23 Fundamentals of Linear Algebra
鸡兔同笼 1
之从《孙子算经》到线性代数

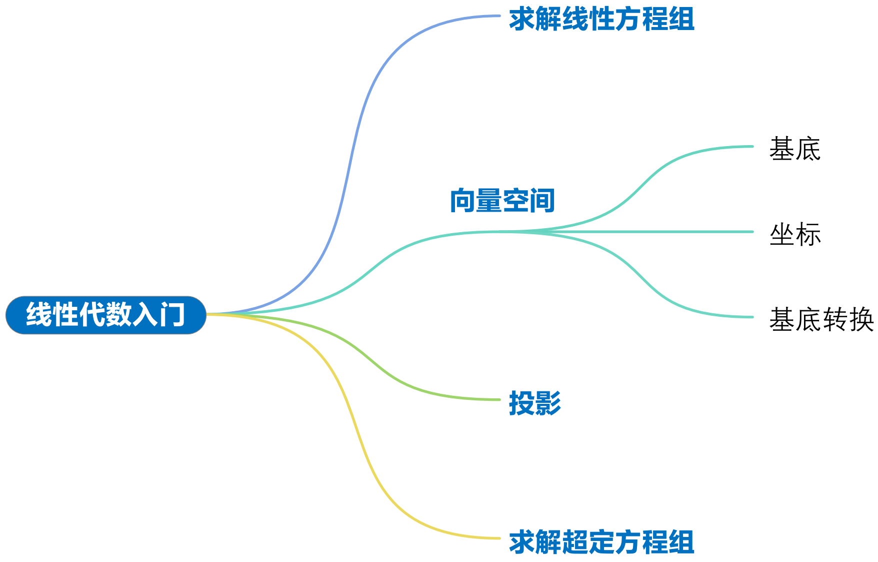
这就是数学。

她提醒你无形灵魂的存在，她赋予数学发现以生命；她唤醒沉睡的心灵，她净化蒙尘的心智；她给思想以光辉。她涤荡与生俱来的蒙昧与无知。

This, therefore, is mathematics: she reminds you of the invisible form of the soul; she gives life to her own discoveries; she awakens the mind and purifies the intellect; she brings light to our intrinsic ideas; she abolishes oblivion and ignorance which are ours by birth.

—— 普罗克洛 (Proclus) | 古希腊哲学家 | 412 ~ 485

◀ `matplotlib.pyplot.quiver()` 绘制箭头图
◀ `numpy.column_stack()` 将两个矩阵按列合并
◀ `numpy.linalg.inv()` 矩阵求逆
◀ `numpy.linalg.solve()` 求解线性方程组
◀ `numpy.matrix()` 创建矩阵
◀ `sympy.solve()` 求解符号方程组
◀ `sympy.solvers.solveset.linsolve()` 求解符号线性方程组


线性代数入门
求解线性方程组
向量空间
基底
坐标
基底转换
投影
求解超定方程组

23.1 从鸡兔同笼说起

云山青青，风泉泠泠，山色可爱，泉声可听。土地平旷，屋舍俨然，阡陌交通，鸡犬相闻。

崇山峻岭之中，茂林修竹深处，有个小村，村中有五十余户人家。大伙儿甘其食，美其服，安其居，乐其俗。黄发垂髫，怡然自乐。

村民善养鸡兔，又善筹算。在这个与世隔绝的小村庄，鸡兔同笼这样的经典数学问题，代代流传，深入人心。村民中有个农夫，他特别痴迷数学。最近他手不释卷地阅读一本叫《线性代数》的舶来经典。

本书最后三章给大家说说村民在养鸡养兔遇到的数学问题，讲讲农夫如何用学到的线性代数工具帮助大伙儿解决这些问题。

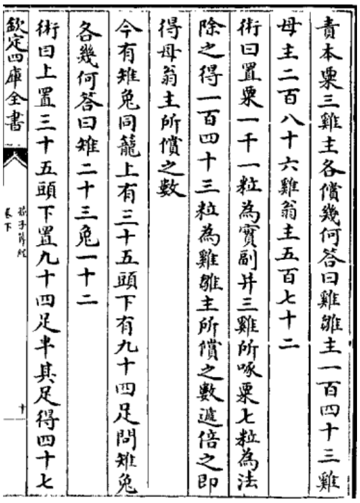

責本粟三雞主各償幾何答曰雞雛主一百四十三雞
母主二百八十六雞翁主五百七十二
術曰置粟一千一粒為實副并三雞所啄粟七粒為法
除之得一百四十三粒為雞雛主所償之數遞倍之即
得母翁主所償之數
今有雉兔同籠上有三十五頭下有九十四足問雉兔
各幾何答曰雉二十三兔一十二
術曰上置三十五頭下置九十四足半其足得四十七
欽定四庫全書 孫子算經 卷下

图 1.《孙子算经》中的鸡兔同笼问题 (来源：https://cnkgraph.com/)

鸡兔同笼原题

《孙子算经》中鸡兔同笼问题这样说，“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”

本书前文构造二元一次方程组，用代数方法解决鸡兔同笼问题：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35 \\ 2x_1 + 4x_2 = 94 \end{cases} \tag{1}$$

其中，x_1 为鸡数量，x_2 为兔数量。

求得笼子里有 23 只鸡，12 只兔：

$$\begin{cases} x_1 = 23 \\ x_2 = 12 \end{cases} \tag{2}$$

此外，本书之前也介绍过利用坐标系图解鸡兔同笼问题。

线性方程组

农夫决定用自己刚刚学过的线性代数知识解决“鸡兔同笼”这个数学问题。

(1) 中第一个等式写成矩阵运算形式，得到：

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 35 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ \ \end{bmatrix} \tag{3}$$

(1) 第二个等式也写成类似形式：

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 94 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} & \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ 94 \end{bmatrix} \tag{4}$$

结合 (3) 和 (4)，农夫便用矩阵形式写出了鸡兔同笼问题的线性方程组：

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 35 \\ 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 94 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} \tag{5}$$

(5) 可以写成：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

其中，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$\boldsymbol{x}$ 是未知变量构成的列向量，$\boldsymbol{A}$ 为方阵且可逆，$\boldsymbol{x}$ 可以利用下式求得：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{8}$$

代入具体数值计算得到 $\boldsymbol{x}$：

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 12 \end{bmatrix} \tag{9}$$

`Bk3_Ch23_1.py` 完成上述运算。

23.2 “鸡”向量与“兔”向量

农夫观察矩阵 $\boldsymbol{A}$，发现它是由两个列向量左右排列构造而成：

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Head} \\ \text{Feet} \end{array} \tag{10}$$

由此，农夫将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 两个左右排列的列向量：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

农夫特别好奇 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 这两个向量的具体含义，他决定深入分析一番。

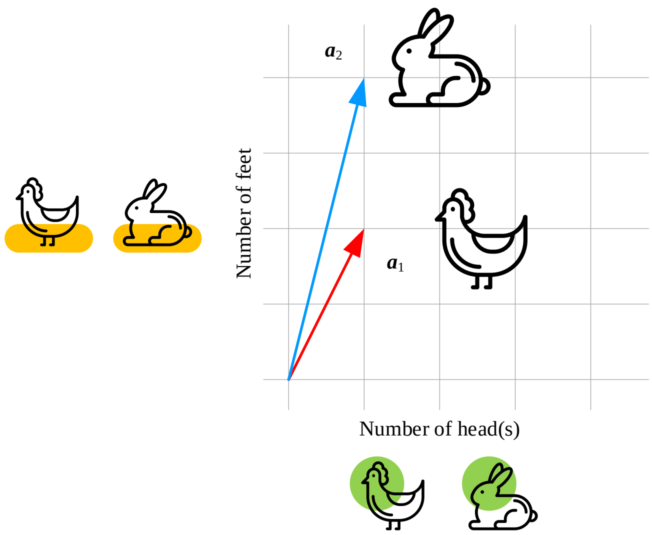


图 2. 鸡向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和兔向量 $\boldsymbol{a}_2$

农夫认为 $\boldsymbol{a}_1$ 代表一只鸡，特征是一个头、两只脚：

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} \#\ \text{head} \\ 1 \\ \#\ \text{feet} \\ 2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$\boldsymbol{a}_2$ 代表一只兔，特征是有一个头、四只脚：

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} \#\ \text{head} \\ 1 \\ \#\ \text{feet} \\ 4 \end{bmatrix} \tag{13}$$

农夫决定管 $\boldsymbol{a}_1$ 叫“鸡向量”，$\boldsymbol{a}_2$ 叫“兔向量”。

图 2 所示为鸡向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和兔向量 $\boldsymbol{a}_2$。图 2 中坐标轴的横轴为头的数量，纵轴为脚的数量。$\boldsymbol{e}_1$ 代表“头”向量，$\boldsymbol{e}_2$ 代表“脚”向量。显然，$\boldsymbol{e}_1$ 是横轴单位向量，$\boldsymbol{e}_2$ 是纵轴单位向量。

分解

如图 3 所示，鸡向量 $\boldsymbol{a}_1$ 可以写成：

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} \overset{\text{\# head}}{1} \\ \overset{\text{\# feet}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \tag{14}$$

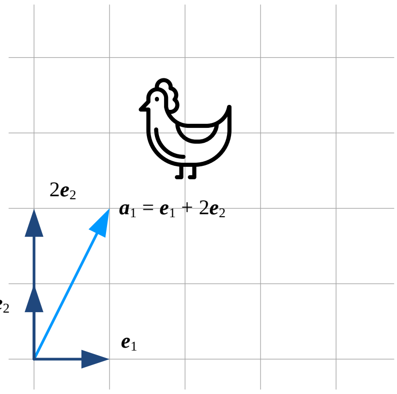


图 3. 鸡向量 $\boldsymbol{a}_1$

如图 4 所示，兔向量 $\boldsymbol{a}_2$ 可以写成：

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} \overset{\text{\# head}}{1} \\ \overset{\text{\# feet}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 \tag{15}$$

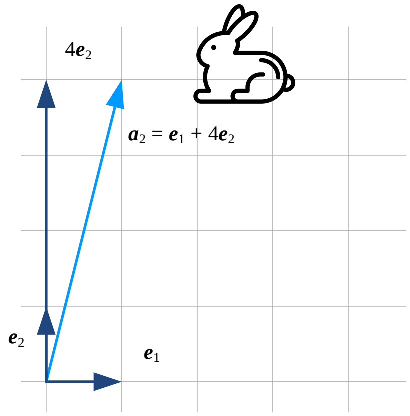
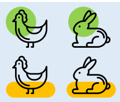


图 4. 兔向量 $\boldsymbol{a}_2$

再谈鸡兔同笼

回到鸡兔同笼问题，x_1 代表鸡的数量，x_2 为兔的数量。农夫将 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ 代入 (6)，得到：

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 35 \\ 94 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{b} \end{array} \tag{16}$$

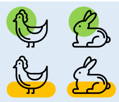


白话说，(16) 代表 x_1 份 $\boldsymbol{a}_1$ 和 x_2 份 $\boldsymbol{a}_2$ 组合，得到 $\boldsymbol{b}$ 向量。

为了方便可视化，农夫将向量 $\boldsymbol{b}$ 改为如下具体值。也就是鸡兔同笼问题条件变为：鸡兔同笼有 3 个头、8 只脚。

农夫把线性方程组写成：

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{b} \end{array} \tag{17}$$



农夫此刻在思考这个问题，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 具体代表什么？

(17) 等式左边的列向量 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 代表鸡兔数量，而 (17) 右侧 $\boldsymbol{b}$ 代表头、脚数量。

坐标系角度

从坐标系的角度来看，$\boldsymbol{x}$ 在“鸡-兔系”中，而 $\boldsymbol{b}$ 在“头-脚系”中。

图 5 左侧方格就是“头-脚系”，而图 5 右侧平行四边形网格便是“鸡-兔系”。

“头-脚系”中，“头”向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和“脚”向量 $\boldsymbol{e}_2$，张成了方格面。白话说，在“头-脚系”中，农夫看到的是鸡兔的头和脚数。

“鸡-兔系”中，“鸡”向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和“兔”向量 $\boldsymbol{a}_2$，张成了平行四边形网格。在“鸡-兔系”中，农夫认为自己关注的是鸡兔具体只数。

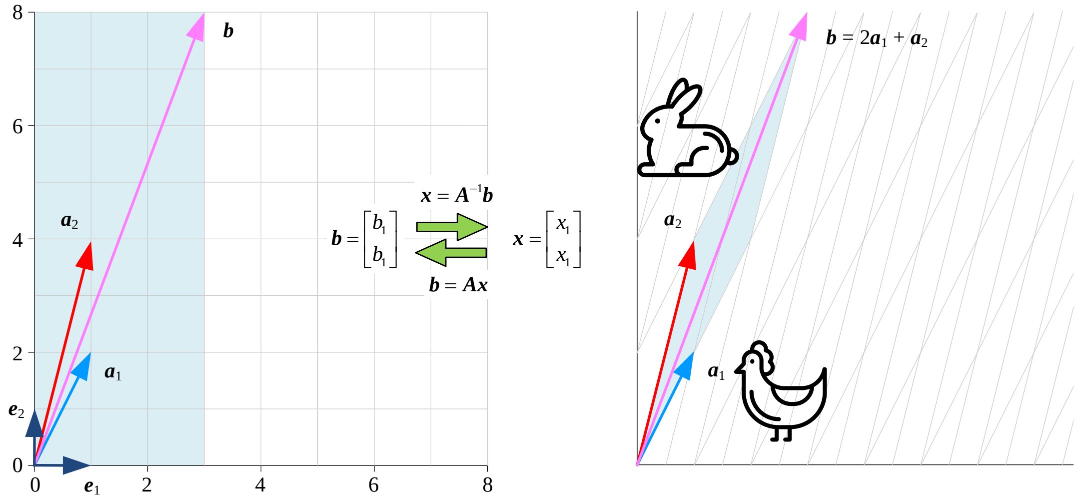


图 5. “头-脚系”和“鸡-兔系”相互转换

$\boldsymbol{A}$ 作为桥梁，完成从“鸡-兔系”$\boldsymbol{x}$ 向“头-脚系”$\boldsymbol{b}$ 转换：

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{b} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{18}$$

反方向来看，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 完成“头-脚”$\boldsymbol{b}$ 向“鸡-兔”$\boldsymbol{x}$ 转换：

$$\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \tag{19}$$

`Bk3_Ch23_2.py` 绘制图 5。

在 `Bk3_Ch23_2.py` 基础上，我们做了一个 App 用来可视化矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对网格形状的影响。请参考 `Streamlit_Bk3_Ch23_2.py`。

23.3 那几只毛绒耳朵

农夫看了看同处一笼的鸡兔，突然发现在头、脚之外，赫然独立几只可爱至极的毛绒耳朵。

他突然想到，除了查头数、脚数之外，查毛绒耳朵的数量应该更容易确定兔子的数量！虽然，生理学角度，鸡也有耳朵，但是极不容易被发现。

加了毛绒耳朵这个特征之后，二维向量就变成了三维向量。

鸡向量 $\boldsymbol{a}_1$ 变为：

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

兔向量 $\boldsymbol{a}_2$ 变为：

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

在平面直角坐标系中，升起第三个维度——毛绒耳朵数量，农夫便得到如图 6 所示的三维直角坐标系。其中，$\boldsymbol{e}_3$ 代表“毛绒耳朵”向量。

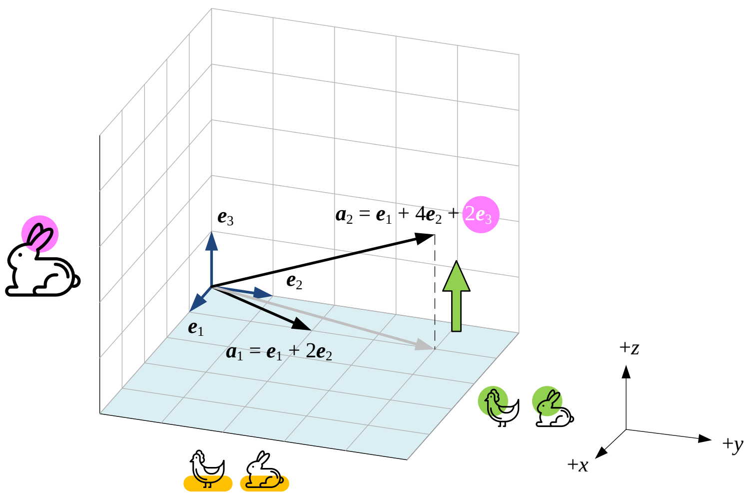


图 6. 三维直角坐标系中的鸡向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和兔向量 $\boldsymbol{a}_2$

图 6 中，一只鸡一个头、两只脚、没有毛绒耳朵，因此鸡向量 $\boldsymbol{a}_1$ 为：

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \tag{22}$$

观察图 6，鸡向量 $\boldsymbol{a}_1$ 还“趴”在水平面上，这是因为鸡没有毛绒耳朵！

一只兔有一个头、四只脚、两个毛绒耳朵，$\boldsymbol{a}_2$ 写成：

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \tag{23}$$

而兔向量 $\boldsymbol{a}_2$ 还已经“立”在水平面之外，就是因为那两只毛绒耳朵 (撸撸)。

计算头、脚、毛绒耳朵数量

如果给定一笼鸡兔的鸡和兔的数量，让大家求解头、脚、毛绒耳朵数量，就是从“鸡-兔系”到“头-脚-毛绒耳朵系”的转化。

假设有鸡 10 只 (x_1)、兔 5 只 (x_2)，可以通过下式计算头、脚和毛绒耳朵数量：

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 40 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{24}$$

这样，通过上述计算，农夫便完成了从“鸡-兔系”到“头-脚-毛绒耳朵系”的转换。这个过程是从二维到三维，相当于“升维”。

23.4 “鸡兔”套餐

村子里来个小贩买小鸡和小兔，但可惜不单独售卖。

小贩提供两种套餐捆绑销售：A 套餐，3 鸡 1 兔；B 套餐，1 鸡 2 兔。

这可难坏了农夫，因为他想买 10 只鸡、10 只兔。该怎么组合 A、B 两种套餐？

农夫想了想，发现这不就是个“鸡兔同笼”问题的升级版嘛！下面，农夫决定用线性代数这个万能工具试试看。

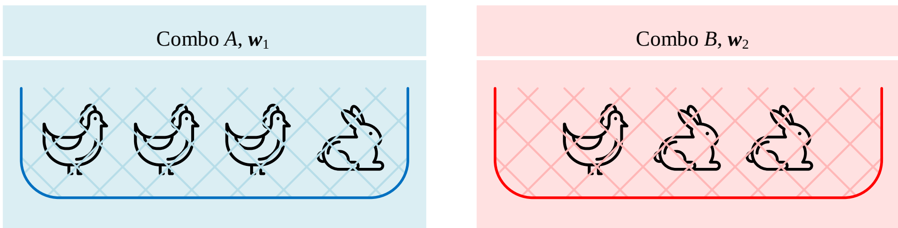


图 7. 鸡兔 A、B 套餐

A-B 套餐系

农夫将 A、B 套餐记做列向量 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$，具体取值如下：

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

农夫想买 10 只鸡、10 只兔，记做 $\boldsymbol{a}$：

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{26}$$

令，所需套餐 A 的数量为 x_1，套餐 B 的数量为 x_2，构造如下等式：

$$x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 = x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{27}$$

即：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{28}$$

如图 8 所示，向量 $\boldsymbol{a}$ 在“鸡-兔系”到“A-B 套餐系”的不同意义。图 8 (a) 给出的是鸡兔数量，图 8 (b) 展示的套餐数量。

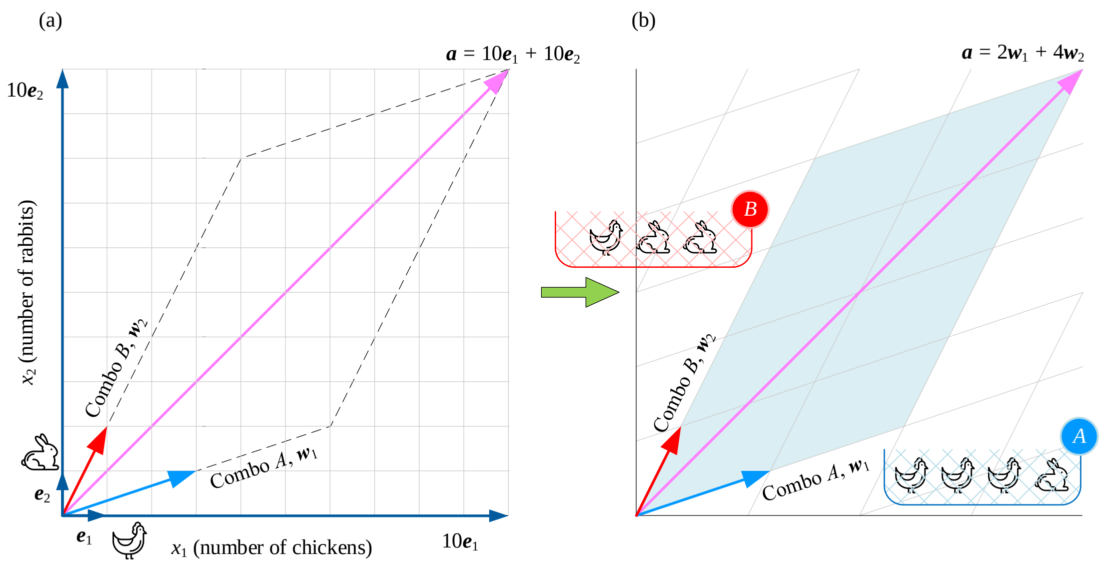


图 8. 向量 $\boldsymbol{a}$ 在“鸡-兔系”到“A-B 套餐系”的不同意义

这样农夫求得向量 $\boldsymbol{x}$ 为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} @ \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} @ \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{29}$$

线性组合

也就是说，农夫可以买 2 份 A 套餐、4 份 B 套餐，这样一共买到 10 只鸡、10 只兔，对应算式为：

$$2\boldsymbol{w}_1 + 4\boldsymbol{w}_2 = 2\times\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + 4\times\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix} \tag{30}$$

翻阅《线性代数》，农夫发现 (30) 这个等式就叫**线性组合** (linear combination)。书上管 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 叫做**基底** (basis)，写成 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$。也就是说，图 9 左图的基底为$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$，右图的基底为 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$。

白话说，就是用 2 份 $\boldsymbol{w}_1$ 向量、4 份 $\boldsymbol{w}_2$ 向量混合得到向量 $\boldsymbol{a}$。通过线性组合的向量仍在平面之内。

如图 9 所示，农夫发现，如果只看网格的话，(30) 中数学运算完成了“鸡-兔系”到“*A*-*B* 套餐系”的坐标系转化。

(10, 10) 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在“鸡-兔系”的坐标。

而 2 份 *A* 套餐、4 份 *B* 套餐相当于 (2, 4) 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在“*A*-*B* 套餐系”的坐标。

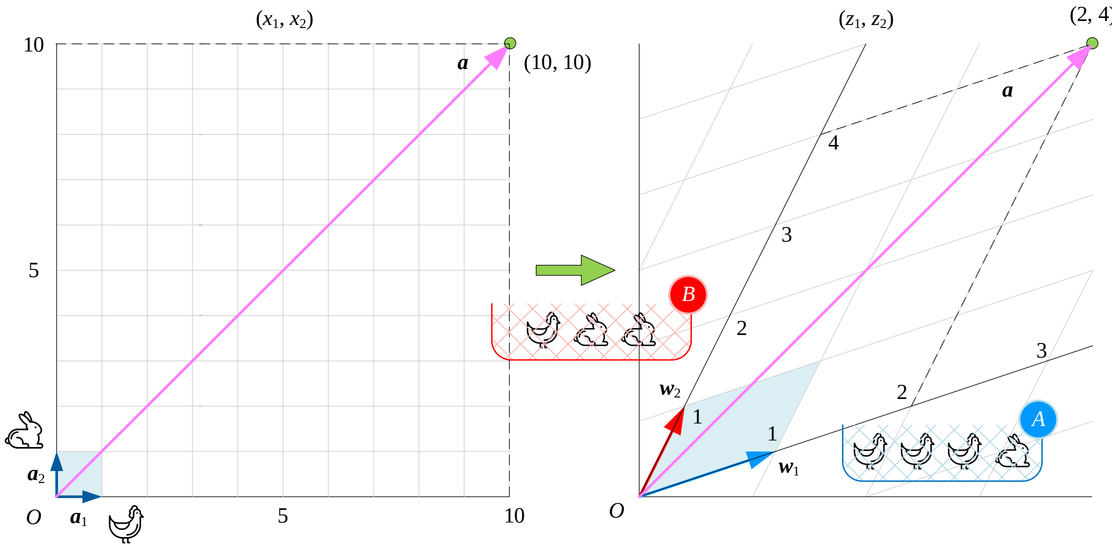


图 9. 坐标系转换，“鸡-兔系”到“*A*-*B* 套餐系”

基底变换

农夫回想，不管是从“头、脚系”到“鸡-兔系”，还是从“鸡-兔系”到“*A*-*B* 套餐系”，都叫做**基底变换** (change of basis)。

对于向量 $\boldsymbol{a}$，在基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ 下，坐标值为 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$：

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 \tag{31}$$

也就是：

$$
\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{32}
$$

同一个向量 $\boldsymbol{a}$，在基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ 下，坐标值为 $[z_1, z_2]^\mathrm{T}$：

$$
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{z}} = z_1\boldsymbol{w}_1 + z_2\boldsymbol{w}_2 \tag{33}
$$

即：

$$
\boldsymbol{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{34}
$$

联立 (31) 和 (33) 得到：

$$
\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{z} \tag{35}
$$

即，

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{W}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{36}
$$

新坐标 $\boldsymbol{z}$，可以通过下式得到：

$$
\boldsymbol{z} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{37}
$$

也就是说，$\boldsymbol{W}$ 是新旧坐标转换的桥梁。如图 9 所示，转换前后，网格形状发生变化，但是平面还是那个平面。

“线性代数真是有趣、有用！”，农夫喃喃自语。

`Bk3_Ch23_3.py` 绘制本节两个坐标系网格图像。

23.5 套餐转换：基底转换

前来买鸡兔的村民在小贩周围越聚越多，大家都说套餐 A 和 B 组合太繁琐，纷纷抱怨。

为了方便村民买鸡兔，小贩推出两个新套餐 C 和 D：套餐 C，两只小鸡；套餐 D，两只小兔。也就是说，鸡兔都是成对贩售。

农夫决定用刚刚学过的基底转换思路来看看这个新基底。

令第三个基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ 代表“C-D 套餐系”。在基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 可以写成：

$$a = Vs = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}}_{s} = s_1 v_1 + s_2 v_2 \tag{38}$$

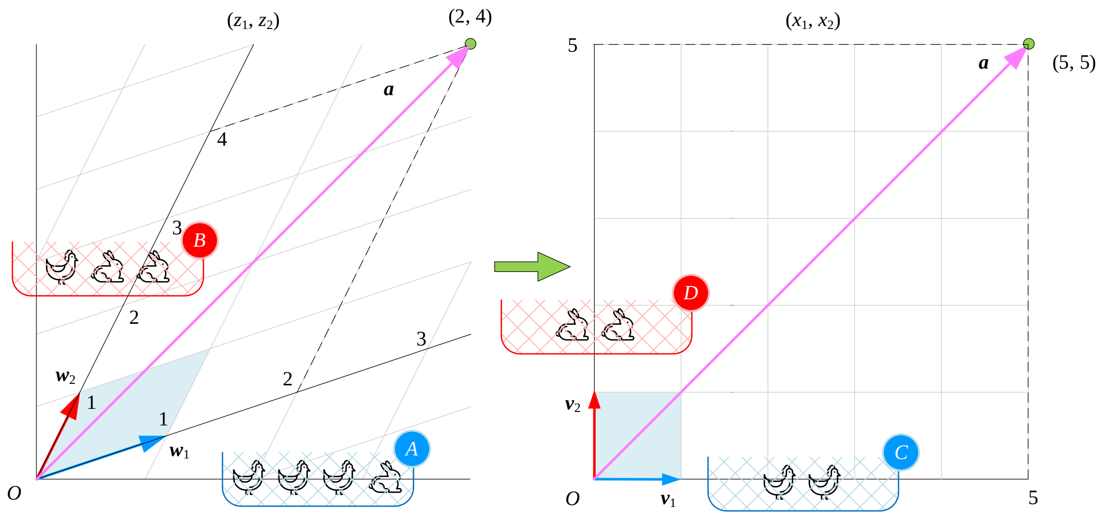


图 10. 套餐转换，“*A*-*B* 套餐系”到“*C*-*D* 套餐系”

联立 (33) 和 (38)，得到：

$$Wz = Vs \tag{39}$$

也就是说，s 可以通过下式得到：

$$s = V^{-1}Wz \tag{40}$$

而 V 为：

$$V = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}}_{V} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

这样，向量 a 从 $\{w_1, w_2\}$ 基底到 $\{v_1, v_2\}$ 基底，新坐标 s 为：

$$s = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{W} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{z} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{42}$$

也就是说，农夫想要买 10 只鸡、10 只兔的话，需要 5 份套餐 *C* 和 5 份套餐 *D*。

23.6 猪引发的投影问题

农夫突然改了主意，他对小贩说，我想买 10 只鸡、10 只兔，还要买 5 只猪！

小贩很无奈，说小猪早就卖断货了。

农夫略有所思，说了句，“我和你之间，存在 5 只猪的距离。”

从向量角度，农夫自己想买 10 只鸡、10 只兔、5 只猪，可以写成向量 $\boldsymbol{y}$：

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{43}$$

然而，小贩提供的“A-B 套餐”只能满足农夫部分需求，记做向量 $\boldsymbol{a}$：

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 = x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

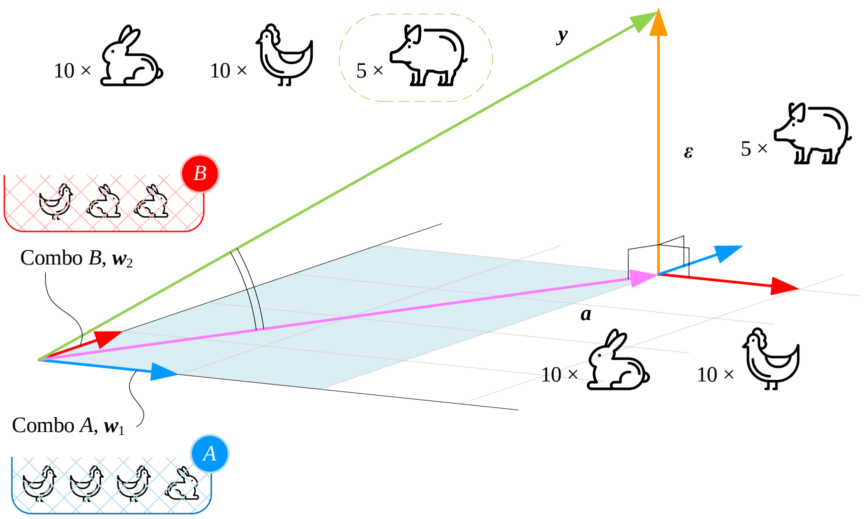


图 11. 农夫的需求和小贩提供的“A-B 套餐”平面存在 5 只猪的距离

农夫的需求 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的“差距”记做 $\boldsymbol{\varepsilon}$，计算得到具体值：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{45}$$

垂直

如图 11 所示，容易发现 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 垂直于 $\boldsymbol{w}_1$、$\boldsymbol{w}_2$、$\boldsymbol{a}$。下面，农夫用刚学的向量内积证明一下。

首先，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 垂直于 $\boldsymbol{w}_1$：

$$\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 3 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 5 = 0 \tag{46}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 垂直于 $\boldsymbol{w}_2$：

$$\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 5 = 0 \tag{47}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 10 \times 0 + 10 \times 0 + 0 \times 5 = 0 \tag{48}$$

也就是说，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 垂直于 $\boldsymbol{w}_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2$ 张成的平面。

从投影的角度来看，向量 $\boldsymbol{y}$ 在“A-B 套餐”平面的投影为 $\boldsymbol{a}$。

“真是有向量的地方，就有几何啊！”，这是农夫自己学习线性代数悟出的一句真经。

23.7 黄鼠狼惊魂夜：“鸡飞兔脱”与超定方程组

夜黑风高，农夫突然听到鸡叫犬吠！

他赶紧捡了件衣服披在身上，提起油灯、夺门而出。在赶去鸡窝路上，他发现了黄鼠狼的脚印，“大事不妙！”

农夫慌忙跑到鸡兔窝，看到鸡飞兔跳、惊慌失措。

担心黄鼠狼抓走了鸡兔，农夫心急如焚，他举高油灯，凑近笼子，数了又数。几遍下来，数字都对不上，自己更是头晕眼花。

他找来隔壁的甲、乙、丙、丁四人，让甲、乙数头，让丙、丁数脚。过了一阵，甲说有 30 个头，乙说有 35 个头；丙说有 90 只脚，丁说有 110 只脚。

这可难坏了农夫，他可怎么估算鸡兔各自的数量？

他决定也用线性代数工具试试。

农夫先列出来方程组：

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 = 30 \\
x_1 + x_2 = 35 \\
2x_1 + 4x_2 = 90 \\
2x_1 + 4x_2 = 110
\end{cases}
\tag{49}
$$

农夫首先拿出图解法这个利器!

图 12 所示为四条直线对应的图像，发现它们一共存在 4 个交点，没有一组确切解。

代数角度，上述方程组叫做**超定方程组** (overdetermined system)。两个方程两个未知数，显然所需的方程组远超未知数数量。

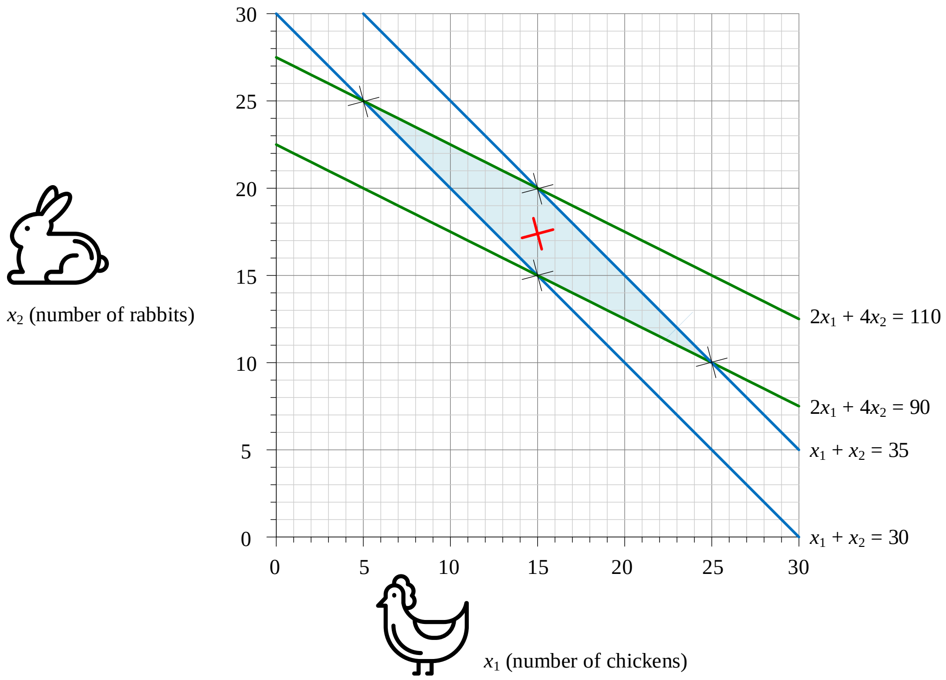


图 12. 超定方程组图像

农夫将 (49) 写成矩阵的形式:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 30 \\ 35 \\ 90 \\ 110 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}
\tag{50}
$$

也就是说:

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
\tag{51}
$$

$\boldsymbol{A}$ 不是方阵，显然不存在逆。

在《线性代数》这本经典中，农夫发现了一个全新的解法。他将 (51) 左右分别乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{52}$$

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为 2×2 方阵，且存在逆。

这样，(52) 可以整理为：

$$\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{53}$$

代入具体值，得到 $\boldsymbol{x}$ 的估算解：

$$\boldsymbol{x} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 30 \\ 35 \\ 90 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 18 & 34 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 465 \\ 865 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 17.5 \end{bmatrix} \tag{54}$$

农夫发现这个解恰好在图 12 四个交点构成平行四边形的中心位置，“神奇，真是神奇！”

Bk3_Ch23_4.py 完成上述矩阵运算。

微风丝丝缕缕，细雨点点滴滴。

微风夹着细雨，掠过田间地头，摇晃着杨柳梢，吹洗一池荷花。杨柳依依，荷风香气。微风轻轻悄悄地划过鸡舍兔笼，踮着脚尖走过睡熟的牧童。微风看了一眼灯下苦读的农夫，舞动着农夫书桌上跳跃的烛火。

折腾了一天一夜，小村似乎安静下来。

殊不知，大风起兮，云飞扬，远处一场风暴正在酝酿。

未完待续。