

## 24

## A Story of OLS Linear Regression

## 鸡兔同笼 2

## 之线性回归风暴



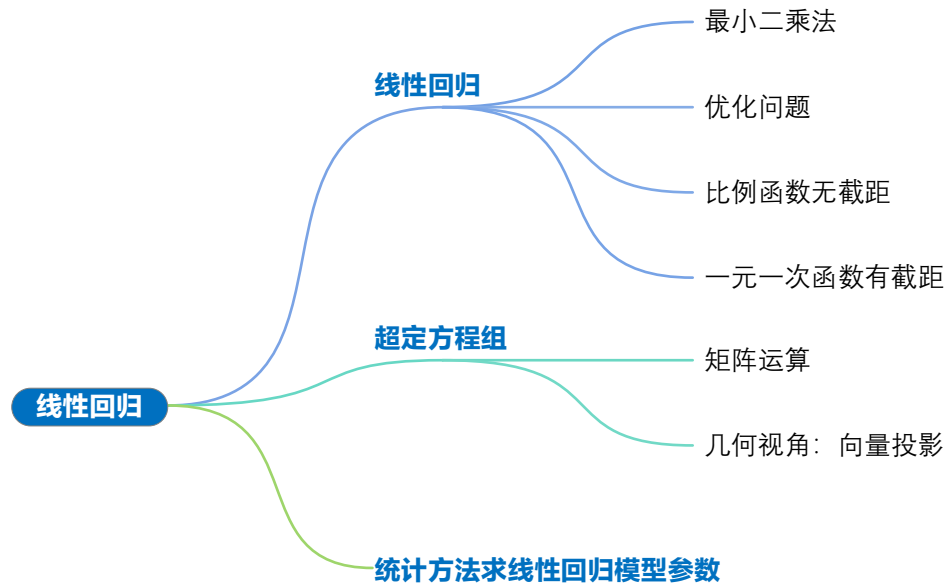
只有带着对数学纯粹的爱去接近她，数学才会向你展开它的神秘所在。

*Mathematics reveals its secrets only to those who approach it with pure love, for its own beauty.*

—— 阿基米德 (Archimedes) | 古希腊数学家、物理学家 | 287 ~ 212 BC



- ◀ matplotlib.pyplot.contour() 绘制等高线图
- ◀ matplotlib.pyplot.scatter() 绘制散点图
- ◀ numpy.array() 创建 array 数据类型
- ◀ numpy.linalg.inv() 矩阵求逆
- ◀ numpy.linalg.solve() 求解线性方程组
- ◀ numpy.linspace() 产生连续均匀向量数值
- ◀ numpy.meshgrid() 创建网格化数据
- ◀ numpy.random.randint() 产生随机整数
- ◀ numpy.random.seed() 设定初始化随机状态
- ◀ plot\_wireframe() 绘制三维单色线框图
- ◀ seaborn.scatterplot() 绘制散点图
- ◀ sympy.abc 引入符号变量
- ◀ sympy.diff() 求解符号导数和偏导解析式
- ◀ sympy.evalf() 将符号解析式中未知量替换为具体数值
- ◀ sympy.simplify() 简化代数式
- ◀ sympy.solvers.solve() 符号方程求根
- ◀ sympy.symbols() 定义符号变量
- ◀ sympy.utilities.lambdify.lambdify() 将符号代数式转化为函数



## 24.1 鸡兔数量的有趣关系

清江一曲抱村流，长夏江村事事幽。

舶来的线性代数知识悄悄地改变着小村，村民们凡事都要用这个数学工具探究一番。

大家这次盯上了一个养鸡养兔的小妙招。老人常言“两鸡一兔，百毒不入”。也就是说，不管最开始养多少鸡兔，当鸡兔大概达到 2:1 这个比例，便达到某种神奇的平衡，鸡兔都健健康康。

农夫决定一探究竟，他搜集村中 20 户养鸡大户的鸡兔数量，总结在表 1。

表 1. 20 户农户鸡兔数量关系

养鸡数量, $y$	32	110	71	79	45	20	56	55	87	68	87	63	31	88	44	33	57	16	22	52
养兔数量, $x$	22	53	39	40	25	15	34	34	52	41	43	33	24	52	20	18	33	12	11	28

将表 1 数据以散点方式绘制在方格纸上得到图 1。老农隐隐觉得这个 2:1 的比例关系好像的确存在。

但是，农夫并不满足于此，他想找到鸡兔达到平衡时确切的数学关系。于是乎，他想到了比例函数和一元函数，决心探究一番。

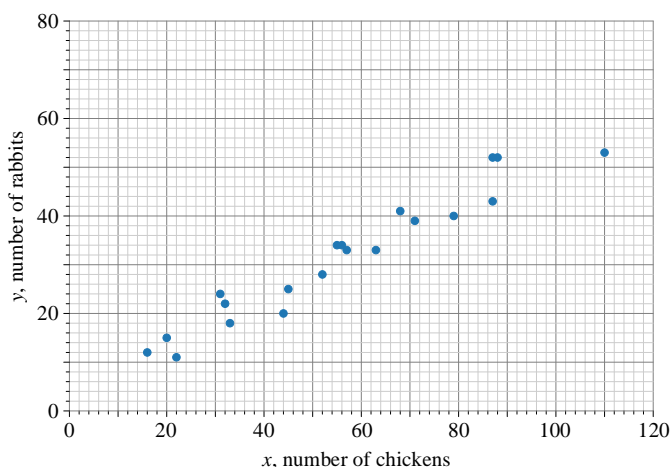


图 1. 平衡时，各家鸡兔数量关系

## 24.2 试试比例函数： $y = ax$

观察图 1，农夫首先想到用比例函数。

比例函数假设平衡时鸡兔数量似乎呈现某种比例关系：

$$\hat{y} = ax \quad (1)$$

其中， $a$  为比例系数。为了区分数据  $y$ ， $\hat{y}$  上加了个帽子表示预测。

农夫在方格纸上，用红笔画出一系列通过原点的斜线，得到图 2。

老农先是觉得  $a$  取 0.5 比较好，但是又觉得  $a$  取 0.6 也不差。他隐约觉得  $a$  应该在 0.5 和 0.6 之间。

如何找到合理的  $a$  值？

这个问题让他陷入了沉思。显然，他需要找到一条红线足够靠近图 2 所有散点。那么，问题来了——如何量化“足够靠近”？

他决定先找几个值试试看。

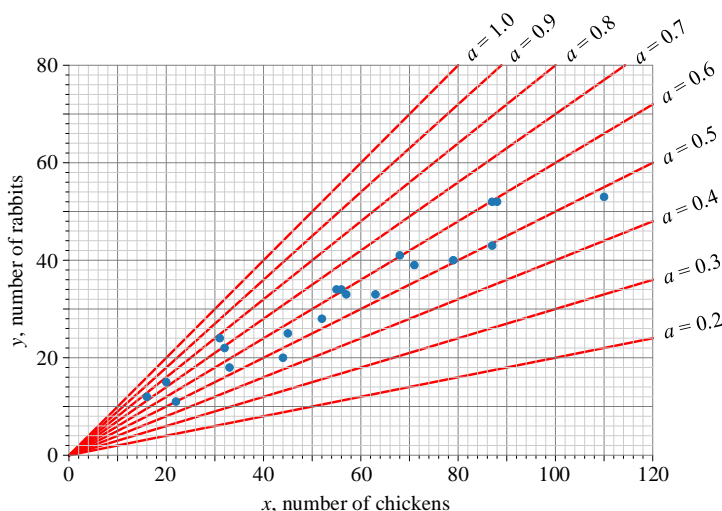


图 2. 平衡时，各家鸡兔数量好像呈现某种比例关系

### $a = 0.4$

农夫先试了比例值  $a = 0.4$ ，这时比例函数为：

$$\hat{y} = 0.4x \quad (2)$$

将  $x = 110$  (鸡的数量) 代入 (2)，得到 44 (兔的数量) 这个预测值。

$$\hat{y}|_{x=110} = 0.4 \times 110 = 44 \quad (3)$$

当  $x = 110$  时，真实值  $y$  和预测值  $\hat{y}$  两者的误差  $e$  为：

$$e|_{x=100} = y - \hat{y} = 53 - 44 = 9 \quad (4)$$

农夫觉得从这个误差值入手，可能会找到合适的  $a$  值，并确定一条合理的比例函数。

于是乎，农夫开始计算  $\hat{y} = 0.4x$  这个比例函数条件下图 1 中每个点的误差值。

最后，他得到图 3。图中，竖直黄色线段代表实际数据和比例函数估值之间的误差，也就是不同  $x$  对应的  $e$ 。

农夫翻阅舶来的数学典籍，发现了**最小二乘法** (Least Squares 或 Least Squares Estimator)。仔细研读后，他决定拿来一试。

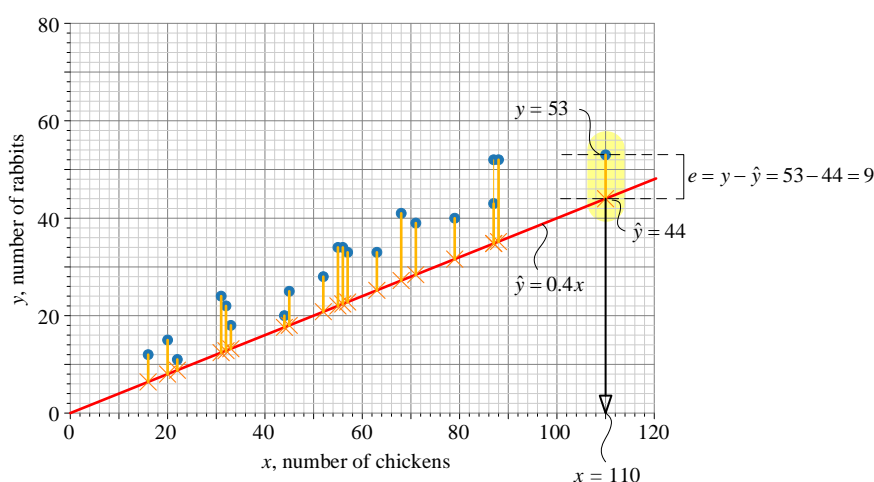


图 3.  $a = 0.4$  时，实际数据和比例函数估值之间的误差

## 24.3 最小二乘法

书上写道：“最小二乘法通过最小化误差的平方和，寻找数据的最佳回归参数匹配。”

### 误差平方和最小化

农夫已经得到了一系列  $e$  值，只需要对  $e$  平方！

他把计算得到的分步数据记录在表 2 中。表第一、二行数值分别为鸡、兔实际数量，第三行为  $\hat{y} = 0.4x$  估算得到的兔子数量，第四行为误差  $e = y - \hat{y}$ ，即实际兔数减去估算兔数，第五行为误差的平方值  $e^2$ 。

表 2 第五行  $e^2$  求和得到误差平方和为 1756.28。

表 2.  $a$  取 0.4 时, 估计值、误差、误差平方

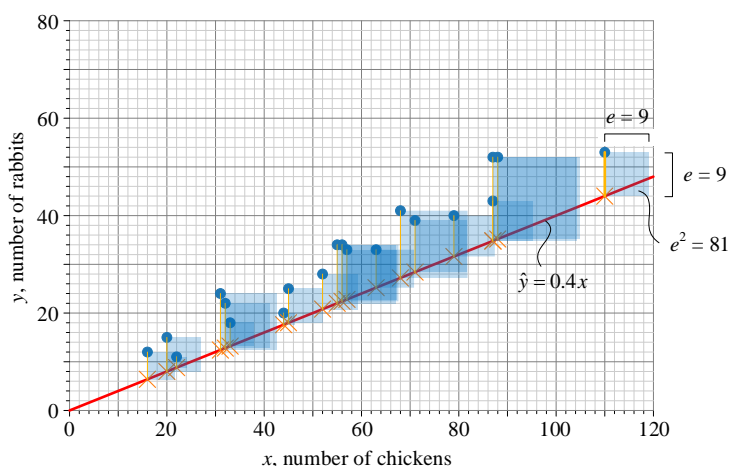
养鸡数量 $x$	32	110	71	79	45	20	56	55	87	68	87	63	31	88
养兔数量 $y$	22	53	39	40	25	15	34	34	52	41	43	33	24	52
$\hat{y} = 0.4x$ 估算兔数	12.8	44	28.4	31.6	18	8	22.4	22	34.8	27.2	34.8	25.2	12.4	35.2
误差 $e$	9.2	9	10.6	8.4	7	7	11.6	12	17.2	13.8	8.2	7.8	11.6	16.8
误差平方 $e^2$	84.6	81	112.3	70.5	49	49	134.5	144	295.8	190.4	67.2	60.8	134.5	282.2

农夫突然意识到,  $e^2$  不就是以  $e$  的绝对值为边长的正方形面积嘛! 真是“行到水穷处, 坐看云起时。”

有了这个几何视角, 他绘制得到了图 4。图 4 中所有的正方形的边长为不同  $x$  位置的误差  $e$  绝对值。将这些蓝色正方形面积相加得到面积和, 即误差之和:

$$\sum_{i=1}^{20} (e^{(i)})^2 = \sum_{i=1}^{20} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^2 = \sum_{i=1}^{20} (y^{(i)} - ax^{(i)})^2 \quad (5)$$

找到让上式值最小的  $a$ , 就可以让图 4 中正方形面积之和最小。

图 4.  $a = 0.4$  时, 可视化误差平方

## $a = 0.5$

他决定再试几个值, 比如  $a = 0.5$  时, 比例函数为:

$$\hat{y} = 0.5x \quad (6)$$

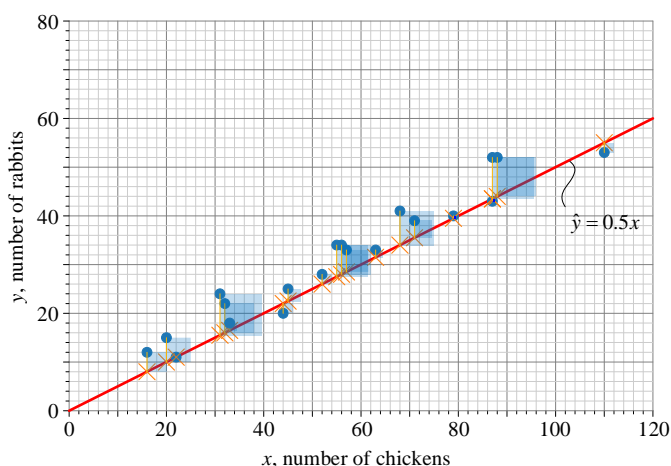
表 3 给出  $a$  取 0.5 时, 不同  $x$  对应的估计值  $\hat{y}$ 、误差  $e$ 、误差平方  $e^2$ 。

经过计算可以发现 (6) 这个比例函数模型条件下, 误差平方和为 422。

几何角度来看, 图 5 中的正方形面积之和看上去确实比图 4 要小。

表 3.  $a$  取 0.5 时, 估计值、误差、误差平方

养鸡数量 $x$	32	110	71	79	45	20	56	55	87	68	87	63	31	88
养兔数量 $y$	22	53	39	40	25	15	34	34	52	41	43	33	24	52
$\hat{y} = 0.5x$ 估算兔数	16	55	35.5	39.5	22.5	10	28	27.5	43.5	34	43.5	31.5	15.5	44
误差 $e$	6	-2	3.5	0.5	2.5	5	6	6.5	8.5	7	-0.5	1.5	8.5	8
误差平方 $e^2$	36	4	12.25	0.25	6.25	25	36	42.25	72.25	49	0.25	2.25	72.25	64

图 5.  $a = 0.5$  时, 可视化误差平方 **$a = 0.6$** 

农夫又试了试  $a = 0.6$ , 比例函数为:

$$\hat{y} = 0.6x \quad (7)$$

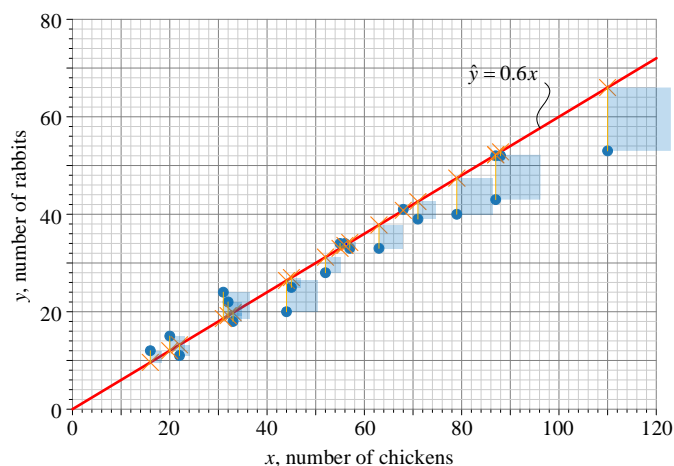
经过表 4 计算求得误差平方和为 396.28。图 6 可视化误差平方和。

农夫感觉到, 似乎在 0.5 和 0.6 之间存在一个更好的  $a$ , 能够让误差平方和最小。

但是, 这样徒手计算, 一个一个值算, 终究不是办法。

表 4.  $a$  取 0.6 时, 估计值、误差、误差平方

养鸡数量 $x$	32	110	71	79	45	20	56	55	87	68	87	63	31	88
养兔数量 $y$	22	53	39	40	25	15	34	34	52	41	43	33	24	52
$\hat{y} = 0.6x$ 估算兔数	19.2	66	42.6	47.4	27	12	33.6	33	52.2	40.8	52.2	37.8	18.6	52.8
误差 $e$	2.8	-13	-3.6	-7.4	-2	3	0.4	1	-0.2	0.2	-9.2	-4.8	5.4	-0.8
误差平方 $e^2$	7.84	169	12.96	54.76	4	9	0.16	1	0.04	0.04	84.64	23.04	29.16	0.64

图 6.  $a = 0.6$  时，可视化误差平方

### 目标函数

观察 (5)，他发现  $x^{(i)}$  和  $y^{(i)}$  都是给定数值，而式中唯一的变量就是  $a$ 。也就是说，把  $a$  看做一个未知数，(5) 可以写成一个函数  $f(a)$ ：

$$f(a) = \sum_{i=1}^{20} (y^{(i)} - ax^{(i)})^2 \quad (8)$$

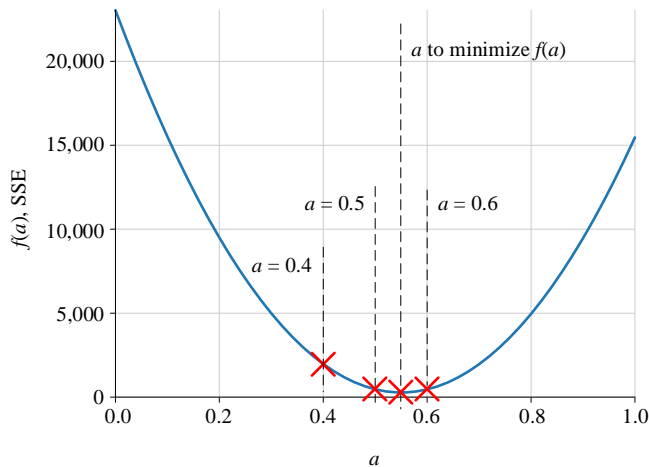
而最小化误差对应的就是让上述函数值取得最小值！农夫想到这里，高兴地不住拍手。

农夫把所有的  $x^{(i)}$  和  $y^{(i)}$  代入上式，整理并得到函数具体解析式：

$$f(a) = 65428a^2 - 72228a + 20179 \quad (9)$$

他惊奇地发现，竟然得到了一元二次函数！这个函数，我懂啊！

如图 7 所示，这个一元二次函数的图像是一条开口朝上的抛物线，具有凸性。显然，函数在对称轴处取得最小值。而 (9) 这个一元二次函数就是优化问题中的目标函数，优化变量为  $a$ 。

图 7. 函数  $f(a)$  图像



## 解析法求解优化问题

利用导数这个数学工具，对  $f(a)$  求一阶导数，得到  $f'(a)$ ：

$$f'(a) = 130856a - 72228 \quad (10)$$

$f'(a) = 0$  得到  $f(a)$  取得最小值时  $a$  的值，记做  $a^*$ ：

$$a^* = \frac{18057}{32714} \approx 0.552 \quad (11)$$

这个  $a^*$  就是农夫要找的最佳  $a$  值，它让误差平方和最小。

此时，对应的最优比例函数为：

$$\hat{y} = 0.552x \quad (12)$$

## 带回检验

农夫决定用“土办法”再算算  $a^*$  对应的估计值、误差、误差平方这几个数值，他得到表 5。

此时，误差平方和为 245.32，明显小于  $a = 0.5$  或  $a = 0.6$  这两种情况。

他不忘绘制图 6，看看正方形的面积到底怎样。

表 5.  $a$  取 0.5504 时，估计值、误差、误差平方

养鸡数量 $x$	32	110	71	79	45	20	56	55	87	68	87	63	31	88
养兔数量 $y$	22	53	39	40	25	15	34	34	52	41	43	33	24	52
$\hat{y} = 0.5504x$ 估算兔数	17.6	60.5	39.1	43.5	24.8	11.0	30.8	30.3	47.9	37.4	47.9	34.7	17.1	48.4
误差 $e$	4.4	-7.5	-0.1	-3.5	0.2	4.0	3.2	3.7	4.1	3.6	-4.9	-1.7	6.9	3.6
误差平方 $e^2$	19.2	56.9	0.0	12.1	0.1	15.9	10.1	13.9	16.9	12.8	23.9	2.8	48.1	12.7

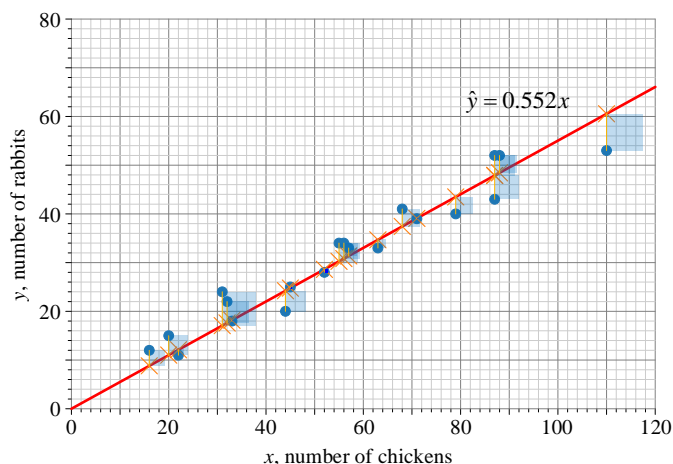


图 8.  $a = 0.552$  时，可视化误差平方

农夫如获至宝，不住地说“最小二乘法，好！真好！”。

他回过头再次翻阅数学典籍，又仔仔细细把最小二乘方法反复研读几遍。兴奋之余，他想让自己的数学模型再复杂一点，决定试试一元一次函数。



Bk3\_Ch24\_1.py 绘制本节图像，并求解最优化问题。

## 24.4 再试试一次函数： $y = ax + b$

农夫知道，比例函数通过原点，也就是纵轴截距为 0。而一元函数则没有这个限制。

他决定试一下如下这个一元函数，看看是否有更好的结果：

$$\hat{y} = ax + b \quad (13)$$

这个一元函数对应的误差平方和为：

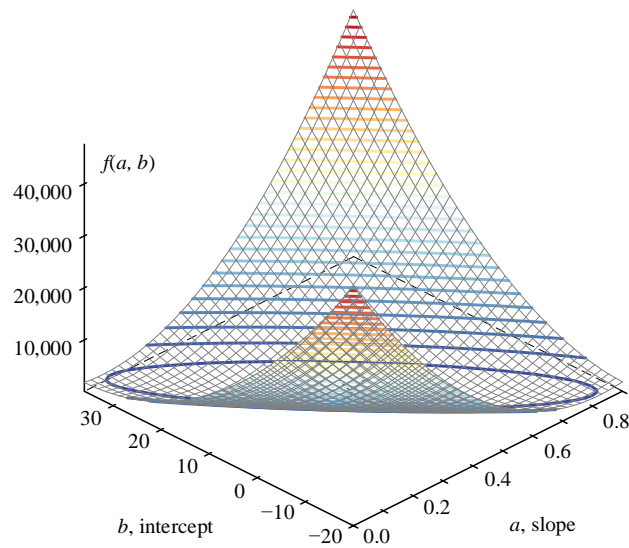
$$\sum_{i=1}^{20} (e^{(i)})^2 = \sum_{i=1}^{20} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^2 = \sum_{i=1}^{20} (y^{(i)} - ax^{(i)} - b)^2 \quad (14)$$

式中， $x^{(i)}$  和  $y^{(i)}$  都是给定的样本数据。也就是说，上式有两个自变量，有两个需要优化的参数  $a$ 、 $b$ 。

农夫还是决定暴力求解一番，将  $x^{(i)}$  和  $y^{(i)}$  代入 (14)，整理并得到二元函数  $f(a, b)$  解析式：

$$f(a, b) = 65428a^2 + 1784ab - 72228a + 14b^2 - 1014b + 20179 \quad (15)$$

这不就是二元二次函数，我也懂啊！几何角度不就是个开口朝上的旋转椭圆面嘛！农夫再次惊叹数学的精妙！

图 9. 误差平方和  $f(a, b)$  随  $a$ 、 $b$  变化构造的开口向上抛物曲面

### 用偏导求极值点

计算  $f(a, b)$  最小值极值点处，利用  $f(a, b)$  对  $a$ 、 $b$  求偏导为 0 为条件，构造两个等式：

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} = 130856a + 1784b - 72228 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} = 1784a + 28b - 1014 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

联立等式，求得最优解：

$$\begin{cases} a^* = \frac{513}{1157} \approx 0.4434 \\ b^* = \frac{18429}{2314} \approx 7.9641 \end{cases} \quad (17)$$

图 10 告诉我们这个最优解就在旋转椭圆中心位置。农夫看着图 10，嘴里叨叨着“椭圆真是个好东西！哪都离不开它！”

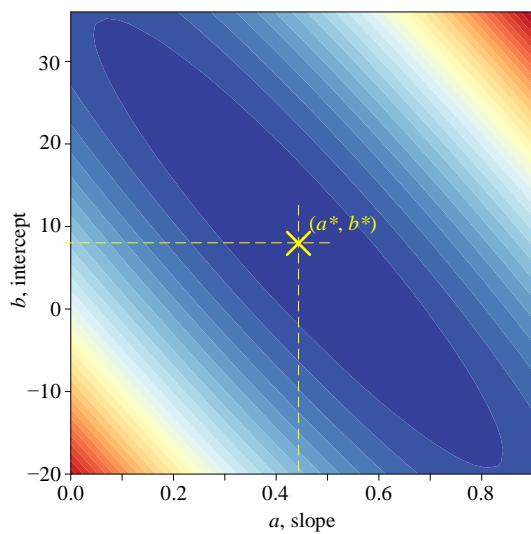


图 10.  $f(a, b)$  平面等高线 and 最优解位置

(17) 对应的一次函数：

$$\hat{y} = 0.4434x + 7.9641$$

(18)

这就是农夫要找的最佳一次函数！

带回检验

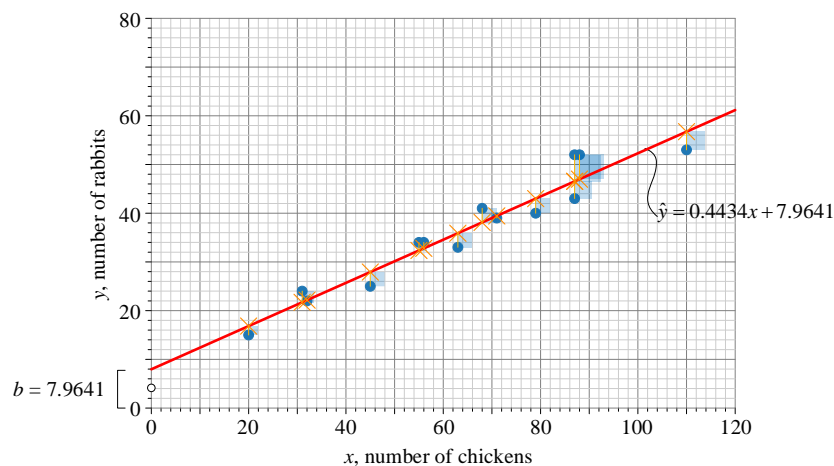
农夫还是想用“土办法”再验算一遍！

他用 (18) 一步步仔细运算，并将分步结果记录在表 6 中。农夫最终求得误差平方和为 128.67，这比之前比例函数对应的误差平方和还要小。

他不怕麻烦，又画了图 11。图中，一次函数的截距为正。

表 6.  $a = 0.4434$ 、 $b = 7.9641$  时，估计值、误差、误差平方

养鸡数量 $x$	32	110	71	79	45	20	56	55	87	68	87	63	31	88
养兔数量 $y$	22	53	39	40	25	15	34	34	52	41	43	33	24	52
$\hat{y} = 0.4863x + 4.312$	19.9	57.8	38.8	42.7	26.2	14.0	31.5	31.1	46.6	37.4	46.6	34.9	19.4	47.1
误差 $e$	2.1	-4.8	0.2	-2.7	-1.2	1.0	2.5	2.9	5.4	3.6	-3.6	-1.9	4.6	4.9
误差平方 $e^2$	4.5	23.1	0.0	7.5	1.4	0.9	6.0	8.7	28.9	13.1	13.1	3.8	21.3	23.9

图 11.  $a = 0.4434$ 、 $b = 7.9641$  时，可视化误差平方

Bk3\_Ch24\_2.py 绘制本节图像，并求解优化问题。



在 Bk3\_Ch24\_2.py 基础上，我们做了一个 App，大家可以输入不同的一次函数  $a$  和  $b$  两个参数，绘制直线并和线性回归直线比较误差结果。请参考 Streamlit\_Bk3\_Ch24\_2.py。

## 24.5 再探黄鼠狼惊魂夜：超定方程组

突然间，一道灵光闪过！

农夫回想，那夜黄鼠狼来偷鸡抓兔，邻居甲、乙、丙、丁四人数头数、脚数时，为了估算鸡兔数量，他采用的舶来线性代数典籍中的超定方程组的求解方法。

回过头来看自己手中的线性回归问题，“这不也是一个超定方程组吗？！”

### 比例函数

他立刻摊开纸，把表 1 数据写成列向量形式：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 32 \\ 110 \\ \vdots \\ 52 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 22 \\ 53 \\ \vdots \\ 28 \end{bmatrix} \quad (19)$$

农夫将比例函数模型写成：

$$\mathbf{y} = a\mathbf{x} \quad (20)$$

即

$$\underset{\mathbf{y}}{\begin{bmatrix} 22 \\ 53 \\ \vdots \\ 28 \end{bmatrix}} = a \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} 32 \\ 110 \\ \vdots \\ 52 \end{bmatrix}} \quad (21)$$

只有一个未知数  $a$ ，但是方程组有 20 个方程，这显然也是一个超定方程组！

农夫顿时兴奋起来，他用黄鼠狼惊魂夜一模一样的方法求解：

$$a = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad (22)$$

实际上， $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$  是一个  $1 \times 1$  矩阵，也就是一个数字，即标量。它的逆就是  $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$  这个数字的倒数。

将  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  具体数值代入 (22)，得到：

$$a = \left( \begin{bmatrix} 32 \\ 110 \\ \vdots \\ 52 \end{bmatrix}^T @ \begin{bmatrix} 32 \\ 110 \\ \vdots \\ 52 \end{bmatrix} \right)^{-1} @ \begin{bmatrix} 32 \\ 110 \\ \vdots \\ 52 \end{bmatrix}^T @ \begin{bmatrix} 22 \\ 53 \\ \vdots \\ 28 \end{bmatrix} = 0.552 \quad (23)$$

农夫惊呼，“得来全不费工夫啊！”这个结果和他用最小二乘法得到结果完全一致。

## 一元函数

灵光再现，他立刻疾步多取回些纸笔，将一元函数这个模型也写成矩阵形式：

$$\underset{\mathbf{y}}{\begin{bmatrix} 22 \\ 53 \\ \vdots \\ 28 \end{bmatrix}} = a \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} 32 \\ 110 \\ \vdots \\ 52 \end{bmatrix}} + b \underset{\mathbf{I}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (24)$$

即，

$$\hat{\mathbf{y}} = a\mathbf{x} + b\mathbf{I} \quad (25)$$

$I$  叫做全 1 列向量。

只有二个未知数  $a$ 、 $b$ ，但是方程组有 20 个方程，这明显也是一个超定方程组。

将 (25) 写成：

$$\hat{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & x \end{bmatrix}}_X \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad (26)$$

令，

$$X = \begin{bmatrix} I & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 32 \\ 1 & 110 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 52 \end{bmatrix} \quad (27)$$

(26) 则写成：

$$\hat{y} = X \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \quad (28)$$

求解超定方程组，得到：

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (29)$$

将  $X$  和  $y$  具体数值代入 (29)，得到：

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 32 \\ 1 & 110 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 52 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 32 \\ 1 & 110 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 52 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 32 \\ 1 & 110 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 52 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 22 \\ 53 \\ \vdots \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 892 \\ 892 & 65428 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 507 \\ 36114 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.9641 \\ 0.4434 \end{bmatrix} \quad (30)$$

## 几何视角

农夫知道，凡是有向量的地方，就有几何！

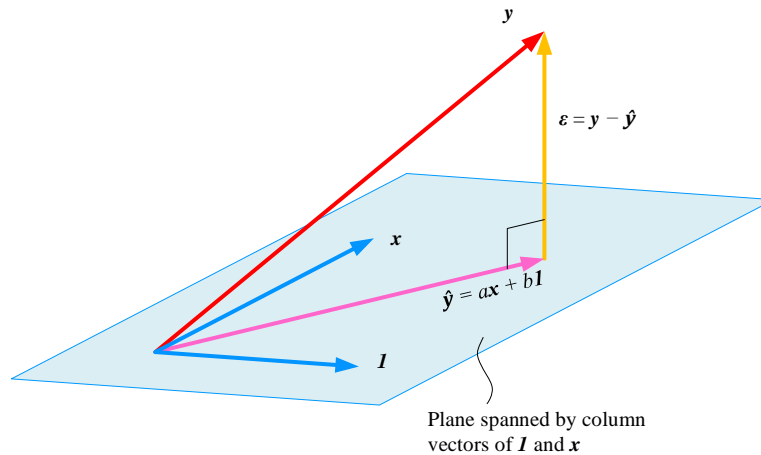


图 12. 几何角度解释一元最小二乘结果，二维平面

上述解法肯定可以通过几何角度解释。如图 12 所示，将  $y$  向量向  $x$  和  $1$  张成的平面  $H$  投影，得到结果为向量  $\hat{y}$ ；而误差  $\epsilon$  可以写成：

$$\epsilon = y - \hat{y} = y - (ax + b1) \quad (31)$$

误差  $\epsilon$  显然垂直于  $H$ ，即  $\epsilon$  分别垂直  $1$  和  $x$ 。

也就是说：

$$\begin{aligned} \epsilon \perp 1 &\Rightarrow 1^T \epsilon = 0 \Rightarrow 1^T (y - (ax + b1)) = 0 \\ \epsilon \perp x &\Rightarrow x^T \epsilon = 0 \Rightarrow x^T (y - (ax + b1)) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

以上两式合并：

$$\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}^T \left( y - X \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (33)$$

整理得到：

$$X^T X \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = X^T y \quad (34)$$

等式左右分别左边乘以  $X^T X$  的逆，不就得到 (29) 嘛！

“嗟夫！我的神仙姑奶奶！”，这个结果让农夫惊呆了半晌。

## 带回检验

醒过神来，他把比例函数和一次函数对应的图像都画在一幅图上，如图 13。

“朝闻道夕死可矣！”



线性代数的魅力让农夫彻底折服。

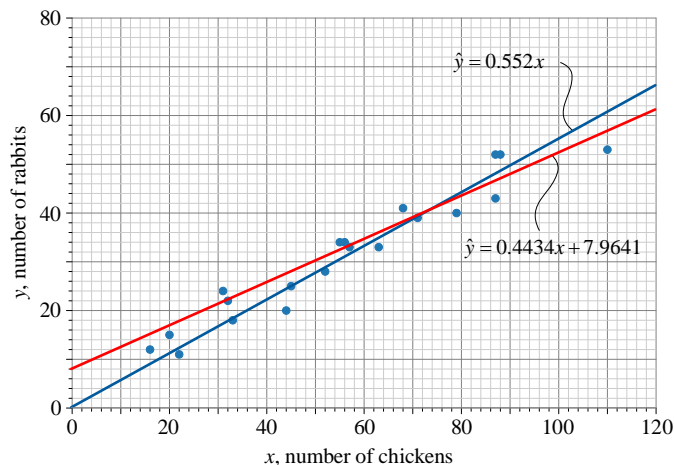


图 13. 比较比例模型和线性模型



Bk3\_Ch24\_3.py 求解本节优化问题，并绘制图 13。

## 24.6 统计方法求解回归参数

突然间，农夫想起前几日在一本叫做《概率统计》的数学典籍中一个有趣的公式，它赶忙取来典籍，找到如下这个公式：

$$y = \rho_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X) + \mu_Y = \underbrace{\rho_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}}_a x + \underbrace{\left( -\rho_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \mu_X + \mu_Y \right)}_b \quad (35)$$

其中， $\mu_X$  为  $X$  均值， $\mu_Y$  为  $Y$  均值； $\sigma_X$  为  $X$  的标准差， $\sigma_Y$  为  $Y$  的标准差； $\rho_{X,Y}$  为  $X$  和  $Y$  的相关性系数。

农夫意识到，从统计角度，也可以用 (35) 计算一元一次线性回归模型。

他赶紧利用表 1 数据计算得到均值、标准差和相关性系数等值：

$$\begin{cases} \mu_X = 63.714 \\ \mu_Y = 36.214 \end{cases}, \begin{cases} \sigma_X = 25.712 \\ \sigma_Y = 11.826 \end{cases}, \rho_{X,Y} = 0.96397 \quad (36)$$

这样可以计算得到参数  $a$  和  $b$ ：

$$\begin{aligned}
 a &= \rho_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = 0.96397 \times \frac{11.826}{25.712} = 0.4434 \\
 b &= -\rho_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \mu_X + \mu_Y = -0.96397 \times \frac{11.826}{25.712} \times 63.714 + 36.214 = 7.9641
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

这和前面的几种方法结果完全吻合！农夫顿悟，原来最小二乘法线性回归是几何、向量、优化、概率统计的完美合体！

他不忘绘制图 14 这幅图，农夫发现图中回归直线通过  $(\mu_X, \mu_Y)$  这点。在《概率统计》这本书上，农夫又发现了图 15 这幅图。据书上所讲，图中椭圆和**二元高斯分布** (bivariate Gaussian distribution)、**条件概率** (conditional probability) 都有密切关系。农夫感慨，“书山有路啊，学海无涯啊！”

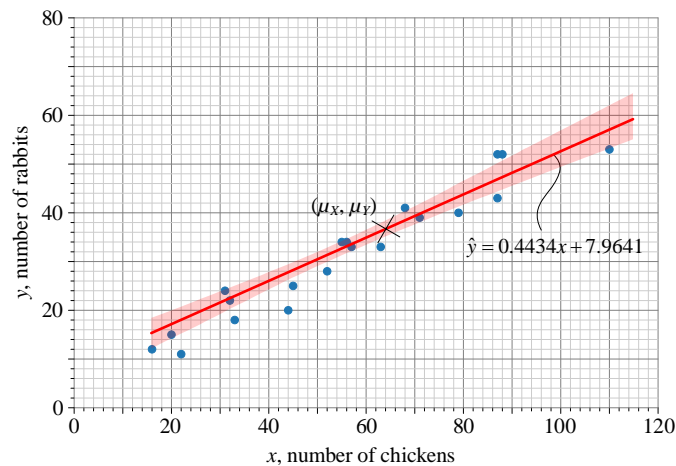


图 14. 利用统计方法获得线性模型

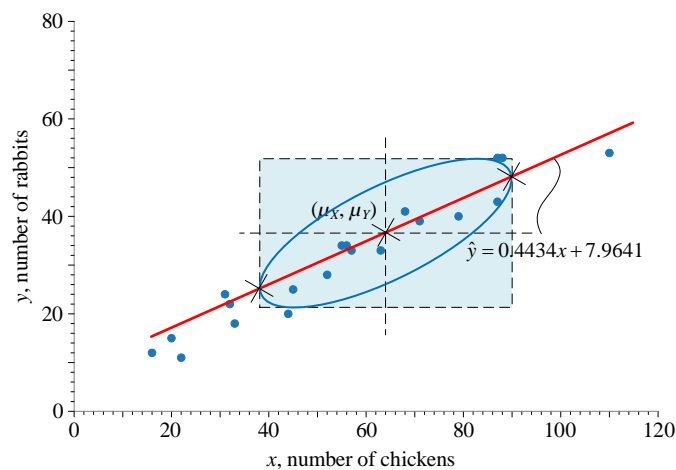


图 15. 条件概率视角

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



Bk3\_Ch24\_4.py 代码绘制图 14。



农夫落笔刹那，毫无防备之间，黑云压城城欲摧。

农夫赶忙起身关紧门窗，只见窗外云浪翻腾，道道电光从西方汹汹而来！闪电撕开天幕，大有列缺霹雳、丘峦崩摧之状。

瞬时，天河倾注，拳头大的雨滴敲击着大地，冲刷每一条沟壑，涤荡每一片浮尘。

农夫却毫无惧色，他喜出望外，仰天长啸道，“天上之水啊！上善若水啊！好水，好水！”

未完待续。