

# 4 Algebra 代数

代数不过是公式化的几何



代数不过是公式化的几何；几何不过是图形化的代数。

*Algebra is but written geometry and geometry is but figured algebra.*

—— 索菲·热尔曼 (Sophie Germain) | 法国女性数学家 | 1776 ~ 1831



- ▶ difference() 计算集合的相对补集
- ▶ interaction() 计算集合的交集
- ▶ numpy.roots() 多项式求根
- ▶ set() 构造集合
- ▶ subs() 符号代数式中替换
- ▶ sympy.abc 引入符号变量
- ▶ sympy.collect() 合并同类项
- ▶ sympy.cos() 符号运算中余弦
- ▶ sympy.expand() 展开代数式
- ▶ sympy.factor() 对代数式进行因式分解
- ▶ sympy.simplify() 简化代数式
- ▶ sympy.sin() 符号运算中正弦
- ▶ sympy.solvers.solve() 符号方程求根
- ▶ sympy.symbols() 定义符号变量
- ▶ sympy.utilities.lambdify.lambdify() 将符号代数式转化为函数
- ▶ union() 计算集合的并集

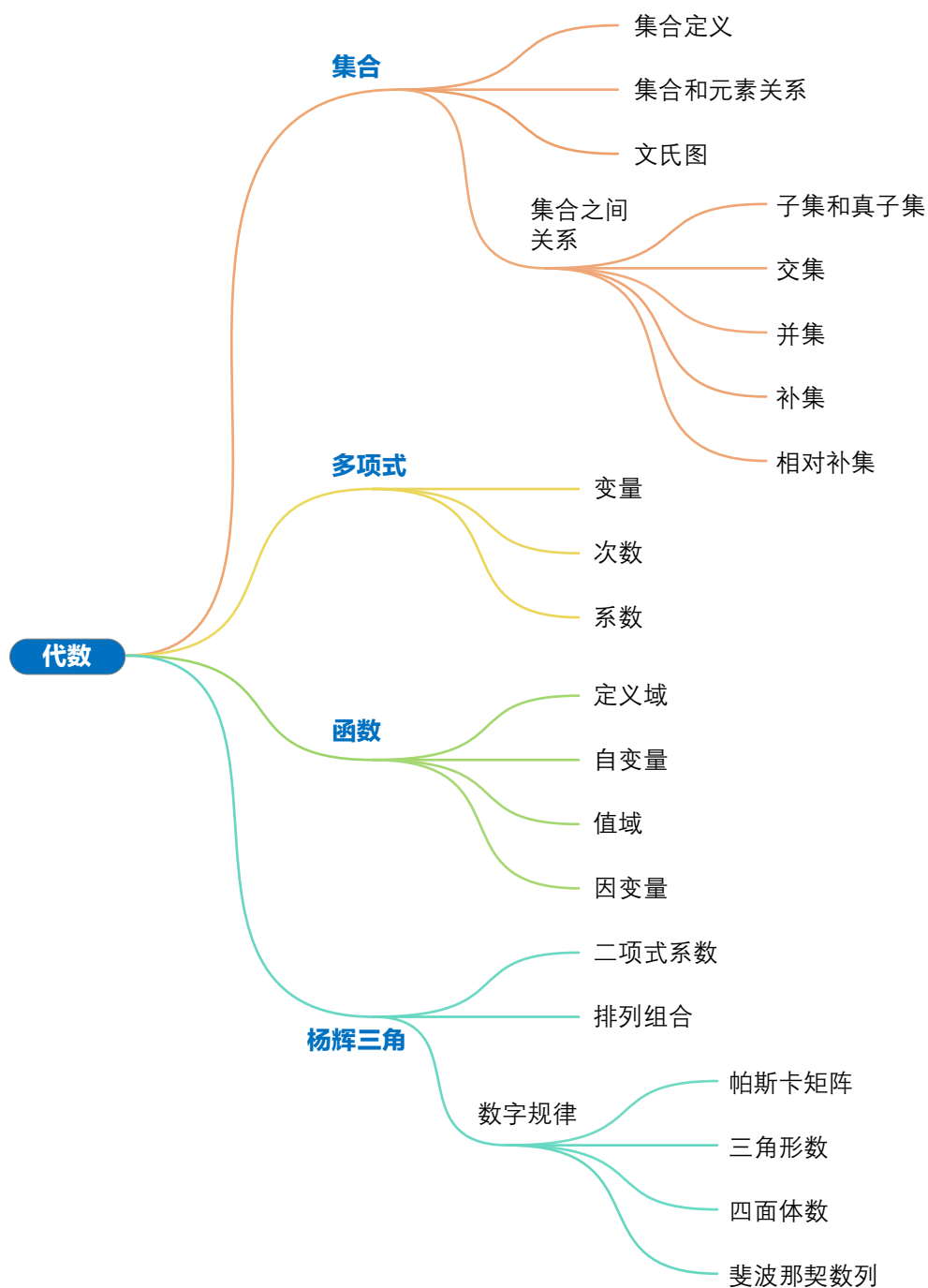
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 4.1 代数的前世今生：薪火相传

思想的传播像火种的接续传递——首先是星星之火，然后是闪烁的炬火，最后是燎原烈焰，排山倒海、势不可挡。

位于埃及境内的亚历山大图书馆曾经一度是古希腊最重要的图书馆，同时也是古希腊重要学术和文化中心。

公元前 47 年，亚历山大图书馆失火，大部分馆藏经典被焚毁。公元 529 年，柏拉图学园和其他所有雅典学校都被迫关闭。

可以想象，柏拉图学园断壁残垣，杂草丛生，物是人非。巢倾卵破，数学家、哲学家们鸟兽散去，远走他乡，衣食无着，寄人篱下，晚景凄凉。

古希腊学术圣火如风中之烛，渐渐燃灭，欧洲则一步步陷入漫漫暗夜。

庆幸的是，西方不亮东方亮；希腊典籍被翻译成阿拉伯语，人类思想的火种在另外一个避风港湾得以保全——巴格达“智慧宫 (House of Wisdom)”。

在九世纪至十三世纪，智慧宫可以说是整个世界举足轻重的教育学术机构。在智慧宫，东西方科技知识交融发展。值得一提的是，印度十进制数字系统就是在阿拉伯进一步发展，并引入欧洲。因此，十进制数字也被称作阿拉伯数字。

**花拉子密** (Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi) 是一位波斯数学家、智慧宫的代表性学者。花拉子密在约 820 年，创作完成《代数学》(Al-Jabr)，代数学自此成为一门独立学科。他第一次系统性求解一次方程及一元二次方程，因而被称为“代数之父”。英文中的代数 algebra 一词源自 Al-Jabr。值得一提的是，“算法”的英文 algorithm 一词来自于花拉子密 (al-Khwarizmi) 的名字。



图 1. 花拉子密《代数学》封面

好景不长，1258 年蒙古帝国军队的铁蹄大张挾伐，洗劫巴格达，焚毁智慧宫。据说，智慧宫珍贵藏书被丢弃在底格里斯河，河水被染黑长达六个月之久。

相比玉楼金殿、奇珍异宝，记录人类智慧的捆捆羊皮卷、叠叠莎草纸可能显得一分不值。这盏风中摇曳的烛火在两河流域被生生掐灭。

值得宽慰的是，十一世纪开始，十字远征军一次次远征，从阿拉伯人手中取回科学的火种，翻译运动在欧洲兴起，欧洲也渐渐从几百年的暗夜中苏醒。

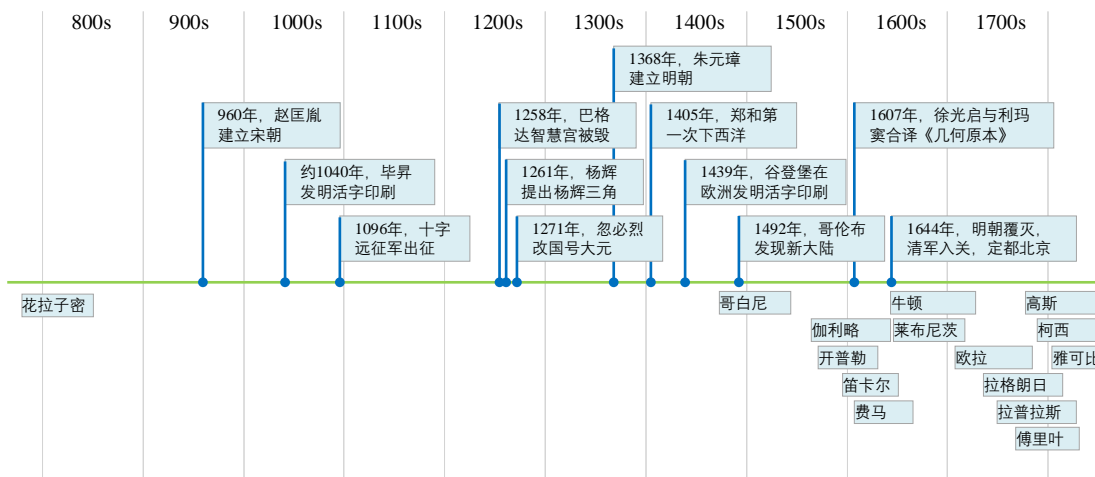


图 2. 西方数学复兴时间轴

十字远征军带回来不仅仅是古希腊的典籍，还有古印度的数学、古代中国的技术发明。这些科学知识在欧洲传播、发展，最终燃成人类思想的熊熊烈焰。

这片思想的火海中绽放出众多绚丽的火焰——伽利略、开普勒、笛卡尔、费马、帕斯卡、牛顿、莱布尼兹、伯努利、欧拉、拉格朗日、拉普拉斯、傅里叶、高斯、柯西 ... 本系列丛书会提到他们的名字，以及他们给后来者留下的宝贵知识火种。

## 4.2 集合：确定的一堆东西

本节回顾集合这个概念。相信本书读者对**集合** (set) 这个概念已经不陌生，我们在本书第 1 章介绍过复数集、实数集、有理数集等等，它们都是集合。

集合是由若干确定的**元素** (member 或 element) 所构成的整体。集合可以分为：**有限元素集合** (finite set)、**无限元素集合** (infinite set) 和**空集** (empty set 或 null set)。

### 集合与元素

如图 3 所示，集合与元素的关系有两种：**属于** (belong to)  $\in$ ，**不属于** (not belong to)  $\notin$ 。

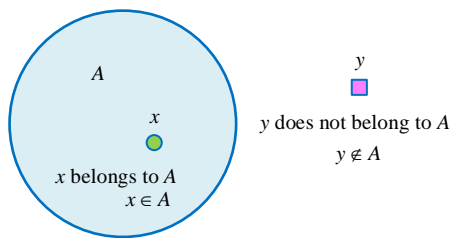


图 3. 属于和不属于

表 1. 集合与元素关系的中英文表达

英文表达	中文表达
$x$ belongs to capital $A$ .	$x$ 属于 $A$ 。
$x$ is a member/element of the set capital $A$ .	$x$ 是集合 $A$ 元素。
$x$ is/lies in the set capital $A$ .	$x$ 在集合 $A$ 之内。
The set capital $A$ includes $x$ .	集合 $A$ 包含 $x$ 。
$y$ does not belong to the set capital $A$ .	$y$ 不属于集合 $A$ 。
$y$ is not a member of the set capital $A$ .	$y$ 不是集合 $A$ 元素。

## 集合与集合

如果集合  $A$  中的每一个元素也都是集合  $B$  中的元素，那么  $A$  是  $B$  的**子集** (subset)，记作  $A \subseteq B$ 。而  $B$  是  $A$  的**母集**，也称**超集** (superset)。

如果同时满足  $A \subseteq B$  和  $A \neq B$ ，则称  $A$  是  $B$  的**真子集** ( $A$  is a proper subset of  $B$ )，记作  $A \subset B$ 。

给定  $A$  和  $B$  两个集合，由所有属于  $A$  且属于  $B$  的元素所组成的集合，叫做  $A$  与  $B$  的**交集** (intersection)，记作  $A \cap B$ 。

$A$  和  $B$  所有的元素合并组成的集合，叫做  $A$  和  $B$  的**并集** (union)，记作  $A \cup B$ 。

**补集** (complement) 一般指**绝对补集** (absolute complement)。设  $\Omega$  是一个集合， $A$  是  $\Omega$  的一个子集，由  $\Omega$  中所有不属于  $A$  的元素组成的集合，叫做子集  $A$  在  $\Omega$  中的绝对补集。

$A$  中  $B$  的**相对补集** (relative complement)，是所有属于  $A$  但不属于  $B$  的元素组成的集合，记做  $A \setminus B$  或  $A - B$  (set difference of  $A$  and  $B$ )，也可以读作“ $B$  在  $A$  中的相对补集 (the relative complement of  $B$  with respect to set  $A$ )”。

表 2. 集合与集合关系英文表达

数学表达	英文表达
$A \subset B$	The set capital $A$ is a subset of the set capital $B$ . The set capital $B$ is a superset of the set capital $A$ . The set capital $A$ is contained in the set capital $B$ .
$A \subseteq B$	The set capital $A$ is a subset of or equal to the set capital $B$ .
$A \supset B$	The set capital $A$ contains the set capital $B$ .
$A \supseteq B$	The set capital $A$ contains or is equal to the set capital $B$ .
$A \cap B$	The intersection of the set capital $A$ and the set capital $B$ . $A$ intersection $B$

	The intersection of $A$ and $B$
$A \cup B$	The union of the set capital $A$ and the set capital $B$ . Capital $A$ union capital $B$ . The union of $A$ and $B$ .
$\bar{A}$	The complement of the set capital $A$ .
$A - B$	The relative complement of the set capital $B$ in the set capital $A$ . The relative complement of set capital $B$ with respect to set capital $A$ .
$A \cap (B \cup C)$	The intersection of capital $A$ and the set capital $B$ union capital $C$ .
$\overline{(A \cup B)}$	The complement of the set capital $A$ union capital $B$ .
$\bar{A} \cap \bar{B}$	The intersection of the complement of capital $A$ and the complement of capital $B$ .

文氏图

集合之间的关系也可以用文氏图 (Venn diagram) 表达。图 4 给出的是两个集合常见关系文氏图。

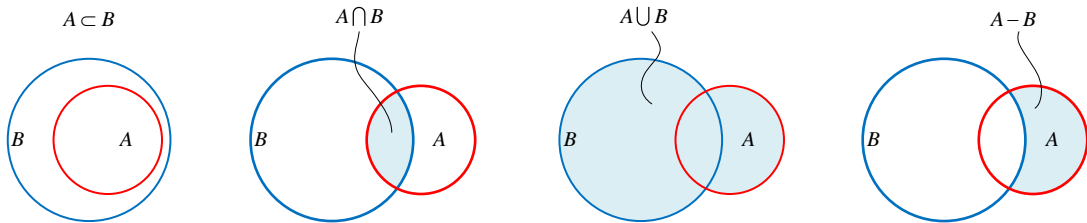


图 4. 两个集合关系文氏图

掷骰子

举个例子，如图 5 所示，掷一枚色子，点数结果构成的集合  $\Omega$  为：

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(1)

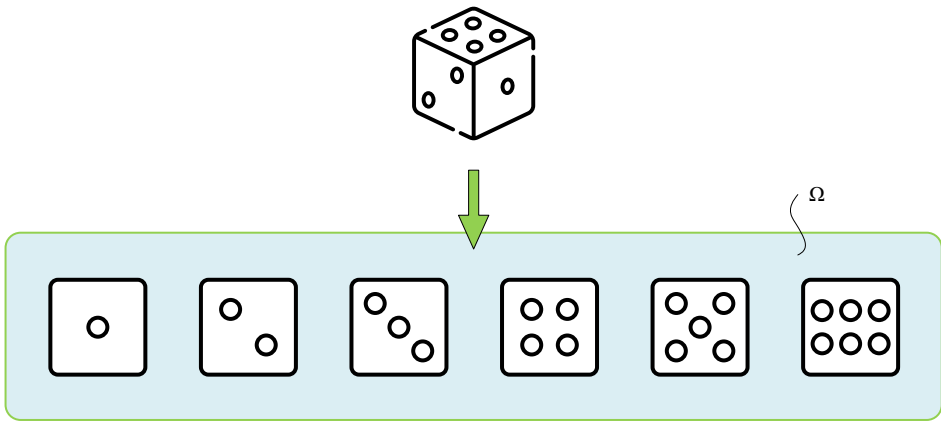


图 5. 投一枚色子点数结果

定义集合  $A$  为色子点数为奇数：

$$A = \{1, 3, 5\} \quad (2)$$

集合  $B$  为色子点数为偶数：

$$B = \{2, 4, 6\} \quad (3)$$

集合  $C$  为色子点数小于 4：

$$C = \{1, 2, 3\} \quad (4)$$

图 6 所示为  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个集合关系。

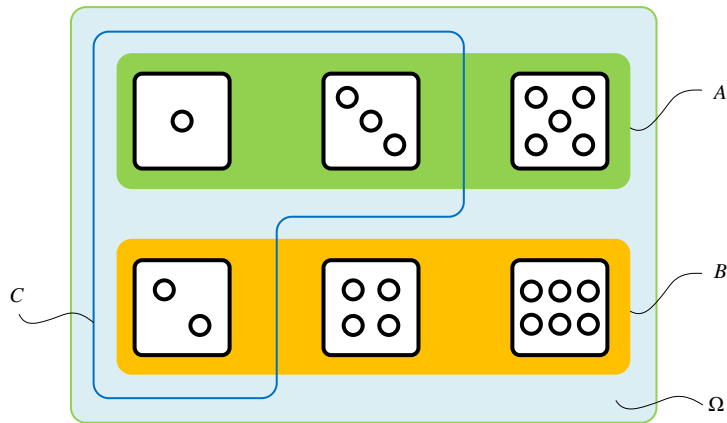


图 6. 色子点数  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个集合关系

显然， $A$  和  $B$  的交集为空，即，

$$A \cap B = \emptyset \quad (5)$$

$A$  和  $B$  的并集为全集  $\Omega$ ，即，

$$A \cup B = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (6)$$

也就是说， $A$  在  $\Omega$  中的绝对补集为  $B$ 。

$A$  和  $C$  的交集有两个元素：

$$A \cap C = \{1, 3\} \quad (7)$$

$A$  和  $C$  的并集有四个元素，即，

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 5\} \quad (8)$$

$A$  中  $C$  的相对补集为：

$$A - C = \{5\} \quad (9)$$

$C$  中  $A$  的相对补集为：

$$C - A = \{2\} \quad (10)$$



代码文件 Bk3\_Ch4\_01.py 上述计算。

## 4.3 从代数式到函数

**算数** (arithmetic) 基于**已知量** (known values)。而**代数** (algebra) 基于**未知量** (unknown values)，也称作**变量** (variables)。当然，代数中既有数字也有字母。

现代人一般用  $a$ 、 $b$ 、 $c$  等代表常数，用  $x$ 、 $y$ 、 $z$  等代表未知量。这种记法正是约 400 年前笛卡尔提出的。

引入未知量这种数学工具，有助于将数学问题抽象化、一般化。也就是说， $2 + 1$ 、 $6 + 12$ 、 $100 + 150$  等算式，都可以抽象地写成  $x + y$  这个代数式。

如图 7 所示，这五个圆形大小明显不同。但是，引入半径  $r$  这个变量，这些圆形的周长都可以写成  $2\pi r$ ，面积可以写成  $\pi r^2$ 。将不同的  $r$  值代入代数式，便可以求得对应圆的周长和面积。

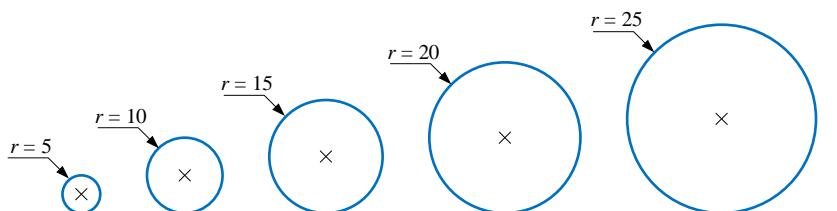


图 7. 不同半径的圆形

### 多项式

本书最常见的代数式是**多项式** (polynomial)，形如：

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (11)$$

其中， $x$  为**变量** (variable)， $n$  为**多项式次数** (degree of a polynomial)， $a_0$ 、 $a_1 \dots a_n$  为**系数** (coefficient)。



系数之所以会使用**下角标** (subscript)，是因为字母不够用。类似地，变量多时， $x$ 、 $y$ 、 $z$  肯定不够用，本系列丛书会用变量加下角标序号 (索引) 来表达变量，比如  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_i$ 、 $x_j$  等等。

由数和字母的积组成的代数式叫做**单项式** (monomial)，比如  $ax^n$ 。单独的一个数或一个系数也叫做单项式，比如 5 和  $a_0$ 。

一个单项式中，所有变量指数之和，叫做这个单项式的次数。比如， $3x^5$  的次数是 5， $2xy$  的次数为 2 ( $= 1 + 1$ )。

如 (11) 所示，多项式则是由一个个单项式加减构成。

只有一个变量的多项式被称作**一元多项式** (univariate polynomial)。变量多于一个的多项式统称**多元多项式** (multivariate polynomials)。特别地，有两个变量的多项式常被称作**二元多项式** (bivariate polynomial)，比如  $x + y + 8$  或  $x_1 + x_2 + 8$ 。

最高项次数较小的多项式都有特殊的名字，比如**常数式** (constant equation)、**一次式** (linear equation)、**二次式** (quadratic equation)、**三次式** (cubic equation)、**四次式** (quartic equation) 和**五次式** (quintic equation) 等等。常见多项式及名称总结于表 3 中。

表 3. 常见多项式举例

次数	英文名称	例子
1	linear	$ax + b, a \neq 0$
2	quadratic	$ax^2 + bx + c, a \neq 0$
3	cubic	$ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$
4	quartic	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a \neq 0$
5	quintic	$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f, a \neq 0$

代入具体值

给定如下变量为  $x$  的三次式：

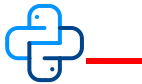
$$x^3 + 2x^2 - x - 2$$

(12)

令  $x = 1$ ，代入 (12)，得到如下结果：

$$1^3 + 2 \times 1^2 - 1 - 2 = 0$$

(13)



代码文件 Bk3\_Ch4\_02.py 中用 SymPy 中函数来完成上述计算。其中 `sympy.abc` 引入符号变量  $x$  和  $y$ 。SymPy 是重要的符号运算库，本书将会用到其中的代数式定义、求根、求极限、求导、求积分、级数展开等功能。此外，也可以使用 `sympy.symbols()` 定义更复杂的符号变量。

同样，可以利用 `.subs()` 将 (12) 中的  $x$  替换成其他符号变量、甚至代数表达式，比如  $x = \cos(y)$ ：

$$(\cos(y))^3 + 2(\cos(y))^2 - \cos(y) - 2 \quad (14)$$

代码文件 `Bk3_Ch4_02.py` 还将  $x$  替换为  $\cos(y)$ 。



代码文件 `Bk3_Ch4_03.py` 介绍了 SymPy 中几个处理代数式的函数。`sympy.simplify()` 函数可以简化代数式。`sympy.expand()` 可以用来展开代数式。`sympy.factor()` 函数则可以对代数式进行因式分解。`sympy.collect()` 函数用来合并同类项。请大家自行学习。

表 4 总结常用代数式的英文表达。

表 4. 常用代数英文表达

数学表达	英文表达
$x - y$	$x$ minus $y$
$-x - y - z$	minus $x$ minus $y$ minus $z$
$x - (y - z)$	$x$ minus the quantity $y$ minus $z$ . $x$ minus open parenthesis $y$ minus $z$ close parenthesis.
$x - (y + z) - t$	$x$ minus the quantity $y$ plus $z$ end of quantity minus $t$ . $x$ minus open parenthesis $y$ plus $z$ close parenthesis minus $t$ .
$x(x - y + z)$	$x$ times the quantity $x$ minus $y$ plus $z$ . $x$ times open parenthesis $x$ minus $y$ plus $z$ close parenthesis.
$(x + y)^2$	$x$ plus $y$ all squared
$x^3$	$x$ to the third $x$ to the third power $x$ raised to the power of three $x$ cubed
$x^5 + 4x^3 - 2x^2$	$x$ to the fifth plus four $x$ to the third minus two $x$ squared
$(x + y)(z + t)$	The sum $x$ plus $y$ times the sum $z$ plus $t$ . The product of the sum $x$ plus $y$ and the sum $z$ plus $t$ . Open parenthesis $x$ plus $y$ close parenthesis times open parenthesis $z$ plus $t$ close parenthesis.
$\left(\frac{x}{y}\right)^2$	$x$ over $y$ all squared
$\frac{x + z}{y}$	The quantity of $x$ plus $z$ divided by $y$ .
$x + \frac{z}{y}$	$x$ plus the fraction $z$ over $y$ .
$t\left(z + \frac{x}{y}\right)$	$t$ times the sum $z$ plus the fraction $x$ over $y$ .

## 函数

**函数** (function) 一词由莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz) 引入。而  $f(x)$  这个函数记号由**欧拉** (Leonhard Paul Euler) 发明。欧拉还引入三角函数现代符号，他首创以  $e$  标记自然对数的底，用希腊字母  $\Sigma$  标记累加，以  $i$  表示虚数单位。

中文“函数”则是由清朝数学家李善兰 (1810 ~ 1882) 翻译。代数、系数、指数、多项式等数学名词中文翻译也是出自李善兰之手。

给定一个集合  $X$ ，对  $X$  中元素  $x$  施加映射法则  $f$ ，记作函数  $f(x)$ 。得到的结果  $y = f(x)$  属于集合  $Y$ 。集合  $X$  称作**定义域** (domain)， $Y$  称作**值域** (codomain)。  $x$  称作**自变量** (an argument of a function 或 an independent variable)， $y$  称作**因变量** (dependent variable)。

大家应该已经发现，函数  $f: X \rightarrow Y$  有三个关键要素：定义域  $X$ 、值域  $Y$  和函数映射规则  $f$ 。

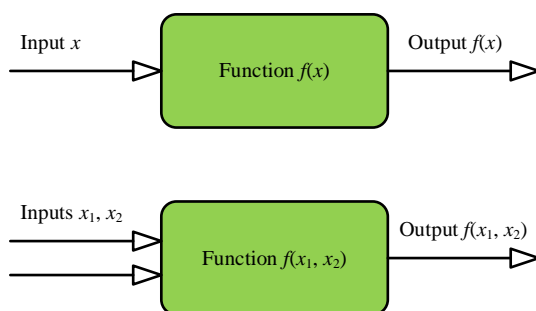


图 8. 一元函数、二元函数的映射

函数的自变量为两个或两个以上时，叫做**多元函数** (multivariate function)。本丛书一般会使用  $x$  加下角标序号来表达多元函数中的自变量，比如  $f(x_1, x_2, \dots, x_D)$  函数有  $D$  个自变量。

为了方便将不同的  $x$  值代入 (12)，我们可以定义一个函数  $f(x)$ ：

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad (15)$$



Bk3\_Ch4\_04.py 将代数式转化为函数，并给  $x$  赋值得到函数值。

表 5 给出有关函数常用英文表达。

表 5. 常用函数英文表达

数学表达	英文表达
$f(x)$	$f x$ $f$ of $x$ The function $f$ of $x$
$f(g(x))$	$f$ composed with $g$ of $x$ $f$ of $g$ of $x$
$f \circ g(x)$	$f$ composed with $g$ of $x$ $f$ of $g$ of $x$
$f(x+a)$	$f$ of the quantity $x$ plus $a$
$f(x, y)$	$f$ of $x, y$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$f$ of $x$ sub one, $x$ sub two, dot dot dot, $x$ sub $n$
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	$f$ of $x$ equals $a$ sub $n$ times $x$ to the $n$ , plus $a$ sub $n$ minus one times $x$ to the $n$ minus one, plus dot dot dot, plus $a$ sub one times $x$ , plus $a$ sub zero. $f$ of $x$ equals $a$ sub $n$ times $x$ raised to the power of $n$ , plus $a$ sub $n$ minus one times $x$ raised to the power of $n$ minus one, plus dot dot dot, plus $a$ sub one times $x$ , plus $a$ sub zero.
$f(x) = 3x + 5$	$f$ of $x$ equals three times $x$ plus five.
$f(x) = x^2 + 2x + 1$	$f$ of $x$ equals $x$ squared plus two times $x$ plus one.
$f(x) = x^3 - x + 1$	$f$ of $x$ equals $x$ cubed minus $x$ plus one.

为了进一步探讨函数性质，我们亟需一个重要的数学工具——**坐标系** (coordinate system)。坐标系是下一章探讨的内容。

## 4.4 杨辉三角：代数和几何的完美合体

杨辉三角，也称贾宪三角，又称**帕斯卡三角** (Pascal's triangle)，是二项式系数的一种写法。

### 二项式系数

如下， $(x+1)^n$  展开后，按单项  $x$  的次数从高到低排列，发现单项式系数呈现出特定规律：

$$\begin{aligned}
 (x+1)^0 &= 1 \\
 (x+1)^1 &= x+1 \\
 (x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \\
 (x+1)^3 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
 (x+1)^4 &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 (x+1)^5 &= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \\
 (x+1)^6 &= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 \\
 \dots & \quad \dots
 \end{aligned} \tag{16}$$

图 9 将 (16) 单项式系数以金字塔的结构展示，请读者注意以下规律：

- ◀ 三角形系数呈现对称性，第  $k$  行有  $k+1$  个系数；
- ◀ 三角形每一行左右最外侧系数为 1；
- ◀ 除最外两侧系数以外，三角形内部任意系数为左上方和右上方两个系数之和；
- ◀ 第  $k$  行系数之和为  $2^k$ 。

注意，(16) 的第一层对应  $k=0$ 。

杨辉三角中，我们将会看到几何、代数、概率等知识的有趣联系。

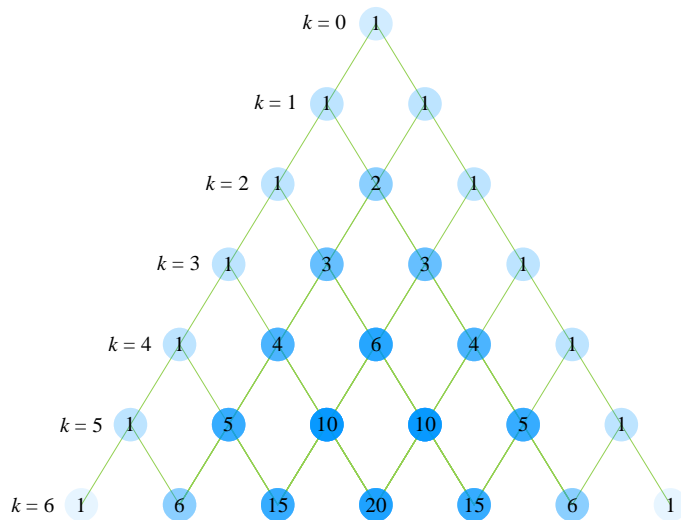


图 9. 杨辉三角

### 从杨辉三角到概率

比帕斯卡提前 300 年左右，杨辉在自己书中介绍了这个数字规律。杨辉也不是第一位发现者，他在书中也说的很清楚，这个规律引自贾宪的一部叫做《释锁算术》的数学作品。

按照时间先后顺序，贾宪在 11 世纪北宋时期就发现并推广了这一规律，杨辉只是在 13 世纪南宋时期再次解释。

而帕斯卡等到 1655 年在自己的作品中介绍二项式系数规律。但是，帕斯卡创造性地将它用在解释概率运算，这对概率论发展有开天辟地之功。这是本书第 20 章要介绍的内容。

### 圖方蔡七法古

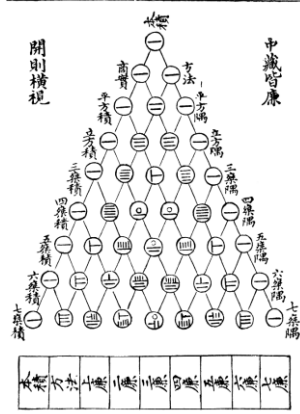


图 10. 元代数学家朱世杰《四元玉鉴》中绘制的杨辉三角

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 火柴梗图

**火柴梗图** (stem plot) 可视化杨辉三角每行单项式系数的规律。图 11 所示为  $n = 4、8、12$  时，二项式展开单项系数规律。

火柴梗图明显呈现中心对称性。 $n$  为偶数时，对称轴处系数最大。如图 11 所示， $n$  为奇数时，对称轴附近两个系数为最大值。对称轴左右两侧系数先快速减小，然后再缓慢减小。

随着  $n$  增大，这一现象更加明显，如图 13 所示。连接图 13 中实心点，我们发现一条优美的曲线呼之欲出，这条曲线就是**高斯函数** (Gaussian function)。本书第 12 章将介绍高斯函数。

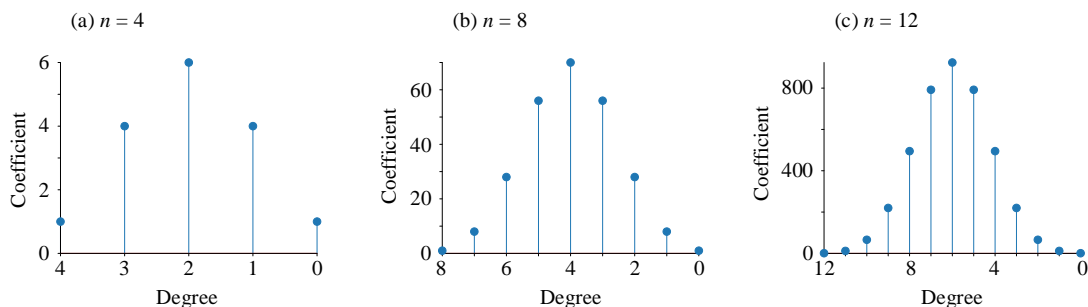


图 11.  $n = 4、8、12$  等偶数时，二项式展开单项系数

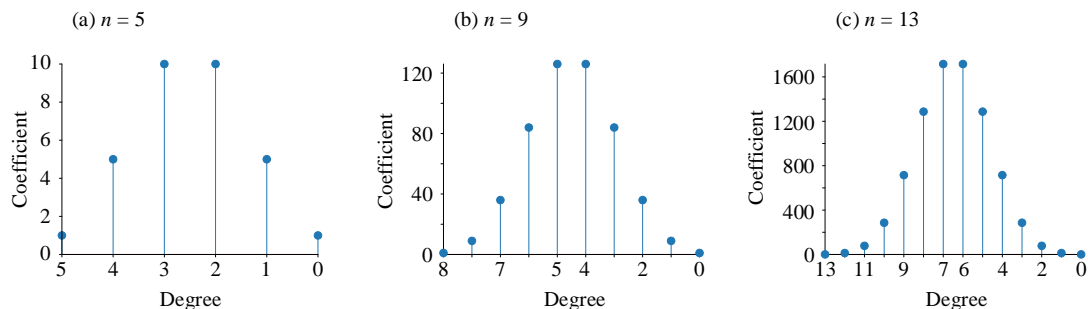


图 12.  $n = 5、9、13$  等奇数时，二项式展开单项系数

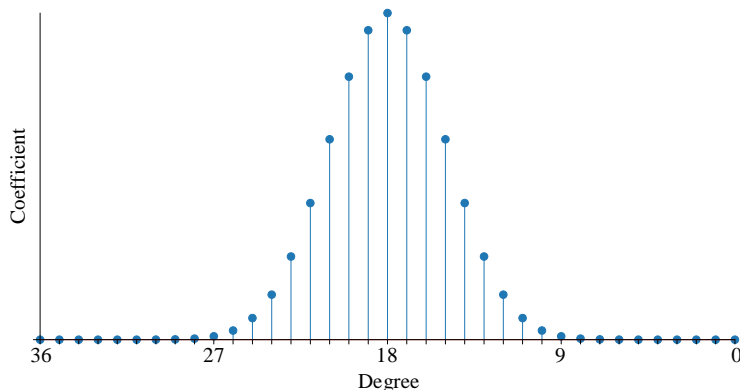


图 13.  $n = 36$  时，二项式展开单项系数



代码文件 Bk3\_Ch4\_05.py 绘制图 11 和图 13 两图。



我们在 Bk3\_Ch4\_05.py 基础上用 Streamlit 制作了展示二项式系数的 App，请大家参考代码文件 Streamlit\_Bk3\_Ch4\_05.py。

## 4.5 排列组合让二项式系数更具意义

### 组合数

从  $n$  个不同元素中，取  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素构成一组，被称作  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个**组合** (combination)。注意，组内的元素排序并不重要。

$n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的所有组合个数叫做组合数，常记做  $C_n^m$ ：

$$C_n^m = C(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (17)$$

其中，! 运算符就是本书第 2 章介绍的**阶乘** (factorial)。

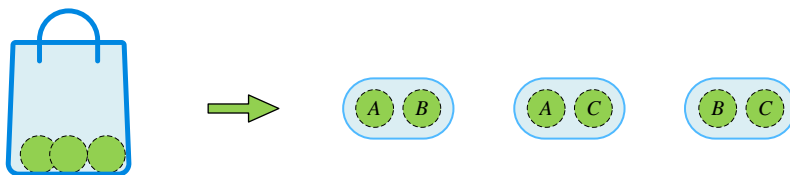


图 14. A、B、C 三个元素无放回抽取两个，结果有三个组合

举个例子，如图 14 所示，从 A、B、C 三个元素无放回抽取两个，只要元素相同，不管次序是否相同都算作相同结果。结果有三个组合 AB、AC、BC，对应的组合数为：

$$C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{6}{2} = 3 \quad (18)$$

逐个抽取个体时，每个被抽到的个体不再放回总体，也就是不再参加下一次抽取，这就是“无放回抽取”。无放回抽取中，总体在抽样过程中逐渐减小。



Bk3\_Ch4\_06.py 完成上述无放回抽取组合实验。

结果如下。

```
('A', 'B')
('A', 'C')
('B', 'C')
```

### 组合数表达杨辉三角

用组合数将  $(x + y)^n$  展开写成：

$$(x + y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^{n-2} x^2 y^{n-2} + C_n^{n-1} x^1 y^{n-1} + C_n^0 x^0 y^n \quad (19)$$

因此，杨辉三角写成图 15 这种形式。

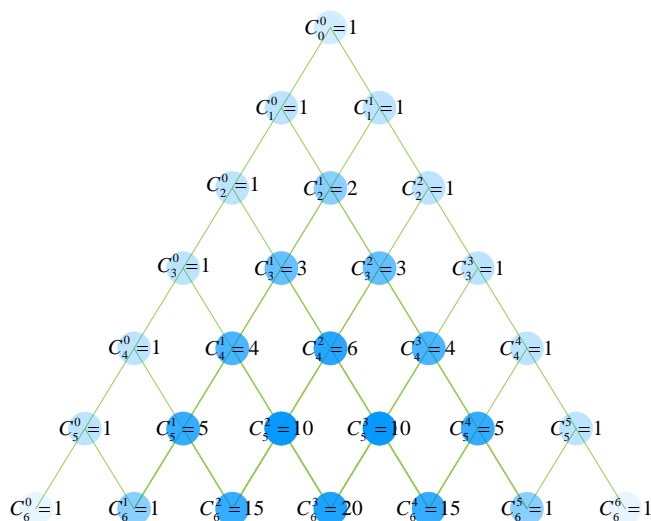


图 15. 用组合数来写杨辉三角

组合数方便解释 (19) 中各项系数。(19) 每一项  $x$  和  $y$  的次数之和为  $n$ ，如果某一单项  $y$  的次数为  $k$ ， $x$  的次数为  $n - k$ ，这一项为  $C_n^k x^{n-k} y^k$ 。该项系数  $C_n^k$  相当于在  $n$  个  $x$  或  $y$  连乘中，选取  $k$  个为  $y$ 。

将  $x = y = 1$  代入 (19)，可以发现组合数的一个重要规律：

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^0 \quad (20)$$

观察图 15 的对称性，容易发现另外一个组合数规律：



$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (21)$$

## 排列数

从  $n$  个不同元素中，先后取  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素排成一列，叫做从  $n$  个元素中取出  $m$  个元素的一个排列 (permutation)。排列中，元素的排序很重要。

$n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的所有排列的个数叫做排列数，常记做  $P_n^m$ ：

$$P_n^m = P(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (22)$$

同样，如图 16 所示，从  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个元素无放回先后抽取两个，结果有 6 个排列  $AB$ 、 $BA$ 、 $AC$ 、 $CA$ 、 $BC$ 、 $CB$ ，即，

$$P_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6 \quad (23)$$

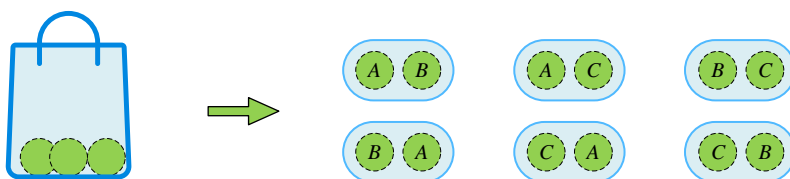


图 16.  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三个元素无放回抽取两个，结果有 6 个排列



Bk3\_Ch4\_07.py 完成上述无放回排列实验。

结果为：

```
('A', 'B')
('A', 'C')
('B', 'A')
('B', 'C')
('C', 'A')
('C', 'B')
```

## 组合数和排列数

比较 (17) 和 (22)，发现排列和组合的关系为：

$$P_n^m = C_n^m \cdot m! \quad (24)$$

可以这样解释上式，先从  $n$  个元素取出  $m$  进行组合，组合数为  $C_n^m$ 。然后，把  $m$  个元素全部排列一遍（也叫全排列），排列数为  $m!$ 。这样， $C_n^m$  和  $m!$  乘积便是  $n$  个元素取出  $m$  的排列数。



从 A、B、C 三个元素全排列的结果为 ABC、ACB、BAC、BCA、CAB、CBA。代码文件 Bk3\_Ch4\_08.py 完成上述计算并打印全排列结果。

结果为：

```
('A', 'B', 'C')
('A', 'C', 'B')
('B', 'A', 'C')
('B', 'C', 'A')
('C', 'A', 'B')
('C', 'B', 'A')
```

## 4.6 杨辉三角隐藏的数字规律

本节简要探讨杨辉三角中隐藏着的有趣数字规律。

### 帕斯卡矩阵

将杨辉三角数字左对齐，可以得到如下矩阵。这个矩阵常被称作**帕斯卡矩阵** (Pascal matrix)：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

### 三角形数

(25) 矩阵的第一列均为 1，第二列为自然数，第三列为**三角形数** (triangular number)。

如图 17 所示，如果一定数量圆形紧密排列，可以形成一个等边三角形，这个数量就叫做三角形数。

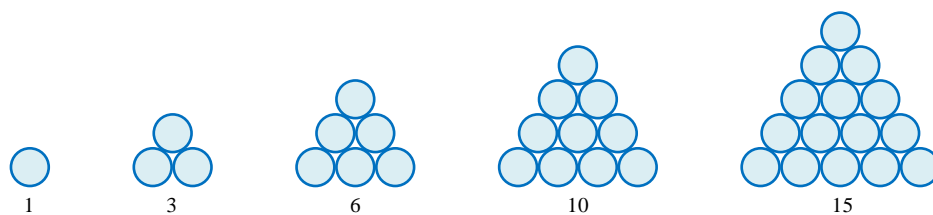


图 17. 三角形数

## 四面体数

(25) 第四列是叫做**四面体数** (tetrahedral number 或 triangular pyramidal number)。

顾名思义，四面体数就是圆球紧密堆成四面体对应的数字。三角数从 1 累加便可以得到四面体数。也就是把图 17 看成是圆球，将它们一层层摞起来，便得到正四面体。

## 斐波那契数列

按照图 18 浅黄色线条方向，将杨辉三角每一排数字相加，可以得到如下数字序列：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 (26)

这便是**斐波那契数列** (Fibonacci sequence)。

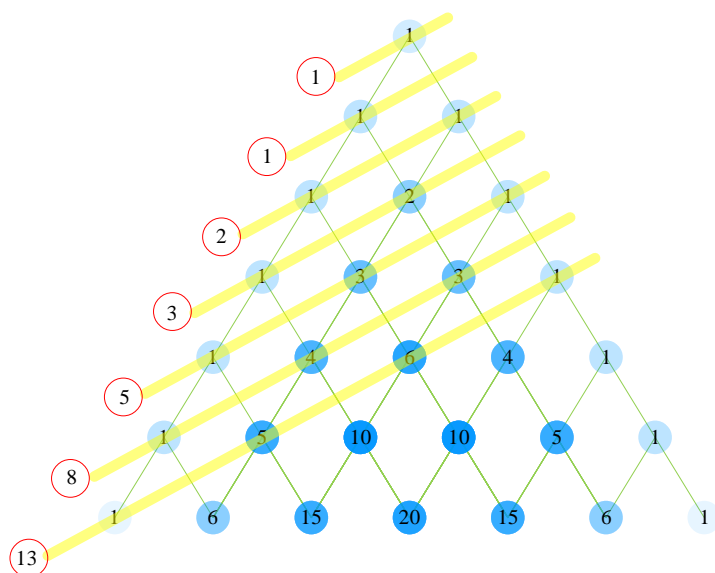


图 18. 杨辉三角和斐波那契数列关系

## 4.7 方程组：求解鸡兔同笼问题

### 方程

**方程** (equation) 就是含有未知量的等式，比如  $x + 5 = 8$ 。使等式成立的未知量的值叫做方程的**根** (root) 或**解** (solution)。

**一元一次方程** (linear equation in one variable) 可以写成：

$$ax + b = c \quad (27)$$

其中， $x$  为未知变量， $a$ 、 $b$ 、 $c$  为实数，且  $a \neq 0$ 。

**二元一次方程** (linear equation in two variables)，可以写成：

$$ax + by = c \quad (28)$$

其中， $x$  和  $y$  为未知变量， $a$ 、 $b$ 、 $c$  为实数， $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ 。

用  $x_1$  和  $x_2$  作为未知量，(28) 也可以写成：

$$ax_1 + bx_2 = c \quad (29)$$

### 方程组

**方程组** (system of equations) 是指两个或两个以上的方程，一般也会对应两个或两个以上未知量。

约 1500 年前成书的《孙子算经》中记载的“鸡兔同笼”就可以写成二元一次方程组。

鸡兔同笼问题原文是“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”

用现代汉语来说就是：现在笼子里有鸡（雉读作 zhì）和兔子在一起。从上面数一共有 35 个头，从下面数一共有 94 只脚，问一共有多少只鸡、多少只兔子？

用  $x$  代表鸡， $y$  代表兔。有 35 个头对应如下方程式：

$$x + y = 35 \quad (30)$$

有 94 只脚对应如下方程式：

$$2x + 4y = 94 \quad (31)$$

联立两个等式得到方程组：

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases} \quad (32)$$

很容易求得,

$$\begin{cases} x = 23 \\ y = 12 \end{cases} \quad (33)$$

也就是, 笼子里有 23 只鸡, 12 只兔。

本书会在在坐标系、线性代数这两个话题中继续有关鸡兔同笼故事。

## 一元二次方程

**一元二次方程** (quadratic equation in one variable) 可以写成:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (34)$$

其中,  $a$ 、 $b$ 、 $c$  都是实数, 且  $a \neq 0$ 。

(34) 的求根公式可以写成:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (35)$$

(34) **判别式** (discriminant) 是,

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (36)$$

$\Delta > 0$ , 一元二次方程有两个实数根;  $\Delta = 0$ , 一元二次方程有两个相同实数根;  $\Delta < 0$ , 一元二次方程有两个不同的复数根, 不存在实数根。

## 多项式求根

采用 `numpy.roots()` 也可以计算多项式方程的根。给定如下多项式等式:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (37)$$

单项式次数从高到低各项系数作为输入, 用 `numpy.roots([a0, a1, ..., a_{n-1}, a_n])` 函数来求根。此外, `sympy.solvers.solve()` 函数也可以用来求根。

举个例子, 给定三次多项式等式:

$$-x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 0 = 0 \quad (38)$$

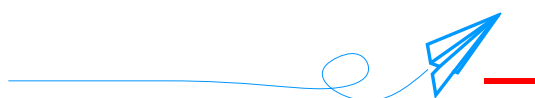


代码文件 `Bk3_Ch4_09.py` 求解 (38) 三个根。

表 6 所示为方程相关的英文表达。

表 6. 方程相关英文表达

$x(y+1)=5$	$x$ times the quantity of $y$ plus one equals five.
$(x+a)(x+b)=0$	The quantity of $x$ plus $a$ times the quantity of $x$ plus $b$ equals zero.
$2x+y=5$	Two $x$ plus $y$ equals five.
$2x^2+3x+4=0$	Two $x$ squared plus three $x$ plus four equals zero.
$2x^3+3x^2+4=0$	Two $x$ cubed plus three $x$ squared plus four equals zero.
$(x+y)/2x=0$	The quantity of $x$ plus $y$ over two $x$ equals zero.
$(x+y)^n=1$	The quantity $x$ plus $y$ to the $n$ th power equals one.
$x^n+x^{n-1}=5$	$x$ to the $n$ , plus $x$ to the $n$ minus one equals five.



有时候，知识的传播好似随风潜入夜。更多时候，是水火不容的碰撞和残酷血腥的争夺。然而，这场抢占知识高地的竞争从未偃旗息鼓，大有愈演愈烈之势。

拿破仑曾感叹“数学的发展与国运息息相关”。让数学思想之火熊熊燃烧的是一代代栋梁之才，和保护炬火、席卷八荒的强大力量。两者互为给养、风雨同舟、荣辱与共。

在图 2 中西方代数复兴的时间轴上，一方面我们看到数学无国界，她在世界各地辗转腾挪、断续发展；另一方面，这个历史的脉络也让人们看到人才培养、聚集、转移，伴随着财富、军事、生产力、政治影响力此消彼长。

阿基米德的血肉之躯不能挡住罗马士兵的刀刃；但是，他的精巧发明曾一度让强敌闻之色变。知识不等同于汗牛充栋、蛛网尘封的藏书，两者可谓天壤之差、云泥之别。掌握、利用知识，让知识成为生产力，才是关键。