15 Derivative 导数

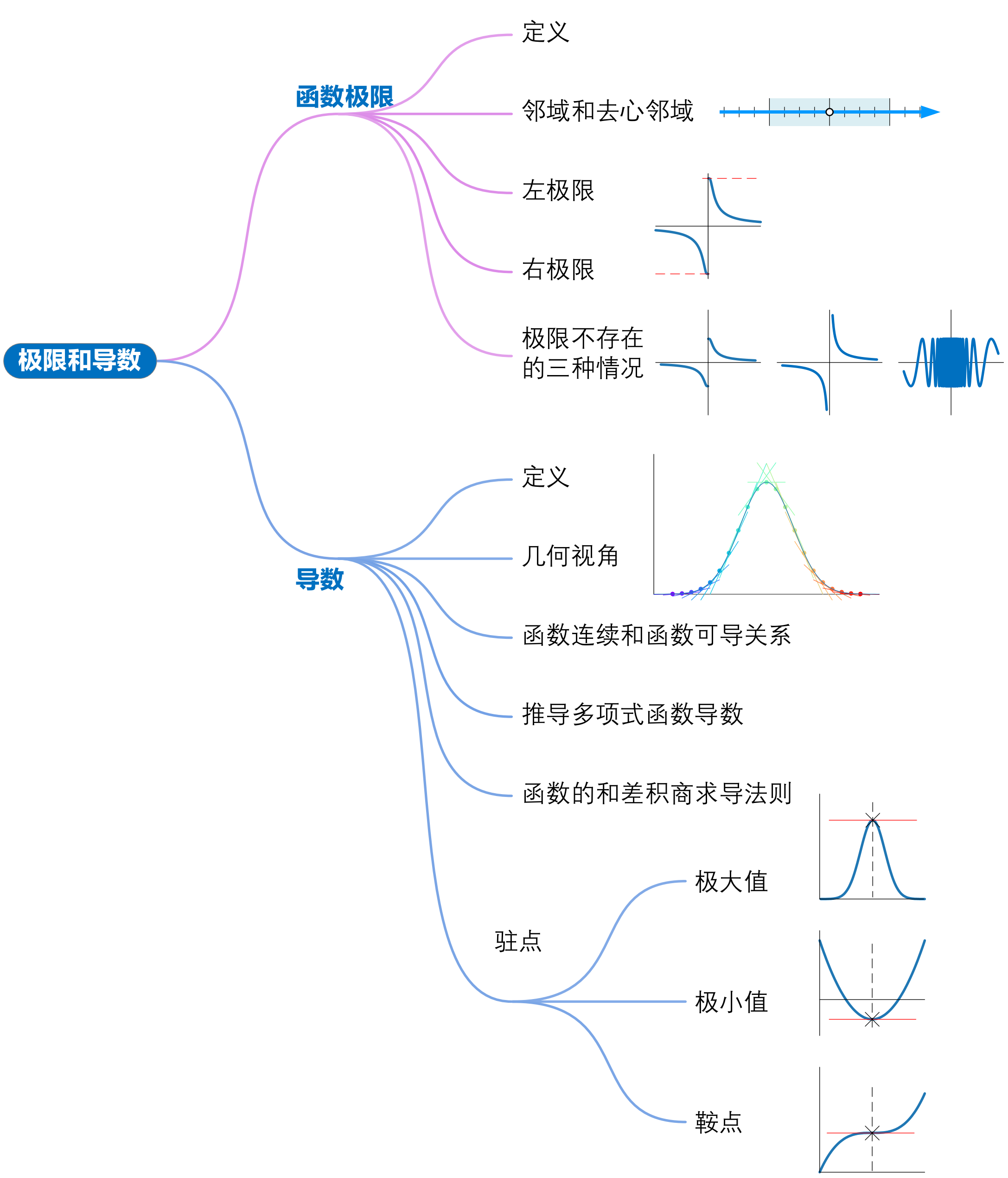
函数切线斜率，即变化率

微积分是现代数学的第一个成就，它的重要性怎么评价都不为过。我认为它比其他任何东西都更明确地定义了现代数学的起源。而作为其逻辑发展的数学分析系统，仍然是精确思维的最大技术进步。

The calculus was the first achievement of modern mathematics and it is difficult to overestimate its importance. I think it defines more unequivocally than anything else the inception of modern mathematics; and the system of mathematical analysis, which is its logical development, still constitutes the greatest technical advance in exact thinking.

—— 约翰·冯·诺伊曼 (John von Neumann) | 美国籍数学家 | 1903 ~ 1957

- sympy.abc import x 定义符号变量 x
- sympy.diff() 求解符号函数导数和偏导解析式
- sympy.Eq() 定义符号等式
- sympy.evalf() 将符号解析式中未知量替换为具体数值
- sympy.limit() 求解极限
- sympy.plot_implicit() 绘制隐函数方程
- sympy.series() 求解泰勒展开级数符号式
- sympy.symbols() 定义符号变量


极限和导数
函数极限
定义
邻域和去心邻域
左极限
右极限
极限不存在
的三种情况
导数
定义
几何视角
函数连续和函数可导关系
推导多项式函数导数
函数的和差积商求导法则
驻点
极大值
极小值
鞍点

15.1 牛顿小传

“如果说我比别人看得更远，那是因为我站在巨人们的肩上。”

1642 年年底，**艾萨克 · 牛顿** (Sir Isaac Newton) 呱呱坠地，同年年初伽利略驾鹤西征。牛顿从伽利略手中接过了智慧火炬。这可能完全是巧合，但又何尝不是某种命中注定。在伽利略等科学先驱者开垦的沃土上，即便没有培育出牛顿，也会注定会造就马顿、羊顿、米顿 …

艾萨克·牛顿 (Sir Isaac Newton)
英国物理学家、数学家 | 1643年 ~ 1727年
提出万有引力定律、牛顿运动定律，与莱布尼茨共同发明微积分

年轻的牛顿坐在果园里，思考物理学。苹果熟了，从树上落下，砸到了牛顿的脑门。牛顿发出了一个惊世疑问，苹果为什么会下落？

是的，苹果为什么会下落，而不是飞向更遥远的天际？对这些问题的系统思考让牛顿提出万有引力定律。

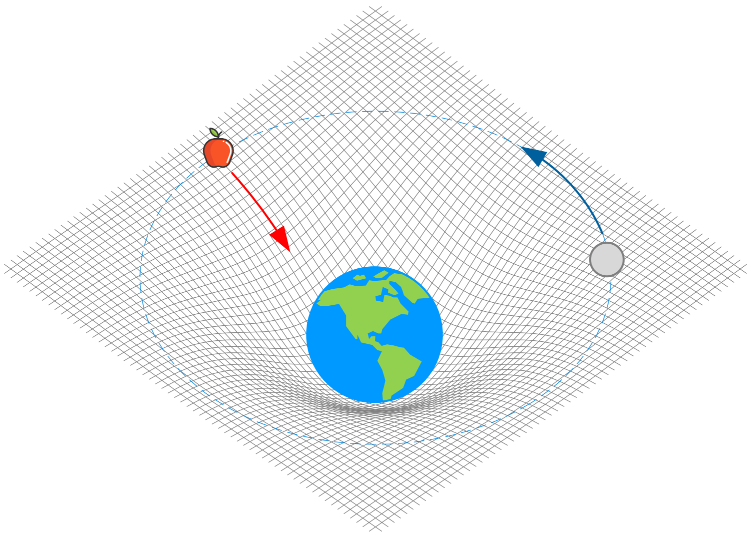


图 1. 地球引力场作用下的月球和苹果

牛顿的成就不止于此。他提出三大运动定律，并出版《自然哲学的数学原理》(*Mathematical Principles of Natural Philosophy*)，他利用三棱镜发现七色光谱，发明反射望远镜，并提出光的微

粒说，他和莱布尼茨分别独立发明微积分等等。任何人有其中任意一个贡献，就可以留名青史；然而，牛顿一个人完成上述科学进步。

> 自然和自然规律隐藏在黑暗之中。
>
> 上帝说：交给牛顿吧，
>
> 于是一切豁然开朗。
>
> ***Nature and Nature's laws lay hid in night:***
>
> ***God said, Let Newton be! and all was light.***
>
> —— 亚历山大·蒲柏 (Alexander Pope) | 英国诗人 | 1688 ~ 1744

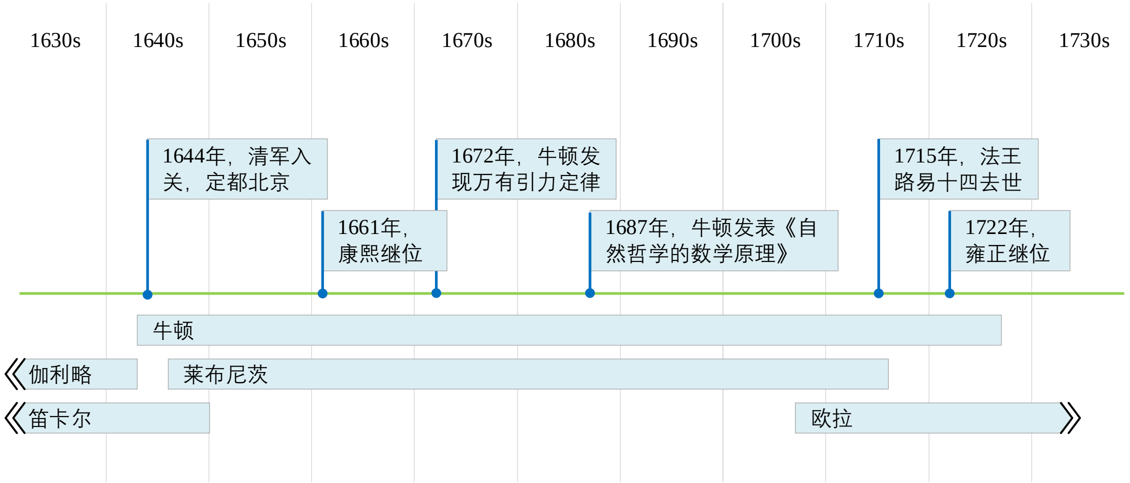


图 2. 牛顿时代时间轴

15.2 极限：研究微积分的重要数学工具

微积分 (calculus) 是研究实数域上函数的微分与积分等性质的学科，而极限是微积分最重要数学工具。**连续** (continuity)、**导数** (derivative) 和**积分** (integral) 这些概念都是通过极限来定义。

上一章简单介绍了数列极限、数列和的极限。本节主要介绍函数极限。

函数极限

首先聊一下函数极限的定义。

设函数 $f(x)$ 在点 a 的某一个去心邻域内有定义，如果存在常数 C，对于任意给定正数 ε，不管它多小，总存在正数 δ，使得 x 满足如下不等式时，

$$0<|x-a|<\delta \tag{1}$$

对应函数值 $f(x)$ 都满足，

$$|f(x)-C|<\varepsilon \tag{2}$$

常数 C 就是函数 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的极限，记做：

$$\lim_{x\to a} f(x)=C \tag{3}$$

举个例子

给定如下函数：

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{4}$$

如图 3 所示，当 x 趋向正无穷，函数极限为 e：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\mathrm{e} \tag{5}$$

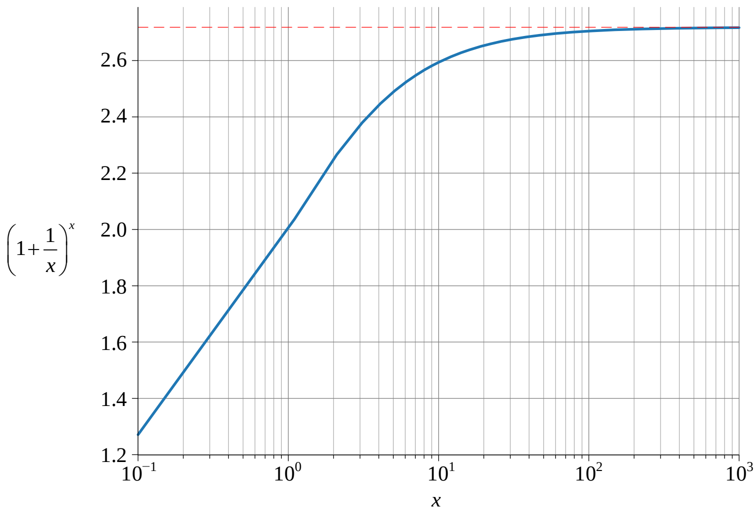


图 3. 当 x 趋向正无穷，函数 $f(x)$ 极限值

邻域

解释一下邻域这个概念。**邻域** (neighbourhood) 实际上就是一个特殊的开区间。如图 4 所示，点 a 的 h ($h > 0$) 邻域满足 $a - h < x < a + h$。

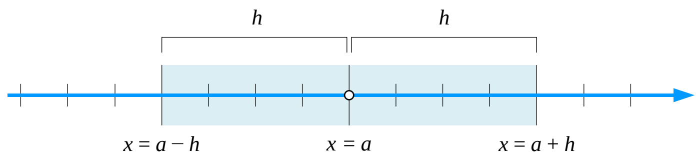


图 4. 邻域

a 为邻域的中心，h 为邻域的半径。而**去心邻域** (deleted neighborhood 或 punctured neighborhood) 指的是，在 a 的邻域中去掉 a 的集合。

Bk3_Ch15_01.py 计算极限并绘制图 3。

15.3 左极限、右极限

请注意 (1) 的绝对值符号。如图 5 所示，这代表着 x 从右 ($x > a$)、左 ($x < a$) 两侧趋向 a。下面，我们聊一聊分别从右侧和左侧趋向于 a 有怎样的区别和联系。

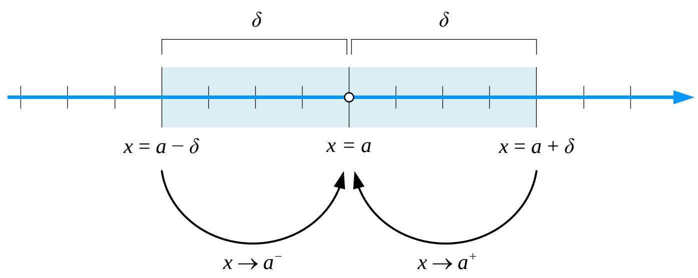


图 5. x 分别从左右两侧趋向 a

右极限

将 (1) 绝对值符号去掉取正得到，

$$0 < x - a < \delta \tag{6}$$

称之为 x 从右侧趋向 a，记做 $x \to a^+$ 。

随之，将 (3) 中极限条件改为 $x \to a^+$，C 叫做函数 $f(x)$ 的**右极限** (right-hand limit 或 right limit)，记做：

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = C \tag{7}$$

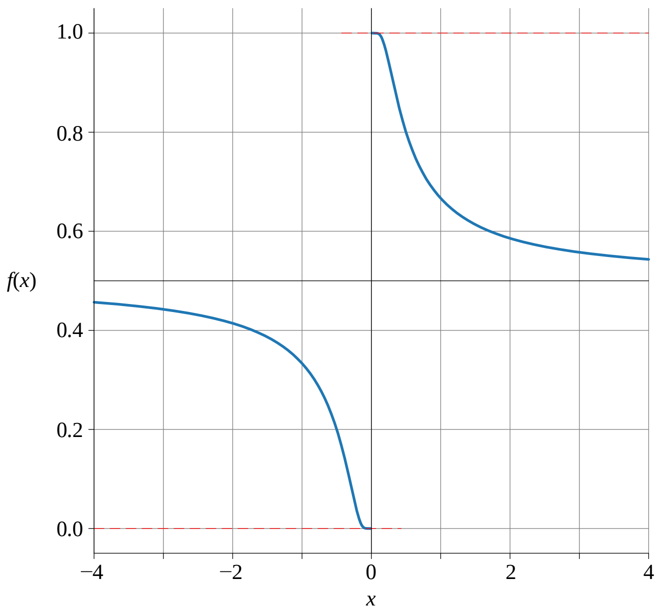


图 6. 函数 $f(x)$ 左右极限不同

左极限

相反，如果将 (1) 绝对值符号去掉并取负，

$$-\delta < x - a < 0 \tag{8}$$

称之为 x 从左侧趋向 a，记做 $x \to a^-$。

将 (3) 中极限条件改为 $x \to a^-$，C 叫做函数 $f(x)$ 的**左极限** (left-hand limit 或 left limit)，记做：

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = C \tag{9}$$

当 (7) 和 (9) 都成立时，(3) 才成立。也就是，当 $x \to a$ 时函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是，左右极限均存在且相等。

极限不存在

⚠ 请大家格外注意，即便左右极限均存在，如果两者不相等，则极限不存在。

如图 6 所示，函数在 $x = 0$ 的右极限为 1：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{-1/x}}=1 \tag{10}$$

而函数在 $x = 0$ 的左极限为 0：

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{-1/x}}=0 \tag{11}$$

显然函数在 $x = 0$ 处不存在极限。此外，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处没有定义。

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在可能有三种情况：(a) $f(x)$ 在 $x = a$ 处左右极限不一致；(b) $f(x)$在 $x = a$ 处趋向无穷；(c) $f(x)$ 在趋向 $x = a$ 时在两个定值之间震荡。这三种情况分别对应图 7 三幅子图。

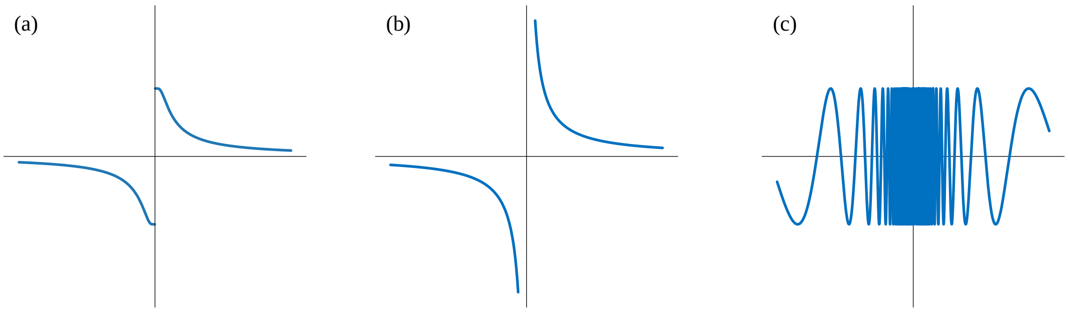


图 7. 极限不存在的三种情况

表 1. 极限的英文表达

数学表达	英文表达
$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x)=b$	As delta x approaches 0, the limit for f of x equals b.
$\Delta x\to 0$	Delta x approaches zero.
$\Delta x\to 0^+$	Delta x goes to zero from the right. Delta x approaches to zero from the right.
$\Delta x\to 0^-$	Delta x goes to zero from the left. Delta x approaches to zero from the left.
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}$	The limit as delta x approaches zero. The limit as delta x tends to zero.
$\lim\limits_{x\to a^+}$	The limit as x approaches a from the right. The limit as x approaches a from the above.
$\lim\limits_{x\to a^-}$	The limit as x approaches a from the left. The limit as x approaches a from the below.
$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$	The limit of $f(x)$ as x approaches c is L.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$	The limit of a sub n as n approaches infinity equals L.
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=L_1$	the limit of f of x as x approaches negative infinity is capital L sub one.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=L_2$	the limit of f of x as x approaches positive infinity is capital L sub two.

Bk3_Ch15_02.py 求函数左右极限，并绘制图 6。

15.4 几何视角看导数：切线斜率

导数 (derivative) 描述函数在某一点处的变化率。几何角度来看，导数可以视作函数曲线切线斜率。

切线斜率

举个中学物理中的例子，加速度 a 是速度 v 的变化率，速度 v 是距离 s 的变化率。

如图 8 所示，匀速直线运动中，距离函数 $s(t)$ 对于时间 t 是一个一次函数。从图像角度来看，$s(t)$ 是一条斜线。

$s(t)$ 图像的切线斜率不随时间变化，也就是说匀速直线运动的速度函数 $v(t)$ 的图像为常数函数。

而 $v(t)$ 的切线斜率为 0，说明加速度 $a(t)$ 图像为取值为 0 的常数函数。

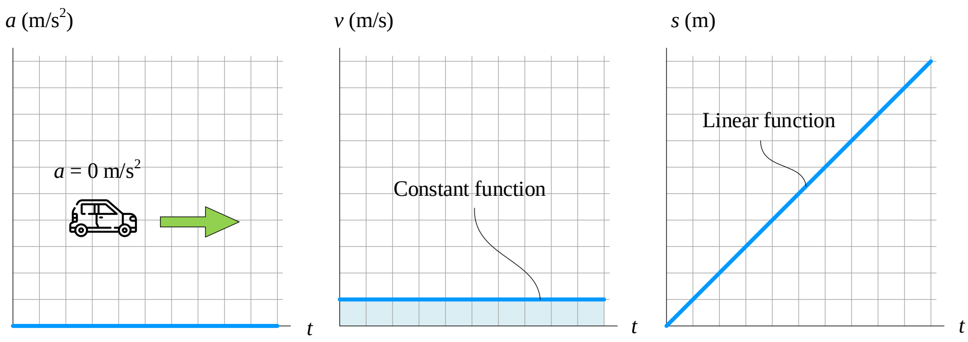


图 8. 匀速直线运动：加速度、速度、距离图像

再看个例子。如图 9 所示，对于匀加速直线运动，距离函数 $s(t)$ 对于时间 t 是一个二次函数。从图像上看，$s(t)$ 在不同时间 t 位置，切线斜率不同。随着 t 增大，切线斜率不断增大，说明运动速度随 t 增大而增大。

完成本章学习后，大家会知道二次函数的导数是一次函数，也就是说速度函数 $v(t)$ 的图像为一次函数。

显然，速度函数 $v(t)$ 的切线斜率不随时间变化。因此，$a(t)$ 图像为常数函数，即加速度为定值。

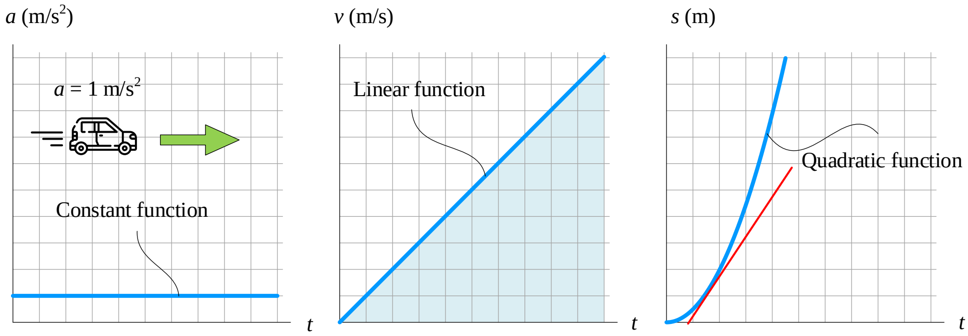


图 9. 匀加速直线运动：加速度、速度、距离

换个角度来看，$a(t)$ 和横轴在一定时间范围，比如在 $[t_1, t_2]$ 围成的面积就是速度变化 $v_2 - v_1$。同理，$v(t)$ 和横轴在 $[t_1, t_2]$ 围成的面积就是距离变化 $s_2 - s_1$。完成这个运算的数学工具就是第 18 章要介绍的定积分。简单来说，积分就是求面积、体积。

再从数值单位变化角度，如图 9 三幅子图纵轴所示，加速度的单位为 m/s^2，速度的单位为 m/s，距离的单位是 m。距离 (m) 随时间 (s) 的变化，单位上就是 m/s；速度 (m/s) 随时间 (s) 的变化，单位上就是 m/s/s，即 m/s^2。

反向来看，加速度 (m/s^2) 到速度 (m/s) 就是求面积的过程。加速度纵轴的单位为 m/s^2，而横轴的单位为 s，因此结果的单位为 m/s^2 × s，即 m/s。同理，速度纵轴的单位为 m/s，横轴单位为 s，因此结果的单位为 m/s × s，即 m。

再次提醒大家，不管是加减乘除，还是微分积分，注意数值单位。

函数导数定义

下面看一下函数导数的确切定义。

对于函数 $y = f(x)$ 自变量 x 在 a 点处一个微小增量 Δx，会导致函数值增量 $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$。

当 Δx 趋向于 0 时，函数值增量 Δy 和自变量增量 Δx 比值的极限存在，则称 $y = f(x)$ 在 a 处可导 (function f of x is differentiable at a)。这个极限值便是函数 $f(x)$ 在 a 点处一阶导数值：

$$f'(a) = f'(x)\big|_{x=a} = \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x}\bigg|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{12}$$

如图 10 所示，从几何角度看，随着 Δx 不断减小，割线不断接近切线。

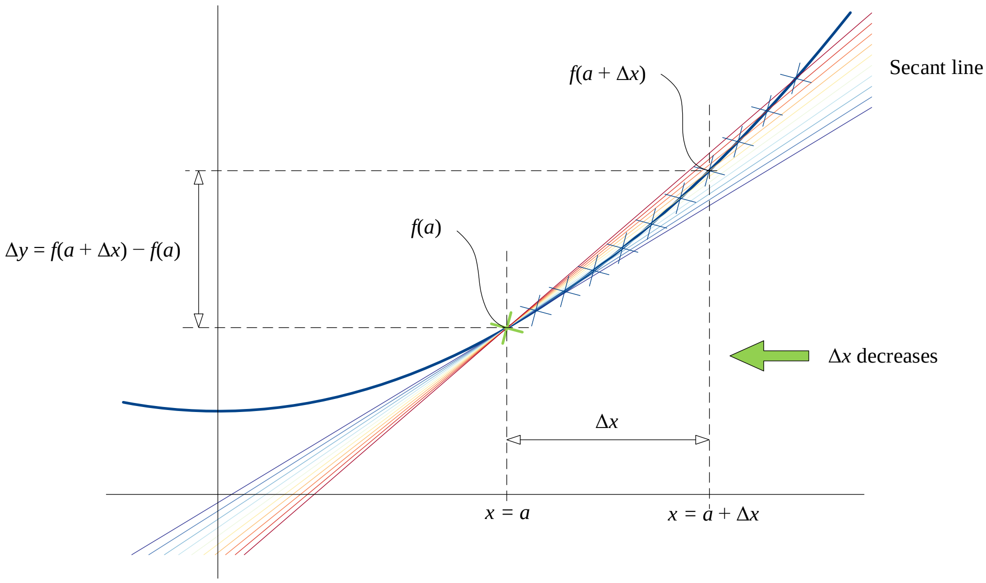


图 10. 导数就是变化率

Δ 和 d 都是“差” (difference) 的含义。但是，Δ 代表近似值，比如 $\Delta x \to 0$；而 d 是精确值，比如 dx。白话说，dx 是 Δx 趋向于 0 的精确值。

如果函数 $y = f(x)$ 在 $x = a$ **可导** (differentiable) 则函数在该点处**连续** (continuous)；但是，函数在某一点处连续并不意味着函数可导，如图 11 所示两种情况。

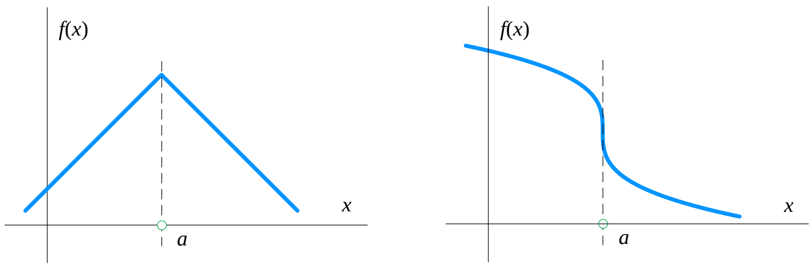


图 11. 函数在 $x = a$ 不存在导数的两种情况

⚠ 再次注意，本书用 x_1、x_2、x_3 等等表达变量，而不是变量 x 取值。如果有必要对自变量取值进行编号，本书会使用上标记法 $x^{(1)}$、$x^{(2)}$、$x^{(3)}$ 等等。

Bk3_Ch15_03.py 绘制图 10。

在 Bk3_Ch15_03.py 基础上，我们做了一个 App 用来演示在函数曲线不同点如何用割线近似函数切线斜率。请参考 Streamlit_Bk3_Ch15_03.py。

15.5 导数也是函数

导数也常被称作导数函数或导函数，因为导数也是函数。

图 12 所示函数曲线在不同点处切线斜率随着自变量 x 变化。再次强调，函数 $f(x)$ 对自变量 x 的一阶导数 $f'(x)$ 也是一个函数，它的自变量也是 x。$f'(x)$可以读作 (f prime of x)。

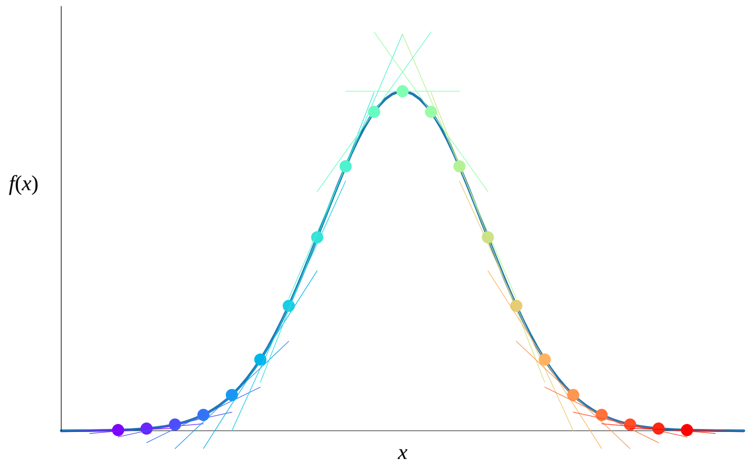


图 12. 函数不同点处切线斜率随着自变量 x 变化

一阶导数

给定二次函数，$f(x) = x^2$。下面利用 (12) 推导它的一阶导数：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \underbrace{\Delta x}_{\to 0} = 2x
\end{aligned}
\tag{13}
$$

几何角度来看，$f(x) = x^2$ 相当于边长为 x 的正方形面积。图 13 所示为当 x 增加到 $x + \Delta x$ 时，函数值变化对应正方形面积变化。x 到 $x + \Delta x$，正方形面积增加 $2x\Delta x + \Delta x^2$。

根据导数定义，函数导数为比值 $(2x\Delta x + \Delta x^2)/\Delta x = 2x + \Delta x$；当 $\Delta x \to 0$ 时，可以消去 Δx 一项。

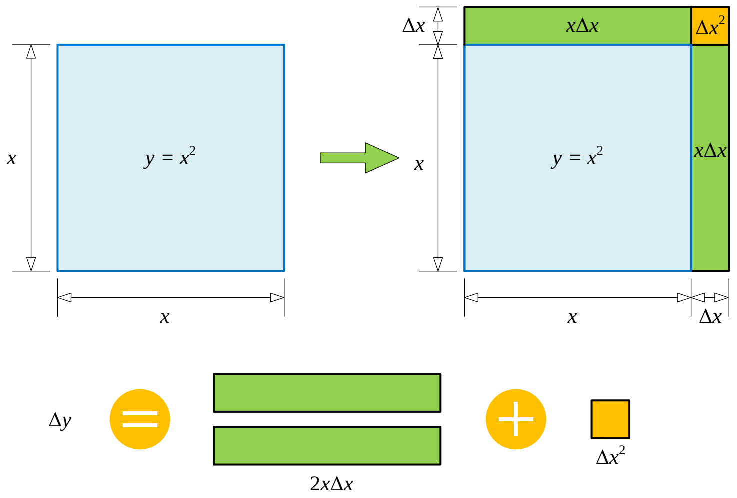


图 13. 几何角度推导 $f(x) = x^2$ 的一阶导数

类似地，推导 $f(x) = x^n$ 的导数，n 为大于 1 的正整数：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x + \cdots \Delta x^{n-1}}_{\to 0} = nx^{n-1} \end{aligned} \tag{14}$$

举个例子

图 14 (a) 所示函数如下：

$$f(x) = x^2 + 2 \tag{15}$$

根据前文推导，它的一阶导数解析式如下：

$$f'(x) = 2x \tag{16}$$

如图 14 (b) 所示，(15) 这个二次函数的一阶导数图像为一条斜线。

$x < 0$ 时，x 增大 $f(x)$ 减小，此时函数导数为负。$x > 0$，x 增大 $f(x)$ 增大，函数导数为正。值得注意的是 $x = 0$，$f(x)$ 取得**最小值** (minimum)，此处函数 $f(x)$ 导数值为 0。

而对 (16) 再求一阶导数得到的结果是常数函数，具体如所示图 14 (c)。

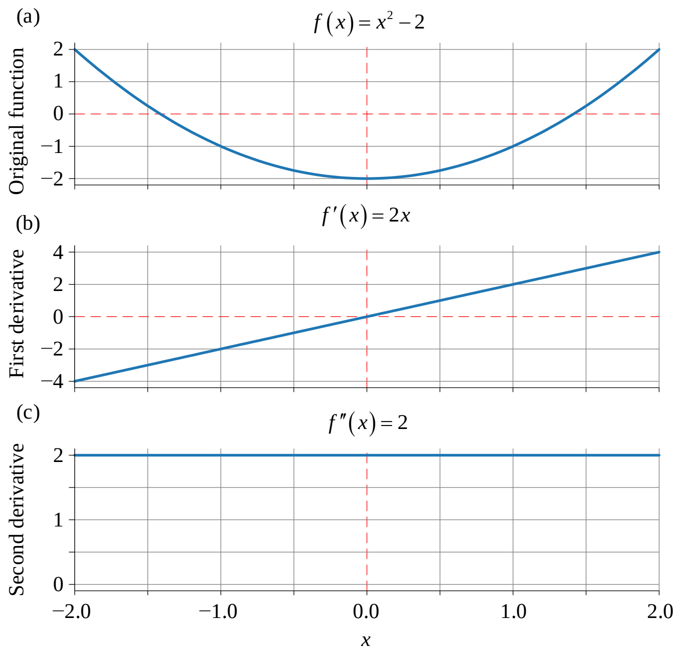
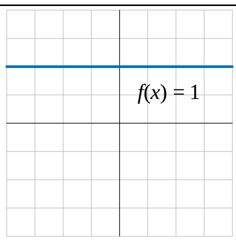
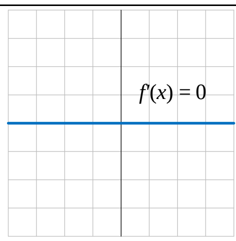
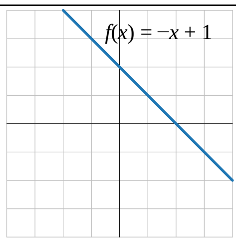
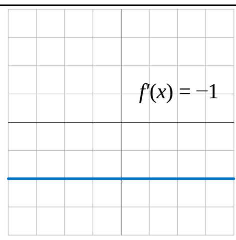
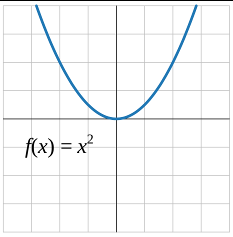
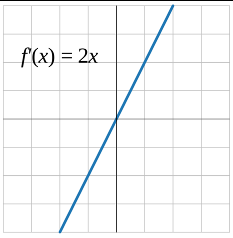
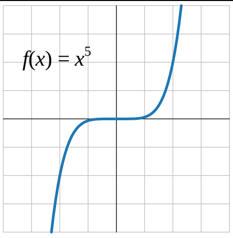
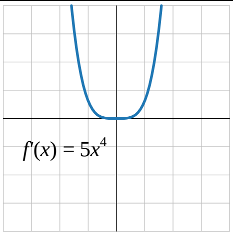
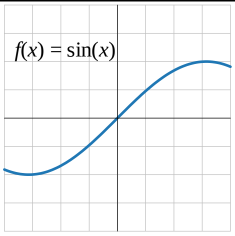
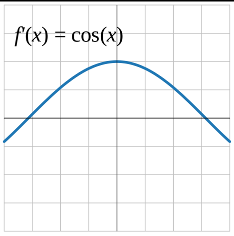
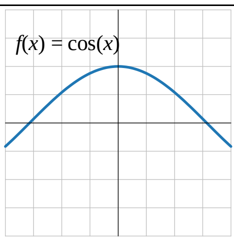
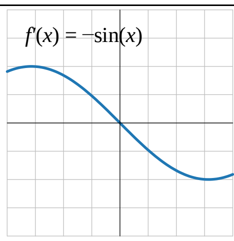
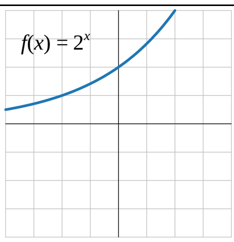
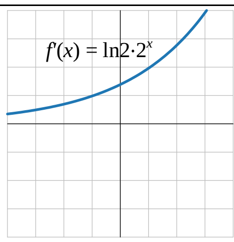
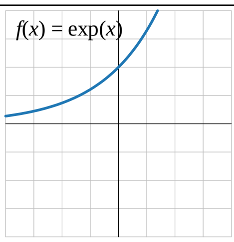
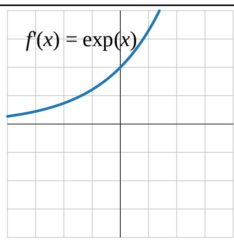


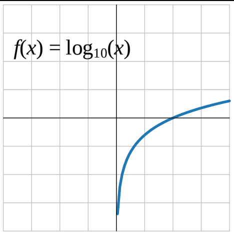
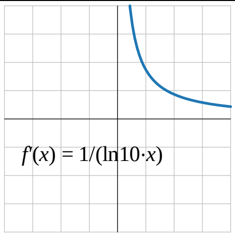
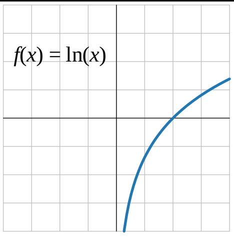
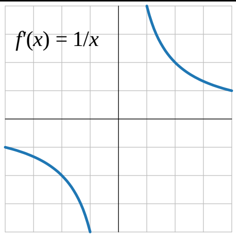
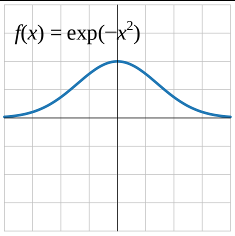
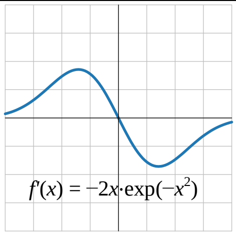
图 14. 二次函数、一阶导数、二阶导数

表 2 总结了常用函数导数及图像，请大家自行绘制这些图像。

表 2. 常用函数导数及图像

函数	函数图像举例	一阶导数	一阶导数图像举例
常数函数 $f(x) = C$		$f'(x) = 0$	
一次函数 $f(x) = ax$		$f'(x) = a$	

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$		$f'(x)=2ax+b$	
幂函数 $f(x)=x^p$		$f'(x)=px^{p-1}$	
正弦函数 $f(x)=\sin x$		$f'(x)=\cos x$	
余弦函数 $f(x)=\cos x$		$f'(x)=-\sin x$	
指数函数 $f(x)=b^x$ $(b>0,b\neq 1)$		$f'(x)=\ln b\cdot b^x$	
自然指数函数 $f(x)=\mathrm{e}^x=\exp(x)$		$f'(x)=\mathrm{e}^x=\exp(x)$	

对数函数 $f(x)=\log_b x$ $(x>0,b>0,b\neq 1)$		$f'(x)=\dfrac{1}{\ln b\cdot x}$	
自然对数函数 $f(x)=\ln x$ $(x>0)$		$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	
高斯函数 $f(x)=\exp(-\gamma x^2)$		$f'(x)=-2\gamma x\exp(-\gamma x^2)$	

二阶导数

(15) 这个二次函数的二阶导数是其一阶导数的一阶导数，

$$f''(x)=2 \tag{17}$$

如图 14 (c) 所示，(15) 这个二次函数的二阶导数图像为一条水平线，即常数函数。

图 15 所示为，高斯函数以及其一阶导数和二阶导数函数图像。

容易发现，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值，对应的一阶导数为 0，二阶导数为负。这一点对于理解一元函数的极值非常重要，本书第 19 章将深入介绍。

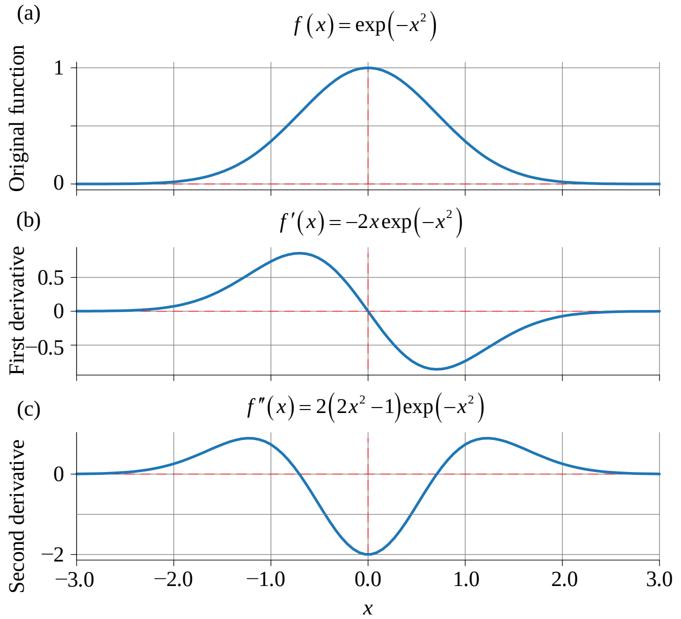


图 15. 高斯函数、一阶导数、二阶导数

图 16 所示为，三次函数图像，以及其一阶导数和二阶导数函数图像。容易发现，$x = 0$ 处函数一阶导数为 0；但是，$x = 0$ 既不对应函数最大值，也不是最小值。

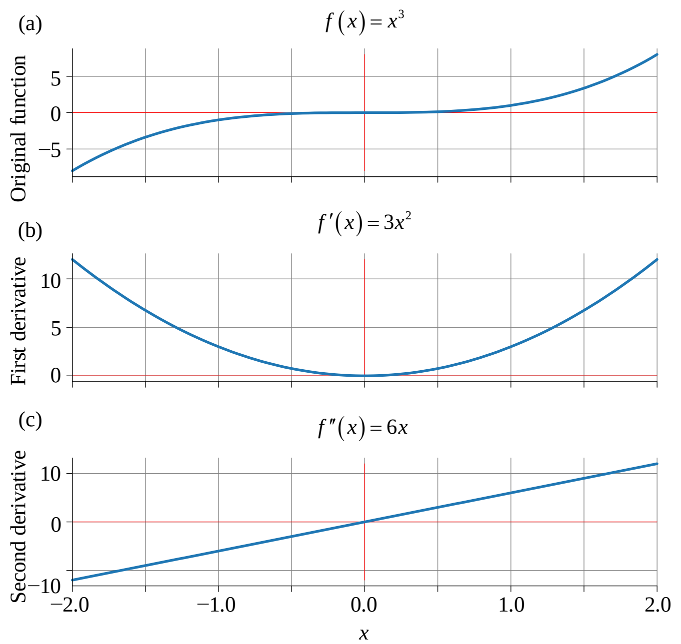


图 16. 三次函数、一阶导数、二阶导数

驻点

有了以上分析，我们可以聊一聊驻点这个概念。

对于一元函数 $f(x)$，**驻点** (stationary point) 是函数一阶导数为 0 的点。从图像上来看，一元函数 $f(x)$ 在驻点处的切线平行于 x 轴。

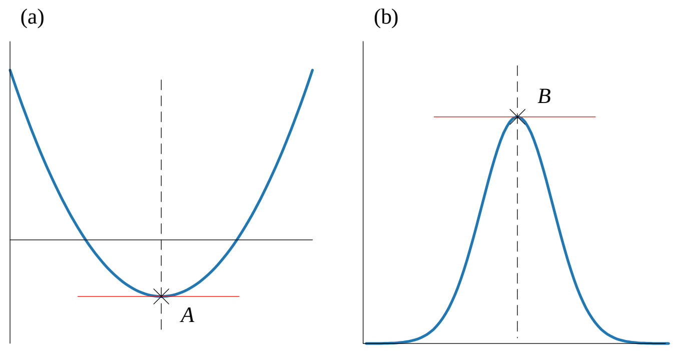


图 17. 驻点可能是极小值、极大值或鞍点

如图 17 所示，驻点可能是一元函数的极小值、极大值、鞍点。

⚠ 注意，这里我们没有用最大值和最小值，这是因为函数可能存在不止一个“山峰”或“山谷”。

➜ 本书第 19 章将在讲解优化问题时深入探讨这些概念。

表 3. 常用导数法则

和	$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$
差	$\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x)$
积	$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
商	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
倒数	$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$

表 4. 导数相关的英文表达

数学表达	英文表达
$\mathrm{d}y$	$\mathrm{d}y$ differential of y

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	the derivative of y with respect to x the derivative with respect to x of y d y by d x d y over d x
$\mathrm{d}f(x)$	The derivative of f of x
$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$	The derivative of f of x with respect to x
$\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}$	the derivative of f with respect to x at a d y by d x at a d y over d x at a
$\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x}=3x^2$	The derivative of x cubed with respect to x equals three x squared.
$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	d two y by d x squared the second derivative of y with respect to x
$\frac{\mathrm{d}^2x^3}{\mathrm{d}x^2}=6x$	The second derivative of x cubed with respect to x equals to six x.
$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$	nth derivative of y with respect to x
$f'(x)$	f dash x f prime of x the derivative of f of x with respect to x the first-order derivative of f with respect to x
$f'(a)$	f prime of a
$f''(x)$	f double-dash x f double prime of x the second derivative of f with respect to x the second-order derivative of f with respect to x
$f'''(x)$	f triple prime of x f triple-dash x f treble-dash x the third derivative of f with respect to x the third-order derivative of f with respect to x
$f^{(4)}(x)$	the fourth derivative of f with respect to x the fourth-order derivative of f with respect to x
$f^{(n)}(x)$	the nth derivative of f with respect to x the nth-order derivative of f with respect to x f to the nth prime of x
$f'\left(g(x)\right)$	f prime of g of x f prime at g of x
$f'\left(g(x)\right)g'(x)$	the product of f prime of g of x and g prime of x
$\left(f(x)g(x)\right)'$	the quantity of f of x times g of x, that quantity prime
$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	f prime of x times g of x, that product plus f of x times g prime of x
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	the quantity f of x over g of x, that quantity prime
$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	the fraction, the numerator is f prime of x times g of x, that product minus f of x times g prime of x, the denominator is g squared of x

Bk3_Ch15_04.py 绘制图 14；请读者修改代码绘制本节其他图像。本节代码采用 sympy.abc import x 定义符号变量，然后利用 sympy.diff() 计算一阶导数函数符号式；利用 sympy.lambdify() 将符号式转换成函数。

每个天才的诞生都需要时代、社会、思想的土壤。牛顿之所以成为牛顿，是一代代巨匠层层累土的结果。

牛顿开创经典牛顿力学体系，以此为基础的牛顿机械论自然观让当时人类思想界的面貌天翻地覆，它是人类文明的划时代的里程碑。必须认识到牛顿的力学体系是基于哥白尼、开普勒、伽利略等人知识之上的继承和发展。在牛顿所处的时代，哥白尼的日心说已经深入人心，开普勒提出行星运动三定律，伽利略发现惯性定律和自由落体定律。此外，牛顿之所以能发明微积分，离不开笛卡尔创立的解析几何。

人类知识体系是由一代代学者不断继承发展而丰富壮大的。每一个发现、每一条定理，都是知识体系重要的一环，它们既深受前辈学者影响，又启迪后世学者。