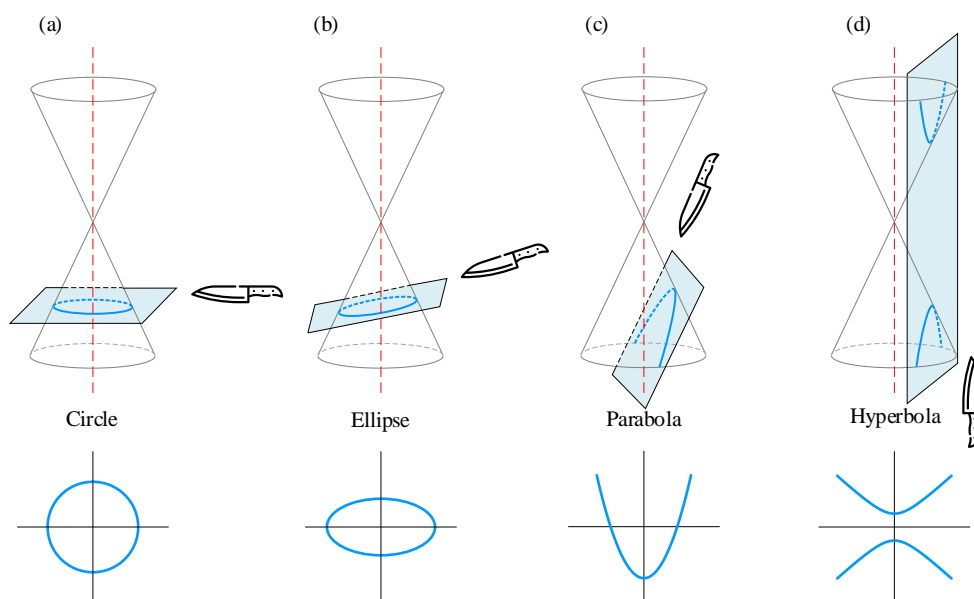


图 3. 四种圆锥曲线

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

如图 3 (a) 所示，当截面与圆锥中心对称轴垂直，交线为正圆。

当斜面与圆锥相交，交线闭合且不过圆锥顶点，交线为椭圆，如图 3 (b) 所示。

当截面仅与圆锥面一条母线平行，交线仅出现在圆锥面一侧，交线为抛物线，如图 3 (c) 所示。

当截面与两侧圆锥都相交，并且截面不通过圆锥顶点，得到结果是双曲线，如图 3 (d) 所示。

### 退化圆锥曲线

此外，还有一类圆锥曲线特殊情况——**退化圆锥曲线** (degenerate conic)。

**退化双曲线** (degenerate hyperbola) 为两条相交直线，如图 4 (a) 所示。

**退化抛物线** (degenerate parabola) 可以是一条直线 (图 4 (b)) 或者两条平行直线。

**退化椭圆** (degenerate ellipse) 为一个点，如图 4 (c) 所示。

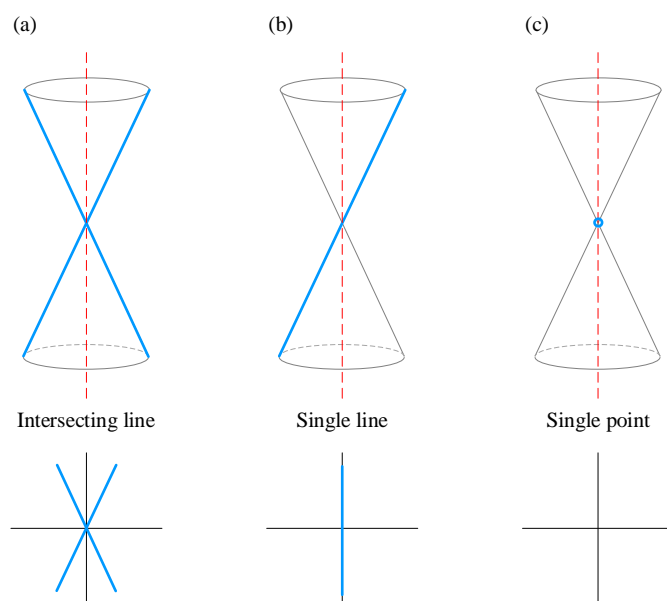


图 4. 三种退化圆锥曲线

## 8.3 正圆：特殊的椭圆

如图 5 (a) 所示，在  $x_1x_2$  平面上，圆心位于原点的正圆解析式为：

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad (1)$$

其中,  $r$  为半径 (radius)。

正圆的周长为  $2\pi r$ , 正圆的面积为  $\pi r^2$ 。

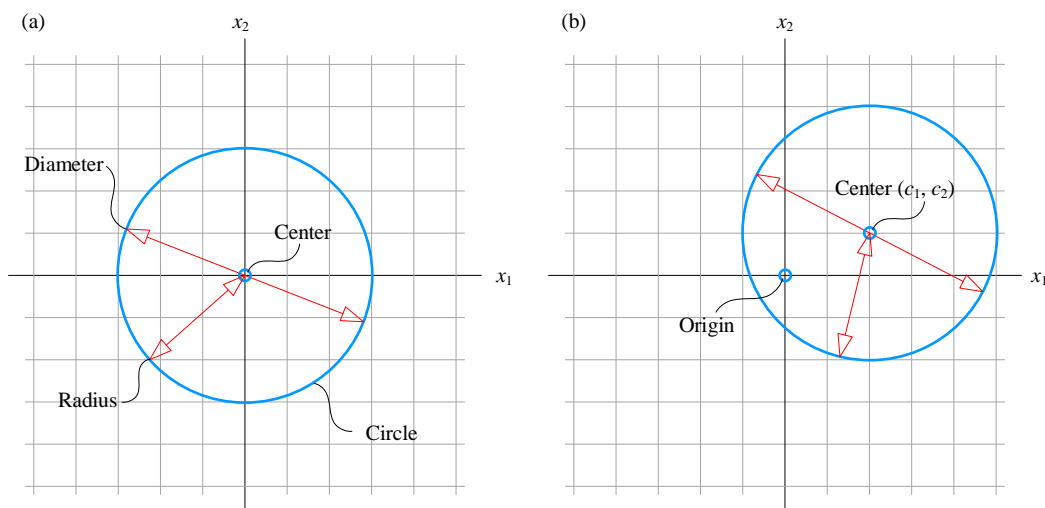


图 5. 正圆

(1) 也可以写成这样的矩阵乘法形式:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = r^2 \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(1) 所示解析式对应的参数方程为:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(t) \\ x_2 = r \sin(t) \end{cases} \quad (4)$$

这个正圆的参数方程也可以写成:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (5)$$

如图 5 (b) 所示, 圆心位于  $(c_1, c_2)$  的正圆解析式为:

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2 \quad (6)$$



(6) 也可以写成这样的矩阵乘法形式：

$$(\mathbf{x} - \mathbf{c})^T (\mathbf{x} - \mathbf{c}) = r^2 \quad (7)$$

其中，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

(6) 对应的参数方程为：

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + r \cos(t) \\ x_2 = c_2 + r \sin(t) \end{cases} \quad (9)$$

### 上半圆、下半圆

图 5 (a) 所示图像并不是函数，因为一个自变量对应两个因变量的值，这显然不满足函数定义。但是，我们可以用水平线把正圆一切为二，得到上下两个函数，如图 6 所示。

图 6 (a) 所示为**上半圆** (upper semicircle) 函数：

$$f(x_1) = \sqrt{r^2 - x_1^2} \quad (10)$$

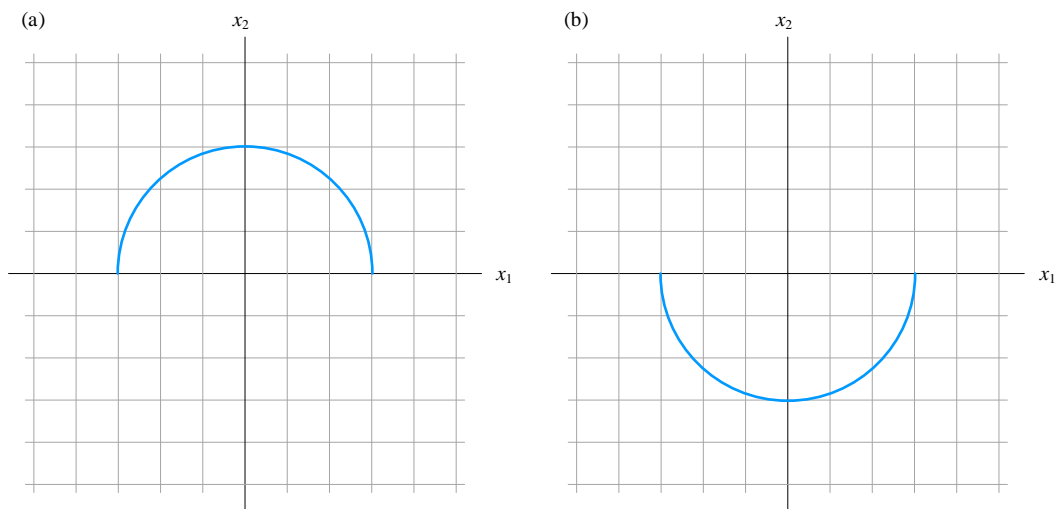


图 6. 上半圆和下半圆函数

图 6 (b) 所示为**下半圆** (lower semicircle) 函数：

$$f(x_1) = -\sqrt{r^2 - x_1^2} \quad (11)$$

表 1. 用英文读正圆解析式

数学表达	英文表达
$x^2 + y^2 = r^2$	$x$ squared plus $y$ squared equals $r$ squared
$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$	$y$ equals plus or minus square root of the difference of $r$ squared minus $x$ squared
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	The difference $x$ minus $h$ squared plus the difference $y$ minus $k$ squared equals $r$ squared. The quantity $x$ minus $h$ squared plus the quantity $y$ minus $k$ squared equals $r$ squared.

## 8.4 椭圆：机器学习的多面手

中心位于原点的正椭圆有两种基本形式，如图 7 所示。

图 7 (a) 所示椭圆的**长轴** (major axis) 位于横轴  $x_1$  上，对应的解析式为：

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (12)$$

其中， $a > b > 0$ 。

长轴，是指通过连接椭圆上的两个点所能获得的最长线段，图 7 (a) 椭圆长轴的长度为  $2a$ 。

与之相反，**短轴** (minor axis) 是通过连接椭圆上的两个点所能获得的最短线段，图 7 (a) 椭圆短轴长度为  $2b$ 。一个椭圆长轴和短轴相互垂直。

长轴的一半被称作**半长轴** (semi-major axis)，短轴的一半被称作**半短轴** (semi-minor axis)。

所谓正椭圆，是指椭圆的长轴位于水平方向或竖直方向。

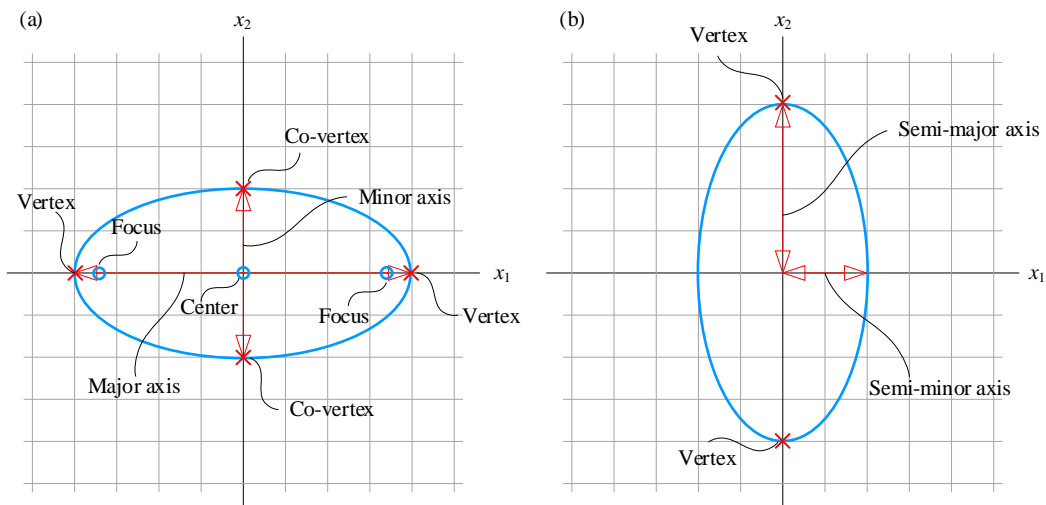


图 7. 中心位于原点的正椭圆

(12) 也可以写成如下矩阵乘法形式：

$$\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = r^2 \quad (13)$$

如图 8 所示，椭圆可以看成是正圆朝某一个方向或两个方向缩放得到的结果。这一点从椭圆面积上很容易发现端倪。图 8 所示正圆的面积为  $\pi b^2$ ，水平方向拉伸后得到椭圆，对应半长轴为  $a$ ，椭圆面积为  $\pi ab$ 。

在本系列丛书《矩阵力量》一册，大家会知道如下对角方阵对应的几何操作就是“缩放”：

$$\begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

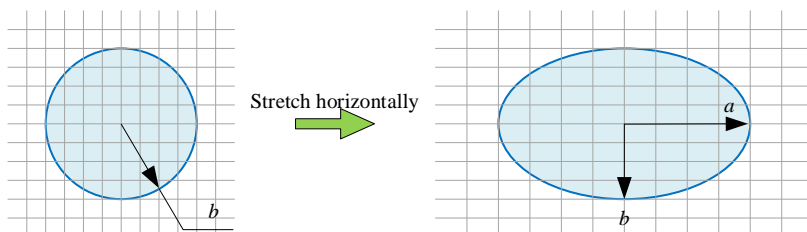


图 8. 椭圆和正圆的关系

(12) 解析式对应的参数方程为：

$$\begin{cases} x_1 = a \cos(t) \\ x_2 = b \sin(t) \end{cases} \quad (15)$$

该参数方程也可以写成：

$$\begin{cases} x_1 = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = b \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (16)$$

表 2. 用英文读椭圆解析式

数学表达	英文表达
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	The fraction $x$ squared over $a$ squared plus the fraction $y$ squared over $b$ squared equals one.

图 7 (b) 所示椭圆的长轴位于纵轴  $x_2$  上，对应的解析式为：

$$\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2} = 1 \quad (17)$$

同样  $a > b > 0$ 。

## 焦点

此外，椭圆的**焦点** (单数 focus，复数 foci) 位于椭圆长轴。对于 (12)，该椭圆上任意一点  $P$  到两个焦点  $F_1$  和  $F_2$  的距离之和等于  $2a$ 。如图 9 所示，上述关系可以通过下式表达：

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \quad (18)$$

两个焦点  $F_1$  和  $F_2$  之间距离被称之为焦距  $2c$ ， $c$  可以通过下式计算得到：

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (19)$$

由此可以得到 图 7 (a) 椭圆两个焦点坐标分别为  $(-c, 0)$  和  $(c, 0)$ 。图 7 (b) 椭圆两个焦点坐标分别为  $(0, -c)$  和  $(0, c)$ 。

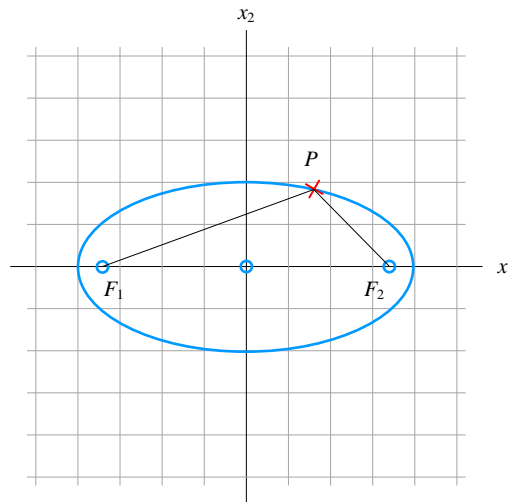


图 9. 椭圆焦点和椭圆的关系

## 中心移动

图 10 所示为中心在  $(c_1, c_2)$  的正椭圆。图 10 (a) 所示椭圆的解析式如下：

$$\frac{(x_1 - c_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - c_2)^2}{b^2} = 1 \quad (20)$$

同样  $a > b > 0$ 。图 10 (b) 所示椭圆的解析式如下：

$$\frac{(x_1 - c_1)^2}{b^2} + \frac{(x_2 - c_2)^2}{a^2} = 1 \quad (21)$$

图 10 中椭圆实际上是图 7 经过平移得到的。

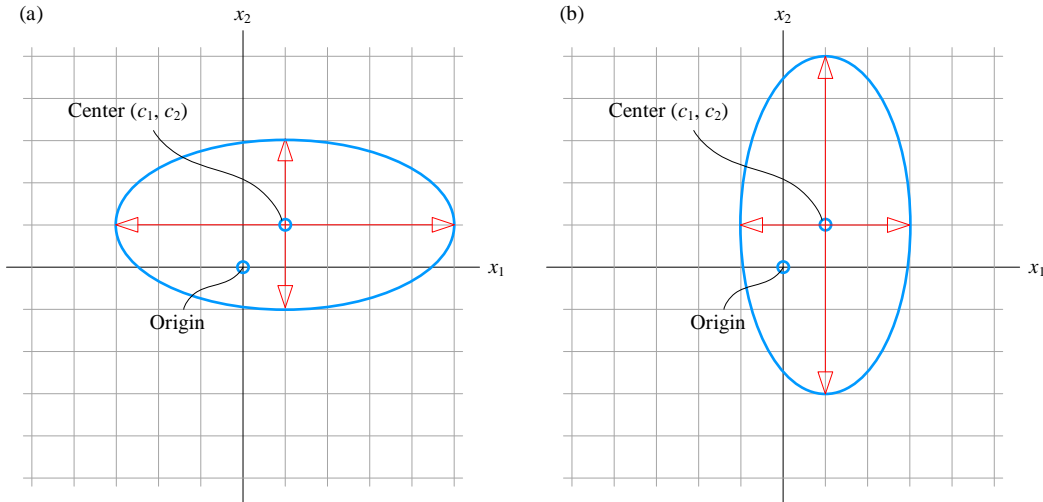


图 10. 中心偏离原点椭圆

## 8.5 旋转椭圆：几何变换的结果

(12) 椭圆逆时针旋转  $\theta$  后得到椭圆对应的解析式：

$$\frac{[x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta)]^2}{a^2} + \frac{[x_1 \sin(\theta) - x_2 \cos(\theta)]^2}{b^2} = 1 \quad (22)$$

顺时针旋转  $\theta$  后得到椭圆解析式：

$$\frac{[x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta)]^2}{a^2} + \frac{[x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta)]^2}{b^2} = 1 \quad (23)$$

### 举个例子

中心位于原点，长轴位于横轴的正椭圆在旋转之前解析式为：

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1 \quad (24)$$

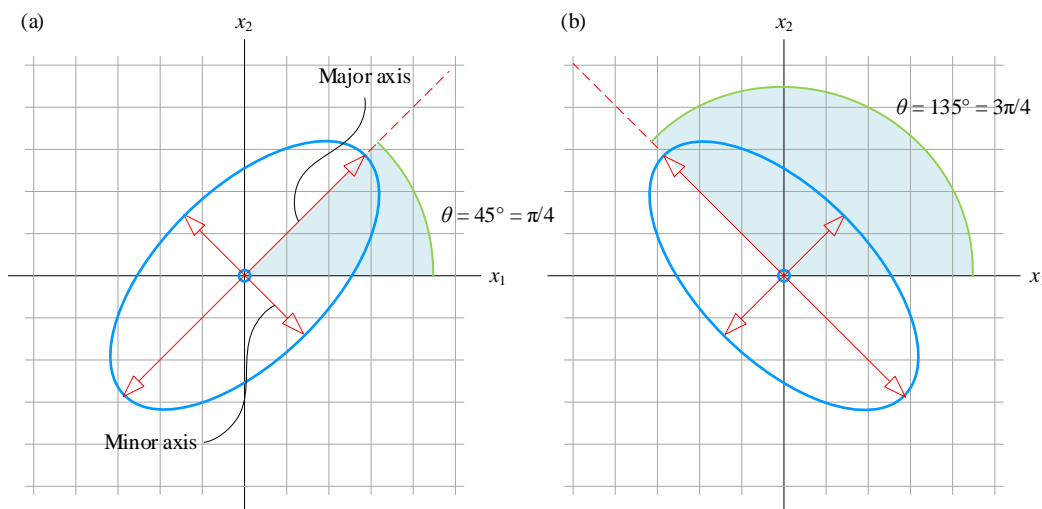


图 11. 旋转椭圆

图 11 (a) 所示为绕中心 (原点) 逆时针旋转  $\theta = 45^\circ = \pi/4$  获得的椭圆，长轴位于第一和第三象限。对应解析式如下：

$$\frac{[x_1 \cos(45^\circ) + x_2 \sin(45^\circ)]^2}{4} + [x_1 \sin(45^\circ) - x_2 \cos(45^\circ)]^2 = 1 \quad (25)$$

整理解析式得到：

$$\frac{5x_1^2}{8} - \frac{3x_1x_2}{4} + \frac{5x_2^2}{8} = 1 \quad (26)$$

图 11 (b) 所示为绕中心 (原点) 逆时针旋转  $\theta = 135^\circ = 3\pi/4$  获得的椭圆，它的长轴位于第二和第四象限。对应解析式如下：

$$\frac{[x_1 \cos(135^\circ) + x_2 \sin(135^\circ)]^2}{4} + [x_1 \sin(135^\circ) - x_2 \cos(135^\circ)]^2 = 1 \quad (27)$$

整理解析式得到：

$$\frac{5x_1^2}{8} + \frac{3x_1x_2}{4} + \frac{5x_2^2}{8} = 1 \quad (28)$$

对比 (26) 和 (28)，发现解析式仅仅差在  $3x_1x_2/4$  项的正负号上。

## 单位圆到椭圆

平面上，对单位圆进行一系列几何变换操作，可以得到中心位于任意一点的旋转椭圆。

如图 12 所示，单位圆 (蓝色)，首先经过缩放得到长轴位于横轴的椭圆 (绿色)，绕中心旋转之后得到旋转椭圆 (橙黄)，最后中心平移得到红色椭圆。

➡ 多提一嘴，椭圆的缩放、旋转、平移等操作，和本系列丛书后续线性代数中仿射变换直接相关，请大家格外留意。

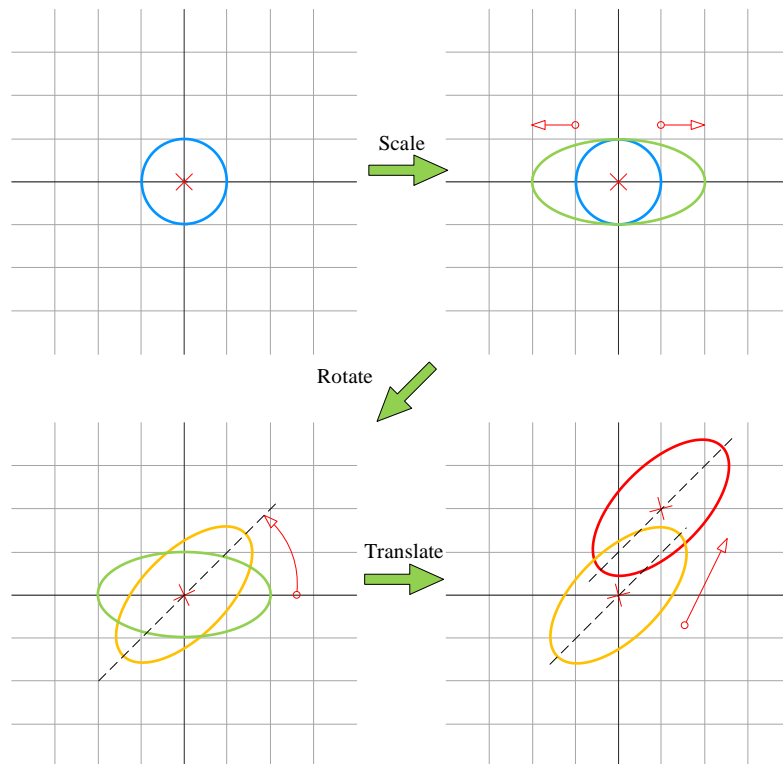


图 12. 正圆经过缩放、旋转和平移得到椭圆



Bk3\_Ch8\_01.py 绘制平移和旋转椭圆。



椭圆，这个高中阶段学过的数学概念，和数据科学、机器学习有什么关系？

看似平淡无奇的椭圆，其实与数据科学和机器学习有着特别密切的关系。这里，我们蜻蜓点水地聊一下。

图 13 所示为不同相关性系数条件下，二元高斯分布 PDF 曲面和等高线。在平面等高线的图像中，我们看到的是一系列同心椭圆。

不同相关性系数条件下，满足特定二元高斯分布的随机数可以看到椭圆的影子，具体如图 14 所示。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

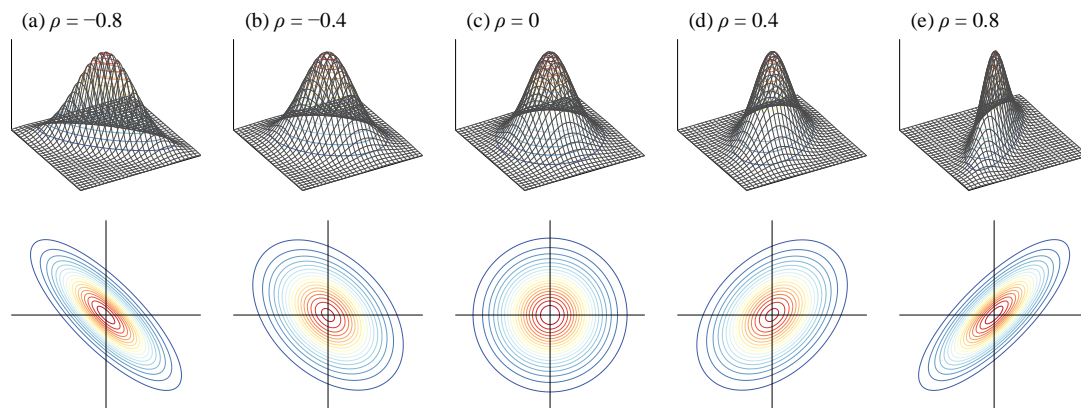
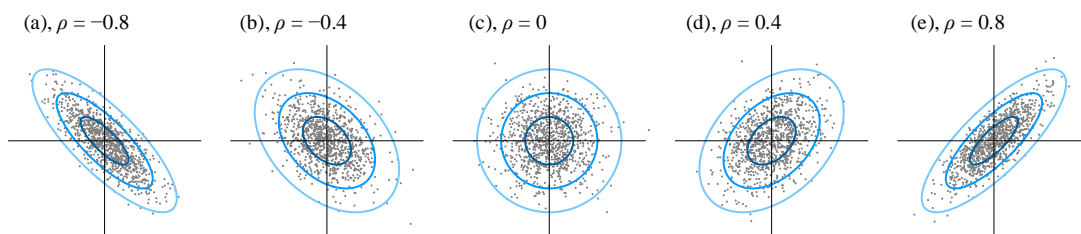


图 13. 不同相关性系数，二元高斯分布 PDF 曲面和等高线

图 14. 相关系数  $\rho$  不同时，散点和椭圆关系

上一章简单提到马氏距离这个距离度量。如图 15 所示，马氏距离计算过程就是椭圆几何变换过程。



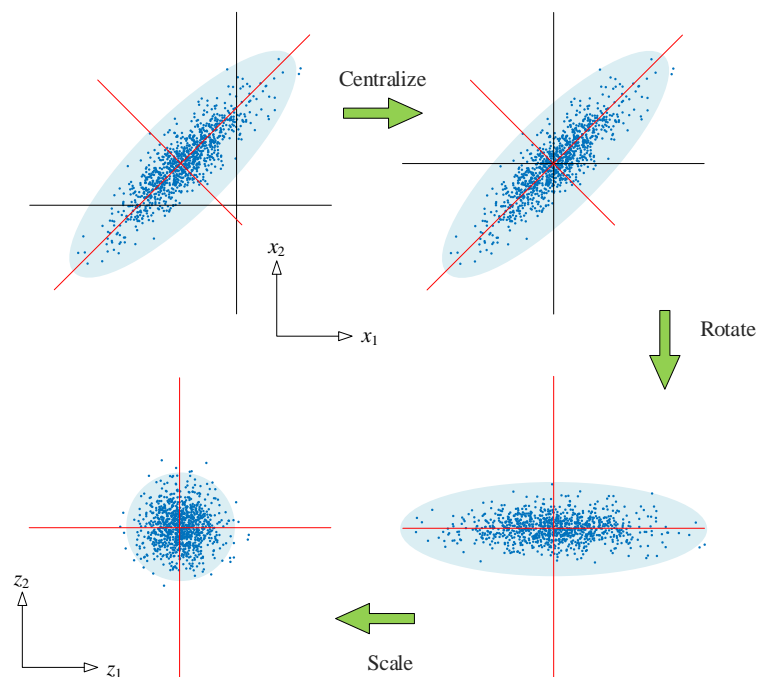


图 15. 马氏距离计算过程

本书前文提到的一元线性回归和椭圆也息息相关。从概率角度，线性回归的本质就是条件概率。图 16 所示为条件概率曲面等高线，黑色斜线代表线性回归。我们也能看到椭圆身在其中。

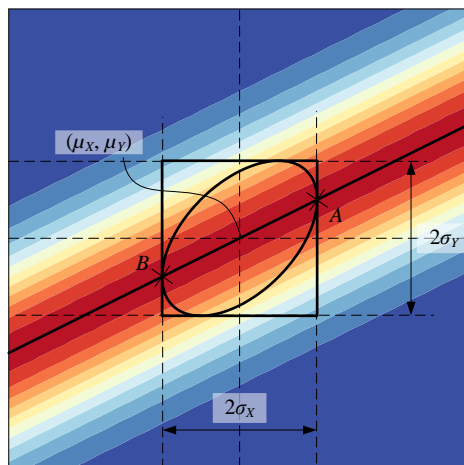


图 16. 条件概率曲面等高线

**主成分分析** (Principal Component Analysis, PCA) 是机器学习中重要的降维算法。从几何角度来看，如图 17 所示，主成分分析实际上就是在寻找椭圆的长轴。

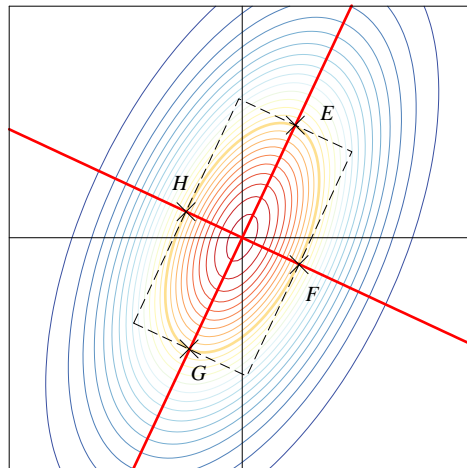


图 17. 主成分分析

在一些分类和聚类算法确定的决策边界中，我们也可以看到椭圆及其他圆锥曲线。图 18 所示为高斯朴素贝叶斯分类计算得到的决策边界。图 19 所示为高斯混合模型确定的决策边界。

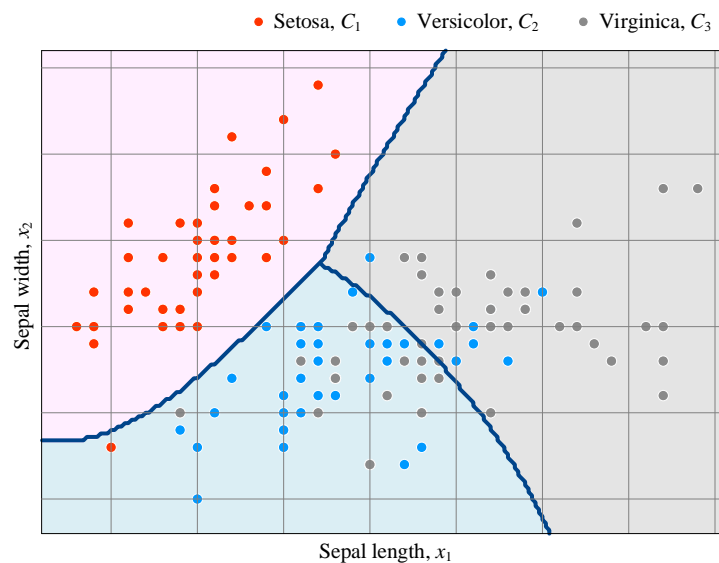


图 18. 高斯朴素贝叶斯分类确定的决策边界

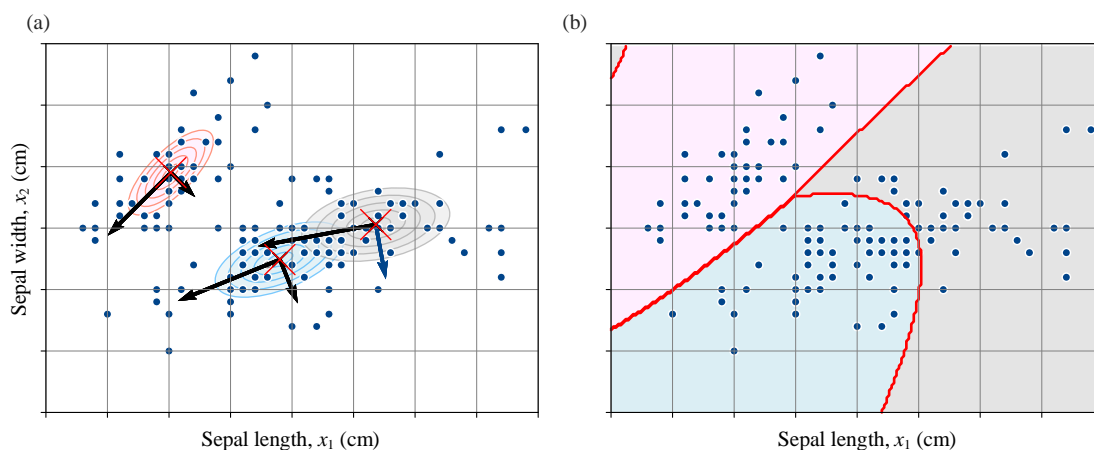


图 19. 高斯混合模型确定的决策边界

总而言之，椭圆在数据科学和机器学习这两个话题中有很多“戏份”，本系列丛书将为大家一一讲述这些有关椭圆的故事。因此，也请大家耐心学完本章和下一章内容。

## 8.6 抛物线：不止是函数

如图 20 (a) 所示，顶点在原点，对称轴位于  $x_2$  纵轴，开口向上抛物线解析式如下：

$$4px_2 = x_1^2, \quad p > 0 \quad (29)$$

这条抛物线顶点位于原点  $(0, 0)$ ，**焦点** (focus) 位于  $(0, p)$ ，**准线** (directrix) 位于  $y = -p$ 。当  $p$  小于 0 时，形如 (29) 抛物线开口朝下。

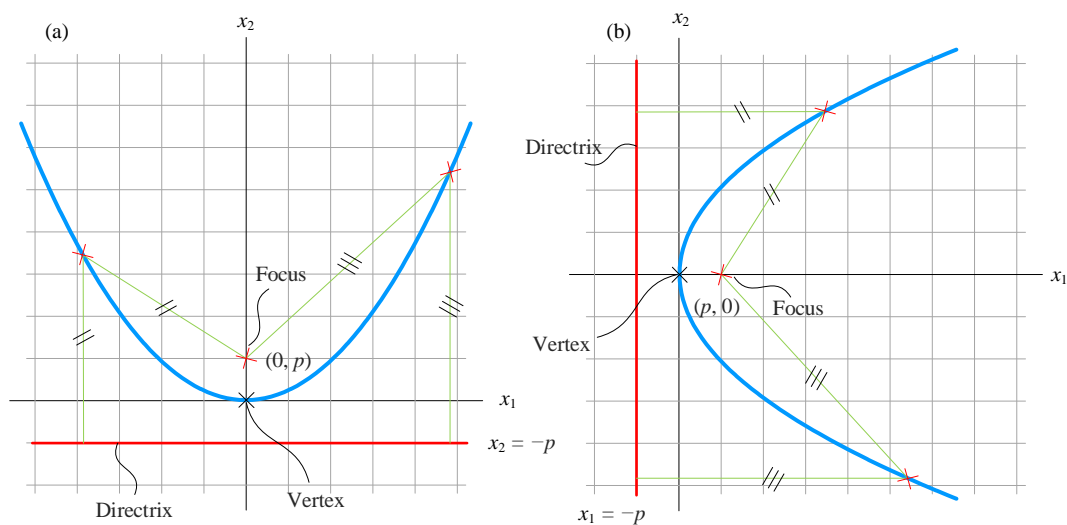


图 20. 抛物线

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

平面上，抛物线上每一点与焦点之间距离等于点和准线之间距离。这一规律可以用来推导得到抛物线解析式。设抛物线任意一点为  $(x_1, x_2)$ ，该点与准线间距离，等于该点和焦点间距离，如下式：

$$\begin{aligned} x_2 - (-p) &= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - p)^2}, \quad p > 0 \\ \Rightarrow (x_2 + p)^2 &= x_1^2 + (x_2 - p)^2 \\ \Rightarrow 4px_2 &= x_1^2 \end{aligned} \quad (30)$$

图 20 (b) 所示，顶点在原点，对称轴位于  $x_1$  横轴，开口向右抛物线解析式如下：

$$4px_1 = x_2^2, \quad p > 0 \quad (31)$$

当  $p$  小于 0 时，形如 (31) 抛物线开口朝左。

## 平移

同样，抛物线也可以整体平移。形如下式的抛物线，顶点位于  $(h, k)$ ，开口朝上或朝下，具体方向由  $p$  正负决定：

$$4p(x_2 - k) = (x_1 - h)^2 \quad (32)$$

(32) 所示抛物线对称轴为  $x_1 = h$ ，准线位于  $x_2 = k - p$ ，焦点所在位置为  $(h, k + p)$ 。

如下抛物线，顶点同样位于  $(h, k)$ ， $p$  正负决定开口朝左或朝右：

$$4p(x_1 - h) = (x_2 - k)^2 \quad (33)$$

(33) 所示抛物线对称轴为  $x_2 = k$ ，准线位于  $x_1 = h - p$ ，焦点所在位置为  $(h + p, k)$ 。

图 21 所示为四种抛物线，请大家参考前文代码自行绘制图 21。

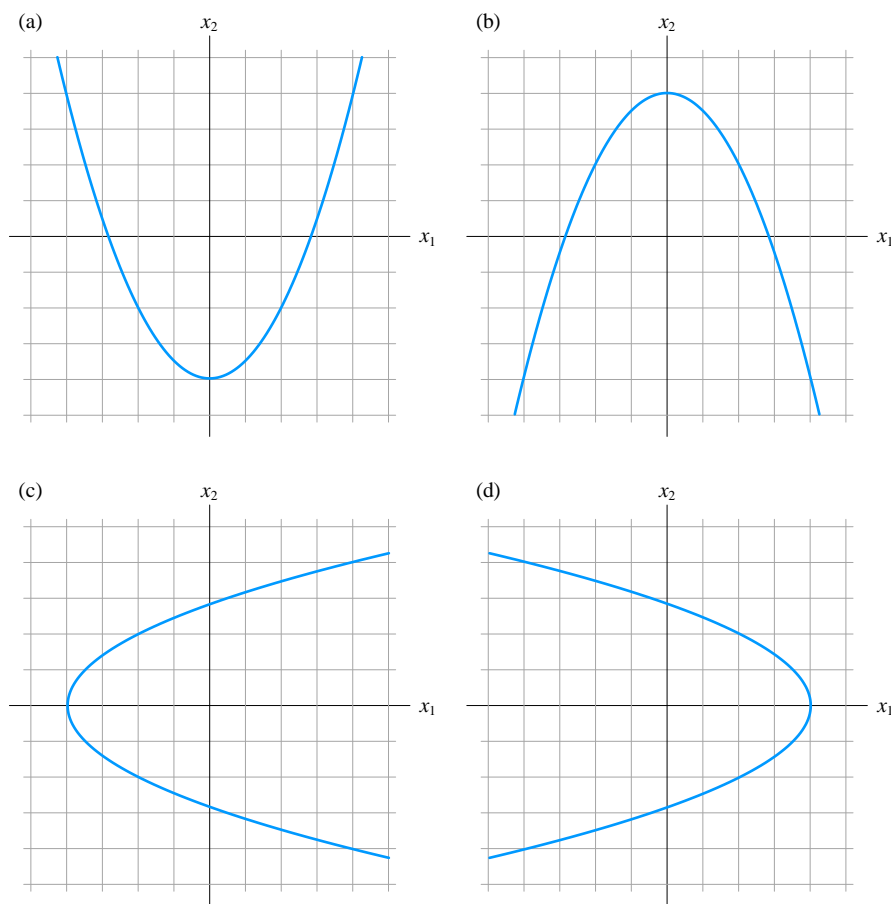


图 21. 四种抛物线

## 8.7 双曲线：引力弹弓的轨迹

图 22 (a) 所示为，焦点位于横轴，顶点位于原点双曲线，对应解析式形式为：

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad a, b > 0 \quad (34)$$

如图 22 (a) 所示，双曲线顶点位于原点，焦点位于  $F_1(-c, 0)$  和  $F_2(c, 0)$ ， $c$  可以通过下式计算得到：

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad c > 0 \quad (35)$$

双曲线上任意一点  $P$  到两个焦点  $F_1$  和  $F_2$  距离差值为  $2a$ ：

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a \quad (36)$$

图 22 (b) 所示为焦点位于纵轴双曲线，上下开口。这种双曲线标准式如下：

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = 1 \quad a, b > 0 \quad (37)$$

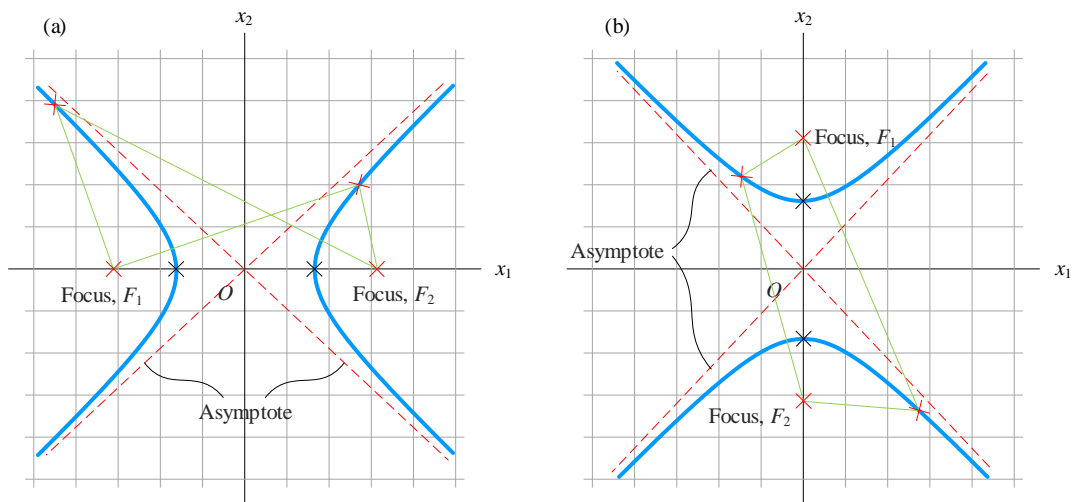


图 22. 两种标准双曲线形式

### 渐近线、切线斜率

图 22 (a) 所示双曲线的两条渐近线 (asymptote) 表达式如下：

$$x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1 \quad (38)$$

图 23 所示为左右开口双曲线右侧部分不同切点处若干条渐变切线。容易发现，图 23 切线斜率，要么大于  $b/a$ ，要么小于  $-b/a$ 。也就是说，切线在  $(-\infty, -b/a)$  和  $(b/a, +\infty)$  两个区间之内。

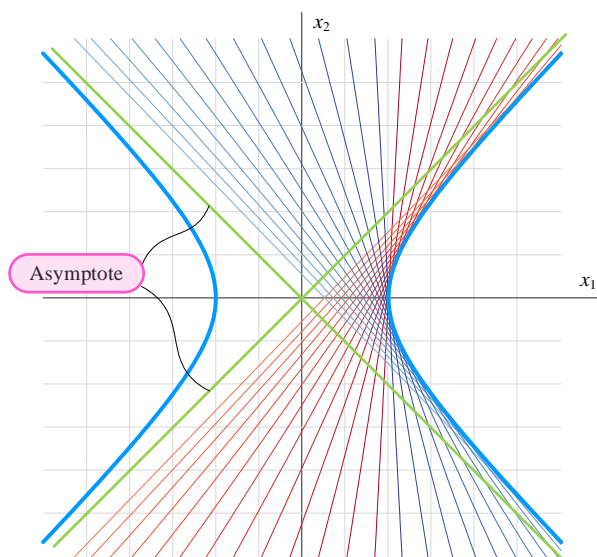


图 23. 双曲线右侧曲线切线

## 平移

双曲线中心也可以平移，比如将 (34) 所示双曲线中心平移至  $(h, k)$ ，得到的双曲线解析式如下：

$$\frac{(x_1 - h)^2}{a^2} - \frac{(x_2 - k)^2}{b^2} = 1 \quad a, b > 0 \quad (39)$$

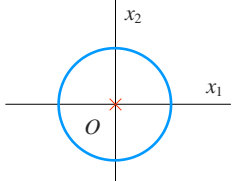
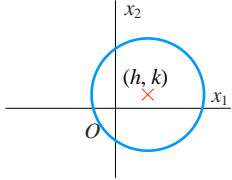
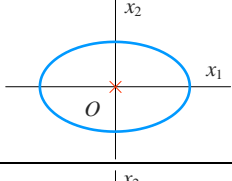
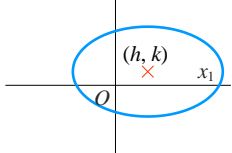
(39) 对应双曲线的两条渐近线解析式如下：

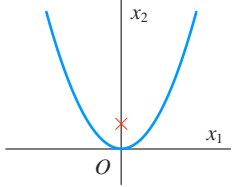
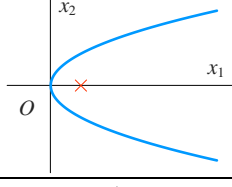
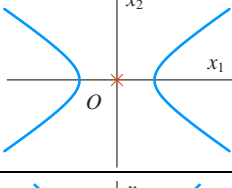
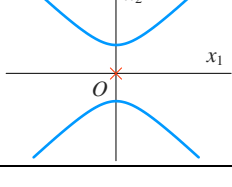
$$x_2 = k \pm \frac{b}{a}(x_1 - h) \quad (40)$$

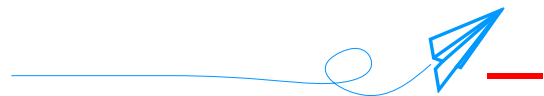
## 圆锥曲线参数方程

表 3 总结常见圆锥曲线参数方程。

表 3. 常见圆锥曲线参数方程

形状	一般式	参数方程
	圆心在原点，半径为 $r$ 圆形 $x_1^2 + x_2^2 = r^2$	$\begin{cases} x_1 = r \cos(t) \\ x_2 = r \sin(t) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$
	圆心在 $(h, k)$ ，半径为 $r$ 圆形 $(x_1 - h)^2 + (x_2 - k)^2 = r^2$	$\begin{cases} x_1 = h + r \cos(t) \\ x_2 = k + r \sin(t) \end{cases}$
	椭圆中心在原点，长轴和焦点位于横轴，半长轴为 $a$ ，半短轴为 $b$ $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = a \cos(t) \\ x_2 = b \sin(t) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = b \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$
	椭圆，中心在 $(h, k)$ ，半长轴为 $a$ ，半短轴为 $b$ $\frac{(x_1 - h)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - k)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = h + a \cos(t) \\ x_2 = k + b \sin(t) \end{cases}$

	抛物线，焦点位于纵轴 $4px_2 = x_1^2, \quad p > 0$	$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \frac{t^2}{4p} \end{cases}$
	抛物线，焦点位于横轴 $4px_1 = x_2^2, \quad p > 0$	$\begin{cases} x_1 = \frac{t^2}{4p} \\ x_2 = t \end{cases}$
	双曲线，焦点位于横轴 $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = a \sec(t) \\ x_2 = b \tan(t) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = a \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ x_2 = b \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$
	双曲线，焦点位于纵轴 $\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = a \tan(t) \\ x_2 = b \sec(t) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = a \frac{2t}{1-t^2} \\ x_2 = b \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{cases}$



科技进步发展从来不是正道坦途、一帆风顺，这条道路蜿蜒曲折、荆棘密布，很多人甚至为之付出生命。

即便如此，科学思想一旦被提出，就像是一颗种子种在了人类思想的土壤中。这些种子们早晚会生根发芽，开花结果。圆锥曲线就是个很好的例子。

圆锥曲线提出千年以后，人们利用这个数学工具解密了天体运行规律。此后几百年，圆锥曲线就会助力人类飞出地球摇篮，探索无边的深空。