

8

Conic Sections

圆锥曲线

从解密天体运行，到探索星辰大海



可是，地球确实绕着太阳转。

And yet it moves

E pur si muove.

—— 伽利略·伽利莱 (Galilei Galileo) | 意大利物理学家、数学家及哲学家 | 1564 ~ 1642



- ▶ `ax.plot_wireframe()` 绘制三维网格图；其中，`ax = fig.add_subplot(projection='3d')`
- ▶ `ax.view_init()` 设置三维图像观察角度；其中，`ax = fig.add_subplot(projection='3d')`
- ▶ `numpy.arange()` 根据指定的范围以及设定的步长，生成一个等差数组
- ▶ `numpy.cos()` 计算余弦
- ▶ `numpy.linspace(start, end, num)` 生成等差数列，数列 `start` 和 `end` 之间（注意，包括 `start` 和 `end` 两个数值），数列的元素个数为 `num` 个
- ▶ `numpy.outer(u, v)` 当 `u` 和 `v` 都为向量时，`u` 的每一个值代表倍数，使得第二个向量每个值相应倍增。`u` 决定结果的行数，`v` 决定结果的列数；当 `u` 和 `v` 为多维向量时，按照先后列展开为向量
- ▶ `numpy.sin()` 计算正弦
- ▶ `sympy.Eq()` 定义符号等式
- ▶ `sympy.plot(sympy.sin(x)/x, (x, -15, 15), show=True)` 绘制符号函数表达式的图像
- ▶ `sympy.plot_implicit()` 绘制隐函数方程
- ▶ `sympy.plot3d(f_xy_diff_x, (x, -2, 2), (y, -2, 2), show=False)` 绘制函数的三维图
- ▶ `sympy.plotting.plot.plot_parametric()` 绘制二维参数方程
- ▶ `sympy.plotting.plot.plot3d_parametric_line()` 绘制三维参数方程
- ▶ `sympy.symbols()` 创建符号变量

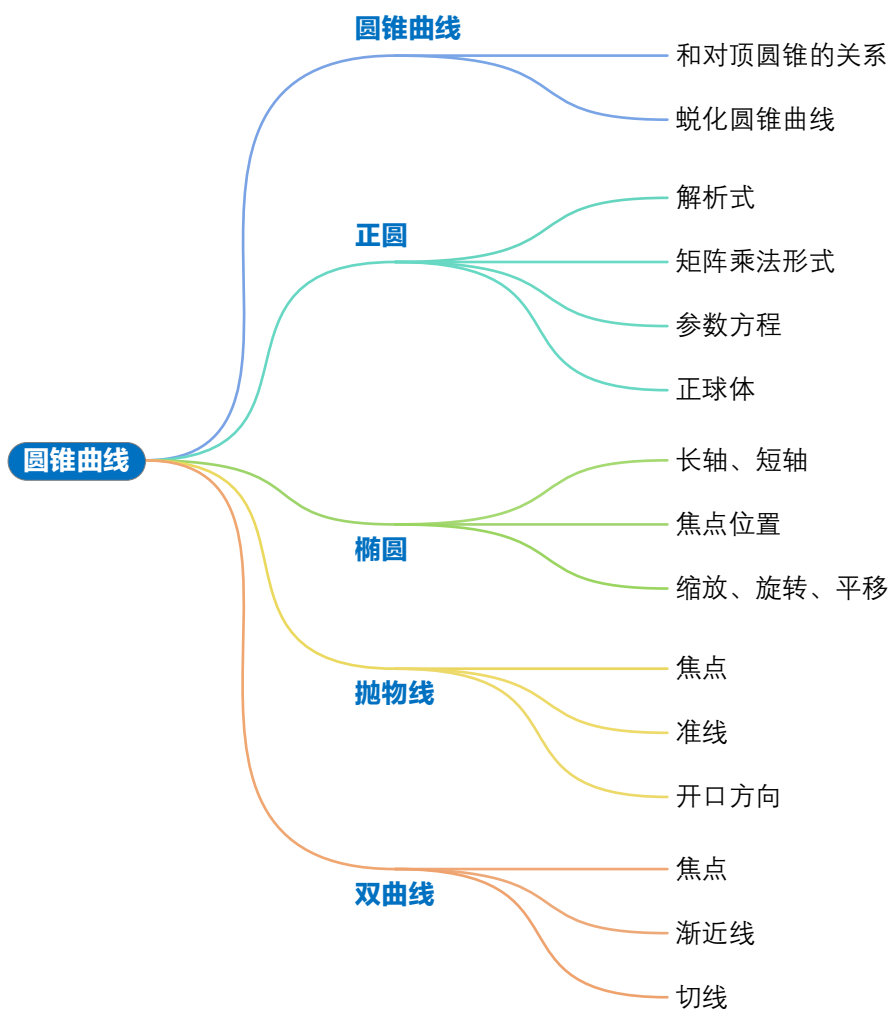
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

8.1 圆锥曲线外传

自古以来，世界各地的人们在仰望神秘星空时，都会不禁感慨宇宙的浩渺、神秘。

两千三百年前，中国战国时期诗人屈原在《天问》中问到“天何所沓？十二焉分？日月安属？列星安陈？”

在中国古代，“天圆地方”是权威的解释，比如孔子曾说“天道曰圆，地道曰方”。

但是，战国时期的法家创始人之一慎到认为天体是球形，他说“天形如弹丸，半覆地上，半隐地下，其势斜倚”。

东汉张衡无疑推动了中国古代对天体运行规律的认知，他提出“浑天如鸡子，天体圆如弹丸，地如鸡中黄，孤居于内，天大而地小”。

古希腊一众数学家和哲学家对天体运行规律有着相同的疑问，其中具有代表性的是**毕达哥拉斯** (Pythagoras)、**亚里士多德** (Aristotle)、**埃拉托斯特尼** (Eratosthenes) 和**托勒密** (Ptolemy)。

古希腊数学家毕达哥拉斯在公元前六世纪，提出地球是球体这一概念。

亚里士多德以实证的方法得出地球是球形这一结论。比如，他发现月食时，地球投影到月球上的形状为圆形；远航的船舰靠岸时，人们先看到桅杆，再看到船身，最后才能看到整个船身。亚里士多德还发现，越往北走，北极星越高；越往南走，北极星越低。

在地圆说基础上，托勒密建立**地心说** (geocentric model)。地心说被罗马教会奉为圭臬，禁锢了欧洲思想逾千年。

解放人类对天体运行规律认知的数学工具正是圆锥曲线。

古希腊数学家，**梅内克缪斯** (Menaechmus, 380 ~ 320 BC)，开创了圆锥曲线研究。相传，梅内克缪斯是**亚历山大大帝** (Alexander the Great) 的数学老师。亚历山大大帝曾请教梅内克缪斯，力求找到学习几何的终南捷径；梅内克缪斯给出的回答却是“学习几何无捷径”。

抽象的圆锥曲线理论在约 1800 年之后开花结果。这里我们主要介绍四个人物——哥白尼、布鲁诺、开普勒和伽利略。

撼动地心说统治地位的第一人就是波兰天文学家**哥白尼** (Nicolaus Copernicus)；可以说哥白尼革命吹响了现代科学发展的集结号。

1543 年，哥白尼在《天体运行论》(On the Revolutions of the Heavenly Spheres) 提出**日心说** (Heliocentrism)。他认为行星运行轨道为正圆形；细心观察星象后，哥白尼基本上确定地球绕太阳运转，而且每 24 小时完成一周运转。

有趣的是，哥白尼实际上是业余的天文学家；这是典型的“业余”把“专业”干翻在地。



哥白尼 (Nicolaus Copernicus)
波兰数学家、天文学家 | 1473年 ~ 1543年
提出日心说

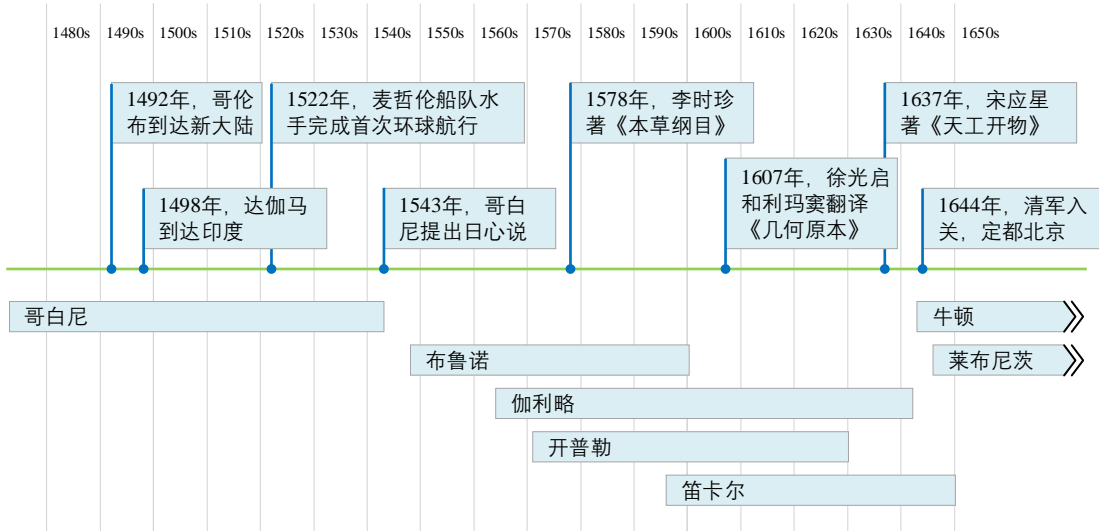


图 1. 哥白尼、布鲁诺、伽利略、开普卡所处的时间轴

这里需要提及的一个人是**布鲁诺** (Giordano Bruno)，他因为对抗教会、传播日心，被判处长期监禁；1600年，布鲁诺在罗马鲜花广场被烧死在火刑柱上。

开普勒 (Johannes Kepler) 通过观察和推理提出行星运行轨道为椭圆形，继而提出行星运动三大定理。

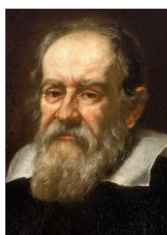
可以说，圆锥曲线理论是开普勒行星运行研究的核心数学工具；而开普勒的研究对科学技术进步，甚至人类文明进步产生极大的推动作用。



开普勒 (Johannes Kepler)
德国天文学家、数学家 | 1571年 ~ 1630年
发现行星运行三大定律



伽利略 (Galileo Galilei) 创作的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》 (*Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*) 一书中支持哥白尼的理论地球不是宇宙的固定不动的中心。



伽利略 (Galileo Galilei)

意大利天文学家、物理学家和工程师 | 1564年 ~ 1642年
现代物理学之父



因为支持哥白尼日心说，伽利略被罗马宗教裁判所判刑，余生被软禁家中。据传，在被迫放弃日心说主张时，伽利略喃喃自语“可是，地球确实绕着太阳转。”

1979年，教皇保罗二世代表教廷为伽利略公开平反昭雪，这一道歉迟到了300多年。

在伽利略的时代，亚里士多德的世界观处于权威地位。

根据亚里士多德的理论，较重的物体比较轻的物体下降快。在1800年时间里，这个观点从未被撼动，直到伽利略爬上比萨斜塔，将不同重量物体从塔顶抛下，并且将球体从斜面滚下，将众多试验结果总结成著名的自由落体定律。

在天文学方面，伽利略首次用望远镜进行天文观测，他发现太阳黑子、月球山系和木星四颗最大的卫星等。

不同于信仰，科学的魅力在于好奇、质疑、实验、推翻、重构，如此往复、迭代上升。

8.2 圆锥曲线：对顶圆锥和截面相交

顾名思义，**圆锥曲线** (conic section) 和圆锥有直接关系。

图2所示为圆锥和对顶圆锥；圆锥相当于一个直角三角形(图中蓝色阴影)以**中轴** (axis) 所在直线旋转得到的形状，直角三角形斜边是圆锥**母线** (generatrix)。

圆锥曲线是通过一个**对顶圆锥** (double cone) 和一个**截面** (cutting plane) 相交得到一系列曲线。圆锥曲线主要分为：**正圆** (circle)、**椭圆** (ellipse)、**抛物线** (parabola) 和**双曲线** (hyperbola)。正圆可以视作椭圆的特殊形态。

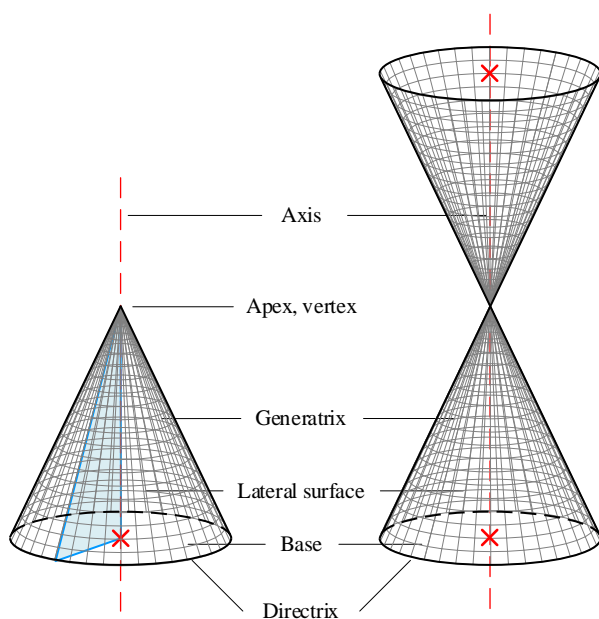


图 2. 圆锥构造

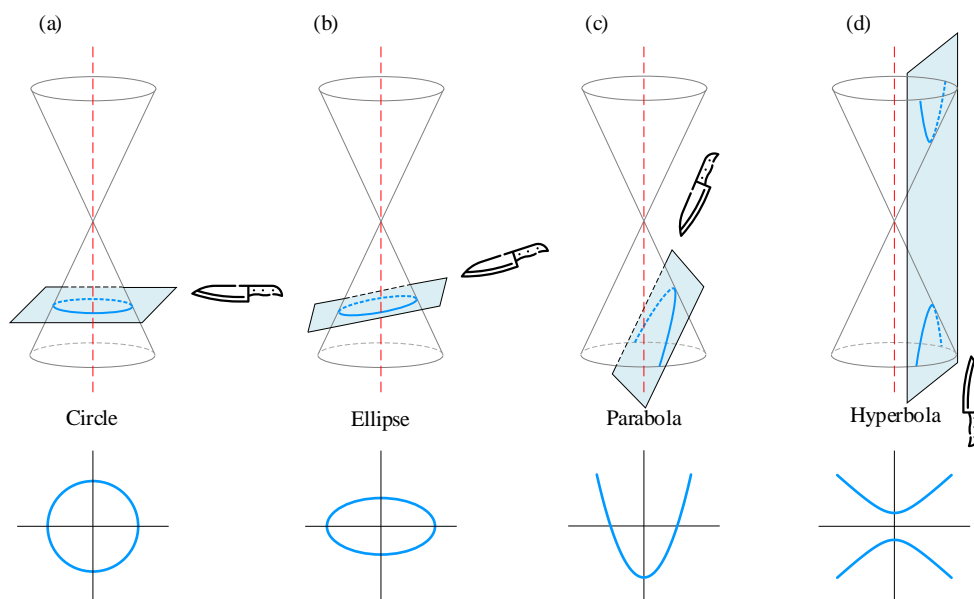


图 3. 四种圆锥曲线

如图 3 (a) 所示，当截面与圆锥中心对称轴垂直，交线为正圆。

当某一截面，与圆锥相交，交线闭合且不过圆锥顶点，交线为椭圆，如图 3 (b) 所示。

当截面仅与圆锥面一条母线平行，交线仅出现在圆锥面一侧，交线为抛物线，如图 3 (c) 所示。

当截面与两侧圆锥都相交，并且截面不通过圆锥顶点，得到结果是双曲线，如图 3 (d) 所示。

退化圆锥曲线

此外，还有一类圆锥曲线特殊情况——**退化圆锥曲线** (degenerate conic)。

退化双曲线 (degenerate hyperbola) 为两条相交直线，如图 4 (a) 所示。

退化抛物线 (degenerate parabola) 可以是一条直线 (图 4 (b)) 或者两条平行直线。

退化椭圆 (degenerate ellipse) 为一个点，如图 4 (c) 所示。

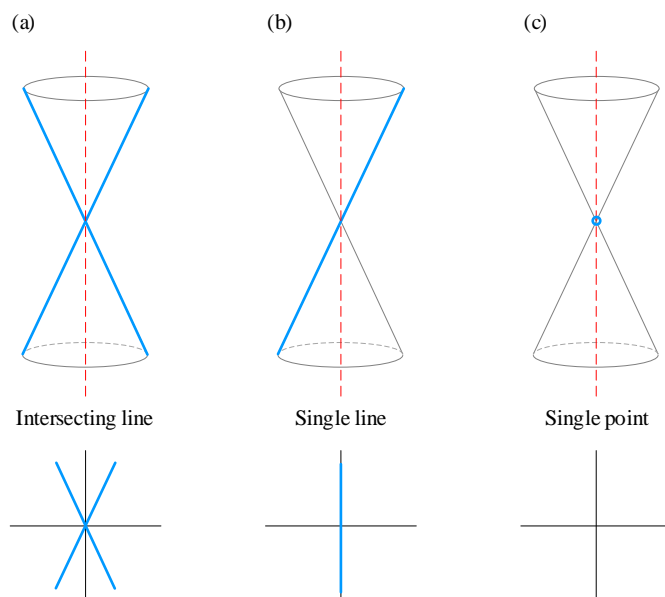


图 4. 三种退化圆锥曲线

8.3 正圆：特殊的椭圆

如图 5 (a) 所示，在 x_1x_2 平面上，圆心位于原点的正圆解析式为。

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad (1)$$

其中， r 为**半径** (radius)。

正圆的周长为 $2\pi r$ ，正圆的面积为 πr^2 。

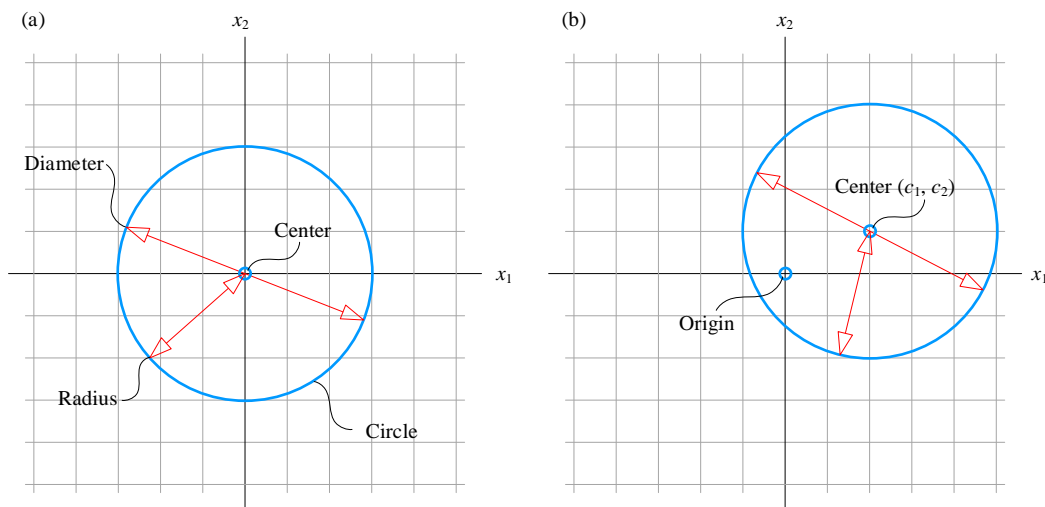


图 5. 正圆

注意，(1) 也可以写成这样的矩阵乘法形式。

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = r^2 \quad (2)$$

其中，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

(1) 所示解析式对应的参数方程为。

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(t) \\ x_2 = r \sin(t) \end{cases} \quad (4)$$

这个正圆的参数方程也可以写作。

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (5)$$

如图 5 (b) 所示，圆心位于 (c_1, c_2) 的正圆解析式为。

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2 \quad (6)$$

(6) 对应的参数方程为。

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + r \cos(t) \\ x_2 = c_2 + r \sin(t) \end{cases} \quad (7)$$

图 5 (a) 所示图像并不是函数，因为一个自变量对应两个因变量的值，这显然不满足函数定义。但是，我们可以把正圆一切为二，得到上下两个函数，如图 6 所示。

图 6 (a) 所示为**上半圆** (upper semicircle) 函数。

$$f(x_1) = \sqrt{r^2 - x_1^2} \quad (8)$$

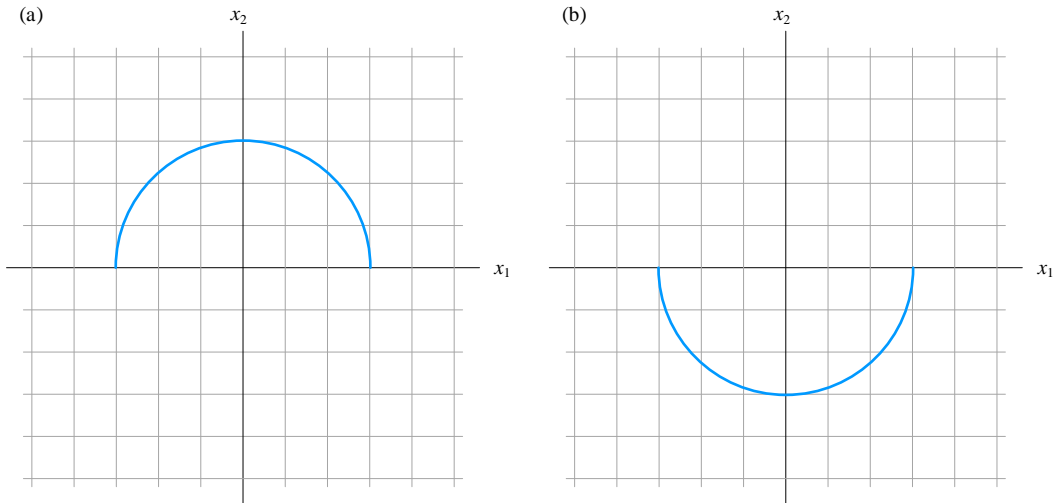


图 6. 上半圆和下半圆函数

图 6 (b) 所示为**下半圆** (lower semicircle) 函数。

$$f(x_1) = -\sqrt{r^2 - x_1^2} \quad (9)$$

表 1. 用英文读正圆解析式

数学表达	英文表达
$x^2 + y^2 = r^2$	x squared plus y squared equals r squared
$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$	y equals plus or minus square root of the difference of r squared minus x squared
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	The difference x minus h squared plus the difference y minus k squared equals r squared. The quantity x minus h squared plus the quantity y minus k squared equals r squared.

8.4 椭圆：机器学习的多面手

中心位于原点的正椭圆有两种基本形式，如图 7 所示。

图 7 (a) 所示椭圆的**长轴** (major axis) 位于横轴 x_1 上，对应的解析式为。

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

其中, $a > b > 0$ 。

长轴, 是指通过连接椭圆上的两个点所能获得的最长线段, 图 7 (a) 椭圆长轴的长度为 $2a$ 。

与之相反, **短轴** (minor axis), 便是通过连接椭圆上的两个点所能获得的最短线段, 图 7 (a) 椭圆短轴长度为 $2b$ 。长轴和短轴相互垂直。

长轴的一半被称作**半长轴** (semi-major axis), 短轴的一半被称作**半短轴** (semi-minor axis)。

所谓正椭圆, 是指椭圆的长轴位于水平方向或竖直方向。

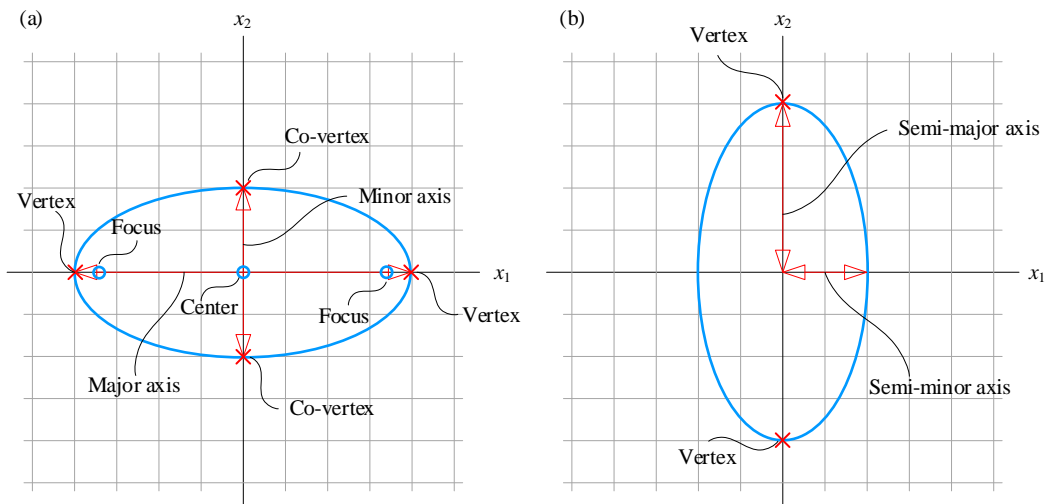


图 7. 中心位于原点的正椭圆

注意, (10) 也可以写成如下矩阵乘法形式。

$$\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1/a^2 & \\ & 1/b^2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = r^2 \quad (11)$$

如图 8 所示, 椭圆可以看成是正圆朝某一个方向或两个方向缩放得到的结果。这一点从椭圆面积上很容易发现端倪。图 8 所示正圆的面积为 πb^2 , 水平方向拉伸后半长轴为 a ; 得到的椭圆面积为 πab 。

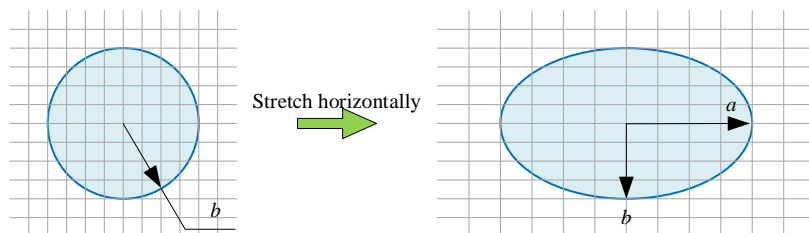


图 8. 椭圆和正圆的关系

(10) 解析式对应的参数方程为。

$$\begin{cases} x_1 = a \cos(t) \\ x_2 = b \sin(t) \end{cases} \quad (12)$$

该参数方程也可以写成。

$$\begin{cases} x_1 = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = b \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad (13)$$

表 2. 用英文读椭圆解析式

数学表达	英文表达
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	The fraction x squared over a squared plus the fraction y squared over b squared equals one.

图 7 (b) 所示椭圆的长轴位于纵轴 x_2 上，对应的解析式为。

$$\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2} = 1 \quad (14)$$

同样 $a > b > 0$ 。

焦点

此外，椭圆的**焦点** (单数 focus，复数 foci) 位于椭圆长轴。椭圆上任意一点 P 到两个焦点 F_1 和 F_2 的距离之和等于 $2a$ 。如图 9 所示，上述关系可以通过下式表达。

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \quad (15)$$

两个焦点 F_1 和 F_2 之间距离被称作为焦距 $2c$ ， c 可以通过下式计算得到。

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (16)$$

由此可以得到 图 7 (a) 椭圆两个焦点坐标分别为 $(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$ 。图 7 (b) 椭圆两个焦点坐标分别为 $(0, -c)$ 和 $(0, c)$ 。

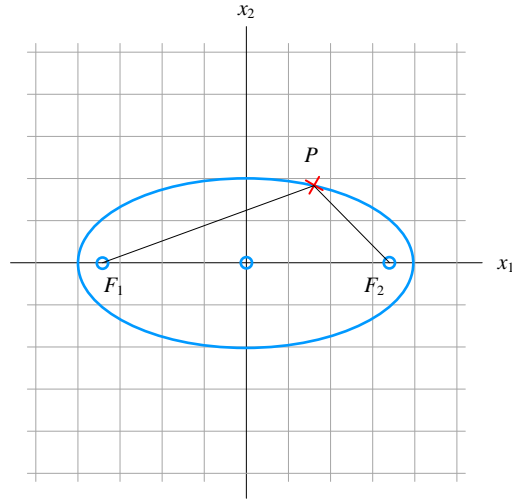


图 9. 椭圆焦点和椭圆的关系

中心移动

图 10 所示为中心在 (c_1, c_2) 的正椭圆。图 10 (a) 所示椭圆的解析式如下。

$$\frac{(x_1 - c_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - c_2)^2}{b^2} = 1 \quad (17)$$

同样 $a > b > 0$ 。图 10 (a) 所示椭圆的解析式如下。

$$\frac{(x_1 - c_1)^2}{b^2} + \frac{(x_2 - c_2)^2}{a^2} = 1 \quad (18)$$

图 10 中椭圆实际上是图 7 经过平移得到的。

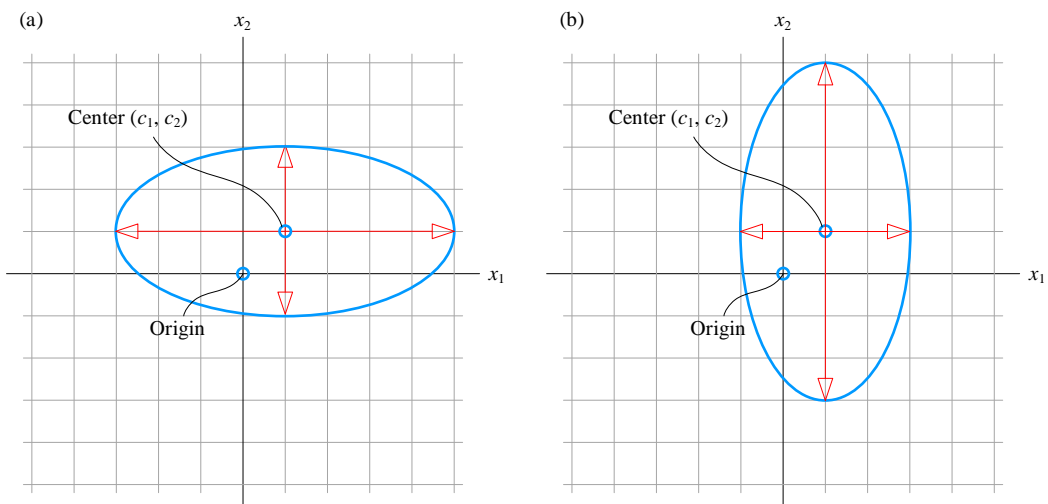


图 10. 中心偏离原点椭圆

8.5 旋转椭圆：几何变换的产物

(10) 椭圆逆时针旋转 θ 后得到椭圆对应的解析式。

$$\frac{[x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta)]^2}{a^2} + \frac{[x_1 \sin(\theta) - x_2 \cos(\theta)]^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

顺时针旋转 θ 后得到椭圆解析式。

$$\frac{[x_1 \cos(\theta) - x_2 \sin(\theta)]^2}{a^2} + \frac{[x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta)]^2}{b^2} = 1 \quad (20)$$

举个例子，中心位于原点，长轴位于横轴的正椭圆在旋转之前解析式为。

$$\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1 \quad (21)$$

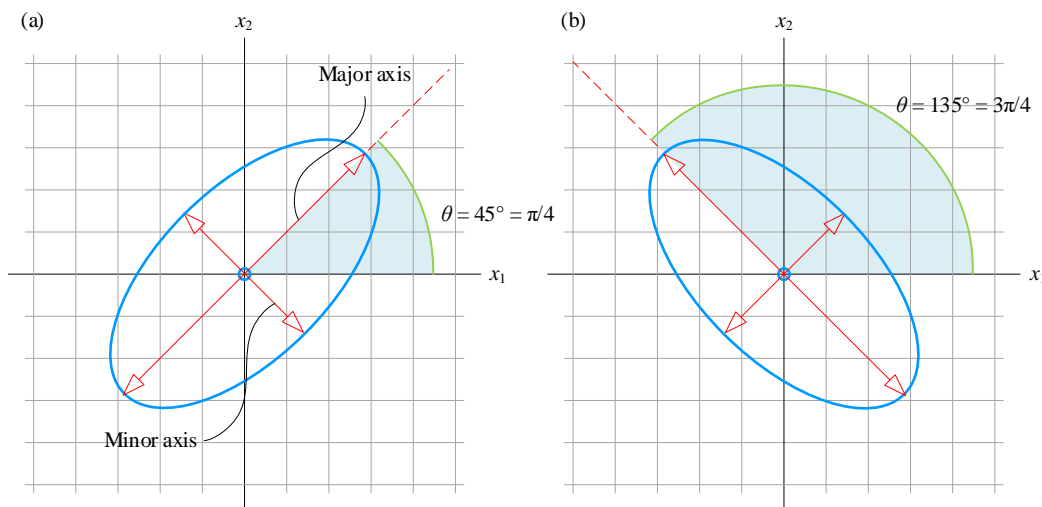


图 11. 旋转椭圆

图 11 (a) 所示为绕中心 (原点) 逆时针旋转 $\theta = 45^\circ = \pi/4$ 获得的椭圆，长轴位于第一和第三象限。对应解析式如下。

$$\frac{[x_1 \cos(45^\circ) + x_2 \sin(45^\circ)]^2}{4} + [x_1 \sin(45^\circ) - x_2 \cos(45^\circ)]^2 = 1 \quad (22)$$

整理解析式得到。

$$\frac{5x_1^2}{8} - \frac{3x_1x_2}{4} + \frac{5x_2^2}{8} = 1 \quad (23)$$

图 11 (b) 所示为绕中心 (原点) 逆时针旋转 $\theta = 135^\circ = 3\pi/4$ 获得的椭圆；长轴位于第二和第四象限。对应解析式如下。

$$\frac{[x_1 \cos(135^\circ) + x_2 \sin(135^\circ)]^2}{4} + [x_1 \sin(135^\circ) - x_2 \cos(135^\circ)]^2 = 1 \quad (24)$$

整理解析式得到。

$$\frac{5x_1^2}{8} + \frac{3x_1x_2}{4} + \frac{5x_2^2}{8} = 1 \quad (25)$$

平面上中心位于任意一点旋转椭圆可以对单位圆进行一系列几何变换操作得到。

如图 12 所示，单位圆 (蓝色)，首先经过缩放得到长轴位于横轴的椭圆 (绿色)，长轴旋转之后得到中心位于原点的旋转椭圆 (橙黄)，最后中心平移得到红色椭圆。

此外，椭圆的缩放、平移以及旋转等操作，和本系列丛书后续线性代数中仿射变换直接相关。

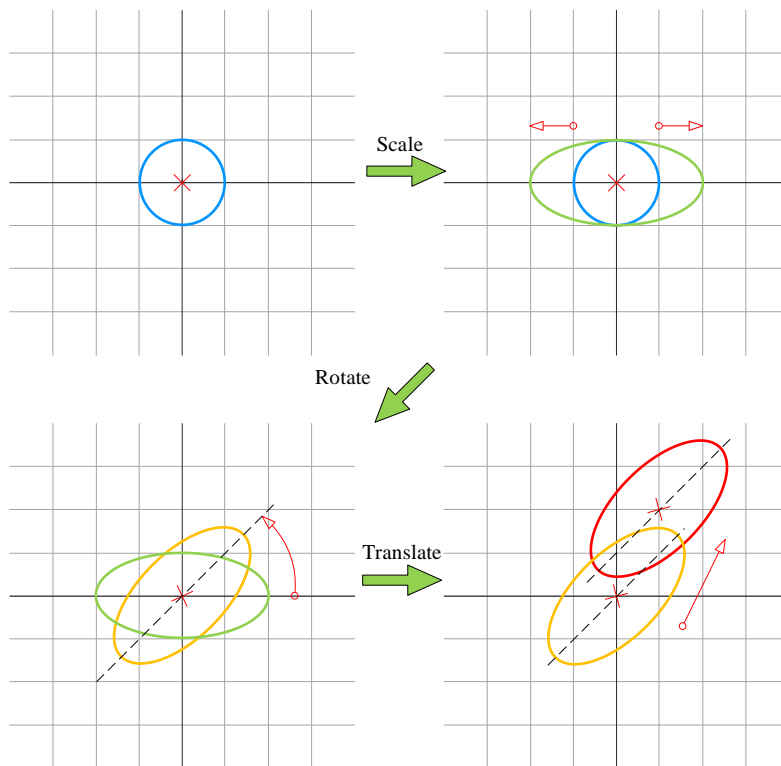


图 12. 正圆经过缩放、旋转和平移得到椭圆

以下代码绘制平移和旋转椭圆。



```
# Bk Ch8_01

from matplotlib import pyplot as plt
from sympy import plot_implicit, symbols, Eq
x1, x2 = symbols('x1 x2')

def plot_curve(Eq_sym):
    h_plot = plot_implicit(Eq_sym, (x1, -2.5, 2.5), (x2, -2.5, 2.5), \
                           xlabel = '$\it{x_1}$', ylabel = '$\it{x_2}$')
    h_plot.show()

%% plot ellipses

plt.close('all')

# major axis on x1
Eq_sym = Eq(x1**2/4 + x2**2, 1)
plot_curve(Eq_sym)

# major axis on x2
Eq_sym = Eq(x1**2 + x2**2/4, 1)
plot_curve(Eq_sym)

# major axis on x1 with center (h,k)
Eq_sym = Eq((x1-0.5)**2/4 + (x2-0.5)**2, 1)
plot_curve(Eq_sym)

# major axis on x2 with center (h,k)
Eq_sym = Eq((x1-0.5)**2 + (x2-0.5)**2/4, 1)
plot_curve(Eq_sym)

# major axis rotated counter clockwise by pi/4
Eq_sym = Eq(5*x1**2/8 - 3*x1*x2/4 + 5*x2**2/8, 1)
plot_curve(Eq_sym)

# major axis rotated counter clockwise by 3*pi/4
Eq_sym = Eq(5*x1**2/8 + 3*x1*x2/4 + 5*x2**2/8, 1)
plot_curve(Eq_sym)
```



有读者可能会问，这个椭圆和数据科学、机器学习有什么关系？

看似平淡无奇的椭圆，其实与数据科学和机器学习有着特别密切的关系。这里，我们蜻蜓点水地聊一下。

图 13 所示为不同相关性系数条件下，二元高斯分布 PDF 曲面和等高线；在平面等高线的图像中，我们看到的是一系列同心椭圆。

不同相关性系数条件下，满足特定二元高斯分布的随机数可以看到椭圆的影子，具体如图 14 所示。

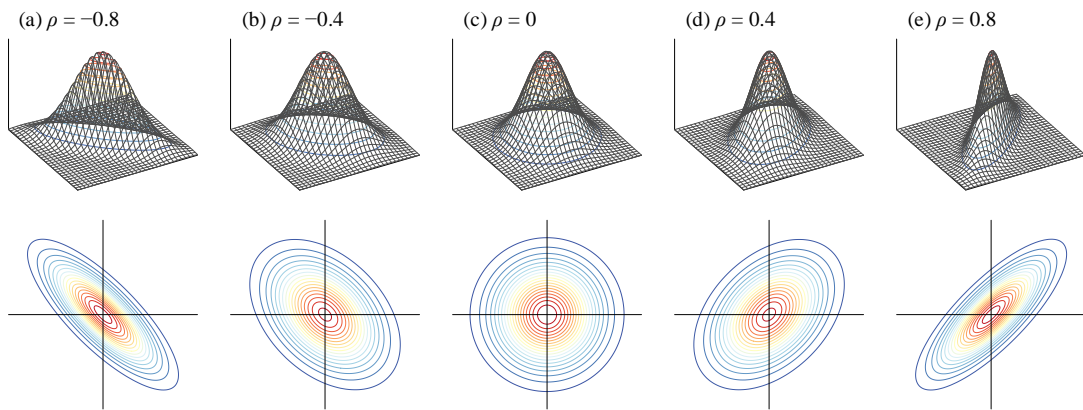
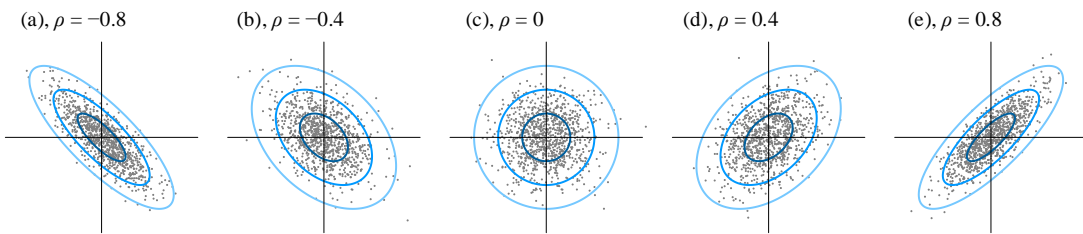


图 13. 不同相关性系数，二元高斯分布 PDF 曲面和等高线

图 14. 相关系数 ρ 不同时，散点和椭圆关系

上一章简单提到马氏距离这个距离度量。马氏距离，马哈距离 (Mahalanobis distance, Mahal distance)，全称马哈拉诺比斯距离。如图 15 所示，马氏距离计算过程就是椭圆几何变换过程。

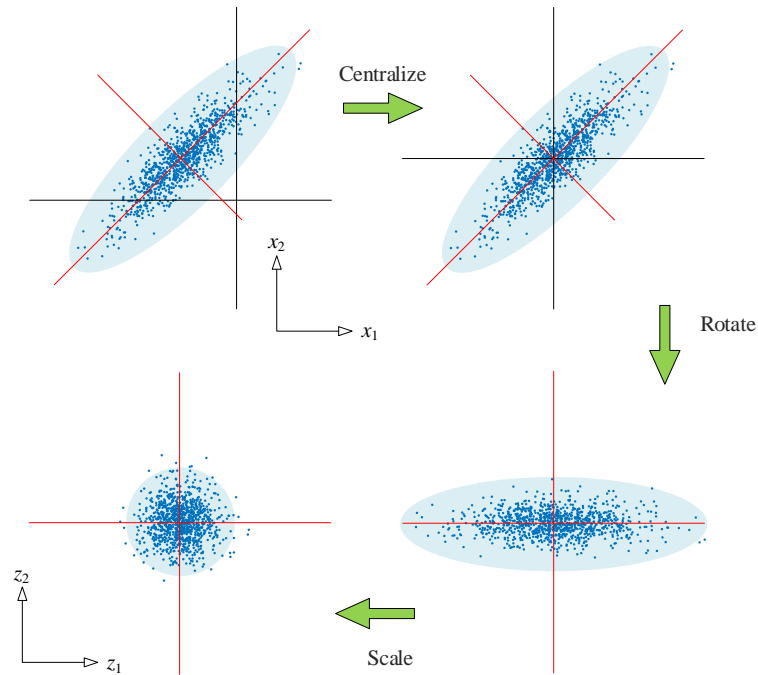


图 15. 马氏距离计算过程

本书前文提到的一元线性回归和椭圆也息息相关。从概率角度，线性回归的本质就是条件概率；图 16 所示为条件概率曲面等高线，黑色斜线代表回归直线解析式。我们也能看到椭圆身在其中。

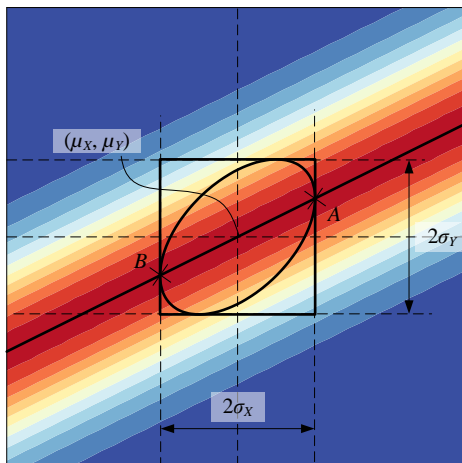


图 16. 条件概率曲面等高线

主成分分析 (Principal Component Analysis, PCA) 是机器学习中重要的降维算法。从几何角度来看，如图 17 所示，主成分分析实际上就是在寻找椭圆的主轴。

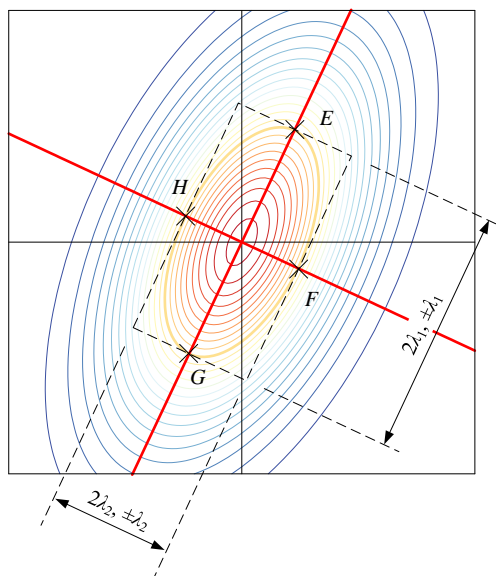


图 17. 主成分分析

在一些分类和聚类算法确定的决策边界中，我们也可以看到椭圆及其他圆锥曲线。图 18 所示为高斯朴素贝叶斯分类计算得到的决策边界。图 19 所示为高斯混合模型判定的决策边界。

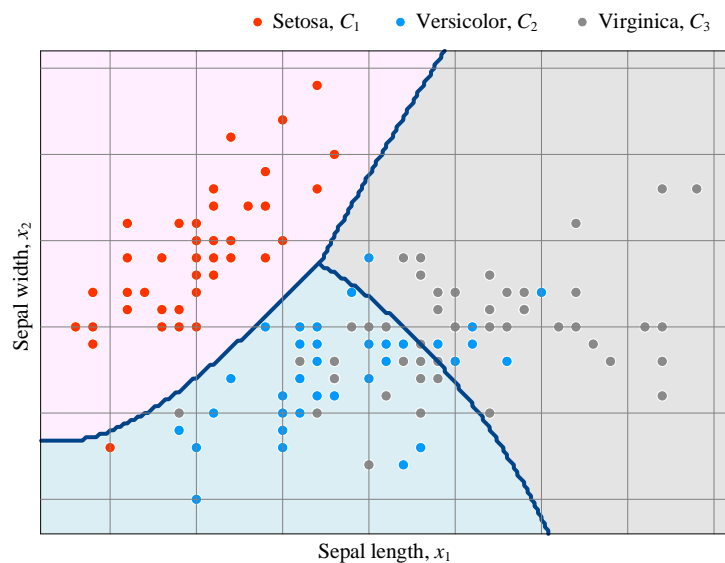


图 18. 高斯朴素贝叶斯分类确定的决策边界

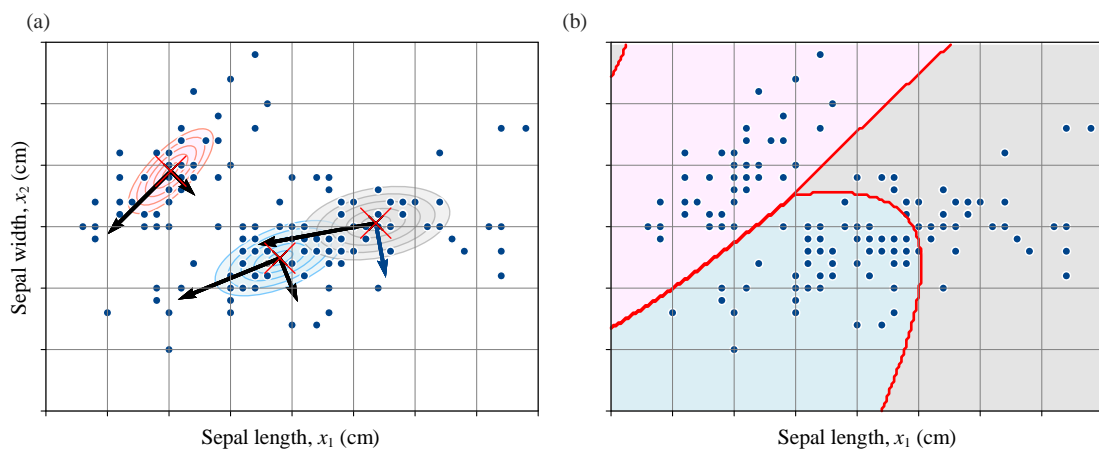


图 19. 高斯混合模型确定的决策边界

总而言之，椭圆在数据科学和机器学习这两个话题中有很多“戏份”；本系列丛书将为大家一一讲述这些有关椭圆的故事。

8.6 抛物线：不止是函数

如图 20 (a) 所示，顶点在原点，对称轴位于 x_2 纵轴，开口向上抛物线解析式如下。

$$4px_2 = x_1^2, \quad p > 0 \quad (26)$$

这条抛物线顶点位于原点 $(0, 0)$ ，**焦点** (focus) 位于 $(0, p)$ ，**准线** (directrix) 位于 $y = -p$ 。当 p 小于 0 时，形如 (26) 抛物线开口朝下。

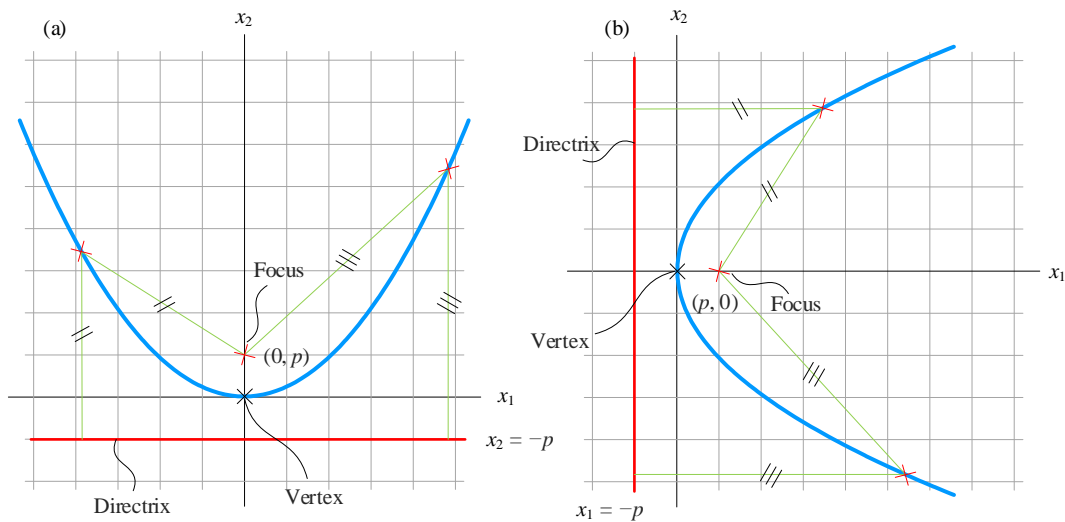


图 20. 抛物线

平面上，抛物线上每一点与焦点之间距离等于点和准线之间距离。这一点可以用来推导得到抛物线解析式。设抛物线任意一点为 (x_1, x_2) ，该点与准线间距离，等于该点和焦点间距离，如下式。

$$\begin{aligned} x_2 - (-p) &= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - p)^2}, \quad p > 0 \\ \Rightarrow (x_2 + p)^2 &= x_1^2 + (x_2 - p)^2 \\ \Rightarrow 4px_2 &= x_1^2 \end{aligned} \quad (27)$$

图 20 (a) 所示，顶点在原点，对称轴位于 x_1 横轴，开口向右抛物线解析式如下。

$$4px_1 = x_2^2, \quad p > 0 \quad (28)$$

当 p 小于 0 时，形如 (28) 抛物线开口朝左。

同样，抛物线也可以整体平移。形如下式的抛物线，顶点位于 (h, k) ，开口朝上或朝下，具体方向由 p 正负决定。

$$4p(x_2 - k) = (x_1 - h)^2 \quad (29)$$

(29) 所示抛物线对称轴为 $x_1 = h$ ，准线位于 $x_2 = k - p$ ，焦点所在位置为 $(h, k + p)$ 。

如下抛物线，顶点同样位于 (h, k) ， p 正负决定开口朝左或朝右。

$$4p(x_1 - h) = (x_2 - k)^2 \quad (30)$$

(30) 所示抛物线对称轴为 $x_2 = k$ ，准线位于 $x_1 = h - p$ ，焦点所在位置为 $(h + p, k)$ 。

图 21 所示为四种抛物线，请读者参考前文代码自行绘制图 21。

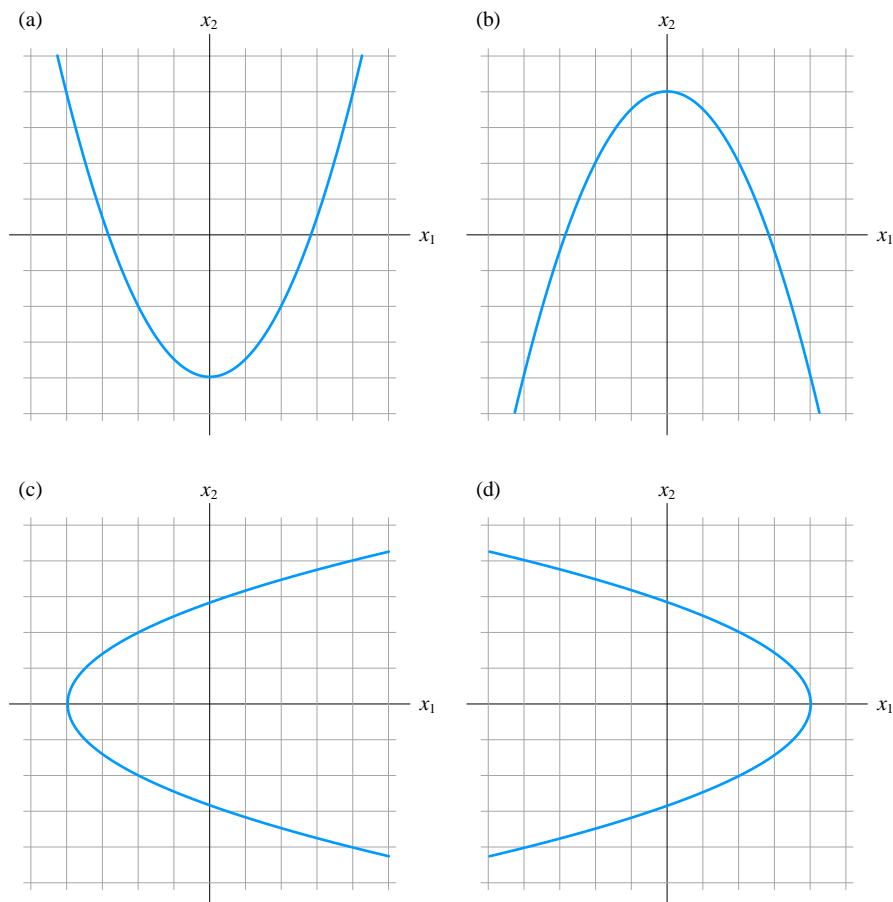


图 21. 四种抛物线

8.7 双曲线：引力弹弓的轨迹

图 22 (a) 所示为，焦点位于横轴，顶点位于原点双曲线，对应解析式形式为。

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad a, b > 0 \quad (31)$$

如图 22 (a) 所示，双曲线顶点位于原点，焦点位于 $F_1(-c, 0)$ 和 $F_2(c, 0)$ ， c 可以通过下式计算得到。

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad c > 0 \quad (32)$$

双曲线上任意一点 P 到两个焦点 F_1 和 F_2 距离差值为 $2a$ 。

$$|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a \quad (33)$$

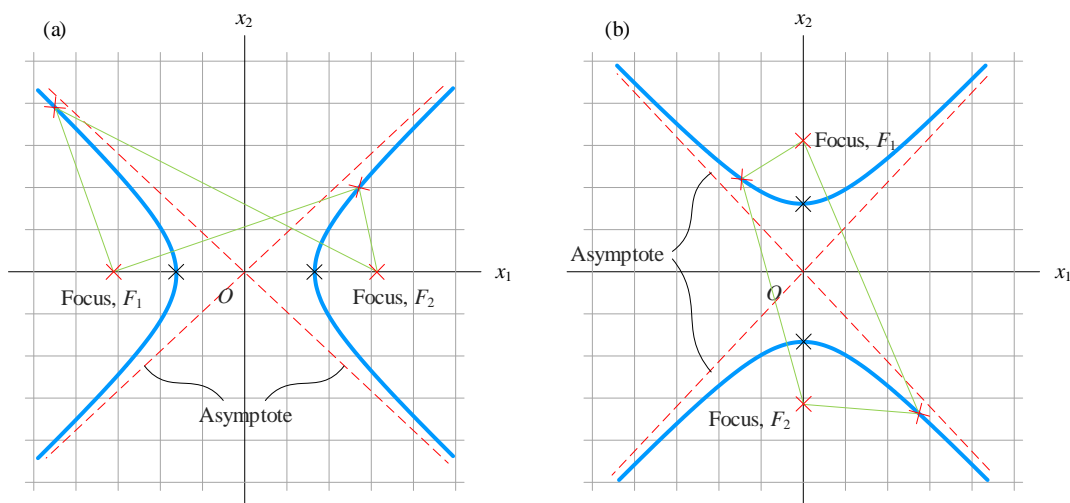


图 22. 两种标准双曲线形式

图 22 (a) 所示双曲线的两条渐近线 (asymptote) 表达式如下。

$$x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1 \quad (34)$$

图 22 (b) 所示为焦点位于纵轴双曲线，上下开口。这种双曲线标准式如下。

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = 1 \quad a, b > 0 \quad (35)$$

图 23 所示为左右开口双曲线右侧部分若干条渐变切线，双曲线对应 (31)。容易发现，图 23 切线斜率，要么大于 b/a ，要么小于 $-b/a$ ；也就是在 $(-\infty, -b/a)$ 和 $(b/a, +\infty)$ 两个区间之内。

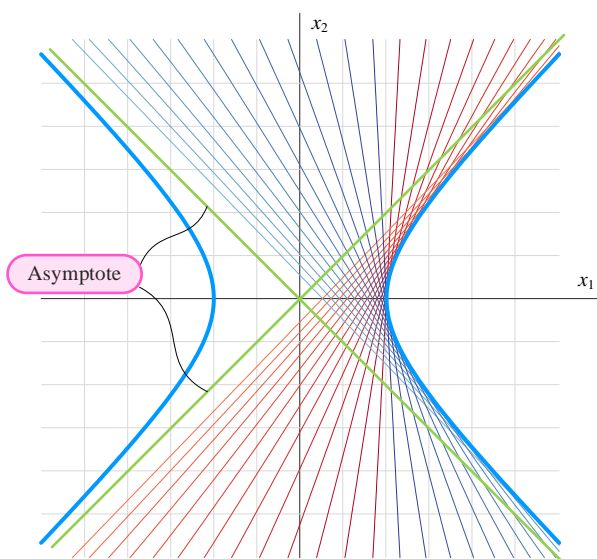


图 23. 双曲线右侧曲线切线

双曲线中心也可以平移，比如将 (31) 所示双曲线中心平移至 (h, k) ，得到的双曲线解析式如下。

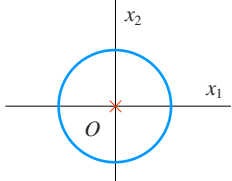
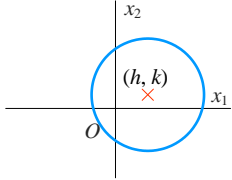
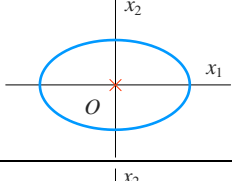
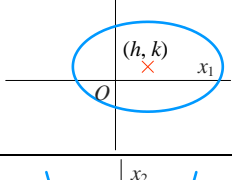
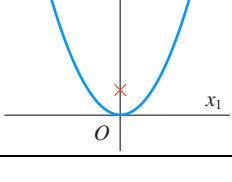
$$\frac{(x_1 - h)^2}{a^2} - \frac{(x_2 - k)^2}{b^2} = 1 \quad a, b > 0 \quad (36)$$

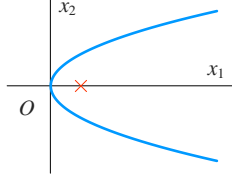
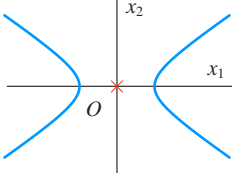
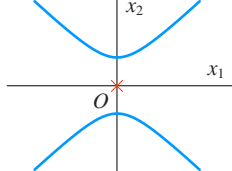
(36) 所示双曲线，顶点分别位于 $(h + a, k)$ 和 $(h - a, k)$ 。它的两条渐近线解析式如下。

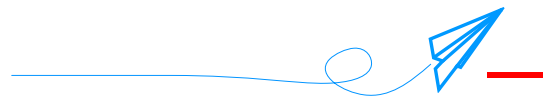
$$x_2 = k \pm \frac{b}{a}(x_1 - h) \quad (37)$$

表 3 总结常见圆锥曲线参数方程。

表 3. 常见圆锥曲线参数方程

形状	一般式	参数方程
	圆心在原点，半径为 r 圆形 $x_1^2 + x_2^2 = r^2$	$\begin{cases} x_1 = r \cos(t) \\ x_2 = r \sin(t) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$
	圆心在 (h, k) ，半径为 r 圆形 $(x_1 - h)^2 + (x_2 - k)^2 = r^2$	$\begin{cases} x_1 = h + r \cos(t) \\ x_2 = k + r \sin(t) \end{cases}$
	椭圆中心在原点，长轴和焦点位于横轴，半长轴为 a ，半短轴为 b $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = a \cos(t) \\ x_2 = b \sin(t) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1 = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_2 = b \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$
	椭圆，中心在 (h, k) ，半长轴为 a ，半短轴为 b $\frac{(x_1 - h)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - k)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = h + a \cos(t) \\ x_2 = k + b \sin(t) \end{cases}$
	抛物线，焦点位于纵轴 $4px_2 = x_1^2, \quad p > 0$	$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \frac{t^2}{4p} \end{cases}$

	<p>抛物线，焦点位于横轴</p> $4px_1 = x_2^2, \quad p > 0$	$\begin{cases} x_1 = \frac{t^2}{4p} \\ x_2 = t \end{cases}$
	<p>双曲线，焦点位于横轴</p> $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = a \sec(t) \\ x_2 = b \tan(t) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = a \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ x_2 = b \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$
	<p>双曲线，焦点位于纵轴</p> $\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = 1$	$\begin{cases} x_1 = a \tan(t) \\ x_2 = b \sec(t) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = a \frac{2t}{1-t^2} \\ x_2 = b \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{cases}$



科技进步发展从来不是正道坦途、一帆风顺，这条道路蜿蜒曲折、荆棘密布，很多人甚至为之付出生命。

即便如此，科学思想一旦被提出，就像是一颗种子种在了人类思想的土壤中；它们早晚会生根发芽，开花结果。圆锥曲线就是个很好的例子。

圆锥曲线提出千年以后，人们利用这个数学工具解密了天体运行规律；此后几百年，圆锥曲线就会助力人类飞出地球摇篮，探索无边的深空。