6 Three-Dimensional Coordinate System

三维坐标系

平面直角坐标系上升起一根竖轴

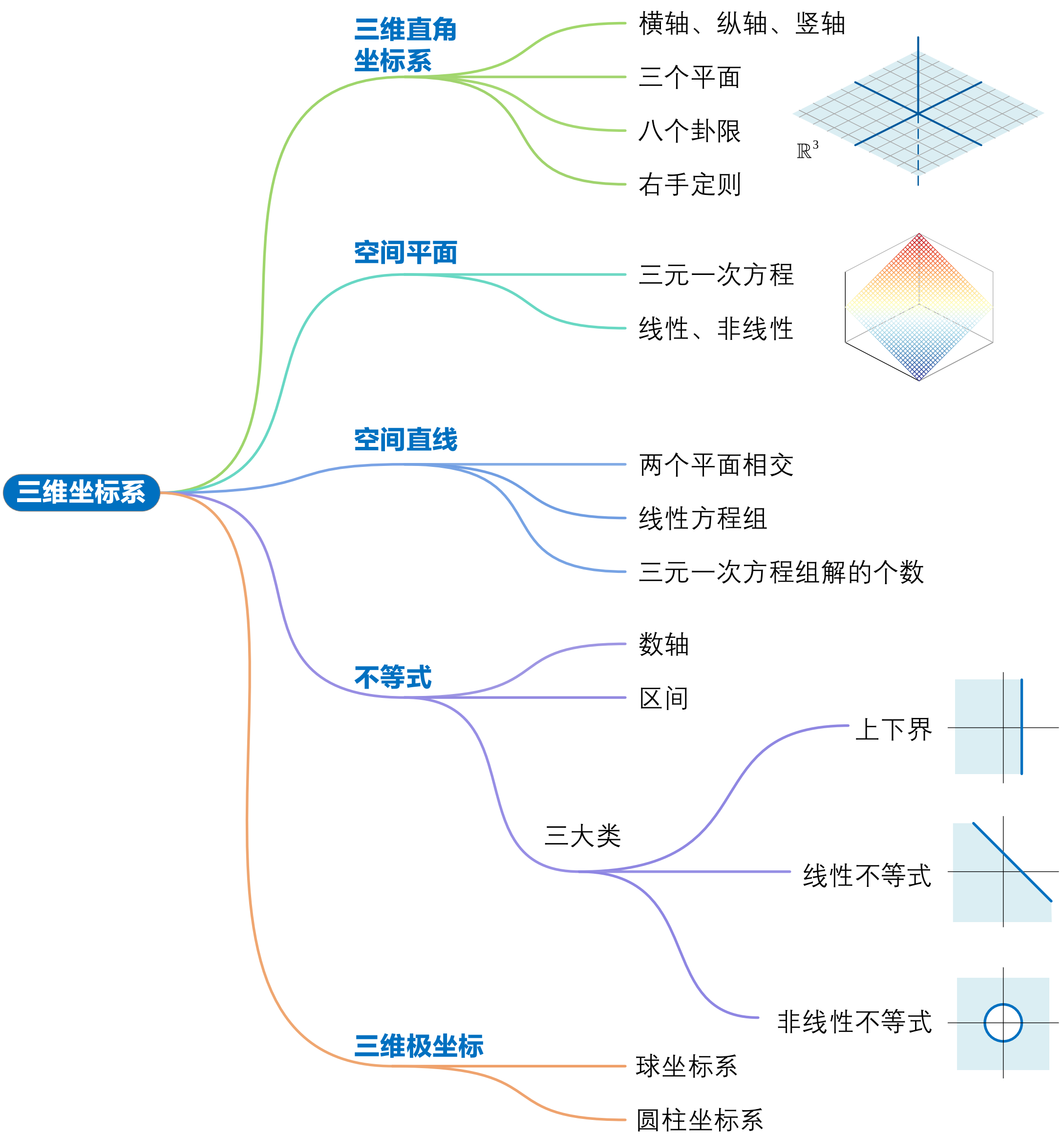
虚空无尽的蔚蓝，神秘深邃的苍穹，漫天飘舞的鸟虫，

时时刻刻在召唤，“腾空而起吧，人类！”

The blue distance, the mysterious Heavens, the example of birds and insects flying everywhere — are always beckoning Humanity to rise into the air.

—— 康斯坦丁·齐奥尔科夫斯基 (Konstantin Tsiolkovsky) | 俄罗斯火箭专家 | 1857 ~ 1935

- ax.plot_wireframe() 绘制线框图
- matplotlib.pyplot.contour()绘制平面等高线
- matplotlib.pyplot.contourf ()绘制平面填充等高线
- numpy.meshgrid() 产生网格化数据
- numpy.outer() 计算外积
- plot_parametric() 绘制二维参数方程
- plot3d_parametric_line() 绘制三维参数方程


三维坐标系
三维直角坐标系
横轴、纵轴、竖轴
三个平面
八个卦限
右手定则
$\mathbb{R}^3$
空间平面
三元一次方程
线性、非线性
空间直线
两个平面相交
线性方程组
三元一次方程组解的个数
不等式
数轴
区间
三大类
上下界
线性不等式
非线性不等式
三维极坐标
球坐标系
圆柱坐标系

6.1 三维直角坐标系

费马 (Pierre de Fermat) 不但独立发明平面直角坐标系；他还在 xy 平面坐标系上插上 z 轴，创造了三维直角坐标系。

三维直角坐标系有三个坐标轴——x 轴或横轴 (x-axis)，y 轴或纵轴 (y-axis) 和 z 轴或竖轴 (z-axis)。本系列丛书也经常使用 x_1、x_2、x_3 来代表横轴、纵轴和竖轴。

图 1 所示三维直角坐标系有三个平面：xy 平面、yz 平面、xz 平面。x 轴和 y 轴构成 xy 平面，z 轴垂直于 xy 平面；y 轴和 z 轴构成 yz 平面，x 轴垂直于 yz 平面；x 轴和 z 轴构成 xz 平面，y 轴垂直于 xz 平面。这三个平面将三维空间分成了八个部分，称为**卦限** (octant)。

三维直角坐标系内坐标点可以写成 (a, b, c)。

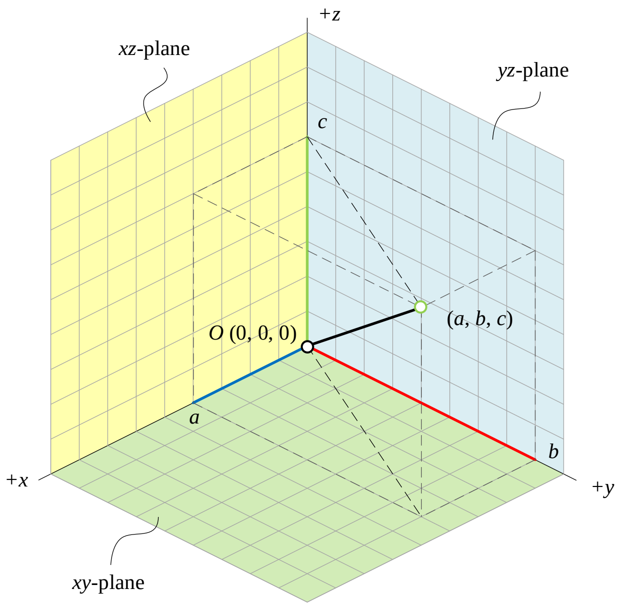


图 1. 三维直角坐标系和三个平面

图 2 所给出三种右手定则，用来确定三维直角坐标系 x、y 和 z 轴正方向。

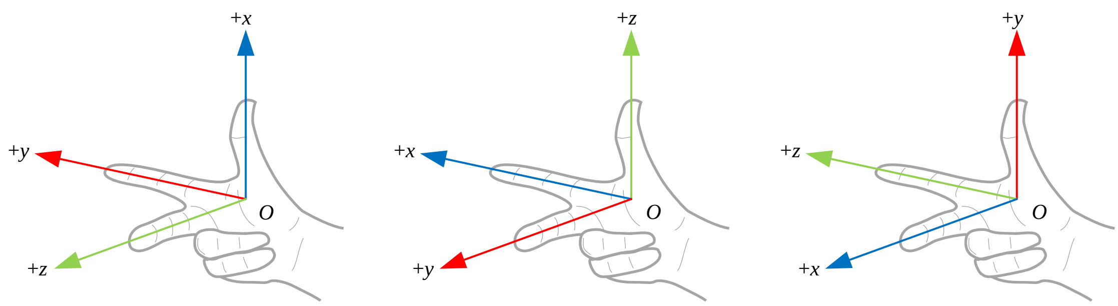


图 2. 右手定则确定三维直角坐标系 x、y 和 z 轴正方向

6.2 空间平面：三元一次方程

三维直角坐标系中，平面可以写成如下等式：

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{1}$$

其中，x、y、z 为变量，a、b、c、d 为参数。实际上，这个等式就是代数中的三元一次方程。

举个例子，图 3 所示的平面对应的解析式为：

$$x + y - z = 0 \tag{2}$$

图 3 中网格面的颜色对应为 z 的数值。z 越大，越靠近暖色系；z 越小，越靠近冷色系。

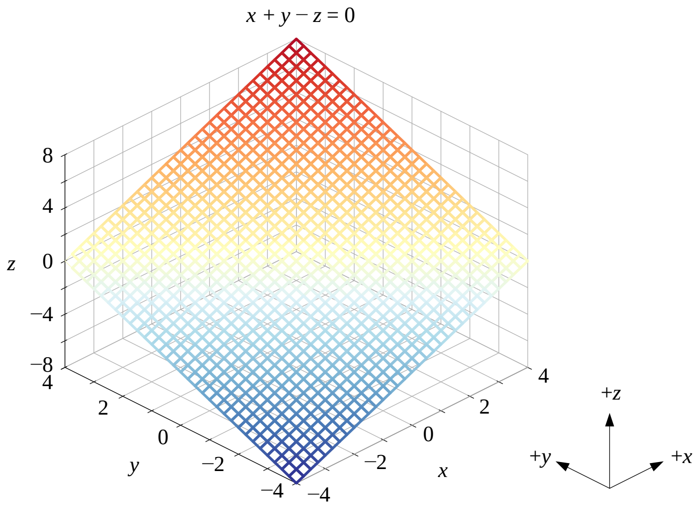


图 3. 等式 $x + y - z = 0$ 对应的平面

以 z 作为因变量、x 和 y 作为自变量的话，(2) 等价于如下二元函数：

$$z = f(x, y) = x + y \tag{3}$$

图 4 所示平面对应的解析式为：

$$y - z = 0 \tag{4}$$

图 4 中网格面平行于 x 轴；从等式上来看，不管 x 取任何值，y 和 z 都满足 $y - z = 0$。

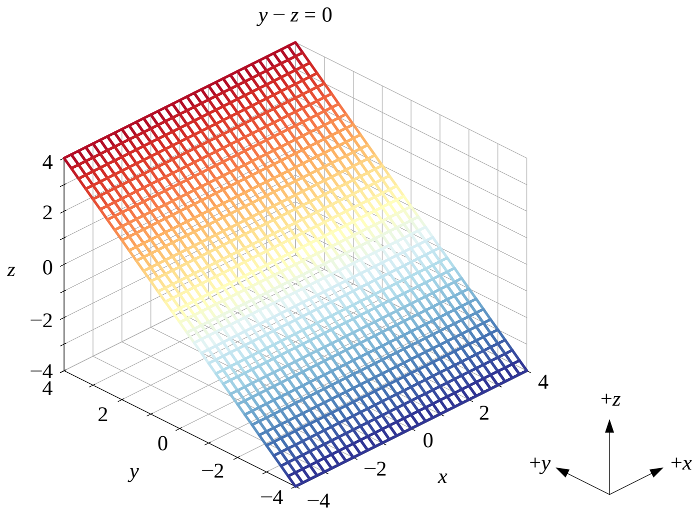


图 4. 等式 $y - z = 0$ 对应的平面

图 5 所示的平面对应的解析式为:

$$x - z = 0 \tag{5}$$

图 5 中网格面平行于 y 轴；不管 y 取任何值，y 和 z 的关系都满足 $x - z = 0$。

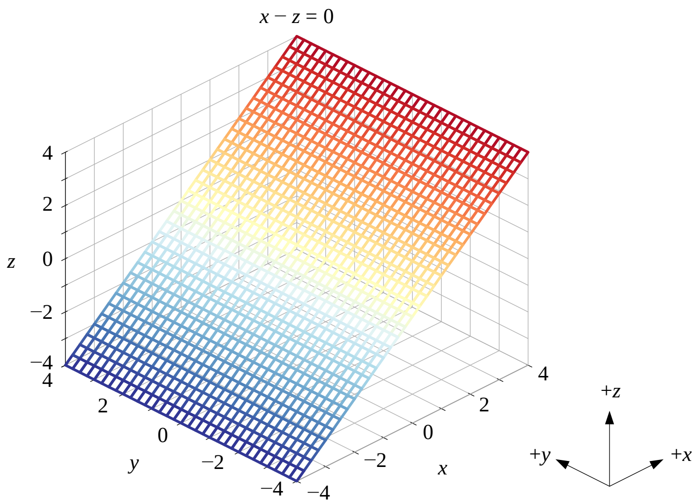


图 5. 等式 $x - z = 0$ 对应的平面

图 6 所示平面对应的等式为 $z - 2 = 0$，这个平面显然平行于 xy 平面。从函数角度，这个平面可以看做是二元常数函数。二元常数函数可以写成 $f(x, y) = c$。

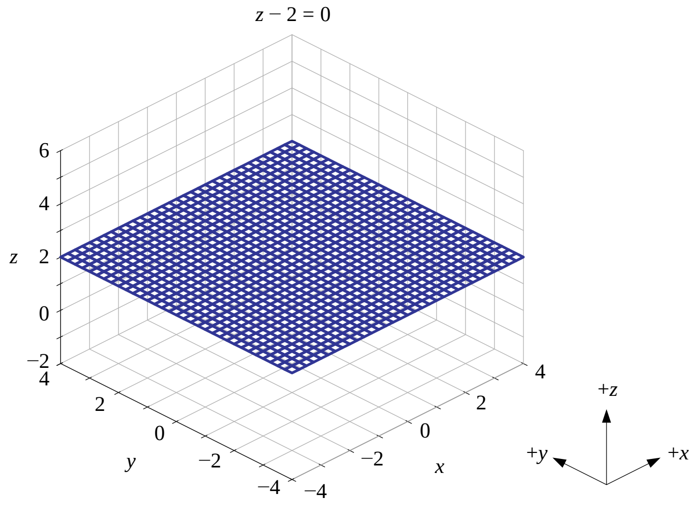


图 6. 等式 $z-2=0$ 对应的平面

图 7 ~ 图 9 三幅图中平面有一个共同特点，它们都垂直于 xy 平面。这三个平面，z 的取值都不影响平面和 xy 平面的相对位置。三个平面都相当于，xy 平面上一条直线沿 z 方向展开。反过来，图 7 ~ 图 9 三幅图中平面在 xy 平面上的投影为一条直线。

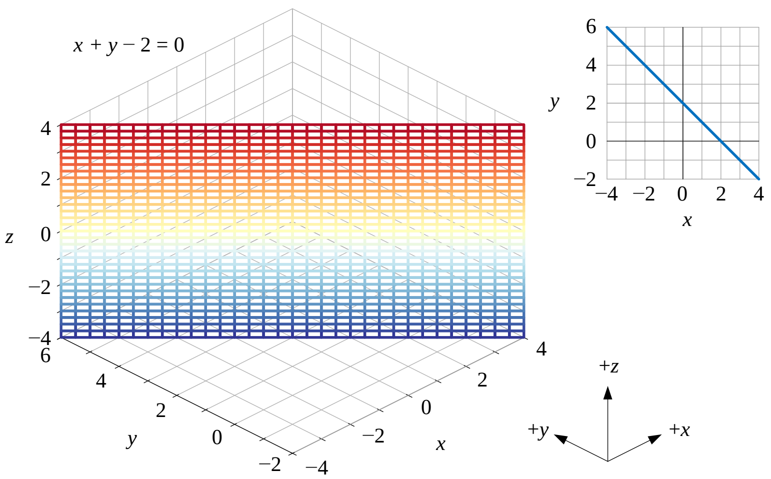


图 7. 等式 $x+y-2=0$ 对应的平面

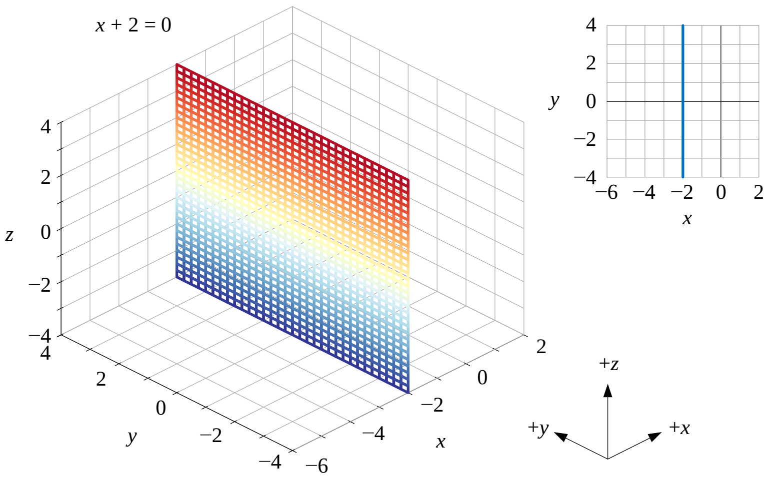


图 8. 等式 $x + 2 = 0$ 对应的平面

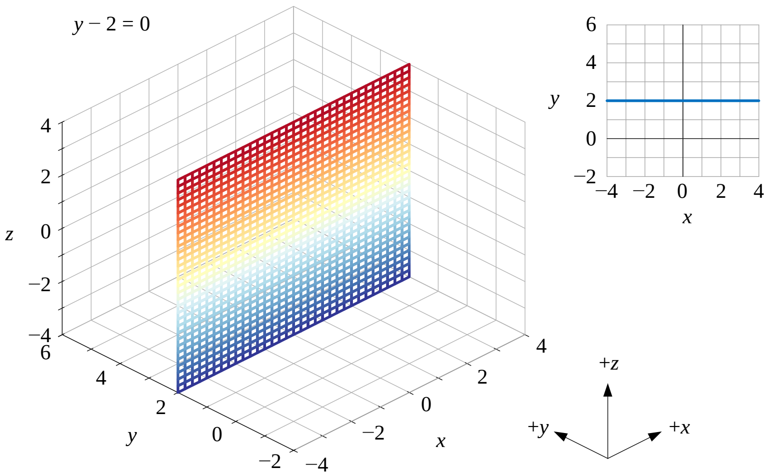


图 9. 等式 $y - 2 = 0$ 对应的平面

Bk3_Ch6_01.py 绘制本节几幅三维空间平面。

相信大家经常听到“线性”和“非线性”这两个词，下面简单区分两者。

在平面直角坐标系中，线性 (linearity) 是指量与量之间的关系用一条直线表示，比如 $y = ax + b$。平面上，线性函数即一次函数，对应图像为一条斜线。

在三维直角坐标系中，线性的几何形式是平面，也就是二元一次函数。注意，如果以满足叠加性和齐次性为条件，只有正比例函数是线性函数。

对于多元函数，线性的形式为 $y = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + ... + b_nx_n + b_0$。在多维空间中，其对应图像是超平面。

图 10 给出线性关系三个例子。

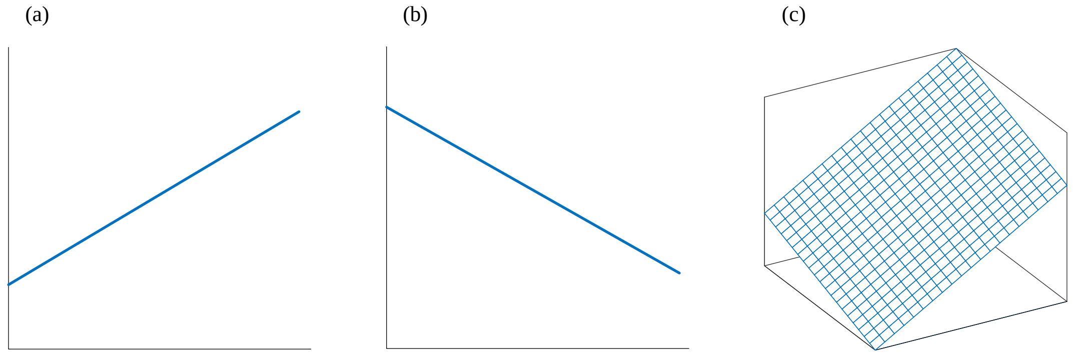


图 10. 线性关系

与线性相对的是非线性 (nonlinearity)，图像不是直线、也不是平面、更不是超平面。平面上，变量之间的关系可以是曲线、折线，甚至不能用参数来描述。图 11 给出平面上非线性关系例子。

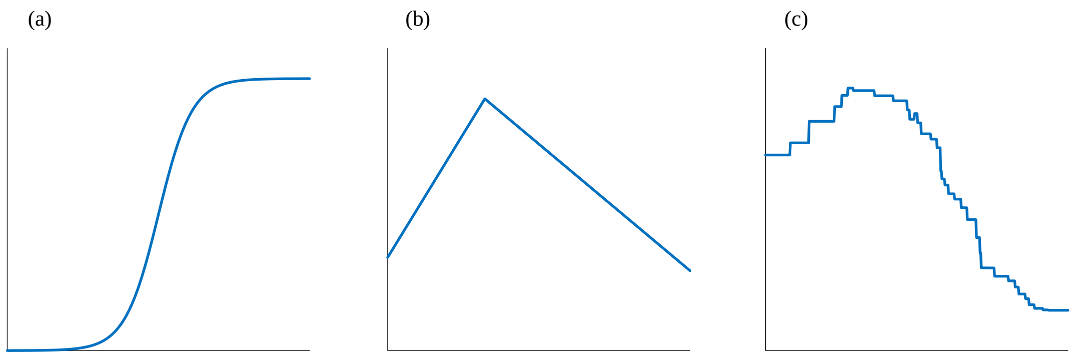


图 11. 非线性关系

机器学习中，回归模型是重要监督学习 (supervised learning)；回归模型研究变量和自变量之间关系，目的是分析预测。图 12 给出三类回归模型，图 12 (a) 是线性回归模型，图 12 (b) (c) 则是非线性回归模型。

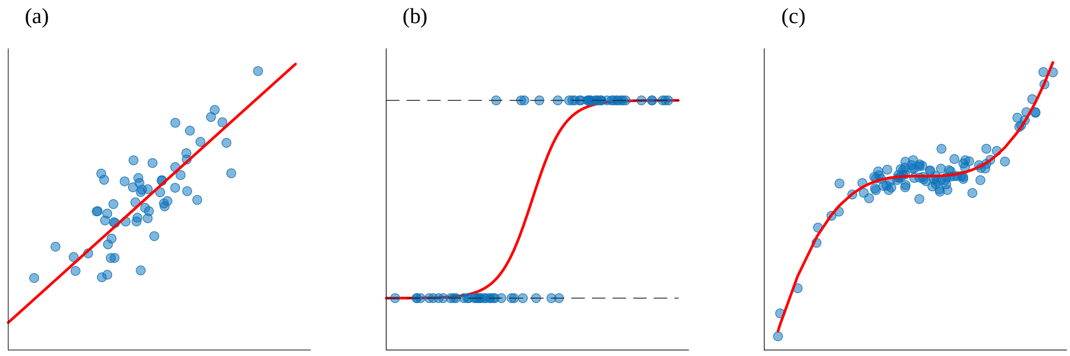


图 12. 机器学习中回归问题

监督学习中，二分类问题很常见，比如将图 13 中蓝色和红色数据点以某种方式分开。二分类输出标签一般为 0、1。图 13 (a) 所示为用线性 (一根直线) 决策边界 (decision boundary) 分类蓝色、红色数据点，图 13 (b) (c) 所示为非线性决策边界。

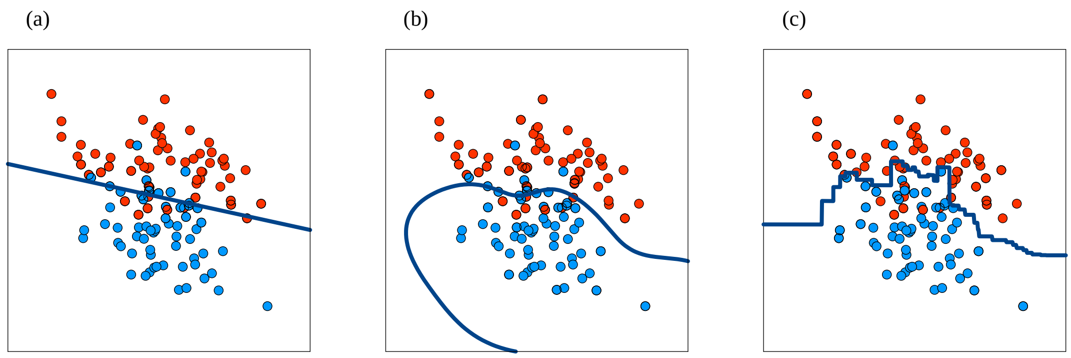


图 13. 机器学习中二分类问题

6.3 空间直线：三元一次方程组

有了三维空间平面，确定一条空间直线则变得很简单——两个平面相交便确定一条空间直线；也就是说，一般情况下，两个三元一次方程确定一条三维空间直线。

比如，下例给出两个三元一次方程：

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \tag{6}$$

每个方程代表三维空间的一个平面；如图 14 所示，这两个平面相交得到一条直线。

从代数角度，可以这样理解 (6)，这两个三元一次方程构成的方程组有无数组解，这些解都在图 14 所示黑色直线上。

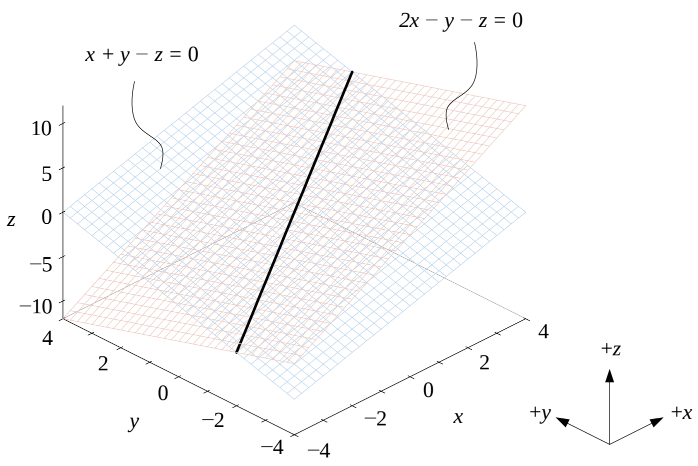


图 14. 两个相交平面确定一条直线

在 (6) 基础上，再加一个三元一次方程，得到如下方程组：

$$
\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z+2=0 \end{cases} \tag{7}
$$

如图 15 所示，这三个平面相交于一点；也就是说，(7) 这个三元一次方程组有唯一解。

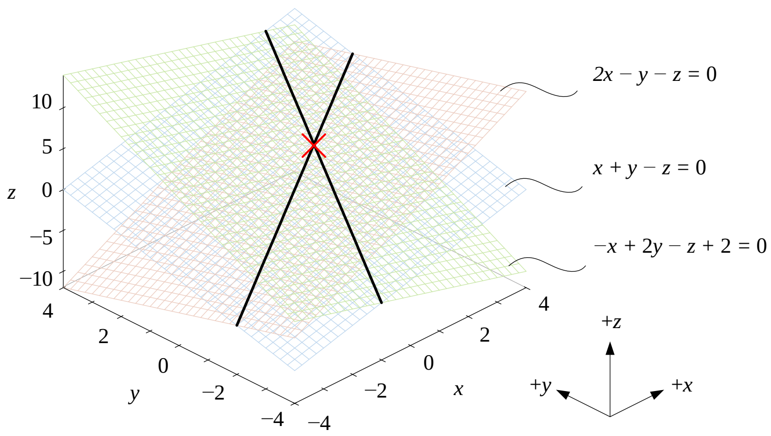


图 15. 三个平面平面相交于一点

(7) 一般写成如下矩阵运算形式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}_{b} \tag{8}$$

这种形式叫做线性方程组 (system of linear equations)，(7) 一般写成 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$。可以想见，当线性方程组的方程数不断增多，(7) 这种形式更规整，更便于计算；而且，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各种性质研究，可以判定线性方程组解的特点。

本书最后还会用“鸡兔同笼”问题再次讨论线性方程组。

三元一次方程组解的个数

图 16 所示为三元一次方程组解的个数几种可能性。

如图 16 (a) 所示，当三个平面相交于一点，方程组有且仅有一个解。

如图 16 (b) 所示，当三个平面相交于一条线，方程组有无数组解。无数组解还有其他情况，比如两个平面重合和第三个平面相交，再比如三个平面重合。

图 16 (c)、(d)、(e) 给出的是方程组无解的三种情况。图 16 (d) 中，三个平面平行；图 16 (e) 中，两个平面重合，与第三个平面平行。方程组还有其他无解的情况，比如三个平面两两相交，得到三条交线，而三条交线相互平行。

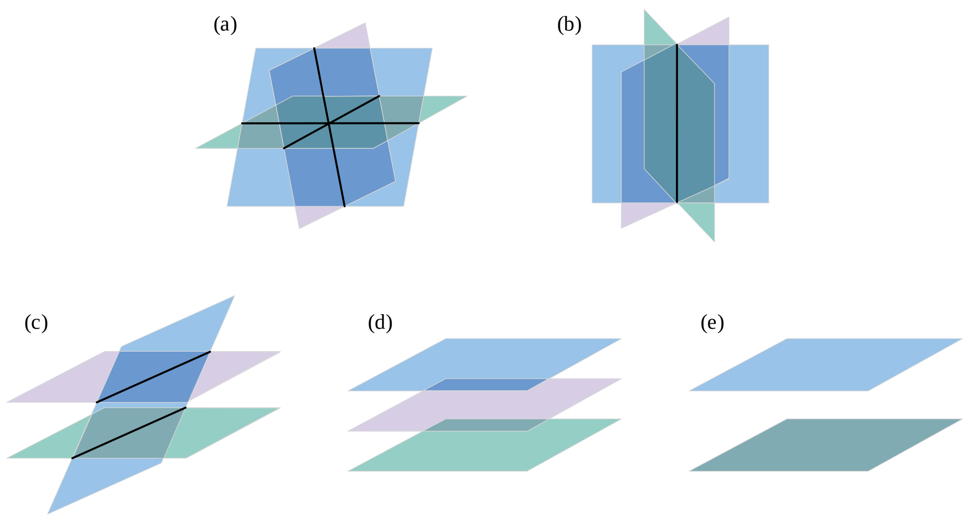


图 16. 三元一次方程组解的个数

`Bk3_Ch6_02.py` 绘制图 14；请大家自行修改代码绘制图 15。

6.4 不等式：划定区域

如图 17 所示，代数中，等式 (equality) 可以是确定的值 ($x = 1$)、确定的直线 ($x + y = 1$)、确定的曲线 ($x^2 + y^2 = 1$)、确定的平面 ($-x + y - z + 1 = 0$) 等等。

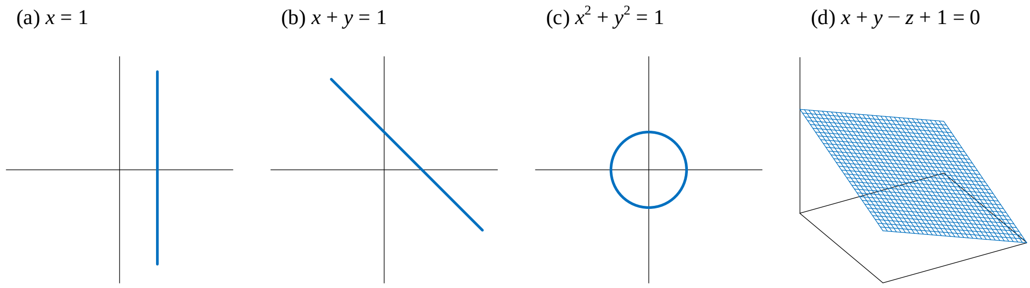


图 17. 等式的几何意义

然而，如图 18 所示，不等式 (inequality) 的几何意义则是划定区域，比如 x 的取值范围 ($x < 1$)、直线在平面上划定的区域 ($x + y \leq 1$)、曲线在平面上划定的区域 ($x^2 + y^2 > 1$)、平面分割三维空间 ($-x + y - z + 1 < 0$)。

图 18 中当边界为虚线时，意味着划定区域不包括蓝色线。

注意，图 18 中蓝色箭头指向满足不等式条件区域方向，蓝色箭头和梯度向量 (gradient vector) 有关。本系列丛书《矩阵力量》一册将专门介绍梯度向量相关内容。

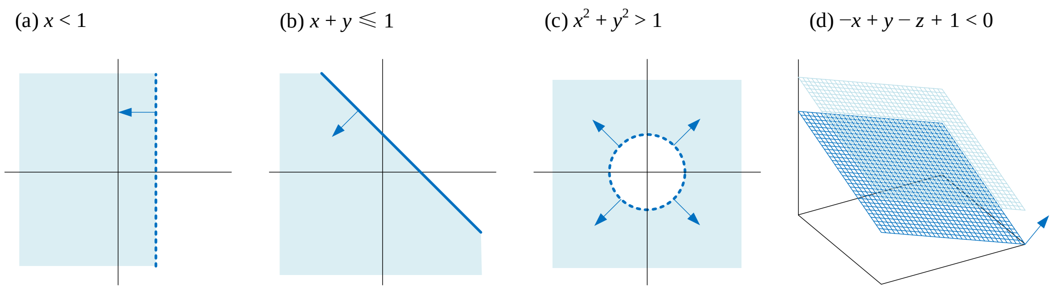


图 18. 不等式的几何意义

图 17 和图 18 这两幅图告诉我们几何视角是理解代数式最直接的方式；本书在讲解每个数学工具式，都会给大家提供几何视角，以便加强理解，请大家格外留意。

数轴、绝对值、大小

为了理解不等式，让我们首先回顾数轴这个概念，数轴上的每一个点都对应一个实数，数轴上原点右侧的数为正数，原点左侧的数为负数。直角坐标系就是由数轴构造。

某个数的绝对值 (absolute value) 是指，数轴上该数与原点的距离；$|-5| = 5$ (读作 the absolute value of negative four equals four) 可以理解为−5 距离原点的距离为 5 个单位长度。x 的绝对值记做 $|x|$ (读作 absolute value of x)。而显然，实数绝对值为非负数，即 $|x| \geqslant 0$。

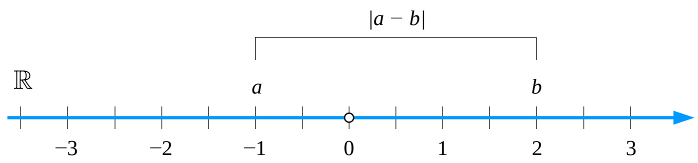


图 19. 实数轴上比较 a 和 b 大小

如果两个实数相等，这就意味着它们位于数轴同一点；当两个数不相等时，位于数轴右侧的数更大。如图 19 所示，实数 a 小于实数 b，可以表达为 $a < b$ (读作 a is less than b)；也可以说，在数轴上 a 在 b 的左侧 (a is to the left of b on the number line)。

表 1 总结六个不等式符号。这种用不等号 (inequality sign) 表达的式子被称作为不等式。

表 1. 六个不等式符号

数学表达	英文表达	汉语表达
$<$	less than	小于
$>$	greater than	大于
$\leq$	less than or equal to	小于等于
$\geq$	greater than or equal to	大于等于
$\ll$	much less than	远小于
$\gg$	much greater than	远大于

表 2. 不等式相关的英文表达

数学表达	英文表达
$4 > 3$	Four is greater than three. Three is less than four
$y \leq 9$	Small y is less than or equal to nine.
$x \geq -1$	Small x is greater than or equal minus one.
$-3 < x < 2$	Small x is greater than minus three and less than two.
$0 \leq x \leq 1$	x is greater than or equal to zero and less than or equal to one.
$a < b$	a is less than b.
$a > b$	a is greater than b.
$a \leq b$	a is less than or equal to b. a is not greater than b.
$a \geq b$	a is greater than or equal to b. a is not less than b.
$a \ll b$	a is much less than b.
$a \gg b$	a is much greater than b.
$a \approx b$	a is approximately equal to b.
$a \neq b$	a is not equal to b.

区间

在数学上，某个变量的上下界可以写成区间。区间 (interval) 是指在一定范围的数的集合，一般以集合形式表示。通用的区间记号中，圆括号表示“排除”，方括号表示“包括”。

如图 20 (a) 所示，开区间 (open interval) 不包括区间左右端点，可以记作 (a, b)，两端均为圆括号 (parentheses)。

如图 20 (b) 所示，闭区间 (closed interval) 包括区间两端端点，可以记作 $[a, b]$，两端均为方括号 (square brackets)。

如图 20 (c) 所示，左开右闭区间 (left-open and right-closed)，可以记做 $(a, b]$，不包括区间左端点、包括右端点。如图 20 (d) 所示，左闭右开区间 (right-open and left-closed)，可以记做 $[a, b)$，包括区间左端点、不包括右端点。

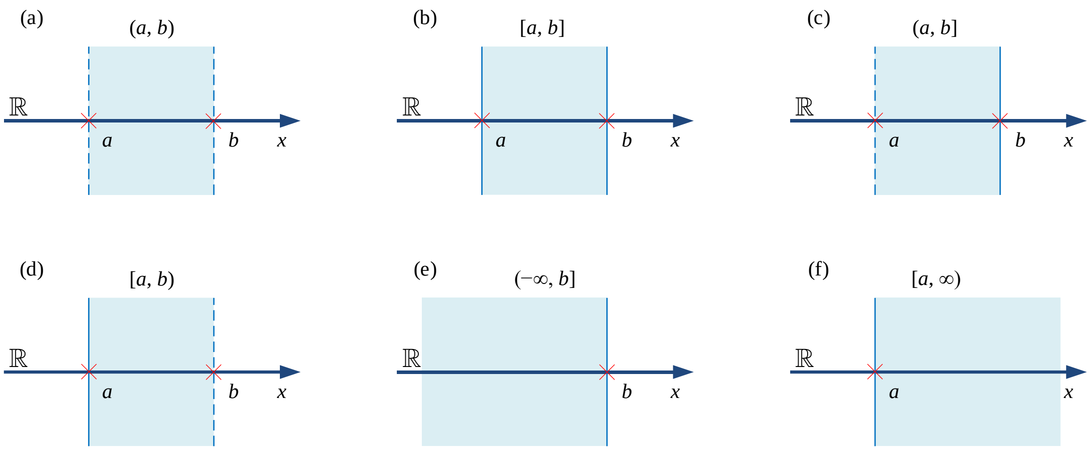


图 20. 六个区间

请大家特别注意，在优化问题求解中，如果变量两端均有界，一般只考虑闭区间，即可以取到端点数值。也就是，图 20 中前四个区间在优化问题中等价，a 叫做下界 (lower bound)，b 叫做上界 (upper bound)。

此外，构造优化问题时，一般都将各种不等式符号调整为小于等于号，即“≤”。本书后文将在优化入门一章专门讲解。

区间两端可能有界 (bounded) 或无界 (unbounded)，也就是区间某个可能没有端点，即为无穷；正无穷 (infinity) 记作 ∞ 或 $+\infty$，负无限 (negative infinity) 记作 $-\infty$。

图 20 (e) 所示为左无界右有界 (left-unbounded and right-bounded)，比如 $(-\infty, b]$；图 20 (f) 所示为左有界右无界 (left-bounded and right-unbounded)，比如 $[a, \infty)$；左右均无界 (unbounded at both ends)，比如 $(-\infty, \infty)$，也就是整根实数轴。

表 3. 区间相关的英文表达

数学表达	英文表达
(a, b) $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	The open interval from a to b. The interval from a to b, exclusive. The values between a and b, but not including the endpoints.

	x is greater than a and less than b. The set of all x such that x is in between a and b, exclusive.
$[a, b]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	The closed interval from a to b. The interval from a to b, inclusive. The values between a and b, including the endpoints. x is greater than or equal to a and less than or equal to b. The set of all x such that x is in between a and b, inclusive.
$(a, b]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	The half-open interval from a to b, excluding a and including b. The values between a and b, excluding a and including b. The set of all x such that x is greater than a but less than or equal to b.
$[a, b)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	The half-open interval from a to b, including a and excluding b. The values between a and b, including a and excluding b. The set of all x such that x is greater than or equal to a but less than b.

三大类不等式

本节介绍不等式的目的是服务优化问题求解，优化问题中不等式一般分为三大类：

- 上下界 (lower and upper bounds)，比如 $x > 2$
- 线性不等式 (linear inequalities)，比如 $x + y \le 1$
- 非线性不等式 (nonlinear inequalities)，比如 $x^2 + y^2 \geqslant 1$

在优化问题中，这些不等式统称为约束 (constraint)。本节后续将采用三种可视化方案呈现不等式划定的区域。

上下界

举个例子，给定 x_1 的取值范围为：

$$x_1 + 1 > 0 \tag{9}$$

首先将上式“大于号”调整为“小于号”，(9) 改写成：

$$-x_1 - 1 < 0 \tag{10}$$

注意，本节后续不再区分 < 和 ≤。

根据 (10)，构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$：

$$f(x_1, x_2) = -x_1 - 1 \tag{11}$$

图 21 (a) 所示为三维直角坐标系中 $f(x_1, x_2)$ 的等高线图。对于一个二元函数 $f(x_1, x_2)$，等高线代表函数值相等的点连成曲线，即 $f(x_1, x_2) = c$。函数等高线类似地形图上海拔高度相同点连成曲线；等高线可以在三维空间展示，也可以在平面上绘制。

对于等高线这个概念陌生的读者不要怕，下一章我们会深入介绍等高线；此外，本书后续将专门讲解常用二元函数，本节内容相当于热身。

图 21 (a) 等高线采用“红黄蓝”色谱。暖色系颜色等高线对应 $f(x_1, x_2) > 0$，即不满足 (10)；冷色系颜色等高线对应 $f(x_1, x_2) < 0$，满足 (10)。图 21 (a) 中等高线相互平行。

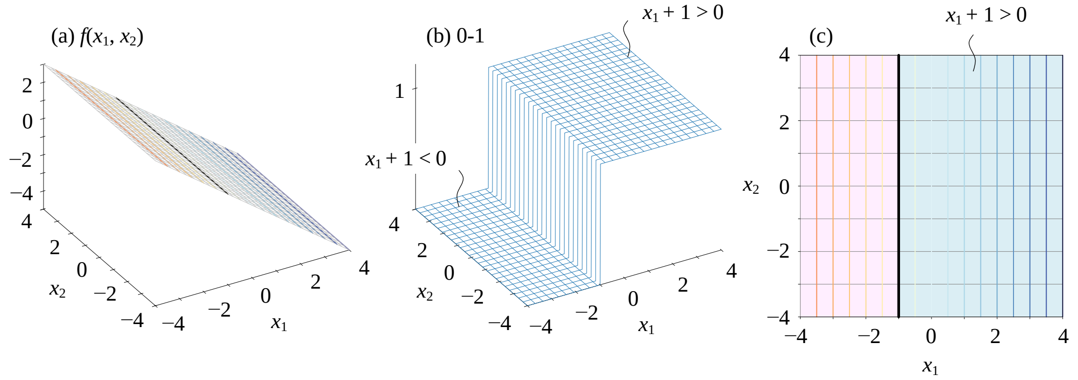


图 21. $x_1 + 1 > 0$ 三个可视化方案

然后，我们做一个“二分类”转换，满足 (10) 不等式的点 (x_1, x_2) 标签设为 1 (即 True)，不满足 (10) 的点设为 0 (即 False)，这样我们获得图 21 (b)。相当于把 $f(x_1, x_2)$ 变成一个 0-1 (False-True) 两值阶梯面。

再进一步，将图 21 (a) 等高线投影在 x_1x_2 平面上，获得图 21 (c) 平面等高线；图 21 (c) 中，蓝色阴影区域满足 (10)，对应图 21 (b) 中取值为 1 的区域。图 21 (c) 中黑色线就是决策边界，它将整个 x_1x_2 平面划分成两个区域，一个满足 (10)，一个不满足 (10)。

再举个例子，x_1 的取值范围给定为：

$$-1 < x_1 < 2 \tag{12}$$

其中，−1 为下限，2 为上限。

利用绝对值运算，将 (12) 整理为：

$$|x_1 - 0.5| - 1.5 < 0 \tag{13}$$

注意，上式也可以看成是一个非线性不等式。

根据 (13)，构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$：

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - 0.5| - 1.5 \tag{14}$$

图 22 (a) 所示为 $f(x_1, x_2)$ 函数在三维直角坐标系中图像，整个曲面呈现 V 字形；同样，蓝色等高线处满足 (13)，而红色等高线处不满足 (13)。图 22 (b) 中取值 1 的区域满足 (13)。图 22 (c) 中背景色为蓝色区域满足 (13)。图 22 (c) 中两条黑色线为决策边界，两者相互平行。

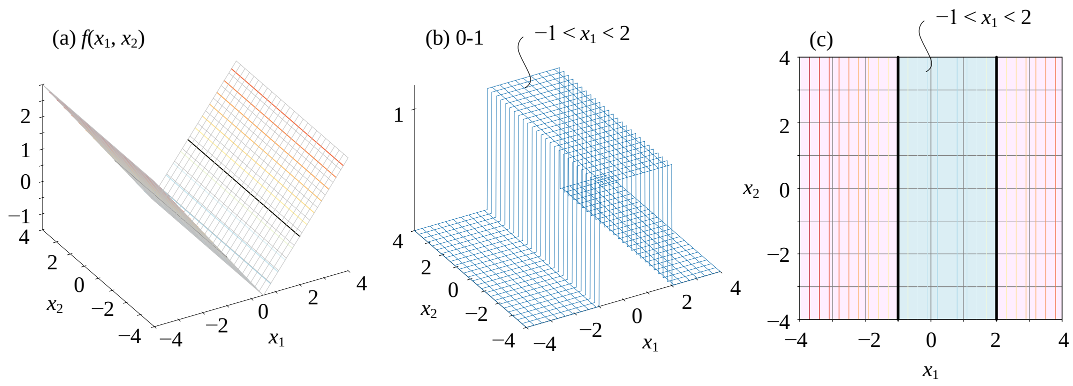


图 22. $-1 < x_1 < 2$ 三个可视化方案

再举个例子，给定 x_2 的取值范围：

$$x_2 < 0 \;\text{ or }\; x_2 > 2 \tag{15}$$

注意上式可以看成两个上下限不等式构造而成。

将 (15) 整理为：

$$-|x_2 - 1| + 1 < 0 \tag{16}$$

根据 (16) 构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$：

$$f(x_1, x_2) = -|x_2 - 1| + 1 \tag{17}$$

图 23 (a) 所示为二元函数 $f(x_1, x_2)$ 在三维直角坐标系中图像。图 23 (b) 中 1 表示满足 (15)，0 表示不满足 (15)。图 23 (c) 中蓝色背景色区域满足 (15)。

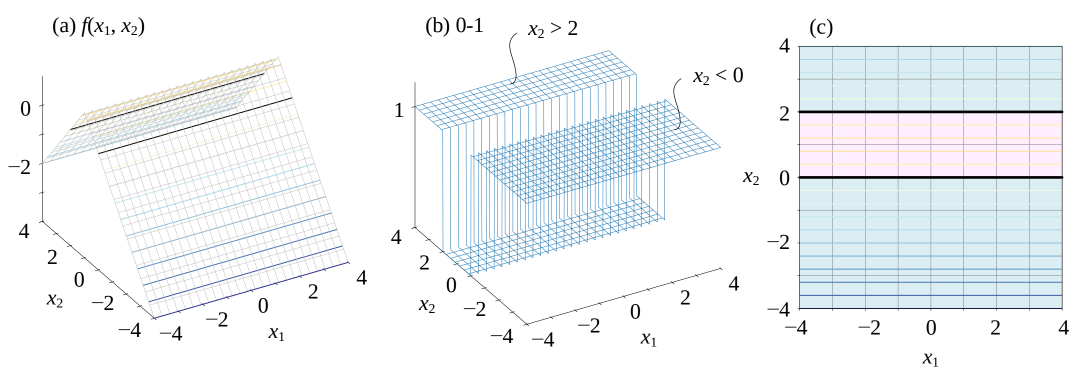


图 23. $x_2 < 0$ 或 $x_2 > 2$ 三个可视化方案

而几个不等式可以叠加构成不等式组。比如，(12) 和 (15) 两个不等式叠加得到：

$$\begin{cases} -1 < x_1 < 2 \\ x_2 < 0 \ \text{ or } \ x_2 > 2 \end{cases} \tag{18}$$

这相当于在 x_1x_2 平面上，同时限定了 x_1 和 x_2 的取值范围。图 24 所示为同时满足 (18) 两组不等式的区域。请大家根据本节文末代码，自行绘制这两幅图像。

此外，(15) 就相当于两个不等式叠加，请大家用不等式叠加的思路再重新分别探讨 (15)。

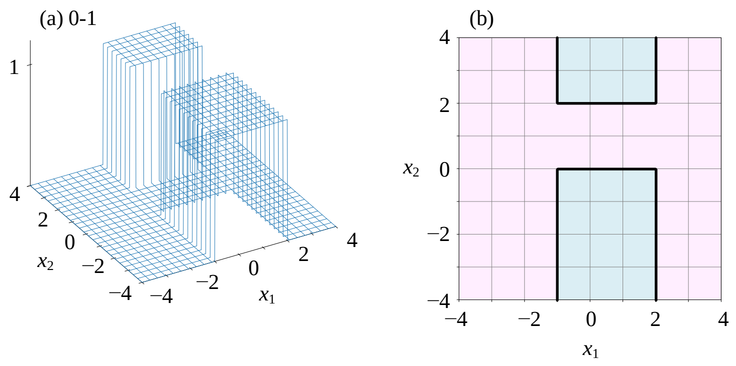


图 24. 同时满足 $-1 < x_1 < 2$ 和 $x_2 < 0$ 或 $x_2 > 2$ 对应区域

线性不等式

线性不等式就是一次不等式，也就是不等式中单项式的变量次数最高为 1 次。线性不等式中可以含有若干未知量。虽然上下界也可以看做是线性不等式，但是在构造优化问题时，我们还是将两类不等式分开处理。

举个例子，给定如下线性不等式：

$$x_1 - x_2 < -1 \tag{19}$$

将 (19) 整理为：

$$x_1 - x_2 + 1 < 0 \tag{20}$$

构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$：

$$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 1 \tag{21}$$

图 25 (a) 所示为 $f(x_1, x_2)$ 在三维直角坐标系的图像。图 25 (b) 中取值为 1 的区域满足 (20)。图 25 (c) 中蓝色阴影的区域满足 (20)，黑色直线对应等式 $x_1 - x_2 + 1 = 0$。

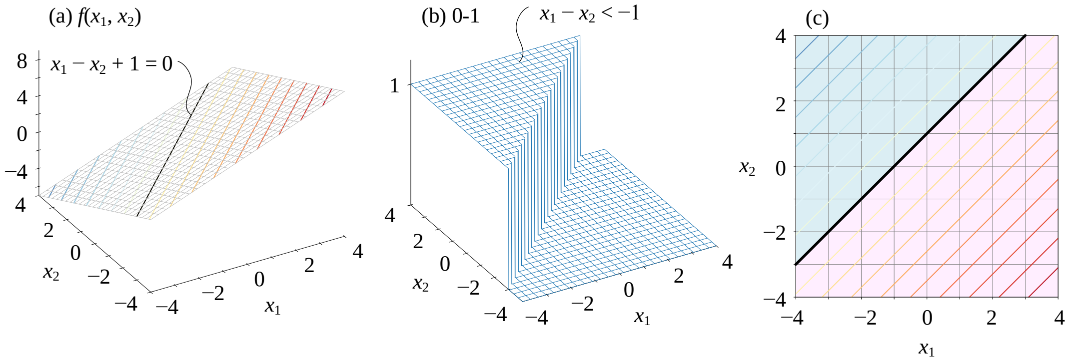


图 25. $x_1 - x_2 < -1$ 三个可视化方案

再给一个例子，给定如下线性不等式：

$$x_1 > 2x_2 \tag{22}$$

将 (22) 整理为：

$$-x_1 + 2x_2 < 0 \tag{23}$$

根据 (23)，构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$：

$$f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \tag{24}$$

图 26 (a) 中蓝色等高线满足 (22)，而红色等高线不满足 (22)。图 26 (b) 中取值为 1 和图 26 (c) 中蓝色阴影区域满足 (22)。

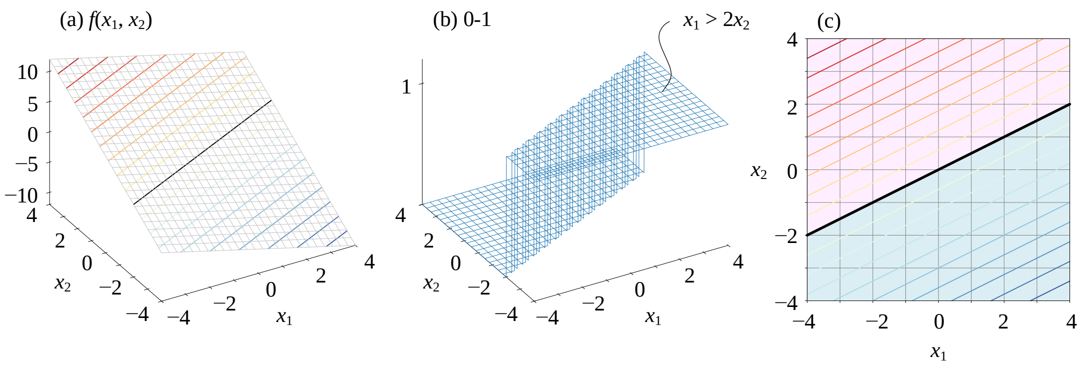


图 26. $x_1 > 2x_2$ 三个可视化方案

请大家将 (19) 和 (22) 两个不等式叠加构造一个不等式组，并绘制类似图 24 两图，可视化其划定的区域。

非线性不等式

除了线性不等式之外，其他各种形式的不等式都可以归类为非线性不等式。下面举三个例子。

给定如下绝对值构造的不等式：

$$\left|x_1 + x_2\right| < 1 \tag{25}$$

(25) 整理为：

$$\left|x_1 + x_2\right| - 1 < 0 \tag{26}$$

构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$：

$$f\left(x_1, x_2\right) = \left|x_1 + x_2\right| - 1 \tag{27}$$

图 27 (a) 所示为 (27) 对应三维直角坐标系图像。图 27 (b) 中取值为 1 对应的区域和图 27 (c) 中蓝色阴影区域满足 (25)。

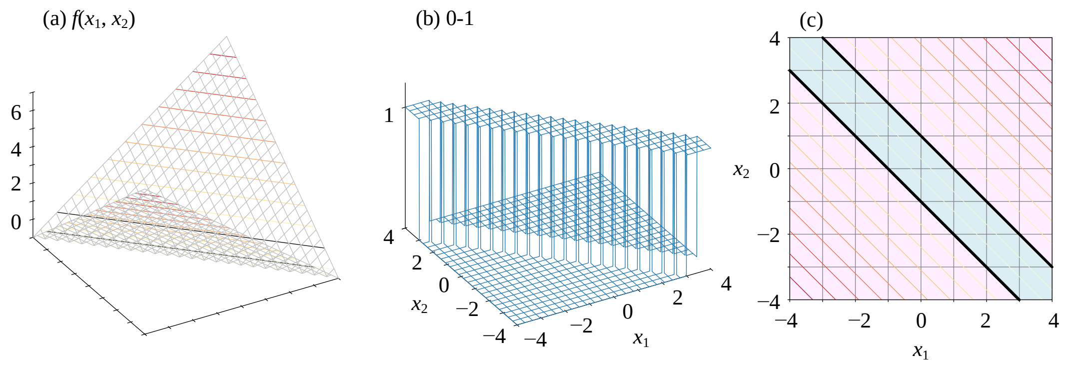


图 27. $\left|x_1 + x_2\right| < 1$ 三个可视化方案

此外，(25) 等价于：

$$\left(x_1 + x_2\right)^2 < 1 \tag{28}$$

请大家自行绘制 (28) 对应的三幅图像。

第二个例子，用绝对值构造不等式：

$$\left|x_1\right| + \left|x_2\right| < 2 \tag{29}$$

将上式整理为：

$$\left|x_1\right| + \left|x_2\right| - 2 < 0 \tag{30}$$

构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$:

$$f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2| - 2 \tag{31}$$

图 28 所示为 $f(x_1, x_2)$ 等高线，有意思的是等高线为一个个旋转 45°的正方形。大家还会在很多不同的应用场合看到类似图像。图 28 (b) 中取值为 1 对应的区域和图 28 (c) 中蓝色阴影区域满足 (29)

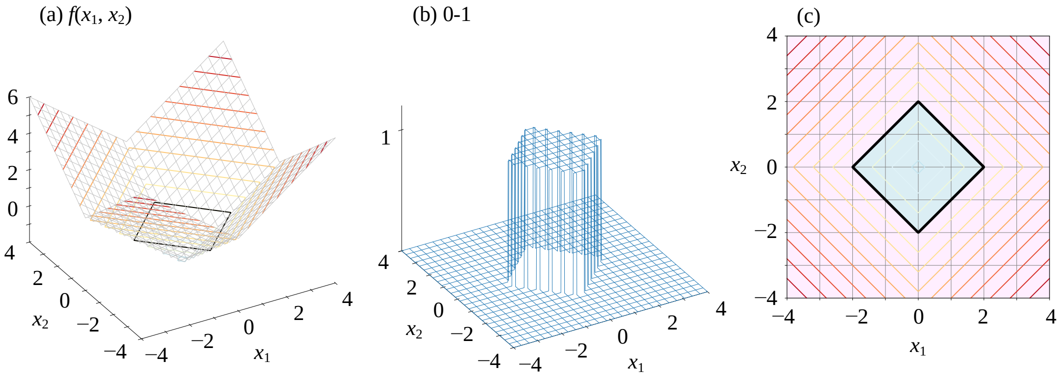


图 28. $|x_1| + |x_2| < 2$ 三个可视化方案

再看个例子，给定如下非线性不等式:

$$x_1^2 + x_2^2 < 4 \tag{32}$$

首先将整理为:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 < 0 \tag{33}$$

在 x_1x_2 平面上，构造如下二元函数 $f(x_1, x_2)$:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \tag{34}$$

图 29 (a) 所示为 (34) 中二元函数对应的曲面，曲面的等高线为同心圆；这种同心圆等高线还会在本书中反复出现，请大家留意。图 29 (b) 中取值为 1 对应的区域和图 28 (c) 中蓝色阴影区域满足 (29)。

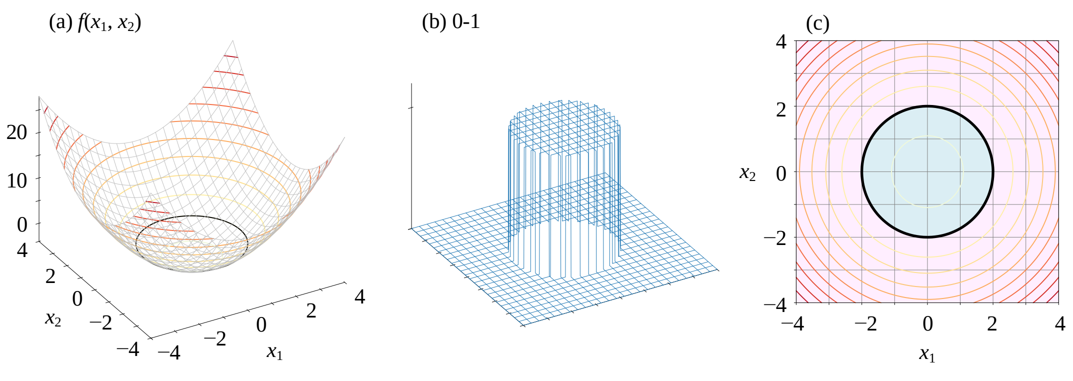


图 29. $x_1^2 + x_2^2 < 4$ 三个可视化方案

此外，(32) 相当于：

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 2 \tag{35}$$

请大家自行绘制 (35) 对应的三幅图像。另外，请将 (25) 和 (32) 两个不等式叠加构造不等式组，并绘制取值区域。

`Bk3_Ch6_03.py` 绘制本节大部分图像。

6.5 三维极坐标

三维空间中也可以构造类似平面极坐标的坐标系统，如图 30 (a) 所示的**球坐标系** (spherical coordinate system)和图 30 (b) 所示的**圆柱坐标系** (cylindrical coordinate system)。

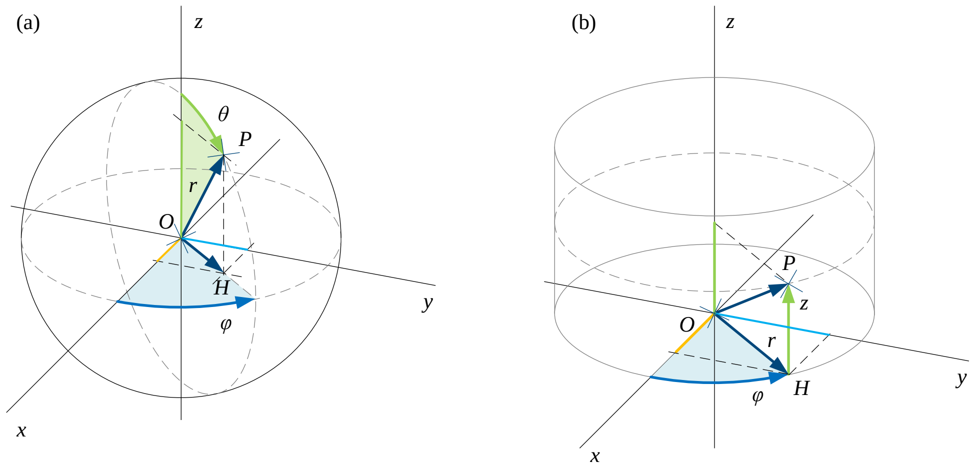


图 30. 球坐标系和圆柱坐标系

球坐标系

图 30 (a) 所示，球坐标相当于由两个平面极坐标系构造；球坐标系中定位点 P 用的是球坐标 (r, θ, φ)；其中，r 是 P 与原点 O 之间距离，也叫径向距离 (radial distance)；θ 是 OP 连线和 z 轴正方向夹角，叫做极角 (polar angle)；OP 连线在 xy 平面投影线为 OH，φ 是 OH 和 x 轴正方向夹角，叫做方位角 (azimuth angle)。

球坐标到三维直角坐标系坐标的转化关系为：

$$\begin{cases} x = \underbrace{r\sin\theta}_{OH}\cdot\cos\varphi \\ y = \underbrace{r\sin\theta}_{OH}\cdot\sin\varphi \\ z = \underbrace{r\cos\theta}_{PH} \end{cases} \tag{36}$$

图 31 所示正圆球体对应解析式为：

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \tag{37}$$

其中，$r = 1$。在绘制图 31 中这个正圆球体时，采用的就是球坐标。

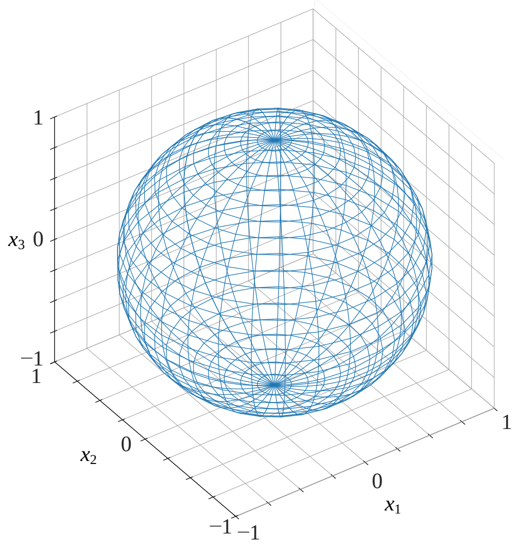


图 31. 球体网格面

Bk3_Ch6_04.py 绘制图 31。

圆柱坐标系

图 30 (b) 所示，圆柱坐标系相当于二维极坐标上升起一根 z 轴。在圆柱坐标系中，点 P 的坐标为 (r, φ, z)；这时，r 是 P 点与 z 轴的垂直距离；φ 还是 OP 在 xy 平面的投影线 OH 与正 x 轴之间的夹角。z 和三维直角坐标系的 z 一致。

从圆柱坐标到三维直角坐标系坐标转化关系为：

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{38}$$

上一章介绍的参数方程可以扩展到三维乃至多维。`plot3d_parametric_line()` 函数可以用来绘制参数方程构造的三维线图。

图 32 所示三维线图的参数方程就是采用圆柱坐标：

$$\begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t) \\ x_3 = t \end{cases} \tag{39}$$

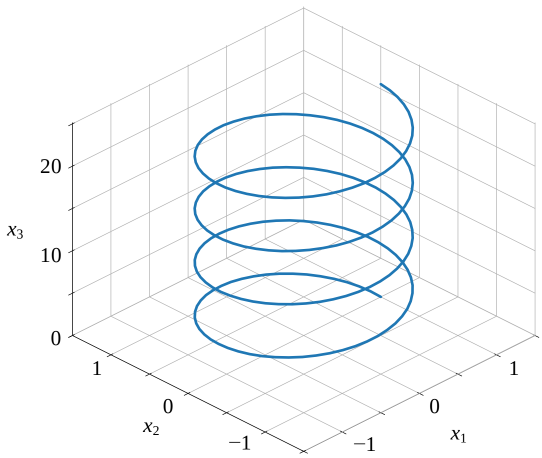


图 32. 三维参数方程线图

`Bk3_Ch6_05.py` 绘制图 32。图 32 也可以用 `plot3d_parametric_line()` 函数绘制，代码文件为 `Bk3_Ch6_06.py`。

前文提过，坐标系让代数和几何紧密结合，坐标系让代数可视化，使几何参数化。

坐标系给一个个函数插上了翅膀，让它们能够在二维平面和三维空间自由翱翔。函数是本书接下来重点讲解的内容。