

15

Derivative

导数

函数切线斜率，即变化率



微积分是现代数学的第一个成就，它的重要性怎么评价都不为过。我认为它比其他任何东西都更明确地定义了现代数学的起源。而作为其逻辑发展的数学分析系统，仍然是精确思维的最大技术进步。

The calculus was the first achievement of modern mathematics and it is difficult to overestimate its importance. I think it defines more unequivocally than anything else the inception of modern mathematics; and the system of mathematical analysis, which is its logical development, still constitutes the greatest technical advance in exact thinking.

—— 约翰·冯·诺伊曼 (John von Neumann) | 美国籍数学家 | 1903 ~ 1957



```

< sympy.abc import x 定义符号变量 x
< sympy.diff() 求解符号函数导数和偏导解析式
< sympy.Eq() 定义符号等式
< sympy.evalf() 将符号解析式中未知量替换为具体数值
< sympy.limit() 求解极限
< sympy.plot_implicit() 绘制隐函数方程
< sympy.series() 求解泰勒展开级数符号式
< sympy.symbols() 定义符号变量

```

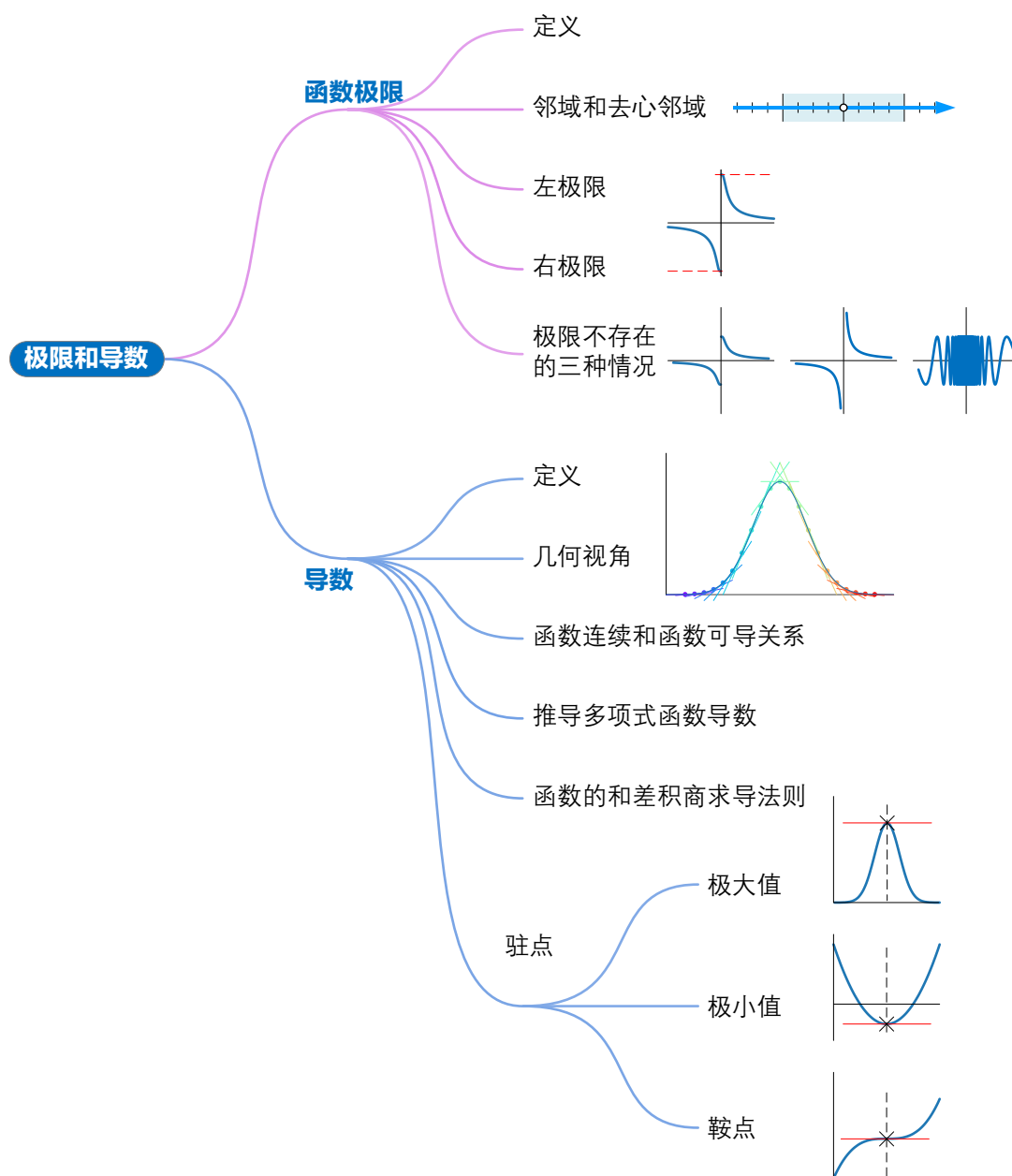
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

15.1 牛顿小传

“如果说我比别人看得更远，那是因为我站在巨人们的肩上。”

1642 年年底，艾萨克·牛顿 (Sir Isaac Newton) 呱呱坠地，同年年初伽利略驾鹤西征。牛顿从伽利略手中接过了智慧火炬。这可能完全是巧合，但又何尝不是某种命中注定。在伽利略等科学先驱者开垦的沃土上，即便没有培育出牛顿，也会注定会造就马顿、羊顿、米顿 ...



艾萨克·牛顿 (Sir Isaac Newton)

英国物理学家、数学家 | 1643年 ~ 1727年

提出万有引力定律、牛顿运动定律，与莱布尼茨共同发明微积分



年轻的牛顿坐在果园里，思考物理学。苹果熟了，从树上落下，砸到了牛顿的脑门。牛顿发出了一个惊世疑问，苹果为什么会下落？

是的，苹果为什么会下落，而不是飞向更遥远的天际？对这些问题的系统思考让牛顿提出万有引力定律。

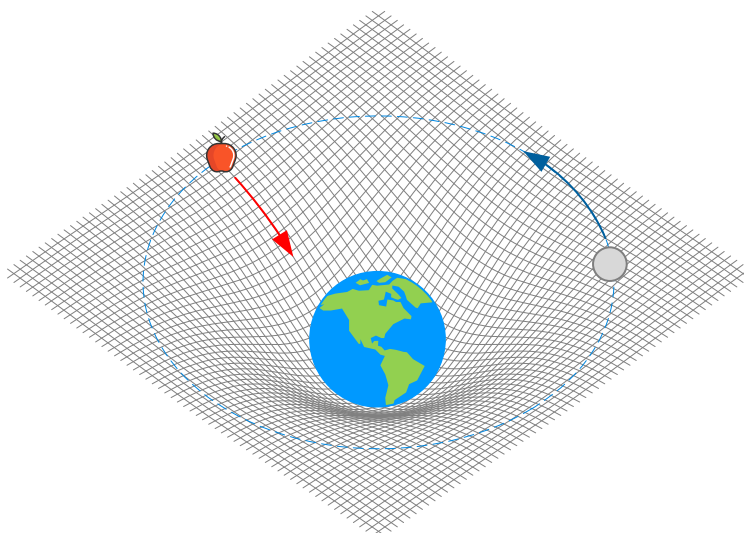


图 1. 地球引力场作用下的月球和苹果

牛顿的成就不止于此。他提出三大运动定律，并出版《自然哲学的数学原理》(*Mathematical Principles of Natural Philosophy*)，他利用三棱镜发现七色光谱，发明反射望远镜，并提出光的微

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

粒说，他和莱布尼茨分别独立发明微积分等等。任何人有其中任意一个贡献，就可以留名青史；然而，牛顿一个人完成上述科学进步。



自然和自然规律隐藏在黑暗之中。

上帝说：交给牛顿吧，

于是一切豁然开朗。

Nature and Nature's laws lay hid in night:

God said, Let Newton be! and all was light.

——亚历山大·蒲柏 (Alexander Pope) | 英国诗人 | 1688 ~ 1744

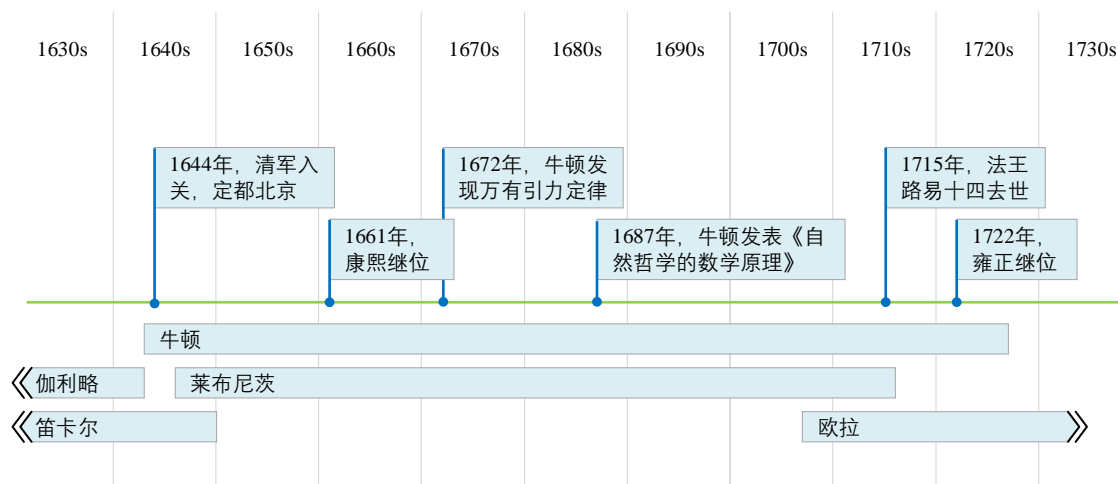


图 2. 牛顿时代时间轴

15.2 极限：研究微积分的重要数学工具

微积分 (calculus) 是研究实数域上函数的微分与积分等性质的学科，而极限是微积分最重要数学工具。**连续** (continuity)、**导数** (derivative) 和**积分** (integral) 这些概念都是通过极限来定义。

上一章简单介绍了数列极限、数列和的极限。本节主要介绍函数极限。

函数极限

首先聊一下函数极限的定义。

设函数 $f(x)$ 在点 a 的某一个去心邻域内有定义，如果存在常数 C ，对于任意给定正数 ε ，不管它多小，总存在正数 δ ，使得 x 满足如下不等式时，

$$0 < |x - a| < \delta \quad (1)$$

对应函数值 $f(x)$ 都满足，

$$|f(x) - C| < \varepsilon \quad (2)$$

常数 C 就是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的极限，记做：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \quad (3)$$

举个例子

给定如下函数：

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (4)$$

如图 3 所示，当 x 趋向正无穷，函数极限为 e ：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e \quad (5)$$

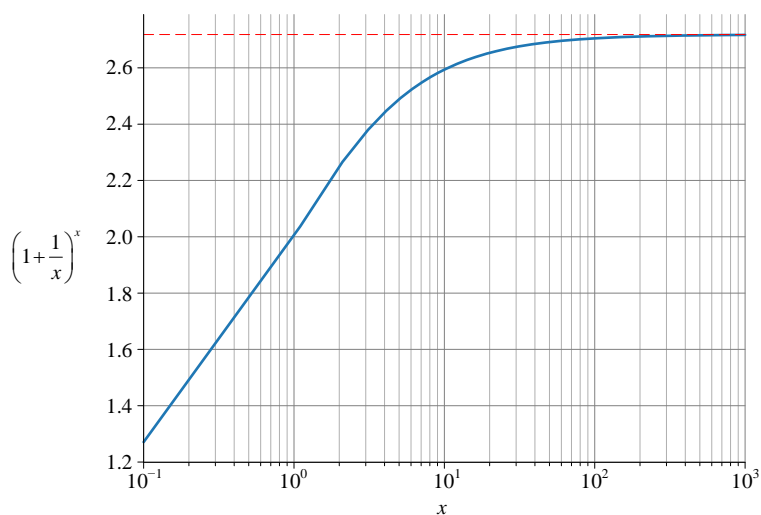


图 3. 当 x 趋向正无穷，函数 $f(x)$ 极限值

邻域

解释一下邻域这个概念。邻域 (neighbourhood) 实际上就是一个特殊的开区间。如图 4 所示, 点 a 的 h ($h > 0$) 邻域满足 $a - h < x < a + h$ 。

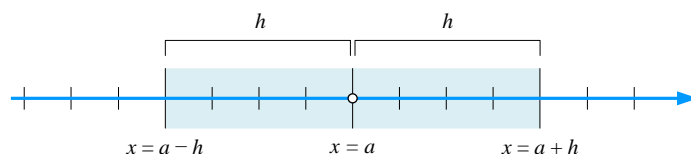


图 4. 邻域

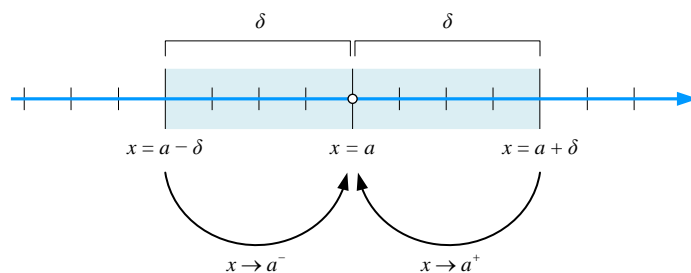
a 为邻域的中心, h 为邻域的半径。而去心邻域 (deleted neighborhood 或 punctured neighborhood) 指的是, 在 a 的邻域中去掉 a 的集合。



Bk3_Ch15_01.py 计算极限并绘制图 3。

15.3 左极限、右极限

请注意 (1) 的绝对值符号。如图 5 所示, 这代表着 x 从右 ($x > a$)、左 ($x < a$) 两侧趋向 a 。下面, 我们聊一聊分别从右侧和左侧趋向于 a 有怎样的区别和联系。

图 5. x 分别从左右两侧趋向 a

右极限

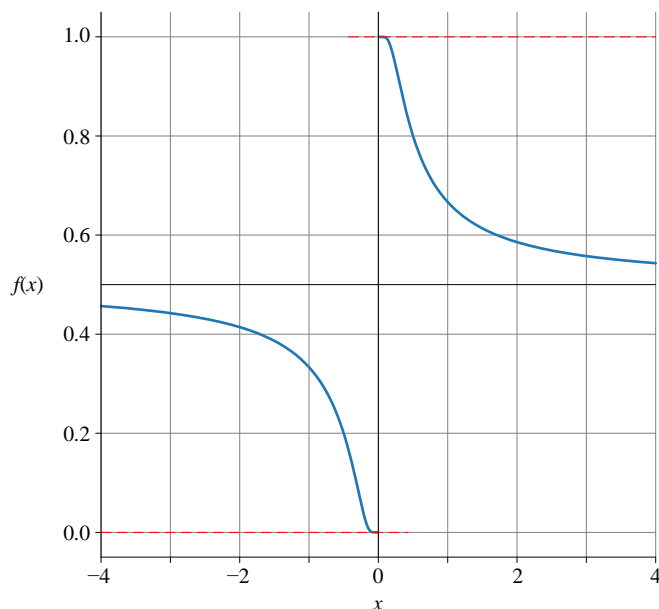
将 (1) 绝对值符号去掉取正得到,

$$0 < x - a < \delta \quad (6)$$

称之为 x 从右侧趋向 a , 记做 $x \rightarrow a^+$ 。

随之, 将 (3) 中极限条件改为 $x \rightarrow a^+$, C 叫做函数 $f(x)$ 的右极限 (right-hand limit 或 right limit), 记做:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = C \quad (7)$$

图 6. 函数 $f(x)$ 左右极限不同

左极限

相反，如果将 (1) 绝对值符号去掉并取负，

$$-\delta < x - a < 0 \quad (8)$$

称之为 x 从左侧趋向 a ，记做 $x \rightarrow a^-$ 。

将 (3) 中极限条件改为 $x \rightarrow a^-$ ， C 叫做函数 $f(x)$ 的左极限 (left-hand limit 或 left limit)，记做：

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = C \quad (9)$$

当 (7) 和 (9) 都成立时，(3) 才成立。也就是，当 $x \rightarrow a$ 时函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是，左右极限均存在且相等。

极限不存在

请大家格外注意，即便左右极限均存在，如果两者不相等，则极限不存在。

如图 6 所示，函数在 $x = 0$ 的右极限为 1：

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{-1/x}} = 1 \quad (10)$$

而函数在 $x = 0$ 的左极限为 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{-1/x}} = 0 \quad (11)$$

显然函数在 $x = 0$ 处不存在极限。此外, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处没有定义。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在可能有三种情况: (a) $f(x)$ 在 $x = a$ 处左右极限不一致; (b) $f(x)$ 在 $x = a$ 处趋向无穷; (c) $f(x)$ 在趋向 $x = a$ 时在两个定值之间震荡。这三种情况分别对应图 7 三幅子图。

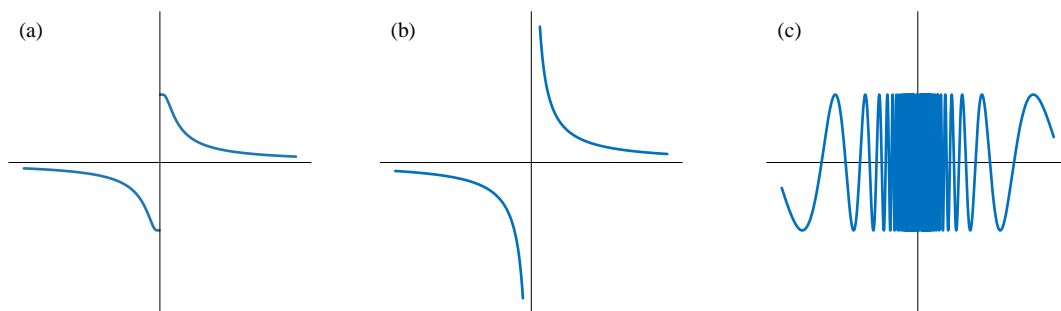


图 7. 极限不存在的三种情况

表 1. 极限的英文表达

数学表达	英文表达
$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) = b$	As delta x approaches 0, the limit for f of x equals b .
$\Delta x \rightarrow 0$	Delta x approaches zero.
$\Delta x \rightarrow 0^+$	Delta x goes to zero from the right. Delta x approaches to zero from the right.
$\Delta x \rightarrow 0^-$	Delta x goes to zero from the left. Delta x approaches to zero from the left.
$\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$	The limit as delta x approaches zero. The limit as delta x tends to zero.
$\lim_{x \rightarrow a^+}$	The limit as x approaches a from the right. The limit as x approaches a from the above.
$\lim_{x \rightarrow a^-}$	The limit as x approaches a from the left. The limit as x approaches a from the below.
$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$	The limit of $f(x)$ as x approaches c is L .
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$	The limit of a sub n as n approaches infinity equals L .
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_1$	the limit of f of x as x approaches negative infinity is capital L sub one.
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_2$	the limit of f of x as x approaches positive infinity is capital L sub two.



Bk3_Ch15_02.py 求函数左右极限, 并绘制图 6。

15.4 几何视角看导数：切线斜率

导数 (derivative) 描述函数在某一点处的变化率。几何角度来看，导数可以视作函数曲线切线斜率。

切线斜率

举个中学物理中的例子，加速度 a 是速度 v 的变化率，速度 v 是距离 s 的变化率。

如图 8 所示，匀速直线运动中，距离函数 $s(t)$ 对于时间 t 是一个一次函数。从图像角度来看， $s(t)$ 是一条斜线。

$s(t)$ 图像的切线斜率不随时间变化，也就是说匀速直线运动的速度函数 $v(t)$ 的图像为常数函数。

而 $v(t)$ 的切线斜率为 0，说明加速度 $a(t)$ 图像为取值为 0 的常数函数。

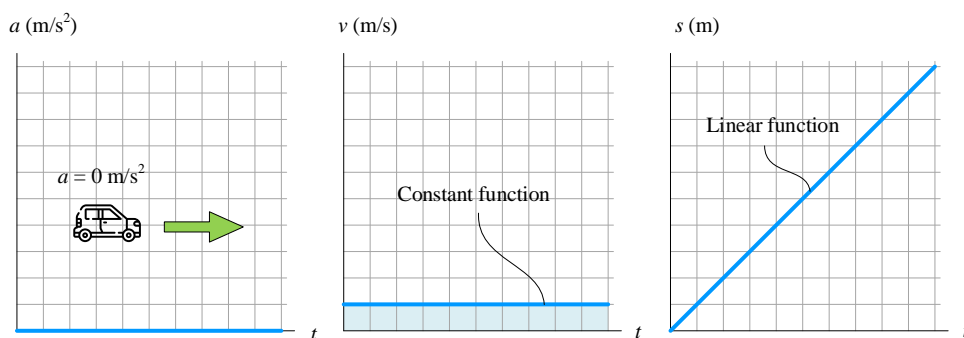


图 8. 匀速直线运动：加速度、速度、距离图像

再看个例子。如图 9 所示，对于匀加速直线运动，距离函数 $s(t)$ 对于时间 t 是一个二次函数。从图像上看， $s(t)$ 在不同时间 t 位置，切线斜率不同。随着 t 增大，切线斜率不断增大，说明运动速度随 t 增大而增大。

完成本章学习后，大家会知道二次函数的导数是一次函数，也就是说速度函数 $v(t)$ 的图像为一次函数。

显然，速度函数 $v(t)$ 的切线斜率不随时间变化。因此， $a(t)$ 图像为常数函数，即加速度为定值。

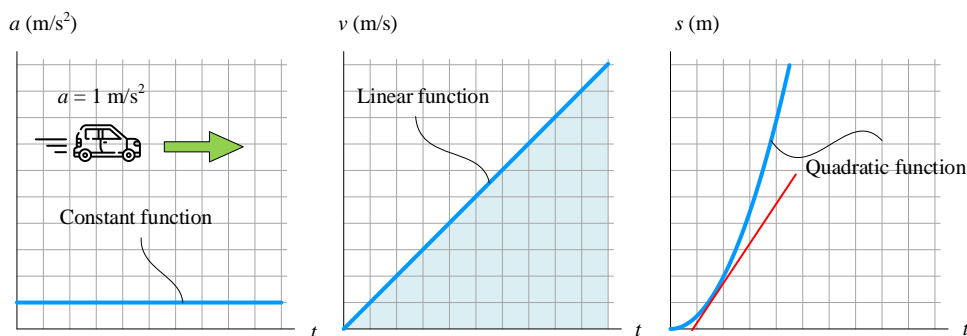


图 9. 匀加速直线运动：加速度、速度、距离

换个角度来看， $a(t)$ 和横轴在一定时间范围，比如 $[t_1, t_2]$ ，内围成的面积就是速度变化 $v_2 - v_1$ 。同理， $v(t)$ 和横轴在 $[t_1, t_2]$ 围成的面积就是距离变化 $s_2 - s_1$ 。完成这个运算的数学工具就是第 18 章要介绍的定积分。简单来说，积分就是求面积、体积。

再从数值单位变化角度，如图 9 三幅子图纵轴所示，加速度的单位为 m/s^2 ，速度的单位为 m/s ，距离的单位是 m 。距离 (m) 随时间 (s) 的变化，单位上就是 m/s ；速度 (m/s) 随时间 (s) 的变化，单位上就是 m/s/s ，即 m/s^2 。

反向来看，加速度 (m/s^2) 到速度 (m/s) 就是求面积的过程。加速度纵轴的单位为 m/s^2 ，而横轴的单位为 s ，因此结果的单位为 $\text{m/s}^2 \times \text{s}$ ，即 m/s 。同理，速度纵轴的单位为 m/s ，横轴单位为 s ，因此结果的单位为 $\text{m/s} \times \text{s}$ ，即 m 。

再次提醒大家，不管是加减乘除，还是微分积分，注意数值单位。

函数导数定义

下面看一下函数导数的确切定义。

对于函数 $y = f(x)$ 自变量 x 在 a 点处一个微小增量 Δx ，会导致函数值增量 $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ 。

当 Δx 趋向于 0 时，函数值增量 Δy 和自变量增量 Δx 比值的极限存在，则称 $y = f(x)$ 在 a 处可导 (function f of x is differentiable at a)。这个极限值便是函数 $f(x)$ 在 a 点处一阶导数值：

$$f'(a) = f'(x)|_{x=a} = \frac{df(x)}{dx}|_{x=a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (12)$$

如图 10 所示，从几何角度看，随着 Δx 不断减小，割线不断接近切线。

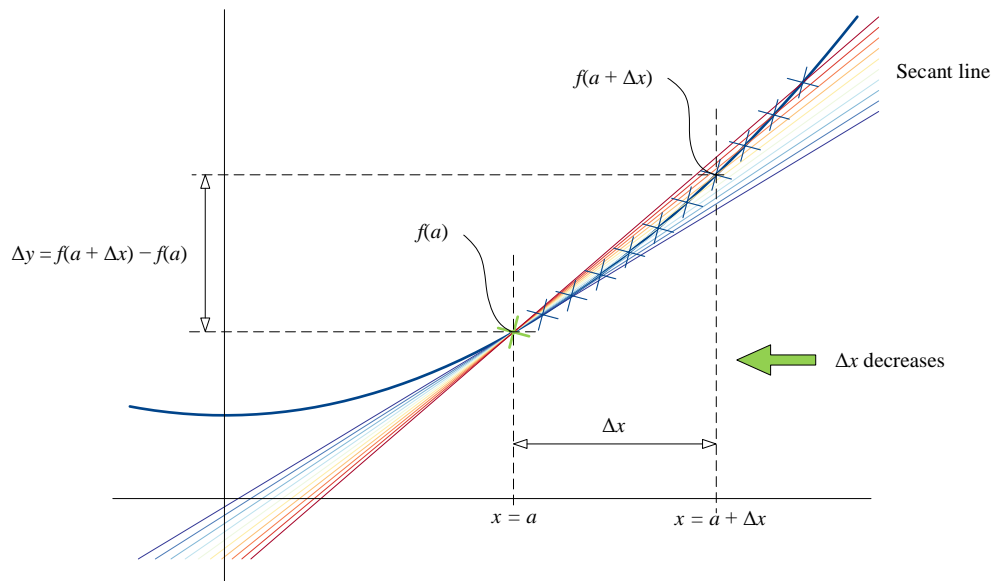
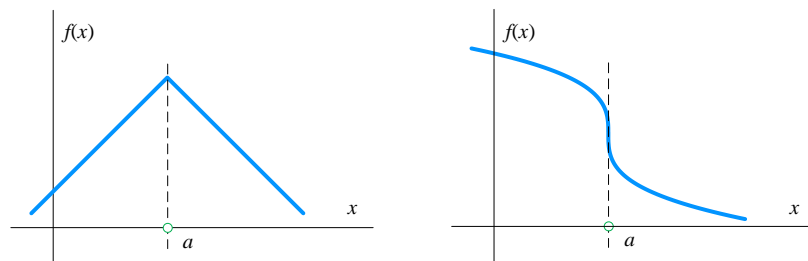


图 10. 导数就是变化率

Δ 和 d 都是“差” (difference) 的含义。但是， Δ 代表近似值，比如 $\Delta x \rightarrow 0$ ；而 d 是精确值，比如 dx 。白话说， dx 是 Δx 趋向于 0 的精确值。

如果函数 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 可导 (differentiable) 则函数在该点处连续 (continuous)；但是，函数在某一点处连续并不意味着函数可导，如图 11 所示两种情况。

图 11. 函数在 $x = a$ 不存在导数的两种情况

再次注意，本书用 x_1 、 x_2 、 x_3 等等表达变量，而不是变量 x 取值。如果有必要对自变量取值进行编号，本书会使用上标记法 $x^{(1)}$ 、 $x^{(2)}$ 、 $x^{(3)}$ 等等。



Bk3_Ch15_03.py 绘制图 10。



在 Bk3_Ch15_03.py 基础上，我们做了一个 App 用来交互在函数曲线不同点如何用割线近似函数切线斜率。请参考 Streamlit_Bk3_Ch15_03.py。

15.5 导数也是函数

导数也常被称作导数函数或导函数，因为导数也是函数。

图 12 所示函数曲线在不同点处切线斜率随着自变量 x 变化。再次强调，函数 $f(x)$ 对自变量 x 的一阶导数 $f'(x)$ 也是一个函数，它的自变量也是 x 。 $f'(x)$ 可以读作 (f prime of x)。

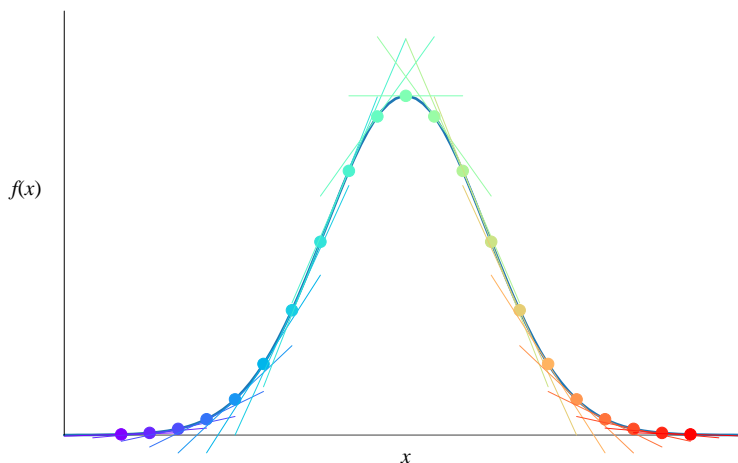


图 12. 函数不同点处切线斜率随着自变量 x 变化

一阶导数

给定二次函数， $f(x) = x^2$ 。下面利用 (12) 推导它的一阶导数：

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x
 \end{aligned} \tag{13}$$

几何角度来看， $f(x) = x^2$ 相当于边长为 x 的正方形面积。图 13 所示为当 x 增加到 $x + \Delta x$ 时，函数值变化对应正方形面积变化。 x 到 $x + \Delta x$ ，正方形面积增加 $2x\Delta x + \Delta x^2$ 。

根据导数定义，函数导数为比值 $(2x\Delta x + \Delta x^2)/\Delta x = 2x + \Delta x$ ；当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，可以消去 Δx 一项。

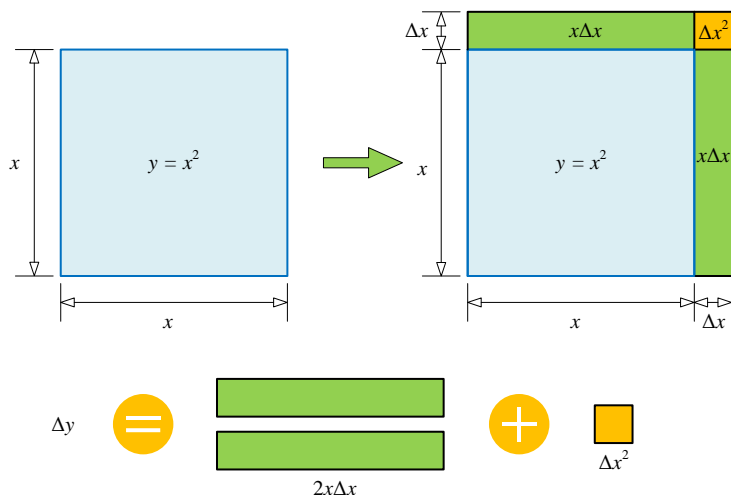


图 13. 几何角度推导 $f(x) = x^2$ 的一阶导数

类似地，推导 $f(x) = x^n$ 的导数， n 为大于 1 的正整数：

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots \Delta x^{n-1}}_{\rightarrow 0} = nx^{n-1}
 \end{aligned} \tag{14}$$

举个例子

图 14 (a) 所示函数如下：

$$f(x) = x^2 + 2 \tag{15}$$

根据前文推导，它的一阶导数解析式如下：

$$f'(x) = 2x \tag{16}$$

如图 14 (b) 所示，(15) 这个二次函数的一阶导数图像为一条斜线。

$x < 0$ 时， x 增大 $f(x)$ 减小，此时函数导数为负。 $x > 0$ ， x 增大 $f(x)$ 增大，函数导数为正。值得注意的是 $x = 0$ ， $f(x)$ 取得**最小值** (minimum)，此处函数 $f(x)$ 导数值为 0。

而对 (16) 再求一阶导数得到的结果是常数函数，具体如所示图 14 (c)。

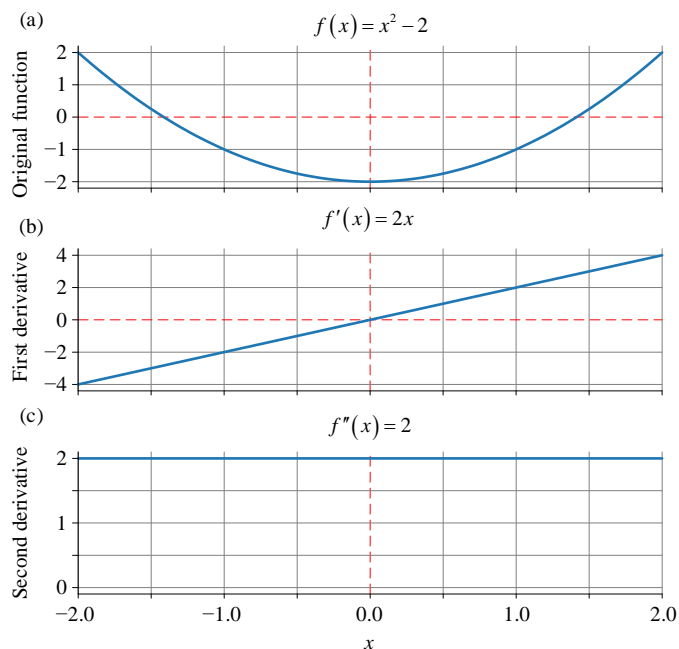
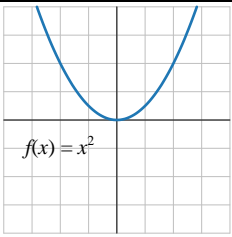
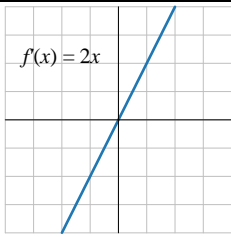
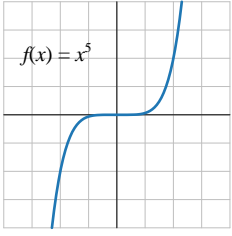
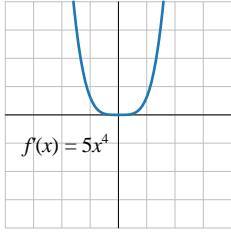
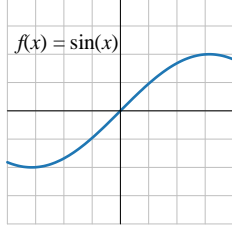
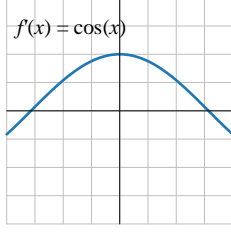
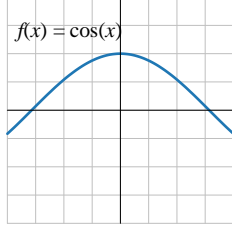
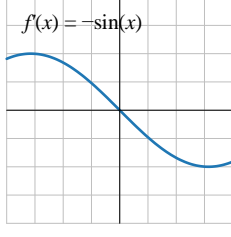
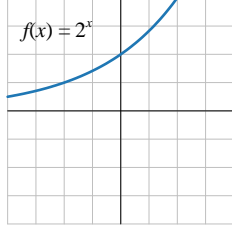
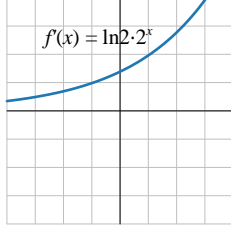
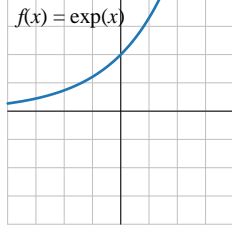
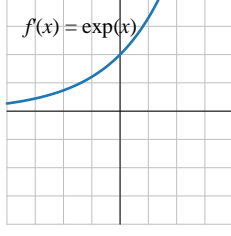


图 14. 二次函数、一阶导数、二阶导数

表 2 总结了常用函数导数及图像，请大家自行绘制这些图像。

表 2. 常用函数导数及图像

函数	函数图像举例	一阶导数	一阶导数图像举例
常数函数 $f(x) = C$		$f'(x) = 0$	
一次函数 $f(x) = ax$		$f'(x) = a$	

二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$		$f'(x) = 2ax + b$	
幂函数 $f(x) = x^p$		$f'(x) = px^{p-1}$	
正弦函数 $f(x) = \sin x$		$f'(x) = \cos x$	
余弦函数 $f(x) = \cos x$		$f'(x) = -\sin x$	
指数函数 $f(x) = b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$		$f'(x) = \ln b \cdot b^x$	
自然指数函数 $f(x) = e^x = \exp(x)$		$f'(x) = e^x = \exp(x)$	

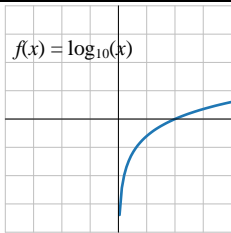
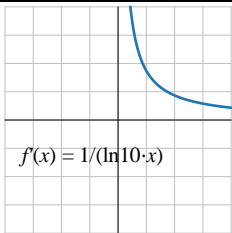
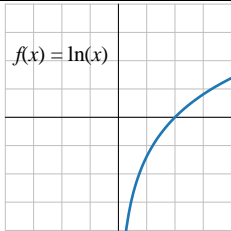
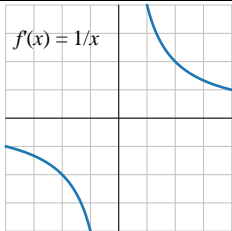
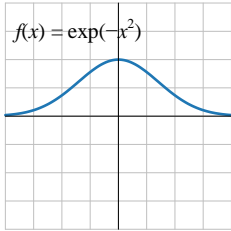
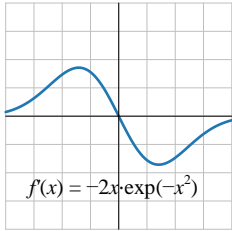
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

对数函数 $f(x) = \log_b x$ $(x > 0, b > 0, b \neq 1)$	 $f(x) = \log_{10}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\ln b \cdot x}$	 $f'(x) = 1/(\ln 10 \cdot x)$
自然对数函数 $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$	 $f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	 $f'(x) = 1/x$
高斯函数 $f(x) = \exp(-x^2)$	 $f(x) = \exp(-x^2)$	$f'(x) = -2x \exp(-x^2)$	 $f'(x) = -2x \cdot \exp(-x^2)$

二阶导数

(15) 这个二次函数的二阶导数是其一阶导数的一阶导数,

$$f''(x) = 2 \quad (17)$$

如图 14 (c) 所示, (15) 这个二次函数的二阶导数图像为一条水平线, 即常数函数。

图 15 所示为, 高斯函数以及其一阶导数和二阶导数函数图像。容易发现, 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最大值, 对应的一阶导数为 0, 二阶导数为负。这一点对于理解一元函数的极值非常重要, 本书第 19 章将深入介绍。

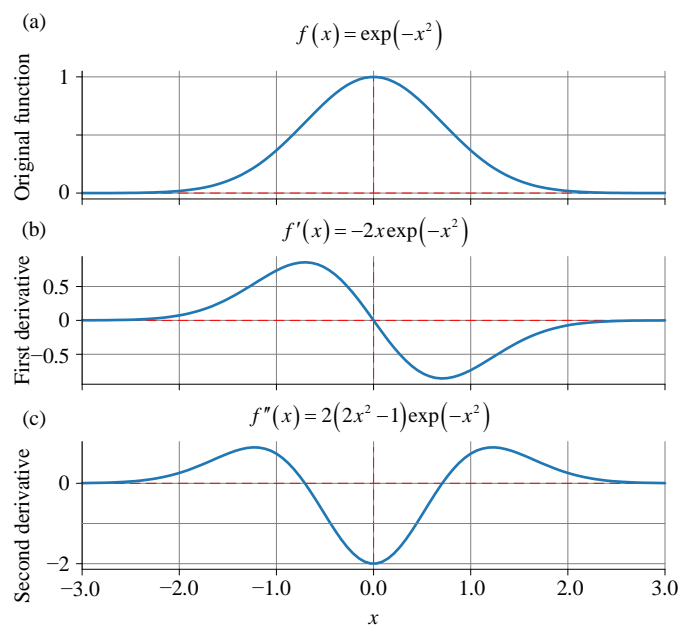


图 15. 高斯函数、一阶导数、二阶导数

图 16 所示为，三次函数图像，以及其一阶导数和二阶导数函数图像。容易发现， $x=0$ 处函数一阶导数为 0；但是， $x=0$ 既对应函数的最大值，也不是最小值。

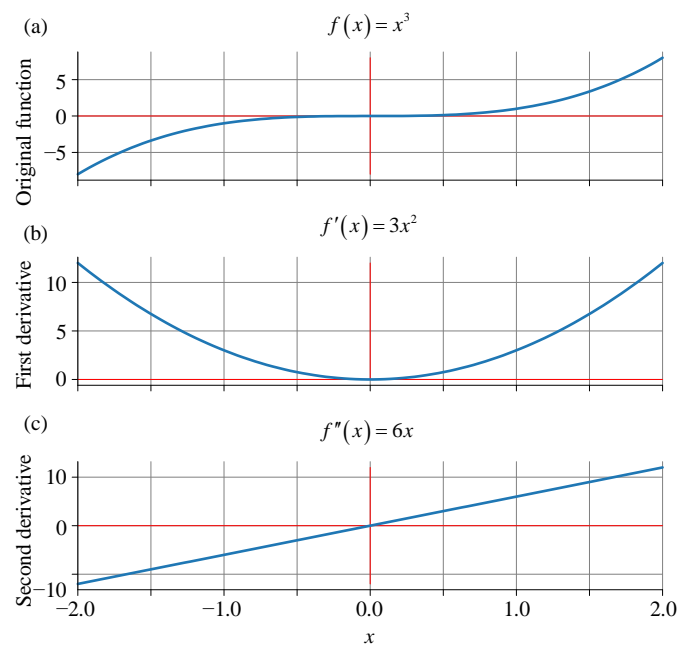


图 16. 三次函数、一阶导数、二阶导数

驻点

有了以上分析，我们可以聊一聊驻点这个概念。

对于一元函数 $f(x)$ ，驻点 (stationary point) 是函数一阶导数为 0 的点。从图像上来看，一元函数 $f(x)$ 在驻点处的切线平行于 x 轴。

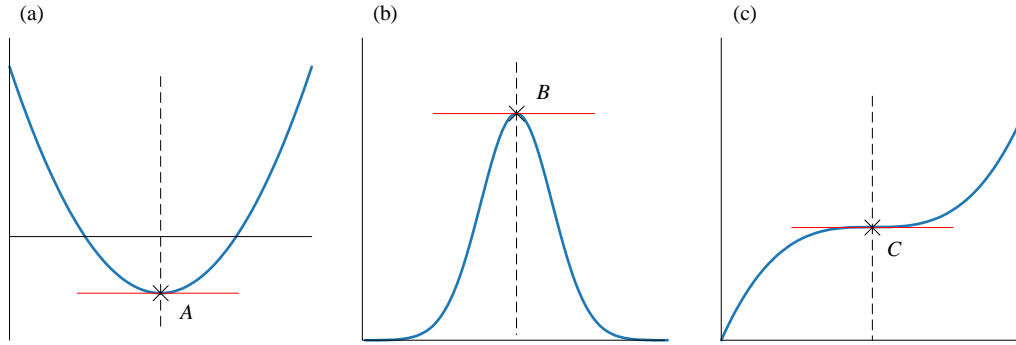


图 17. 驻点可能是极小值、极大值或鞍点

如图 17 所示，驻点可能是一元函数的极小值、极大值、鞍点。注意，这里我们没有用最大值和最小值，这是因为函数可能存在不止一个“山峰”或“山谷”。本书后续将在讲解优化问题时深入探讨这些概念。

表 3. 常用导数法则

和	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
差	$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
积	$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
商	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
倒数	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$

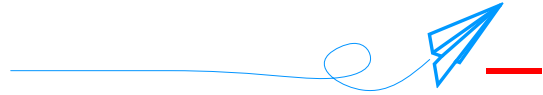
表 4. 导数相关的英文表达

数学表达	英文表达
dy	d y differential of y
$\frac{dy}{dx}$	the derivative of y with respect to x the derivative with respect to x of y d y by d x d y over d x
$df(x)$	The derivative of f of x

$\frac{df(x)}{dx}$	The derivative of f of x with respect to x
$\frac{df(a)}{dx}$	the derivative of f with respect to x at a d y by d x at a d y over d x at a
$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2$	The derivative of x cubed with respect to x equals three x squared.
$\frac{d^2 y}{dx^2}$	d two y by d x squared the second derivative of y with respect to x
$\frac{d^2 x^3}{dx^2} = 6x$	The second derivative of x cubed with respect to x equals to six x .
$\frac{d^n y}{dx^n}$	n th derivative of y with respect to x
$f'(x)$	f dash x f prime of x the derivative of f of x with respect to x the first-order derivative of f with respect to x
$f'(a)$	f prime of a
$f''(x)$	f double-dash x f double prime of x the second derivative of f with respect to x the second-order derivative of f with respect to x
$f'''(x)$	f triple prime of x f triple-dash x f treble-dash x the third derivative of f with respect to x the third-order derivative of f with respect to x
$f^{(4)}(x)$	the fourth derivative of f with respect to x the fourth-order derivative of f with respect to x
$f^{(n)}(x)$	the n th derivative of f with respect to x the n th-order derivative of f with respect to x f to the n th prime of x
$f'(g(x))$	f prime of g of x f prime at g of x
$f'(g(x))g'(x)$	the product of f prime of g of x and g prime of x
$(f(x)g(x))'$	the quantity of f of x times g of x , that quantity prime
$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	f prime of x times g of x , that product plus f of x times g prime of x
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	the quantity f of x over g of x , that quantity prime
$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	the fraction, the numerator is f prime of x times g of x , that product minus f of x times g prime of x , the denominator is g squared of x



Bk3_Ch15_04.py 绘制图 14; 请读者修改代码绘制本节其他图像。本节代码采用 `sympy.abc` import `x` 定义符号变量, 然后利用 `sympy.diff()` 计算一阶导数函数符号式; 利用 `sympy.lambdify()` 将符号式转换成函数。



每个天才的诞生都需要时代、社会、思想的土壤。牛顿之所以成为牛顿，是一代代巨匠层层累土的结果。

牛顿开创经典牛顿力学体系，依次为基础的牛顿机械论自然观让当时人类思想界的面貌天翻地覆，它是人类文明的划时代的里程碑。必须认识到牛顿的力学体系是基于哥白尼、开普勒、伽利略等人知识之上的继承和发展。在牛顿所处的时代，哥白尼的日心说已经深入人心，开普勒提出行星运动三定律，伽利略发现惯性定律和自由落体定律。此外，牛顿之所以能发明微积分，离不开笛卡尔创立的解析几何。

人类知识体系是由一代代学者不断继承发展而丰富壮大的。每一个发现、每一条定理，都是知识体系重要的一环，它们既受深受前辈学者影响，又启迪后世学者。